– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Activités numériques II

1re année secondaire · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum el chapitre mte3 l'écriture. Nafs el nombre najjmou nektbouh b trois tor9at mekhtelfin, w koll écriture tekhdemna fi 7aja. Bech nchoufou les puissances, l'écriture scientifique et les racines carrées.

عسلامة ! ليوم الشابيتر متاع l'écriture. نفس الـ nombre نجّمو نكتبوه بـ trois طرق مختلفين، w كلّ écriture تخدمنا في حاجة. باش نشوفو les puissances، l'écriture scientifique et les racines carrées.

Bonjour ! Aujourd'hui, le chapitre de l'écriture. Le même nombre peut s'écrire de trois façons différentes, et chaque écriture sert à quelque chose. On va voir les puissances, l'écriture scientifique, et les racines carrées.

Ce chapitre est un chapitre d'**écriture**. Le même nombre peut s'écrire $\sqrt{50}$, $5\sqrt{2}$ ou $7{,}071\ldots$: ce sont trois façons de dire la même chose, et chacune sert à quelque chose de différent.

Apprendre à passer de l'une à l'autre — puissances, écriture scientifique, radicaux — c'est ce qui permet ensuite de calculer vite et sans calculatrice.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Utiliser le produit en croix, additionner, multiplier et diviser des quotients

  > Utiliser le produit en croix, additionner, multiplier et diviser des quotients.
  > *Utiliser le produit en croix, additionner, multiplier et diviser des quotients.*

- Appliquer les règles de calcul sur les puissances à exposant entier relatif

  > Appliquer les règles de calcul sur les puissances à exposant entier relatif.
  > *Appliquer les règles de calcul sur les puissances à exposant entier relatif.*

- Écrire un nombre en écriture scientifique $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$

  > Écrire un nombre en écriture scientifique, a fois 10 puissance n, avec la valeur absolue de a entre 1 inclus et 10 exclu.
  > *Écrire un nombre en écriture scientifique, a fois 10 puissance n, avec la valeur absolue de a entre 1 inclus et 10 exclu.*

- Simplifier une racine carrée en extrayant le plus grand carré parfait

  > Simplifier une racine carrée en extrayant le plus grand carré parfait.
  > *Simplifier une racine carrée en extrayant le plus grand carré parfait.*

- Réduire une somme de radicaux de même radicande

  > Réduire une somme de radicaux de même radicande.
  > *Réduire une somme de radicaux de même radicande.*

- Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient en utilisant l'expression conjuguée

  > Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient avec l'expression conjuguée.
  > *Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient avec l'expression conjuguée.*

- Savoir ce qui conserve une inégalité et ce qui la renverse

  > Savoir ce qui conserve une inégalité et ce qui la renverse.
  > *Savoir ce qui conserve une inégalité et ce qui la renverse.*

- Ranger a, a^2 et $\sqrt{a}$ selon que $a \geq 1$ ou $0 \leq a \leq 1$

  > Ranger a, a au carré et racine carrée de a, selon que a est supérieur ou égal à 1, ou compris entre 0 et 1.
  > *Ranger a, a au carré et racine carrée de a, selon que a est supérieur ou égal à 1, ou compris entre 0 et 1.*

---

1. ACTIVITÉ

Compter les facteurs plutôt qu'apprendre par cœur

CE QU'IL DIT

9bal ma na7fdhou les règles, barra n3addouhom. Ekteb 2 puissance 3 w 2 puissance 4 bel facteurs el koll, w 3edd 9adech marra yodhher le facteur 2. 3awed nafs el 7aja m3a 10 puissance 5 sur 10 puissance 2. Elli bech tal9ah houwa elli bech ykhallik ma ta7fedh walou.

قبل ما نحفظو les règles، برّة نعدّوهم. أكتب 2 puissance 4 w 2 puissance 3 بالـ facteurs الكلّ، w عدّ قدّاش مرّة يظهر le facteur 2. عاود نفس الحاجة مع 10 puissance 2 sur 10 puissance 5. الّي باش تلقاه هوّ الّي باش يخلّيك ما تحفظ والو.

Avant d'apprendre les règles, comptons-les. Écris 2 puissance 3 et 2 puissance 4 avec tous leurs facteurs, et compte combien de fois le facteur 2 apparaît. Recommence avec 10 puissance 5 sur 10 puissance 2. Ce que tu vas trouver, c'est ce qui te dispensera d'apprendre quoi que ce soit par cœur.

1. Écris 2^3 et 2^4 en développant **tous** leurs facteurs, puis écris leur produit et compte combien de fois le facteur 2 apparaît.
2. Recommence avec $\dfrac{10^5}{10^2}$: écris les facteurs en haut et en bas, puis simplifie.

3. D'après ce que tu obtiens, que se passe-t-il pour les exposants dans un produit ? dans un quotient ?

Les règles de ce chapitre ne s'apprennent pas : elles se recomptent. Une règle oubliée se retrouve en dix secondes par ce procédé.

EXEMPLE TRAITÉ

Ce que donne le comptage.

Le produit — Trois facteurs, puis quatre : sept en tout.

$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^7$

Le quotient — Deux facteurs du haut se simplifient avec les deux du bas.

$\frac{10^5}{10^2} = \frac{10\times10\times10\times10\times10}{10\times10} = 10^3$

Dans un produit les exposants s'ajoutent, dans un quotient ils se retranchent.

$3 + 4 = 7 \quad ; \quad 5 - 2 = 3$

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

À ne pas faire : $2^3 \times 2^4 = 4^7$ — $2^3 \times 2^4 = 2^7$. Le comptage le montre : on compte des facteurs 2, on n'en fabrique pas de nouveaux.

2. PROPRIÉTÉ

Le calcul sur les quotients

CE QU'IL DIT

3 règles tokhdmek essena el koll. Le produit en croix : a sur b égale c sur d ma3neha a d égale b c. La somme : lezem dénominateur commun, w b d dima yemchi. W la division : te9sem 3ala quotient ma3neha tmultiplier bel inverse mte3ou — hedhi hiya elli tetnsa.

3 règles تخدمك السنة الكل. le produit en croix : a sur b égale c sur d معناها a d égale b c . la somme لازم : dénominateur commun ، w b d دايما يمشي. la division : w تقسم على quotient معناها تـ multiplier بالـ inverse متاعه — هاذي هي اللي تتنسى.

Trois règles qui te serviront toute l'année. Le produit en croix : a sur b égale c sur d veut dire a d égale b c. Pour la somme, il faut un dénominateur commun, et b d convient toujours. Et pour la division : diviser par un quotient, c'est multiplier par son inverse — c'est celle qu'on oublie.

Premier bloc du Retenir du chapitre, et celui dont tout le reste de l'année se sert. Soient a, b, c, d et k des réels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$; pour l'inverse de $\frac{a}{b}$, il faut en plus $a \neq 0$, et pour diviser par $\frac{c}{d}$, il faut $c \neq 0$.

Le **produit en croix** transforme une égalité de quotients en une égalité de produits — c'est lui qui permet de résoudre une équation où l'inconnue est au numérateur ou au dénominateur.

Pour la **somme**, il faut un dénominateur commun, et bd en est toujours un. Pour le **produit**, rien à mettre au même dénominateur : on multiplie en ligne.

Et diviser par un quotient, c'est multiplier par son **inverse** : c'est la règle qu'on oublie le plus souvent.

PRODUIT EN CROIX

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

SOMME

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

PRODUIT

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b} \quad ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

INVERSE

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

QUOTIENT

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (c \neq 0)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Calculer $A = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6}$, puis $B = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$. Déterminer ensuite x tel que $\dfrac{x}{6} = \dfrac{10}{4}$.

La somme — $bd = 24$ convient toujours. Ici 12 suffirait, mais la formule ne demande pas de chercher le plus petit.

$A = \frac{3\times6+4\times5}{4\times6} = \frac{18+20}{24} = \frac{38}{24}$

On rend irréductible en divisant par 2.

$A = \frac{19}{12}$

Le quotient de quotients — Diviser par $\dfrac{5}{7}$, c'est multiplier par $\dfrac{7}{5}$.

$B = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

Le produit en croix —

$\frac{x}{6} = \frac{10}{4} \iff 4x = 60 \iff x = 15$

$$A = \frac{19}{12} \quad ; \quad B = \frac{14}{15} \quad ; \quad x = 15$$

À ne pas faire : $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{8}{10}$ — $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{19}{12}$. On n'additionne ni les numérateurs ni les dénominateurs. Contrôle d'ordre de grandeur : $\dfrac{3}{4}$ vaut déjà $0{,}75$, la somme dépasse donc 1 — alors que $\dfrac{8}{10}$ vaut $0{,}8$.

À ne pas faire : $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{2\times 5}{3\times 7} = \dfrac{10}{21}$ — $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{7}{5} = \dfrac{14}{15}$. C'est la règle du **produit** appliquée à une division. Diviser par un quotient, c'est multiplier par son inverse : le second quotient se retourne.

3. PROPRIÉTÉ

Les puissances à exposant entier

CE QU'IL DIT

El oss essaleb ma ya3nich ennatija salba : ma3neha l'inverse. 2 puissance moins 3 égale un sur 8, w houwa positif.

الأسّ السالب ما يعنيش النتيجة سالبة : معناها l'inverse. 2 puissance moins 3 égale un sur 8، و هو positif.

Un exposant négatif ne veut pas dire que le résultat est négatif : il veut dire l'inverse. 2 puissance moins 3 égale un sur 8, et c'est positif.

Pour $a \neq 0$ et n entier naturel non nul :

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- $a^0 = 1$ — quel que soit a non nul
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ — un exposant négatif, c'est un **inverse**, pas un nombre négatif

Les cinq règles ci-dessous se démontrent toutes en comptant les facteurs. Ne les apprends pas par cœur sans les avoir vérifiées une fois sur un exemple : c'est ce qui évite de les confondre.

PRODUIT

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

QUOTIENT

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

PUISSANCE DE PUISSANCE

$(a^m)^n = a^{m\times n}$

PRODUIT ÉLEVÉ

$(a\times b)^n = a^n \times b^n$

EXPOSANT NÉGATIF

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

EXEMPLE TRAITÉ

Écrire $A = \dfrac{2^3 \times 2^{-5}}{2^{-4}}$ sous la forme 2^n, puis calculer A.

Au numérateur — Produit de puissances de même base : on ajoute les exposants.
$2^3 \times 2^{-5} = 2^{3+(-5)} = 2^{-2}$

Le quotient — On retire l'exposant du dénominateur.
$A = \frac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^{-2-(-4)} = 2^2$
$A = 4$

$$A = 2^2 = 4$$

À ne pas faire : $2^3 \times 2^4 = 4^7$ — $2^3 \times 2^4 = 2^7$. On ajoute les exposants, mais **la base ne change pas**. Elle n'est jamais multipliée par elle-même.

À ne pas faire : 2^{-3} est négatif — $2^{-3} = \frac{1}{8} > 0$. Un exposant négatif fabrique un inverse, pas un nombre négatif.

---

4. MÉTHODE

L'écriture scientifique

CE QU'IL DIT

L'écriture scientifique hiya a fois 10 puissance n, b chart un : 1 inférieur ou égal à la valeur absolue de a, w la valeur absolue de a strictement inférieure à 10. Hal chart houwa elli y5alli l'écriture unique. Bleh, 342 najjmou nektbouh b trois tor9at, w ma na3rfouch anhi essa7i7a.

un : 1 inférieur ou égal à la valeur absolue de a، w بشرط ،a fois 10 puissance n هي l'écriture scientifique la valeur absolue de a strictement inférieure à 10. هالشرط هو الّي يخلّي l'écriture وحيدة. بلاه، 342 نجّمو نكتبوه بـ trois طرق، w ما نعرفوش أنهي الصحيحة.

L'écriture scientifique, c'est a fois 10 puissance n, avec une condition : 1 inférieur ou égal à la valeur absolue de a, et la valeur absolue de a strictement inférieure à 10. C'est cette condition qui rend l'écriture unique. Sans elle, 342 pourrait s'écrire de trois façons, et on ne saurait pas laquelle est la bonne.

L'écriture scientifique d'un nombre non nul est son écriture sous la forme

$$a \times 10^n \text{ avec } 1 \leq |a| < 10 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

La condition sur a est ce qui rend l'écriture **unique** : sans elle, 342 pourrait s'écrire $3{,}42 \times 10^2$, $34{,}2 \times 10^1$ ou $0{,}342 \times 10^3$, et on ne pourrait plus comparer deux nombres d'un coup d'œil.

Méthode : place la virgule juste après le premier chiffre non nul, puis compte de combien de rangs tu l'as déplacée. Vers la gauche, n est positif ; vers la droite, n est négatif.

LA FORME

$$a \times 10^n, \quad 1 \leq |a| < 10$$

EXEMPLE TRAITÉ

Donner l'écriture scientifique de $25\,400$ puis de $0{,}000\,342$.

$25\,400$: la virgule passe de la fin à après le 2, soit 4 rangs vers la gauche.
$25\,400 = 2{,}54 \times 10^{4}$

$0{,}000\,342$: la virgule avance de 4 rangs vers la droite pour atteindre le 3.
$0{,}000\,342 = 3{,}42 \times 10^{-4}$

Vérification — Dans les deux cas, le nombre devant est bien compris entre 1 et 10.
$1 \leq 2{,}54 < 10 \quad \text{et} \quad 1 \leq 3{,}42 < 10$

À ne pas faire : $0{,}000\,342 = 34{,}2 \times 10^{-5}$ — $0{,}000\,342 = 3{,}42 \times 10^{-4}$. L'égalité est vraie, mais ce n'est pas une écriture scientifique : $34{,}2$ n'est pas compris entre 1 et 10.

---

5. DÉFINITION

La racine carrée

CE QU'IL DIT

Racine carrée de a houwa l'unique nombre positif dont le carré vaut a. Deux kelmet mohimmin fel jomla hedhi : positif, w a supérieur ou égal à zéro. La racine carrée d'un nombre négatif ma tetwjedch fi $\mathbb{R}$. W rodd belek : les règles tekhdem 3ala le produit w le quotient berk — ma thammech règle 3ala la somme.

: كلمات مهمّين في الجملة هاذي l'unique nombre positif dont le carré vaut a. deux هو racine carrée de a
: رد بالك $\mathbb{R}$. w ما تتوجدش في positif، w a supérieur ou égal à zéro. la racine carrée d'un nombre négatif
.la somme على règle ما ثمّاش — برك le produit w le quotient على تخدم les règles

La racine carrée de a, c'est l'unique nombre positif dont le carré vaut a. Deux mots comptent dans cette phrase : positif, et a supérieur ou égal à zéro. La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Et attention : les règles portent sur le produit et le quotient seulement — il n'y en a aucune pour la somme.

Pour tout réel $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est **l'unique nombre positif dont le carré vaut a**. Deux mots comptent dans cette phrase : *positif*, et $a \geq 0$. La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Les deux règles utiles portent sur le **produit** et le **quotient** — et seulement sur eux. Il n'existe aucune règle pour la somme : $\sqrt{a+b}$ ne se simplifie pas.

DÉFINITION
$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$$

RACINE D'UN CARRÉ
$$\sqrt{a^2} = |a|$$

PRODUIT
$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)$$

QUOTIENT

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0,\ b > 0)$$

DÉMONSTRATION

Soient $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

Le nombre $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif, comme produit de deux nombres positifs. Calculons son carré :

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$$

C'est donc un nombre positif dont le carré vaut ab. Par définition de la racine carrée, il est égal à $\sqrt{ab}$.

La même démarche, avec $b > 0$, donne la règle du quotient.

EXEMPLE TRAITÉ

Simplifier $\sqrt{50}$, puis calculer $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$.

Carré parfait — On cherche le plus grand carré parfait qui divise 50 : c'est 25.

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Produit — On regroupe sous une seule racine avant de simplifier.

$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$

À ne pas faire : $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$ — $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. La racine carrée ne se distribue pas sur une somme. Elle ne se distribue que sur un produit ou un quotient.

---

6. MÉTHODE

Réduire une somme de radicaux

CE QU'IL DIT

Ma tnajjamch tejma3 deux radicaux ken idha ken 3andhom nafs le radicande — nafs el nombre ta7t la racine. Bel dhabt kif les termes en x : 2 x plus 3 x égale 5 x, amma 2 x plus 3 y ma tetjma3ch. Etari9a deux 5otwet : tbassat koll radical b le plus grand carré parfait, w baad tejma3 elli wallaw kif b3adhhom.

ما تنجّمش تجمع deux radicaux كان إذا كان عندهم نفس le radicande — نفس الـ nombre تحت la racine.
بالضبط كيف les termes en x : 2 x plus 3 x égale 5 x، أمّا 2 y plus 3 x ما تتجمعش. الطريقة deux خطوات :
تبسّط كلّ radical بـ le plus grand carré parfait، w بعد تجمع الّي ولّاو كيف بعضهم.

On ne peut additionner deux radicaux que s'ils ont le même radicande — le même nombre sous la racine. Exactement comme les termes en x : 2 x plus 3 x égale 5 x, mais 2 x plus 3 y ne se réduit pas. La méthode tient en deux temps : simplifier chaque radical avec son plus grand carré parfait, puis regrouper ceux qui sont devenus semblables.

On ne peut additionner deux radicaux que s'ils ont **le même radicande** — le même nombre sous la racine. C'est exactement comme pour les termes en x : $2x + 3x = 5x$, mais $2x + 3y$ ne se réduit pas.

La méthode tient donc en deux temps :

1. simplifier chaque radical en extrayant son plus grand carré parfait ;
2. regrouper ceux qui ont le même radicande, en additionnant leurs coefficients.

REGROUPEMENT

$$a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Simplifier $A=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$.

Extraire — Chaque nombre contient un carré parfait multiplié par 3.

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$

$\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=5\sqrt{3}$

Regrouper — Les trois radicandes sont identiques : on additionne les coefficients.

