— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Activités dans un repère

1re année secondaire · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum nabdaw le chapitre numéro 6 : activités dans un repère. Le repère kif l'adresse : koll point ya5ou les nombres mte3ou. W b les nombres hedhouma, na7sbou des milieux, des vecteurs, des distances, bla règle w bla compas. Yalla nabdaw.

> point كل : l'adresse كيف le chapitre numéro 6 : activités dans un repère . le repère نبداو لْيوم ! عسلامة
> les nombres ياخو متاعو . و بـ les nombres هاذوما ، نحسبو des distances ، des vecteurs ، des milieux ، بلا
> règle و بلا compas . يالله نبداو.

Bonjour ! Aujourd'hui on commence le chapitre numéro 6 : activités dans un repère. Un repère, c'est comme une adresse : chaque point reçoit ses nombres. Et avec ces nombres, on calcule des milieux, des vecteurs, des distances, sans règle ni compas. Allons-y.

Un repère, c'est une adresse. Sur une droite, un point reçoit un nombre, son **abscisse** ; dans le plan, il en reçoit deux, ses **coordonnées**.

Ce chapitre apprend à **calculer avec ces adresses**. Un milieu devient une moyenne, un vecteur devient deux différences, deux vecteurs colinéaires deviennent des composantes proportionnelles. Dans un repère **orthonormé**, le théorème de Pythagore donne même les distances. Et un graphique se lit comme un repère : un trajet, une vitesse, deux droites parallèles.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Utiliser l'abscisse d'un point dans le repère $(O, \overrightarrow{OI})$ d'une droite

  > Utiliser l'abscisse d'un point dans le repère d'une droite.
  > *Utiliser l'abscisse d'un point dans le repère d'une droite.*

- Calculer une mesure algébrique $\overline{AB}$, une distance et un milieu sur une droite

  > Calculer une mesure algébrique A B barre, une distance et un milieu sur une droite.
  > *Calculer une mesure algébrique A B barre, une distance et un milieu sur une droite.*

- Lire les coordonnées d'un point et calculer les composantes d'un vecteur dans un repère du plan

  > Lire les coordonnées d'un point et calculer les composantes d'un vecteur dans un repère du plan.
  > *Lire les coordonnées d'un point et calculer les composantes d'un vecteur dans un repère du plan.*

- Prouver avec les composantes que deux vecteurs sont égaux ou colinéaires, et que trois points sont alignés

  > Prouver avec les composantes que deux vecteurs sont égaux ou colinéaires, et que trois points sont alignés.
  > *Prouver avec les composantes que deux vecteurs sont égaux ou colinéaires, et que trois points sont alignés.*

- Calculer une distance dans un repère orthonormé et reconnaître la nature d'une figure

  > Calculer une distance dans un repère orthonormé et reconnaître la nature d'une figure par le calcul.
  > *Calculer une distance dans un repère orthonormé et reconnaître la nature d'une figure par le calcul.*

- Lire un graphique, et reconnaître deux droites parallèles au coefficient de deux fonctions affines

  > Lire un graphique, et reconnaître deux droites parallèles au coefficient de deux fonctions affines.
  > *Lire un graphique, et reconnaître deux droites parallèles au coefficient de deux fonctions affines.*

---

1. ACTIVITÉ

Un point, un nombre

CE QU'IL DIT

3andna droite, ne5tarou zouz points : O, l'origine, w I. Le vecteur OI ya3tina le sens w l'unité : hedha houwa le repère. Tawa koll point 3al droite 3andou nombre mte3ou, l'abscisse mte3ou. A 3al isar mte3 O, b deux unités : le vecteur OA égale moins 2 fois le vecteur OI. W l'ay point M d'abscisse x : le vecteur OM égale x fois le vecteur OI.

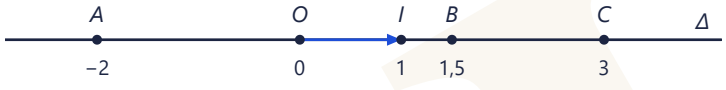
. le repère هو هذا : l'unité و le sens يعطينا I . le vecteur O I و ، points : O ، l'origine زوز نختارو ، droite عندنا
deux unités : le بـ ، O متاع اليسار على A . متاعو l'abscisse ، متاعو nombre عندو droite عالـ point كل توّا
point M d'abscisse x : le vecteur O M égale x fois le لأي و . vecteur O A égale moins 2 fois le vecteur O I
. vecteur O I

Sur une droite, on choisit deux points : O, l'origine, et I. Le vecteur O I donne le sens et l'unité : c'est le repère. Maintenant, chaque point de la droite a son nombre, son abscisse. A est à deux unités à gauche de O : le vecteur O A égale moins 2 fois le vecteur O I. Et pour n'importe quel point M d'abscisse x : le vecteur O M égale x fois le vecteur O I.

Sur une droite Δ, on choisit deux points distincts O et I. On dit que $(O, \overrightarrow{OI})$ est un **repère cartésien** de Δ : O est l'**origine**, et le vecteur $\overrightarrow{OI}$ donne à la fois le sens et l'unité.

Sur la figure, les points A, B et C ont pour abscisses respectives -2, $1{,}5$ et 3.

1. Écris les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.
2. Place le point D tel que $\overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$. Quelle est son abscisse ?
3. Soit M un point de Δ d'abscisse x. Écris $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.



Chaque point de la droite reçoit un nombre : son abscisse.

Une droite horizontale Δ munie du repère (O, OI) : le vecteur OI, tracé en bleu, va de l'origine O au point I, placé une unité à sa droite. Sur la même droite, le point A est deux unités à gauche de O, le point B une unité et demie à droite de O, et le point C trois unités à droite de O. Sous chaque point est écrite son abscisse : 0 pour O, 1 pour I, −2 pour A, 1,5 pour B et 3 pour C.

2. DÉFINITION

Abscisse d'un point, milieu d'un segment

CE QU'IL DIT

L'abscisse de M, houwa le nombre x elli le vecteur OM égale x fois le vecteur OI. W le milieu d'un segment ? Na3mlou la moyenne mte3 les deux abscisses : x A plus x B, le tout sur 2. Kima la moyenne mte3 zouz notes, bidhabt.

l'abscisse de M ، هو le nombre x اللي le vecteur O M égale x fois le vecteur O I . و le milieu d'un segment ؟ نعملو la moyenne متاع 2 le tout sur ، x B plus x A : les deux abscisses . كيما la moyenne متاع زوز notes ، بالضبط .

L'abscisse de M, c'est le nombre x tel que le vecteur O M égale x fois le vecteur O I. Et le milieu d'un segment ? On fait la moyenne des deux abscisses : x A plus x B, le tout sur 2. Exactement comme la moyenne de deux notes.

Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ et M un point de Δ. L'**abscisse** de M est l'unique réel x_M tel que

$$\overrightarrow{OM} = x_M \overrightarrow{OI}.$$

Le point O a pour abscisse 0 et le point I a pour abscisse 1.

Si A et B sont deux points de Δ, le **milieu** K du segment $[AB]$ a pour abscisse la **moyenne** des deux abscisses.

ABSCISSE DE M

$$\overrightarrow{OM} = x_M\,\overrightarrow{OI}$$

MILIEU DE [AB]

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Sur une droite munie d'un repère $(O, \overrightarrow{OI})$, l'abscisse du point A est -3 et celle du point B est 7. Quelle est l'abscisse du milieu K de $[AB]$?

La moyenne — On additionne les deux abscisses, puis on divise par deux : $x_K = 2$.

$$x_K = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2}$$

$$x_K = 2$$

$$x_K = 2$$

À ne pas faire : $x_K = \dfrac{x_B - x_A}{2} = \dfrac{7-(-3)}{2} = 5$ — $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 2$. La demi-différence donne la moitié de la **longueur** AB : c'est la distance de K à chaque extrémité, pas sa position sur la droite.

3. DÉFINITION

Mesure algébrique et distance sur une droite

CE QU'IL DIT

Zouz points A w B 3al droite. Le vecteur AB égale x B moins x A, fois le vecteur OI. El nombre hedha, x B moins x A, houwa la mesure algébrique de AB : nektbou AB barre. Rod belek mel ordre : l'arrivée moins le départ. W ki OI égale 1, la distance AB hiya la valeur absolue de (x B moins x A). W les points à une distance donnée de A ? Zouz, wa7ed men koll jiha.

زوز points A و B عالـ vecteur O I ، fois ، égale x B moins x A . droite . الـ nombre ، هذا x B
l'ordre : l'arrivée moins le من بالك رد . A B barre نكتبو : la mesure algébrique de A B هو ، moins x A
les points à une و . la valeur absolue de (x B moins x A) هي O I égale 1 ، la distance A B و كي . départ
زوز ، واحد من كل جيهة . distance donnée de A ؟

Deux points A et B sur la droite. Le vecteur A B égale x B moins x A, fois le vecteur O I. Ce nombre, x B moins x A, c'est la mesure algébrique de A B : on écrit A B barre. Attention à l'ordre : l'arrivée moins le départ. Et quand O I égale 1, la distance A B, c'est la valeur absolue de (x B moins x A). Et les points à une distance donnée de A ? Il y en a deux, un de chaque côté.

Soient A et B deux points de Δ, d'abscisses x_A et x_B. Alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{OI}.$$

Le réel $x_B - x_A$ s'appelle la **mesure algébrique** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et on la note $\overline{AB}$. Elle se lit « de A vers B » : abscisse d'**arrivée** moins abscisse de **départ**. Son signe dit le sens : positif si l'on va dans le sens de $\overrightarrow{OI}$, négatif sinon.

Quand $OI = 1$, on dit que le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est **unitaire** ; la distance AB est alors la mesure algébrique sans son signe : $AB = |x_B - x_A|$.

Inversement, pour un réel $d > 0$, il y a **deux** points M de Δ tels que $AM = d$, un de chaque côté de A : leurs abscisses sont $x_A + d$ et $x_A - d$. Et les points M tels que $AM < d$ sont ceux du segment entre ces deux points : $|x_M - x_A| < d$ équivaut à $x_A - d < x_M < x_A + d$.

Deux conséquences servent tout le temps :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $x_B - x_A = x_D - x_C$;
- $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ équivaut à $x_B - x_A = k\,(x_D - x_C)$.

MESURE ALGÉBRIQUE

$$\overline{AB} = x_B - x_A$$

DISTANCE, QUAND OI = 1

$$AB = |x_B - x_A|$$

VECTEURS COLINÉAIRES

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD} \iff \overline{AB} = k\,\overline{CD}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Sur une droite munie d'un repère $(O, \overrightarrow{OI})$ avec $OI = 1$, l'abscisse du point A est -2 et celle du point B est $3{,}5$. Calculer $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ et la distance AB. Quels sont les points M de la droite tels que $AM = 2$?

De A vers B — On arrive en B, on part de A.

$\overline{AB} = 3{,}5 - (-2) = 5{,}5$

De B vers A — On échange les rôles : le signe change.

$\overline{BA} = -2 - 3{,}5 = -5{,}5$

La distance — Une distance n'a pas de signe.

$AB = |5{,}5| = 5{,}5$

Deux points — $AM = |x_M - (-2)| = |x_M + 2|$: la mesure algébrique $\overline{AM}$ vaut donc 2 ou -2. Il y a un point de chaque côté de A.

$x_M + 2 = 2$ ou $x_M + 2 = -2 \iff x_M = 0$ ou $x_M = -4$

$$\overline{AB} = 5{,}5\ ;\ \overline{BA} = -5{,}5\ ;\ AB = 5{,}5\ ;\ x_M = 0 \text{ ou } x_M = -4$$

À ne pas faire : $\overline{AB} = x_A - x_B$ — $\overline{AB} = x_B - x_A$. On part de A pour arriver en B : c'est l'abscisse d'**arrivée** moins celle de départ. Inverser l'ordre change le signe, donc le sens du vecteur.

À ne pas faire : A d'abscisse 3, B d'abscisse -2 : $AB = -2 - 3 = -5$ — $AB = |-2-3| = 5$. Une distance est toujours positive. La mesure algébrique porte un signe ; la distance l'efface, avec la valeur absolue.

À ne pas faire : $AM = 2$ et $x_A = -2$: $x_M = -2 + 2 = 0$, un seul point. — $x_M = 0$ ou $x_M = -4$: deux points, un de chaque côté de A.. Une distance ne dit pas de quel côté on va. Sur la droite, on s'éloigne de A de 2 unités vers la droite **ou** vers la gauche : il y a deux points.

À ne pas faire : $x_B = 3$ et $BM < 1$: $x_M - 3 < 1$, donc $x_M < 4$. — $|x_M - 3| < 1$, donc $2 < x_M < 4$.. Une distance se lit dans les deux sens : M peut être à gauche **ou** à droite de B. La valeur absolue donne deux inégalités, et les points cherchés forment un segment autour de B, pas une demi-droite.

---

4. ACTIVITÉ

Deux axes, deux nombres

CE QU'IL DIT

Fil plan, yelzemna zouz axes : OI w OJ, mouch lezem perpendiculaires. Bech n9raw le point M, nersmou zouz parallèles lel axes, w nousslou l N w l P. ONMP parallélogramme, donc le vecteur OM égale le vecteur ON plus le vecteur OP. Hna le vecteur ON égale 3 fois le vecteur OI, w le vecteur OP égale 2 fois le vecteur OJ. Donc le vecteur OM égale 3 fois OI plus 2 fois OJ : les coordonnées de M houma 3 w 2.

في الـ plan ، يلزمنا زوج axes : O I و O J ، موش لازم perpendiculaires . باش نقراو le point M ، نرسمو زوج parallèles للـ axes ، و نوصلو لـ N و لـ P . O N M P parallélogramme ، donc le vecteur O M égale le vecteur O N plus le vecteur O P . هنا le vecteur O N égale 3 fois le vecteur O I ، و le vecteur O P égale 2 fois le vecteur O J . donc le vecteur O M égale 3 fois O I plus 2 fois O J : les coordonnées de M هوما 3 و 2 .

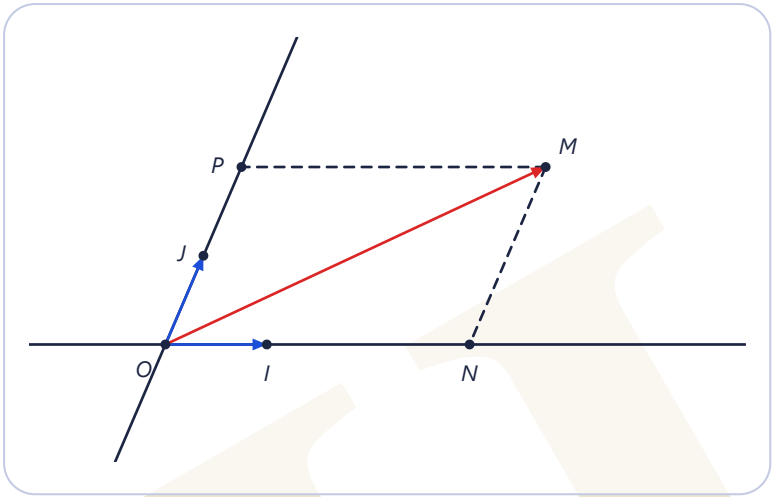
Dans le plan, il faut deux axes : O I et O J, pas forcément perpendiculaires. Pour lire le point M, on trace deux parallèles aux axes, et on arrive en N et en P. O N M P est un parallélogramme, donc le vecteur O M égale le vecteur O N plus le vecteur O P. Ici, le vecteur O N égale 3 fois le vecteur O I, et le vecteur O P égale 2 fois le vecteur O J. Donc le vecteur O M égale 3 fois O I plus 2 fois O J : les coordonnées de M sont 3 et 2.

Trois points O, I et J **non alignés** donnent un repère cartésien du plan, noté $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. La droite (OI) est l'**axe des abscisses**, la droite (OJ) l'**axe des ordonnées**.

Soit M un point du plan. La parallèle à (OJ) passant par M coupe (OI) en N ; la parallèle à (OI) passant par M coupe (OJ) en P.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ONMP$? Justifie l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.
2. Sur la figure, $\overrightarrow{ON} = 3\,\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OP} = 2\,\overrightarrow{OJ}$. Écris $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et de $\overrightarrow{OJ}$.

3. Les axes de la figure ne sont pas perpendiculaires. La construction marche-t-elle quand même ?



Deux parallèles aux axes, et le point M se lit : 3 et 2.

Un repère du plan dont les deux axes ne sont pas perpendiculaires : l'axe des abscisses est horizontal et passe par O et I ; l'axe des ordonnées part de O en montant vers la droite et passe par J. Les vecteurs OI et OJ sont tracés en bleu. Un point M est placé en haut à droite. La parallèle à (OJ) menée par M, en pointillés, coupe l'axe des abscisses en N, à trois unités de O ; la parallèle à (OI) menée par M, en pointillés, coupe l'axe des ordonnées en P, à deux unités de O. Le vecteur OM, tracé en rouge, est la diagonale du parallélogramme ONMP.

5. DÉFINITION

Coordonnées d'un point

CE QU'IL DIT

Fil plan, el point 3andou zouz nombres : l'abscisse x w l'ordonnée y. Le vecteur OM égale x fois le vecteur OI plus y fois le vecteur OJ. Nektbou M de coordonnées x w y, w dima l'abscisse 9bal l'ordonnée. Point 3al axe des ordonnées, l'abscisse mte3ou nulle.

l'ordonnée i grec . le vecteur O M égale x fois le و nombres : l'abscisse x عندو زوز point الـ ، plan الـ في
قبل l'abscisse و ديما ، i grec و M de coordonnées x نكتبو . vecteur O I plus i grec fois le vecteur O J
. nulle متاعو axe des ordonnées ، l'abscisse عالـ l'ordonnée . point

Dans le plan, un point a deux nombres : son abscisse x et son ordonnée i grec. Le vecteur O M égale x fois le vecteur O I plus i grec fois le vecteur O J. On écrit M de coordonnées x et i grec, et toujours l'abscisse en premier. Un point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle.

Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère cartésien du plan et M un point du plan. Le **couple de coordonnées** de M est l'unique couple de réels $(x\,;y)$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}.$$

Le réel x est l'**abscisse** de M, le réel y son **ordonnée**. On écrit $M(x\,;y)$, l'abscisse toujours en premier.

COORDONNÉES DE M

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ} \iff M(x\,;y)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on sait que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est égal à $-2\,\overrightarrow{OI} + 5\,\overrightarrow{OJ}$ et que le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est égal à $4\,\overrightarrow{OJ}$. Donner les coordonnées de A et de B.

Le point A — Le coefficient du vecteur $\overrightarrow{OI}$ donne l'abscisse, celui du vecteur $\overrightarrow{OJ}$ donne l'ordonnée.
$A(-2\,;5)$

Le coefficient absent — Dans l'écriture du vecteur $\overrightarrow{OB}$, le vecteur $\overrightarrow{OI}$ n'apparaît pas : son coefficient est 0, donc l'abscisse de B est nulle.
$\overrightarrow{OB} = 0\,\overrightarrow{OI} + 4\,\overrightarrow{OJ}$
$B(0\,;4)$

$$A(-2\,;5) \quad ; \quad B(0\,;4)$$

À ne pas faire : $B(4\,;0)$ — $B(0\,;4)$. Le 4 multiplie le vecteur $\overrightarrow{OJ}$: c'est l'ordonnée. Le point B est sur l'axe des ordonnées, et son abscisse, absente de l'écriture, vaut 0.

---

6. DÉFINITION

Composantes d'un vecteur

CE QU'IL DIT

Le vecteur AB, na3mlou l'arrivée moins le départ, ligne l koll axe : x B moins x A el fou9, y B moins y A el louta. Hedhouma les composantes mte3ou. Fil figure, men A l B, nemchiw 3 lel imin w ntal3ou 2 : le vecteur AB 3andou les composantes 3 w 2. W deux vecteurs égaux 3andhom nafs les composantes.

i grec B moins i grec ، الفوق axe : x B moins x A لكل l'arrivée moins le départ ، ligne نعملو ، le vecteur A B le vecteur A : 2 نطلعو و لليمين 3 نمشيو ، B لـ A من ، figure الـ في . متاعو les composantes هاذوما . اللوطة A عندو B 3 les composantes و 2 . و deux vecteurs égaux عندهم نفس les composantes .

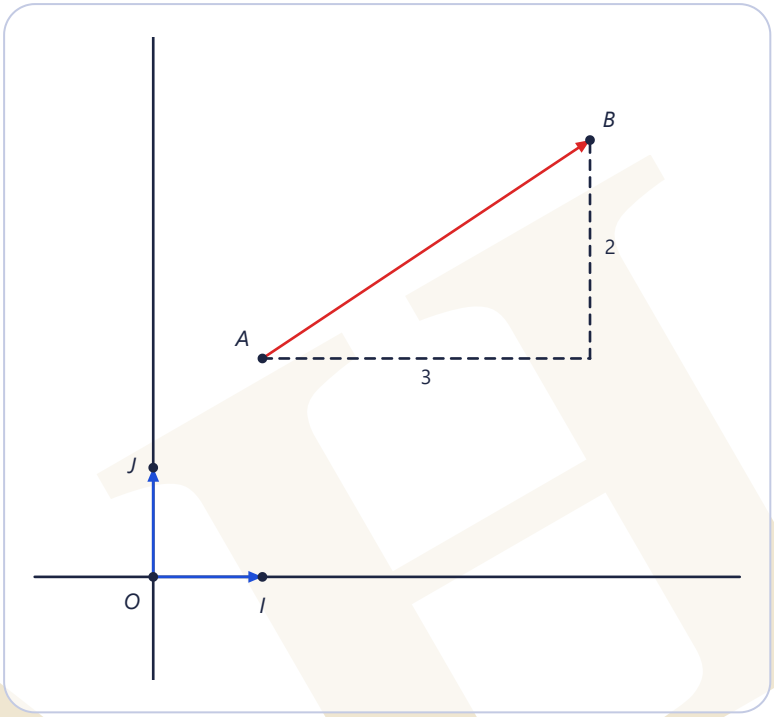
Pour un vecteur A B, on fait arrivée moins départ, une ligne pour chaque axe : x B moins x A en haut, i grec B moins i grec A en bas. Ce sont ses composantes. Sur la figure, de A à B, on avance de 3 et on monte de 2 : le vecteur A B a pour composantes 3 et 2. Et deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes.

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan. Alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{OJ}.$$

Le couple $(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$ est le couple de **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On l'écrit en colonne, à côté du vecteur.

Comme sur la droite, c'est **arrivée moins départ**, une ligne pour chaque axe. Et deux vecteurs sont **égaux** exactement quand ils ont les mêmes composantes.



De A à B : 3 vers la droite, 2 vers le haut.

Un repère orthonormé d'origine O, avec les vecteurs OI et OJ en bleu. Le point A a pour coordonnées (1 ; 2) et le point B (4 ; 4). Le vecteur AB est tracé en rouge. En pointillés, un chemin en escalier va de A vers B : trois unités vers la droite, marquées 3, puis deux unités vers le haut, marquées 2. Ce sont les deux composantes du vecteur AB.

COMPOSANTES DE AB

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

VECTEURS ÉGAUX

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$$

DÉMONSTRATION

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Or $\overrightarrow{OA} = x_A\,\overrightarrow{OI} + y_A\,\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B\,\overrightarrow{OI} + y_B\,\overrightarrow{OJ}$. En regroupant :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{OJ}.$$

Comme le couple de coordonnées d'un point, le couple de composantes d'un vecteur est **unique** : deux vecteurs égaux ont donc les mêmes composantes, et réciproquement.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère, on donne $A(-1\,;4)$, $B(3\,;1)$ et $E(2\,;-2)$. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis les coordonnées du point F tel que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient égaux.

Arrivée moins départ — On retranche les coordonnées de A : $3-(-1)=4$ en abscisse, $1-4=-3$ en ordonnée.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

Mêmes composantes — Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux : leurs composantes le sont aussi, ligne par ligne.

$x_F-2=4 \quad ; \quad y_F-(-2)=-3$

$x_F=6 \quad ; \quad y_F=-5$

$$F(6\,;-5)$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\end{pmatrix}$ — $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$. Ce serait le vecteur $\overrightarrow{BA}$, de sens contraire. On retranche toujours les coordonnées du point de **départ**.

---

7. PROPRIÉTÉ

Coordonnées du milieu d'un segment

CE QU'IL DIT

Le milieu d'un segment fil plan : na3mlou la moyenne 3la koll axe. x K égale x A plus x B, le tout sur 2, w y K égale y A plus y B, le tout sur 2. Hiya nafs la règle mte3 la droite, marrtin.

في الـ plan : نعملو la moyenne على كل axe . x K égale x A plus x B ، le tout sur 2 ، le milieu d'un segment هي نفس la règle متاع la droite ، مرّتين . i grec K égale i grec A plus i grec B ، le tout sur 2 و

Le milieu d'un segment, dans le plan : on fait la moyenne sur chaque axe. x K égale x A plus x B, le tout sur 2, et i grec K égale i grec A plus i grec B, le tout sur 2. C'est la règle de la droite, appliquée deux fois.

Dans un repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées les **moyennes** des coordonnées de A et de B :

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2} \quad ; \quad y_K=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

C'est la règle de la droite, appliquée à chacun des deux axes.

La même égalité se lit dans l'autre sens. Si K est le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire si B est le **symétrique** de A par rapport à K, alors $x_B=2\,x_K-x_A$ et $y_B=2\,y_K-y_A$.

MILIEU DE [AB]

$$K\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

DÉMONSTRATION

K est le milieu de $[AB]$ équivaut à $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{KB}$. Composante par composante :

$$x_K - x_A = x_B - x_K \iff 2\,x_K = x_A + x_B,$$

et de même pour l'ordonnée.

EXEMPLE TRAITÉ

On donne $A(2\,;5)$ et $B(-4\,;1)$. Quelles sont les coordonnées du milieu K de $[AB]$?

L'abscisse —

$$x_K = \frac{2 + (-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

L'ordonnée —

$$y_K = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$K(-1\,;3)$$

À ne pas faire : $K(-2\,;3)$ — $K(-1\,;3)$. La somme $2 + (-4) = -2$ n'est que la moitié du travail : il faut la diviser par 2, pour l'abscisse comme pour l'ordonnée.

8. PROPRIÉTÉ

Vecteurs colinéaires, points alignés

CE QU'IL DIT

Deux vecteurs colinéaires, les composantes mte3hom proportionnelles : n3addiw men vecteur l vecteur ki nodhorbou fi nafs le nombre k. Bech net2akkdou, le produit en croix, kima fi tableau de proportionnalité. W trois points A, B, C alignés ki les vecteurs AB w AC colinéaires. W les droites AB w CD parallèles ki les vecteurs AB w CD colinéaires.

deux vecteurs colinéaires ، les composantes متاعهم proportionnelles : نعدّيو من vecteur لـ vecteur كي
، le produit en croix ، باش نتأكّدو . le nombre k نضربو في نفس
و . tableau de proportionnalité كيما في
trois points A ، B ، C alignés كي
و les vecteurs A B كي A C colinéaires و les droites A B و C D parallèles كي
و les vecteurs A B C D colinéaires .

Deux vecteurs colinéaires ont des composantes proportionnelles : on passe de l'un à l'autre en multipliant par un même nombre k. Pour le vérifier, le produit en croix, comme dans un tableau de proportionnalité. Et trois points A, B, C sont alignés quand les vecteurs A B et A C sont colinéaires. De même, les droites A B et C D sont parallèles quand les vecteurs A B et C D sont colinéaires.

Pour un réel k, les composantes de $k\,\overrightarrow{AB}$ sont celles de $\overrightarrow{AB}$ multipliées par k. Donc $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ équivaut à $x_B - x_A = k\,(x_D - x_C)$ et $y_B - y_A = k\,(y_D - y_C)$.

Autrement dit, deux vecteurs sont **colinéaires** quand leurs composantes sont **proportionnelles**. On le vérifie comme dans un tableau de proportionnalité, par le **produit en croix** : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires lorsque $x\,y' = x'\,y$.

Enfin, trois points A, B et C sont **alignés** exactement quand les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

De même, les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** exactement quand les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

COMPOSANTES PROPORTIONNELLES

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD} \iff \begin{cases} x_B - x_A = k\,(x_D - x_C) \\ y_B - y_A = k\,(y_D - y_C) \end{cases}$$

PRODUIT EN CROIX

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \iff x\,y' = x'\,y$$

EXEMPLE TRAITÉ

On donne $A(2\,;3)$, $E(-2\,;1)$ et $C(3\,;2)$. Les points A, E et C sont-ils alignés ? Soit $B(1\,;y)$: pour quelle valeur de y les points A, B et C sont-ils alignés ?

Les composantes — Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour composantes -4 et -2 ; le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour composantes 1 et -1.

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le produit en croix — $(-4) \times (-1) = 4$ et $1 \times (-2) = -2$: les produits diffèrent. Les composantes ne sont pas proportionnelles, donc A, E et C ne sont pas alignés.

$$(-4) \times (-1) \neq 1 \times (-2)$$

Le point B — Il faut que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, de composantes -1 et $y-3$, soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$$(-1) \times (-1) = 1 \times (y-3)$$

$$1 = y - 3 \iff y = 4$$

$$A, E, C \text{ ne sont pas alignés ; } y = 4$$

À ne pas faire : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires : on ajoute 2 à chaque composante. — $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires : on multiplie chaque composante par 2.. Colinéaire veut dire proportionnel : on **multiplie** par un même réel k, on n'ajoute pas. Le produit en croix le montre : $2 \times 5 = 10$ et $4 \times 3 = 12$.

9. THÉORÈME

Distance dans un repère orthonormé

CE QU'IL DIT

Repère orthonormé : les axes perpendiculaires, w OI égale OJ égale 1. Wa9tha la distance AB, hiya Pythagore. Nersmou le triangle rectangle : côté horizontal, la valeur absolue de (x B moins x A), w côté vertical, la valeur absolue de (y B moins y A). AB égale la racine carrée de la somme des deux carrés. Ama ken fi repère orthonormé.

هي ، la distance A B وقتها . O I égale O J égale 1 و ، repère orthonormé : les axes perpendiculaires côté و ، le triangle rectangle : côté horizontal ، la valeur absolue de (x B moins x A) نرسمو . Pythagore vertical ، la valeur absolue de (i grec B moins i grec A) . A B égale la racine carrée de la somme des deux carrés . أما كان في repère orthonormé .

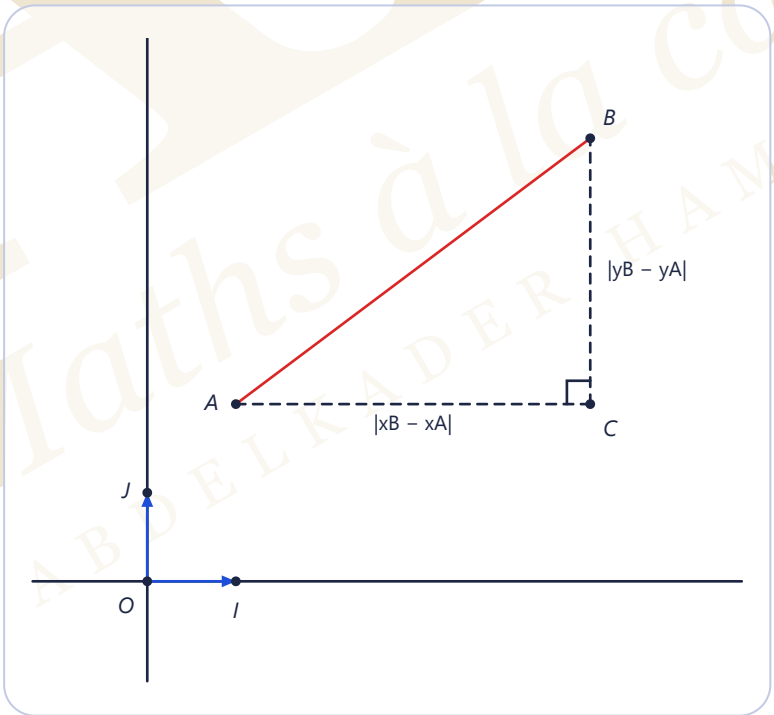
Un repère orthonormé : les axes sont perpendiculaires, et O I égale O J égale 1. Alors la distance A B, c'est Pythagore. On trace le triangle rectangle : un côté horizontal, la valeur absolue de (x B moins x A), un côté vertical, la valeur absolue de (i grec B moins i grec A). A B égale la racine carrée de la somme des deux carrés. Mais seulement dans un repère orthonormé.

Le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est dit **orthogonal** si les axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, et **orthonormé** si, de plus, $OI = OJ = 1$.

Dans un repère **orthonormé**, la distance des points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

En particulier, la distance d'un point $M(x_M\,;y_M)$ à l'origine est $OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$.



Le triangle rectangle caché derrière la formule de la distance.

Un repère orthonormé d'origine O, les vecteurs unitaires OI et OJ en bleu, perpendiculaires. Le point A est en bas à gauche, le point B en haut à droite. La parallèle à l'axe des abscisses menée par A et la parallèle à l'axe des ordonnées menée par B, en pointillés, se coupent en C. Le triangle ACB est rectangle en C : le côté horizontal [AC] mesure |xB − xA|, le côté vertical [CB] mesure |yB − yA|, et l'hypoténuse [AB] est tracée en rouge.

REPÈRE ORTHONORMÉ

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

DISTANCE À L'ORIGINE

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$$

DÉMONSTRATION

La parallèle à (OI) passant par A et la parallèle à (OJ) passant par B se coupent en $C(x_B\,;y_A)$. Les axes étant perpendiculaires, le triangle ACB est rectangle en C. Le repère étant normé, $AC = |x_B - x_A|$ et $CB = |y_B - y_A|$. Le théorème de Pythagore donne

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2,$$

et AB, qui est positif, en est la racine carrée.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;-4)$. Calculer la distance AB.

Les écarts —

$x_B - x_A = 3 - (-1) = 4 \quad ; \quad y_B - y_A = -4 - 2 = -6$

La formule — Le carré efface le signe : $(-6)^2 = 36$.

$AB = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

On simplifie — On sort le carré parfait : $52 = 4 \times 13$, donc $AB = 2\sqrt{13}$.

$AB = 2\sqrt{13}$

$$AB = 2\sqrt{13}$$

À ne pas faire : $AB = \sqrt{4^2} + \sqrt{(-6)^2} = 4 + 6 = 10$ — $AB = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$. La racine d'une somme n'est pas la somme des racines. On additionne les carrés **sous** la racine, et seulement après on prend la racine.

À ne pas faire : $AB = 4^2 + (-6)^2 = 52$ — $AB^2 = 52$, donc $AB = \sqrt{52}$. La somme des carrés donne AB^2, pas AB : il reste à prendre la racine carrée.

10. MÉTHODE

Reconnaître une figure par le calcul

CE QU'IL DIT

B les coordonnées, na3rfou la figure bel 7sab. Parallélogramme : deux vecteurs égaux, walla des diagonales 3andhom nafs le milieu. Triangle rectangle : les carrés des trois côtés, w la réciproque de Pythagore 3la akbar wa7ed. Ama 9bal koll chay, figure : hiya elli t9ollek chnouwa tthabbet.

des diagonales وﻷا ، parallélogramme : deux vecteurs égaux . بالحساب la figure نعرفو ، les coordonnées بـ
على la réciproque de Pythagore و ، le milieu . triangle rectangle : les carrés des trois côtés عندهم نفس

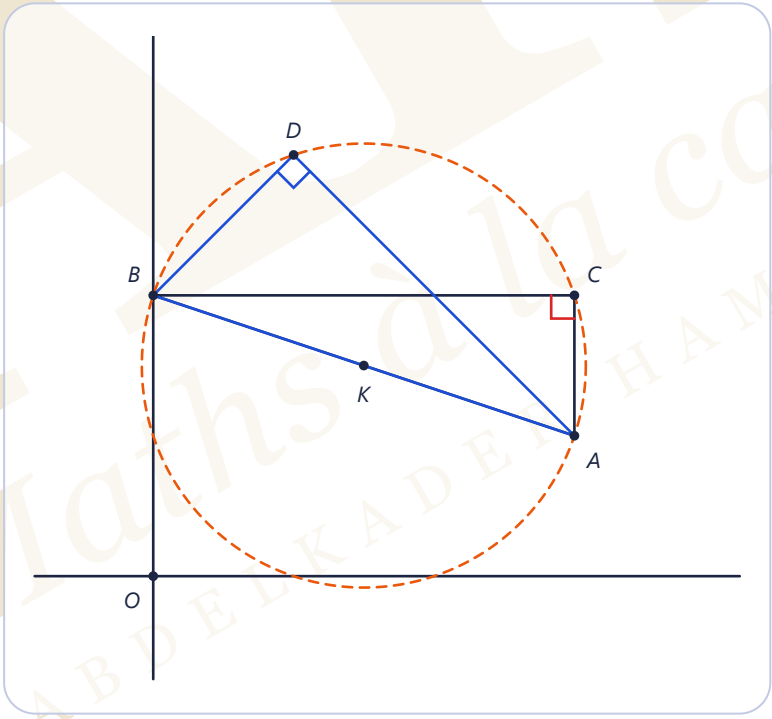
أكبر واحد . أما قبل كل شيء ، figure : هي اللي تقلّك شنوّة تثبّت .

Avec des coordonnées, on reconnaît une figure par le calcul. Un parallélogramme : deux vecteurs égaux, ou des diagonales de même milieu. Un triangle rectangle : les carrés des trois côtés, et la réciproque de Pythagore sur le plus grand. Mais d'abord, toujours, une figure : c'est elle qui dit quoi vérifier.

Les coordonnées transforment une question de géométrie en calculs. Trois réflexes :

1. **Un parallélogramme ?** Compare deux vecteurs : $ABCD$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ou lorsque ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
2. **Un triangle rectangle ?** Dans un repère orthonormé, calcule les carrés des trois côtés et teste la réciproque du théorème de Pythagore sur le **plus grand**.
3. **Isocèle, losange, rectangle, carré ?** Compare des longueurs. Un triangle qui a deux côtés de même longueur est isocèle. Un **parallélogramme** qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange ; un **parallélogramme** dont les diagonales ont même longueur est un rectangle ; les deux à la fois : un carré.

Et avant tout calcul, **une figure** : c'est elle qui dit quoi vérifier.



Deux angles droits qui regardent le même segment [AB].

Un repère orthonormé d'origine O, dont seuls les deux axes sont tracés. Les points A(3 ; 1), B(0 ; 2), C(3 ; 2) et D(1 ; 3) sont placés : B est sur l'axe des ordonnées, C juste au-dessus de A, D en haut. Le triangle ABC est tracé en noir, avec l'angle droit marqué en C. Le triangle ABD, en bleu, a l'angle droit marqué en D. Un cercle en pointillés, de centre K, milieu de [AB], passe par les quatre points A, B, C et D.

PARALLÉLOGRAMME

$$ABCD \text{ parallélogramme} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on donne $A(3\,;1)$, $B(0\,;2)$, $C(3\,;2)$ et $D(1\,;3)$. Quelle est la nature du triangle ABC ? Les points A, B, C et D sont-ils sur un même cercle ?

Les trois côtés —
$AC^2 = 0^2 + 1^2 = 1 \quad ; \quad BC^2 = 3^2 + 0^2 = 9 \quad ; \quad AB^2 = (-3)^2 + 1^2 = 10$

Pythagore — Le plus grand carré, AB^2, est la somme des deux autres : le triangle ABC est rectangle en C, en face de $[AB]$.
$AC^2 + BC^2 = 1 + 9 = 10 = AB^2$

L'autre triangle — Même démarche pour le triangle ABD : $AD^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$ et $BD^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.
$AD^2 + BD^2 = 8 + 2 = 10 = AB^2$

Le cercle — Les triangles ABC et ABD sont rectangles, en C et en D, d'hypoténuse commune $[AB]$. Un triangle rectangle est inscrit dans le cercle de diamètre son hypoténuse : A, B, C et D sont sur le cercle de diamètre $[AB]$, de centre K, milieu de $[AB]$.

ABC est rectangle en C ; A, B, C, D sont sur le cercle de diamètre $[AB]$

À ne pas faire : $AB^2 + AC^2 = 10 + 1 = 11 \neq BC^2$, donc ABC n'est pas rectangle. — On teste le **plus grand** carré : $AC^2 + BC^2 = 10 = AB^2$.. La réciproque de Pythagore compare le plus long côté à la somme des deux autres. Additionner deux carrés pris au hasard ne prouve rien.

11. ACTIVITÉ

Lire un trajet sur un graphique

CE QU'IL DIT

Fil graphique hedha, n9raw zouz trajets. El cycliste yo5rej fi l'instant zéro, w el karhba une heure ba3dou, men nafs el blasa. El cycliste ya3mel 60 kilomètres fi 3 heures : 20 kilomètres par heure. El karhba ta3mel 90 kilomètres fi une heure et demie : 60 kilomètres par heure. Les deux segments yetla9aw fi R : hedhi la rencontre, ba3d une heure et demie, b 30 kilomètres mel départ.

في الـ graphique هذا ، نقراو زوز trajets . الـ cycliste يخرج في l'instant zéro ، و الكرهبة une heure بعدو ، من نفس البلاصة . الـ cycliste يعمل 60 kilomètres في 3 heures : 20 kilomètres par heure . الكرهبة تعمل 90 kilomètres في une heure et demie : 60 kilomètres par heure . les deux segments يتلاقاو في R : هاذي la rencontre ، بعد une heure et demie ، بـ 30 kilomètres من الـ départ .

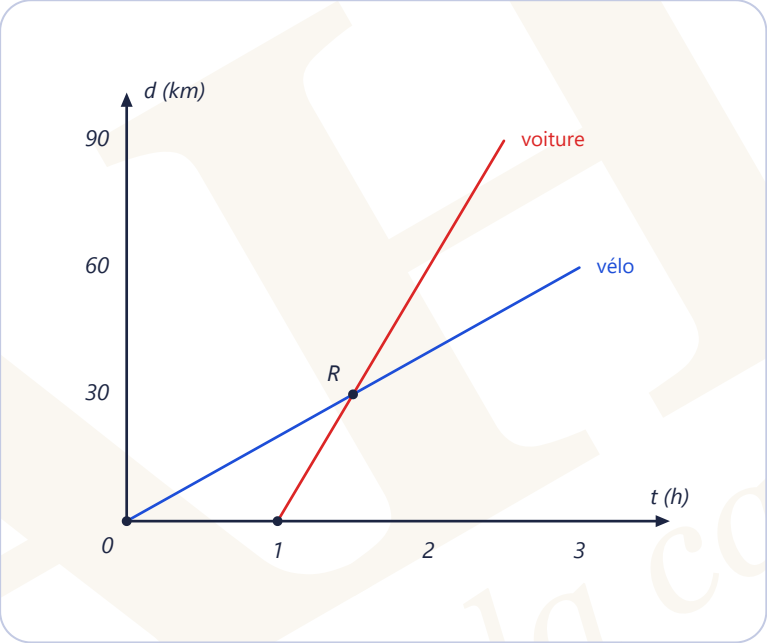
Sur ce graphique, on lit deux trajets. Le cycliste part à l'instant zéro, la voiture une heure plus tard, du même endroit. Le cycliste fait 60 kilomètres en 3 heures : 20 kilomètres par heure. La voiture fait 90 kilomètres en une heure et demie : 60 kilomètres par heure. Les deux segments se croisent en R : c'est la rencontre, au bout d'une heure et demie, à 30 kilomètres du départ.

Un cycliste et une voiture partent du même endroit, sur la même route. Le graphique donne la distance d parcourue, en kilomètres, en fonction du temps t, en heures, compté depuis le départ du

cycliste.

1. À quel instant part chacun des deux ?
2. Le cycliste parcourt 60 km en 3 heures ; la voiture parcourt 90 km entre $t = 1$ et $t = 2{,}5$. Calcule la vitesse de chacun, en km/h.
3. Lis sur le graphique l'instant et la position de leur rencontre, puis vérifie-les par le calcul.

Sur ce graphique, un segment de droite, c'est une vitesse **constante** : la distance parcourue est alors une fonction affine du temps.



Le cycliste en bleu, la voiture en rouge.

Un graphique distance-temps. L'axe horizontal porte le temps t en heures, gradué 1, 2, 3 ; l'axe vertical porte la distance d en kilomètres, gradué 30, 60, 90. Le trajet du cycliste, en bleu, est un segment qui part de l'origine et monte jusqu'au point de coordonnées (3 ; 60). Le trajet de la voiture, en rouge, part du point (1 ; 0) et monte beaucoup plus vite, jusqu'au point (2,5 ; 90). Les deux segments se croisent en un point R, situé à mi-chemin entre les graduations 1 et 2 de l'axe du temps, et à la hauteur de la graduation 30 de l'axe des distances. Aucune valeur n'est écrite à côté de R : c'est à l'élève de les lire.

12. PROPRIÉTÉ

Droites parallèles et fonctions affines

CE QU'IL DIT

Zouz fonctions affines 3andhom nafs le coefficient a : les droites mte3hom parallèles. 3lech ? Bin x égale 0 w x égale 1, koll wa7da tzid 1 w tatla3 b a. Nafs les composantes, vecteurs égaux, droites parallèles. W la constante, ma ta3mel ken t7arrek la droite lel fou9 walla lel louta.

زوز fonctions affines عندهم نفس le coefficient a : les droites متاعهم parallèles . علاش ؟ بين x égale 0 و x égale 1 ، كل وحدة تزيد 1 و تطلع بـ a . نفس droites parallèles ، vecteurs égaux ، les composantes . و la

Maths à la carte — Activités dans un repère · fiche de relecture

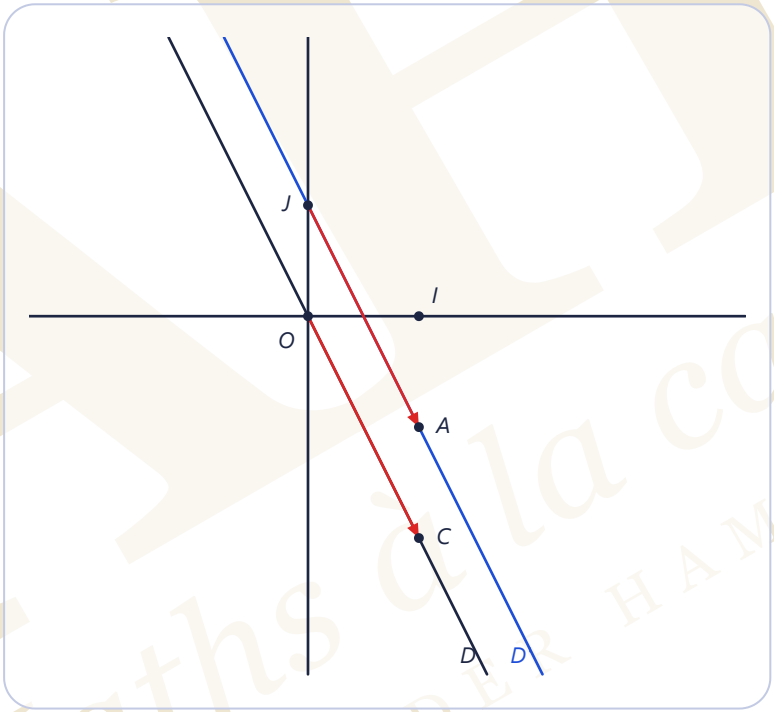
constante ، ما تعمل كان تحرّك la droite للفوق ولّا للّوطة .

Deux fonctions affines qui ont le même coefficient a : leurs droites sont parallèles. Pourquoi ? Entre x égale 0 et x égale 1, chacune avance de 1 et monte de a. Mêmes composantes, vecteurs égaux, droites parallèles. La constante, elle, ne fait que glisser la droite vers le haut ou vers le bas.

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, soient f et g deux fonctions affines de **même coefficient** a : $f(x) = ax + b$ et $g(x) = ax + c$.

Leurs représentations graphiques D et D' sont **parallèles**. Le coefficient a fixe la direction de la droite ; la constante ne fait que la glisser vers le haut ou vers le bas.

À l'inverse, si les coefficients de f et de g sont **différents**, leurs représentations graphiques ont deux directions différentes : les droites sont **sécantes**.



Même coefficient −2 : même direction, droites parallèles.

Un repère d'origine O, avec ses deux axes. La droite D, représentation de f(x) = −2x, passe par O et par C(1 ; −2). La droite D', en bleu, représentation de g(x) = −2x + 1, passe par J(0 ; 1) et par A(1 ; −1). Les deux droites descendent avec la même pente, l'une au-dessus de l'autre. Les vecteurs OC et JA, tracés en rouge, font le même pas : une unité vers la droite, deux unités vers le bas.

MÊME COEFFICIENT

$$f(x) = ax + b,\ g(x) = ax + c \ \Rightarrow\ D \text{ et } D' \text{ sont parallèles}$$

DÉMONSTRATION

D passe par $E(0\,;b)$ et $F(1\,;a+b)$; D' passe par $G(0\,;c)$ et $H(1\,;a+c)$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ ont les mêmes composantes :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}.$$

Ils sont égaux, donc colinéaires : les droites (EF) et (GH), c'est-à-dire D et D', sont parallèles.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère, D représente $f(x) = -2x$ et D' représente $g(x) = -2x + 1$. Sur quelle droite se trouve le point $A(1\,;-1)$? Comparer les vecteurs $\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{OC}$, où $J(0\,;1)$ et $C(1\,;-2)$.

Le point A — $g(1) = -2 \times 1 + 1 = -1$: c'est l'ordonnée de A, donc A est sur D'. De même $g(0) = 1$: J est sur D'. Et $f(1) = -2$: C est sur D.

$$g(1) = -1 \quad ; \quad g(0) = 1 \quad ; \quad f(1) = -2$$

Les vecteurs — Le vecteur $\overrightarrow{JA}$ a pour composantes $1 - 0 = 1$ et $-1 - 1 = -2$; le vecteur $\overrightarrow{OC}$ a pour composantes 1 et -2.

$$\overrightarrow{JA}\begin{pmatrix}1-0\\-1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

La conclusion — Mêmes composantes : les vecteurs $\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont égaux. Les droites D' et D ont donc la même direction : elles sont parallèles.

$$A \in D' \; ; \; \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{OC} \; ; \; D \parallel D'$$

$$A \in D' \; ; \; \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{OC} \; ; \; D \parallel D'$$

À ne pas faire : $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 3x + 2$: mêmes nombres, donc droites parallèles. — Seul le **coefficient** de x compte : $2 \neq 3$, les droites sont sécantes.. Le coefficient fixe la direction ; la constante ne fait que déplacer la droite. Deux coefficients différents donnent deux directions différentes.

13. MÉTHODE

Choisir son repère

CE QU'IL DIT

Sa3at le repère mouch mo3ti : ne5tarouh a7na fil figure. Hna, I w J les milieux de AB w de AC, w na5dhou le repère A, AC, AB. A de coordonnées 0 w 0, C 1 w 0, B 0 w 1. Les milieux yet7asbou wa7adhom, w nel9aw le vecteur IJ égale un demi fois le vecteur BC : hedhi la droite des milieux, démontrée bel 7sab. Rod belek : le repère hedha, en général, mouch orthonormé : la formule de la distance ma temchich fih.

ساعات le repère موش معطي : نختاروه أحنا في الـ figure . هنا ، I و J les milieux de A B و de A C ، و ناخذو le repère A ، A C ، A B . A de coordonnées 0 و 0 ، C 1 و 0 ، B 0 و 1 . les milieux يتحسبو وحدهم ، و نلقاو بالحساب . رد بالك : la droite des milieux ، démontrée هاذي : vecteur I J égale un demi fois le vecteur B C ما تمشيش فيه . orthonormé : la formule de la distance موش ، en général ، هذا le repère

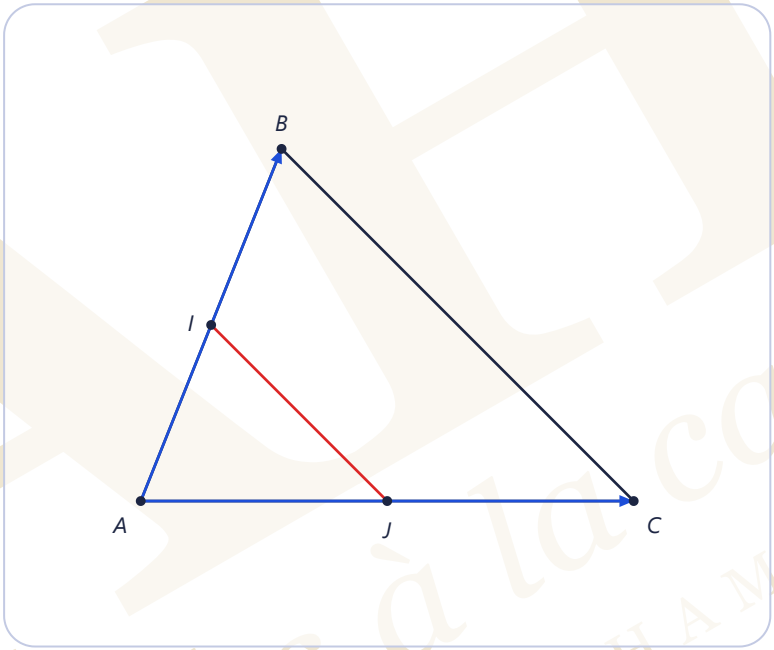
Parfois le repère n'est pas donné : on le choisit dans la figure. Ici, I et J sont les milieux de A B et de A C, et on prend le repère A, A C, A B. Les coordonnées de A sont 0 et 0, celles de C 1 et 0, celles de B 0 et 1. Les milieux se calculent tout seuls, et on trouve le vecteur I J égale un demi fois le vecteur B C : c'est la droite

des milieux, démontrée par le calcul. Attention : ce repère n'est, en général, pas orthonormé : la formule de la distance n'y marche pas.

Un repère n'est pas toujours donné : on peut le **choisir** dans la figure, pour démontrer par le calcul.

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Prenons le repère $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$: il n'est, en général, ni orthogonal ni normé, mais il suffit pour les milieux et les vecteurs. On y lit $A(0\,;0)$, $C(1\,;0)$ et $B(0\,;1)$, donc $I\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$.

Alors $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$: les composantes de $\overrightarrow{IJ}$ sont la moitié de celles de $\overrightarrow{BC}$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, et l'on retrouve la droite des milieux : (IJ) est parallèle à (BC), et $IJ = \frac{1}{2}BC$.



Le repère (A, AC, AB), pris dans la figure elle-même.

Un triangle ABC : A en bas à gauche, C en bas à droite, B en haut. Les côtés [AC] et [AB] portent chacun une flèche bleue partant de A : ce sont les vecteurs AC et AB du repère (A, AC, AB). I est le milieu de [AB], J le milieu de [AC], et le segment [IJ], tracé en rouge, est parallèle au côté [BC].

LA DROITE DES MILIEUX, PAR LE CALCUL

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ ci-dessus, soit K le milieu de $[BC]$. Montrer que $AIKJ$ est un parallélogramme.

Le point K —

$$K\left(\frac{0+1}{2}\,;\frac{1+0}{2}\right) = K\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$

Deux vecteurs — Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a pour composantes 0 et $\frac{1}{2}$; le vecteur $\overrightarrow{JK}$ a pour composantes $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ et $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

La conclusion — Mêmes composantes : les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont égaux, donc $AIKJ$ est un parallélogramme.

> $AIKJ$ est un parallélogramme

À ne pas faire : Dans le repère $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$: $BC=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. — Ce repère sert aux milieux, aux vecteurs, à l'alignement — pas à la formule de la distance. Le rapport de deux vecteurs colinéaires, oui : c'est ainsi qu'on obtient $IJ=\frac{1}{2}BC$.. La formule de la distance suppose un repère **orthonormé**. Sur la figure, AB et AC n'ont pas la même longueur, et l'angle en A n'est pas droit.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Sur une droite de repère $(O,\overrightarrow{OI})$: $\overrightarrow{OM}=x_M\,\overrightarrow{OI}$ et $\overline{AB}=x_B-x_A$.
   > 3al droite : le vecteur OM égale x M fois le vecteur OI, w AB barre égale x B moins x A.
   > *Sur une droite : le vecteur O M égale x M fois le vecteur O I, et A B barre égale x B moins x A.*
2. Si $OI=1$, la distance est $AB=|x_B-x_A|$.
   > Ken OI égale 1 : la distance AB égale la valeur absolue de (x B moins x A).
   > *Si O I égale 1 : la distance A B égale la valeur absolue de (x B moins x A).*
3. Dans le plan : $\overrightarrow{OM}=x\,\overrightarrow{OI}+y\,\overrightarrow{OJ}$ s'écrit $M(x\,;y)$, l'abscisse d'abord.
   > Fil plan : le vecteur OM égale x fois le vecteur OI plus y fois le vecteur OJ, w dima l'abscisse 9bal.
   > *Dans le plan : le vecteur O M égale x fois le vecteur O I plus i grec fois le vecteur O J, et toujours l'abscisse en premier.*
4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$: arrivée moins départ. Deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes.
   > Les composantes de AB : l'arrivée moins le départ, w deux vecteurs égaux 3andhom nafs les composantes.
   > *Les composantes de A B : l'arrivée moins le départ. Deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes.*
5. Le milieu : la moyenne des abscisses, la moyenne des ordonnées.
   > Le milieu : na3mlou la moyenne des abscisses, w la moyenne des ordonnées.
   > *Le milieu : on fait la moyenne des abscisses, et la moyenne des ordonnées.*

6. Vecteurs colinéaires : composantes proportionnelles. A, B, C alignés $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires.

   > Vecteurs colinéaires : composantes proportionnelles. W A, B, C alignés ki les vecteurs AB w AC colinéaires.
   >
   > *Vecteurs colinéaires : composantes proportionnelles. Et A, B, C sont alignés quand les vecteurs A B et A C sont colinéaires.*

7. Dans un repère orthonormé **seulement** : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

   > Ken fi repère orthonormé : AB égale la racine carrée de la somme des deux carrés : (x B moins x A) au carré plus (y B moins y A) au carré.
   >
   > *Seulement dans un repère orthonormé : A B égale la racine carrée de la somme des deux carrés : (x B moins x A) au carré plus (i grec B moins i grec A) au carré.*

8. Deux fonctions affines de **même coefficient** ont des représentations graphiques parallèles.

   > Deux fonctions affines 3andhom nafs le coefficient : les droites mte3hom parallèles.
   >
   > *Deux fonctions affines de même coefficient ont des représentations graphiques parallèles.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna les activités dans un repère. Tfakker el 7araka elli t3awed fi koll blasa : l'arrivée moins le départ. W la distance, ken fi repère orthonormé. Yalla nemchiw lel exercices.

هكّا كمّلنا les activités dans un repère . تفكّر الحركة اللي تعاود في كل بلاصة : l'arrivée moins le départ . و la distance ، كان في repère orthonormé . يالله نمشيو للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé les activités dans un repère. Retiens le geste qui revient partout : l'arrivée moins le départ. Et la distance, seulement dans un repère orthonormé. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · UN POINT, UN NOMBRE

c'est quoi un repère d'une droite | repère cartésien sur une droite | repère (O, OI) de la droite chnowa | repère sur une droite ya3ni chnowa | origine et unité d'un repère sur une droite | le vecteur OI dans le repère de la droite

CE QU'IL RÉPOND

3la droite, nekhtarou zouz points O w I. O houwa l'origine, w le vecteur $\overrightarrow{OI}$ ya3ti le sens w l'unité. Hedha le repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$.

على droite ، نختارو زوز points O w I . O هو l'origine ، w le vecteur O I يعطي le sens w l'unité . هذا le repère cartésien O ، vecteur O I .

Maths à la carte · ABDELKADER HAMMAMI

Sur une droite, on choisit deux points distincts O et I. O est l'origine, et le vecteur O I donne à la fois le sens et l'unité. C'est le repère cartésien O, vecteur O I.

QUESTION 2 · ABSCISSE D'UN POINT, MILIEU D'UN SEGMENT

c'est quoi l'abscisse d'un point | chnowa l'abscisse | abscisse définition | abscisse ya3ni chnowa | OM = x OI c'est quoi l'abscisse x | comment trouver l'abscisse d'un point sur une droite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{OM} = x_M \overrightarrow{OI}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'abscisse mte3 M hiya le réel x el wa7id elli $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI}$. O 3andou abscisse 0, w I 3andou abscisse 1.

l'abscisse mta3 M hiya le réel x elli wa7id lwa7dou . O vecteur O M égale x fois vecteur O I ، w I 3andou abscisse zéro ، 3andou abscisse 1 .

L'abscisse de M est l'unique réel x tel que vecteur O M égale x fois vecteur O I. Le point O a pour abscisse 0, et le point I a pour abscisse 1.

QUESTION 3 · ABSCISSE D'UN POINT, MILIEU D'UN SEGMENT

abscisse du milieu d'un segment | kifech nal9a l'abscisse du milieu | milieu sur une droite abscisse | abscisse du milieu (xB - xA)/2 ? | comment calculer l'abscisse du milieu K | milieu de AB sur la droite graduée

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

CE QU'IL RÉPOND

L'abscisse mte3 le milieu hiya la moyenne mte3 les deux abscisses : $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$. Mathalan -3 w 7 : $\dfrac{-3 + 7}{2} = 2$. Mouch $\dfrac{x_B - x_A}{2}$: hedhika nos la longueur.

l'abscisse mta3 le milieu hiya la moyenne mta3 les deux abscisses : x A plus x B ، le tout sur 2 . mthalan moins 3 w 7 : moins 3 plus 7 ، le tout sur 2 ، ya3ni 2 . mouch x B moins x A ، le tout sur 2 : hadhika nos la longueur .

L'abscisse du milieu est la moyenne des deux abscisses : x A plus x B, le tout sur 2. Par exemple, pour moins 3 et 7 : moins 3 plus 7, le tout sur 2, soit 2. Pas x B moins x A, le tout sur 2 : cela donne la moitié de la longueur.

QUESTION 4 · MESURE ALGÉBRIQUE ET DISTANCE SUR UNE DROITE

c'est quoi la mesure algébrique | mesure algébrique chnowa | comment calculer la mesure algébrique AB | mesure algébrique xB - xA ou xA - xB | AB barre mesure c'est quoi | mesure algébrique négative

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$\overline{AB} = x_B - x_A$

CE QU'IL RÉPOND

La mesure algébrique mte3 $\overrightarrow{AB}$ hiya $\overline{AB} = x_B - x_A$: abscisse d'arrivée moins abscisse de départ. Le signe mte3ha y9oul le sens. Mathalan $x_A = -2$ w $x_B = 3{,}5$: $\overline{AB} = 5{,}5$ w $\overline{BA} = -5{,}5$.

x B moins x A : abscisse d'arrivée moins abscisse de départ . هي vecteur A B متاع la mesure algébrique
x A moins 2 w x B 3,5 : A B barre égale 5,5 ، w B A barre égale moins مثلا . le sens متاعها يقول le signe
. 5,5

La mesure algébrique du vecteur A B est x B moins x A : abscisse d'arrivée moins abscisse de départ. Son signe dit le sens. Par exemple, avec x A égale moins 2 et x B égale 3,5 : A B barre égale 5,5 et B A barre égale moins 5,5.

QUESTION 5 · MESURE ALGÉBRIQUE ET DISTANCE SUR UNE DROITE

distance sur une droite avec les abscisses | AB = -5 c'est possible ? | distance négative sur une droite | distance et valeur absolue | kifech na7seb la distance AB b les abscisses | pourquoi la valeur absolue pour la distance

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$AB = |x_B - x_A|$

CE QU'IL RÉPOND

Ki $OI = 1$, la distance AB hiya la mesure algébrique bla signe : $AB = |x_B - x_A|$. La distance dima positive : $x_A = 3$ w $x_B = -2$, $AB = |-2 - 3| = 5$, mouch -5.

signe : A B égale valeur absolue de (x B بلا la mesure algébrique هي O I égale 1 ، la distance A B كي
. moins 5 موش ، positive : x A 3 w x B moins 2 ، A B égale 5 ديما moins x A) . la distance

Quand O I égale 1, la distance A B est la mesure algébrique sans son signe : A B égale valeur absolue de (x B moins x A). Une distance est toujours positive : avec x A égale 3 et x B égale moins 2, A B égale 5, pas moins 5.

QUESTION 6 · MESURE ALGÉBRIQUE ET DISTANCE SUR UNE DROITE

AM = 2 combien de points M | points M tels que AM = 2 sur la droite | pourquoi deux points à distance 2 de A | AM = d un seul point ? | zouz points b nafs el distance | AM < d sur une droite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$x_M = x_A + d$ ou $x_M = x_A - d$

CE QU'IL RÉPOND

Famma zouz points, wa7ed men koll jiha mte3 A : $x_A + d$ w $x_A - d$. Mathalan $x_A = -2$ w $AM = 2$: $x_M = 0$ walla $x_M = -4$. W $AM < d$ ya3ni $x_A - d < x_M < x_A + d$.

x A moins 2 w A M égale 2 : x M مثلا . A : x A plus d w x A moins d متاع جيهة من كل واحد ، points زوج فمّا
. x A moins d w x A plus d بين x M يعني d أصغر من moins 4 . w A M ولّا égale zéro

Il y a deux points, un de chaque côté de A : d'abscisses x A plus d et x A moins d. Par exemple, avec x A égale moins 2 et A M égale 2 : x M égale 0 ou moins 4. Et A M inférieur à d équivaut à x M compris entre x A moins d et x A plus d.

QUESTION 7 · DEUX AXES, DEUX NOMBRES

c'est quoi un repère du plan | repère (O, OI, OJ) chnowa | repère : axe des abscisses et axe des ordonnées | les axes du repère doivent être perpendiculaires ? | repère du plan axes pas perpendiculaires | repère cartésien du plan

CE QU'IL RÉPOND

Trois points O, I w J mouch alignés ya3tiw repère du plan $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. (OI) hiya l'axe des abscisses, w (OJ) l'axe des ordonnées. Les axes mouch lezem perpendiculaires : la construction temchi dima.

l'axe des abscisses ، w O J هي repère du plan . la droite O I يعطيو alignés موش trois points O ، I w J
. تمشي ديما perpendiculaires : la construction موش لازم l'axe des ordonnées . les axes

Trois points O, I et J non alignés donnent un repère du plan. La droite O I est l'axe des abscisses, la droite O J l'axe des ordonnées. Les axes n'ont pas besoin d'être perpendiculaires : la construction marche toujours.