$A=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(2+3-5)\sqrt{3}$

$$A=0$$

À ne pas faire : $\sqrt{12}+\sqrt{27}=\sqrt{39}$ — $\sqrt{12}+\sqrt{27}=5\sqrt{3}$. On n'additionne pas les radicandes. On simplifie d'abord, puis on regroupe les coefficients.

---

7. MÉTHODE

Rendre un dénominateur rationnel

CE QU'IL DIT

Ma nkhalliwch natija b une racine au dénominateur : ma tnajjamch t9arenha w la ta3melha encadrement. Nodhorbou le numérateur et le dénominateur b l'expression conjuguée. L'expression conjuguée de a moins b hiya a plus b, w el 3aks. Le produit mte3hom ytayyar les racines b fadhl l'identité a au carré moins b au carré.

ما نخلّيوش نتيجة بـ une racine au dénominateur : ما تنجّمش تقارنها w لا تعملها encadrement. نضربو le numérateur et le dénominateur بـ l'expression conjuguée. l'expression conjuguée de a moins b هي a plus b، w العكس. le produit متاعهم يطيّر les racines بفضل l'identité a au carré moins b au carré.

On ne laisse pas un résultat avec une racine au dénominateur : on ne peut ni le comparer ni l'encadrer. On multiplie donc le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée. L'expression conjuguée de a moins b, c'est a plus b, et réciproquement. Leur produit fait disparaître les racines grâce à l'identité a au carré moins b au carré.

Un résultat ne se laisse pas avec une racine au dénominateur : on ne peut ni le comparer ni l'encadrer facilement. On multiplie donc **le numérateur et le dénominateur** par l'expression

conjuguée.

L'expression conjuguée de $a - b$ est $a + b$, et réciproquement. Le produit des deux fait disparaître les racines grâce à l'identité $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Attention : multiplier seulement le dénominateur change la valeur du quotient. Les deux doivent être multipliés.

L'OUTIL

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

CAS SIMPLE

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (a > 0)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Rends rationnel le dénominateur de $B = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}$.

Le conjugué — Celui de $\sqrt{3} - 1$ est $\sqrt{3} + 1$. On multiplie en haut et en bas.

$$B = \frac{1 \times (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

Le dénominateur devient une différence de deux carrés.

$$(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

$$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

À ne pas faire : On multiplie seulement le dénominateur par le conjugué — On multiplie le numérateur **et** le dénominateur. Multiplier le haut et le bas par la même quantité ne change pas le quotient. Multiplier un seul des deux le change.

---

8. PROPRIÉTÉ

Les règles de comparaison

CE QU'IL DIT

Elli yhafedh 3al ordre : tzid nafs echay lzouz, walla tmultiplier b positif. Elli ye9elbou : tmultiplier b négatif, walla temchi l les inverses. W tfakker el bascule : ken a akbar men 1, racine de a asghar men a asghar men a carré. W ken a bin zéro w 1, el koll yet9leb.

اللي يحافظ عالـ ordre : تزيد نفس الشيء للزوز ، وﻻّ تـ multiplier بـ positif . اللي يقلبه : تـ multiplier بـ négatif ، وﻻّ تمشي لـ les inverses . w تفكّر البسكيل : كان a أكبر من 1 ، racine de a أصغر من a أصغر من a carré . w كان a بين zéro w 1 ، الكل يتقلب.

Ce qui conserve l'ordre : ajouter la même chose aux deux membres, ou multiplier par un positif. Ce qui le renverse : multiplier par un négatif, ou passer aux inverses. Et retiens la bascule : si a est plus grand que 1,

alors racine de a est plus petit que a, lui-même plus petit que a au carré. Et si a est entre zéro et un, tout s'inverse.

Dernier bloc du Retenir, et le plus long. Comparer, ce n'est pas seulement savoir lequel est le plus grand : c'est savoir ce que deviennent deux nombres rangés quand on leur fait subir la même opération.

Le signe d'un produit ou d'un quotient suit une seule règle : même signe donne un résultat positif, signes contraires un résultat négatif.

Ce qui conserve l'ordre : ajouter un même réel aux deux membres ; multiplier par un réel **positif** ; élever au carré ou prendre la racine, quand les deux sont positifs.

Ce qui le renverse : multiplier par un réel **négatif**, et passer aux inverses quand les deux sont de même signe.

Deux encadrements enfin, qui surprennent toujours et qui se retiennent ensemble : selon que le nombre est plus grand ou plus petit que 1, la racine et le carré changent de côté.

LA MÉTHODE DE BASE

$$a \geq b \iff a - b \geq 0$$

POSITIF : CONSERVE

$$a \leq b \text{ et } c \geq 0 \implies ac \leq bc$$

NÉGATIF : RENVERSE

$$a \leq b \text{ et } c \leq 0 \implies ac \geq bc$$

$$a \geq 1 \implies \sqrt{a} \leq a \leq a^2$$

$$0 \leq a \leq 1 \implies a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Ranger dans l'ordre croissant a, a^2 et $\sqrt{a}$, d'abord pour $a = 4$, puis pour $a = 0{,}25$.

Pour a égal à 4 — $4 \geq 1$: on est dans le premier cas.

$\sqrt{4} = 2 \quad ; \quad a = 4 \quad ; \quad a^2 = 16$

$\sqrt{a} \leq a \leq a^2$

Pour a égal à 0,25 — $0 \leq 0{,}25 \leq 1$: tout s'inverse.

$a^2 = 0{,}0625 \quad ; \quad a = 0{,}25 \quad ; \quad \sqrt{a} = 0{,}5$

$a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$

La bascule se comprend d'une phrase : multiplier par un nombre **plus petit que 1** fait diminuer. Élever au carré, c'est multiplier par soi-même ; si $a < 1$, cela rapetisse.

$$a \geq 1 : \sqrt{a} \leq a \leq a^2 \quad ; \quad 0 \leq a \leq 1 : a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$$

À ne pas faire : $x \leq 3$ donc $-2x \leq -6$ — $x \leq 3$ donc $-2x \geq -6$. Multiplier par un négatif **renverse** l'inégalité. Contrôle avec $x = 0$: $-2x = 0$, et $0 \geq -6$ est bien vrai.

À ne pas faire : Le carré d'un nombre est toujours plus grand que lui. — Seulement si $a \geq 1$ (ou $a \leq 0$).. Pour $a = 0{,}25$ on a $a^2 = 0{,}0625$, plus petit. C'est exactement la seconde règle d'encadrement.

À ne pas faire : $a \geq b$ donc $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ — $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$, si a et b sont de même signe. Passer aux inverses renverse l'ordre. Et la condition compte : $2 \geq -1$, mais $\frac{1}{2}$ n'est pas inférieur à -1.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$: on ajoute les exposants, la base ne bouge pas.
   > a puissance m fois a puissance n égale a puissance (m plus n) : tzid les exposants, w la base ma tet7arrakch.
   > *a puissance m fois a puissance n égale a puissance (m plus n) : on ajoute les exposants, la base ne bouge pas.*
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$: un exposant négatif donne un inverse, pas un négatif.
   > a puissance moins n égale 1 sur a puissance n : l'exposant négatif ya3tik inverse, mouch nombre négatif.
   > *a puissance moins n égale 1 sur a puissance n : un exposant négatif donne un inverse, pas un nombre négatif.*
3. Écriture scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$. La condition sur a la rend unique.
   > L'écriture scientifique : a fois 10 puissance n, w la valeur absolue de a entre 1 inclus et 10 exclu. Hal condition hiya elli t5alliha unique.
   > *L'écriture scientifique : a fois 10 puissance n, avec la valeur absolue de a entre 1 inclus et 10 exclu. C'est cette condition qui la rend unique.*
4. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, mais $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
   > Racine carrée de a b égale racine carrée de a fois racine carrée de b. Amma racine carrée de (a plus b), mouch racine carrée de a plus racine carrée de b.
   > *Racine carrée de a b égale racine carrée de a fois racine carrée de b, mais racine carrée de (a plus b) n'est pas racine carrée de a plus racine carrée de b.*
5. Pour additionner des radicaux, il faut le **même radicande** : on simplifie d'abord.

> Bech tadditionner des radicaux, lezem le même radicande : tsimplifier 9bal.
> *Pour additionner des radicaux, il faut le même radicande : on simplifie d'abord.*

6. Pour supprimer une racine au dénominateur, on multiplie en haut et en bas par le conjugué.
> Bech tna77i la racine mel dénominateur, todhrob el fou9 w el louta fi le conjugué.
> *Pour supprimer une racine au dénominateur, on multiplie en haut et en bas par le conjugué.*

7. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$, et diviser par un quotient c'est multiplier par son inverse.
> a sur b égale c sur d ma3neha a d égale b c. W te9sem 3ala quotient ma3neha tmultiplier bel inverse mte3ou.
> *a sur b égale c sur d veut dire a d égale b c, et diviser par un quotient, c'est multiplier par son inverse.*

8. Multiplier une inégalité par un **négatif** la renverse. Passer aux inverses aussi, **si les deux nombres sont non nuls et de même signe**.
> Ki todhrob une inégalité fi un nombre négatif, t9allebha. W ki t3addi lel inverses zeda, ken les deux nombres sont non nuls et de même signe.
> *Multiplier une inégalité par un négatif la renverse. Passer aux inverses aussi, si les deux nombres sont non nuls et de même signe.*

9. $a \geq 1 \Rightarrow \sqrt{a} \leq a \leq a^2$; $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$.
> Ken a supérieur ou égal à 1, mel sghir lel kbir : racine carrée de a, a, a au carré. W ken a entre 0 et 1, bel 3aks : a au carré, a, racine carrée de a.
> *Si a est supérieur ou égal à 1, du plus petit au plus grand : racine carrée de a, a, a au carré. Si a est entre 0 et 1, c'est l'inverse : a au carré, a, racine carrée de a.*

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · COMPTER LES FACTEURS PLUTÔT QU'APPRENDRE PAR CŒUR

pourquoi on additionne les exposants | 3lech nzidou les exposants ki nadhrbou | quand on multiplie deux puissances on ajoute les exposants, pourquoi | exposants yetzadou 3lech | pk on ajoute les exposants dans un produit | 3^2 × 3^3 3lech nzidou les exposants

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5$$

CE QU'IL RÉPOND

La puissance ma3neha des facteurs mkarrin. 3^{2} houwa 3 × 3, w 3^{3} houwa 3 × 3 × 3. Ki nodhorbouhom, n3addou les facteurs : 2 + 3, ya3ni cinq facteurs 3. 3ala hakka les exposants yetzadou : $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$.

كي . fois 3 fois 3 3 هو fois 3 ، w 3 au cube 3 هو au carré 3 . مكرّرين des facteurs معناها la puissance
a : يتزادو les exposants على هكّا . cinq facteurs 3 يعني ، les facteurs : deux plus trois نضربوهم ، نعدّو
. puissance m fois a puissance n égale a puissance (m plus n)

Une puissance, ce sont des facteurs répétés. 3 au carré, c'est 3 fois 3, et 3 au cube, c'est 3 fois 3 fois 3. Quand on les multiplie, on compte les facteurs : deux plus trois, soit cinq facteurs 3. Voilà pourquoi les exposants s'ajoutent : a puissance m fois a puissance n égale a puissance (m plus n).

QUESTION 2 · COMPTER LES FACTEURS PLUTÔT QU'APPRENDRE PAR CŒUR

pourquoi on soustrait les exposants dans un quotient | quotient de deux puissances, les exposants kifech | division de deux puissances on soustrait les exposants ? | 3lech natra7ou les exposants ki nediviziw | 7^5 divisé par 7^2 3lech 7 puissance 3 | puissance sur puissance de meme base kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{7^5}{7^2} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7} = 7^3$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi quotient, les facteurs elli el fou9 yetbassttou m3a elli el louta. $\frac{7^{5}}{7^{2}}$: deux facteurs 7 mel fou9 yemchiw m3a les deux elli louta, w yob9aw trois. 3ala hakka natra7ou les exposants : $\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$.

puissance 5 sur 7 puissance 2 : deux 7 . اللوطة مع اللي يتبسّطو اللي الفوق quotient ، les facteurs في
les exposants : a puissance m على هكّا نطرحو . trois يبقاو w ، اللوطة les deux مع يمشيو مالفوق facteurs 7
. sur a puissance n égale a puissance (m moins n)

Dans un quotient, les facteurs du haut se simplifient avec ceux du bas. 7 puissance 5 sur 7 puissance 2 : deux facteurs 7 du haut partent avec les deux du bas, et il en reste trois. C'est pour ça qu'on retranche les exposants : a puissance m sur a puissance n égale a puissance (m moins n).

QUESTION 3 · LES PUISSANCES À EXPOSANT ENTIER

pourquoi la base ne change pas | 3lech la base ma tetbaddelch | est-ce qu'on multiplie les bases entre elles | 5^2 × 5^3 = 25^5 wala 5^5, la base kifech | la base tetdhreb fi rou7ha ? | fel produit de puissances la base tetbaddel ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$5^2 \times 5^3 = 5^5$$

$$5^5 \neq 25^5$$

CE QU'IL RÉPOND

Les exposants yetzadou, ama la base tob9a kif ma hiya. $5^{2} \times 5^{3}$ fiha cinq facteurs, w koll wa7ed menhom 5 : el natija 5^{5}, mouch 25^{5}. N3addou des facteurs 5, ma nsan3ouch facteurs jdod.

كل واحد cinq facteurs ، w فيها au carré fois 5 au cube 5 . تبقى كيف ما هي la base أما ، يتزادو les exposants
منهم 5 : النتيجة 5 puissance 5 ، موش 25 puissance 5 . نعدّو 5 des facteurs ، ما نصنعوش facteurs جدد .

Les exposants s'ajoutent, mais la base reste la même. 5 au carré fois 5 au cube contient cinq facteurs, et chacun vaut 5 : le résultat est 5 puissance 5, pas 25 puissance 5. On compte des facteurs 5, on n'en fabrique pas de nouveaux.

QUESTION 4 · LES PUISSANCES À EXPOSANT ENTIER

deux puissances de bases différentes kifech | bases mouch kif kif nzidou les exposants ? | si les bases sont différentes on fait quoi | la règle des exposants marche avec des bases différentes ? | base mekhtelfa kifech na7seb | 2^3 × 5^2 les bases différentes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$2^3 \times 5^2 = 8 \times 25 = 200$$
$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$$

CE QU'IL RÉPOND

Les règles mte3 les exposants ma ye5dmou ken m3a nafs la base. $2^{3} \times 5^{2}$ ma najjmouch njam3oulhom les exposants : na7sbou koll puissance wa7adha, 8 × 25 = 200. Ama ken l'exposant kif kif, nesta3mlou $(a \times b)^{n} = a^{n} \times b^{n}$: $2^{3} \times 5^{3} = 10^{3}$.

ما نجّموش نجمعولهم la base . 2 au cube fois 5 au carré مع نفس كان يخدمو ما les exposants متاع les règles
a نستعملو كيف كيف ، l'exposant كان أما . fois 25 égale 200 8 ، وحدها puissance كل نحسبو : les exposants
. fois b ، puissance n ، égale a puissance n fois b puissance n : 2 au cube fois 5 au cube égale 10 au cube

Les règles sur les exposants ne marchent qu'avec la même base. Dans 2 au cube fois 5 au carré, on ne peut pas ajouter les exposants : on calcule chaque puissance, 8 fois 25 égale 200. Mais si c'est l'exposant qui est le même, on utilise a fois b, puissance n, égale a puissance n fois b puissance n : 2 au cube fois 5 au cube égale 10 au cube.

QUESTION 5 · LES PUISSANCES À EXPOSANT ENTIER

3lech a puissance 0 égale 1 | pourquoi a puissance 0 = 1 | puissance zéro chnowa ta3ti | 5 puissance 0 égale 0 wala 1 ? | un nombre à la puissance 0 ça fait combien | exposant 0 3lech ya3ti 1

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$$
$$\frac{5^3}{5^3} = 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Nekhdhou $\frac{5^{3}}{5^{3}}$: 7asb la règle du quotient, houwa $5^{3-3} = 5^{0}$. W zeda un nombre non nul sur lui-même ya3ti 1. Donc $5^{0} = 1$, w hakka l koll a non nul.

ناخذو 5 au cube sur 5 au cube : حسب la règle du quotient ، هو 5 (3 moins 3) puissance ، يعني 5
a هكّا لكل donc 5 puissance 0 égale 1 ، w . 1 يعطي un nombre non nul sur lui-même زادة puissance 0 . w

. non nul

Prenons 5 au cube sur 5 au cube : d'après la règle du quotient, c'est 5 puissance (3 moins 3), soit 5 puissance 0. Mais un nombre non nul divisé par lui-même donne aussi 1. Donc 5 puissance 0 égale 1, et c'est pareil pour tout a non nul.

QUESTION 6 · LES PUISSANCES À EXPOSANT ENTIER

puissance négative ya3ni nombre négatif ? | pourquoi un exposant négatif ne donne pas un nombre négatif | exposant bel na9es chnowa | 10 puissance moins 3 chnowa | c'est quoi un exposant négatif | 2 puissance moins 3 négatif ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

$2^{-3} = \frac{1}{8}$

CE QU'IL RÉPOND

L'exposant négatif ya3ti un inverse, mouch nombre négatif : $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$. Par exemple, $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$, w houwa positif. W $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

nombre négatif : a puissance moins n égale 1 sur a موش ، un inverse يعطي l'exposant négatif positif . w 2 هو w ، 0,001 يعني ، puissance n . par exemple ، 10 puissance moins 3 égale 1 sur 1000 . puissance moins 3 égale 1 sur 8

Un exposant négatif donne un inverse, pas un nombre négatif : a puissance moins n égale 1 sur a puissance n. Par exemple, 10 puissance moins 3 égale 1 sur 1000, soit 0,001, et c'est positif. Et 2 puissance moins 3 égale 1 sur 8.