QUESTION 8 · COORDONNÉES D'UN POINT

c'est quoi les coordonnées d'un point | chnowa les coordonnées | coordonnées définition | OM = x OI + y OJ les coordonnées | couple de coordonnées ya3ni chnowa | comment lire les coordonnées d'un point

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les coordonnées mte3 M houma le couple $(x\,;y)$ el wa7id elli $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$. x l'abscisse w y l'ordonnée, w l'abscisse dima 9bal fel ktiba.

vecteur O M égale x fois vecteur O I plus y fois الوحيد اللي le couple x ، y هوما M متاع les coordonnées
. الكتيبة في en premier ديما vecteur O J . x l'abscisse w y l'ordonnée ، w l'abscisse

Les coordonnées de M sont l'unique couple x, y tel que vecteur O M égale x fois vecteur O I plus y fois vecteur O J. x est l'abscisse, y l'ordonnée, et l'abscisse s'écrit toujours en premier.

QUESTION 9 · COORDONNÉES D'UN POINT

B(4;0) ou B(0;4), abscisse ou ordonnée | l'abscisse ou l'ordonnée en premier | OB = 4 OJ quelle ordonnée | abscisse w ordonnée anahi 9bal | différence entre abscisse et ordonnée | point sur l'axe des ordonnées, son abscisse

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{OB} = 0\,\overrightarrow{OI} + 4\,\overrightarrow{OJ} \iff B(0\,;4)$$

CE QU'IL RÉPOND

L'abscisse hiya le coefficient mte3 $\overrightarrow{OI}$, w l'ordonnée mte3 $\overrightarrow{OJ}$. $\overrightarrow{OB} = 4\,\overrightarrow{OJ}$ ya3ti $B(0\,;4)$: l'abscisse 0 5ater $\overrightarrow{OI}$ mouch mawjoud, w B 3la l'axe des ordonnées.

vecteur O J . vecteur O B égale 4 fois متاع vecteur O I ، w l'ordonnée متاع le coefficient هي l'abscisse . l'axe des ordonnées على w B ، موش موجود O I خاطر B zéro ، 4 : l'abscisse zéro يعطي vecteur O J

L'abscisse est le coefficient du vecteur O I, l'ordonnée celui du vecteur O J. Vecteur O B égale 4 fois vecteur O J donne B de coordonnées 0, 4 : l'abscisse est nulle car O I n'apparaît pas, et B est sur l'axe des ordonnées.

QUESTION 10 · COMPOSANTES D'UN VECTEUR

c'est quoi les composantes d'un vecteur | comment calculer les composantes du vecteur AB | composantes xB - xA ou xA - xB | chnowa les composantes | kifech na7seb les composantes | composantes d'un vecteur arrivée moins départ

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les composantes mte3 $\overrightarrow{AB}$ houma $x_B - x_A$ w $y_B - y_A$: arrivée moins départ, ligne l koll axe. Mathalan $A(-1\,;4)$ w $B(3\,;1)$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

لكل x B moins x A w y B moins y A : arrivée moins départ ، ligne هوما vecteur A B متاع les composantes . w moins 3 4 عندو A de coordonnées moins 1 w 4 ، w B de coordonnées 3 w 1 : vecteur A B مثلا . axe

Les composantes du vecteur A B sont x B moins x A et y B moins y A : arrivée moins départ, une ligne pour chaque axe. Par exemple, avec A de coordonnées moins 1 et 4, et B de coordonnées 3 et 1 : le vecteur A B a pour composantes 4 et moins 3.

QUESTION 11 · COMPOSANTES D'UN VECTEUR

comment trouver le point F tel que EF = AB | vecteurs égaux avec les coordonnées

deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes ? | kifech nal9a point b vecteurs égaux | trouver un point avec une égalité de vecteurs | EF = AB coordonnées de F

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x_F - 2 = 4 \quad ; \quad y_F - (-2) = -3$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz vecteurs égaux 3andhom nafs les composantes, ligne par ligne. Mathalan $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ w $E(2\,;-2)$: $x_F - 2 = 4$ w $y_F + 2 = -3$, donc $F(6\,;-5)$.

زوز vecteurs égaux عندهم نفس ligne par ligne ، les composantes . مثلا A B vecteur عندو 4 w 3 moins ، 5 moins donc F 6 ، moins 2 : x F moins 2 égale 4 w y F plus 2 égale moins 3 ، E 2 .

Deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes, ligne par ligne. Par exemple, avec vecteur A B de composantes 4 et moins 3, et E 2, moins 2 : x F moins 2 égale 4 et y F plus 2 égale moins 3, donc F 6, moins 5.

QUESTION 12 · COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

coordonnées du milieu d'un segment | kifech na7seb les coordonnées du milieu | milieu de AB dans un repère | formule du milieu | coordonnées du milieu K | milieu (xA + xB)/2

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

CE QU'IL RÉPOND

Les coordonnées mte3 le milieu houma les moyennes : $\dfrac{x_A + x_B}{2}$ w $\dfrac{y_A + y_B}{2}$. Mathalan $A(2\,;5)$ w $B(-4\,;1)$: $K(-1\,;3)$. Ma tansech tdiviser par 2.

les coordonnées متاع le milieu هوما le tout ، w y A plus y B ، le tout sur 2 ، les moyennes : x A plus x B . مثلا 3 w 1 moins de coordonnées K : 1 moins de coordonnées 4 moins w B de coordonnées 5 w 2 de coordonnées A . ما تنساش تـ diviser par 2 .

Les coordonnées du milieu sont les moyennes : x A plus x B, le tout sur 2, et y A plus y B, le tout sur 2. Par exemple, avec A de coordonnées 2 et 5, et B de coordonnées moins 4 et 1 : K de coordonnées moins 1 et 3. N'oublie pas de diviser par 2.

QUESTION 13 · COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

comment trouver le symétrique d'un point par rapport à un autre | symétrique de A par rapport à K coordonnées | kifech nal9a le symétrique | B symétrique de A formule | symétrique d'un point dans un repère | xB = 2xK - xA pourquoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x_B = 2\,x_K - x_A \quad ; \quad y_B = 2\,y_K - y_A$$

CE QU'IL RÉPOND

B symétrique de A par rapport à K ya3ni K milieu de $[AB]$. Donc $x_B = 2\,x_K - x_A$ w $y_B = 2\,y_K - y_A$.

K milieu de A B . donc x B égale 2 fois x K moins x A ، w y B يعني B symétrique de A par rapport à K . égale 2 fois y K moins y A

B symétrique de A par rapport à K signifie que K est le milieu de A B. Donc x B égale 2 fois x K moins x A, et y B égale 2 fois y K moins y A.

QUESTION 14 · VECTEURS COLINÉAIRES, POINTS ALIGNÉS

comment savoir si deux vecteurs sont colinéaires avec les composantes | produit en croix pour les vecteurs | vecteurs colinéaires composantes proportionnelles | kifech na3ref colinéaires | produit en croix xy' = x'y | colinéaires on ajoute ou on multiplie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x\,y' = x'\,y$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz vecteurs colinéaires ki les composantes mte3hom proportionnelles : nadhrbou par un même réel k, ma nzidouch. Nvérifier b le produit en croix : $x\,y' = x'\,y$. Mathalan $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ w $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ colinéaires, ama $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ w $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ le : $2 \times 5 = 10$ w $4 \times 3 = 12$.

زوز vecteurs colinéaires كي les composantes متاعهم proportionnelles : نضربو par un même réel k ، ما نزيدوش . نـ vérifier بـ le produit en croix : x fois y prime égale x prime fois y . مثلا 2 ، 3 colinéaires 6 ، 4 w أما 2 ، 3 4 ، 5 لا w 10 12 .

Deux vecteurs sont colinéaires quand leurs composantes sont proportionnelles : on multiplie par un même réel k, on n'ajoute pas. On le vérifie par le produit en croix : x fois y prime égale x prime fois y. Par exemple 2, 3 et 4, 6 sont colinéaires, mais pas 2, 3 et 4, 5 : 10 et 12.

QUESTION 15 · VECTEURS COLINÉAIRES, POINTS ALIGNÉS

comment montrer que trois points sont alignés avec les coordonnées | A, B, C alignés kifech nwarri | trouver y pour que les points soient alignés | points alignés dans un repère | alignement avec les vecteurs AB et AC | kifech na3ref ken les points alignés

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(-1) \times (-1) = 1 \times (y - 3) \iff y = 4$$

CE QU'IL RÉPOND

A, B w C alignés ki $\overrightarrow{AB}$ w $\overrightarrow{AC}$ colinéaires. Na7sbou les composantes w na3mlou le produit en croix. Mathalan $A(2\,;3)$, $C(3\,;2)$ w $B(1\,;y)$: $(-1) \times

(-1) = 1 \times (y - 3)$, donc $y = 4$.

le produit نعملو les composantes w نحسبو . vecteur A B w vecteur A C colinéaires كي A ، B w C alignés . A 2 ، 3 w C 3 ، 2 w B 1 ، y : moins 1 fois moins 1 égale 1 fois y moins 3 ، donc y égale 4 مثلا . en croix

A, B et C sont alignés quand les vecteurs A B et A C sont colinéaires. On calcule les composantes, puis on fait le produit en croix. Par exemple, avec A 2, 3, C 3, 2 et B 1, y : moins 1 fois moins 1 égale 1 fois y moins 3, donc y égale 4.

QUESTION 16 · VECTEURS COLINÉAIRES, POINTS ALIGNÉS

comment montrer que deux droites sont parallèles dans un repère | droites parallèles avec les composantes | (AB) parallèle à (CD) avec les coordonnées | kifech nwarri droites parallèles b les coordonnées | parallélisme et vecteurs colinéaires dans un repère | prouver que deux droites sont parallèles par le calcul

CE QU'IL RÉPOND

Les droites (AB) w (CD) parallèles ki $\overrightarrow{AB}$ w $\overrightarrow{CD}$ colinéaires : na7sbou les composantes mte3hom, w nvérifier b le produit en croix.

les composantes نحسبو : vecteur A B w vecteur C D colinéaires كي les droites A B w C D parallèles . le produit en croix بـ vérifier نـ w ، متاعهم

Les droites A B et C D sont parallèles exactement quand les vecteurs A B et C D sont colinéaires : on calcule leurs composantes et on vérifie le produit en croix.

QUESTION 17 · DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

c'est quoi un repère orthonormé | orthonormé ya3ni chnowa | différence entre orthogonal et orthonormé | repère orthogonal définition | chnowa repère orthonormé | orthonormé définition

CE QU'IL RÉPOND

Le repère orthogonal ki les axes (OI) w (OJ) perpendiculaires. Orthonormé ki zeda $OI = OJ = 1$. La formule de la distance temchi ken fi repère orthonormé.

O I égale O J égale 1 . كي زادة les axes O I w O J perpendiculaires . orthonormé كي le repère orthogonal . repère orthonormé في تمشي كان la formule de la distance

Un repère est orthogonal quand les axes O I et O J sont perpendiculaires, et orthonormé si de plus O I égale O J égale 1. La formule de la distance ne vaut que dans un repère orthonormé.

QUESTION 18 · DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

comment calculer la distance entre deux points | formule de la distance AB | kifech na7seb la distance AB fel repère | distance dans un repère orthonormé | AB avec les coordonnées | distance entre A et B formule

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi repère orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^{2} + (y_B - y_A)^{2}}$. Mathalan $A(-1\,;2)$ w $B(3\,;-4)$: $AB = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

repère orthonormé : A B égale racine de la somme : (x B moins x A) au carré ، plus (y B moins y A) في A de coordonnées moins 1 w 2 ، w B de coordonnées 3 w moins 4 : 4 au carré plus (moins مثلا . au carré 6) au carré ، 16 plus 36 ، w A B égale racine de 52 . racine de 13 2 يعني

Dans un repère orthonormé : A B égale racine de la somme : (x B moins x A) au carré, plus (y B moins y A) au carré. Par exemple, avec A de coordonnées moins 1 et 2, et B de coordonnées 3 et moins 4 : 16 plus 36, donc A B égale racine de 52, soit 2 racine de 13.

QUESTION 19 · DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

racine de 16 + 36 égale 4 + 6 ? | racine d'une somme égale somme des racines ? | AB = 52 ou racine de 52 | AB égale racine de 52 ou 52 | pourquoi pas 4 plus 6 | racine de la somme des carrés

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} \neq 4 + 6$$

CE QU'IL RÉPOND

La racine mte3 somme mouch la somme des racines : $\sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$, mouch $4 + 6$. Nejm3ou les carrés ta7t la racine, men ba3d nekhdhou la racine. W $16 + 36$ ya3ti AB^{2}, mouch AB.

plus 4 موش ، racine de 52 هي la somme des racines : racine de (16 plus 36) موش somme متاع la racine . A B موش ، A B au carré يعطي la racine . w 16 plus 36 من بعد ناخذو ، la racine تحت les carrés نجمعو . 6

La racine d'une somme n'est pas la somme des racines : racine de (16 plus 36) vaut racine de 52, pas 4 plus 6. On additionne les carrés sous la racine, puis on prend la racine. Et 16 plus 36 donne A B au carré, pas A B.

QUESTION 20 · RECONNAÎTRE UNE FIGURE PAR LE CALCUL

comment montrer qu'un triangle est rectangle avec les coordonnées | triangle rectangle dans un repère | réciproque de Pythagore triangle rectangle coordonnées | kifech nwarri triangle rectangle b les coordonnées | ABC rectangle par le calcul | triangle rectangle quel carré tester

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AC^2 + BC^2 = 1 + 9 = 10 = AB^2$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi repère orthonormé, na7sbou les carrés mte3 les trois côtés, w ntestiw la réciproque de Pythagore 3al akbar. Mathalan $AC^{2} = 1$, $BC^{2} = 9$, $AB^{2} = 10$: $1 + 9 = 10$, donc rectangle en C.

في repère orthonormé نحسبو les carrés متاع w les trois côtés نـ tester la réciproque de Pythagore على الأكبر . مثلا C en rectangle donc ، 10 égale 9 plus 1 : 10 au carré A B ، 9 au carré B C ، 1 au carré A C .

Dans un repère orthonormé, on calcule les carrés des trois côtés et on teste la réciproque de Pythagore sur le plus grand. Par exemple, A C au carré égale 1, B C au carré 9 et A B au carré 10 : 1 plus 9 égale 10, donc le triangle est rectangle en C.

QUESTION 21 · RECONNAÎTRE UNE FIGURE PAR LE CALCUL

comment montrer que ABCD est un parallélogramme avec les coordonnées

trouver D pour que ABCD soit un parallélogramme

parallélogramme dans un repère

kifech nwarri parallélogramme b les coordonnées

quatrième sommet d'un parallélogramme

parallélogramme par le calcul

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$ABCD \text{ parallélogramme} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

CE QU'IL RÉPOND

ABCD parallélogramme ki $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, walla ki les diagonales $[AC]$ w $[BD]$ 3andhom nafs le milieu. Bech nal9aw D, nektbou $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ w nsewiw les composantes, ligne par ligne.

عندهم les diagonales A C w B D ولّا كي ، vecteur A B égale vecteur D C كي A B C D parallélogramme نفس le milieu . باش نلقاو D ، نكتبو vecteur A B égale vecteur D C w نساويو par ligne ، les composantes . ligne

A B C D est un parallélogramme quand vecteur A B égale vecteur D C, ou quand ses diagonales A C et B D ont le même milieu. Pour trouver D, on écrit vecteur A B égale vecteur D C et on égale les composantes, ligne par ligne.

QUESTION 22 · RECONNAÎTRE UNE FIGURE PAR LE CALCUL

comment trouver la nature d'un quadrilatère avec les coordonnées

losange, rectangle ou carré par le calcul

triangle isocèle dans un repère

kifech na3ref losange b les coordonnées

nature du triangle ABC

reconnaître un losange avec les longueurs

CE QU'IL RÉPOND

Ncomparer des longueurs. Triangle 3andou zouz côtés kif kif : isocèle. Parallélogramme 3andou zouz côtés consécutifs kif kif : losange ; diagonales kif kif : rectangle ; el zouz : carré. W 9bal ay calcul, figure.

عندو زوز côtés isocèle . parallélogramme : كيف كيف côtés عندو زوز comparer des longueurs . triangle نـ . calcul ، figure قبْلْ أي carré . w : الزوز ؛ rectangle : كيف كيف diagonales ؛ losange : كيف كيف consécutifs

On compare des longueurs. Un triangle qui a deux côtés égaux est isocèle. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux est un losange ; des diagonales de même longueur, un rectangle ; les deux, un carré. Et avant tout calcul, une figure.

QUESTION 23 · LIRE UN TRAJET SUR UN GRAPHIQUE

comment calculer la vitesse sur le graphique | vitesse du cycliste et de la voiture | quand se rencontrent le cycliste et la voiture | kifech na7seb el vitesse | vitesse avec la lecture graphique distance temps | segment de droite vitesse constante

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{60}{3} = 20 \quad ; \quad \frac{90}{1{,}5} = 60$$

CE QU'IL RÉPOND

La vitesse hiya la distance sur le temps. Le cycliste 60 km fi 3 heures : $\dfrac{60}{3} = 20$ km/h. La voiture 90 km fi $1{,}5$ heure : $\dfrac{90}{1{,}5} = 60$ km/h. Segment de droite ya3ni vitesse constante, w la distance fonction affine du temps. Bech nal9aw la rencontre, nsewiw les deux distances.

la vitesse هي 60 km في la distance sur le temps . la voiture 90 في 3 heures : 20 km par heure . le cycliste 60 km vitesse constante ، w la distance fonction يعني heure : 60 km par heure . segment de droite 1,5 في km . les deux distances نساويو ، la rencontre باش نلقاو . affine du temps

La vitesse est la distance divisée par le temps. Le cycliste fait 60 km en 3 heures : 20 km par heure. La voiture fait 90 km en 1,5 heure : 60 km par heure. Un segment de droite signifie une vitesse constante : la distance est une fonction affine du temps. Pour la rencontre, on égale les deux distances.

QUESTION 24 · DROITES PARALLÈLES ET FONCTIONS AFFINES

deux fonctions affines de même coefficient droites parallèles ? | pourquoi même coefficient donne des droites parallèles | fonctions 2x + 3 et 3x + 2 parallèles ? | droites parallèles fonctions affines | coefficient différent droites sécantes | kifech na3ref droites parallèles b les fonctions

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(x) = ax + b,\ g(x) = ax + c \Rightarrow D \parallel D'$$

CE QU'IL RÉPOND

$f(x) = ax + b$ w $g(x) = ax + c$, nafs le coefficient a : les droites parallèles. A ya3ti la direction, w la constante tzallaq la droite bark. Ken les coefficients mekhtalfin, sécantes : $2x + 3$ w $3x + 2$ sécantes.

la يعطي le coefficient a : les droites parallèles . a نفس ، f de x égale a x plus b w g de x égale a x plus c sécantes : 2 x plus 3 w 3 x plus ، مختلفين les coefficients كان . برك la droite تزلّق direction ، w la constante . 2 sécantes

f de x égale a x plus b et g de x égale a x plus c, avec le même coefficient a : les droites sont parallèles. Le coefficient fixe la direction, la constante ne fait que glisser la droite. Si les coefficients diffèrent, les droites sont sécantes : 2 x plus 3 et 3 x plus 2 le sont.

QUESTION 25 · CHOISIR SON REPÈRE

comment choisir un repère dans une figure | pourquoi choisir le repère (A, AC, AB) | choisir son repère pour démontrer | kifech nekhtar repère | quel repère prendre dans un triangle | choisir un repère pour la droite des milieux

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

CE QU'IL RÉPOND

Najjmou nekhtarou repère fi la figure : mathalan $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$. $A(0\,;0)$, $C(1\,;0)$, $B(0\,;1)$. Hakka les milieux w les vecteurs yet7asbou bel sehel : $\overrightarrow{IJ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

نجّمو نختارو repère فـي la figure : مثلا A zéro ، B zéro ، zéro ، C 1 ، zéro ، A zéro . vecteur A B ، vecteur A C ، A .
هكّا les milieux w les vecteurs يتحسبو بالساهل : vecteur B C égale un demi vecteur I J .

On peut choisir un repère dans la figure, par exemple A, vecteur A C, vecteur A B. Alors A a pour coordonnées 0, 0, C 1, 0 et B 0, 1. Les milieux et les vecteurs se calculent facilement : vecteur I J égale un demi vecteur B C.

QUESTION 26 · CHOISIR SON REPÈRE

la formule de la distance marche dans un repère non orthonormé ? | repère pas orthonormé distance | repère mouch orthonormé chnowa najjem na3mel | dans le repère (A, AC, AB) on peut calculer BC ? | distance dans un repère quelconque | repère non orthonormé à quoi il sert

CE QU'IL RÉPOND

Le : la formule de la distance tefredh repère orthonormé. Repère mouch orthonormé yenfa3 l les milieux, les vecteurs w l'alignement, w l le rapport mte3 zouz vecteurs colinéaires, ama mouch l la distance.

لا : la formule de la distance تفرض repère orthonormé . repère orthonormé موش ينفع لـ les ، les milieux
. la distance لـ موش أما ، vecteurs colinéaires زوز متاع le rapport لـ vecteurs w l'alignement ، w

Non : la formule de la distance suppose un repère orthonormé. Un repère quelconque sert aux milieux, aux vecteurs, à l'alignement et au rapport de deux vecteurs colinéaires, mais pas à la distance.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **De B vers A**

Sur une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que $OI = 1$, on donne $x_A = -2{,}5$ et $x_B = 4{,}5$.

Calculer la mesure algébrique $\overline{BA}$.

Donner la valeur de $\overline{BA}$: un nombre.

Réponse attendue : -7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overline{BA}$ se lit « de B vers A ». Quel point est le départ, quel point est l'arrivée ?
2. Une mesure algébrique, c'est l'abscisse d'arrivée moins l'abscisse de départ.
   $\overline{BA} = x_A - x_B$

CORRECTION

Le sens — Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ part de B et arrive en A.

$\overline{BA} = x_A - x_B$

On remplace par les abscisses.

$\overline{BA} = -2{,}5 - 4{,}5$

$\overline{BA} = -7$

Le signe moins dit le sens : de B vers A, on va dans le sens contraire du vecteur $\overrightarrow{OI}$. La distance, elle, n'a pas de signe : $AB = |-7| = 7$.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → Tu as calculé $\overline{AB}$, de A vers B — ou la distance AB. Ici le vecteur va de B vers A : c'est $x_A - x_B$, l'arrivée moins le départ, et le résultat est négatif.

2 → Tu as additionné les deux abscisses : $-2{,}5 + 4{,}5 = 2$. Une mesure algébrique est une **différence** : l'abscisse d'arrivée moins l'abscisse de départ.

EXERCICE 2 · BASE **Le milieu**

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(-1\,;4)$ et $B(5\,;-2)$.

Calculer les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$.

Écrire le couple de coordonnées de K, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(2;1)` — aussi acceptées : (2,1) · K(2;1) · K(2,1) · K = (2;1) · K = (2,1) · K : (2;1) · 2;1 · x = 2 ; y = 1 · x = 2 et y = 1 · x = 2, y = 1 · xK = 2 ; yK = 1 · x_K = 2 ; y_K = 1 · xK = 2 et yK = 1 · x_K = 2 et y_K = 1 · xK = 2, yK = 1 · x_K = 2, y_K = 1 · y = 1 ; x = 2 · y = 1 et x = 2 · y = 1, x = 2 · yK = 1 ; xK = 2 · y_K

= 1 ; x_K = 2 · yK = 1 et xK = 2 · y_K = 1 et x_K = 2 · (x;y) = (2;1) · (x,y) = (2,1) · (xK;yK) = (2;1) · (x_K;y_K) = (2;1) · K(x = 2 ; y = 1) · 2 et 1 · (2 et 1) · K(2 et 1) · x = 2 y = 1 · xK = 2 yK = 1 · x_K = 2 y_K = 1 · (2;+1) · (2.0;1) · (2;1.0) · (2,0;1) · K(2;+1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le milieu est « au milieu » sur chaque axe : son abscisse est entre -1 et 5, son ordonnée entre -2 et 4.
2. Coordonnée par coordonnée, on fait la moyenne.

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

CORRECTION

L'abscisse —

$$x_K = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

L'ordonnée —

$$y_K = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$K(2\,;1)$$

Vérification : de A à K, on avance de 3 et on descend de 3 ; de K à B aussi. Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont égaux : K est bien le milieu de $[AB]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

(3;-3) / (3,-3) / K(3;-3) / K(3,-3) / K = (3;-3) / 3;-3 / x = 3 ; y = -3 / x = 3 et y = -3 / x = 3, y = -3 / xK = 3 ; yK = -3 / x_K = 3 ; y_K = -3 / (x;y) = (3;-3) / 3 et -3 / (3 et -3) / K(3 et -3) / x = 3 y = -3 / xK = 3 yK = -3 / x_K = 3 y_K = -3 → Tu as pris la moitié des **différences** : $\frac{5-(-1)}{2} = 3$. Cela donne la moitié du vecteur $\overrightarrow{AB}$, pas une position. Le milieu, c'est la moyenne : on **additionne** les coordonnées.

(4;2) / (4,2) / K(4;2) / K(4,2) / K = (4;2) / 4;2 / x = 4 ; y = 2 / x = 4 et y = 2 / x = 4, y = 2 / xK = 4 ; yK = 2 / x_K = 4 ; y_K = 2 / (x;y) = (4;2) / 4 et 2 / (4 et 2) / K(4 et 2) / x = 4 y = 2 / xK = 4 yK = 2 / x_K = 4 y_K = 2 → Tu as additionné les coordonnées sans diviser par 2. La moyenne de deux nombres, c'est leur somme **divisée par deux**.

(6;-6) / (6,-6) / K(6;-6) / K(6,-6) / K = (6;-6) / 6;-6 / x = 6 ; y = -6 / x = 6 et y = -6 / x = 6, y = -6 / xK = 6 ; yK = -6 / x_K = 6 ; y_K = -6 / (x;y) = (6;-6) / 6 et -6 / (6 et -6) / K(6 et -6) / x = 6 y = -6 / xK = 6 yK = -6 / x_K = 6 y_K = -6 → Tu as calculé les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, arrivée moins départ. Le milieu est un point : on fait la moyenne des coordonnées.

(1;2) / (1,2) / K(1;2) / K(1,2) / K = (1;2) / 1;2 / x = 1 ; y = 2 / x = 1 et y = 2 / x = 1, y = 2 / xK = 1 ; yK = 2 / x_K = 1 ; y_K = 2 / (x;y) = (1;2) / 1 et 2 / (1 et 2) / K(1 et 2) / x = 1 y = 2 / xK = 1 yK = 2 / x_K = 1 y_K = 2 → Tes deux nombres sont les bons, mais dans le désordre. Dans un couple de coordonnées, l'**abscisse** vient toujours en premier, l'ordonnée ensuite.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Une distance

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(-2\,;1)$ et $B(4\,;-7)$.

Calculer la distance AB.

Donner la valeur exacte de AB : un nombre.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le repère est orthonormé : la distance vient du théorème de Pythagore. Calcule d'abord les écarts $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.
2. Les écarts sont 6 et -8. Élève-les au carré et additionne : tu obtiens AB^2. Il reste à prendre la racine carrée.

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

CORRECTION

Les écarts —

$$x_B - x_A = 4 - (-2) = 6 \quad ; \quad y_B - y_A = -7 - 1 = -8$$

Pythagore — On additionne les carrés des écarts : c'est le carré de la distance.

$$AB^2 = 6^2 + (-8)^2 = 36 + 64 = 100$$

$$AB = \sqrt{100} = 10$$

Le carré efface le signe de -8 : une différence négative ne gêne pas. Et on ne prend jamais la racine terme à terme : $\sqrt{36+64}$ n'est pas $6+8$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100` → Tu as donné AB^2. La somme des carrés est le carré de la distance : il reste à en prendre la racine carrée.

`14` → Tu as additionné les écarts : $6 + 8 = 14$. C'est le chemin en escalier, pas la ligne droite. La distance passe par Pythagore : la racine de la somme des **carrés**.

`sqrt(40) / 2*sqrt(10)` → Tu as **additionné** les coordonnées : $4 + (-2) = 2$ et $-7 + 1 = -6$. Dans la formule, ce sont des **différences**, arrivée moins départ.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

Trois points alignés

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;-2)$, $B(3\,;2)$ et $C(5\,;y)$, où y est un réel.

Déterminer y pour que les points A, B et C soient alignés.

Donner la valeur de y : un nombre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois points sont alignés quand les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Commence par leurs composantes.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 2 et 4, et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour composantes 4 et $y+2$. Elles doivent être proportionnelles : écris le produit en croix.

$$2 \times (y+2) = 4 \times 4$$

CORRECTION

Les composantes — Arrivée moins départ : pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, $3-1$ et $2-(-2)$; pour le vecteur $\overrightarrow{AC}$, $5-1$ et $y-(-2)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\y+2\end{pmatrix}$$

Colinéaires — Les deux vecteurs doivent être colinéaires : leurs composantes sont proportionnelles, on écrit le produit en croix.

$$2\,(y+2) = 4 \times 4 = 16$$

$$y+2 = 8 \iff y = 6$$

Vérification : avec $y = 6$, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour composantes 4 et 8, le double de celles du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc le double du vecteur $\overrightarrow{AB}$: le point C est deux fois plus loin de A que B, sur la même droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → Tu as trouvé $y+2=8$: c'est la deuxième composante du vecteur $\overrightarrow{AC}$, pas encore y. Il reste à retirer 2.

`10` → Tu as écrit $y-2$ pour la deuxième composante du vecteur $\overrightarrow{AC}$. Or l'ordonnée de A est -2 : $y-(-2)=y+2$.

`0` → Ton produit en croix a mélangé les lignes. On multiplie en diagonale : l'abscisse de l'un par l'ordonnée de l'autre, $2 \times (y+2) = 4 \times 4$.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Une droite parallèle

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, la droite D représente la fonction affine f définie par $f(x) = 3x-2$. La droite D' représente la fonction affine g de même coefficient que f, définie par $g(x) = 3x+b$, et elle passe par le point $A(1\,;5)$.

Pourquoi D et D' sont-elles parallèles ? Déterminer b.

Donner seulement la valeur de b : un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D' passe par $A(1\,;5)$: l'image de 1 par g est donc l'ordonnée de A.
2. Écris $g(1) = 5$ avec $g(x) = 3x+b$, puis isole b.

$$3 \times 1 + b = 5$$

CORRECTION

Pourquoi parallèles — f et g ont le même coefficient, 3 : leurs représentations D et D' sont parallèles.

Le point A — $A(1\,;5)$ est sur D', donc $g(1) = 5$.

$3 \times 1 + b = 5$

$b = 5 - 3 = 2$

Donc $g(x) = 3x + 2$. Contrôle par les vecteurs : D passe par $E(0\,;-2)$ et $F(1\,;1)$, D' par $G(0\,;2)$ et $A(1\,;5)$, et les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GA}$ ont les mêmes composantes, 1 et 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → Tu as recopié la constante de f. Avec $b = -2$, D' serait la droite D elle-même, et elle ne passerait pas par A : $f(1) = 1$, pas 5.

5 → Tu as pris l'ordonnée de A. Mais A a pour abscisse 1, pas 0 : l'ordonnée à l'origine se lit en $x = 0$.

8 → Tu as ajouté au lieu de retrancher. De $3 \times 1 + b = 5$ on tire $b = 5 - 3$: on retire 3 des deux côtés.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Le symétrique d'un point

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(3\,;-1)$ et $K(1\,;2)$.

Déterminer les coordonnées du point B, symétrique de A par rapport à K.

Écrire le couple de coordonnées de B, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(-1;5)` — aussi acceptées : (-1,5) · B(-1;5) · B(-1,5) · B = (-1;5) · B = (-1,5) · B : (-1;5) · -1;5 · x = -1 ; y = 5 · x = -1 et y = 5 · x = -1, y = 5 · xB = -1 ; yB = 5 · x_B = -1 ; y_B = 5 · xB = -1 et yB = 5 · x_B = -1 et y_B = 5 · xB = -1, yB = 5 · x_B = -1, y_B = 5 · y = 5 ; x = -1 · y = 5 et x = -1 · y = 5, x = -1 · yB = 5 ; xB = -1 · y_B = 5 ; x_B = -1 · yB = 5 et xB = -1 · y_B = 5 et x_B = -1 · (x;y) = (-1;5) · (x,y) = (-1,5) · (xB;yB) = (-1;5) · (x_B;y_B) = (-1;5) · B(x = -1 ; y = 5) · -1 et 5 · (-1 et 5) · B(-1 et 5) · x = -1 y = 5 · xB = -1 yB = 5 · x_B = -1 y_B = 5 · (-1;+5) · (-1.0;5) · (-1;5.0) · (-1,0;5) · B(-1;+5)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dire que B est le symétrique de A par rapport à K, c'est dire que K est le milieu du segment $[AB]$.
2. Écris la règle du milieu avec les coordonnées inconnues de B, puis isole-les.

$$\frac{3 + x_B}{2} = 1 \quad ; \quad \frac{-1 + y_B}{2} = 2$$

CORRECTION

Le milieu — K est le milieu de $[AB]$: ses coordonnées sont les moyennes de celles de A et de B.

$$\frac{3 + x_B}{2} = 1 \quad ; \quad \frac{-1 + y_B}{2} = 2$$

On isole — On multiplie par 2, puis on retranche la coordonnée de A.