QUESTION 7 · LES PUISSANCES À EXPOSANT ENTIER

puissance de puissance kifech | pourquoi on multiplie les exposants dans une puissance de puissance | puissance d'une puissance on ajoute ou on multiplie | exposant fi parenthèse w exposant barra kifech | 2 au cube entre parenthèses au carré, 2 puissance 5 wala 2 puissance 6 | c'est quoi une puissance d'une puissance

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^6$

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

CE QU'IL RÉPOND

$(2^{3})^{2}$ ma3neha $2^{3} \times 2^{3}$: deux groupes, w fi koll groupe trois facteurs 2. El jomla six facteurs, donc 2^{6}, mouch 2^{5}. Fi puissance d'une puissance, les exposants yetdhrbou : $(a^{m})^{n} = a^{m \times n}$.

groupe trois كل في au cube fois 2 au cube : deux groupes ، w 2 معناها ، au cube ، le tout au carré 2 puissance d'une puissance في . puissance 5 2 موش ، six facteurs ، donc 2 puissance 6 الجملة . facteurs 2

. a puissance m ، le tout puissance n ، égale a puissance (m fois n) : يتضربو ، les exposants

2 au cube, le tout au carré, c'est 2 au cube fois 2 au cube : deux groupes, et dans chaque groupe trois facteurs 2. Six facteurs en tout, donc 2 puissance 6, pas 2 puissance 5. Dans une puissance d'une puissance, les exposants se multiplient : a puissance m, le tout puissance n, égale a puissance (m fois n).

QUESTION 8 · LES PUISSANCES À EXPOSANT ENTIER

est-ce qu'on peut additionner deux puissances | somme de puissances kifech | 2 puissance 3 plus 2 puissance 4 égale 2 puissance 7 ? | puissance plus puissance tetjma3 ? | règle pour la somme des puissances | addition de deux puissances de meme base

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$$
$$2^7 = 128$$

CE QU'IL RÉPOND

Ma fammech règle lel somme : les règles mte3 les puissances ma ye5dmou ken m3a le produit w le quotient. $2^{3} + 2^{4}$ na7sbouha : 8 + 16 = 24, w $2^{7} = 128$. Donc na7sbou koll puissance wa7adha, w ba3d njam3ou.

ما فمّاش règle للـ les règles : somme متاع les puissances ما يخدمو كان مع 2 au . le produit w le quotient
نحسبوها : 8 . donc 128 égale 7 puissance 2 w ، 24 égale 16 plus نحسبو كل 4 puissance 2 cube plus
puissance وحدها ، w من بعد نجمعو .

Il n'existe pas de règle pour la somme : les règles des puissances ne marchent qu'avec le produit et le quotient. 2 au cube plus 2 puissance 4, on le calcule : 8 plus 16 égale 24, alors que 2 puissance 7 égale 128. On calcule donc chaque puissance, puis on additionne.

QUESTION 9 · LE CALCUL SUR LES QUOTIENTS

c'est quoi le produit en croix | produit en croix kifech | quand utiliser le produit en croix | chnowa produit en croix | 3lech produit en croix s7i7 | comment trouver x avec le produit en croix

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$
$$\frac{x}{3} = \frac{8}{12} \iff 12x = 24 \iff x = 2$$

CE QU'IL RÉPOND

Le produit en croix ybaddel l'égalité de deux quotients b égalité de deux produits : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$, ki b w d non nuls. Houwa elli ykhallina nal9aw l'inconnue ki tkoun fel numérateur walla fel dénominateur. Par exemple, $\frac{x}{3} = \frac{8}{12}$ ya3ti $12x = 24$, donc $x = 2$.

le في تكون كي l'inconnue نلقاو يخلّينا اللي هو . b w d non nuls كي ، a fois d égale b fois c يعني
، égalité de deux produits : a sur b égale c sur d بـ l'égalité de deux quotients يبدّل le produit en croix

x égale 24 ، donc x 12 يعطي le dénominateur . par exemple ، x sur 3 égale 8 sur 12 ولّا numérateur . égale 2

Le produit en croix transforme une égalité de deux quotients en une égalité de deux produits : a sur b égale c sur d revient à a fois d égale b fois c, avec b et d non nuls. C'est lui qui permet de trouver une inconnue placée au numérateur ou au dénominateur. Par exemple, x sur 3 égale 8 sur 12 donne 12 x égale 24, donc x égale 2.

QUESTION 10 · LE CALCUL SUR LES QUOTIENTS

kifech nzid zouz fractions | comment additionner deux fractions | on additionne les numérateurs et les dénominateurs ? | somme de deux quotients kifech | 3lech ma nzidouch les dénominateurs | fraction 1/2 + 1/3 = 2/5 ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ma njam3ouch les numérateurs w la les dénominateurs. Lezem dénominateur commun, w bd dima yesla7 : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$. Par exemple, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$, mouch $\frac{2}{5}$.

ما نجمعوش les numérateurs w لا les dénominateurs . لازم d fois b w ، dénominateur commun ديما يصلح :
a sur b plus c sur d égale a d plus b c ، sur b d . par exemple ، 1 sur 2 plus 1 sur 3 égale 3 sur 6 plus 2 sur 6 ، يعني 5 sur 6 ، موش 2 sur 5 .

On n'additionne ni les numérateurs ni les dénominateurs. Il faut un dénominateur commun, et b fois d convient toujours : a sur b plus c sur d égale a d plus b c, sur b d. Par exemple, 1 sur 2 plus 1 sur 3 égale 3 sur 6 plus 2 sur 6, soit 5 sur 6, et pas 2 sur 5.

QUESTION 11 · LE CALCUL SUR LES QUOTIENTS

diviser par une fraction kifech | pourquoi diviser par une fraction c'est multiplier par l'inverse | fraction sur fraction kifech na7sbouha | quotient de deux quotients kifech | 3lech nebdlou la deuxième fraction bel inverse | chnowa l'inverse d'une fraction

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

CE QU'IL RÉPOND

Diviser par un quotient ma3neha nodhorbou fi l'inverse mte3ou : nbaddlou le deuxième quotient b l'inverse mte3ou, w ba3d nodhorbou en ligne. Par exemple, $\frac{3}{5}$ divisé par $\frac{9}{10}$: $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. W lezem le deuxième quotient non nul.

diviser par un quotient معناها نضربو في l'inverse متاعو : نبدّلو le deuxième quotient بـ l'inverse متاعو ، w
من بعد نضربو 9 sur 10 égale 3 sur 5 fois 10 sur 9 ، soit 30 sur 45 ، c'est-à-dire 2 sur 3 . w 2 هو 45 ، w
sur 30 ، يعني en ligne . par exemple ، 3 sur 5 divisé par 9 sur 10 égale 3 sur 5 fois 10 sur 9 ، soit 30 sur 45 ، c'est-à-dire 2 sur 3 . w 2 هو 45 ، w
. le deuxième quotient non nul لازم sur 3

Diviser par un quotient, c'est multiplier par son inverse : on remplace le second quotient par son inverse, puis on multiplie en ligne. Par exemple, 3 sur 5 divisé par 9 sur 10 égale 3 sur 5 fois 10 sur 9, soit 30 sur 45, c'est-à-dire 2 sur 3. Et le second quotient doit être non nul.

QUESTION 12 · LE CALCUL SUR LES QUOTIENTS

comment multiplier deux fractions | fraction fois fraction kifech | lezem dénominateur commun fel produit de fractions ? | produit de deux quotients kifech | kifech nadhreb zouz fractions | multiplier un nombre par une fraction

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{4}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{20}{21}$$
$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fel produit ma yelzemch dénominateur commun : nodhorbou les numérateurs binethom w les dénominateurs binethom. $\frac{4}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{20}{21}$. W ki nodhorbou nombre k fi quotient, nodhorbou ken le numérateur : $3 \times \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

في le produit ما يلزمش dénominateur commun : نضربو les numérateurs بيناتهم w les dénominateurs بيناتهم . 4 w sur 7 fois 5 sur 3 égale 20 sur 21 . كي نضربو nombre k في quotient ، نضربو كان le numérateur : 3 fois 2 sur 7 égale 6 sur 7 .

Pour un produit, pas besoin de dénominateur commun : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. 4 sur 7 fois 5 sur 3 égale 20 sur 21. Et pour multiplier un nombre k par un quotient, on ne multiplie que le numérateur : 3 fois 2 sur 7 égale 6 sur 7.

QUESTION 13 · LE CALCUL SUR LES QUOTIENTS

3lech le dénominateur ma ykounech 0 | pourquoi le dénominateur ne peut pas être nul | dénominateur égal à zéro chnowa ysir | division par 0 possible ? | pourquoi b différent de 0 dans a sur b | on peut diviser par zéro

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$5 \times 0 = 0$$
$$\frac{a}{b} \text{ existe si } b \neq 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Diviser par 0 ma 3andou 7atta ma3na : ma fammech nombre ki nodhorbouh fi 0 ya3ti 5, 5ater n'importe quel nombre × 0 = 0. 3ala hakka fi koll quotient $\frac{a}{b}$, lezem $b \ne 0$. W bech nekhdhou l'inverse de $\frac{a}{b}$, lezem zeda $a \ne 0$.

diviser par 0 ما عندو حتّى معنى : ما فمّاش nombre كي نضربوه في 0 يعطي 5 ، خاطر n'importe quel
l'inverse de a باش ناخذو b différent de 0 . w لازم ، quotient a sur b على هكّا في كل . nombre fois 0 égale 0
. a non nul لازم زادة ، sur b

Diviser par 0 n'a aucun sens : aucun nombre multiplié par 0 ne donne 5, puisque n'importe quel nombre fois 0 égale 0. C'est pour ça que dans tout quotient a sur b, il faut b différent de 0. Et pour prendre l'inverse de a sur b, il faut en plus a non nul.

QUESTION 14 · L'ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

c'est quoi l'écriture scientifique | chnowa l'écriture scientifique | écriture scientifique kifech | comment écrire un nombre en écriture scientifique | kifech nekteb nombre en écriture scientifique | notation scientifique c'est quoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$5\,300 = 5{,}3 \times 10^{3}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'écriture scientifique hiya $a \times 10^{n}$, w $1 \le |a| < 10$. Bech nal9awha, n7ottou la virgule ba3d le premier chiffre non nul, w n3addou 9addech men rang t7arket. Par exemple, $5\,300 = 5{,}3 \times 10^{3}$.

a fois 10 puissance n ، w valeur absolue de a supérieur ou égal à 1 w هي l'écriture scientifique
نعدّو قدّاش من le premier chiffre non nul ، w بعد la virgule نحطّو ، باش نلقاوها . strictement inférieur à 10
. par exemple ، 5 300 égale 5,3 fois 10 puissance 3 . تحرّكت rang

L'écriture scientifique, c'est a fois 10 puissance n, avec la valeur absolue de a supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10. Pour l'obtenir, on place la virgule juste après le premier chiffre non nul, et on compte de combien de rangs elle a bougé. Par exemple, 5 300 égale 5,3 fois 10 puissance 3.

QUESTION 15 · L'ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

pourquoi a doit être entre 1 et 10 en écriture scientifique | 3lech a entre 1 w 10 | 57,8 × 10^2 c'est une écriture scientifique ? | condition sur a fel écriture scientifique | pourquoi 1 ≤ |a| < 10 | écriture scientifique unique 3lech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$5\,780 = 5{,}78 \times 10^{3}$$
$$5\,780 = 57{,}8 \times 10^{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

La condition $1 \le |a| < 10$ hiya elli tkhalli l'écriture unique. Men gherha, 5 780 najjmou nektbouh $5{,}78 \times 10^{3}$ walla $57{,}8 \times 10^{2}$. $57{,}8 \times 10^{2}$ égalité s7i7a, ama mouch écriture scientifique : 57,8 akbar men 10.

هي اللي تخلّي ، la condition 1 inférieur ou égal à valeur absolue de a ، strictement inférieur à 10 من غيرها ، 5 780 نجّمو نكتبوه 5,78 fois 10 puissance 3 ولّا 57,8 57,8 fois 10 puissance 2 . l'écriture unique صحيحة ، أما موش 57,8 : écriture scientifique أكبر من 10 . fois 10 puissance 2 égalité

La condition, valeur absolue de a supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10, est ce qui rend l'écriture unique. Sans elle, 5 780 pourrait s'écrire 5,78 fois 10 puissance 3 ou 57,8 fois 10 puissance 2. La seconde égalité est vraie, mais ce n'est pas une écriture scientifique : 57,8 dépasse 10.

QUESTION 16 · L'ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

exposant positif wala négatif fel écriture scientifique | comment savoir le signe de n en écriture scientifique | la virgule lel ymin wala lel ysar | en écriture scientifique pourquoi n est négatif pour 0,007 | nombre inférieur à 1 en écriture scientifique, l'exposant | kifech na3ref l'exposant fel écriture scientifique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$5\,300 = 5{,}3 \times 10^{3}$

$0{,}007 = 7 \times 10^{-3}$

CE QU'IL RÉPOND

N7ottou la virgule ba3d le premier chiffre non nul, w n3addou 9addech men rang t7arket. Ken t7arket lel ysar (vers la gauche), le nombre kbir w n positif : $5\,300 = 5{,}3 \times 10^{3}$. Ken t7arket lel ymin (vers la droite), le nombre asghar men 1 w n négatif : $0{,}007 = 7 \times 10^{-3}$.

نحطّو la virgule بعد le premier chiffre non nul ، w نعدّو قدّاش من rang تحرّكت . كان تحرّكت لليسار ، le nombre كبير 5 300 égale 5,3 fois 10 puissance 3 w n positif : . كان تحرّكت لليمين ، le nombre أصغر من 1 w n négatif : 0,007 égale 7 fois 10 puissance moins 3 .

On place la virgule après le premier chiffre non nul, et on compte de combien de rangs elle a bougé. Si elle est allée vers la gauche, le nombre est grand et n est positif : 5 300 égale 5,3 fois 10 puissance 3. Si elle est allée vers la droite, le nombre est plus petit que 1 et n est négatif : 0,007 égale 7 fois 10 puissance moins 3.

QUESTION 17 · L'ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

kifech ncompariw zouz nombres en écriture scientifique | comment comparer deux nombres en écriture scientifique | écriture scientifique chkoun akbar 3 × 10^5 wala 9 × 10^4 | l'ordre de deux nombres en écriture scientifique | comparer avec l'écriture scientifique | 3lech l'écriture scientifique t3awen bech ncompariw

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$3 \times 10^{5} = 300\,000$

$9 \times 10^{4} = 90\,000$

CE QU'IL RÉPOND

Pour deux nombres positifs, nchoufou l'exposant 9bal : elli 3andou l'exposant el akbar houwa el akbar. $3 \times 10^{5} > 9 \times 10^{4}$, 5ater 300 000 > 90 000. Ken l'exposant kif kif, ncompariw a. 3ala

hakka la condition entre 1 et 10 mouhimma.

pour deux nombres positifs ، نشوفو l'exposant قْبَلْ : اللي عندو l'exposant الأكبر هو الأكبر . 3 fois 10 puissance 5 أكبر من 9 fois 10 puissance 4 ، خاطر 300 000 أكبر من 90 000 . كان l'exposant كيف كيف ، مهمّة la condition entre 1 et 10 على هكّا . ncompariw a

Pour deux nombres positifs, on regarde d'abord l'exposant : celui qui a le plus grand exposant est le plus grand. 3 fois 10 puissance 5 est plus grand que 9 fois 10 puissance 4, car 300 000 dépasse 90 000. Si les exposants sont égaux, on compare les nombres a. C'est pour cela que la condition entre 1 et 10 compte.

QUESTION 18 · LA RACINE CARRÉE

racine de 9 égale 3 wala moins 3 | 3lech racine carrée dima positive | racine d'un nombre négatif existe ? | racine de moins 9 kifech | pourquoi la racine carrée n'est jamais négative | racine tnajjem tkoun négative ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$3^2 = 9 \quad ; \quad (-3)^2 = 9 \quad ; \quad \sqrt{9} = 3$$

CE QU'IL RÉPOND

$\sqrt{a}$ houwa l'unique nombre positif elli le carré mte3ou a. $3^{2} = 9$ w $(-3)^{2} = 9$ zeda, ama $\sqrt{9} = 3$ bark. W $\sqrt{-9}$ ma fammehech fi $\mathbb{R}$: 7atta carré ma yotla3 négatif.

a . 3 au carré égale 9 ، w (moins 3) au carré متاعو le carré اللي l'unique nombre positif هو racine de a ما فمّاهاش في $\mathbb{R}$: حتّى carré ما يطلع w racine de moins 9 . برك racine de 9 égale 3 أما ، زادة égale 9 négatif .

Racine de a, c'est l'unique nombre positif dont le carré vaut a. 3 au carré égale 9, et (moins 3) au carré aussi, mais racine de 9 égale 3, et seulement 3. Quant à racine de moins 9, elle n'existe pas dans $\mathbb{R}$: aucun carré n'est négatif.

QUESTION 19 · LA RACINE CARRÉE

racine de a plus b égale racine a plus racine b ? | √(9+16) = 7 ? | racine d'une somme kifech | est-ce que la racine se distribue sur une somme | √2 + √3 = √5 ? | 3lech racine de a plus b mouch racine a plus racine b

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$
$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

CE QU'IL RÉPOND

La racine ma tetwazza3ch 3ala somme. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$; ama $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Les règles mte3 la racine ken m3a le produit w le quotient. W $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ma ta3tich $\sqrt{5}$.

racine de (9 أما ؛ 7 يعني ، somme . racine de 9 plus racine de 16 égale 3 plus 4 على تتوزّعش ما la racine le produit w le quotient . w racine de مع كان la racine متاع les règles . 5 يعني ، racine de 25 هي plus 16)

. racine de 5 ما تعطيش 2 plus racine de 3

La racine ne se distribue pas sur une somme. Racine de 9 plus racine de 16 égale 3 plus 4, soit 7 ; mais racine de (9 plus 16), c'est racine de 25, soit 5. Les règles de la racine ne valent que pour le produit et le quotient. Et racine de 2 plus racine de 3 ne donne pas racine de 5.

QUESTION 20 · LA RACINE CARRÉE

kifech nbasset racine carrée | comment simplifier une racine carrée | simplifier racine de 18 | comment écrire racine de 18 sous la forme a racine de b | racine de 72 kifech tetbasset | comment extraire un carré d'une racine

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nlawjou 3ala le plus grand carré parfait elli divise le nombre, w nesta3mlou la règle du produit. 18 = 9 × 2, donc $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. W 72 = 36 × 2, donc $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

نلوّجو على le plus grand carré parfait اللي le nombre ، w نستعملو règle du produit . 18 égale 9 fois 2 ، donc racine de 18 égale racine de 9 fois racine de 2 racine de 2 . w 72 égale 36 fois 2 ، 3 يعني ، fois 2 ، donc racine de 18 égale racine de 9 fois racine de 2 . donc racine de 72 égale 6 racine de 2

On cherche le plus grand carré parfait qui divise le nombre, et on applique la règle du produit. 18 égale 9 fois 2, donc racine de 18 égale racine de 9 fois racine de 2, soit 3 racine de 2. Et 72 égale 36 fois 2, donc racine de 72 égale 6 racine de 2.

QUESTION 21 · LA RACINE CARRÉE

c'est quoi un carré parfait | chnowa carré parfait | carré parfait ya3ni chnowa | les carrés parfaits chkounhom | comment savoir si un nombre est un carré parfait | 8 carré parfait ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49$$
$$\sqrt{49} = 7$$

CE QU'IL RÉPOND

Un carré parfait houwa le carré d'un entier : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 w hakka. La racine mte3ou entier : $\sqrt{49} = 7$. 8 mouch carré parfait : ma fammech entier ki nodhorbouh fi rou7ou ya3ti 8. Nesta3mlouhom bech nbassttou les racines.

هو un carré parfait w 49 ، 36 ، 25 ، 16 ، 9 ، 4 ، 1 : هكّا le carré d'un entier . متاعو la racine de entier : ما فمّاش entier كي نضربوه في روحو يعطي 8 . نستعملوهم باش نبسّطو les racines . موش 49 égale 7 . 8 carré parfait

Un carré parfait, c'est le carré d'un entier : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, et ainsi de suite. Sa racine est un entier : racine de 49 égale 7. 8 n'est pas un carré parfait : aucun entier multiplié par lui-même ne donne 8. On s'en sert pour simplifier les racines.

QUESTION 22 · LA RACINE CARRÉE

racine de a fois racine de b | racine de 2 fois racine de 8 kifech | comment multiplier deux racines | produit de deux racines carrées | kifech nadhreb racine fi racine | est-ce que √a × √b = √(ab)

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

CE QU'IL RÉPOND

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, ki a w b positifs. Nejm3ouhom ta7t racine wa7da 9bal ma nbassttou : $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

قُبَلْ وحدة racine تحت نجمعوهم . a w b positifs كي ، racine de a fois racine de b égale racine de (a fois b) ما نبسّطو : racine de 2 fois racine de 8 égale racine de 16 ، يعني 4 .

Racine de a fois racine de b égale racine de (a fois b), quand a et b sont positifs. On les regroupe sous une seule racine avant de simplifier : racine de 2 fois racine de 8 égale racine de 16, soit 4.

QUESTION 23 · RÉDUIRE UNE SOMME DE RADICAUX

kifech njam3 zouz racines | comment réduire une somme de radicaux | réduire racine de 8 plus racine de 18 | réduire une somme de racines carrées | comment additionner des radicaux | kifech nregroupi les racines

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Njam3ou ken les radicaux elli 3andhom nafs el nombre ta7t la racine, kima $2x + 3x = 5x$. Donc 9bal nbassttou koll racine : $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ w $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Ba3d njam3ou les coefficients : $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

قُبَلْ x plus 3 x égale 5 x . donc 2 كيف ، la racine تحت nombre الـ عندهم نفس اللي les radicaux نجمعو كان نبسّطو كل 2 racine de 18 égale 3 racine de 2 ، w racine de 8 égale 2 racine de 2 : racine . من بعد نجمعو les coefficients : 2 racine de 2 plus 3 racine de 2 égale 5 racine de 2 .

On ne regroupe que les radicaux qui ont le même nombre sous la racine, comme 2 x plus 3 x égale 5 x. On commence donc par simplifier chaque racine : racine de 8 égale 2 racine de 2, et racine de 18 égale 3 racine de 2. Ensuite on additionne les coefficients : 2 racine de 2 plus 3 racine de 2 égale 5 racine de 2.

QUESTION 24 · RÉDUIRE UNE SOMME DE RADICAUX

c'est quoi le radicande | chnowa radicande | radicandes différents on peut additionner ?

---

racines mouch nafs el radicande kifech | si les radicandes sont différents | radicande ya3ni chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$ ne se réduit pas

CE QU'IL RÉPOND

Le radicande houwa le nombre elli ta7t la racine : fi $5\sqrt{2}$, le radicande houwa 2. Ken les radicandes mekhtelfin 7atta ba3d ma nbassttou, ma najjmouch njam3ou : $2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$ tob9a kif ma hiya, kima $2x + 3y$.

les radicandes كان . 2 هو racine de 2 ، le radicande 5 في : la racine تحت اللي le nombre هو le radicande مختلفين حتّى بعد ما نبسّطو ، ما نجّموش نجمعو : 2 2 racine de 3 plus 5 racine de 2 تبقى كيف ما هي ، كيف 2 x plus 3 y .

Le radicande, c'est le nombre sous la racine : dans 5 racine de 2, le radicande est 2. Si les radicandes restent différents même après simplification, on ne peut pas regrouper : 2 racine de 3 plus 5 racine de 2 reste tel quel, comme 2 x plus 3 y.

QUESTION 25 · RENDRE UN DÉNOMINATEUR RATIONNEL

c'est quoi le conjugué | chnowa l'expression conjuguée | le conjugué de racine de 5 moins 2 | kifech nal9a el conjugué | expression conjuguée ya3ni chnowa | le conjugué de a plus b c'est quoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$

CE QU'IL RÉPOND

L'expression conjuguée de a − b hiya a + b, w el 3aks : nbaddlou ken le signe elli fel wost. Le conjugué de $\sqrt{5} - 2$ houwa $\sqrt{5} + 2$. Le produit mte3hom ytayyar la racine : $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 - 4 = 1$.

le . الوسط في اللي le signe كان نبدّلو : العكس a plus b ، w هي l'expression conjuguée de a moins b ، la racine : 5 moins 4 متاعهم يطيّر racine de 5 plus 2 . le produit هو conjugué de racine de 5 moins 2 يعني 1 .

L'expression conjuguée de a moins b, c'est a plus b, et réciproquement : on change seulement le signe du milieu. Le conjugué de racine de 5 moins 2 est racine de 5 plus 2. Leur produit fait disparaître la racine : 5 moins 4, soit 1.

QUESTION 26 · RENDRE UN DÉNOMINATEUR RATIONNEL

3lech nadhrbou el numérateur zeda | pourquoi multiplier le numérateur aussi par le conjugué | on multiplie seulement le dénominateur ? et le numérateur | lezem nodhrbou el fou9 w el louta ? | pourquoi en haut et en bas | numérateur w dénominateur les deux lezem ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$\frac{1}{2} = \frac{1\times3}{2\times3} = \frac{3}{6}$

$$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki nodhorbou le numérateur et le dénominateur fi nafs el nombre, le quotient ma yetbaddelch. Ken nodhorbou ken le dénominateur, la valeur tetbaddel : $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, ama $\frac{1}{6}$ mouch $\frac{1}{2}$. 3ala hakka le conjugué dima el fou9 w el louta.

كي نضربو le numérateur et le dénominateur في نفس الـ le quotient ، le nombre ما يتبدّلش . كان نضربو كان le dénominateur ، la valeur تتبدّل : 1 sur 2 égale 3 sur 6 ، أما 1 sur 6 موش 1 sur 2 . على هكّا le conjugué ديما الفوق w اللوطة .

Multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre ne change pas le quotient. Multiplier seulement le dénominateur change la valeur : 1 sur 2 égale 3 sur 6, mais 1 sur 6 n'est pas 1 sur 2. C'est pour ça que le conjugué va toujours en haut et en bas.

QUESTION 27 · RENDRE UN DÉNOMINATEUR RATIONNEL

3lech nna7iw la racine mel dénominateur | pourquoi on enlève la racine du dénominateur | 1 sur racine de 2 sans racine au dénominateur | comment rendre un dénominateur rationnel | racine au dénominateur c'est interdit ? | kifech nna7i racine mel dénominateur

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Natija fiha racine au dénominateur ma nkhalliwhech : ma najjmouch ncompariwha w la na3mloulha encadrement bessehel. Ki le dénominateur $\sqrt{a}$, nodhorbou el fou9 w el louta fi $\sqrt{a}$: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. W ki fih somme walla différence, nesta3mlou le conjugué.

نتيجة فيها racine au dénominateur ما نخلّيوهاش : ما نجّموش ncompariwha w لا نعملولها encadrement بالساهل . كي le dénominateur racine de a ، نضربو الفوق w اللوطة في racine de a : 1 sur racine de 2 égale racine de 2 sur 2 . w كي فيه somme ولّا différence ، نستعملو le conjugué .

On ne laisse pas un résultat avec une racine au dénominateur : on ne pourrait ni le comparer ni l'encadrer facilement. Quand le dénominateur est racine de a, on multiplie en haut et en bas par racine de a : 1 sur racine de 2 égale racine de 2 sur 2. Et quand il y a une somme ou une différence, on utilise le conjugué.

QUESTION 28 · LES RÈGLES DE COMPARAISON

3lech le sens yetbaddel ki nadhrbou fi négatif | pourquoi le sens de l'inégalité change avec un négatif | multiplier une inégalité par un nombre négatif | diviser une inégalité par moins 2, le sens change ? | inégalité fois un nombre négatif | ki nadhreb inégalité fi nombre bel na9es

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$2 < 5 \Rightarrow -3 \times 2 > -3 \times 5$

$-6 > -15$

CE QU'IL RÉPOND

Ki nodhorbou fi nombre négatif, les nombres yet3addew lel jiha l o5ra mte3 0, w l'ordre yetbaddel. 2 < 5, ama $-3 \times 2 = -6$ akbar men $-3 \times 5 = -15$. W division 3ala nombre négatif, nafs el 7aja. Ama fi nombre positif, le sens ma yetbaddelch.

كي نضربو في nombre négatif ، les nombres يتعدّاو للجيهة الأخرى متاع 0 ، w l'ordre يتبدّل . 2 inférieur à 5 ، أما 2 moins 3 fois ، يعني 5 supérieur à moins 3 fois ، moins 6 ، يعني division w . moins 15 على nombre ، négatif نفس الشيء . أما في le sens ، nombre positif ما يتبدّلش .

Multiplier par un nombre négatif fait passer les nombres de l'autre côté de 0, et leur ordre se retourne. 2 est inférieur à 5, mais moins 3 fois 2, soit moins 6, est supérieur à moins 3 fois 5, soit moins 15. Diviser par un nombre négatif fait pareil. Avec un nombre positif, en revanche, le sens ne change pas.

QUESTION 29 · LES RÈGLES DE COMPARAISON

3lech ki nekhou l'inverse le sens yetbaddel | pourquoi passer aux inverses renverse l'inégalité | si a > b alors 1/a > 1/b ? | inverse w l'ordre kifech | l'inverse d'une inégalité | a inférieur à b donc 1 sur a inférieur à 1 sur b ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$2 < 5 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{5}$

CE QU'IL RÉPOND

Passer aux inverses ybaddel l'ordre, ki les deux nombres non nuls w 3andhom nafs le signe. 2 < 5, ama $\frac{1}{2} = 0{,}5$ akbar men $\frac{1}{5} = 0{,}2$. W ken mouch nafs le signe, la règle ma te5demch : $2 > -1$, w $\frac{1}{2}$ zeda akbar men -1.

يبدّل passer aux inverses ، l'ordre كي w les deux nombres non nuls عندهم نفس 5 inférieur à 2 . le signe ، أما 1 sur 2 ، يعني 0,5 ، sur 5 supérieur à 1 ، يعني 0,2 . w كان موش نفس la règle ، le signe ما تخدمش : 2 supérieur à moins 1 ، w 1 sur 2 supérieur à moins 1 زادة .

Passer aux inverses renverse l'ordre, quand les deux nombres sont non nuls et de même signe. 2 est inférieur à 5, mais 1 sur 2, soit 0,5, est supérieur à 1 sur 5, soit 0,2. Et s'ils ne sont pas de même signe, la règle ne marche pas : 2 est supérieur à moins 1, et 1 sur 2 aussi.

QUESTION 30 · LES RÈGLES DE COMPARAISON

le carré d'un nombre est toujours plus grand que lui ? | x au carré dima akbar men x ? | 3lech 0,3 au carré asghar men 0,3 | pourquoi le carré peut être plus petit que le nombre | le carré ynajjem ykoun asghar ? | a au carré plus grand que a toujours ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$0{,}3^2 = 0{,}09 < 0{,}3$

$a \geq 1 \Rightarrow a \leq a^2$

CE QU'IL RÉPOND

Mouch dima. Ken $a \ge 1$, $a^{2} \ge a$. Ama ken a entre 0 et 1, le carré ysagher : $0{,}3^{2} = 0{,}09$, w houwa asghar men 0,3. 5ater ki nodhorbou fi nombre asghar men 1, el natija ton9os.

a entre 0 et 1 ، le carré أما كان . a supérieur ou égal à 1 ، a au carré supérieur ou égal à a كان . موش ديما يصغّر : w 0,3 ، au carré égale 0,09 هو أصغر من 0,3 . خاطر كي نضربو في nombre أصغر من 1 ، النتيجة تنقص .

Pas toujours. Si a est supérieur ou égal à 1, a au carré est supérieur ou égal à a. Mais si a est entre 0 et 1, le carré rapetisse : 0,3 au carré égale 0,09, plus petit que 0,3. Car multiplier par un nombre plus petit que 1 fait diminuer.

QUESTION 31 · LES RÈGLES DE COMPARAISON

kifech nrangi a, a au carré w racine de a | comment ranger a, a au carré et racine de a | ordre entre a et racine de a | racine de a plus grand que a ? | comparer a et racine de a | a w racine de a chkoun akbar

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$a \geq 1 \Rightarrow \sqrt{a} \leq a \leq a^2$

$0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$

CE QU'IL RÉPOND

Koll chay 7asb 1. Ken $a \ge 1$: $\sqrt{a} \le a \le a^{2}$, kima a = 9 : 3, 9, 81. Ken $0 \le a \le 1$, l'ordre yetbaddel : $a^{2} \le a \le \sqrt{a}$, kima a = 0,04 : 0,0016, 0,04, 0,2.

a supérieur ou égal à 1 : racine de a inférieur ou égal à a ، inférieur ou égal à a au كان . كل شيء حسب a au carré inférieur ou égal à a ، : يتبدّل a entre 0 et 1 ، l'ordre كان . a égale 9 : 3 ، 9 ، 81 كيف ، carré a égale 0,04 : 0,0016 ، 0,04 ، 0,2 كيف ، inférieur ou égal à racine de a .

Tout dépend de 1. Si a est supérieur ou égal à 1 : racine de a est inférieur ou égal à a, lui-même inférieur ou égal à a au carré, comme pour a égale 9 : 3, 9, 81. Si a est entre 0 et 1, l'ordre s'inverse : a au carré, puis a, puis racine de a, comme pour a égale 0,04 : 0,0016, 0,04, 0,2.

QUESTION 32 · LES RÈGLES DE COMPARAISON

moins fois moins égale plus 3lech | règle des signes pour un produit | signe d'un quotient kifech | négatif fois négatif positif ? | le signe d'un produit de deux nombres | na9es fi na9es chnowa ya3ti

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$(-3) \times (-2) = 6 \quad ; \quad \frac{-12}{4} = -3$

CE QU'IL RÉPOND

Le produit w le quotient yetba3ou règle wa7da : nafs le signe ya3ti résultat positif, w signes contraires ya3tiw résultat négatif. $(-3) \times (-2) = 6$, w $\frac{-12}{4} = -3$.

يعطيو résultat positif ، w signes contraires يعطي le signe نفس : وحدة règle يتبعو le produit w le quotient . résultat négatif . moins 3 fois moins 2 égale 6 ، w moins 12 sur 4 égale moins 3

Le produit et le quotient suivent une seule règle : même signe donne un résultat positif, signes contraires un résultat négatif. Moins 3 fois moins 2 égale 6, et moins 12 sur 4 égale moins 3.

QUESTION 33 · LES RÈGLES DE COMPARAISON

comment comparer deux nombres avec la différence | pourquoi calculer a moins b pour comparer | 3lech na7sbou a moins b bech ncompariw | comparer a et b avec a − b | méthode pour comparer deux réels avec la différence | kifech na3ref chkoun akbar bel différence

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{9} = \frac{36}{45} - \frac{35}{45} = \frac{1}{45} > 0$$

CE QU'IL RÉPOND

$a \ge b \iff a - b \ge 0$. Donc bech ncompariw, na7sbou la différence w nchoufou le signe mte3ha. Par exemple, $\frac{4}{5} - \frac{7}{9} = \frac{36}{45} - \frac{35}{45} = \frac{1}{45}$: positif, donc $\frac{4}{5} > \frac{7}{9}$.

la نحسبو ، ncompariw باش a moins b supérieur ou égal à 0 . donc يعني ، a supérieur ou égal à b par exemple ، 4 sur 5 moins 7 sur 9 égale 36 sur 45 moins 35 sur 45 . متاعها le signe نشوفو différence w . sur 45 : positif ، donc 4 sur 5 supérieur à 7 sur 9 1 يعني ،

a est supérieur ou égal à b exactement quand a moins b est supérieur ou égal à 0. Pour comparer, on calcule donc la différence et on étudie son signe. Par exemple, 4 sur 5 moins 7 sur 9 égale 36 sur 45 moins 35 sur 45, soit 1 sur 45 : c'est positif, donc 4 sur 5 est supérieur à 7 sur 9.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Un quotient de puissances**

Calculer $A = \dfrac{2^3 \times 2^{-5}}{2^{-4}}$.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le numérateur : un produit de puissances de **même base**.
2. Pour un quotient, on retire l'exposant du dénominateur.
   $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. Attention au double signe : retirer -4, c'est ajouter 4.