$3 + x_B = 2 \quad ; \quad -1 + y_B = 4$

$x_B = -1 \quad ; \quad y_B = 5$

$B(-1\,;5)$

Contrôle par les vecteurs : les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{KB}$ ont les mêmes composantes, -2 et 3. De A à K, puis de K à B, c'est le même pas : K est bien le milieu de $[AB]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

(2;0,5) / B(2;0,5) / B = (2;0,5) / 2;0,5 / x = 2 ; y = 0,5 / x = 2 et y = 0,5 / x = 2, y = 0,5 / xB = 2 ; yB = 0,5 / x_B = 2 ; y_B = 0,5 / (x;y) = (2;0,5) / (2;0.5) / (2;1/2) / B(2;0.5) / B(2;1/2) / x = 2 ; y = 0.5 / x = 2 ; y = 1/2 / 2 et 0,5 / (2 et 0,5) / B(2 et 0,5) / x = 2 y = 0,5 / xB = 2 yB = 0,5 / x_B = 2 y_B = 0,5 / 2 et 0.5 / (2 et 0.5) / B(2 et 0.5) / x = 2 y = 0.5 / xB = 2 yB = 0.5 / x_B = 2 y_B = 0.5 → Tu as calculé le milieu du segment $[AK]$. Ici, le milieu est connu, c'est K ; l'inconnue est l'extrémité B. Écris la règle du milieu avec les coordonnées de B, puis isole-les.

(-2;3) / (-2,3) / B(-2;3) / B(-2,3) / B = (-2;3) / -2;3 / x = -2 ; y = 3 / x = -2 et y = 3 / x = -2, y = 3 / xB = -2 ; yB = 3 / x_B = -2 ; y_B = 3 / (x;y) = (-2;3) / -2 et 3 / (-2 et 3) / B(-2 et 3) / x = -2 y = 3 / xB = -2 yB = 3 / x_B = -2 y_B = 3 → Tu as calculé les composantes du vecteur $\overrightarrow{AK}$, arrivée moins départ : c'est le pas qui mène de A à K. Pour arriver en B, on refait ce même pas, à partir de K.

(5;-4) / (5,-4) / B(5;-4) / B(5,-4) / B = (5;-4) / 5;-4 / x = 5 ; y = -4 / x = 5 et y = -4 / x = 5, y = -4 / xB = 5 ; yB = -4 / x_B = 5 ; y_B = -4 / (x;y) = (5;-4) / 5 et -4 / (5 et -4) / B(5 et -4) / x = 5 y = -4 / xB = 5 yB = -4 / x_B = 5 y_B = -4 → Tu as construit le symétrique de K par rapport à A : les rôles sont inversés. Ici, c'est K le centre de la symétrie, donc le milieu de $[AB]$.

(-1;3) / (-1,3) / B(-1;3) / B(-1,3) / B = (-1;3) / -1;3 / x = -1 ; y = 3 / x = -1 et y = 3 / x = -1, y = 3 / xB = -1 ; yB = 3 / x_B = -1 ; y_B = 3 / (x;y) = (-1;3) / -1 et 3 / (-1 et 3) / B(-1 et 3) / x = -1 y = 3 / xB = -1 yB = 3 / x_B = -1 y_B = 3 → L'abscisse est juste, pas l'ordonnée. Reprends la deuxième ligne : $-1 + y_B = 4$ donne $y_B = 4 + 1 = 5$.

(5;-1) / (5,-1) / B(5;-1) / B(5,-1) / B = (5;-1) / 5;-1 / x = 5 ; y = -1 / x = 5 et y = -1 / x = 5, y = -1 / xB = 5 ; yB = -1 / x_B = 5 ; y_B = -1 / (x;y) = (5;-1) / 5 et -1 / (5 et -1) / B(5 et -1) / x = 5 y = -1 / xB = 5 yB = -1 / x_B = 5 y_B = -1 → Tes deux nombres sont les bons, mais dans le désordre. Dans un couple de coordonnées, l'**abscisse** vient toujours en premier, l'ordonnée ensuite.

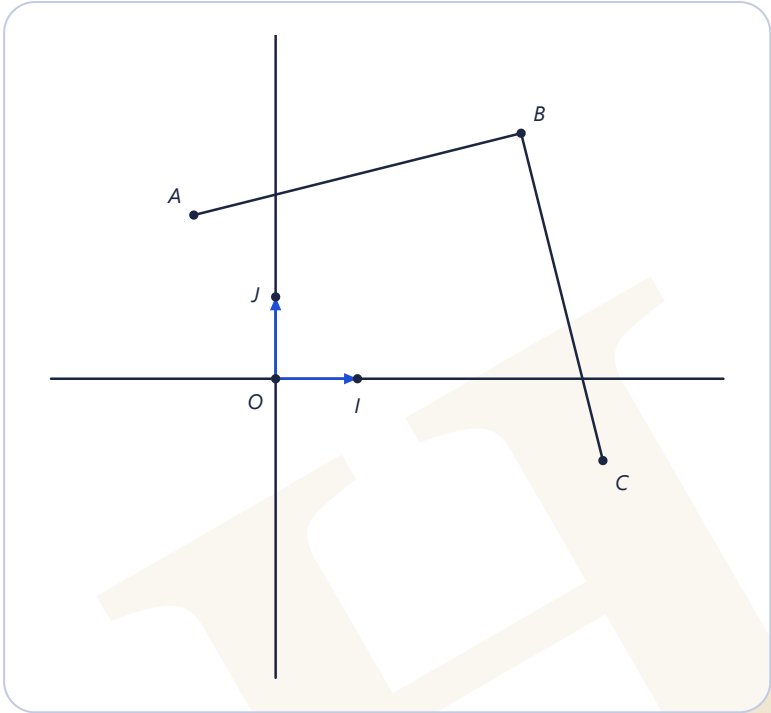
EXERCICE 7 · RAISONNEMENT

Le quatrième sommet

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;3)$ et $C(4\,;-1)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Un repère d'origine O, les vecteurs OI et OJ en bleu. Trois points sont placés : A(−1 ; 2) en haut à gauche, B(3 ; 3) en haut à droite, C(4 ; −1) en bas à droite. Les côtés [AB] et [BC] du futur parallélogramme sont tracés ; le quatrième sommet D reste à trouver.

Écrire le couple de coordonnées de D, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(0;-2)` — aussi acceptées : (0,-2) · D(0;-2) · D(0,-2) · D = (0;-2) · D = (0,-2) · D : (0;-2) · 0;-2 · x = 0 ; y = -2 · x = 0 et y = -2 · x = 0, y = -2 · xD = 0 ; yD = -2 · x_D = 0 ; y_D = -2 · xD = 0 et yD = -2 · x_D = 0 et y_D = -2 · xD = 0, yD = -2 · x_D = 0, y_D = -2 · y = -2 ; x = 0 · y = -2 et x = 0 · y = -2, x = 0 · yD = -2 ; xD = 0 · y_D = -2 ; x_D = 0 · yD = -2 et xD = 0 · y_D = -2 et x_D = 0 · (x;y) = (0;-2) · (x,y) = (0,-2) · (xD;yD) = (0;-2) · (x_D;y_D) = (0;-2) · D(x = 0 ; y = -2) · 0 et -2 · (0 et -2) · D(0 et -2) · x = 0 y = -2 · xD = 0 yD = -2 · x_D = 0 y_D = -2 · (0;-2.0) · (0.0;-2) · (0;-2,0) · (+0;-2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans $ABCD$, les sommets se suivent dans l'ordre du nom : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, portés par deux côtés opposés, sont égaux.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 4 et 1 ; le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour composantes $4 - x_D$ et $-1 - y_D$. Identifie-les ligne par ligne.
   $4 - x_D = 4 \quad ; \quad -1 - y_D = 1$

CORRECTION

La bonne égalité — $ABCD$ est un parallélogramme lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Arrivée moins départ : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 4 et 1, le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour composantes $4 - x_D$ et $-1 - y_D$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4 - x_D\\-1 - y_D\end{pmatrix}$$

Ligne par ligne —

$4 - x_D = 4 \quad ; \quad -1 - y_D = 1$

$x_D = 0 \quad ; \quad y_D = -2$

$D(0\,;-2)$

Contrôle par les diagonales : le milieu de $[AC]$ est $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, et celui de $[BD]$ aussi. Deux diagonales de même milieu : $ABCD$ est bien un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(8;0) / (8,0) / D(8;0) / D(8,0) / D = (8;0) / 8;0 / x = 8 ; y = 0 / x = 8 et y = 0 / x = 8, y = 0 / xD = 8 ; yD = 0 / x_D = 8 ; y_D = 0 / (x;y) = (8;0) / 8 et 0 / (8 et 0) / D(8 et 0) / x = 8 y = 0 / xD = 8 yD = 0 / x_D = 8 y_D = 0` → Avec ton point, c'est le vecteur $\overrightarrow{CD}$ qui est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: tu as construit $ABDC$. Dans $ABCD$, les sommets se suivent dans l'ordre du nom : c'est le vecteur $\overrightarrow{DC}$ qui doit être égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

`(-2;6) / (-2,6) / D(-2;6) / D(-2,6) / D = (-2;6) / -2;6 / x = -2 ; y = 6 / x = -2 et y = 6 / x = -2, y = 6 / xD = -2 ; yD = 6 / x_D = -2 ; y_D = 6 / (x;y) = (-2;6) / -2 et 6 / (-2 et 6) / D(-2 et 6) / x = -2 y = 6 / xD = -2 yD = 6 / x_D = -2 y_D = 6` → Avec ce point, $[AB]$ devient une diagonale : le parallélogramme obtenu est $ADBC$. Dans $ABCD$, les diagonales sont $[AC]$ et $[BD]$.

`(0;2) / (0,2) / D(0;2) / D(0,2) / D = (0;2) / 0;2 / x = 0 ; y = 2 / x = 0 et y = 2 / x = 0, y = 2 / xD = 0 ; yD = 2 / x_D = 0 ; y_D = 2 / (x;y) = (0;2) / 0 et 2 / (0 et 2) / D(0 et 2) / x = 0 y = 2 / xD = 0 yD = 2 / x_D = 0 y_D = 2` → L'abscisse est juste, pas l'ordonnée. Reprends la deuxième ligne : $-1-y_D=1$ donne $y_D=-1-1=-2$.

`(-2;0) / (-2,0) / D(-2;0) / D(-2,0) / D = (-2;0) / -2;0 / x = -2 ; y = 0 / x = -2 et y = 0 / x = -2, y = 0 / xD = -2 ; yD = 0 / x_D = -2 ; y_D = 0 / (x;y) = (-2;0) / -2 et 0 / (-2 et 0) / D(-2 et 0) / x = -2 y = 0 / xD = -2 yD = 0 / x_D = -2 y_D = 0` → Tes deux nombres sont les bons, mais dans le désordre. Dans un couple de coordonnées, l'**abscisse** vient toujours en premier, l'ordonnée ensuite.

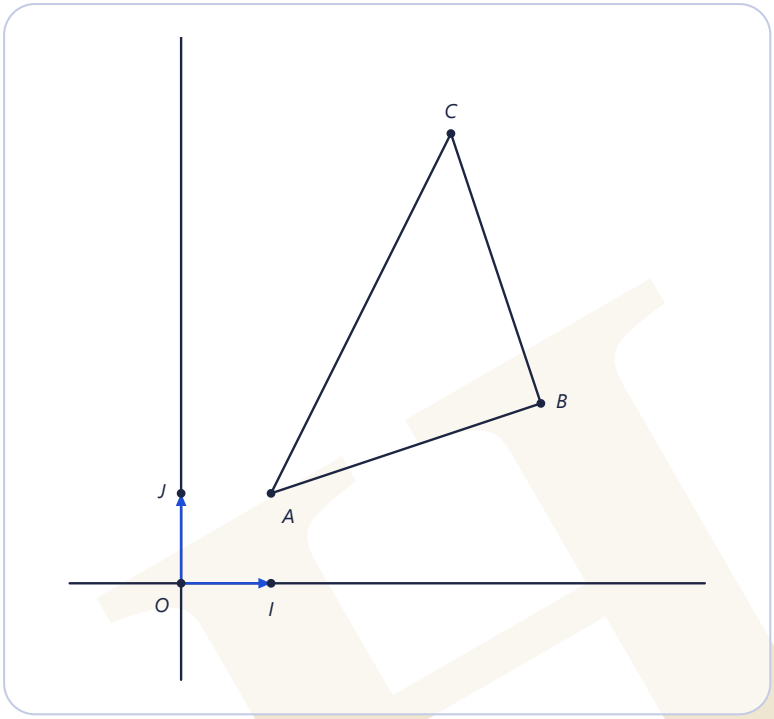
EXERCICE 8 · RAISONNEMENT

L'aire d'un triangle

Dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;1)$, $B(4\,;2)$ et $C(3\,;5)$.

Calculer les longueurs des trois côtés du triangle ABC, montrer qu'il est rectangle, puis calculer son aire.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Un repère orthonormé d'origine O, les vecteurs OI et OJ en bleu. Le triangle ABC a ses sommets en A(1 ; 1), en bas à gauche, B(4 ; 2), à droite, et C(3 ; 5), en haut. Aucun angle n'est marqué : c'est au calcul de dire s'il y a un angle droit.

Donner son aire, en unités d'aire, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les trois longueurs avec la formule de la distance. Deux d'entre elles sont égales.
2. $AB^2 = 10$, $BC^2 = 10$ et $AC^2 = 20$. La réciproque de Pythagore dit où est l'angle droit.
   $AB^2 + BC^2 = AC^2$
3. L'angle droit est en B : les côtés $[BA]$ et $[BC]$ sont la base et la hauteur.
   $$\text{Aire} = \frac{BA \times BC}{2}$$

CORRECTION

Les longueurs — On calcule d'abord leurs carrés, avec la formule de la distance.

$AB^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \quad ; \quad BC^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10$

$AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

$AB = BC = \sqrt{10} \quad ; \quad AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Pythagore — Le plus grand carré, AC^2, est la somme des deux autres : le triangle est rectangle en B. Il est même isocèle, puisque $AB = BC$.

$AB^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20 = AC^2$

L'aire —

$$\text{Aire} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}{2} = \frac{10}{2}$$

$\text{Aire} = 5$

Tout vient des coordonnées : les longueurs, l'angle droit par la réciproque de Pythagore, puis l'aire. Dans un triangle rectangle, la base et la hauteur sont les deux côtés de l'angle droit — jamais l'hypoténuse.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Tu as calculé $AB \times BC$ sans diviser par 2. L'aire d'un triangle rectangle, c'est la **moitié** du produit des deux côtés de l'angle droit.

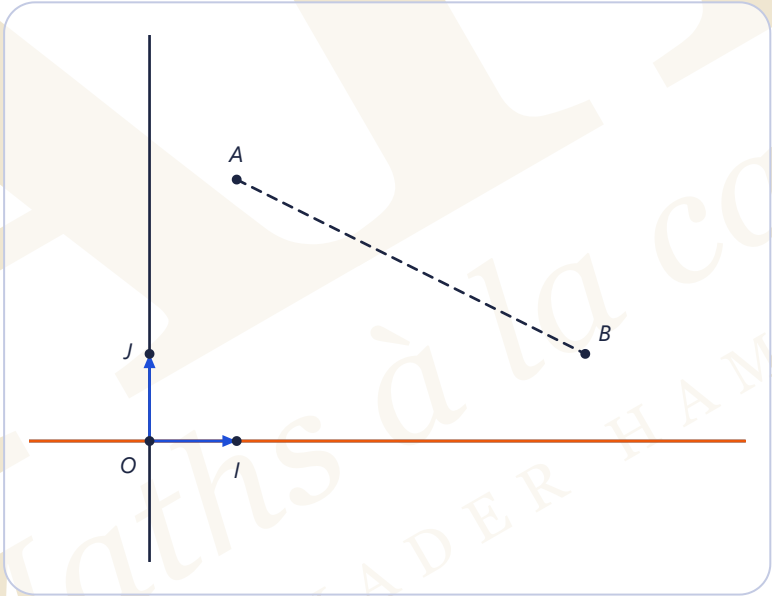
`5*sqrt(2) / sqrt(50) / 10*sqrt(2) / sqrt(200)` → Tu as multiplié par AC, l'hypoténuse. Dans un triangle rectangle, la base et la hauteur sont les deux côtés **de l'angle droit**, ici $[BA]$ et $[BC]$: l'aire est $\dfrac{BA \times BC}{2}$.

EXERCICE 9 · DEFI

À égale distance

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;3)$ et $B(5\,;1)$. On cherche le point M de l'axe des abscisses tel que $MA = MB$.

On note $M(x\,;0)$. Déterminer x.



Un repère orthonormé d'origine O, les vecteurs OI et OJ en bleu. Le point A(1 ; 3) est en haut à gauche, le point B(5 ; 1) plus bas, à droite ; le segment [AB] est tracé en pointillés. L'axe des abscisses est repassé en orange : c'est sur lui que se trouve le point M cherché, à égale distance de A et de B.

Donner seulement l'abscisse x du point M : un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux distances égales ont des carrés égaux : écris $MA^2 = MB^2$ avec la formule de la distance, ce qui évite les racines.
2. $MA^2 = (x-1)^2 + 3^2$ et $MB^2 = (x-5)^2 + 1^2$. Développe : les x^2 disparaissent.
   $(x-1)^2 + 9 = (x-5)^2 + 1$

CORRECTION

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

Les deux carrés —

$MA^2 = (x-1)^2 + (0-3)^2 = x^2 - 2x + 10$

$MB^2 = (x-5)^2 + (0-1)^2 = x^2 - 10x + 26$

L'équation — Les x^2 s'éliminent : il reste une équation du premier degré.

$x^2 - 2x + 10 = x^2 - 10x + 26 \iff 8x = 16$

$x = 2$

Vérification : $MA^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ et $MB^2 = 3^2 + 1^2 = 10$. Le point $M(2\,;0)$ est bien à égale distance de A et de B : il est sur la médiatrice de $[AB]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est l'abscisse du milieu de $[AB]$ — et c'est aussi ce qu'on trouve en oubliant les ordonnées de A et de B. Mais ce milieu, $(3\,;2)$, n'est pas sur l'axe des abscisses. Écris les deux distances en entier : $MA^2 = (x-1)^2 + 3^2$ et $MB^2 = (x-5)^2 + 1^2$.

`-4/3` → Ton développement a un signe faux : $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$, avec un **moins** devant $10x$.

EXERCICE 10 · BASE **Lire une abscisse**

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, le point M vérifie $\overrightarrow{OM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OI}$.

Déterminer l'abscisse x_M du point M.

Donner la valeur de x_M : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `-3/2` — aussi acceptées : -1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse de M est le réel qui multiplie $\overrightarrow{OI}$ dans l'écriture de $\overrightarrow{OM}$.
   $\overrightarrow{OM} = x_M\,\overrightarrow{OI}$
2. Garde le signe : le point M est du côté opposé à I par rapport à O.

CORRECTION

La définition — L'abscisse de M est l'unique réel x_M tel que $\overrightarrow{OM} = x_M\,\overrightarrow{OI}$.

$\overrightarrow{OM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OI}$

$x_M = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$

On lit l'abscisse directement sur l'écriture $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI}$: c'est le coefficient, avec son signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2 / 1.5` → Tu as perdu le signe moins. $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont de sens contraires : l'abscisse de M est négative.

EXERCICE 11 · BASE

Un vecteur à l'envers

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, le point A vérifie $\overrightarrow{AO} = 5\,\overrightarrow{OI}$.

Déterminer l'abscisse x_A du point A.

Donner la valeur de x_A : un nombre.

Réponse attendue : -5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse se lit sur $\overrightarrow{OA}$, qui part de O. Or l'énoncé donne $\overrightarrow{AO}$, qui part de A.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont opposés.
   $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$

CORRECTION

Retourner le vecteur — Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AO}$.

$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO} = -5\,\overrightarrow{OI}$

$x_A = -5$

L'abscisse d'un point A se lit toujours sur $\overrightarrow{OA}$, le vecteur qui **part de l'origine**. Si l'on te donne $\overrightarrow{AO}$, change d'abord son signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Tu as lu l'abscisse sur $\overrightarrow{AO}$. Or l'abscisse se lit sur $\overrightarrow{OA}$, qui en est l'opposé : $\overrightarrow{OA} = -5\,\overrightarrow{OI}$.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Un autre repère

Sur une droite Δ, on place trois points A, B et C dans cet ordre, tels que $AB = 2$ et $BC = 3$.

On munit Δ du repère $(A, \overrightarrow{AC})$. Déterminer l'abscisse x_B du point B dans ce repère.

Donner la valeur de x_B : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : 2/5 — aussi acceptées : 0.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AC})$, l'origine est A et l'unité est la longueur AC. Combien vaut AC ?
2. Cherche le réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$: les deux vecteurs ont le même sens.

CORRECTION

L'unité — Les points sont dans l'ordre A, B, C : $AC = AB + BC$.

$AC = 2 + 3 = 5$

Le vecteur — $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens, et AB vaut les deux cinquièmes de AC.

$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$x_B = \dfrac{2}{5}$

L'abscisse dépend du repère : dans $(A, \overrightarrow{AC})$, l'origine est A et c'est AC qui vaut une unité. On cherche toujours le réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu as gardé la longueur $AB = 2$ comme abscisse. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AC})$, l'unité est $AC = 5$, pas 1.

`2/3` → Tu as comparé AB à BC. L'unité du repère est AC, qui va de A jusqu'à C : $AC = 5$.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

Une abscisse négative

Sur une droite Δ, on place trois points A, B et C dans cet ordre, tels que $AB = 2$ et $BC = 3$.

On munit Δ du repère $(B, \overrightarrow{BC})$. Déterminer l'abscisse x_A du point A dans ce repère.

Donner la valeur exacte de x_A : une fraction.

Réponse attendue : `-2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'origine est B, l'unité est $BC = 3$. Le point A est-il du même côté que C par rapport à B ?
2. Cherche le réel k tel que $\overrightarrow{BA} = k\,\overrightarrow{BC}$. Les deux vecteurs sont de sens contraires.

CORRECTION

Le sens — A et C sont de part et d'autre de B : $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de sens contraires.

La longueur — $BA = 2$ et $BC = 3$: BA vaut les deux tiers de BC.

$\overrightarrow{BA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$x_A = -\dfrac{2}{3}$

Le signe de l'abscisse dit de quel côté de l'origine se trouve le point : du côté de C, positive ; de l'autre côté, négative.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/3` → La longueur est la bonne, mais A n'est pas du côté de C : $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de sens contraires, l'abscisse est négative.

`-3/2` → Tu as divisé BC par BA. On cherche k tel que $\overrightarrow{BA} = k\,\overrightarrow{BC}$: c'est BA divisé par l'unité BC.

`-0.67` / `-0.667` / `-0.6667` / `-0.66` / `-0.7` → C'est une valeur approchée de l'abscisse. On demande la valeur exacte : une fraction.

Maths à la carte — ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 14 · PRATIQUE

Changer d'origine

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, les points A et B ont pour abscisses respectives 3 et -1.

On garde le même vecteur $\overrightarrow{OI}$ mais on prend A pour origine : on munit Δ du repère $(A, \overrightarrow{OI})$. Déterminer l'abscisse de B dans ce nouveau repère.

Donner l'abscisse de B dans le repère $(A, \overrightarrow{OI})$: un nombre.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{OI})$, l'abscisse de B est le réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{OI}$.
2. Dans l'ancien repère, $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{OI}$.

CORRECTION

Le vecteur AB — Arrivée moins départ, dans l'ancien repère.

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{OI} = (-1 - 3)\,\overrightarrow{OI}$

$\overrightarrow{AB} = -4\,\overrightarrow{OI}$

$x'_B = -4$

Changer d'origine sans changer d'unité, c'est retrancher l'abscisse de la nouvelle origine : la nouvelle abscisse de B est la mesure algébrique $\overline{AB}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Tu as calculé $x_A - x_B$. La nouvelle abscisse de B se lit sur $\overrightarrow{AB}$: c'est $x_B - x_A$, l'arrivée moins le départ.

-1 → C'est l'abscisse de B dans l'ancien repère, d'origine O. Dans le nouveau, l'origine est A : on lit $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 15 · RAISONNEMENT

Une égalité de vecteurs

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, le point M vérifie $\overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OI} + 3\,\overrightarrow{IM}$.

Déterminer l'abscisse x du point M.

Donner la valeur de x : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : 1/2 — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ ne part pas de O. Décompose-le en passant par O (relation de Chasles).
2. $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}$. Remplace, puis écris tout en fonction de $\overrightarrow{OI}$ avec $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI}$.

CORRECTION

Chasles —

$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}$

On remplace —

$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}$

D'où $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$.

$x = \dfrac{1}{2}$

Pour lire une abscisse, on ramène tous les vecteurs à l'origine O grâce à la relation de Chasles, puis on résout comme une équation : ici $x = 2 + 3(x - 1)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/4 → Tu as écrit $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OM}$. C'est l'inverse : $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}$, l'arrivée moins le départ.

-1 → Tu as remplacé $\overrightarrow{IM}$ par $\overrightarrow{OM}$: $x = 2 + 3x$. Mais $\overrightarrow{IM}$ part de I, pas de O : $\overrightarrow{IM} = (x - 1)\overrightarrow{OI}$.

EXERCICE 16 · RAISONNEMENT

Nouvelle origine, nouvelle unité

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, les points A, B et M ont pour abscisses respectives 1, 3 et 6.

Déterminer l'abscisse de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$.

Donner l'abscisse de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$: un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `5/2` — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$, l'abscisse de M est le réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.
2. Écris $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$, puis compare.

   $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A)\,\overrightarrow{OI}$

CORRECTION

Les deux vecteurs —

$\overrightarrow{AM} = (6 - 1)\,\overrightarrow{OI} = 5\,\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{AB} = (3 - 1)\,\overrightarrow{OI} = 2\,\overrightarrow{OI}$

Comparer — $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AM} = 5 \times \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\,\overrightarrow{AB}$

$x'_M = \dfrac{5}{2}$

Nouvelle abscisse $= \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$: on retranche l'abscisse de la nouvelle origine, puis on divise par la nouvelle unité.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Tu as divisé 6 par 2 sans changer d'origine. Dans le nouveau repère, on mesure à partir de A : $\overline{AM} = 6 - 1 = 5$.

5 → $\overline{AM} = 5$, c'est la distance en unités OI. Mais l'unité du nouveau repère est $AB = 2$: il faut encore diviser.

EXERCICE 17 · BASE **Le milieu sur une droite**

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, les points A et B ont pour abscisses respectives -3 et 8.

Calculer l'abscisse du milieu K du segment $[AB]$.

Donner la valeur de x_K : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `5/2` — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le milieu est à mi-chemin : son abscisse est la moyenne des deux abscisses.
2. Additionne les deux abscisses, puis divise par 2.

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$$

CORRECTION

La moyenne —

$$x_K = \frac{-3 + 8}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x_K = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Vérification : de -3 à $2{,}5$ il y a $5{,}5$, et de $2{,}5$ à 8 aussi. Le milieu, c'est la **moyenne** des abscisses.

PIÈGES ANTICIPÉS

`11/2` → Tu as pris la moitié de la **différence** $8 - (-3)$: c'est la demi-longueur $\frac{AB}{2}$, pas la position du milieu. On fait la moyenne : on additionne.

5 → Tu as additionné les abscisses sans diviser par 2.

EXERCICE 18 · BASE **L'autre extrémité**

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, le point A a pour abscisse -4 et le point K a pour abscisse 1.

Déterminer l'abscisse du point B tel que K soit le milieu du segment $[AB]$.

Donner la valeur de x_B : un nombre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. K est le milieu de $[AB]$: $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$. Ici, l'inconnue est x_B.
2. Multiplie par 2 : $x_A + x_B = 2\,x_K$.

CORRECTION

La relation —

$$\frac{-4 + x_B}{2} = 1$$

On multiplie par 2, puis on isole x_B.

$$-4 + x_B = 2$$

$$x_B = 6$$

Retiens la formule du symétrique : $x_B = 2\,x_K - x_A$. De A à K on avance de 5 ; de K à B, encore de 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → Tu as calculé $2\,x_K + x_A = 2 - 4$. C'est $2\,x_K - x_A = 2 - (-4)$: attention au signe de x_A.

-3/2 → Tu as calculé le milieu de $[AK]$. Ici, K est déjà le milieu : on cherche l'autre extrémité, le symétrique de A par rapport à K.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Un milieu en fractions

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, les points A et B ont pour abscisses respectives $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{1}{2}$.

Calculer l'abscisse du milieu K du segment $[AB]$.

Donner la valeur exacte de x_K : une fraction.

Réponse attendue : 1/12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par la somme $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}$: mets les deux fractions au même dénominateur.
2. La somme vaut $\dfrac{1}{6}$. Diviser par 2, c'est multiplier le dénominateur par 2.

CORRECTION

La somme —

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

La moitié —

$$x_K = \frac{1}{6} \div 2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

$x_K = \dfrac{1}{12}$

La règle du milieu ne change pas avec des fractions : la somme, puis la moitié. Diviser par 2 revient à multiplier par $\frac{1}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/6` → $\frac{1}{6}$ est la somme des deux abscisses. Il reste à la diviser par 2.

`7/12` → Tu as additionné $\frac{2}{3}$ et $+\frac{1}{2}$. L'abscisse de B est **négative** : $\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$.

`0.08 / 0.083 / 0.0833 / 0.1` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte de x_K : une fraction.

EXERCICE 20 · PRATIQUE

Un paramètre au milieu

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, les points A et B ont pour abscisses respectives $a - 1$ et $a + 5$, où a est un réel. Le milieu du segment $[AB]$ a pour abscisse 7.

Déterminer a.

Donner la valeur de a : un nombre.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'abscisse du milieu avec la formule de la moyenne, en fonction de a.
2. La somme $(a - 1) + (a + 5)$ se simplifie en $2a + 4$. Il reste une équation du premier degré.

CORRECTION

Le milieu —

$$\frac{(a - 1) + (a + 5)}{2} = \frac{2a + 4}{2} = a + 2$$

L'équation —

$a + 2 = 7$

$a = 5$

Vérification : A a pour abscisse 4, B a pour abscisse 10, et leur moyenne est bien 7.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2` → Tu as écrit $2a + 4 = 7$: la somme, sans la diviser par 2. Le milieu, c'est $\frac{2a+4}{2} = a + 2$.

`7` → 7 est l'abscisse du milieu, donnée par l'énoncé. On cherche a : écris l'équation $\frac{(a-1)+(a+5)}{2} = 7$.

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

Même milieu

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, les points A, B et C ont pour abscisses respectives -3, 5 et 4.

Déterminer l'abscisse du point D tel que les segments $[AB]$ et $[CD]$ aient le même milieu.

Donner la valeur de x_D : un nombre.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord l'abscisse du milieu commun : c'est celui de $[AB]$, que tu connais entièrement.
2. Ce point est aussi le milieu de $[CD]$: D est le symétrique de C par rapport à lui.

CORRECTION

Le milieu de [AB] —

$$x_K = \frac{-3+5}{2} = 1$$

Le symétrique de C — K est aussi le milieu de $[CD]$.

$$x_D = 2\,x_K - x_C = 2 - 4$$

$$x_D = -2$$

Deux segments ont le même milieu exactement quand les sommes des abscisses de leurs extrémités sont égales : $x_A + x_B = x_C + x_D$, ici $2 = 4 + x_D$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → 1 est l'abscisse du milieu commun. Il reste à trouver D, le symétrique de C par rapport à ce milieu.

2 → Tu as calculé $x_C - 2\,x_K$. Le symétrique de C par rapport à K, c'est $2\,x_K - x_C$.

EXERCICE 22 · RAISONNEMENT

Du milieu aux extrémités

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que $OI = 1$, le segment $[AB]$ a pour milieu le point K d'abscisse 1, et sa longueur est $AB = 10$. On sait de plus que $x_A < x_B$.

Déterminer l'abscisse du point A.

Donner la valeur de x_A : un nombre.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le milieu partage $[AB]$ en deux moitiés égales. Combien vaut KA ?
2. $KA = 5$: il y a deux points à distance 5 de K. Comme $x_A < x_B$, le point A est celui de gauche.

CORRECTION

La demi-longueur —

$$KA = KB = \frac{AB}{2} = 5$$

Deux candidats — Les points à distance 5 de K ont pour abscisses $1 - 5$ et $1 + 5$. Comme $x_A < x_B$, A prend la plus petite.

$$x_A = 1 - 5$$

$x_A = -4$

Vérification : $x_B = 6$, le milieu de -4 et 6 est bien 1, et $AB = |6 - (-4)| = 10$. Sans la condition $x_A < x_B$, on ne saurait pas lequel des deux points s'appelle A.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est l'abscisse de l'extrémité de droite. Or $x_A < x_B$: A est l'extrémité de **gauche**.

-9 → Tu as reculé de toute la longueur $AB = 10$ depuis K. Le milieu est à mi-chemin : $KA = \frac{AB}{2} = 5$.

EXERCICE 23 · BASE

Une mesure algébrique

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$, les points A et B ont pour abscisses respectives 3 et -2.

Calculer la mesure algébrique $\overline{AB}$.

Donner la valeur de $\overline{AB}$: un nombre.