CORRECTION

Numérateur — On ajoute les exposants.

$2^{3} \times 2^{-5} = 2^{-2}$

Quotient — On soustrait l'exposant du dénominateur.

$A = 2^{-2-(-4)} = 2^{-2+4} = 2^{2}$

$A = 4$

Tout se joue sur les exposants : $3 - 5 + 4 = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/64` → Tu as calculé $3 - 5 - 4 = -6$. Le dénominateur porte un exposant **négatif** : le soustraire revient à l'ajouter.

`1/4` → Tu as trouvé 2^{-2} : c'est le numérateur seul. Il reste à diviser par 2^{-4}.

EXERCICE 2 · BASE

Trouver l'exposant

On écrit $0{,}000\,342$ sous la forme $a \times 10^{n}$ avec $1 \leq a < 10$.

Donner la valeur de l'exposant n.

Réponse attendue : `-4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place la virgule juste après le premier chiffre non nul, ici le 3.
2. Compte de combien de rangs la virgule s'est déplacée, et dans quel sens.
3. Le nombre de départ est plus petit que 1 : réfléchis au signe que cela impose.

CORRECTION

Déplacer la virgule — De $0{,}000\,342$ à $3{,}42$, la virgule avance de 4 rangs vers la droite.

$0{,}000\,342 \longrightarrow 3{,}42$

Vers la droite, l'exposant est négatif.

$0{,}000\,342 = 3{,}42 \times 10^{-4}$

Vérification — On revient au départ pour contrôler.

$3{,}42 \times 10^{-4} = \frac{3{,}42}{10\,000} = 0{,}000\,342$

$n = -4$

Un nombre plus petit que 1 a toujours un exposant négatif en écriture scientifique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → Le nombre est plus petit que 1 : son exposant doit être **négatif**. Avec 10^{4}, tu obtiendrais $34\,200$.

`-3` → Recompte les rangs : de $0{,}000\,342$ à $3{,}42$, la virgule saute quatre positions, pas trois.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Une somme de radicaux

Simplifier $A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche dans chaque radical le plus grand **carré parfait** qui le divise.
2. Regarde bien : 12, 27 et 75 sont tous des multiples de 3.
3. Une fois tout écrit avec le même radicande, additionne simplement les coefficients.

CORRECTION

Extraire —

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$

Regrouper — Même radicande : on additionne les coefficients.

$A = (2 + 3 - 5)\sqrt{3} = 0 \times \sqrt{3}$

$A = 0$

Les trois radicaux se compensent exactement. Sans simplification préalable, on ne pouvait pas le voir.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10*sqrt(3)` → Tu as additionné les trois coefficients. Le troisième radical est **soustrait** : $2 + 3 - 5$.

`5*sqrt(3)-5*sqrt(5)` → $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$, et non $5\sqrt{5}$. C'est le facteur restant qui va sous la racine.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

Un dénominateur à rationaliser

Écrire $B = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}$ sans racine au dénominateur.

Réponse attendue : `(sqrt(3)+1)/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'expression conjuguée de $\sqrt{3} - 1$ s'obtient en changeant le signe du milieu.
2. Multiplie le numérateur **et** le dénominateur par cette expression conjuguée.
3. Au dénominateur, tu reconnaîtras une différence de deux carrés.
   $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

CORRECTION

Multiplier en haut et en bas —

$B = \frac{1 \times (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

Le dénominateur — La racine disparaît.

$(\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$

$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Le conjugué transforme le dénominateur en différence de carrés, et la racine s'en va.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(sqrt(3)-1)/2` → Tu as gardé le signe moins au numérateur. C'est le **conjugué** qu'on y place, donc $\sqrt{3}+1$.

`1/2` → Tu n'as multiplié que le dénominateur. Le numérateur doit l'être aussi, sinon la valeur change.

EXERCICE 5 · RAISONNEMENT

Puissances de dix en chaîne

On pose $D = \dfrac{(3 \times 10^{5}) \times (4 \times 10^{-2})}{6 \times 10^{4}}$.

Écrire D en écriture scientifique et donner l'exposant de 10.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sépare le calcul en deux : d'un côté les nombres, de l'autre les puissances de 10.
2. Pour les nombres : $3 \times 4 \div 6$. Pour les puissances : on ajoute les exposants du haut, on retire celui du bas.
3. Vérifie à la fin que le nombre devant est bien compris entre 1 et 10.

CORRECTION

Les nombres —

$\frac{3\times4}{6} = \frac{12}{6} = 2$

Les puissances de dix —

$\frac{10^{5}\times10^{-2}}{10^{4}} = 10^{5-2-4} = 10^{-1}$

$D = 2 \times 10^{-1} = 0{,}2$

Vérification — $1 \leq 2 < 10$: c'est bien une écriture scientifique.

$D = 2 \times 10^{-1}$

On traite les deux parties séparément, puis on vérifie la condition sur le facteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Tu as calculé $5 - 2$ et oublié le dénominateur. Diviser par 10^{4} retire encore 4.

`7` → Tu as ajouté l'exposant du dénominateur au lieu de le retirer : $5 - 2 - 4$, pas $5 - 2 + 4$.

EXERCICE 6 · DEFI

Le carré d'un radical

On pose $C = \left(2\sqrt{5} - 3\right)^{2}$. On peut l'écrire sous la forme $a + b\sqrt{5}$ avec a et b entiers.

Donner la valeur de b.

Réponse attendue : `-12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise l'identité du carré d'une différence.

Maths à la carte
ABDER HAMMAMI

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

2. Ici $x = 2\sqrt{5}$ et $y = 3$. Attention : $x^2 = 2^2 \times (\sqrt{5})^2$.
3. Le terme en $\sqrt{5}$ ne peut venir que du double produit $-2xy$.

CORRECTION

Les deux carrés —

$(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20 \quad ; \quad 3^2 = 9$

Le double produit — C'est lui qui porte la racine.

$-2 \times 2\sqrt{5} \times 3 = -12\sqrt{5}$

On rassemble.

$C = 20 + 9 - 12\sqrt{5} = 29 - 12\sqrt{5}$

La partie entière vient des carrés, la partie en racine vient du double produit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12` → Le carré d'une **différence** porte un double produit négatif : $-2xy$.

`-6` → Tu as calculé $2\sqrt{5} \times 3 = 6\sqrt{5}$ mais oublié le facteur 2 du double produit.

`0` → Tu as écrit $(x-y)^2 = x^2 + y^2$. Il manque le double produit, qui est justement le seul terme en $\sqrt{5}$.

EXERCICE 7 · BASE

Le produit en croix

Déterminer le réel x tel que $\dfrac{x}{6} = \dfrac{10}{4}$.

Donner la valeur de x.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une égalité de deux quotients se transforme en égalité de deux produits. C'est le produit en croix.
2. Multiplie le numérateur de chaque côté par le dénominateur de l'autre.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

CORRECTION

Le produit en croix —

$\frac{x}{6} = \frac{10}{4} \iff 4x = 6 \times 10$

$4x = 60$

$x = \frac{60}{4} = 15$

Vérification : $\dfrac{15}{6} = 2{,}5$ et $\dfrac{10}{4} = 2{,}5$. Le produit en croix évite d'avoir à réduire au même dénominateur — c'est tout son intérêt quand l'inconnue est dans une fraction.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → Tu as trouvé $4x = 60$ et tu t'es arrêté là. Il reste à diviser par 4 pour isoler x.

2.5 → Tu as donné la valeur commune des deux quotients. La question porte sur x, le numérateur de gauche.

2.4 → Tu as croisé dans le mauvais sens. Le produit en croix donne $4 \times x = 6 \times 10$, pas $10 \times x = 6 \times 4$.

EXERCICE 8 · PRATIQUE

Une somme de quotients

Calculer $A = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6}$, et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Donner la fraction irréductible.

Réponse attendue : 19/12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On n'additionne pas les numérateurs entre eux. Il faut d'abord un dénominateur commun.
2. Le produit des deux dénominateurs convient toujours. Applique la formule, puis simplifie.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

CORRECTION

La formule —

$A = \frac{3\times6+4\times5}{4\times6}$

$A = \frac{18+20}{24} = \frac{38}{24}$

On rend irréductible — $\mathrm{PGCD}(38, 24) = 2$.

$A = \frac{19}{12}$

Contrôle d'ordre de grandeur : $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$ et $\dfrac{5}{6} \approx 0{,}83$, donc la somme vaut environ $1{,}58$ — ce qui est bien $\dfrac{19}{12}$. Un tel contrôle repère immédiatement une addition faite de travers.

PIÈGES ANTICIPÉS

8/10 → Tu as additionné les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Le résultat vaut $0{,}8$, alors que $\dfrac{3}{4}$ vaut déjà $0{,}75$: la somme doit dépasser 1.

15/24 → Tu as multiplié les deux quotients au lieu de les additionner. Pour un produit on multiplie en ligne, pour une somme il faut un dénominateur commun.

EXERCICE 9 · PRATIQUE

Diviser par un quotient

Calculer $B = \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)}{\left(\dfrac{5}{7}\right)}$.

Donner la fraction irréductible.

Réponse attendue : `14/15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse. Quel est l'inverse de $\frac{5}{7}$?
2. L'inverse d'un quotient s'obtient en le retournant. Le second quotient se retourne donc, et on multiplie en ligne.
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

CORRECTION

On retourne le diviseur —

$B = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$

On multiplie en ligne —

$B = \frac{2\times7}{3\times5} = \frac{14}{15}$

$14 = 2 \times 7$ et $15 = 3 \times 5$ n'ont aucun facteur commun : la fraction est déjà irréductible.

Contrôle : on divise $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ par $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$. Diviser par un nombre inférieur à 1 **augmente**, et le résultat doit rester proche de $0{,}93$. C'est bien le cas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10/21` → Tu as multiplié les deux quotients en ligne, comme pour un produit. Or c'est une division : le second quotient doit d'abord être retourné.

`15/14` → Tu as retourné le premier quotient au lieu du second. C'est le **diviseur** qui se retourne.

EXERCICE 10 · RAISONNEMENT

Quand le carré rapetisse

On pose $a = 0{,}25$.

Parmi les trois nombres a, a^2 et $\sqrt{a}$, donner **le plus grand**.

Donner la valeur du plus grand des trois.

Réponse attendue : `0.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ne devine pas : calcule les trois. Commence par situer a par rapport à 1.
2. a est compris entre 0 et 1. Dans ce cas, élever au carré **diminue** — car multiplier par un nombre inférieur à 1 diminue.
3. La règle du cours donne l'ordre d'un coup.
$$0 \leq a \leq 1 \implies a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$$

CORRECTION

Les trois valeurs —

$a^2 = 0{,}0625 \quad ; \quad a = 0{,}25 \quad ; \quad \sqrt{a} = 0{,}5$

L'ordre — a est entre 0 et 1 : c'est la racine qui est la plus grande.

$a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$

$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

Le contrôle qui rassure : $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$, donc la racine est bien $0{,}5$. Et retiens la bascule : pour $a \geq 1$ l'ordre s'inverse et c'est le carré qui gagne.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.0625` → Tu as donné a^2, qui est ici le plus **petit** des trois. Élever au carré un nombre inférieur à 1 le diminue.

`0.25` → Tu as donné a. Il se place au milieu : $a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$ quand $0 \leq a \leq 1$.

EXERCICE 11 · DEFI

L'ordre s'inverse

On pose maintenant $a = 4$.

Parmi les trois nombres a, a^2 et $\sqrt{a}$, donner **le plus petit**.

Donner la valeur du plus petit des trois.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Situe d'abord a par rapport à 1. Es-tu dans le même cas qu'à l'exercice précédent ?
2. Ici $a \geq 1$: l'ordre de l'exercice précédent est **renversé**.
3. La règle du cours pour ce cas.

$a \geq 1 \implies \sqrt{a} \leq a \leq a^2$

CORRECTION

Les trois valeurs —

$\sqrt{a} = 2 \quad ; \quad a = 4 \quad ; \quad a^2 = 16$

L'ordre — $a \geq 1$: c'est la racine qui est la plus petite et le carré le plus grand.

$\sqrt{a} \leq a \leq a^2$

$\sqrt{4} = 2$

Les deux exercices se tiennent ensemble, et c'est ainsi qu'il faut les retenir : 1 **est la charnière**. Au-dessus, le carré agrandit et la racine rapetisse ; en dessous, c'est l'inverse. En $a = 1$ les trois valeurs sont égales à 1 — ce qui est le meilleur moyen de ne pas se tromper de sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → Tu as donné a^2, qui est ici le plus **grand**. Pour $a \geq 1$, élever au carré agrandit.

`4` → Tu as donné a. Il se place au milieu : $\sqrt{a} \leq a \leq a^2$ quand $a \geq 1$.

EXERCICE 12 · BASE

Le produit de deux quotients

Calculer $A = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{15}{8}$, et donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible.

Donner la fraction irréductible.

Réponse attendue : `5/6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour un produit, pas besoin de dénominateur commun : on multiplie en ligne.
   $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
2. Avant de multiplier, cherche ce qui se simplifie : 4 et 8 ont un facteur commun, 15 et 9 aussi.

CORRECTION

On multiplie en ligne —

$A = \frac{4 \times 15}{9 \times 8} = \frac{60}{72}$

On rend irréductible — $\mathrm{PGCD}(60, 72) = 12$.

$A = \frac{60 \div 12}{72 \div 12}$

$A = \frac{5}{6}$

Simplifier avant de multiplier évite les grands nombres : $\dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3}$ donnent directement $\dfrac{1 \times 5}{2 \times 3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`19/17` → Tu as additionné les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. C'est un **produit** : on multiplie en ligne.

`32/135` → Tu as retourné le second quotient, comme pour une division. Ici on multiplie, rien ne se retourne.

`0.83 / 0.833 / 0.8333` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde l'écriture en fraction.

EXERCICE 13 · BASE

Un entier fois un quotient

Calculer $B = 6 \times \dfrac{5}{4}$, et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Donner la fraction irréductible.

Réponse attendue : `15/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un entier multiplie seulement le **numérateur**.
   $k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$
2. Une fois le produit écrit, regarde si le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun.

CORRECTION

Le numérateur seul —

$B = \frac{6 \times 5}{4} = \frac{30}{4}$

On simplifie par 2 —

$B = \frac{15}{2}$

Multiplier par 6 le numérateur **et** le dénominateur ne change pas le quotient : c'est simplement une autre écriture de $\frac{5}{4}$. Pour multiplier par k, seul le numérateur bouge.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/4` → Tu as multiplié le numérateur **et** le dénominateur par 6 : tu retrouves $\frac{5}{4}$, qui n'a pas changé. Le facteur 6 ne va qu'au numérateur.

`5/24` → Tu as mis le 6 au dénominateur : c'est diviser par 6. Multiplier par 6, c'est le mettre au numérateur.

EXERCICE 14 · BASE

L'inverse d'un quotient négatif

Donner la valeur exacte de l'inverse du nombre $-\frac{3}{7}$.

Donner l'inverse sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : `-7/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'inverse d'un quotient s'obtient en le **retournant**.
   $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$
2. Un nombre et son inverse ont toujours le même signe : leur produit vaut 1, qui est positif.

CORRECTION

On retourne — Le signe reste, numérateur et dénominateur échangent leur place.

$\frac{1}{-\frac{3}{7}} = -\frac{7}{3}$

Vérification — Le produit du nombre par son inverse doit valoir 1.

$-\frac{3}{7} \times \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{21}{21} = 1$

$-\frac{7}{3}$

Ne confonds pas l'**inverse** (on retourne, le signe reste) et l'**opposé** (on change le signe, on ne retourne pas). L'opposé de $-\frac{3}{7}$ est $\frac{3}{7}$; son inverse est $-\frac{7}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7/3` → Tu as bien retourné, mais perdu le signe. Le produit d'un nombre et de son inverse vaut 1 : ils sont forcément de même signe.

`3/7` → Tu as donné l'**opposé** de $-\frac{3}{7}$. L'inverse, lui, se trouve en retournant le quotient.

`-2.3 / -2.33 / -2.333 / -2.3333` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde l'écriture en fraction.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Une différence de quotients

Calculer $C = \dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{9}$, et donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible.

Donner la fraction irréductible.

> **Réponse attendue :** `1/18`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Comme pour une somme, il faut d'abord un **dénominateur commun**.
2. Le produit $6 \times 9 = 54$ convient toujours, mais un multiple commun plus petit existe : cherche le plus petit multiple commun de 6 et 9.
3. Réécris chaque quotient avec ce dénominateur, puis soustrais les numérateurs.

CORRECTION

Le dénominateur commun — 18 est un multiple de 6 et de 9.

$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$; $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$

On soustrait —

$C = \frac{15-14}{18}$

$C = \frac{1}{18}$

Avec $bd = 54$ on trouve $\dfrac{45 - 42}{54} = \dfrac{3}{54}$, qu'il faut ensuite simplifier par 3 : même résultat, un peu plus long. Le plus petit dénominateur commun évite cette dernière étape.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/3` → Tu as soustrait les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Une différence de quotients demande, comme une somme, un dénominateur commun.