Réponse attendue : -5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overline{AB}$ se lit « de A vers B » : A est le départ, B l'arrivée.
2. L'abscisse d'arrivée moins l'abscisse de départ.
   $\overline{AB} = x_B - x_A$

CORRECTION

Arrivée moins départ —

$\overline{AB} = x_B - x_A = -2 - 3$

$\overline{AB} = -5$

Le résultat est négatif : de A vers B, on va dans le sens contraire de $\overrightarrow{OI}$. La distance, elle, est $AB = 5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Tu as calculé $x_A - x_B$, ou la distance AB. La mesure algébrique $\overline{AB}$ garde son signe : c'est $x_B - x_A$.

1 → Tu as additionné les deux abscisses. Une mesure algébrique est une **différence** : arrivée moins départ.

EXERCICE 24 · BASE

Une distance sur la droite

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que $OI = 1$, les points A et B ont pour abscisses respectives $-\dfrac{7}{2}$ et 1.

Calculer la distance AB.

Donner la valeur exacte de AB : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `9/2` — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est unitaire : la distance est la valeur absolue de la différence des abscisses.
   $AB = |x_B - x_A|$
2. Attention à la soustraction d'un nombre négatif : $1 - \left(-\frac{7}{2}\right) = 1 + \frac{7}{2}$.

CORRECTION

La différence —

$$x_B - x_A = 1 - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{2} + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$$

$$AB = \left|\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}$$

Une distance n'est jamais négative : on prend la valeur absolue de $x_B - x_A$. Ici $AB = 4{,}5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-9/2` → Une distance est positive. Tu as calculé $x_A - x_B$ sans prendre la valeur absolue.

`5/2` → Tu as calculé $1 - \frac{7}{2}$. Or $x_A = -\frac{7}{2}$: $1 - \left(-\frac{7}{2}\right) = 1 + \frac{7}{2}$.

EXERCICE 25 · PRATIQUE

Deux points à la même distance

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que $OI = 1$, le point A a pour abscisse -1.

Déterminer les abscisses des points M de Δ tels que $AM = 3$.

Écrire l'ensemble des abscisses trouvées entre accolades, par exemple {-2;2}.

Réponse attendue : `{-4;2}` — aussi acceptées : {-4 ; 2} · -4;2 · {2;-4} · -4 et 2 · {-4,2} · x = -4 ou x = 2 · -4 ou 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur une droite, il y a deux points à une distance donnée de A : un de chaque côté.
2. Note x l'abscisse de M. La condition s'écrit $|x - (-1)| = 3$.
   $x = x_A + 3 \quad \text{ou} \quad x = x_A - 3$

CORRECTION

La condition —

$$AM = 3 \iff |x + 1| = 3$$

Deux cas —

$$x + 1 = 3 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -3$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

Une distance donnée autour d'un point, c'est **deux** points sur la droite, un de chaque côté : $x_A + d$ et $x_A - d$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2} / 2` → Il y a un deuxième point, de l'autre côté de A : $-1 - 3 = -4$. Sur une droite, à une distance donnée, on trouve toujours deux points.

`{-4} / -4` → Il y a un deuxième point, de l'autre côté de A : $-1 + 3 = 2$.

`{-3;3} / -3;3 / {3;-3}` → Tu as cherché les points à distance 3 de l'origine O. On mesure à partir de A, d'abscisse -1.

EXERCICE 26 · PRATIQUE

Plus près que 2

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que $OI = 1$, le point B a pour abscisse 3.

Déterminer l'ensemble des abscisses x des points M de Δ tels que $BM < 2$. On l'écrira sous forme d'intervalle.

Écrire l'ensemble sous forme d'intervalle, par exemple]0;3[.

Réponse attendue : `]1;5[` — aussi acceptées :]1,5[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La distance BM s'écrit $|x - 3|$. La condition est donc $|x - 3| < 2$.
2. Les points à moins de 2 de B sont ceux du segment centré en B : entre $3 - 2$ et $3 + 2$.

CORRECTION

La condition —

$$BM < 2 \iff |x - 3| < 2$$

Un encadrement —

$$|x - 3| < 2 \iff -2 < x - 3 < 2 \iff 1 < x < 5$$

$$x \in]1\,;5[$$

$|x - x_B| < d$ équivaut à $x_B - d < x < x_B + d$: les points à moins de d de B forment un intervalle centré en x_B. Les bornes sont exclues, car l'inégalité est stricte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;5[ / ]-∞;5[` → Tu as écrit $x - 3 < 2$, sans valeur absolue. Mais un point très à gauche, d'abscisse -10, est loin de B : $BM = |x - 3|$, et il faut aussi $x - 3 > -2$.

`[1;5]` → L'inégalité est **stricte** : $BM < 2$. Les points d'abscisses 1 et 5 sont exactement à distance 2, ils sont exclus : crochets ouverts.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

Deux vecteurs colinéaires

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \vec{OI})$, les points A, B, C et D ont pour abscisses respectives 1, 7, -2 et 1.

Déterminer le réel k tel que $\vec{AB} = k\,\vec{CD}$.

Donner la valeur de k : un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur une droite, $\vec{AB} = k\,\vec{CD}$ équivaut à $\overline{AB} = k\,\overline{CD}$.
2. Calcule les deux mesures algébriques, arrivée moins départ, puis divise.

CORRECTION

Les mesures algébriques —

$\overline{AB} = 7 - 1 = 6 \quad ; \quad \overline{CD} = 1 - (-2) = 3$

Le rapport —

$6 = k \times 3$

$k = 2$

Sur une droite, comparer deux vecteurs revient à comparer leurs mesures algébriques : $k = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/2 → Tu as divisé $\overline{CD}$ par $\overline{AB}$. On cherche k tel que $\overline{AB} = k\,\overline{CD}$: $k = \frac{6}{3}$.

-6 → $\overline{CD} = x_D - x_C = 1 - (-2) = 3$, pas $1 - 2$.

EXERCICE 28 · RAISONNEMENT

Bout à bout

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \vec{OI})$, le point A a pour abscisse 2. Les points B et C de Δ vérifient $\overline{AB} = 3$ et $\overline{BC} = -5$.

Déterminer l'abscisse du point C.

Donner la valeur de x_C : un nombre.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par l'abscisse de B : $\overline{AB} = x_B - x_A$.
2. Ou directement, par la relation de Chasles : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

CORRECTION

Chasles —

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 3 + (-5) = -2$

L'abscisse de C —

$x_C = x_A + \overline{AC} = 2 + (-2)$

$x_C = 0$

Les mesures algébriques s'ajoutent bout à bout (relation de Chasles) : on avance de 3, puis on recule de 5. Le point C est l'origine O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Tu as ajouté 5 au lieu de -5. $\overline{BC} = -5$: de B vers C, on recule.

`-2` → -2 est la mesure algébrique $\overline{AC}$. L'abscisse de C s'obtient en partant de A : $x_C = x_A + \overline{AC}$.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

Un point hors du segment

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \vec{OI})$, les points A et B ont pour abscisses respectives -1 et 4.

Déterminer l'abscisse x du point G tel que $\vec{GA} = 2\,\vec{GB}$.

Donner la valeur de x : un nombre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis l'égalité de vecteurs par les mesures algébriques : $\overline{GA} = 2\,\overline{GB}$.
2. $\overline{GA} = -1 - x$ et $\overline{GB} = 4 - x$. Résous l'équation obtenue.

CORRECTION

Les mesures —

$\overline{GA} = -1 - x \quad ; \quad \overline{GB} = 4 - x$

L'équation —

$-1 - x = 2\,(4 - x) \iff -1 - x = 8 - 2x$

$x = 9$

Vérification : $\overline{GA} = -10$ et $\overline{GB} = -5$, l'un est bien le double de l'autre. G est hors du segment $[AB]$, du côté de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7/3` → Tu as trouvé le point tel que $\vec{GA} = -2\,\vec{GB}$, celui du segment $[AB]$. Ici le coefficient est $+2$: les deux vecteurs ont le même sens.

EXERCICE 30 · DEFI

Deux fois plus loin

Sur une droite Δ munie d'un repère cartésien $(O, \vec{OI})$ tel que $OI = 1$, les points A et B ont pour abscisses respectives 0 et 6.

Déterminer les abscisses de **tous** les points M de Δ tels que $MA = 2\,MB$.

Écrire l'ensemble des abscisses trouvées entre accolades, par exemple {-2;2}.

Réponse attendue : `{4;12}` — aussi acceptées : {4 ; 12} · 4;12 · {12;4} · 4 et 12 · {4,12} · x = 4 ou x = 12 · 4 ou 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note x l'abscisse de M : $MA = |x|$ et $MB = |x-6|$. Où peut être M : entre A et B, à gauche de A, à droite de B ?
2. $MA = 2\,MB$ revient à $\overline{MA} = 2\,\overline{MB}$ ou $\overline{MA} = -2\,\overline{MB}$: deux équations du premier degré.

CORRECTION

La condition —

$$MA = 2\,MB \iff |x| = 2\,|x-6|$$

Deux cas —

$$x = 2\,(x-6) \quad \text{ou} \quad x = -2\,(x-6)$$

Le premier cas donne $x = 12$, le second $3x = 12$.

$$x = 12 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

Vérification : pour $x = 4$, $MA = 4$ et $MB = 2$; pour $x = 12$, $MA = 12$ et $MB = 6$. Une égalité de distances donne deux équations : les deux signes possibles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4} / 4` → Tu as trouvé le point situé entre A et B. Il en existe un second, au-delà de B : pense à l'autre signe, $x = 2\,(x-6)$.

`{12} / 12` → Il existe un second point, entre A et B : pense à l'autre signe, $x = -2\,(x-6)$.

`{2;-6} / {-6;2} / -6;2 / 2;-6` → Tu as résolu $MB = 2\,MA$. L'énoncé dit l'inverse : c'est MA qui est le double de MB.

EXERCICE 31 · BASE

Des vecteurs aux coordonnées

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le point M vérifie $\overrightarrow{OM} = 3\,\overrightarrow{OI} - 2\,\overrightarrow{OJ}$.

Donner les coordonnées du point M.

Écrire le couple de coordonnées de M, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(3;-2)` — aussi acceptées : (3,-2) · M(3;-2) · M(3,-2) · M = (3;-2) · M = (3,-2) · M : (3;-2) · 3;-2 · x = 3 ; y = -2 · x = 3 et y = -2 · x = 3, y = -2 · xM = 3 ; yM = -2 · x_M = 3 ; y_M = -2 · xM = 3 et yM = -2 · x_M = 3 et y_M = -2 · xM = 3, yM = -2 · x_M = 3, y_M = -2 · y = -2 ; x = 3 · y = -2 et x = 3 · y = -2, x = 3 · yM = -2 ; xM = 3 · y_M = -2 ; x_M = 3 · yM = -2 et xM = 3 · y_M = -2 et x_M = 3 · (x;y) = (3;-2) · (x,y) = (3,-2) · (xM;yM) = (3;-2) · (x_M;y_M) = (3;-2) · M(x = 3 ; y = -2) · 3 et -2 · (3 et -2) · M(3 et -2) · x = 3 y = -2 · xM = 3 yM = -2 · x_M = 3 y_M = -2 · (+3;-2) · (3.0;-2) · (3;-2.0) · (3,0;-2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient de $\overrightarrow{OI}$ est l'abscisse, celui de $\overrightarrow{OJ}$ est l'ordonnée.

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ} \iff M(x\,;y)$$

2. Garde le signe du coefficient de $\overrightarrow{OJ}$.

CORRECTION

Lire les coefficients —

$\overrightarrow{OM} = 3\,\overrightarrow{OI} + (-2)\,\overrightarrow{OJ}$

$M(3\,;-2)$

Le couple de coordonnées se lit sur la décomposition de $\overrightarrow{OM}$: l'abscisse devant $\overrightarrow{OI}$, l'ordonnée devant $\overrightarrow{OJ}$, dans cet ordre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;3) / (-2,3) / M(-2;3) / M(-2,3) / M = (-2;3) / -2;3 / x = -2 ; y = 3 / x = -2 et y = 3 / x = -2, y = 3 / xM = -2 ; yM = 3 / x_M = -2 ; y_M = 3 / (x;y) = (-2;3) / -2 et 3 / (-2 et 3) / M(-2 et 3) / x = -2 y = 3 / xM = -2 yM = 3 / x_M = -2 y_M = 3` → Tes deux nombres sont dans le désordre. L'abscisse, coefficient de $\overrightarrow{OI}$, vient en premier.

`(3;2) / (3,2) / M(3;2) / M(3,2) / M = (3;2) / 3;2 / x = 3 ; y = 2 / x = 3 et y = 2 / x = 3, y = 2 / xM = 3 ; yM = 2 / x_M = 3 ; y_M = 2 / (x;y) = (3;2) / 3 et 2 / (3 et 2) / M(3 et 2) / x = 3 y = 2 / xM = 3 yM = 2 / x_M = 3 y_M = 2` → Le coefficient de $\overrightarrow{OJ}$ est -2, pas 2 : l'ordonnée de M est négative.

EXERCICE 32 · BASE **Sur l'axe des ordonnées**

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le point M vérifie $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OJ}$.

Donner les coordonnées du point M.

Écrire le couple de coordonnées de M, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(0;-1)` — aussi acceptées : (0,-1) · M(0;-1) · M(0,-1) · M = (0;-1) · M = (0,-1) · M : (0;-1) · 0;-1 · x = 0 ; y = -1 · x = 0 et y = -1 · x = 0, y = -1 · xM = 0 ; yM = -1 · x_M = 0 ; y_M = -1 · xM = 0 et yM = -1 · x_M = 0 et y_M = -1 · xM = 0, yM = -1 · x_M = 0, y_M = -1 · y = -1 ; x = 0 · y = -1 et x = 0 · y = -1, x = 0 · yM = -1 ; xM = 0 · y_M = -1 ; x_M = 0 · yM = -1 et xM = 0 · y_M = -1 et x_M = 0 · (x;y) = (0;-1) · (x,y) = (0,-1) · (xM;yM) = (0;-1) · (x_M;y_M) = (0;-1) · M(x = 0 ; y = -1) · 0 et -1 · (0 et -1) · M(0 et -1) · x = 0 y = -1 · xM = 0 yM = -1 · x_M = 0 y_M = -1 · (0.0;-1) · (0;-1.0) · (0,0;-1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\overrightarrow{OM}$ sous la forme $x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$. Combien de $\overrightarrow{OI}$ y a-t-il ?
2. $-\overrightarrow{OJ} = 0\,\overrightarrow{OI} + (-1)\,\overrightarrow{OJ}$.

CORRECTION

Décomposer —

$\overrightarrow{OM} = 0\,\overrightarrow{OI} + (-1)\,\overrightarrow{OJ}$

$M(0\,;-1)$

Un point de l'axe des ordonnées a toujours une abscisse nulle. Ici, M est le symétrique de J par rapport à O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1;0) / (-1,0) / M(-1;0) / M(-1,0) / M = (-1;0) / -1;0 / x = -1 ; y = 0 / x = -1 et y = 0 / x = -1, y = 0 / xM = -1 ; yM = 0 / x_M = -1 ; y_M = 0 / (x;y) = (-1;0) / -1 et 0 / (-1 et 0) / M(-1 et 0) / x = -1 y = 0 / xM = -1 yM = 0 / x_M = -1 y_M = 0` → Tu as écrit l'ordonnée en premier. M est sur l'axe des **ordonnées** : son abscisse est 0, et elle vient en premier.

`(0;1) / (0,1) / M(0;1) / M(0,1) / M = (0;1) / 0;1 / x = 0 ; y = 1 / x = 0 et y = 1 / x = 0, y = 1 / xM = 0 ; yM = 1 / x_M = 0 ; y_M = 1 / (x;y) = (0;1) / 0 et 1 / (0 et 1) / M(0 et 1) / x = 0 y = 1 / xM = 0 yM = 1 / x_M = 0 y_M = 1` → $(0\,;1)$, ce sont les coordonnées de J. Le signe moins envoie M de l'autre côté de O.

EXERCICE 33 · BASE **Le parallélogramme ONMP**

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on note N le point de l'axe des abscisses d'abscisse 4, et P le point de l'axe des ordonnées d'ordonnée -3. Le point M est tel que $ONMP$ est un parallélogramme.

Donner les coordonnées du point M.

Écrire le couple de coordonnées de M, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(4;-3)` — aussi acceptées : (4,-3) · M(4;-3) · M(4,-3) · M = (4;-3) · M = (4,-3) · M : (4;-3) · 4;-3 · x = 4 ; y = -3 · x = 4 et y = -3 · x = 4, y = -3 · xM = 4 ; yM = -3 · x_M = 4 ; y_M = -3 · xM = 4 et yM = -3 · x_M = 4 et y_M = -3 · xM = 4, yM = -3 · x_M = 4, y_M = -3 · y = -3 ; x = 4 · y = -3 et x = 4 · y = -3, x = 4 · yM = -3 ; xM = 4 · y_M = -3 ; x_M = 4 · yM = -3 et xM = 4 · y_M = -3 et x_M = 4 · (x;y) = (4;-3) · (x,y) = (4,-3) · (xM;yM) = (4;-3) · (x_M;y_M) = (4;-3) · M(x = 4 ; y = -3) · 4 et -3 · (4 et -3) · M(4 et -3) · x = 4 y = -3 · xM = 4 yM = -3 · x_M = 4 y_M = -3 · (+4;-3) · (4.0;-3) · (4;-3.0) · (4,0;-3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $ONMP$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ (règle du parallélogramme).
2. $\overrightarrow{ON} = 4\,\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OP} = -3\,\overrightarrow{OJ}$.

CORRECTION

Règle du parallélogramme —

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{OM} = 4\,\overrightarrow{OI} - 3\,\overrightarrow{OJ}$$

$$M(4\,;-3)$$

C'est la construction même des coordonnées : on projette M sur chaque axe, parallèlement à l'autre. L'abscisse se lit sur (OI), l'ordonnée sur (OJ).

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-3;4) / (-3,4) / M(-3;4) / M(-3,4) / M = (-3;4) / -3;4 / x = -3 ; y = 4 / x = -3 et y = 4 / x = -3, y = 4 / xM = -3 ; yM = 4 / x_M = -3 ; y_M = 4 / (x;y) = (-3;4) / -3 et 4 / (-3 et 4) / M(-3 et 4) / x = -3 y = 4 / xM = -3 yM = 4 / x_M = -3 y_M = 4` → Tes deux nombres sont dans le désordre : l'abscisse, lue sur l'axe (OI), vient en premier.

EXERCICE 34 · PRATIQUE

Réduire avant de lire

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le point M vérifie $\overrightarrow{OM} = 2\,(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) - 3\,\overrightarrow{OJ}$.

Donner les coordonnées du point M.

Écrire le couple de coordonnées de M, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(2;-1)` — aussi acceptées : (2,-1) · M(2;-1) · M(2,-1) · M = (2;-1) · M = (2,-1) · M : (2;-1) · 2;-1 · x = 2 ; y = -1 · x = 2 et y = -1 · x = 2, y = -1 · xM = 2 ; yM = -1 · x_M = 2 ; y_M = -1 · xM = 2 et yM = -1 · x_M = 2 et y_M = -1 · xM = 2, yM = -1 · x_M = 2, y_M = -1 · y = -1 ; x = 2 · y = -1 et x = 2 · y = -1, x = 2 · yM = -1 ; xM = 2 · y_M = -1 ; x_M = 2 · yM = -1 et xM = 2 · y_M = -1 et x_M = 2 · (x;y) = (2;-1) · (x,y) = (2,-1) · (xM;yM) = (2;-1) · (x_M;y_M) = (2;-1) · M(x = 2 ; y = -1) · 2 et -1 · (2 et -1) · M(2 et -1) · x = 2 y = -1 · xM = 2 yM = -1 · x_M = 2 y_M = -1 · (+2;-1) · (2.0;-1) · (2;-1.0) · (2,0;-1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe d'abord, puis regroupe les $\overrightarrow{OI}$ d'un côté et les $\overrightarrow{OJ}$ de l'autre.
2. Le 2 multiplie **les deux** vecteurs de la parenthèse.

$$2\,(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = 2\,\overrightarrow{OI} + 2\,\overrightarrow{OJ}$$

CORRECTION

Développer —

$$\overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OI} + 2\,\overrightarrow{OJ} - 3\,\overrightarrow{OJ}$$

Regrouper —

$$\overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$$

$$M(2\,;-1)$$

On calcule avec les vecteurs comme avec des lettres : on développe, on regroupe. Les coordonnées se lisent sur l'écriture **réduite** $x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;-2) / (2,-2) / M(2;-2) / M(2,-2) / M = (2;-2) / 2;-2 / x = 2 ; y = -2 / x = 2 et y = -2 / x = 2, y = -2 / xM = 2 ; yM = -2 / x_M = 2 ; y_M = -2 / (x;y) = (2;-2) / 2 et -2 / (2 et -2) / M(2 et -2) / x = 2 y = -2 / xM = 2 yM = -2 / x_M = 2 y_M = -2` → Le 2 multiplie aussi $\overrightarrow{OJ}$: $2\,(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = 2\,\overrightarrow{OI} + 2\,\overrightarrow{OJ}$. L'ordonnée est $2 - 3$.

`(-1;2) / (-1,2) / M(-1;2) / M(-1,2) / M = (-1;2) / -1;2 / x = -1 ; y = 2 / x = -1 et y = 2 / x = -1, y = 2 / xM = -1 ; yM = 2 / x_M = -1 ; y_M = 2 / (x;y) = (-1;2) / -1 et 2 / (-1 et 2) / M(-1 et 2) / x = -1 y = 2 / xM = -1 yM = 2 / x_M = -1 y_M = 2` → Tes deux nombres sont dans le désordre : l'abscisse, coefficient de $\overrightarrow{OI}$, vient en premier.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

Une combinaison de deux points

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;3)$ et $B(4\,;-1)$. Le point M vérifie $\overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

Déterminer les coordonnées du point M.

Écrire le couple de coordonnées de M, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(-2;7)` — aussi acceptées : (-2,7) · M(-2;7) · M(-2,7) · M = (-2;7) · M = (-2,7) · M : (-2;7) · -2;7 · x = -2 ; y = 7 · x = -2 et y = 7 · x = -2, y = 7 · xM = -2 ; yM = 7 · x_M = -2 ; y_M = 7 · xM = -2 et yM = 7 · x_M = -2 et y_M = 7 · xM = -2, yM = 7 · x_M = -2, y_M = 7 · y = 7 ; x = -2 · y = 7 et x = -2 · y = 7, x = -2 · yM = 7 ; xM = -2 · y_M = 7 ; x_M = -2 · yM = 7 et xM = -2 · y_M = 7 et x_M = -2 · (x;y) = (-2;7) · (x,y) = (-2,7) · (xM;yM) = (-2;7) · (x_M;y_M) = (-2;7) · M(x = -2 ; y = 7) · -2 et 7 · (-2 et 7) · M(-2 et 7) · x = -2 y = 7 · xM = -2 yM = 7 · x_M = -2 y_M = 7 · (-2;+7) · M(-2;+7) · (-2.0;7) · (-2;7.0) · (-2,0;7)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ avec $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + 3\,\overrightarrow{OJ}$.
2. Calcule coordonnée par coordonnée : $x_M = 2\,x_A - x_B$ et $y_M = 2\,y_A - y_B$.

CORRECTION

L'abscisse —

$x_M = 2 \times 1 - 4 = -2$

L'ordonnée —

$y_M = 2 \times 3 - (-1) = 7$

$M(-2\,;7)$

Une combinaison de vecteurs se calcule axe par axe : la même opération sur les abscisses, puis sur les ordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;5)` / `(-2,5)` / `M(-2;5)` / `M(-2,5)` / `M = (-2;5)` / `-2;5` / `x = -2 ; y = 5` / `x = -2 et y = 5` / `x = -2, y = 5` / `xM = -2 ; yM = 5` / `x_M = -2 ; y_M = 5` / `(x;y) = (-2;5)` / `-2 et 5` / `(-2 et 5)` / `M(-2 et 5)` / `x = -2 y = 5` / `xM = -2 yM = 5` / `x_M = -2 y_M = 5` → L'ordonnée de B est -1 : $2 \times 3 - (-1) = 6 + 1 = 7$.

`(6;5)` / `(6,5)` / `M(6;5)` / `M(6,5)` / `M = (6;5)` / `6;5` / `x = 6 ; y = 5` / `x = 6 et y = 5` / `x = 6, y = 5` / `xM = 6 ; yM = 5` / `x_M = 6 ; y_M = 5` / `(x;y) = (6;5)` / `6 et 5` / `(6 et 5)` / `M(6 et 5)` / `x = 6 y = 5` / `xM = 6 yM = 5` / `x_M = 6 y_M = 5` → Tu as calculé $2\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. L'énoncé **retranche** $\overrightarrow{OB}$.

EXERCICE 36 · RAISONNEMENT

Un point sur un axe

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère le point $M(2a - 1\,;a + 3)$, où a est un réel. On sait que M appartient à l'axe des ordonnées.

Déterminer l'ordonnée du point M.

Donner la valeur de y_M : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `7/2` — aussi acceptées : 3.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle. Quelle équation cela donne-t-il pour a ?

2. Résous $2a - 1 = 0$, puis remplace a dans l'ordonnée $a + 3$.

CORRECTION

L'abscisse est nulle —

$$2a - 1 = 0 \iff a = \frac{1}{2}$$

L'ordonnée —

$$y_M = \frac{1}{2} + 3$$

$$y_M = \frac{7}{2}$$

Sur l'axe des ordonnées, c'est l'**abscisse** qui est nulle ; sur l'axe des abscisses, c'est l'ordonnée. Ici $M\left(0\,;\frac{7}{2}\right)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → $\frac{1}{2}$ est la valeur de a. La question demande l'ordonnée de M : remplace a dans $a + 3$.

`0` → Tu as mis l'ordonnée à zéro : c'est la condition pour l'axe des **abscisses**. Sur l'axe des ordonnées, l'abscisse est nulle : $2a - 1 = 0$.

EXERCICE 37 · BASE

Une abscisse nulle

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le point $M(m + 2\,;5)$ appartient à l'axe des ordonnées.

Déterminer le réel m.

Donner la valeur de m : un nombre.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur l'axe des ordonnées, quelle coordonnée est nulle ?
2. L'abscisse $m + 2$ doit être nulle.

CORRECTION

La condition —

$$m + 2 = 0$$

$$m = -2$$

Les points de l'axe des ordonnées sont ceux d'abscisse nulle : $M(0\,;5)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Avec $m = 2$, l'abscisse vaut 4. Il faut $m + 2 = 0$, donc $m = -2$.

EXERCICE 38 · BASE

Deux points confondus

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, les points $A(2a - 1\,;4)$ et $B(5\,;b + 1)$ sont confondus.

Déterminer les réels a et b.

Écrire le couple $(a\,;b)$, entre parenthèses, a d'abord.

Réponse attendue : `(3;3)` — aussi acceptées : (3,3) · 3;3 · a = 3 ; b = 3 · a = 3 et b = 3 · a = 3, b = 3 · a = 3 b = 3 · b = 3 ; a = 3 · b = 3 et a = 3 · b = 3, a = 3 · (a;b) = (3;3) · (a,b) = (3,3) · 3 et 3 · (3 et 3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux points sont confondus exactement quand ils ont la même abscisse **et** la même ordonnée.
2. Écris deux équations : $2a-1=5$ et $4=b+1$.

CORRECTION

Les abscisses —

$2a-1=5 \iff a=3$

Les ordonnées —

$b+1=4 \iff b=3$

$a=3 \quad ; \quad b=3$

Le couple de coordonnées d'un point est **unique** : deux points sont confondus si et seulement si leurs coordonnées sont égales une à une.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(6;3) / (6,3) / 6;3 / a = 6 ; b = 3 / a = 6 et b = 3 / a = 6, b = 3 / (a;b) = (6;3) / 6 et 3` → $2a=6$ donne $a=3$: il reste à diviser par 2.

EXERCICE 39 · PRATIQUE

Partir de J

Dans un repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, le point M vérifie $\overrightarrow{JM}=3\overrightarrow{OI}$.

Donner les coordonnées du point M.

Écrire le couple de coordonnées de M, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(3;1)` — aussi acceptées : (3,1) · M(3;1) · M(3,1) · M = (3;1) · M = (3,1) · M : (3;1) · 3;1 · x = 3 ; y = 1 · x = 3 et y = 1 · x = 3, y = 1 · xM = 3 ; yM = 1 · x_M = 3 ; y_M = 1 · xM = 3 et yM = 1 · x_M = 3 et y_M = 1 · xM = 3, yM = 1 · x_M = 3, y_M = 1 · y = 1 ; x = 3 · y = 1 et x = 3 · y = 1, x = 3 · yM = 1 ; xM = 3 · y_M = 1 ; x_M = 3 · yM = 1 et xM = 3 · y_M = 1 et x_M = 3 · (x;y) = (3;1) · (x,y) = (3,1) · (xM;yM) = (3;1) · (x_M;y_M) = (3;1) · M(x = 3 ; y = 1) · 3 et 1 · (3 et 1) · M(3 et 1) · x = 3 y = 1 · xM = 3 yM = 1 · x_M = 3 y_M = 1 · (3;+1) · M(3;+1) · (+3;1) · (3.0;1) · (3;1.0) · (3,0;1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées se lisent sur $\overrightarrow{OM}$, qui part de O. Passe par J : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JM}$.
2. Il reste à lire les coefficients de $\overrightarrow{OI}$ et de $\overrightarrow{OJ}$.

CORRECTION

Chasles —

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JM}=\overrightarrow{OJ}+3\overrightarrow{OI}$

$\overrightarrow{OM} = 3\,\overrightarrow{OI} + 1\,\overrightarrow{OJ}$

$M(3\,;1)$

Les coordonnées se lisent toujours sur le vecteur qui **part de l'origine**. Un vecteur qui part d'ailleurs se ramène à O par la relation de Chasles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3;0) / (3,0) / M(3;0) / M(3,0) / M = (3;0) / 3;0 / x = 3 ; y = 0 / x = 3 et y = 0 / x = 3, y = 0 / xM = 3 ; yM = 0 / x_M = 3 ; y_M = 0 / (x;y) = (3;0) / 3 et 0 / (3 et 0) / M(3 et 0) / x = 3 y = 0 / xM = 3 yM = 0 / x_M = 3 y_M = 0` → Tu as lu les coordonnées sur $\overrightarrow{JM}$, qui part de J. Il faut $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JM}$: l'ordonnée gagne 1.

`(1;3) / (1,3) / M(1;3) / M(1,3) / M = (1;3) / 1;3 / x = 1 ; y = 3 / x = 1 et y = 3 / x = 1, y = 3 / xM = 1 ; yM = 3 / x_M = 1 ; y_M = 3 / (x;y) = (1;3) / 1 et 3 / (1 et 3) / M(1 et 3) / x = 1 y = 3 / xM = 1 yM = 3 / x_M = 1 y_M = 3` → Tes deux nombres sont dans le désordre : l'abscisse, coefficient de $\overrightarrow{OI}$, vient en premier.

EXERCICE 40 · PRATIQUE

Un pas vers la droite

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne le point $A(-1\,;5)$. Le point B vérifie $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OI}$.

Déterminer les coordonnées du point B.

Écrire le couple de coordonnées de B, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(1;5)` — aussi acceptées : (1,5) · B(1;5) · B(1,5) · B = (1;5) · B = (1,5) · B : (1;5) · 1;5 · x = 1 ; y = 5 · x = 1 et y = 5 · x = 1, y = 5 · xB = 1 ; yB = 5 · x_B = 1 ; y_B = 5 · xB = 1 et yB = 5 · x_B = 1 et y_B = 5 · xB = 1, yB = 5 · x_B = 1, y_B = 5 · y = 5 ; x = 1 · y = 5 et x = 1 · y = 5, x = 1 · yB = 5 ; xB = 1 · y_B = 5 ; x_B = 1 · yB = 5 et xB = 1 · y_B = 5 et x_B = 1 · (x;y) = (1;5) · (x,y) = (1,5) · (xB;yB) = (1;5) · (x_B;y_B) = (1;5) · B(x = 1 ; y = 5) · 1 et 5 · (1 et 5) · B(1 et 5) · x = 1 y = 5 · xB = 1 yB = 5 · x_B = 1 y_B = 5 · (1;+5) · B(1;+5) · (+1;5) · (1.0;5) · (1;5.0) · (1,0;5)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OI} + 5\,\overrightarrow{OJ}$, puis ajoute $2\,\overrightarrow{OI}$.
2. Ajouter $2\,\overrightarrow{OI}$ ne touche qu'à une des deux coordonnées. Laquelle ?

CORRECTION

Décomposer —

$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OI} + 5\,\overrightarrow{OJ} + 2\,\overrightarrow{OI}$

Regrouper —

$\overrightarrow{OB} = 1\,\overrightarrow{OI} + 5\,\overrightarrow{OJ}$

$B(1\,;5)$

Ajouter un multiple de $\overrightarrow{OI}$ ne change que l'abscisse : le point glisse parallèlement à l'axe des abscisses, son ordonnée reste la même.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(1;7) / (1,7) / B(1;7) / B(1,7) / B = (1;7) / 1;7 / x = 1 ; y = 7 / x = 1 et y = 7 / x = 1, y = 7 / xB = 1 ; yB = 7 / x_B = 1 ; y_B = 7 / (x;y) = (1;7) / 1 et 7 / (1 et 7) / B(1 et 7) / x = 1 y = 7 / xB = 1 yB = 7 / x_B = 1 y_B = 7` → Tu as ajouté 2 aux deux coordonnées. Le vecteur ajouté est $2\overrightarrow{OI}$: il ne contient pas de $\overrightarrow{OJ}$, l'ordonnée ne bouge pas.

`(3;5) / (3,5) / B(3;5) / B(3,5) / B = (3;5) / 3;5 / x = 3 ; y = 5 / x = 3 et y = 5 / x = 3, y = 5 / xB = 3 ; yB = 5 / x_B = 3 ; y_B = 5 / (x;y) = (3;5) / 3 et 5 / (3 et 5) / B(3 et 5) / x = 3 y = 5 / xB = 3 yB = 5 / x_B = 3 y_B = 5` → L'abscisse de A est -1 : $-1+2=1$.

EXERCICE 41 · RAISONNEMENT

Un repère dans un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Le point E vérifie $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

Déterminer les coordonnées du point E dans ce repère.

Écrire le couple de coordonnées de E, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(1;2)` — aussi acceptées : (1,2) · E(1;2) · E(1,2) · E = (1;2) · E = (1,2) · E : (1;2) · 1;2 · x = 1 ; y = 2 · x = 1 et y = 2 · x = 1, y = 2 · xE = 1 ; yE = 2 · x_E = 1 ; y_E = 2 · xE = 1 et yE = 2 · x_E = 1 et y_E = 2 · xE = 1, yE = 2 · x_E = 1, y_E = 2 · y = 2 ; x = 1 · y = 2 et x = 1 · y = 2, x = 1 · yE = 2 ; xE = 1 · y_E = 2 ; x_E = 1 · yE = 2 et xE = 1 · y_E = 2 et x_E = 1 · (x;y) = (1;2) · (x,y) = (1,2) · (xE;yE) = (1;2) · (x_E;y_E) = (1;2) · E(x = 1 ; y = 2) · 1 et 2 · (1 et 2) · E(1 et 2) · x = 1 y = 2 · xE = 1 yE = 2 · x_E = 1 y_E = 2 · (1;+2) · E(1;+2) · (+1;2) · (1.0;2) · (1;2.0) · (1,0;2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Et dans un parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
2. Écris $\overrightarrow{AE}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ seulement, puis lis les coefficients.

CORRECTION

Les deux vecteurs —

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

La somme —

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}$

$E(1\,;2)$

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on lit $B(1\,;0)$, $D(0\,;1)$ et $C(1\,;1)$. Les coordonnées de E sont les coefficients de $\overrightarrow{AE}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;1) / (2,1) / E(2;1) / E(2,1) / E = (2;1) / 2;1 / x = 2 ; y = 1 / x = 2 et y = 1 / x = 2, y = 1 / xE = 2 ; yE = 1 / x_E = 2 ; y_E = 1 / (x;y) = (2;1) / 2 et 1 / (2 et 1) / E(2 et 1) / x = 2 y = 1 / xE = 2 yE = 1 / x_E = 2 y_E = 1` → Tu as remplacé $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AB}$. Dans le parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$: ce sont les côtés opposés qui sont égaux.

(1;1) / (1,1) / E(1;1) / E(1,1) / E = (1;1) / 1;1 / x = 1 ; y = 1 / x = 1 et y = 1 / x = 1, y = 1 / xE = 1 ; yE = 1 / x_E = 1 ; y_E = 1 / (x;y) = (1;1) / 1 et 1 / (1 et 1) / E(1 et 1) / x = 1 y = 1 / xE = 1 yE = 1 / x_E = 1 y_E = 1 → $(1\,;1)$, ce sont les coordonnées de C. Il reste à ajouter $\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 42 · DEFI

Changer de repère

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;1)$, $B(3\,;1)$, $C(1\,;4)$ et $M(5\,;7)$.

Les points A, B et C n'étant pas alignés, $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan. Déterminer les coordonnées du point M dans ce repère.

Écrire le couple de coordonnées de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(2;2)` — aussi acceptées : (2,2) · M(2;2) · M(2,2) · M = (2;2) · M = (2,2) · M : (2;2) · 2;2 · x = 2 ; y = 2 · x = 2 et y = 2 · x = 2, y = 2 · xM = 2 ; yM = 2 · x_M = 2 ; y_M = 2 · xM = 2 et yM = 2 · x_M = 2 et y_M = 2 · xM = 2, yM = 2 · x_M = 2, y_M = 2 · y = 2 ; x = 2 · y = 2 et x = 2 · y = 2, x = 2 · yM = 2 ; xM = 2 · y_M = 2 ; x_M = 2 · yM = 2 et xM = 2 · y_M = 2 et x_M = 2 · (x;y) = (2;2) · (x,y) = (2,2) · (xM;yM) = (2;2) · (x_M;y_M) = (2;2) · M(x = 2 ; y = 2) · 2 et 2 · (2 et 2) · M(2 et 2) · x = 2 y = 2 · xM = 2 yM = 2 · x_M = 2 y_M = 2 · (2;+2) · M(2;+2) · (+2;2) · (2.0;2) · (2;2.0) · (2,0;2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On cherche les réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.
2. Calcule les composantes : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$. Compare axe par axe.

CORRECTION

Les composantes —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

Identifier — $x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ a pour composantes $2x$ et $3y$.

$$2x = 4 \quad ; \quad 3y = 6$$

$$M(2\,;2)$$

Les coordonnées dépendent du repère : $M(5\,;7)$ dans l'un, $M(2\,;2)$ dans l'autre. On cherche toujours les coefficients de $\overrightarrow{AM}$ sur les deux vecteurs du nouveau repère.

PIÈGES ANTICIPÉS

(4;6) / (4,6) / M(4;6) / M(4,6) / M = (4;6) / 4;6 / x = 4 ; y = 6 / x = 4 et y = 6 / x = 4, y = 6 / xM = 4 ; yM = 6 / x_M = 4 ; y_M = 6 / (x;y) = (4;6) / 4 et 6 / (4 et 6) / M(4 et 6) / x = 4 y = 6 / xM = 4 yM = 6 / x_M = 4 y_M = 6 → $(4\,;6)$, ce sont les composantes de $\overrightarrow{AM}$ dans l'ancien repère. Dans le nouveau, l'unité de l'axe des abscisses est $\overrightarrow{AB}$, qui vaut $2\,\overrightarrow{OI}$: il faut encore diviser.

(5;7) / (5,7) / M(5;7) / M(5,7) / M = (5;7) / 5;7 / x = 5 ; y = 7 / x = 5 et y = 7 / x = 5, y = 7 / xM = 5 ; yM = 7 / x_M = 5 ; y_M = 7 / (x;y) = (5;7) / 5 et 7 / (5 et 7) / M(5 et 7) / x = 5 y =

Maths à la carte · ABDELKADER HAMMAMI

`7 / xM = 5 yM = 7 / x_M = 5 y_M = 7` → Ce sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On les demande dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

EXERCICE 43 · BASE

Arrivée moins départ

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(2\,;-1)$ et $B(-3\,;4)$.

Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Écrire le couple de composantes de $\overrightarrow{AB}$, entre parenthèses, la première composante d'abord.

Réponse attendue : `(-5;5)` — aussi acceptées : (-5,5) · -5;5 · -5 et 5 · (-5 et 5) · AB(-5;5) · AB(-5,5) · AB = (-5;5) · AB = (-5,5) · vecteur AB(-5;5) · vecteur AB = (-5;5) · (-5 ; 5) · (-5;+5)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les composantes de $\overrightarrow{AB}$: l'abscisse d'arrivée moins l'abscisse de départ, puis la même chose avec les ordonnées.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
2. Attention aux signes : $-3-2$ et $4-(-1)$.

CORRECTION

Première composante —

$x_B - x_A = -3 - 2 = -5$

Deuxième composante —

$y_B - y_A = 4 - (-1) = 5$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Les composantes d'un vecteur, c'est **arrivée moins départ**, une ligne par axe. Pour $\overrightarrow{BA}$, on obtiendrait les opposées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5;-5) / (5,-5) / 5;-5 / 5 et -5 / (5 et -5) / AB(5;-5) / AB(5,-5) / AB = (5;-5)` → Tu as calculé départ moins arrivée : ce sont les composantes de $\overrightarrow{BA}$. Pour $\overrightarrow{AB}$, on part de A et on arrive en B : $x_B - x_A$.

`(-1;3) / (-1,3) / -1;3 / -1 et 3 / (-1 et 3) / AB(-1;3) / AB(-1,3) / AB = (-1;3)` → Tu as additionné les coordonnées. Les composantes sont des **différences** : arrivée moins départ.

EXERCICE 44 · BASE

Trouver l'arrivée

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne le point $A(1\,;4)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point B.

Écrire le couple de coordonnées de B, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(4;2)` — aussi acceptées : (4,2) · B(4;2) · B(4,2) · B = (4;2) · B = (4,2) · B : (4;2) · 4;2 · x = 4 ; y = 2 · x = 4 et y = 2 · x = 4, y = 2 · xB = 4 ; yB = 2 · x_B = 4 ; y_B = 2 · xB = 4 et yB = 2 · x_B = 4 et y_B = 2 · xB = 4, yB = 2 · x_B = 4, y_B = 2 · y = 2 ; x = 4 · y = 2 et x = 4 · y = 2, x = 4 · yB = 2 ; xB = 4 · y_B = 2 ; x_B = 4 · yB = 2 et xB = 4 · y_B = 2 et x_B = 4 · (x;y) = (4;2) · (x,y) = (4,2) · (xB;yB) = (4;2) · (x_B;y_B) = (4;2) · B(x = 4 ; y = 2) · 4 et 2 · (4 et 2) · B(4 et 2) · x = 4 y = 2 · xB = 4 yB = 2 · x_B = 4 y_B = 2 · (4;+2) · B(4;+2) · (+4;2) · (4.0;2) · (4;2.0) · (4,0;2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $x_B - x_A = 3$ et $y_B - y_A = -2$: deux petites équations.
2. Partir de A et ajouter les composantes : $x_B = x_A + 3$.

CORRECTION

L'abscisse —

$x_B - 1 = 3 \iff x_B = 4$

L'ordonnée —

$y_B - 4 = -2 \iff y_B = 2$

$B(4\,;2)$

Coordonnées de l'arrivée = coordonnées du départ + composantes du vecteur. On avance de 3 et on descend de 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;6) / (-2,6) / B(-2;6) / B(-2,6) / B = (-2;6) / -2;6 / x = -2 ; y = 6 / x = -2 et y = 6 / x = -2, y = 6 / xB = -2 ; yB = 6 / x_B = -2 ; y_B = 6 / (x;y) = (-2;6) / -2 et 6 / (-2 et 6) / B(-2 et 6) / x = -2 y = 6 / xB = -2 yB = 6 / x_B = -2 y_B = 6` → Tu as retranché les composantes : tu as trouvé le point C tel que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$. Ici $x_B - x_A = 3$, donc $x_B = x_A + 3$.

`(3;-2) / (3,-2) / B(3;-2) / B(3,-2) / B = (3;-2) / 3;-2 / x = 3 ; y = -2 / x = 3 et y = -2 / x = 3, y = -2 / xB = 3 ; yB = -2 / x_B = 3 ; y_B = -2 / (x;y) = (3;-2) / 3 et -2 / (3 et -2) / B(3 et -2) / x = 3 y = -2 / xB = 3 yB = -2 / x_B = 3 y_B = -2` → $(3\,;-2)$, ce sont les composantes du vecteur, pas les coordonnées de B. Il faut partir de A.

EXERCICE 45 · PRATIQUE

Deux vecteurs égaux

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;5)$ et $C(0\,;-4)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Écrire le couple de coordonnées de D, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(4;-1)` — aussi acceptées : (4,-1) · D(4;-1) · D(4,-1) · D = (4;-1) · D = (4,-1) · D : (4;-1) · 4;-1 · x = 4 ; y = -1 · x = 4 et y = -1 · x = 4, y = -1 · xD = 4 ; yD = -1 · x_D = 4 ; y_D = -1 · xD = 4 et yD = -1 · x_D = 4 et y_D = -1 · xD = 4, yD = -1 · x_D = 4, y_D = -1 · y = -1 ; x = 4 · y = -1 et x = 4 · y = -1, x = 4 · yD = -1 ; xD = 4 · y_D = -1 ; x_D = 4 · yD = -1 et xD = 4 · y_D = -1 et x_D = 4 · (x;y) = (4;-1) · (x,y) = (4,-1)

· (xD;yD) = (4;-1) · (x_D;y_D) = (4;-1) · D(x = 4 ; y = -1) · 4 et -1 · (4 et -1) · D(4 et -1) · x = 4 y = -1 · xD = 4 yD = -1 · x_D = 4 y_D = -1 · (+4;-1) · (4.0;-1) · (4;-1.0) · (4,0;-1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord les composantes de $\overrightarrow{AB}$.
2. $\overrightarrow{CD}$ a les mêmes composantes : $x_D - x_C = 4$ et $y_D - y_C = 3$.

CORRECTION

Le vecteur AB —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Mêmes composantes —

$x_D - 0 = 4 \quad ; \quad y_D - (-4) = 3$

$D(4\,;-1)$

Deux vecteurs sont égaux exactement quand ils ont les mêmes composantes. Ici $ABDC$ est un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

(-4;-7) / (-4,-7) / D(-4;-7) / D(-4,-7) / D = (-4;-7) / -4;-7 / x = -4 ; y = -7 / x = -4 et y = -7 / x = -4, y = -7 / xD = -4 ; yD = -7 / x_D = -4 ; y_D = -7 / (x;y) = (-4;-7) / -4 et -7 / (-4 et -7) / D(-4 et -7) / x = -4 y = -7 / xD = -4 yD = -7 / x_D = -4 y_D = -7 → Tu as retranché les composantes à C : c'est le point D tel que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ici le vecteur part de C : $x_D = x_C + 4$.

(4;7) / (4,7) / D(4;7) / D(4,7) / D = (4;7) / 4;7 / x = 4 ; y = 7 / x = 4 et y = 7 / x = 4, y = 7 / xD = 4 ; yD = 7 / x_D = 4 ; y_D = 7 / (x;y) = (4;7) / 4 et 7 / (4 et 7) / D(4 et 7) / x = 4 y = 7 / xD = 4 yD = 7 / x_D = 4 y_D = 7 → $y_D - y_C = 3$ avec $y_C = -4$: $y_D = -4 + 3 = -1$.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Une somme de vecteurs

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;2)$, $B(4\,;-1)$ et $C(0\,;3)$.

Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Écrire le couple de composantes de $\vec{u}$, entre parenthèses, la première composante d'abord.

Réponse attendue : `(-1;1)` — aussi acceptées : (-1,1) · -1;1 · -1 et 1 · (-1 et 1) · u(-1;1) · u(-1,1) · u = (-1;1) · u = (-1,1) · vecteur u(-1;1) · vecteur u = (-1;1) · (-1 ; 1) · (-1;+1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux méthodes : additionner les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$, ou reconnaître une relation de Chasles.
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

CORRECTION

Chasles —

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Arrivée moins départ —

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-1\\3-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Vérification par les composantes : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ ont pour somme $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Les composantes d'une somme sont les sommes des composantes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(7;-7) / (7,-7) / 7;-7 / 7 et -7 / (7 et -7) / u(7;-7) / u(7,-7) / u = (7;-7)` → Tu as calculé $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$. On **additionne** : $3+(-4)$ et $-3+4$.

`(3;-3) / (3,-3) / 3;-3 / 3 et -3 / (3 et -3) / u(3;-3) / u(3,-3) / u = (3;-3)` → Ce sont les composantes de $\overrightarrow{AB}$ seul. Il reste à ajouter celles de $\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Le double de BA

Dans un repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(-1\,;3)$ et $B(2\,;-1)$.

Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OC}=2\,\overrightarrow{BA}$.

Écrire le couple de coordonnées de C, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(-6;8)` — aussi acceptées : (-6,8) · C(-6;8) · C(-6,8) · C = (-6;8) · C = (-6,8) · C : (-6;8) · -6;8 · x = -6 ; y = 8 · x = -6 et y = 8 · x = -6, y = 8 · xC = -6 ; yC = 8 · x_C = -6 ; y_C = 8 · xC = -6 et yC = 8 · x_C = -6 et y_C = 8 · xC = -6, yC = 8 · x_C = -6, y_C = 8 · y = 8 ; x = -6 · y = 8 et x = -6 · y = 8, x = -6 · yC = 8 ; xC = -6 · y_C = 8 ; x_C = -6 · yC = 8 et xC = -6 · y_C = 8 et x_C = -6 · (x;y) = (-6;8) · (x,y) = (-6,8) · (xC;yC) = (-6;8) · (x_C;y_C) = (-6;8) · C(x = -6 ; y = 8) · -6 et 8 · (-6 et 8) · C(-6 et 8) · x = -6 y = 8 · xC = -6 yC = 8 · x_C = -6 y_C = 8 · (-6;+8) · C(-6;+8) · (-6.0;8) · (-6;8.0) · (-6,0;8)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de C sont les composantes de $\overrightarrow{OC}$. Commence par $\overrightarrow{BA}$: il part de B.
2. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Multiplier un vecteur par 2, c'est multiplier ses deux composantes par 2.

CORRECTION

Le vecteur BA —

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1-2\\3-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

Le double —

$2\,\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$

$C(-6\,;8)$

Les coordonnées d'un point C sont exactement les composantes de $\overrightarrow{OC}$. Et les composantes de $k\,\overrightarrow{u}$ sont celles de $\overrightarrow{u}$ multipliées par k.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(6;-8) / (6,-8) / C(6;-8) / C(6,-8) / C = (6;-8) / 6;-8 / x = 6 ; y = -8 / x = 6 et y = -8 / x = 6, y = -8 / xC = 6 ; yC = -8 / x_C = 6 ; y_C = -8 / (x;y) = (6;-8) / 6 et -8 / (6 et -8) / C(6 et -8) / x = 6 y = -8 / xC = 6 yC = -8 / x_C = 6 y_C = -8` → Tu as utilisé $\overrightarrow{AB}$. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ part de B et arrive en A : $x_A - x_B$.

`(-3;4) / (-3,4) / C(-3;4) / C(-3,4) / C = (-3;4) / -3;4 / x = -3 ; y = 4 / x = -3 et y = 4 / x = -3, y = 4 / xC = -3 ; yC = 4 / x_C = -3 ; y_C = 4 / (x;y) = (-3;4) / -3 et 4 / (-3 et 4) / C(-3 et 4) / x = -3 y = 4 / xC = -3 yC = 4 / x_C = -3 y_C = 4` → Ce sont les composantes de $\overrightarrow{BA}$. Il reste à les multiplier par 2.

EXERCICE 48 · PRATIQUE

Faire glisser un point

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(2\,;1)$, $B(5\,;-1)$ et $E(-3\,;4)$.

Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ (F est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$).

Écrire le couple de coordonnées de F, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(0;2)` — aussi acceptées : (0,2) · F(0;2) · F(0,2) · F = (0;2) · F = (0,2) · F : (0;2) · 0;2 · x = 0 ; y = 2 · x = 0 et y = 2 · x = 0, y = 2 · xF = 0 ; yF = 2 · x_F = 0 ; y_F = 2 · xF = 0 et yF = 2 · x_F = 0 et y_F = 2 · xF = 0, yF = 2 · x_F = 0, y_F = 2 · y = 2 ; x = 0 · y = 2 et x = 0 · y = 2, x = 0 · yF = 2 ; xF = 0 · y_F = 2 ; x_F = 0 · yF = 2 et xF = 0 · y_F = 2 et x_F = 0 · (x;y) = (0;2) · (x,y) = (0,2) · (xF;yF) = (0;2) · (x_F;y_F) = (0;2) · F(x = 0 ; y = 2) · 0 et 2 · (0 et 2) · F(0 et 2) · x = 0 y = 2 · xF = 0 yF = 2 · x_F = 0 y_F = 2 · (0;+2) · F(0;+2) · (0.0;2) · (0;2.0) · (0,0;2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les composantes de $\overrightarrow{AB}$: de combien avance-t-on, de combien monte-t-on ?
2. $\overrightarrow{EF}$ a les mêmes composantes : $x_F = x_E + 3$ et $y_F = y_E - 2$.

CORRECTION

Le vecteur AB —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

Le même déplacement —

$x_F = -3 + 3 \quad ; \quad y_F = 4 - 2$

$F(0\,;2)$

Glisser un point selon un vecteur, c'est ajouter les composantes du vecteur à ses coordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

(-6;6) / (-6,6) / F(-6;6) / F(-6,6) / F = (-6;6) / -6;6 / x = -6 ; y = 6 / x = -6 et y = 6 / x = -6, y = 6 / xF = -6 ; yF = 6 / x_F = -6 ; y_F = 6 / (x;y) = (-6;6) / -6 et 6 / (-6 et 6) / F(-6 et 6) / x = -6 y = 6 / xF = -6 yF = 6 / x_F = -6 y_F = 6 → Tu as retranché les composantes de $\overrightarrow{AB}$. De E vers F, on fait le même déplacement que de A vers B : on **ajoute**.

(3;-2) / (3,-2) / F(3;-2) / F(3,-2) / F = (3;-2) / 3;-2 / x = 3 ; y = -2 / x = 3 et y = -2 / x = 3, y = -2 / xF = 3 ; yF = -2 / x_F = 3 ; y_F = -2 / (x;y) = (3;-2) / 3 et -2 / (3 et -2) / F(3 et -2) / x = 3 y = -2 / xF = 3 yF = -2 / x_F = 3 y_F = -2 → Ce sont les composantes de $\overrightarrow{AB}$. Il faut partir de E.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Deux inconnues

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;2)$, $B(m\,;5)$, $C(6\,;n)$ et $D(2\,;1)$, où m et n sont des réels.

Déterminer m et n pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Écrire le couple $(m\,;n)$, entre parenthèses, m d'abord.

Réponse attendue : `(5;4)` — aussi acceptées : (5,4) · 5;4 · m = 5 ; n = 4 · m = 5 et n = 4 · m = 5, n = 4 · m = 5 n = 4 · n = 4 ; m = 5 · n = 4 et m = 5 · n = 4, m = 5 · (m;n) = (5;4) · (m,n) = (5,4) · 5 et 4 · (5 et 4)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $ABCD$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Attention à l'ordre des lettres.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} m-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ n-1 \end{pmatrix}$: écris l'égalité ligne par ligne.

CORRECTION

Les composantes —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} m-1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 6-2 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Vecteurs égaux —

$$m-1=4 \quad ; \quad 3=n-1$$

$$m=5 \quad ; \quad n=4$$

Une égalité de vecteurs donne **deux** équations, une par axe : c'est ce qui permet de trouver deux inconnues.

Vérification : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ valent tous deux $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

(-3;-2) / (-3,-2) / -3;-2 / m = -3 ; n = -2 / m = -3 et n = -2 / m = -3, n = -2 / (m;n) = (-3;-2) / -3 et -2 → Tu as écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Dans le parallélogramme $ABCD$, on parcourt les sommets dans l'ordre : c'est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(4;5) / (4,5) / 4;5 / m = 4 ; n = 5 / m = 4 et n = 5 / m = 4, n = 5 / (m;n) = (4;5) / 4 et 5 → Tes deux nombres sont dans le désordre : on demande d'abord m, puis n.

EXERCICE 50 · RAISONNEMENT

Une somme à simplifier

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(2\,;-1)$, $B(3\,;2)$, $C(0\,;4)$ et $E(-5\,;1)$.

Déterminer les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.

Écrire le couple de coordonnées de H, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(-3;-4)` — aussi acceptées : (-3,-4) · H(-3;-4) · H(-3,-4) · H = (-3;-4) · H = (-3,-4) · H : (-3;-4) · -3;-4 · x = -3 ; y = -4 · x = -3 et y = -4 · x = -3, y = -4 · xH = -3 ; yH = -4 · x_H = -3 ; y_H = -4 · xH = -3 et yH = -4 · x_H = -3 et y_H = -4 · xH = -3, yH = -4 · x_H = -3, y_H = -4 · y = -4 ; x = -3 · y = -4 et x = -3 · y = -4, x = -3 · yH = -4 ; xH = -3 · y_H = -4 ; x_H = -3 · yH = -4 et xH = -3 · y_H = -4 et x_H = -3 · (x;y) = (-3;-4) · (x,y) = (-3,-4) · (xH;yH) = (-3;-4) · (x_H;y_H) = (-3;-4) · H(x = -3 ; y = -4) · -3 et -4 · (-3 et -4) · H(-3 et -4) · x = -3 y = -4 · xH = -3 yH = -4 · x_H = -3 y_H = -4 · (-3.0;-4) · (-3;-4.0) · (-3,0;-4)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réordonne la somme : $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$. La relation de Chasles la simplifie en un seul vecteur.
2. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$. Calcule ses composantes, puis pars de E.

CORRECTION

Chasles —

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$$

Le vecteur CA —

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Partir de E —

$$x_H = -5+2 \quad ; \quad y_H = 1-5$$

$$H(-3\,;-4)$$

Avant de calculer, simplifie : $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ se lit « de C à B, puis de B à A », c'est-à-dire de C à A. Puis, coordonnées de l'arrivée $=$ départ $+$ composantes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;-5) / (2,-5) / H(2;-5) / H(2,-5) / H = (2;-5) / 2;-5 / x = 2 ; y = -5 / x = 2 et y = -5 / x = 2, y = -5 / xH = 2 ; yH = -5 / x_H = 2 ; y_H = -5 / (x;y) = (2;-5) / 2 et -5 / (2 et -5) / H(2 et -5) / x = 2 y = -5 / xH = 2 yH = -5 / x_H = 2 y_H = -5` → $(2\,;-5)$, ce sont les composantes de $\overrightarrow{EH}$. Le point H s'obtient en partant de E : $x_H = x_E + 2$.

`(-9;0) / (-9,0) / H(-9;0) / H(-9,0) / H = (-9;0) / -9;0 / x = -9 ; y = 0 / x = -9 et y = 0 / x = -9, y = 0 / xH = -9 ; yH = 0 / x_H = -9 ; y_H = 0 / (x;y) = (-9;0) / -9 et 0 / (-9 et 0) / H(-9 et 0) / x = -9 y = 0 / xH = -9 yH = 0 / x_H = -9 y_H = 0` → Tu as utilisé $\overrightarrow{BC}$ au lieu de $\overrightarrow{CB}$. Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ part de C : $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 51 · DEFI

Trois vecteurs de somme nulle

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;1)$, $B(5\,;2)$ et $C(3\,;6)$.

Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Écrire le couple de coordonnées de G, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(3;3)` — aussi acceptées : (3,3) · G(3;3) · G(3,3) · G = (3;3) · G = (3,3) · G : (3;3) · 3;3 · x = 3 ; y = 3 · x = 3 et y = 3 · x = 3, y = 3 · xG = 3 ; yG = 3 · x_G = 3 ; y_G = 3 · xG = 3 et yG = 3 · x_G = 3 et y_G = 3 · xG = 3, yG = 3 · x_G = 3, y_G = 3 · y = 3 ; x = 3 · y = 3 et x = 3 · y = 3, x = 3 · yG = 3 ; xG = 3 · y_G = 3 ; x_G = 3 · yG = 3 et xG = 3 · y_G = 3 et x_G = 3 · (x;y) = (3;3) · (x,y) = (3,3) · (xG;yG) = (3;3) · (x_G;y_G) = (3;3) · G(x = 3 ; y = 3) · 3 et 3 · (3 et 3) · G(3 et 3) · x = 3 y = 3 · xG = 3 yG = 3 · x_G = 3 y_G = 3 · (3;+3) · G(3;+3) · (+3;3) · (3.0;3) · (3;3.0) · (3,0;3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note $G(x\,;y)$. Écris les composantes de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ en fonction de x et y.
2. La somme est nulle quand chaque composante est nulle : $(1-x)+(5-x)+(3-x)=0$, et de même pour les ordonnées.

CORRECTION

Les abscisses —

$$(1-x)+(5-x)+(3-x)=0 \iff 9-3x=0 \iff x=3$$

Les ordonnées —

$$(1-y)+(2-y)+(6-y)=0 \iff 9-3y=0 \iff y=3$$

$G(3\,;3)$

Le point G a pour coordonnées les **moyennes** des coordonnées des trois sommets : c'est le centre de gravité du triangle ABC. Un vecteur est nul exactement quand ses deux composantes sont nulles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(9;9) / (9,9) / G(9;9) / G(9,9) / G = (9;9) / 9;9 / x = 9 ; y = 9 / x = 9 et y = 9 / x = 9, y = 9 / xG = 9 ; yG = 9 / x_G = 9 ; y_G = 9 / (x;y) = (9;9) / 9 et 9 / (9 et 9) / G(9 et 9) / x = 9 y = 9 / xG = 9 yG = 9 / x_G = 9 y_G = 9` → Tu as trouvé $3x=9$ et $3y=9$: il reste à diviser par 3.

`(3;1.5) / (3,1.5) / G(3;1.5) / G(3,1.5) / G = (3;1.5) / 3;1.5 / x = 3 ; y = 1.5 / x = 3 et y = 1.5 / x = 3, y = 1.5 / xG = 3 ; yG = 1.5 / x_G = 3 ; y_G = 1.5 / (x;y) = (3;1.5) / 3 et 1.5 / (3 et 1.5) / G(3 et 1.5) / x = 3 y = 1.5 / xG = 3 yG = 1.5 / x_G = 3 y_G = 1.5` → C'est le milieu de $[AB]$. Le point cherché équilibre les **trois** sommets : la somme des trois vecteurs doit être nulle.

EXERCICE 52 · BASE

Les moyennes

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(-3\,;6)$ et $B(9\,;-2)$.

Calculer les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$.

Écrire le couple de coordonnées de K, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(3;2)` — aussi acceptées : (3,2) · K(3;2) · K(3,2) · K = (3;2) · K = (3,2) · K : (3;2) · 3;2 · x = 3 ; y = 2 · x = 3 et y = 2 · x = 3, y = 2 · xK = 3 ; yK = 2 · x_K = 3 ; y_K = 2 · xK = 3 et yK = 2 · x_K = 3 et

y_K = 2 · xK = 3, yK = 2 · x_K = 3, y_K = 2 · y = 2 ; x = 3 · y = 2 et x = 3 · y = 2, x = 3 · yK = 2 ; xK = 3 · y_K = 2 ; x_K = 3 · yK = 2 et xK = 3 · y_K = 2 et x_K = 3 · (x;y) = (3;2) · (x,y) = (3,2) · (xK;yK) = (3;2) · (x_K;y_K) = (3;2) · K(x = 3 ; y = 2) · 3 et 2 · (3 et 2) · K(3 et 2) · x = 3 y = 2 · xK = 3 yK = 2 · x_K = 3 y_K = 2 · (3;+2) · K(3;+2) · (+3;2) · (3.0;2) · (3;2.0) · (3,0;2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le milieu a pour coordonnées les moyennes des coordonnées des extrémités.

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

2. Attention aux signes : $-3 + 9$ et $6 + (-2)$.

CORRECTION

L'abscisse —

$$x_K = \frac{-3 + 9}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

L'ordonnée —

$$y_K = \frac{6 + (-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$K(3\,;2)$$

Le milieu d'un segment, c'est la moyenne des coordonnées, axe par axe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(6;-4) / (6,-4) / K(6;-4) / K(6,-4) / K = (6;-4) / 6;-4 / x = 6 ; y = -4 / x = 6 et y = -4 / x = 6, y = -4 / xK = 6 ; yK = -4 / x_K = 6 ; y_K = -4 / (x;y) = (6;-4) / 6 et -4 / (6 et -4) / K(6 et -4) / x = 6 y = -4 / xK = 6 yK = -4 / x_K = 6 y_K = -4` → Tu as pris la moitié des **différences** : c'est la moitié du vecteur $\overrightarrow{AB}$, pas un point. Le milieu, c'est la moyenne : on **additionne**.

`(6;4) / (6,4) / K(6;4) / K(6,4) / K = (6;4) / 6;4 / x = 6 ; y = 4 / x = 6 et y = 4 / x = 6, y = 4 / xK = 6 ; yK = 4 / x_K = 6 ; y_K = 4 / (x;y) = (6;4) / 6 et 4 / (6 et 4) / K(6 et 4) / x = 6 y = 4 / xK = 6 yK = 4 / x_K = 6 y_K = 4` → Tu as additionné sans diviser par 2.

`(2;3) / (2,3) / K(2;3) / K(2,3) / K = (2;3) / 2;3 / x = 2 ; y = 3 / x = 2 et y = 3 / x = 2, y = 3 / xK = 2 ; yK = 3 / x_K = 2 ; y_K = 3 / (x;y) = (2;3) / 2 et 3 / (2 et 3) / K(2 et 3) / x = 2 y = 3 / xK = 2 yK = 3 / x_K = 2 y_K = 3` → Tes deux nombres sont dans le désordre : l'abscisse vient en premier.

EXERCICE 53 · BASE **Symétrique par rapport à l'origine**

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne le point $A(4\,;-2)$.

Déterminer les coordonnées du point A', symétrique de A par rapport à l'origine O.