`29/18` → Tu as additionné les deux quotients. Relis le signe : c'est une **différence**.

`0.06` / `0.056` / `0.0556` / `0.05` / `0.055` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde l'écriture en fraction.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Diviser un entier par un quotient

Calculer $D = \dfrac{4}{\left(\dfrac{6}{5}\right)}$, et donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible.

Donner la fraction irréductible.

> **Réponse attendue :** `10/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Diviser par un quotient, c'est multiplier par son **inverse**.
2. L'inverse de $\dfrac{6}{5}$ s'obtient en le retournant. Ensuite, l'entier 4 multiplie le numérateur.
3. Pense à simplifier le résultat.

CORRECTION

On multiplie par l'inverse —

$D = 4 \times \frac{5}{6}$

$D = \frac{20}{6}$

On simplifie par 2 —

$D = \frac{10}{3}$

Contrôle : $\frac{6}{5} = 1{,}2$ et $4 \div 1{,}2 \approx 3{,}33$, c'est bien $\frac{10}{3}$. Diviser par un nombre plus grand que 1 **diminue** : le résultat devait être plus petit que 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`24/5` → Tu as multiplié par $\frac{6}{5}$ sans le retourner. Diviser par un quotient, c'est multiplier par son **inverse** $\frac{5}{6}$.

`2/15` → Tu as lu le calcul comme $\frac{4}{6}$ divisé par 5. La grande barre sépare 4 et le quotient $\frac{6}{5}$ tout entier.

`3.3 / 3.33 / 3.333 / 3.3333` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde l'écriture en fraction.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

L'inconnue au dénominateur

Déterminer le réel non nul x tel que $\frac{9}{x} = \frac{12}{8}$.

Donner la valeur de x.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'inconnue est au dénominateur : le **produit en croix** la fait remonter.
   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$
2. Écris l'égalité des deux produits, puis isole x en divisant.

CORRECTION

Le produit en croix —

$\frac{9}{x} = \frac{12}{8} \iff 9 \times 8 = 12 \times x$

$12x = 72$

$x = \frac{72}{12} = 6$

Vérification : $\frac{9}{6} = 1{,}5$ et $\frac{12}{8} = 1{,}5$. Le produit en croix marche aussi bien quand l'inconnue est en bas : c'est ce qui le rend si utile.

PIÈGES ANTICIPÉS

`72` → Tu as trouvé $12x = 72$ et tu t'es arrêté au produit. Il reste à diviser par 12.

`27/2` → Tu as croisé de travers : tu as écrit $8x = 9 \times 12$. Le produit en croix multiplie chaque numérateur par le dénominateur **de l'autre côté** : $9 \times 8 = 12 \times x$.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

Une somme, puis un produit

Calculer $E = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{10}{3}$.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les parenthèses passent d'abord : commence par la somme.
2. Pour la somme, prends 10 comme dénominateur commun.
3. Il reste un produit de deux quotients : simplifie avant de multiplier.

CORRECTION

La parenthèse —

$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$

Le produit —

$E = \frac{9}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{90}{30}$

$E = 3$

Les 10 se simplifient dès qu'on les voit : $\frac{9}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{9}{3}$. L'ordre des opérations décide de tout : sans les parenthèses, le résultat serait différent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`11/6` → Tu as d'abord multiplié $\frac{2}{5}$ par $\frac{10}{3}$, puis ajouté $\frac{1}{2}$. Les parenthèses imposent de faire la **somme** en premier.

`10/7` → Ta somme est fausse : $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ ne vaut pas $\frac{3}{7}$. Il faut un dénominateur commun.

EXERCICE 19 · RAISONNEMENT

Un quotient à étages

Calculer $F = \dfrac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule séparément le numérateur et le dénominateur : chacun est une somme, ou une différence, avec $1 = \frac{3}{3}$.
2. Tu obtiens un quotient de deux quotients : diviser, c'est multiplier par l'inverse.

CORRECTION

Le numérateur —

$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Le dénominateur —

$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Multiplier par l'inverse —

$F = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{6}$

$F = 2$

Un quotient à étages se traite toujours ainsi : on réduit chaque étage à un seul quotient, puis on multiplie le haut par l'inverse du bas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → Tu as divisé le dénominateur par le numérateur. C'est le **bas** qu'on retourne : $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$.

`8/9` → Tu as multiplié $\frac{4}{3}$ par $\frac{2}{3}$. La grande barre est une division : on multiplie par l'**inverse** de $\frac{2}{3}$.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

Ce qui reste du budget

Une famille consacre $\frac{2}{5}$ de son budget mensuel à la nourriture et $\frac{1}{4}$ au loyer.

Quelle fraction du budget reste-t-il pour les autres dépenses ?

Donner la fraction irréductible du budget qui reste.

Réponse attendue : `7/20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le budget entier, c'est la fraction 1. Commence par la part déjà dépensée.
2. Pour additionner $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{4}$, prends 20 comme dénominateur commun.
3. Ce qui reste, c'est 1 moins ce qui est dépensé.

CORRECTION

La part dépensée —

$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

La part qui reste —

$1 - \frac{13}{20} = \frac{20}{20} - \frac{13}{20}$

$\frac{7}{20}$

Contrôle : $\frac{7}{20} = 0{,}35$, soit $35\,\%$ du budget, et $40\,\% + 25\,\% + 35\,\% = 100\,\%$. Dans un problème, relis la question : on demande ce qui **reste**, pas ce qui est dépensé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13/20` → Tu as donné la part **dépensée**. La question porte sur ce qui reste : $1 - \frac{13}{20}$.

2/3 → Ta part dépensée vaut $\frac{3}{9}$: tu as additionné les numérateurs et les dénominateurs entre eux. Il faut un dénominateur commun.

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

L'échelle d'une carte

Sur une carte, 3 cm représentent $4{,}5$ km dans la réalité. Deux villages sont distants de 8 cm sur cette carte.

On note d leur distance réelle. Les distances sont proportionnelles : $\frac{d}{8} = \frac{4{,}5}{3}$.

Donner la distance réelle d, en km.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C'est une égalité de deux quotients : le **produit en croix** donne une égalité de produits.
2. Tu obtiens $3 \times d = 8 \times 4{,}5$: il reste à isoler d.

CORRECTION

Le produit en croix —

$3 \times d = 8 \times 4{,}5$

$3d = 36$

$d = 12$

Contrôle de bon sens : 1 cm représente $1{,}5$ km, donc 8 cm représentent $8 \times 1{,}5 = 12$ km. La proportionnalité, c'est une égalité de quotients.

PIÈGES ANTICIPÉS

16/3 → Tu as croisé de travers : tu as calculé $\frac{8 \times 3}{4{,}5}$. Le produit en croix donne $3 \times d = 8 \times 4{,}5$.

36 → Tu as calculé $8 \times 4{,}5 = 36$, mais c'est $3d$ qui vaut 36. Il reste à diviser par 3.

EXERCICE 22 · DEFI

L'inconnue des deux côtés

Déterminer le réel x tel que $\frac{x+2}{5} = \frac{x-1}{3}$.

Donner la valeur de x.

Réponse attendue : 11/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais le produit en croix. Chaque numérateur est une somme : garde-le **entre parenthèses**.
2. Développe les deux membres, puis regroupe les termes en x d'un même côté.
3. Vérifie ton résultat en le remplaçant dans les deux quotients.

CORRECTION

Le produit en croix —

$3(x+2) = 5(x-1)$

On développe —

$3x + 6 = 5x - 5$

On regroupe —

$6 + 5 = 5x - 3x \iff 2x = 11$

$x = \frac{11}{2}$

Vérification : $\frac{5{,}5+2}{5} = 1{,}5$ et $\frac{5{,}5-1}{3} = 1{,}5$. Les parenthèses sont tout le défi : le facteur multiplie le numérateur **entier**.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2` → Tu as écrit $3x + 2 = 5x - 1$: le 3 et le 5 n'ont multiplié que le x. Le numérateur entier doit être multiplié, d'où les parenthèses.

`-13/2` → Tu as écrit $5(x+2) = 3(x-1)$. Chaque numérateur se multiplie par le dénominateur **de l'autre côté** : $3(x+2) = 5(x-1)$.

EXERCICE 23 · BASE

Trois puissances de même base

On écrit $A = 3^4 \times 3^{-6} \times 3^5$ sous la forme $A = 3^n$, avec n entier.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un produit de puissances de **même base** : la base ne bouge pas.
   $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. Additionne les trois exposants, sans oublier le signe du deuxième.

CORRECTION

On ajoute les exposants —

$3^4 \times 3^{-6} \times 3^5 = 3^{4+(-6)+5}$

$4 - 6 + 5 = 3$

$n = 3$

Si tu doutes, compte les facteurs : quatre 3 en haut, six en bas (c'est 3^{-6}), cinq en haut. Il en reste $4 + 5 - 6 = 3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-120` → Tu as multiplié les exposants. Dans un **produit** de puissances, on les **additionne** ; on ne les multiplie que pour une puissance de puissance.

`15` → Tu as ajouté 6 au lieu de -6. Le deuxième facteur est 3^{-6} : son exposant est négatif.

EXERCICE 24 · BASE

Exposant nul, exposant négatif

Calculer $5^0 + 5^{-1}$.

Réponse attendue : 6/5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que vaut un nombre non nul élevé à la puissance 0 ? Pense à $\frac{5^2}{5^2}$.
2. Un exposant négatif donne un **inverse**, pas un nombre négatif.
   $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

CORRECTION

Exposant nul —

$5^0 = 1$

Exposant négatif —

$5^{-1} = \frac{1}{5}$

La somme —

$1 + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

Les deux règles se retrouvent en comptant : $\frac{5^2}{5^2} = 5^0$ et vaut 1 ; $\frac{5^1}{5^2} = 5^{-1}$ et vaut $\frac{1}{5}$. Le résultat vaut aussi $1{,}2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/5 → Tu as pris $5^0 = 0$. Un nombre non nul à la puissance 0 vaut 1 : $\frac{5^2}{5^2} = 1$.

-4 → Tu as pris $5^{-1} = -5$. Un exposant négatif donne l'**inverse** : $5^{-1} = \frac{1}{5}$, qui est positif.

EXERCICE 25 · BASE

Une puissance de puissance

On écrit $A = \left(7^{-2}\right)^3$ sous la forme $A = 7^n$, avec n entier.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : -6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une puissance élevée à une puissance : on **multiplie** les exposants.
   $(a^m)^n = a^{m \times n}$
2. Pour t'en convaincre, écris $\left(7^{-2}\right)^3 = 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2}$.

CORRECTION

Trois facteurs égaux —

$\left(7^{-2}\right)^3 = 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} = 7^{-2-2-2}$

$(7^{-2})^3 = 7^{-2\times 3} = 7^{-6}$

$n = -6$

Produit de puissances : on ajoute les exposants. Puissance de puissance : on les multiplie. Écrire les facteurs une fois suffit à ne plus les confondre.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Tu as additionné -2 et 3. Ici ce n'est pas un produit de deux puissances : 7^{-2} est répété **trois fois**, on multiplie les exposants.

-8 → Tu as calculé $(-2)^3$. On ne met pas l'exposant à la puissance : on multiplie -2 par 3.

EXERCICE 26 · BASE

Le signe des puissances

Calculer $(-1)^7 \times (-1)^{10} + (-2)^4$.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une puissance d'un nombre négatif est positive si l'exposant est **pair**, négative s'il est **impair**.
2. Calcule les trois puissances séparément, puis respecte les priorités : le produit avant la somme.

CORRECTION

Les puissances de -1 — 7 est impair, 10 est pair.

$(-1)^7 = -1 \quad ; \quad (-1)^{10} = 1$

La puissance de -2 — 4 est pair : le résultat est positif.

$(-2)^4 = 16$

$-1 \times 1 + 16 = 15$

Le signe se décide en comptant les facteurs négatifs : un nombre pair de signes moins donne un résultat positif. Attention : $(-2)^4 = 16$, mais $-2^4 = -16$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-17 → Tu as pris $(-2)^4 = -16$. Quatre facteurs négatifs : un nombre pair de signes moins, le résultat est positif.

17 → Tu as pris $(-1)^7 = 1$. Sept facteurs -1 : un nombre impair de signes moins, le résultat est négatif.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

Deux bases dans un quotient

Calculer $G = \dfrac{6^4}{2^4 \times 3^3}$ sans calculer 6^4.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Décompose 6 en produit : $6 = 2 \times 3$.

2. Un produit élevé à une puissance se répartit sur chaque facteur.
   $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
3. Simplifie ensuite les puissances de 2 entre elles, et celles de 3 entre elles.

CORRECTION

Décomposer —

$6^4 = (2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$

Simplifier —

$G = \frac{2^4 \times 3^4}{2^4 \times 3^3} = 2^0 \times 3^1$

$G = 3$

Ramener toutes les puissances à des bases **premières** ($2, 3, 5$…) est la méthode qui marche toujours : les simplifications deviennent visibles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → Tu as calculé 3^{3-4} : tu as retiré l'exposant du haut à celui du bas. On fait l'inverse : 3^{4-3}.

`1/216` → Tu as écrit $2^4 \times 3^3 = 6^7$. On ne peut multiplier les bases que si les exposants sont **égaux**.

EXERCICE 28 · PRATIQUE **Un quotient à exposant négatif**

Calculer $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Donner la fraction irréductible.

Réponse attendue : `27/8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un exposant négatif, c'est un **inverse** : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ est l'inverse de $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$.
2. L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$: retourne d'abord, puis élève à la puissance 3.
   $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

CORRECTION

On retourne —

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$

On élève —

$\left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^3}{2^3}$

$\frac{27}{8}$

Un exposant négatif ne rend jamais un nombre positif négatif : $\frac{27}{8} = 3{,}375$ est bien positif. Il retourne le quotient, c'est tout.

PIÈGES ANTICIPÉS

-8/27 → Tu as mis un signe moins devant. Un exposant négatif donne un **inverse** : le résultat reste positif.

8/27 → Tu as calculé $\left(\frac{2}{3}\right)^3$: le signe moins de l'exposant a disparu. Il demande de retourner le quotient.

EXERCICE 29 · PRATIQUE

Deux bases, quatre exposants

Calculer $H = \dfrac{2^5 \times 3^{-2}}{2^3 \times 3^{-4}}$.

Réponse attendue : 36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traite chaque base à part : les 2 ensemble, les 3 ensemble.
2. Pour chaque base, on retire l'exposant du bas à celui du haut.
   $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. Pour la base 3 : retirer -4, c'est ajouter 4.

CORRECTION

La base 2 —

$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

La base 3 —

$\frac{3^{-2}}{3^{-4}} = 3^{-2-(-4)} = 3^2$

$H = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

On aurait aussi pu remarquer que $2^2 \times 3^2 = 6^2$: même exposant, on peut alors multiplier les bases.

PIÈGES ANTICIPÉS

4/729 → Pour la base 3, tu as calculé $-2 - 4 = -6$. L'exposant du bas est -4 : le soustraire revient à **ajouter** 4.

4/9 → Tu as oublié le facteur 3^{-4} du dénominateur. Chaque base se simplifie avec la même base de l'autre étage.

EXERCICE 30 · PRATIQUE

Tout en puissances de 2

On écrit $A = \dfrac{8^3 \times 4^{-2}}{16}$ sous la forme $A = 2^n$, avec n entier.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris 8, 4 et 16 comme des puissances de 2.

2. Ensuite, $8^3 = \left(2^3\right)^3$: une puissance de puissance, on multiplie les exposants.

3. Il reste un produit et un quotient de puissances de 2 : ajoute, puis retire.

CORRECTION

Puissances de 2 —

$8^3 = \left(2^3\right)^3 = 2^9 \quad ; \quad 4^{-2} = \left(2^2\right)^{-2} = 2^{-4} \quad ; \quad 16 = 2^4$

On regroupe —

$\frac{2^9 \times 2^{-4}}{2^4} = 2^{9-4-4}$

$2^1, \text{ donc } n = 1$

Le résultat vaut 2 : $\dfrac{512 \times \frac{1}{16}}{16} = \dfrac{32}{16}$. Mettre tout dans la même base est le réflexe qui transforme un calcul lourd en addition d'exposants.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Tu as oublié de diviser par $16 = 2^4$: il faut encore retirer 4 à l'exposant.

3 → Tu as remplacé 4^{-2} par 2^{-2}. Or $4 = 2^2$, donc $4^{-2} = 2^{-4}$: l'exposant double.

EXERCICE 31 · RAISONNEMENT

Retrouver l'exposant manquant

Déterminer l'entier n tel que $\dfrac{5^n \times 5^3}{5^{-2}} = 5^{11}$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris le membre de gauche sous la forme d'une seule puissance de 5, dont l'exposant dépend de n.

2. Deux puissances de 5 sont égales quand leurs exposants sont égaux : tu obtiens une équation en n.

CORRECTION

Le membre de gauche —

$\frac{5^n \times 5^3}{5^{-2}} = 5^{n+3-(-2)} = 5^{n+5}$

Exposants égaux —

$n + 5 = 11$

$n = 6$

Vérification : $6 + 3 + 2 = 11$. Toute la difficulté est dans le double signe : diviser par 5^{-2}, c'est multiplier par 5^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

10 → Tu as écrit $n + 3 - 2 = 11$. Le dénominateur est 5^{-2} : retirer -2, c'est **ajouter** 2.

3 → Tu as écrit $5^n \times 5^3 = 5^{3n}$. Dans un produit, les exposants s'**ajoutent** : 5^{n+3}.

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT

La plus grande des deux puissances

On pose $A = 2^{30}$ et $B = 3^{20}$. Comparer A et B sans calculatrice.

Répondre par $A < B$, $A = B$ ou $A > B$.

Réponse attendue : A<B — aussi acceptées : B>A · 2^30<3^20 · 3^20>2^30 · 8^10<9^10 · 9^10>8^10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les exposants 30 et 20 ont un diviseur commun : 10.
2. Écris $2^{30} = \left(2^3\right)^{10}$ et fais de même pour 3^{20}.
3. Deux nombres positifs élevés à la même puissance sont rangés comme leurs bases.

CORRECTION

Même exposant —

$A = 2^{30} = \left(2^3\right)^{10} = 8^{10}$

$B = 3^{20} = \left(3^2\right)^{10} = 9^{10}$

On compare les bases — Les bases sont positives et $8 < 9$.

$A < B$

Le plus grand exposant ne gagne pas forcément. Pour comparer deux puissances, on les ramène au **même exposant** (ou à la même base), puis on compare ce qui reste.

PIÈGES ANTICIPÉS

A>B / B<A → Tu t'es fié à l'exposant 30, plus grand que 20. Mais la base 2 est plus petite que 3 : ramène les deux nombres au même exposant 10.

A=B → A et B ne sont pas égaux : écris-les tous deux à la puissance 10 et compare leurs bases.

EXERCICE 33 · DEFI

Puissances de dix en cascade

On écrit $A = \dfrac{10^{-3} \times 10^{5}}{\left(10^{-2}\right)^{3}}$ sous la forme $A = 10^{n}$, avec n entier.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois règles différentes se succèdent : identifie-les une par une.
2. Au dénominateur, c'est une puissance de puissance : on multiplie les exposants.
3. Pour finir, retirer un exposant négatif, c'est ajouter son opposé.

CORRECTION

Le numérateur —

$10^{-3} \times 10^{5} = 10^{2}$

Le dénominateur —

$\left(10^{-2}\right)^{3} = 10^{-6}$

Le quotient —

$\frac{10^{2}}{10^{-6}} = 10^{2-(-6)} = 10^{8}$

$n = 8$

Produit : on ajoute. Quotient : on retire. Puissance de puissance : on multiplie. Les trois règles dans un seul calcul, et le double signe pour finir.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → Tu as calculé $2 - 6$. Le dénominateur vaut 10^{-6} : retirer -6, c'est **ajouter** 6.

1 → Tu as écrit $\left(10^{-2}\right)^{3} = 10^{1}$ en ajoutant les exposants. Une puissance de puissance se calcule en les **multipliant** : 10^{-6}.

EXERCICE 34 · DEFI

Une somme de puissances

Calculer $K = \dfrac{3^{12} + 3^{11}}{3^{10}}$ sans calculatrice.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Attention : le numérateur est une **somme**, pas un produit. La règle $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$ ne s'y applique pas.
2. Tu peux diviser chaque terme de la somme par 3^{10}.
3. Autre voie : mets 3^{11} en facteur au numérateur.

CORRECTION

On sépare —

$K = \frac{3^{12}}{3^{10}} + \frac{3^{11}}{3^{10}}$

$K = 3^{2} + 3^{1} = 9 + 3$

$K = 12$

Avec la factorisation : $3^{12} + 3^{11} = 3^{11}(3 + 1) = 4 \times 3^{11}$, donc $K = 4 \times 3 = 12$. Les règles des puissances portent sur les produits et les quotients, **jamais** sur les sommes.

PIÈGES ANTICIPÉS

3^13 → Tu as écrit $3^{12} + 3^{11} = 3^{23}$. On n'ajoute les exposants que pour un **produit**. Ici, sépare la somme en deux quotients.

9 → Tu n'as gardé que $\dfrac{3^{12}}{3^{10}}$. Le terme $\dfrac{3^{11}}{3^{10}} = 3$ s'ajoute aussi.

EXERCICE 35 · DEFI

Changer de base

Déterminer l'entier n tel que $4^{n} = 2^{10} \times 8^{-2}$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris d'abord le membre de droite sous la forme d'une seule puissance de 2.
2. Écris aussi 4^n comme une puissance de 2 : $4 = 2^2$.
3. Deux puissances de 2 égales ont le même exposant.

CORRECTION

Le membre de droite —

$2^{10} \times 8^{-2} = 2^{10} \times 2^{-6} = 2^4$

Le membre de gauche —

$4^n = \left(2^2\right)^n = 2^{2n}$

Exposants égaux —

$2n = 4$

$n = 2$

Vérification : $4^2 = 16 = 2^4$. Quand les bases diffèrent, on ramène tout à la plus petite base commune, ici 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Tu as trouvé 2^4 et donné l'exposant 4. Mais on cherche l'exposant de 4, pas celui de 2 : $4^n = 2^{2n}$.

16 → 16 est la valeur de 4^n. La question demande l'exposant n.

EXERCICE 36 · BASE

Un grand nombre

On écrit $N = 72\,500\,000$ en écriture scientifique, sous la forme $N = a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Donner la valeur de l'exposant n.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place la virgule juste après le premier chiffre non nul, ici le 7.
2. Compte de combien de rangs la virgule s'est déplacée depuis la fin du nombre.

CORRECTION

Déplacer la virgule — De $72\,500\,000$ à $7{,}25$, la virgule recule de 7 rangs vers la gauche.

$72\,500\,000 \longrightarrow 7{,}25$

Vers la gauche, l'exposant est positif.

$72\,500\,000 = 7{,}25 \times 10^7$

$n = 7$

L'exposant n'est pas le nombre de zéros (5 ici) : c'est le nombre de chiffres après le premier, soit 7. Contrôle : $7{,}25 \times 10\,000\,000 = 72\,500\,000$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → Tu as compté les zéros. L'exposant compte **tous** les rangs franchis par la virgule, y compris ceux des chiffres 2 et 5.

`6` → Recompte : avec 10^6, tu obtiendrais $7\,250\,000$, dix fois trop peu.

`10^7` → Tu as écrit la puissance de 10 tout entière. On ne demande que son **exposant** n : l'entier écrit en haut.

`7.25` → $7{,}25$ est le facteur a de l'écriture scientifique. On demande l'**exposant** n de la puissance de 10.

EXERCICE 37 · BASE

Un petit nombre

On écrit $N = 0{,}0068$ en écriture scientifique, sous la forme $N = a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Donner la valeur du facteur a.

Réponse attendue : `6.8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le facteur a doit avoir **un seul** chiffre non nul avant la virgule.
2. Place la virgule juste après le premier chiffre non nul, le 6.

CORRECTION

Le facteur — La virgule se place après le 6.

$a = 6{,}8$

L'exposant — La virgule a avancé de 3 rangs vers la droite : exposant négatif.

$0{,}0068 = 6{,}8 \times 10^{-3}$

$a = 6{,}8$

La condition $1 \leq a < 10$ fixe le facteur sans hésitation : 68×10^{-4} et $0{,}68 \times 10^{-2}$ sont égaux à $0{,}0068$, mais ce ne sont pas des écritures scientifiques.

PIÈGES ANTICIPÉS

`68` → 68×10^{-4} est bien égal, mais 68 dépasse 10 : ce n'est pas une écriture scientifique. Le facteur a un seul chiffre avant la virgule.

`0.68` → $0{,}68$ est plus petit que 1 : ce n'est pas un facteur scientifique. Déplace la virgule d'un rang de plus.

EXERCICE 38 · BASE

Retour à l'écriture décimale

Donner l'écriture décimale du nombre $4{,}06 \times 10^{-2}$.

Donner l'écriture décimale.

Réponse attendue : `0.0406`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplier par 10^{-2}, c'est diviser par 100.
2. Diviser par 100 déplace la virgule de deux rangs vers la **gauche**.

CORRECTION

Ce que fait la puissance —

$4{,}06 \times 10^{-2} = \frac{4{,}06}{100}$

La virgule recule de deux rangs : il faut ajouter un zéro devant.

$4{,}06 \longrightarrow 0{,}0406$

$0{,}0406$

Un exposant négatif donne toujours un nombre plus petit que 1 (si le facteur est entre 1 et 10). C'est le contrôle à faire en premier.

PIÈGES ANTICIPÉS

`406` → Tu as déplacé la virgule vers la droite, comme pour 10^{2}. L'exposant est **négatif** : le nombre doit devenir plus petit.

`0.406` → $0{,}406$ correspond à 10^{-1}. Avec 10^{-2}, la virgule recule de **deux** rangs.

EXERCICE 39 · PRATIQUE

Un produit à remettre en forme

On pose $N = (2{,}5 \times 10^{4}) \times (6 \times 10^{-7})$. On écrit N en écriture scientifique $a \times 10^{n}$, avec $1 \leq a < 10$.

Donner la valeur de l'exposant n.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie les facteurs entre eux, et les puissances de 10 entre elles.
2. Le produit des facteurs dépasse 10 : il faut le réécrire, et cela modifie l'exposant.

CORRECTION

Les facteurs —

$2{,}5 \times 6 = 15$

Les puissances de dix —

$10^{4} \times 10^{-7} = 10^{-3}$

On remet en forme — 15 n'est pas entre 1 et 10 : $15 = 1{,}5 \times 10^{1}$.

$N = 15 \times 10^{-3} = 1{,}5 \times 10^{1} \times 10^{-3} = 1{,}5 \times 10^{-2}$

$n = -2$

15×10^{-3} est égal à N, mais ce n'est pas l'écriture scientifique. Le réflexe : après le calcul, vérifier que le facteur est bien entre 1 et 10.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3` → Tu as gardé 15×10^{-3}. Le facteur 15 dépasse 10 : on l'écrit $1{,}5 \times 10^{1}$, et l'exposant gagne 1.

`-28` → Tu as multiplié les exposants. Dans un produit de puissances de 10, on les **ajoute** : $4 + (-7)$.

`10^-2 / 10^(-2)` → Tu as écrit la puissance de 10 tout entière. On ne demande que son **exposant** n : l'entier écrit en haut.

1.5 → $1{,}5$ est le facteur a de l'écriture scientifique. On demande l'**exposant** n de la puissance de 10.

EXERCICE 40 · PRATIQUE

Un quotient à remettre en forme

On pose $Q = \dfrac{1{,}2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{5}}$. On écrit Q en écriture scientifique $a \times 10^{n}$, avec $1 \leq a < 10$.

Donner la valeur de l'exposant n.

Réponse attendue : `-9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Divise les facteurs entre eux, puis les puissances de 10 entre elles.
2. $1{,}2 \div 4$ est plus petit que 1 : il faudra réécrire ce facteur.

CORRECTION

Les facteurs —

$\frac{1{,}2}{4} = 0{,}3$

Les puissances de dix —

$\frac{10^{-3}}{10^{5}} = 10^{-3-5} = 10^{-8}$

On remet en forme — $0{,}3 = 3 \times 10^{-1}$.

$Q = 0{,}3 \times 10^{-8} = 3 \times 10^{-9}$

$n = -9$

Quand le facteur passe sous 1, l'exposant **perd** 1 ; quand il dépasse 10, il en **gagne** un. Le nombre, lui, ne change pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

-8 → Tu as gardé $0{,}3 \times 10^{-8}$. Le facteur $0{,}3$ est plus petit que 1 : on l'écrit 3×10^{-1}, et l'exposant perd 1.

2 → Tu as ajouté les exposants. Pour un **quotient**, on retire l'exposant du dénominateur : $-3 - 5$.

EXERCICE 41 · PRATIQUE

Le plus grand des trois

On donne trois nombres : $3{,}1 \times 10^{-4}$, $2{,}9 \times 10^{-3}$ et 8×10^{-5}.

Donner le plus grand des trois, en écriture décimale.

Réponse attendue : `0.0029`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En écriture scientifique, on compare d'abord les **exposants** : le facteur ne départage que des exposants égaux.
2. Parmi -4, -3 et -5, lequel est le plus grand ?

CORRECTION

Les exposants — Le plus grand exposant est -3.

$-5 < -4 < -3$

Le rangement —

$8 \times 10^{-5} < 3{,}1 \times 10^{-4} < 2{,}9 \times 10^{-3}$

$2{,}9 \times 10^{-3} = 0{,}0029$

En décimal : $0{,}000\,08 < 0{,}000\,31 < 0{,}0029$. Le facteur 8, le plus grand des trois, appartient au plus **petit** nombre : en écriture scientifique, l'exposant décide d'abord.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.00008` → Tu as comparé les facteurs $3{,}1$, $2{,}9$ et 8. C'est l'**exposant** qui décide d'abord : 10^{-5} est le plus petit des trois.

`0.00031` → $3{,}1 \times 10^{-4} = 0{,}000\,31$ est plus petit que $0{,}0029$. Compare les exposants : -3 est plus grand que -4.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

Des grains de sable

Un grain de sable pèse environ $6{,}5 \times 10^{-4}$ g. Un sac de sable pèse 13 kg.

On note N le nombre de grains contenus dans le sac, et on l'écrit en écriture scientifique $N = a \times 10^{n}$, avec $1 \leq a < 10$.

Donner la valeur de l'exposant n.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux masses doivent être dans la **même unité** : convertis 13 kg en grammes.
2. Le nombre de grains est le quotient de la masse du sac par la masse d'un grain.
3. Écris $13\,000$ g en écriture scientifique, puis divise facteurs et puissances séparément.

CORRECTION

Même unité —

$13 \text{ kg} = 13\,000 \text{ g} = 1{,}3 \times 10^{4} \text{ g}$

Le quotient —

$N = \frac{1{,}3}{6{,}5} \times 10^{4-(-4)} = 0{,}2 \times 10^{8}$

On remet en forme —

$N = 2 \times 10^{-1} \times 10^{8} = 2 \times 10^{7}$

$n = 7$

Environ vingt millions de grains. Deux pièges successifs dans ce problème : l'unité, puis le facteur $0{,}2$ à remettre entre 1 et 10.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → Tu as divisé 13 par la masse d'un grain en **grammes** : les 13 kg n'ont pas été convertis. 13 kg $= 13\,000$ g.

8 → Tu as gardé $0{,}2 \times 10^{8}$. Le facteur $0{,}2$ est plus petit que $1 : 0{,}2 = 2 \times 10^{-1}$, l'exposant perd 1.

10^7 → Tu as écrit la puissance de 10 tout entière. On ne demande que son **exposant** n : l'entier écrit en haut.

2 → 2 est le facteur a de l'écriture scientifique. On demande l'**exposant** n de la puissance de 10.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Une somme, pas un produit

On pose $S = 3 \times 10^{5} + 4 \times 10^{4}$. On écrit S en écriture scientifique $a \times 10^{n}$, avec $1 \leq a < 10$.

Donner la valeur du facteur a.

Réponse attendue : `3.4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux termes n'ont pas la même puissance de 10 : on ne peut pas additionner directement les facteurs 3 et 4.
2. Écris les deux termes en écriture décimale, ou bien écris 4×10^{4} avec 10^{5}.

CORRECTION

En décimal —

$S = 300\,000 + 40\,000 = 340\,000$

L'écriture scientifique —

$S = 3{,}4 \times 10^{5}$

$a = 3{,}4$

Autre voie : $4 \times 10^{4} = 0{,}4 \times 10^{5}$, donc $S = (3 + 0{,}4) \times 10^{5}$. Pour additionner, il faut la **même** puissance de 10 — comme un dénominateur commun.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → Tu as additionné les facteurs 3 et 4 alors que les puissances de 10 diffèrent. $3 \times 10^{5} + 4 \times 10^{4}$ ne vaut pas 7×10^{5}.

34 → 34×10^{4} est égal à S, mais 34 dépasse 10 : ce n'est pas une écriture scientifique.

EXERCICE 44 · RAISONNEMENT

Le produit qui fait apparaître dix

On pose $N = 25^{3} \times 4^{5}$. On écrit N en écriture scientifique $a \times 10^{n}$, avec $1 \leq a < 10$, sans calculatrice.

Donner la valeur de l'exposant n.

Réponse attendue : `7`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris 25 comme une puissance de 5, et 4 comme une puissance de 2.
2. Un 5 et un 2 font un 10 : regroupe autant de paires 2×5 que possible.

$2^k \times 5^k = 10^k$

3. Il restera quelques facteurs 2 isolés : calcule-les, puis remets le résultat en forme.

CORRECTION

Bases premières —

$25^3 = 5^6 \quad ; \quad 4^5 = 2^{10}$

Des paires 2 × 5 —

$N = 5^6 \times 2^6 \times 2^4 = 10^6 \times 16$

On remet en forme —

$N = 1{,}6 \times 10^1 \times 10^6 = 1{,}6 \times 10^7$

$n = 7$

Chercher les paires 2×5 est la façon la plus rapide de faire apparaître des puissances de dix : $N = 16\,000\,000$ sans poser une seule multiplication.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Tu as gardé 16×10^6. Le facteur 16 dépasse 10 : $16 = 1{,}6 \times 10^1$, l'exposant gagne 1.

8 → Tu as ajouté les exposants 3 et 5 alors que les bases 25 et 4 sont différentes. Ramène-les d'abord à des puissances de 5 et de 2.

EXERCICE 45 · RAISONNEMENT

Combien de chiffres ?

On pose $M = (5 \times 10^8) \times (4 \times 10^3)$. Combien de chiffres faut-il pour écrire M en entier ?

Donner le nombre de chiffres.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par écrire M en écriture scientifique.
2. $10^2 = 100$ s'écrit avec 3 chiffres, 10^3 avec 4 : quel lien entre l'exposant et le nombre de chiffres ?

CORRECTION

Le produit —

$M = 5 \times 4 \times 10^{8+3} = 20 \times 10^{11}$

Écriture scientifique —

$M = 2 \times 10^{12}$

Les chiffres — Un 2 suivi de douze zéros.

$12 + 1 = 13$

Un nombre $a \times 10^n$ avec $n \geq 0$ s'écrit avec $n + 1$ chiffres avant la virgule. L'écriture scientifique donne la **taille** d'un nombre d'un seul coup d'œil.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 est l'exposant. 10^{12} s'écrit avec un 1 suivi de douze zéros : cela fait 13 chiffres.

`11` → Tu as gardé 20×10^{11}. Le facteur 20 a lui-même deux chiffres : remets d'abord le nombre en écriture scientifique.