Écrire le couple de coordonnées de A', entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(-4;2)` — aussi acceptées : (-4,2) · A'(-4;2) · A'(-4,2) · A' = (-4;2) · A' = (-4,2) · A' : (-4;2) · -4;2 · x = -4 ; y = 2 · x = -4 et y = 2 · x = -4, y = 2 · xA' = -4 ; yA' = 2 · x_A' = -4 ; y_A' = 2 · xA' = -4 et yA' = 2 · x_A' = -4 et y_A' = 2 · xA' = -4, yA' = 2 · x_A' = -4, y_A' = 2 · y = 2 ; x = -4 · y = 2 et x = -4 · y = 2, x = -4 · yA' = 2 ; xA' = -4 · y_A' = 2 ; x_A' = -4 · yA' = 2 et xA' = -4 · y_A' = 2 et x_A' = -4 · (x;y) = (-4;2) ·

(x,y) = (-4,2) · (xA';yA') = (-4;2) · (x_A';y_A') = (-4;2) · A'(x = -4 ; y = 2) · -4 et 2 · (-4 et 2) · A'(-4 et 2) · x = -4 y = 2 · xA' = -4 yA' = 2 · x_A' = -4 y_A' = 2 · (-4;+2) · A'(-4;+2) · (-4.0;2) · (-4;2.0) · (-4,0;2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O est le milieu de $[AA']$: la moyenne des coordonnées de A et de A' vaut 0.
2. $x_{A'} = 2\,x_O - x_A$, et de même pour l'ordonnée.

CORRECTION

Le milieu est O —

$$\frac{4 + x_{A'}}{2} = 0 \quad ; \quad \frac{-2 + y_{A'}}{2} = 0$$

$$A'(-4\,;2)$$

Le symétrique d'un point par rapport à l'origine a des coordonnées **opposées** : $A(x\,;y)$ donne $A'(-x\,;-y)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

(2;-1) / (2,-1) / A'(2;-1) / A'(2,-1) / A' = (2;-1) / 2;-1 / x = 2 ; y = -1 / x = 2 et y = -1 / x = 2, y = -1 / xA' = 2 ; yA' = -1 / x_A' = 2 ; y_A' = -1 / (x;y) = (2;-1) / 2 et -1 / (2 et -1) / A'(2 et -1) / x = 2 y = -1 / xA' = 2 yA' = -1 / x_A' = 2 y_A' = -1 → Tu as calculé le milieu de $[OA]$. Ici, c'est O qui est le milieu : A' est de l'autre côté, à la même distance.

(-4;-2) / (-4,-2) / A'(-4;-2) / A'(-4,-2) / A' = (-4;-2) / -4;-2 / x = -4 ; y = -2 / x = -4 et y = -2 / x = -4, y = -2 / xA' = -4 ; yA' = -2 / x_A' = -4 ; y_A' = -2 / (x;y) = (-4;-2) / -4 et -2 / (-4 et -2) / A'(-4 et -2) / x = -4 y = -2 / xA' = -4 yA' = -2 / x_A' = -4 y_A' = -2 → Les **deux** coordonnées changent de signe : l'ordonnée de A' est 2.

EXERCICE 54 · PRATIQUE

L'autre extrémité du segment

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(5\,;1)$ et $K(2\,;-3)$.

Déterminer les coordonnées du point B tel que K soit le milieu du segment $[AB]$.

Écrire le couple de coordonnées de B, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(-1;-7)` — aussi acceptées : (-1,-7) · B(-1;-7) · B(-1,-7) · B = (-1;-7) · B = (-1,-7) · B : (-1;-7) · -1;-7 · x = -1 ; y = -7 · x = -1 et y = -7 · x = -1, y = -7 · xB = -1 ; yB = -7 · x_B = -1 ; y_B = -7 · xB = -1 et yB = -7 · x_B = -1 et y_B = -7 · xB = -1, yB = -7 · x_B = -1, y_B = -7 · y = -7 ; x = -1 · y = -7 et x = -1 · y = -7, x = -1 · yB = -7 ; xB = -1 · y_B = -7 ; x_B = -1 · yB = -7 et xB = -1 · y_B = -7 et x_B = -1 · (x;y) = (-1;-7) · (x,y) = (-1,-7) · (xB;yB) = (-1;-7) · (x_B;y_B) = (-1;-7) · B(x = -1 ; y = -7) · -1 et -7 · (-1 et -7) · B(-1 et -7) · x = -1 y = -7 · xB = -1 yB = -7 · x_B = -1 y_B = -7 · (-1.0;-7) · (-1;-7.0) · (-1,0;-7)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. K est le milieu de $[AB]$: $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$. L'inconnue est x_B ; de même pour l'ordonnée.
2. $x_B = 2\,x_K - x_A$ et $y_B = 2\,y_K - y_A$.

CORRECTION

L'abscisse —

$x_B = 2 \times 2 - 5 = -1$

L'ordonnée —

$y_B = 2 \times (-3) - 1 = -7$

$B(-1\,;-7)$

Vérification : de A à K, on recule de 3 et on descend de 4 ; de K à B aussi. B est le symétrique de A par rapport à K.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(8;5) / (8,5) / B(8;5) / B(8,5) / B = (8;5) / 8;5 / x = 8 ; y = 5 / x = 8 et y = 5 / x = 8, y = 5 / xB = 8 ; yB = 5 / x_B = 8 ; y_B = 5 / (x;y) = (8;5) / 8 et 5 / (8 et 5) / B(8 et 5) / x = 8 y = 5 / xB = 8 yB = 5 / x_B = 8 y_B = 5` → Tu as calculé $2\,x_A - x_K$: c'est le symétrique de K par rapport à A. Ici K est le milieu : $x_B = 2\,x_K - x_A$.

`(-3;-4) / (-3,-4) / B(-3;-4) / B(-3,-4) / B = (-3;-4) / -3;-4 / x = -3 ; y = -4 / x = -3 et y = -4 / x = -3, y = -4 / xB = -3 ; yB = -4 / x_B = -3 ; y_B = -4 / (x;y) = (-3;-4) / -3 et -4 / (-3 et -4) / B(-3 et -4) / x = -3 y = -4 / xB = -3 yB = -4 / x_B = -3 y_B = -4` → $(-3\,;-4)$, ce sont les composantes de $\overrightarrow{AK}$. Le point B s'obtient en refaisant ce déplacement à partir de K.

EXERCICE 55 · PRATIQUE

Deux inconnues au milieu

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $M(a\,;2)$ et $N(4\,;b)$, où a et b sont des réels. Le milieu du segment $[MN]$ est le point $K(1\,;-1)$.

Déterminer a et b.

Écrire le couple $(a\,;b)$, entre parenthèses, a d'abord.

Réponse attendue : `(-2;-4)` — aussi acceptées : (-2,-4) · -2;-4 · a = -2 ; b = -4 · a = -2 et b = -4 · a = -2, b = -4 · a = -2 b = -4 · b = -4 ; a = -2 · b = -4 et a = -2 · b = -4, a = -2 · (a;b) = (-2;-4) · (a,b) = (-2,-4) · -2 et -4 · (-2 et -4)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la formule du milieu pour chaque coordonnée : $\dfrac{a+4}{2} = 1$ et $\dfrac{2+b}{2} = -1$.
2. Multiplie chaque équation par 2 avant d'isoler l'inconnue.

CORRECTION

L'abscisse —

$$\frac{a+4}{2} = 1 \iff a+4 = 2 \iff a = -2$$

L'ordonnée —

$$\frac{2+b}{2} = -1 \iff 2+b = -2 \iff b = -4$$

$a = -2 \quad ; \quad b = -4$

Vérification : le milieu de $M(-2\,;2)$ et $N(4\,;-4)$ est bien $K(1\,;-1)$. On peut aussi utiliser directement $a = 2\,x_K - x_N$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-3;-3) / (-3,-3) / -3;-3 / a = -3 ; b = -3 / a = -3 et b = -3 / a = -3, b = -3 / (a;b) = (-3;-3) / -3 et -3` → Tu as écrit $a + 4 = 1$: tu as oublié le dénominateur 2. La somme des deux coordonnées vaut le **double** de celle du milieu.

EXERCICE 56 · RAISONNEMENT

La droite des milieux

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;2)$, $B(5\,;4)$ et $C(3\,;-2)$. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.

Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{BC}$.

Donner la valeur de k : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les coordonnées de I et de J, puis les composantes de $\overrightarrow{IJ}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
2. $I(3\,;3)$ et $J(2\,;0)$. Compare les composantes de $\overrightarrow{IJ}$ à celles de $\overrightarrow{BC}$: par quoi a-t-on multiplié ?

CORRECTION

Les milieux —

$$I\left(\frac{1+5}{2}\,;\frac{2+4}{2}\right) = I(3\,;3) \quad ; \quad J\left(\frac{1+3}{2}\,;\frac{2-2}{2}\right) = J(2\,;0)$$

Les vecteurs —

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

On retrouve par le calcul le théorème de la droite des milieux : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, donc (IJ) est parallèle à (BC) et $IJ = \frac{1}{2}BC$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu as trouvé $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$. La question est l'inverse : $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{IJ}$ est le plus petit des deux.

EXERCICE 57 · RAISONNEMENT

Le centre du parallélogramme

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, $ABCD$ est un parallélogramme de centre $K(1\,;2)$. On donne $A(-2\,;0)$ et $B(3\,;-1)$.

Déterminer les coordonnées du sommet D.

Écrire le couple de coordonnées de D, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(-1;5)` — aussi acceptées : (-1,5) · D(-1;5) · D(-1,5) · D = (-1;5) · D = (-1,5) · D : (-1;5) · -1;5 · x = -1 ; y = 5 · x = -1 et y = 5 · x = -1, y = 5 · xD = -1 ; yD = 5 · x_D = -1 ; y_D = 5 · xD = -1 et yD = 5 · x_D = -1 et y_D = 5 · xD = -1, yD = 5 · x_D = -1, y_D = 5 · y = 5 ; x = -1 · y = 5 et x = -1 · y = 5, x = -1 · yD = 5 ; xD = -1 · y_D = 5 ; x_D = -1 · yD = 5 et xD = -1 · y_D = 5 et x_D = -1 · (x;y) = (-1;5) · (x,y) = (-1,5) · (xD;yD) = (-1;5) · (x_D;y_D) = (-1;5) · D(x = -1 ; y = 5) · -1 et 5 · (-1 et 5) · D(-1 et 5) · x = -1 y = 5 · xD = -1 yD = 5 · x_D = -1 y_D = 5 · (-1;+5) · D(-1;+5) · (-1.0;5) · (-1;5.0) · (-1,0;5)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Quelle diagonale contient D ?
2. K est le milieu de $[BD]$: D est le symétrique de B par rapport à K.

CORRECTION

Les diagonales — Le centre K est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Le sommet D est l'autre extrémité de la diagonale issue de B.

Le symétrique de B —

$$x_D = 2 \times 1 - 3 = -1 \quad ; \quad y_D = 2 \times 2 - (-1) = 5$$

$$D(-1\,;5)$$

Le même calcul donne $C(4\,;4)$, symétrique de A. Vérification : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ sont bien égaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(4;4) / (4,4) / D(4;4) / D(4,4) / D = (4;4) / 4;4 / x = 4 ; y = 4 / x = 4 et y = 4 / x = 4, y = 4 / xD = 4 ; yD = 4 / x_D = 4 ; y_D = 4 / (x;y) = (4;4) / 4 et 4 / (4 et 4) / D(4 et 4) / x = 4 y = 4 / xD = 4 yD = 4 / x_D = 4 y_D = 4` → $(4\,;4)$, c'est le sommet C, symétrique de A par rapport à K. Le sommet D est sur l'autre diagonale, celle de B.

`(-1;3) / (-1,3) / D(-1;3) / D(-1,3) / D = (-1;3) / -1;3 / x = -1 ; y = 3 / x = -1 et y = 3 / x = -1, y = 3 / xD = -1 ; yD = 3 / x_D = -1 ; y_D = 3 / (x;y) = (-1;3) / -1 et 3 / (-1 et 3) / D(-1 et 3) / x = -1 y = 3 / xD = -1 yD = 3 / x_D = -1 y_D = 3` → $y_D = 2\,y_K - y_B = 4 - (-1) = 5$: attention au signe de y_B.

EXERCICE 58 · DEFI

Des milieux sur les axes

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(2\,;5)$, $B(a\,;-1)$ et $C(4\,;b)$. On sait que le milieu de $[AB]$ appartient à l'axe des ordonnées et que le milieu de $[BC]$ appartient à l'axe des abscisses.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Écrire le couple de coordonnées de D, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(8;7)` — aussi acceptées : (8,7) · D(8;7) · D(8,7) · D = (8;7) · D = (8,7) · D : (8;7) · 8;7 · x = 8 ; y = 7 · x = 8 et y = 7 · x = 8, y = 7 · xD = 8 ; yD = 7 · x_D = 8 ; y_D = 7 · xD = 8 et yD = 7 · x_D = 8 et y_D = 7 · xD = 8, yD = 7 · x_D = 8, y_D = 7 · y = 7 ; x = 8 · y = 7 et x = 8 · y = 7, x = 8 · yD = 7 ; xD = 8 · y_D = 7 ; x_D = 8 · yD = 7 et xD = 8 · y_D = 7 et x_D = 8 · (x;y) = (8;7) · (x,y) = (8,7) · (xD;yD) = (8;7) ·

(x_D;y_D) = (8;7) · D(x = 8 ; y = 7) · 8 et 7 · (8 et 7) · D(8 et 7) · x = 8 y = 7 · xD = 8 yD = 7 · x_D = 8 y_D = 7 · (8;+7) · D(8;+7) · (+8;7) · (8.0;7) · (8;7.0) · (8,0;7)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur l'axe des ordonnées, l'abscisse est nulle : $\dfrac{2+a}{2}=0$. Sur l'axe des abscisses, l'ordonnée est nulle : $\dfrac{-1+b}{2}=0$.
2. Tu obtiens $B(-2\,;-1)$ et $C(4\,;1)$. Pour le parallélogramme, $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

CORRECTION

Les inconnues —

$2+a=0 \iff a=-2 \quad ; \quad -1+b=0 \iff b=1$

Le milieu de [AC] —

$K\left(\dfrac{2+4}{2}\,;\dfrac{5+1}{2}\right)=K(3\,;3)$

Le symétrique de B —

$x_D=2\times 3-(-2)=8 \quad ; \quad y_D=2\times 3-(-1)=7$

$D(8\,;7)$

Vérification : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$. Chaque condition « sur un axe » annule **une** coordonnée du milieu : celle de l'autre axe.

PIÈGES ANTICIPÉS

(0;-5) / (0,-5) / D(0;-5) / D(0,-5) / D = (0;-5) / 0;-5 / x = 0 ; y = -5 / x = 0 et y = -5 / x = 0, y = -5 / xD = 0 ; yD = -5 / x_D = 0 ; y_D = -5 / (x;y) = (0;-5) / 0 et -5 / (0 et -5) / D(0 et -5) / x = 0 y = -5 / xD = 0 yD = -5 / x_D = 0 y_D = -5 → Tu as construit le parallélogramme $ABDC$: $D=B+C-A$. Dans $ABCD$, les sommets se suivent : D est l'opposé de B, et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

(4;5) / (4,5) / D(4;5) / D(4,5) / D = (4;5) / 4;5 / x = 4 ; y = 5 / x = 4 et y = 5 / x = 4, y = 5 / xD = 4 ; yD = 5 / x_D = 4 ; y_D = 5 / (x;y) = (4;5) / 4 et 5 / (4 et 5) / D(4 et 5) / x = 4 y = 5 / xD = 4 yD = 5 / x_D = 4 y_D = 5 → Vérifie a et b : $2+a=0$ donne $a=-2$, et $-1+b=0$ donne $b=1$.

EXERCICE 59 · BASE **Le coefficient**

Dans un repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$.

Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{v}=k\,\overrightarrow{u}$.

Donner la valeur de k : un nombre.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les composantes de $k\,\vec{u}$ sont celles de $\vec{u}$ multipliées par k. Par combien multiplie-t-on 2 pour obtenir -6 ?
2. Vérifie avec la deuxième composante : le même k doit transformer -3 en 9.

CORRECTION

Première composante —

$-6 = k \times 2 \iff k = -3$

Vérification —

$-3 \times (-3) = 9$

$k = -3$

Le même coefficient marche pour les deux composantes : les vecteurs sont colinéaires. Le signe moins dit qu'ils sont de **sens contraires**.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → $3 \times 2 = 6$, pas -6. Les vecteurs sont de sens contraires : k est négatif.

`-1/3` → Tu as trouvé $\vec{u} = -\frac{1}{3}\,\vec{v}$. On cherche k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

EXERCICE 60 · BASE

Compléter la proportion

Dans un repère $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\y\end{pmatrix}$, où y est un réel.

Déterminer y pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Donner la valeur de y : un nombre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Colinéaires : les composantes sont proportionnelles. On le traduit par le produit en croix.
   $x\,y' = x'\,y$
2. $4 \times y = 6 \times 6$.

CORRECTION

Produit en croix —

$4\,y = 6 \times 6 = 36$

$y = 9$

Vérification : $\vec{v} = \frac{3}{2}\,\vec{u}$, car $\frac{3}{2} \times 4 = 6$ et $\frac{3}{2} \times 6 = 9$. La proportionnalité se fait par **multiplication**, jamais par addition.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → Tu as ajouté 2 à chaque composante : $4 + 2 = 6$, donc $6 + 2 = 8$. Mais la colinéarité, c'est la **proportionnalité** : on multiplie, ici par $\frac{3}{2}$.

EXERCICE 61 · PRATIQUE

Le test du produit en croix

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$, et on note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Calculer le nombre $x\,y' - x'\,y$, qui permet de savoir si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Donner la valeur de $x\,y' - x'\,y$: un nombre.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $x = 2, y = 5, x' = 3, y' = 7$. On multiplie en diagonale.
2. Les vecteurs sont colinéaires exactement quand ce nombre est nul.

CORRECTION

Les produits en croix —

$$x\,y' = 2 \times 7 = 14 \quad ; \quad x'\,y = 3 \times 5 = 15$$

$$x\,y' - x'\,y = 14 - 15 = -1$$

Le nombre n'est pas nul : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont **pas** colinéaires. Les composantes semblent proches, mais seul le calcul tranche.

PIÈGES ANTICIPÉS

29 → Tu as **additionné** les deux produits. Le test de colinéarité est une différence : $x\,y' - x'\,y$.

1 → Tu as calculé $x'\,y - x\,y'$. L'ordre compte pour le signe : $x\,y' - x'\,y = 14 - 15$.

EXERCICE 62 · PRATIQUE

Trois points alignés ?

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(-1\,;-1)$, $B(1\,;3)$ et $C(4\,;9)$.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, puis déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Donner la valeur de k : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `5/2` — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$. Par combien faut-il multiplier 2 pour obtenir 5 ?

CORRECTION

Les composantes —

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$

Produit en croix —

$2\times 10-5\times 4=0$

Les vecteurs sont colinéaires, et $5=k\times 2$.

$k=\dfrac{5}{2}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : les points A, B et C sont **alignés**, et C est deux fois et demie plus loin de A que B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/5 / 0.4` → Tu as trouvé $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. On cherche k tel que $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$: $k=\frac{5}{2}$.

EXERCICE 63 · PRATIQUE

L'abscisse qui aligne

Dans un repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(2\,;1)$, $B(4\,;5)$ et $C(x\,;-3)$, où x est un réel.

Déterminer x pour que les points A, B et C soient alignés.

Donner la valeur de x : un nombre.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A, B, C sont alignés quand $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x-2\\-4\end{pmatrix}$. Écris le produit en croix.

CORRECTION

Les composantes —

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x-2\\-4\end{pmatrix}$

Produit en croix —

$2\times(-4)=4\,(x-2)\iff x-2=-2$

$x=0$

Vérification : avec $x=0$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}=-\overrightarrow{AB}$. Le point C est de l'autre côté de A : A est le milieu de $[BC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → Tu as trouvé $x-2=-2$: c'est la première composante de $\overrightarrow{AC}$. Il reste à ajouter 2.

4 → La deuxième composante de $\overrightarrow{AC}$ est $-3-1=-4$, négative : le produit en croix donne $x-2=-2$.

EXERCICE 64 · RAISONNEMENT

Deux droites parallèles

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;6)$, $C(0\,;-1)$ et $D(2\,;y)$, où y est un réel.

Déterminer y pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

Donner la valeur de y : un nombre.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AB) et (CD) sont parallèles quand $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\y+1\end{pmatrix}$.

CORRECTION

Les composantes —

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\y-(-1)\end{pmatrix}$

Produit en croix —

$2\,(y+1)=2\times 4 \iff y+1=4$

$y=3$

Ici les premières composantes sont égales, donc les vecteurs sont égaux : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$, et $ABDC$ est même un parallélogramme. Le parallélisme de deux droites se lit sur la colinéarité de deux vecteurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est la deuxième composante de $\overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire $y+1$. Il reste à retirer 1.

5 → Tu as écrit $y-1$. L'ordonnée de C est -1 : $y-(-1)=y+1$.

EXERCICE 65 · RAISONNEMENT

Couper l'axe des ordonnées

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(-2\,;1)$ et $B(4\,;4)$. La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point $M(0\,;y)$.

Déterminer y.

Donner la valeur de y : un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est sur la droite (AB) : les points A, B et M sont alignés.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\y-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires : produit en croix.

CORRECTION

Les composantes —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\y-1\end{pmatrix}$$

Produit en croix —

$$6\,(y-1) = 2\times 3 \iff y-1=1$$

$$y = 2$$

Un point de l'axe des ordonnées s'écrit $M(0\,;y)$: il ne reste qu'une inconnue, que l'alignement détermine.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → 1, c'est $y-1$, la deuxième composante de $\overrightarrow{AM}$. Il reste à ajouter 1.

5 → Ton produit en croix a mélangé les lignes : tu as écrit $6\times 2 = 3\,(y-1)$. On multiplie en diagonale, l'abscisse de l'un par l'ordonnée de l'autre : $6\times(y-1) = 2\times 3$.

EXERCICE 66 · RAISONNEMENT

Couper l'axe des abscisses

Dans un repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;3)$ et $B(4\,;-3)$. La droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point $M(x\,;0)$.

Déterminer x.

Donner la valeur de x : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `5/2` — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A, B et M sont alignés : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\-3\end{pmatrix}$.

CORRECTION

Les composantes —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\-3\end{pmatrix}$$

Produit en croix —

$$3\times(-3) = -6\,(x-1) \iff x-1=\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Vérification : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: M est le milieu de $[AB]$. C'était visible : les ordonnées 3 et -3 sont opposées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2 / 1.5` → $\frac{3}{2}$, c'est $x - 1$, la première composante de $\overrightarrow{AM}$. Il reste à ajouter 1.

EXERCICE 67 · DEFI

Un paramètre au carré

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}8\\m\end{pmatrix}$, où m est un réel.

Déterminer **toutes** les valeurs de m pour lesquelles $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Écrire l'ensemble des valeurs de m entre accolades, par exemple {-2;2}.

Réponse attendue : `{-4;4}` — aussi acceptées : {-4 ; 4} · -4;4 · {4;-4} · -4 et 4 · {-4,4} · m = -4 ou m = 4 · -4 ou 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Produit en croix : $m \times m = 8 \times 2$.
2. $m^2 = 16$ a deux solutions.

CORRECTION

Produit en croix —

$$m \times m - 8 \times 2 = 0 \iff m^2 = 16$$

Deux solutions —

$$m^2 - 16 = (m-4)(m+4) = 0$$

$$m = 4 \quad \text{ou} \quad m = -4$$

Pour $m = 4$, $\overrightarrow{v} = 2\,\overrightarrow{u}$; pour $m = -4$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{v} = -2\,\overrightarrow{u}$. Une équation $m^2 = 16$ a **deux** solutions opposées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4} / 4` → Il y a une autre valeur : $(-4)^2 = 16$ aussi. Pour $m = -4$, $\overrightarrow{v} = -2\,\overrightarrow{u}$.

`{16} / 16` → 16 est la valeur de m^2. On cherche m : les nombres dont le carré vaut 16.

EXERCICE 68 · DEFI

Aligner trois points mobiles

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(m\,;1)$, $B(2\,;m)$ et $C(5\,;-3)$, où m est un réel.

Déterminer **toutes** les valeurs de m pour lesquelles les points A, B et C sont alignés.

Écrire l'ensemble des valeurs de m entre accolades, par exemple {-2;2}.

Réponse attendue : `{-1;3}` — aussi acceptées : {-1 ; 3} · -1;3 · {3;-1} · -1 et 3 · {-1,3} · m = -1 ou m = 3 · -1 ou 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-m\\m-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-m\\-4\end{pmatrix}$ doivent être colinéaires.
2. Le produit en croix donne $-4\,(2-m)=(5-m)(m-1)$. Développe et ramène tout d'un côté : tu obtiens $m^2-2m-3=0$.
3. Factorise m^2-2m-3 : cherche deux nombres de produit -3 et de somme -2.

CORRECTION

Les composantes —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-m\\m-1\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-m\\-4\end{pmatrix}$$

Produit en croix —

$$(2-m)\times(-4)=(5-m)(m-1)$$

Développer —

$$-8+4m=-m^2+6m-5 \iff m^2-2m-3=0$$

Factoriser —

$$(m-3)(m+1)=0$$

$$m=3 \quad \text{ou} \quad m=-1$$

Vérification : pour $m=-1$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$; pour $m=3$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$. Le produit en croix ramène l'alignement à une équation produit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{3} / 3` → $m=3$ convient, mais l'équation $(m-3)(m+1)=0$ a une deuxième solution.

`{-1} / -1` → $m=-1$ convient, mais l'équation $(m-3)(m+1)=0$ a une deuxième solution.

EXERCICE 69 · BASE

Distance à l'origine

Dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on donne le point $M(-5\,;12)$.

Calculer la distance OM.

Donner la valeur exacte de OM : un nombre.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un repère orthonormé, $OM=\sqrt{x_M^2+y_M^2}$.
2. $(-5)^2=25$ et $12^2=144$.

CORRECTION

La formule —

$$OM = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144}$$
$$OM = \sqrt{169} = 13$$

La distance à l'origine est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés $|x_M|$ et $|y_M|$: c'est Pythagore. Le carré efface le signe de -5.

PIÈGES ANTICIPÉS

169 → 169, c'est OM^2. Il reste à prendre la racine carrée.

7 → Tu as calculé $-5 + 12$. La distance passe par les **carrés** : $\sqrt{25 + 144}$.

17 → Tu as additionné $5 + 12$: c'est le chemin en escalier. La ligne droite, c'est $\sqrt{5^2 + 12^2}$.

EXERCICE 70 · BASE

Une distance entière

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, on donne les points $A(1\,;-2)$ et $B(4\,;2)$.

Calculer la distance AB.

Donner la valeur exacte de AB : un nombre.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les écarts $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.
2. AB^2 est la somme des carrés des écarts.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

CORRECTION

Les écarts —

$$x_B - x_A = 3 \quad ; \quad y_B - y_A = 2 - (-2) = 4$$

Pythagore —

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$
$$AB = \sqrt{25} = 5$$

Le triangle « 3, 4, 5 » : la formule de la distance, c'est Pythagore dans le triangle rectangle dont les côtés suivent les axes.

PIÈGES ANTICIPÉS

25 → 25, c'est AB^2. Il reste à prendre la racine carrée.

7 → Tu as additionné les écarts $3 + 4$. La distance est la racine de la somme des **carrés**.

3 → $y_B - y_A = 2 - (-2) = 4$, pas 0 : attention au signe de y_A.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

Une distance avec une racine

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, on donne les points $A(2\,;1)$ et $B(-1\,;3)$.

Calculer la distance AB.

Donner la valeur exacte de AB (écrire la racine carrée « sqrt », par exemple sqrt(5)).

Réponse attendue : `sqrt(13)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les écarts sont $x_B - x_A = -3$ et $y_B - y_A = 2$.
2. AB^2 est la somme des carrés des écarts. Si ce n'est pas un carré parfait, la valeur exacte garde la racine.

CORRECTION

Les écarts —

$x_B - x_A = -1 - 2 = -3 \quad ; \quad y_B - y_A = 3 - 1 = 2$

Pythagore —

$AB^2 = (-3)^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

$AB = \sqrt{13}$

Une valeur exacte n'est pas une valeur approchée : $\sqrt{13} \approx 3{,}61$, mais on garde $\sqrt{13}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → 13, c'est AB^2. La distance est sa racine carrée.

`5` → Tu as additionné $3 + 2$. La distance est la racine de la somme des **carrés** des écarts.

`3.6 / 3.61 / 3.606 / 3.605` → C'est une valeur approchée de $\sqrt{13}$. On demande la valeur exacte : garde la racine carrée.

EXERCICE 72 · PRATIQUE

Simplifier la racine

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;2)$ et $B(5\,;6)$.

Calculer la distance AB et l'écrire sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un entier. Donner a.

Donner la valeur de a : un nombre entier.

Réponse attendue : `4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux écarts valent 4 : $AB^2 = 16 + 16 = 32$.
2. Écris 32 comme le produit d'un carré parfait par 2, puis utilise $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

CORRECTION

Pythagore —

$AB^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

Simplifier —

$AB = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2}$

$AB = 4\sqrt{2}$

Le nombre a —

$a = 4$

Pour simplifier une racine, on cherche le plus grand carré parfait qui divise le nombre. Ici $[AB]$ est la diagonale d'un carré de côté 4 : $4\sqrt{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → 16 est sous la racine : $\sqrt{32} = \sqrt{16} \times \sqrt{2}$, et $\sqrt{16} = 4$.

`32` → 32, c'est AB^2. Il reste la racine carrée, puis la simplification $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$.

`8` → Tu as additionné $4 + 4$. La distance est la racine de la somme des **carrés** : $AB^2 = 32$.

`4*sqrt(2) / sqrt(32)` → C'est la distance AB elle-même. On demande seulement le nombre a tel que $AB = a\sqrt{2}$.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

Un point de l'axe à distance 5

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne le point $A(1\,;4)$. Le point $C(x\,;0)$ de l'axe des abscisses, avec $x > 0$, vérifie $AC = 5$.

Déterminer x.

Donner la valeur de x : un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $AC^2 = 25$ avec la formule de la distance.
2. $(x-1)^2 + 16 = 25$, donc $(x-1)^2 = 9$. Deux valeurs possibles pour $x - 1$: une seule donne $x > 0$.

CORRECTION

Au carré —

$AC^2 = (x-1)^2 + (0-4)^2 = 25$

Isoler le carré —

$(x-1)^2 = 9 \iff x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$

$x = 4$ ou $x = -2$, et la condition $x > 0$ élimine -2.

$x = 4$

On travaille avec les **carrés** des distances pour éviter la racine. L'équation donne deux points de l'axe ; la condition de l'énoncé en choisit un.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → $x = -2$ vérifie bien $AC = 5$, mais l'énoncé impose $x > 0$.

`3` → 3, c'est $x - 1$. Il reste à ajouter 1.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

Un triangle isocèle

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $P(-1\,;2)$, $Q(3\,;5)$ et $S(-1\,;y)$, avec $y > 2$.

Déterminer y pour que le triangle PQS soit isocèle en P.

Donner la valeur de y : un nombre.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Isocèle en P : les deux côtés issus de P sont égaux, $PQ = PS$.
2. $PQ = 5$. Le point S a la même abscisse que P : $PS = |y - 2|$.

CORRECTION

Le côté PQ —

$PQ = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Le côté PS —

$PS = \sqrt{0^2 + (y-2)^2} = |y-2| = y - 2 \quad (y > 2)$

$PQ = PS$ donne $y - 2 = 5$.

$y = 7$

Isocèle en un sommet : les deux côtés **issus de ce sommet** sont égaux. Ici $S(-1\,;7)$, juste au-dessus de P.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → $y = -3$ donne aussi $PS = 5$, mais l'énoncé impose $y > 2$.

5 → 5, c'est la longueur PS, c'est-à-dire $y - 2$. Il reste à ajouter 2.

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT

Un point du cercle

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1\,;-2)$ et de rayon 5. Le point $K(4\,;y)$, avec $y > -2$, appartient à $\mathscr{C}$.

Déterminer y.

Donner la valeur de y : un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. K est sur le cercle : $\Omega K = 5$, c'est-à-dire $\Omega K^2 = 25$.
2. $(4-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, donc $(y+2)^2 = 16$.

CORRECTION

Au carré —

$\Omega K^2 = 3^2 + (y+2)^2 = 25 \iff (y+2)^2 = 16$

Deux cas —

$y + 2 = 4 \quad \text{ou} \quad y + 2 = -4$

La condition $y > -2$ impose $y + 2 > 0$.

$y = 2$

Un point est sur un cercle exactement quand sa distance au centre vaut le rayon. On compare les **carrés** : $\Omega K^2 = R^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-6 → $y = -6$ place bien K sur le cercle, mais l'énoncé impose $y > -2$.

4 → 4, c'est $y + 2$. Il reste à retirer 2.

EXERCICE 76 · DEFI

L'aire d'un triangle isocèle

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;1)$, $B(4\,;5)$ et $C(-2\,;5)$.

Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC, en déduire sa nature, puis calculer son aire.

Donner son aire, en unités d'aire, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule AB, AC et BC : deux d'entre eux sont égaux.
2. Le triangle est isocèle en A. La hauteur issue de A arrive au milieu H de $[BC]$: calcule AH.
3. $H(1\,;5)$, donc $AH = 4$, et l'aire vaut $\dfrac{BC \times AH}{2}$.

CORRECTION

Les trois côtés —

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad ; \quad AC = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \quad ; \quad BC = 6$

La hauteur — ABC est isocèle en A : la hauteur issue de A est aussi la médiane. Le milieu de $[BC]$ est $H(1\,;5)$.