EXERCICE 46 · RAISONNEMENT

Un nombre négatif

On pose $P = -0{,}000\,705 \times 10^{9}$. On écrit P en écriture scientifique $a \times 10^{n}$, avec $1 \leq |a| < 10$.

Donner la valeur du facteur a.

Réponse attendue : `-7.05`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour un nombre négatif, c'est la **distance à zéro** de a qui doit être entre 1 et 10 ; le signe reste dans a.
2. Écris d'abord $0{,}000\,705$ en écriture scientifique, puis multiplie par 10^{9}.

CORRECTION

Le nombre décimal —

$0{,}000\,705 = 7{,}05 \times 10^{-4}$

On multiplie —

$P = -7{,}05 \times 10^{-4} \times 10^{9} = -7{,}05 \times 10^{5}$

$a = -7{,}05$

La condition porte sur $|a|$: c'est elle qui permet d'écrire en écriture scientifique un nombre négatif. Ici $P = -705\,000$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7.05` → Le nombre P est négatif : son facteur a l'est aussi. C'est $|a|$ qui est entre 1 et 10, pas a.

`-705` → -705×10^{3} est égal à P, mais $|-705|$ dépasse 10 : ce n'est pas une écriture scientifique.

EXERCICE 47 · DEFI

L'exposant caché

Déterminer l'entier n tel que $\dfrac{0{,}003 \times 10^{n}}{6 \times 10^{-2}} = 5 \times 10^{4}$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : `6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par écrire $0{,}003$ comme une puissance de 10 multipliée par un facteur.
2. Sépare ensuite les facteurs $(3,\ 6)$ des puissances de 10, et simplifie le membre de gauche.
3. Tu obtiens une égalité de la forme $0{,}5 \times 10^{\cdots} = 5 \times 10^{4}$: écris les deux membres avec le même facteur.

CORRECTION

Écrire 0,003 —

$0{,}003 = 3 \times 10^{-3}$

Le membre de gauche —

$\frac{3\times10^{-3}\times10^{n}}{6\times10^{-2}} = 0{,}5 \times 10^{n-3+2} = 5 \times 10^{n-2}$

Exposants égaux —

$n - 2 = 4$

$n = 6$

Vérification : $0{,}003 \times 10^{6} = 3\,000$ et $3\,000 \div 0{,}06 = 50\,000$. Le décimal $0{,}003$ cachait un 10^{-3} : c'est lui qu'il fallait voir.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Tu as traité $0{,}003$ comme 3. Or $0{,}003 = 3 \times 10^{-3}$: ce 10^{-3} compte dans l'exposant.

5 → Tu as obtenu $0{,}5 \times 10^{n-1}$ et identifié directement $n - 1 = 4$. Mais $0{,}5 \neq 5$: remets d'abord le facteur entre 1 et 10.

EXERCICE 48 · BASE

Le produit de deux racines

Calculer $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le produit de deux racines est la racine du produit.
   $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
2. Calcule 2×32 : c'est un carré parfait.

CORRECTION

Une seule racine —

$\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64}$

$\sqrt{64} = 8$

Ni $\sqrt{2}$ ni $\sqrt{32}$ ne sont entiers, et pourtant leur produit l'est. Regrouper sous une seule racine fait apparaître le carré parfait.

PIÈGES ANTICIPÉS

64 → 64 est le nombre **sous** la racine. Il reste à prendre sa racine carrée : quel nombre positif a pour carré 64 ?

EXERCICE 49 · BASE

La racine d'un quotient

Calculer $\sqrt{\dfrac{49}{64}}$, et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Donner la fraction irréductible.

Réponse attendue : `7/8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La racine d'un quotient est le quotient des racines.
   $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
2. Le numérateur et le dénominateur sont tous deux des carrés parfaits.

CORRECTION

On sépare —

$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}}$

$\frac{7}{8}$

Contrôle : $\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$. La racine porte sur le numérateur **et** sur le dénominateur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7/64` → Tu as pris la racine du numérateur seulement. La racine s'applique aussi au dénominateur : $\sqrt{64} = 8$.

`49/8` → Tu as pris la racine du dénominateur seulement. Le numérateur aussi : $\sqrt{49} = 7$.

EXERCICE 50 · BASE **La racine d'une somme**

Calculer $\sqrt{36 + 64}$.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il n'existe **aucune** règle pour la racine d'une somme.
2. Calcule d'abord ce qu'il y a sous la racine, puis prends sa racine.

CORRECTION

Sous la racine —

$36 + 64 = 100$

$\sqrt{100} = 10$

Ici $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$, qui n'est **pas** 10. La racine se partage sur un produit, jamais sur une somme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`14` → Tu as écrit $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{36} + \sqrt{64}$. C'est faux : la racine d'une somme n'est pas la somme des racines. Calcule d'abord $36 + 64$.

EXERCICE 51 · BASE **Le carré d'un radical**

Calculer $\left(3\sqrt{5}\right)^2$.

Réponse attendue : 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C'est le carré d'un **produit** : chaque facteur est élevé au carré.
   $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$
2. Par définition de la racine carrée, $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

CORRECTION

Chaque facteur au carré —

$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2$

$9 \times 5 = 45$

Deux oublis classiques : laisser le 3 sans le mettre au carré, ou mettre au carré le 5 au lieu de $\sqrt{5}$. Les deux facteurs sont élevés au carré, et $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → Tu as élevé $\sqrt{5}$ au carré mais pas le 3. Le carré porte sur le **produit** : $3^2 \times 5$.

225 → Tu as élevé au carré le 5 lui-même. Or $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$, pas 25.

EXERCICE 52 · PRATIQUE **Extraire le carré parfait**

On écrit $\sqrt{98}$ sous la forme $a\sqrt{2}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris 98 comme un produit dont l'un des facteurs est 2.
2. L'autre facteur est un carré parfait : sa racine sort de la racine.
   $\sqrt{k^2 \times 2} = k\sqrt{2}$

CORRECTION

Le carré parfait —

$98 = 49 \times 2$

On extrait —

$\sqrt{98} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$a = 7$

Ce qui sort de la racine, c'est la **racine** du carré parfait (7), pas le carré lui-même (49). Contrôle : $\left(7\sqrt{2}\right)^2 = 49 \times 2 = 98$.

PIÈGES ANTICIPÉS

49 → Tu as sorti 49 de la racine. C'est sa racine qui sort : $\sqrt{49} = 7$.

`7*sqrt(2)` → Ton nombre est bien égal à $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$, mais on ne demande pas sa valeur : seulement l'entier a qui se trouve devant $\sqrt{2}$.

EXERCICE 53 · PRATIQUE

Deux radicaux qui se complètent

Calculer $\sqrt{20} \times \sqrt{45}$.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux voies : regrouper sous une seule racine, ou simplifier chaque racine d'abord.
2. En simplifiant : $\sqrt{20}$ et $\sqrt{45}$ s'écrivent tous deux avec $\sqrt{5}$.
3. N'oublie pas que $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

CORRECTION

On simplifie —

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Le produit —

$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 6 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 6 \times 5$

30

Par l'autre voie : $20 \times 45 = 900 = 30^2$. Les deux chemins se rejoignent ; le premier évite les grands nombres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(5)` → Tu as multiplié les coefficients, mais $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ ne fait pas $\sqrt{5}$: cela fait 5.

`900` → 900 est le nombre sous la racine. Il reste à prendre sa racine.

EXERCICE 54 · PRATIQUE

Un quotient de racines

Calculer $\dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$.

Réponse attendue : `5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quotient de deux racines est la racine du quotient.
   $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
2. Calcule $150 \div 6$.

CORRECTION

Une seule racine —

$\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{150}{6}} = \sqrt{25}$

5

La règle du quotient se lit dans les deux sens : ici, regrouper fait apparaître le carré parfait 25.

PIÈGES ANTICIPÉS

`25` → 25 est le nombre sous la racine. Il reste à prendre sa racine carrée.

EXERCICE 55 · PRATIQUE

La racine d'un carré

Calculer $\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}$ et donner sa valeur exacte, sans valeur absolue.

Réponse attendue : `sqrt(11)-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La racine d'un carré est une **valeur absolue**.
   $\sqrt{a^2}=|a|$
2. Quel est le signe de $3-\sqrt{11}$? Compare 3^2 et 11.
3. La valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé.

CORRECTION

Une valeur absolue —

$$\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}=\left|3-\sqrt{11}\right|$$

Le signe — $3^2=9<11$, donc $3<\sqrt{11}$: le nombre $3-\sqrt{11}$ est négatif.

$$3-\sqrt{11}<0$$

On prend l'opposé —

$$\left|3-\sqrt{11}\right|=\sqrt{11}-3$$

Une racine carrée n'est jamais négative : $\sqrt{11}-3\approx 0{,}32$ est bien positif, alors que $3-\sqrt{11}$ ne l'est pas. Avant de « simplifier » racine et carré, regarde le signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3-sqrt(11)` → $3-\sqrt{11}$ est **négatif**, et une racine carrée ne peut pas l'être. $\sqrt{a^2}=|a|$: il faut prendre l'opposé.

`0.32` / `0.317` / `0.3166` / `0.31` / `0.316` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 56 · PRATIQUE

La racine d'un décimal

Calculer $\sqrt{0{,}0009}$.

Réponse attendue : `0.03`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $0{,}0009$ comme un quotient : $\dfrac{9}{10\,000}$.
2. Puis applique la règle du quotient : $\sqrt{9}$ et $\sqrt{10\,000}$ sont simples.

CORRECTION

En quotient —

$0{,}0009 = \frac{9}{10\,000}$

La racine —

$\sqrt{\frac{9}{10\,000}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10\,000}} = \frac{3}{100}$

$0{,}03$

Contrôle : $0{,}03 \times 0{,}03 = 0{,}0009$. Un carré a **deux fois plus** de décimales que le nombre : quatre décimales sous la racine, deux pour la racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.3` → $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$, pas $0{,}0009$. Recompte les décimales : la racine en a deux fois moins que le carré.

`0.003` → $0{,}003 \times 0{,}003 = 0{,}000\,009$: six décimales, trop. La racine de $0{,}0009$ n'a que **deux** décimales.

EXERCICE 57 · RAISONNEMENT

Le côté d'un carré

Un carré a une aire de 72 cm². On note L la longueur de son côté, en cm : sa valeur exacte s'écrit $L = a\sqrt{2}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire d'un carré est L^2 : le côté est donc la racine carrée de l'aire.
2. Simplifie $\sqrt{72}$ en extrayant le plus grand carré parfait qui divise 72.

CORRECTION

Le côté —

$L^2 = 72$ et $L > 0$, donc $L = \sqrt{72}$

On simplifie —

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$

$a = 6$

Le côté vaut environ $8{,}49$ cm. Attention à prendre le **plus grand** carré parfait : $72 = 4 \times 18$ donne $2\sqrt{18}$, qu'il faudrait encore simplifier.

PIÈGES ANTICIPÉS

`36` → Tu as divisé l'aire par 2. Le côté est la **racine** de l'aire : $\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2}$.

`18` → Tu as divisé 72 par 4, comme si 72 était le périmètre. C'est une aire : le côté en est la racine carrée.

EXERCICE 58 · RAISONNEMENT

La diagonale d'un rectangle

Un rectangle mesure 4 cm sur 6 cm. On note D la longueur de sa diagonale, en cm : sa valeur exacte s'écrit $D = a\sqrt{13}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La diagonale partage le rectangle en deux triangles rectangles : pense au théorème de Pythagore.
2. Calcule D^2, puis simplifie $D = \sqrt{D^2}$.
3. Cherche le carré parfait qui divise 52.

CORRECTION

Pythagore —

$D^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$

La racine —

$D = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$

$a = 2$

La diagonale mesure environ $7{,}21$ cm. Le piège est de croire que $\sqrt{16+36} = 4+6$: la racine ne se partage pas sur une somme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Tu as écrit $\sqrt{4^2+6^2} = 4+6$. La racine d'une somme n'est pas la somme des racines : calcule d'abord $16+36$.

`52` → 52 est le carré de la diagonale. La diagonale est $\sqrt{52}$, qu'il faut simplifier.

EXERCICE 59 · RAISONNEMENT

La racine d'un produit de puissances

Calculer $\sqrt{2^6 \times 5^4}$ sans calculatrice.

Réponse attendue : `200`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La racine d'un produit est le produit des racines.
2. $2^6 = \left(2^3\right)^2$: c'est un carré. Que vaut sa racine ?
3. Fais de même pour 5^4.

CORRECTION

Deux carrés —

$2^6 = \left(2^3\right)^2 \quad ; \quad 5^4 = \left(5^2\right)^2$

Les racines —

$\sqrt{2^6 \times 5^4} = 2^3 \times 5^2$

$8 \times 25 = 200$

Une puissance paire est toujours un carré : sa racine s'obtient en **divisant l'exposant par deux**. Contrôle : $200^2 = 40\,000 = 64 \times 625$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40000` → $40\,000$ est le nombre sous la racine. Il reste à prendre sa racine : divise chaque exposant par 2.

`5000` → Tu as pris la racine de 2^6 mais pas celle de 5^4. La racine porte sur **chaque** facteur du produit.

EXERCICE 60 · RAISONNEMENT

Retrouver le radicande

Déterminer le réel positif x tel que $\sqrt{x} = 2\sqrt{7}$.

Donner la valeur de x.

Réponse attendue : 28

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si $\sqrt{x}$ vaut un nombre positif, alors x est le **carré** de ce nombre.
2. Élève $2\sqrt{7}$ au carré : chaque facteur passe au carré.

CORRECTION

On élève au carré — Les deux membres sont positifs.

$x = \left(2\sqrt{7}\right)^2$

$x = 2^2 \times 7 = 4 \times 7 = 28$

C'est le chemin inverse de la simplification : $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$. Faire rentrer un coefficient sous la racine, c'est le mettre au carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`14` → Tu as fait rentrer le 2 sous la racine sans le mettre au carré. $2\sqrt{7} = \sqrt{4}\sqrt{7} = \sqrt{28}$.

`196` → Tu as élevé au carré 2×7. Or $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$: seul le 2 devient 4.

EXERCICE 61 · DEFI

Deux valeurs absolues

Calculer $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 3\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}$.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque terme est la racine d'un carré : c'est une valeur absolue.
2. Situe $\sqrt{5}$ entre deux entiers : entre 2 et 3. Quel est alors le signe de $\sqrt{5} - 3$? de $\sqrt{5} - 1$?
3. Un nombre négatif a pour valeur absolue son opposé ; un nombre positif, lui-même.

CORRECTION

Les signes — $4 < 5 < 9$, donc $2 < \sqrt{5} < 3$.

$\sqrt{5}-3<0 \quad ; \quad \sqrt{5}-1>0$

Les valeurs absolues —

$|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5} \quad ; \quad |\sqrt{5}-1|=\sqrt{5}-1$

La somme —

$3-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1=2$

Les racines se compensent : le résultat est entier. Sans étudier les signes, on aurait trouvé $2\sqrt{5}-4$, un nombre faux qui a pourtant l'air raisonnable.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(5)-4` → Tu as écrit $\sqrt{a^2}=a$ pour les deux termes. Or $\sqrt{5}-3$ est **négatif** : sa racine du carré est $3-\sqrt{5}$.

EXERCICE 62 · DEFI

Le produit qui devient entier

Calculer $\sqrt{3+\sqrt{5}}\times\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux nombres sous les racines sont positifs ($\sqrt{5}<3$) : on peut regrouper sous une seule racine.
2. Sous la racine, tu reconnais une identité remarquable.
   $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

CORRECTION

Une seule racine —

$\sqrt{3+\sqrt{5}}\times\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$

L'identité —

$(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=9-5=4$

$\sqrt{4}=2$

Ni $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ ni $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ ne se simplifient, et pourtant leur produit vaut 2. Regrouper, puis reconnaître $(a+b)(a-b)$: c'est le même ressort que l'expression conjuguée.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 est le nombre sous la racine. Il reste à prendre sa racine carrée.

`sqrt(9-sqrt(5))` → Dans l'identité, c'est $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ qu'on retire à 9, pas $\sqrt{5}$.

EXERCICE 63 · BASE

Le même radicande

On écrit $A=4\sqrt{7}-9\sqrt{7}+2\sqrt{7}$ sous la forme $a\sqrt{7}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les trois radicaux ont le même radicande : on les regroupe comme des termes en x.
   $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$
2. Additionne les coefficients en gardant leurs signes.

CORRECTION

On regroupe —

$A=(4-9+2)\sqrt{7}$

$A=-3\sqrt{7}$

$a=-3$

C'est exactement $4x-9x+2x=-3x$, avec $x=\sqrt{7}$. Le radicande ne bouge pas : seuls les coefficients se calculent.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → Tu as additionné 4, 9 et 2. Le deuxième radical est **soustrait** : $4-9+2$.

3 → Le calcul $4-9+2$ donne un nombre **négatif** : il y a plus à retirer qu'à ajouter.

EXERCICE 64 · BASE

Simplifier avant de regrouper

On écrit $B=\sqrt{50}+\sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{2}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les radicandes 50 et 8 sont différents : il faut d'abord simplifier chaque racine.
2. Cherche le plus grand carré parfait qui divise 50, puis celui qui divise 8.

CORRECTION

Extraire —

$\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}\quad ;\quad \sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$

Regrouper —

$B=(5+2)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

$a=7$

Surtout pas $\sqrt{50}+\sqrt{8}=\sqrt{58}$: la racine ne se partage pas sur une somme. On simplifie d'abord, pour faire apparaître le même radicande.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$, pas $4\sqrt{2}$. C'est la **racine** du carré parfait qui sort.

29 → Tu as sorti 25 et 4 de la racine. Ce sont leurs racines qui sortent : 5 et 2.

EXERCICE 65 · BASE

Un coefficient devant un radical

On écrit $C = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{48