$AH = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

L'aire —

$$\text{Aire} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{6 \times 4}{2}$$

$\text{Aire} = 12$

Les coordonnées donnent les longueurs, les longueurs donnent la nature, et la nature donne la méthode : dans un triangle isocèle, la hauteur tombe au milieu de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → Tu as pris $AB = 5$ comme hauteur. La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) : c'est $AH = 4$, plus courte que AB.

24 → $6 \times 4 = 24$ est l'aire du rectangle. Celle du triangle en est la **moitié**.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 77 · DEFI

Le cercle circonscrit

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(2\,;0)$ et $B(0\,;4)$.

Montrer que le triangle OAB est rectangle, puis calculer le rayon de son cercle circonscrit.

Donner la valeur exacte du rayon (écrire la racine « sqrt », par exemple sqrt(3)).

Réponse attendue : `sqrt(5)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le repère est orthonormé : les axes sont perpendiculaires. Où est l'angle droit du triangle OAB ?
2. Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

CORRECTION

L'angle droit — A est sur l'axe des abscisses, B sur l'axe des ordonnées, et les axes sont perpendiculaires : OAB est rectangle en O.

L'hypoténuse —

$$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Le rayon — Le centre du cercle est le milieu de l'hypoténuse $[AB]$.

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

$$r = \sqrt{5}$$

Le centre est le milieu $K(1\,;2)$ de $[AB]$, et l'on vérifie $KO = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Hypoténuse = diamètre : c'est la propriété du triangle rectangle à retenir.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(5) / sqrt(20)` → $2\sqrt{5}$, c'est l'hypoténuse AB, donc le **diamètre** du cercle. Le rayon en est la moitié.

`5` → 5, c'est r^2. Le rayon est sa racine carrée.

`2.2 / 2.24 / 2.236 / 2.23` → C'est une valeur approchée de $\sqrt{5}$. On demande la valeur exacte : garde la racine carrée.

EXERCICE 78 · BASE

Le vecteur DC

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;1)$, $B(4\,;2)$, $C(5\,;5)$ et $D(2\,;4)$.

Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{DC}$, celui qu'on compare à $\overrightarrow{AB}$ pour savoir si $ABCD$ est un parallélogramme.

Écrire le couple de composantes de $\overrightarrow{DC}$, entre parenthèses, la première composante d'abord.

Réponse attendue : `(3;1)` — aussi acceptées : (3,1) · 3;1 · 3 et 1 · (3 et 1) · DC(3;1) · DC(3,1) · DC = (3;1) · DC = (3,1) · vecteur DC(3;1) · vecteur DC = (3;1) · (3 ; 1) · (3;+1) · (+3;1) · x = 3 ; y = 1 · x = 3 et y = 1 · x =

3, y = 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ part de D et arrive en C : arrivée moins départ.
2. $ABCD$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Calcule aussi $\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

Le vecteur DC —

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-2\\5-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Le vecteur AB —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $ABCD$ est un parallélogramme. Attention à l'ordre : on compare $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{DC}$, pas à $\overrightarrow{CD}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-3;-1)` / `(-3,-1)` / `-3;-1` / `-3 et -1` / `(-3 et -1)` / `DC(-3;-1)` / `DC(-3,-1)` / `DC = (-3;-1)` → Ce sont les composantes de $\overrightarrow{CD}$, de C vers D. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ part de D : $x_C - x_D$.

EXERCICE 79 · PRATIQUE

Rectangle et isocèle

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;6)$ et $C(5\,;0)$.

Calculer AB^2, AC^2 et BC^2, en déduire la nature du triangle ABC, puis calculer son aire.

Donner son aire, en unités d'aire, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les trois carrés. Le plus grand est-il la somme des deux autres ?
2. $AB^2 = AC^2 = 20$ et $BC^2 = 40$: rectangle en A. Les deux côtés de l'angle droit sont les « base » et « hauteur ».

CORRECTION

Les trois carrés —

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \quad ; \quad AC^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20 \quad ; \quad BC^2 = 2^2 + (-6)^2 = 40$$

La nature — $AB^2 + AC^2 = 40 = BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A. Et $AB = AC$: il est aussi isocèle.

L'aire —

$$\text{Aire} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{20}}{2} = \frac{20}{2}$$

$$\text{Aire} = 10$$

ABC est rectangle isocèle en A. Dans un triangle rectangle, l'aire est le demi-produit des deux côtés de l'angle droit, jamais de l'hypoténuse.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20` → $AB \times AC = 20$ est l'aire du rectangle construit sur les deux côtés. Le triangle en est la **moitié**.

`10*sqrt(2) / sqrt(200)` → Tu as utilisé l'hypoténuse BC. Les deux côtés qui forment l'angle droit sont $[AB]$ et $[AC]$, ceux qui se rencontrent en A.

EXERCICE 80 · PRATIQUE

Un losange

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, on donne les points $A(1\,;0)$, $B(4\,;4)$, $C(9\,;4)$ et $D(6\,;0)$.

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, puis que c'est un losange. Calculer son périmètre.

Donner son périmètre, en unités de longueur, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$: c'est un parallélogramme s'ils sont égaux.
2. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange : compare AB et AD.

CORRECTION

Parallélogramme —

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \vec{DC}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Deux côtés consécutifs —

$$AB = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \quad ; \quad AD = \sqrt{5^2+0^2} = 5$$

Le périmètre — Un losange a ses quatre côtés de même longueur.

$$4 \times 5 = 20$$

$$\text{Périmètre} = 20$$

D'abord le parallélogramme (vecteurs égaux), ensuite les longueurs : deux côtés consécutifs égaux en font un losange.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10, c'est $AB + AD$. Le périmètre fait le tour : **quatre** côtés.

`25` → 25, c'est AB^2. Le périmètre est une somme de longueurs : $4 \times AB$.

EXERCICE 81 · RAISONNEMENT

Un rectangle

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(0\,;1)$, $B(6\,;-2)$, $C(7\,;0)$ et $D(1\,;3)$.

Montrer que $ABCD$ est un rectangle, puis calculer son aire.

Donner son aire, en unités d'aire, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'abord le parallélogramme : compare $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Puis compare les diagonales AC et BD.
2. L'aire d'un rectangle est $AB \times AD$. Calcule AB et AD, puis multiplie les racines.
   $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$

CORRECTION

Parallélogramme —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$$

Diagonales égales —

$$AC = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} \quad ; \quad BD = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

Les côtés —

$$AB = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \quad ; \quad AD = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

L'aire —

$$AB \times AD = \sqrt{45} \times \sqrt{5} = \sqrt{225}$$

$$\text{Aire} = 15$$

Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle. Et $AB \neq AD$: ce n'est pas un carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`225` → $225 = AB^2 \times AD^2$, c'est le **carré** de l'aire. Il reste la racine carrée : $\sqrt{225} = 15$.

`50` → 50, c'est le carré d'une diagonale. L'aire d'un rectangle est le produit de deux côtés consécutifs, $AB \times AD$.

EXERCICE 82 · RAISONNEMENT

Où est l'angle droit ?

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;1)$, $B(3\,;4)$ et $C(6\,;2)$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle, en précisant le sommet de l'angle droit, puis calculer son aire.

Donner son aire, en unités d'aire, sans écrire l'unité : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `13/2` — aussi acceptées : 6.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les trois carrés AB^2, AC^2, BC^2 et teste Pythagore sur le **plus grand**.
2. $AB^2 = BC^2 = 13$ et $AC^2 = 26$: l'angle droit est en B, le sommet commun aux deux petits côtés.

CORRECTION

Les trois carrés —

$$AB^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \quad ; \quad BC^2 = 3^2 + (-2)^2 = 13 \quad ; \quad AC^2 = 5^2 + 1^2 = 26$$

Pythagore — $AB^2 + BC^2 = 26 = AC^2$: rectangle en B. Et $AB = BC$: isocèle en B.

L'aire —

$$\text{Aire} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Aire} = \frac{13}{2}$$

Le plus grand carré désigne l'hypoténuse, et l'angle droit est en face : ici $[AC]$ est l'hypoténuse, l'angle droit est en B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → $AB \times BC = 13$ est l'aire du carré construit sur ces côtés. Le triangle en est la **moitié**.

`13*sqrt(2)/2 / sqrt(338)/2` → Tu as utilisé l'hypoténuse AC. Les côtés de l'angle droit sont $[BA]$ et $[BC]$, ceux qui partent de B.

EXERCICE 83 · DEFI

Un carré caché

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;0)$, $B(2\,;3)$ et $C(5\,;2)$.

Déterminer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, montrer que $ABCD$ est un carré, puis calculer son aire.

Donner son aire, en unités d'aire, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donne D. Puis compare deux côtés consécutifs, et les deux diagonales.
2. $D(4\,;-1)$. Calcule AB^2 et BC^2, puis AC^2 et BD^2 : que remarques-tu ?

CORRECTION

Le point D —

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff D(4\,;-1)$$

Côtés consécutifs —

$$AB^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \quad ; \quad BC^2 = 3^2 + (-1)^2 = 10$$

Diagonales —

$$AC^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \quad ; \quad BD^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20$$

L'aire — Losange (côtés consécutifs égaux) et rectangle (diagonales égales) : c'est un carré.

$\text{Aire} = AB^2$

$\text{Aire} = 10$

Un carré, c'est un parallélogramme à la fois losange et rectangle. Son aire est le carré du côté : on n'a même pas besoin de la racine, $AB^2 = 10$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20` → 20, c'est le carré de la diagonale. L'aire d'un carré est le carré du **côté**, $AB^2 = 10$ — ou la moitié du carré de la diagonale.

`sqrt(10)` → $\sqrt{10}$, c'est la longueur du côté. L'aire est son carré.

EXERCICE 84 · DEFI

Un triangle équilatéral

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points $A(1\,;0)$, $B(5\,;0)$ et $C(3\,;y)$, avec $y > 0$.

Déterminer y pour que le triangle ABC soit équilatéral.

Donner la valeur exacte de y (écrire la racine « sqrt », par exemple sqrt(5) ou 3*sqrt(5)).

Réponse attendue : `2*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C a pour abscisse 3, celle du milieu de $[AB]$: on a toujours $CA = CB$. Il reste à imposer $CA = AB$.
2. $AB = 4$ et $CA^2 = 2^2 + y^2$. Résous $4 + y^2 = 16$.

CORRECTION

Deux côtés égaux —

$CA^2 = (3-1)^2 + y^2 = 4 + y^2 \quad ; \quad CB^2 = (3-5)^2 + y^2 = 4 + y^2$

Le troisième —

$AB = 4 \quad ; \quad 4 + y^2 = 16 \iff y^2 = 12$

Comme $y > 0$, $y = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3}$.

$y = 2\sqrt{3}$

On retrouve la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 4 : $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$. Travailler avec les carrés des distances évite les racines jusqu'au bout.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12` → 12, c'est y^2. On cherche y : il reste la racine carrée.

`-2*sqrt(3)` → L'énoncé impose $y > 0$: on garde la racine positive.

`4` → 4, c'est la longueur des côtés. L'ordonnée de C est la **hauteur** du triangle, plus courte qu'un côté.

`3.5` / `3.46` / `3.464` / `3.4` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte de y : garde la racine carrée.

EXERCICE 85 · BASE

Une vitesse sur le graphique

Un graphique donne la distance d parcourue par un cycliste, en kilomètres, en fonction du temps t, en heures. Son trajet est le segment qui joint l'origine au point de coordonnées $(3\,;45)$.

Calculer la vitesse du cycliste, en km/h.

Donner la vitesse en km/h, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point $(3\,;45)$ se lit : au bout de 3 heures, le cycliste a parcouru 45 km.
2. Une vitesse en km/h, c'est la distance parcourue divisée par la durée.

CORRECTION

Lecture — Le segment part de $(0\,;0)$: à $t=0$, $d=0$. Il arrive en $(3\,;45)$: 45 km en 3 h.

La vitesse —

$$v=\frac{45}{3}$$

$$v=15\ \text{km/h}$$

Un trajet en ligne droite sur ce graphique, c'est une vitesse constante : $d=15\,t$, une fonction linéaire du temps.

PIÈGES ANTICIPÉS

135 → Tu as multiplié la distance par la durée. La vitesse est la distance **divisée** par la durée.

1/15 → Tu as divisé la durée par la distance : c'est le temps pour un kilomètre, en heures. La vitesse, c'est $\frac{\text{distance}}{\text{durée}}$.

EXERCICE 86 · PRATIQUE

Un départ en retard

Un graphique donne la distance d parcourue par une voiture, en kilomètres, en fonction du temps t, en heures. Son trajet est le segment qui joint les points de coordonnées $(0{,}5\,;0)$ et $(2\,;90)$.

Calculer la vitesse de la voiture, en km/h.

Donner la vitesse en km/h, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : 60

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La voiture part à $t=0{,}5$, pas à $t=0$. Combien de temps dure son trajet ?
2. La vitesse est la distance parcourue divisée par la durée du trajet.

CORRECTION

La durée —

$$2-0{,}5=1{,}5\ \text{h}$$

La vitesse —

$$v = \frac{90}{1{,}5}$$

$$v = 60 \text{ km/h}$$

La durée se lit comme une différence d'abscisses, la distance comme une différence d'ordonnées : la vitesse est leur quotient.

PIÈGES ANTICIPÉS

45 → Tu as divisé par 2, comme si la voiture était partie à $t = 0$. Elle part à $t = 0{,}5$: son trajet dure $1{,}5$ heure.

EXERCICE 87 · PRATIQUE

Où est la voiture ?

Une voiture part à l'instant $t = 1$ (en heures) et roule à la vitesse constante de 60 km/h. On note d la distance qu'elle a parcourue, en km.

Calculer d à l'instant $t = 1{,}75$.

Donner la distance en km, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. À l'instant t, la voiture roule depuis $t - 1$ heures.
2. $d = 60\,(t - 1)$: c'est une fonction affine du temps.

CORRECTION

La fonction —

$$d = 60\,(t - 1) = 60\,t - 60$$

À t = 1,75 —

$$d = 60 \times 0{,}75$$

$$d = 45 \text{ km}$$

Un départ en retard décale le segment vers la droite : la distance est une fonction **affine** du temps, $d = 60\,t - 60$, et non plus linéaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

105 → Tu as calculé $60 \times 1{,}75$, comme si la voiture était partie à $t = 0$. À $t = 1{,}75$, elle ne roule que depuis $0{,}75$ heure.

EXERCICE 88 · RAISONNEMENT

L'instant de la rencontre

Un cycliste part à $t = 0$ (en heures) et roule à 20 km/h. Une voiture part du même endroit, sur la même route, à $t = 1$, et roule à 60 km/h. On note d la distance parcourue depuis le point de départ, en km.

Déterminer l'instant t où la voiture rattrape le cycliste.

Donner l'instant t en heures, sans écrire l'unité : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : 3/2 — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la distance de chacun en fonction de t : $d_1 = 20\,t$ pour le cycliste, et pour la voiture, partie une heure plus tard ?
2. $d_2 = 60\,(t-1)$. Ils se rencontrent quand $d_1 = d_2$: sur le graphique, c'est le point d'intersection des deux segments.

CORRECTION

Les deux fonctions —

$d_1 = 20\,t \quad ; \quad d_2 = 60\,(t-1) = 60\,t - 60$

La rencontre —

$20\,t = 60\,t - 60 \iff 40\,t = 60$

$t = \dfrac{3}{2} = 1{,}5\ \text{h}$

La rencontre se lit à l'intersection des deux représentations graphiques : on résout $d_1 = d_2$. Elle a lieu au bout d'une heure et demie, à $d = 30$ km.

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → 30 km, c'est le **lieu** de la rencontre. La question demande l'**instant** : $t = 1{,}5$ h.

`0` → Avec $d_2 = 60\,t$, les deux partent ensemble et ne se rencontrent qu'au départ. La voiture part à $t = 1$: $d_2 = 60\,(t-1)$.

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

Le lieu de la rencontre

Un piéton rapide part à $t = 0$ (en heures) et avance à 15 km/h. Un scooter part du même endroit, sur la même route, à $t = 2$, et roule à 45 km/h.

À quelle distance du point de départ le scooter rattrape-t-il le piéton ?

Donner la distance en km, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Distance du piéton : $15\,t$. Distance du scooter : $45\,(t-2)$.
2. Résous $15\,t = 45\,(t-2)$ pour trouver l'instant, puis calcule la distance à cet instant.

CORRECTION

L'instant —

$15\,t = 45\,t - 90 \iff 30\,t = 90 \iff t = 3$

La distance —

$d = 15 \times 3$

$d = 45 \text{ km}$

Vérification avec le scooter : $45 \times (3 - 2) = 45$ km. La rencontre est un point : son abscisse est l'instant, son ordonnée la distance.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → $t = 3$ h, c'est l'**instant** de la rencontre. On demande la **distance** : remplace t dans $15\,t$.

`0` → Avec $45\,t$, le scooter partirait en même temps que le piéton. Il part à $t = 2$: sa distance est $45\,(t - 2)$.

EXERCICE 90 · DEFI

L'un vers l'autre

Deux villes X et Y sont distantes de 120 km. À $t = 0$ (en heures), un cycliste part de X vers Y à 20 km/h, et une voiture part de Y vers X à 40 km/h, sur la même route. On note d la distance à la ville X, en km.

Exprimer d en fonction de t pour chacun, puis déterminer à quelle distance de X ils se croisent.

Donner la distance à X, en km, sans écrire l'unité : un nombre.

Réponse attendue : `40`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cycliste s'éloigne de X : $d_1 = 20\,t$. La voiture part à 120 km de X et s'en rapproche : sa distance à X **diminue**.
2. $d_2 = 120 - 40\,t$. Sur le graphique, c'est un segment qui descend. Résous $d_1 = d_2$.

CORRECTION

Les deux fonctions —

$d_1 = 20\,t \quad ; \quad d_2 = 120 - 40\,t$

Le croisement —

$20\,t = 120 - 40\,t \iff 60\,t = 120 \iff t = 2$

La distance à X —

$d = 20 \times 2$

$d = 40 \text{ km}$

La voiture a un coefficient **négatif**, -40 : sa distance à X diminue, son segment descend. Les deux segments se coupent au point $(2\,;40)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → $t = 2$ h, c'est l'instant du croisement. On demande la distance à X : 20×2.

`80` → 80 km, c'est la distance parcourue par la voiture, donc la distance à Y. On demande la distance à X.

EXERCICE 91 · BASE

Même direction

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, D représente la fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 4$, et D' représente la fonction affine g définie par $g(x) = ax - 1$.

Déterminer a pour que D et D' soient parallèles.

Donner la valeur de a : un nombre.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux fonctions affines de même coefficient ont des représentations parallèles.
2. Le coefficient de f est le nombre qui multiplie x.

CORRECTION

Les coefficients — Le coefficient de f est -3, celui de g est a. Les droites sont parallèles lorsqu'ils sont égaux.

$a = -3$

Le coefficient fixe la direction ; la constante (4 ou -1) ne fait que glisser la droite. Ici D et D' sont parallèles et distinctes.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est la constante de f, qui ne change pas la direction. C'est le **coefficient** de x qui doit être le même.

-1 → -1 est la constante de g. Ce sont les coefficients de x qu'on compare.

3 → Le coefficient de f est -3 : le signe moins en fait partie.

EXERCICE 92 · BASE

Par l'origine

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, D représente la fonction affine f définie par $f(x) = -x + 4$. La droite D' est parallèle à D et passe par l'origine O ; elle représente une fonction linéaire g.

Calculer $g(3)$.

Donner la valeur de $g(3)$: un nombre.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D' est parallèle à D : g a le même coefficient que f. Quel est-il ?
2. g est linéaire, de coefficient -1 : $g(x) = -x$.

CORRECTION

La fonction g — Même coefficient que f, et $g(0) = 0$ puisque D' passe par O.

$g(x) = -x$

$g(3) = -3$

La parallèle à D passant par l'origine représente la fonction linéaire de même coefficient : on garde $-x$ et on enlève la constante.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → $1 = f(3)$: tu as calculé l'image par f. La fonction g a le même coefficient, mais pas de constante : $g(x) = -x$.

3 → Le coefficient de f est -1 : $g(x) = -x$, et $g(3) = -3$.

EXERCICE 93 · PRATIQUE

Un coefficient avec paramètre

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, D représente la fonction affine f définie par $f(x) = (m - 1)\,x + 2$, où m est un réel, et D' représente la fonction affine g définie par $g(x) = 3x - 5$.

Déterminer m pour que D et D' soient parallèles.

Donner la valeur de m : un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les droites sont parallèles lorsque les coefficients sont égaux. Le coefficient de f est $m - 1$, pas m.
2. Résous $m - 1 = 3$.

CORRECTION

Les coefficients —

$m - 1 = 3$

$m = 4$

Vérification : avec $m = 4$, $f(x) = 3x + 2$ a le même coefficient que g. Le coefficient, c'est **tout** ce qui multiplie x.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est la valeur du coefficient $m - 1$. On cherche m : il reste à ajouter 1.

2 → Tu as résolu $m + 1 = 3$. Le coefficient est $m - 1$: $m = 3 + 1$.

EXERCICE 94 · PRATIQUE

La parallèle par un point

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, D représente la fonction affine f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\,x + 1$. La droite D' est parallèle à D et passe par le point $A(4\,;-1)$; elle représente la fonction affine g définie par $g(x) = \dfrac{1}{2}\,x + b$.

Déterminer b.

Donner la valeur de b : un nombre.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D' passe par $A(4\,;-1)$: l'image de 4 par g est -1.
2. $\frac{1}{2}\times 4+b=-1$: isole b.

CORRECTION

Le point A —

$$g(4)=-1 \iff \frac{1}{2}\times 4+b=-1$$

Isoler b —

$2+b=-1$

$b=-3$

Pour une parallèle : on garde le coefficient, et le point par lequel elle passe donne la constante. Ici $g(x)=\frac{1}{2}x-3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Tu as trouvé $b=-1+2$. Pour isoler b dans $2+b=-1$, on **retranche** 2 : $b=-1-2$.

-1 → -1 est l'ordonnée de A, c'est-à-dire $g(4)$, pas $g(0)$. La constante b est l'image de 0.

EXERCICE 95 · RAISONNEMENT

Coefficient lu sur deux points

Dans un repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, la droite D passe par les points $A(1\,;3)$ et $B(3\,;7)$; elle représente une fonction affine f. La droite D' est parallèle à D et passe par le point $C(0\,;-2)$; elle représente la fonction affine g.

Calculer $g(5)$.

Donner la valeur de $g(5)$: un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient de f se lit sur deux points : $a=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}$.
2. $a=2$. La fonction g a ce coefficient, et D' passe par $C(0\,;-2)$: $g(0)=-2$.

CORRECTION

Le coefficient —

$$a=\frac{7-3}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

La fonction g — g a le même coefficient, et $g(0)=-2$.

$g(x)=2x-2$

$g(5) = 2 \times 5 - 2 = 8$

Le coefficient d'une fonction affine est le rapport $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; il est le même pour toutes les droites parallèles à D. Ici $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 2x - 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

11 → $11 = f(5)$: tu as calculé avec D. La droite D' a le même coefficient mais passe par $C(0\,;-2)$: sa constante est -2.

1/2 → Tu as pris $a = \frac{2}{4}$: écarts des abscisses sur écarts des ordonnées. Le coefficient, c'est l'écart des **images** divisé par l'écart des abscisses. Puis calcule $g(5)$.

EXERCICE 96 · DEFI

Entre deux droites parallèles

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, D représente la fonction affine f définie par $f(x) = 2x - 1$. La droite D' est parallèle à D et passe par le point $A(3\,;1)$. On note B le point d'intersection de D' avec l'axe des ordonnées, et C celui de D avec l'axe des ordonnées.

Calculer la distance BC.

Donner la valeur de BC : un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D' représente $g(x) = 2x + c$. Le point A donne c.
2. Une droite coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0 : $B(0\,;g(0))$ et $C(0\,;f(0))$.

CORRECTION

La droite D' —

$g(3) = 1 \iff 6 + c = 1 \iff c = -5 \quad ; \quad g(x) = 2x - 5$

Les deux points —

$B(0\,;-5) \quad ; \quad C(0\,;-1)$

La distance —

$BC = \sqrt{0^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{16}$

$BC = 4$

Deux droites parallèles représentant $2x + b$ et $2x + c$ coupent l'axe des ordonnées en b et en c : elles sont décalées de $|b - c|$ verticalement.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Vérifie la constante de g : $6 + c = 1$ donne $c = 1 - 6 = -5$, pas 5.

-4 → Une distance est positive : $BC = |-1-(-5)| = 4$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 97 · BASE

Dans le repère du parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Le point E vérifie $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Donner les coordonnées du point E dans ce repère.

Écrire le couple de coordonnées de E, entre parenthèses, l'abscisse d'abord.

Réponse attendue : `(2;-1)` — aussi acceptées : (2,-1) · E(2;-1) · E(2,-1) · E = (2;-1) · E = (2,-1) · E : (2;-1) · 2;-1 · x = 2 ; y = -1 · x = 2 et y = -1 · x = 2, y = -1 · xE = 2 ; yE = -1 · x_E = 2 ; y_E = -1 · xE = 2 et yE = -1 · x_E = 2 et y_E = -1 · xE = 2, yE = -1 · x_E = 2, y_E = -1 · y = -1 ; x = 2 · y = -1 et x = 2 · y = -1, x = 2 · yE = -1 ; xE = 2 · y_E = -1 ; x_E = 2 · yE = -1 et xE = 2 · y_E = -1 et x_E = 2 · (x;y) = (2;-1) · (x,y) = (2,-1) · (xE;yE) = (2;-1) · (x_E;y_E) = (2;-1) · E(x = 2 ; y = -1) · 2 et -1 · (2 et -1) · E(2 et -1) · x = 2 y = -1 · xE = 2 yE = -1 · x_E = 2 y_E = -1 · (+2;-1) · (2.0;-1) · (2;-1.0) · (2,0;-1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, les coordonnées de E sont les coefficients de $\overrightarrow{AE}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ d'abord, celui de $\overrightarrow{AD}$ ensuite, avec leurs signes.

CORRECTION

Lire les coefficients —

$$\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB} + (-1)\,\overrightarrow{AD}$$

$$E(2\,;-1)$$

Dans un repère choisi $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, l'origine est A et les vecteurs de base sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$: on lit les coordonnées exactement comme dans $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1;2)` / `(-1,2)` / `E(-1;2)` / `E(-1,2)` / `E = (-1;2)` / `-1;2` / `x = -1 ; y = 2` / `x = -1 et y = 2` / `x = -1, y = 2` / `xE = -1 ; yE = 2` / `x_E = -1 ; y_E = 2` / `(x;y) = (-1;2)` / `-1 et 2` / `(-1 et 2)` / `E(-1 et 2)` / `x = -1 y = 2` / `xE = -1 yE = 2` / `x_E = -1 y_E = 2` → Tes deux nombres sont dans le désordre : le premier vecteur du repère est $\overrightarrow{AB}$, son coefficient vient en premier.

EXERCICE 98 · PRATIQUE

Le milieu dans un repère choisi

Soit ABC un triangle. On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, et on note I le milieu du segment $[BC]$.

Déterminer l'abscisse de I dans ce repère.

Donner la valeur de x_I : un nombre ou une fraction.

Réponse attendue : `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$ et $C(0\,;1)$: l'origine est A, et $\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AC}$.
2. La formule du milieu marche dans n'importe quel repère : moyenne des abscisses de B et de C.

CORRECTION

Les sommets —

$$A(0\,;0) \quad ; \quad B(1\,;0) \quad ; \quad C(0\,;1)$$

Le milieu —

$$x_I = \frac{1+0}{2}$$

$$x_I = \frac{1}{2}$$

Ainsi $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Les milieux et les vecteurs se calculent dans tout repère, même non orthonormé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Tu as additionné les abscisses de B et de C sans diviser par 2.

`0` → 0 est l'abscisse de C. Le milieu de $[BC]$ est entre B (abscisse 1) et C (abscisse 0).

EXERCICE 99 · PRATIQUE **La diagonale en trois**

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les points E et F de la diagonale $[BD]$ vérifient $BE = EF = FD$, avec E du côté de B. On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Déterminer l'ordonnée y_F du point F dans ce repère.

Donner la valeur exacte de y_F : une fraction.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, $B(1\,;0)$ et $D(0\,;1)$. Calcule les composantes de $\overrightarrow{BD}$.
2. F est aux deux tiers de la diagonale en partant de B : $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

CORRECTION

Le vecteur BD —

$$B(1\,;0) \quad ; \quad D(0\,;1) \quad ; \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Le point F —

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \iff x_F = 1 - \frac{2}{3} \quad ; \quad y_F = 0 + \frac{2}{3}$$

$$y_F = \frac{2}{3}$$

Ainsi $E\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ et $F\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$. Partager un segment, c'est partir d'une extrémité et ajouter une fraction de ses composantes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → $\frac{1}{3}$ est l'ordonnée de E, le premier point, du côté de B. F est deux fois plus loin : aux deux tiers.

`1/2` → $\frac{1}{2}$ correspond au milieu de $[BD]$. Les points E et F partagent la diagonale en **trois**.

`0.67 / 0.667 / 0.6667 / 0.66 / 0.7` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte de y_F : une fraction.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT

Une médiane, un alignement

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AC]$. Le point G vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Montrer que les points B, G et J sont alignés, en déterminant le réel k tel que $\overrightarrow{BG} = k\,\overrightarrow{BJ}$.

Donner la valeur exacte de k : une fraction.

Réponse attendue : `2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère : $B(1\,;0)$, $C(0\,;1)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$. Calcule les coordonnées de G.
2. $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$. Compare les composantes de $\overrightarrow{BG}$ et de $\overrightarrow{BJ}$.

CORRECTION

Le point G —

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \iff G\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$$

Les vecteurs —

$$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Chaque composante de $\overrightarrow{BG}$ est les deux tiers de celle de $\overrightarrow{BJ}$.

$$k = \frac{2}{3}$$

$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$: G est aussi sur la médiane (BJ), aux deux tiers à partir de B. C'est le centre de gravité, et le repère choisi l'a montré en quelques lignes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2` → Tu as trouvé $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$. On cherche k tel que $\overrightarrow{BG} = k\,\overrightarrow{BJ}$.

`1/3` → $\frac{1}{3}$, c'est la part qui reste, de G à J. La question porte sur $\overrightarrow{BG}$, à partir de B.

`0.67 / 0.667 / 0.6667 / 0.66 / 0.7` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte de k : une fraction.

EXERCICE 101 · DEFI

Où (DF) coupe [BC]

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Le point F de la diagonale $[AC]$ vérifie $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. La droite (DF) coupe le côté $[BC]$ en un point K. On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Déterminer l'ordonnée y_K du point K dans ce repère.

Donner la valeur exacte de y_K : une fraction.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère : $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$, $D(0\,;1)$ et $F\left(\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$. Le côté $[BC]$ est formé de points d'abscisse 1 : $K(1\,;y)$.
2. D, F et K sont alignés : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}1\\y-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

CORRECTION

Les points —

$D(0\,;1) \quad ; \quad F\left(\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\right) \quad ; \quad K(1\,;y)$

Produit en croix —

$\frac{3}{4}(y-1) = -\frac{1}{4}\times 1 \iff y-1 = -\frac{1}{3}$

$y_K = \dfrac{2}{3}$

$K\left(1\,;\frac{2}{3}\right)$: comme $B(1\,;0)$ et $C(1\,;1)$, on a $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Une question d'intersection devient un produit en croix, dès qu'on a choisi le bon repère.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/3` → $-\frac{1}{3}$, c'est $y-1$, la deuxième composante de $\overrightarrow{DK}$. Il reste à ajouter 1.

`3/4` / `0.75` → $\frac{3}{4}$ est l'ordonnée de F. Le point K est plus loin sur la droite (DF), sur le côté $[BC]$ d'abscisse 1.

`0.67` / `0.667` / `0.6667` / `0.66` / `0.7` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte de y_K : une fraction.

EXERCICE 102 · DEFI

Une droite qui sort du triangle

Soit ABC un triangle, M le milieu de $[AB]$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. La droite (MN) coupe la droite (BC) en un point P. On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BP} = k\,\overrightarrow{BC}$.

Donner la valeur de k : un nombre.

Réponse attendue : -1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère : $B(1\,;0)$, $C(0\,;1)$, $M\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$ et $N\left(0\,;\frac{1}{3}\right)$. Écris P à l'aide de k : $\overrightarrow{BP} = k\,\overrightarrow{BC}$ donne $P(1-k\,;k)$.
2. M, N, P sont alignés : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-k\\ k\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
3. Le produit en croix donne $-\frac{1}{2}\,k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-k\right)$. Multiplie tout par 6.

CORRECTION

Le point P —

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$; $P(1-k\,;k)$

Les vecteurs —

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-k\\ k\end{pmatrix}$

Produit en croix —

$-\frac{1}{2}\,k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-k\right) \iff -3k = 1-2k$

$k = -1$

$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{BC}$: $P(2\,;-1)$ est hors du segment $[BC]$, au-delà de B, et B est le milieu de $[PC]$. Le signe de k dit de quel côté de B se trouve P.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Avec $k=1$, P serait en C, qui n'est pas sur (MN). Reprends le produit en croix : $-3k = 1-2k$ donne $k=-1$.

3/2 → Ton produit en croix a mélangé les lignes : tu as écrit $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{1}{3}\,k$. On multiplie en diagonale, la première composante de l'un par la deuxième de l'autre : $-\frac{1}{2}\,k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-k\right)$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMOUTE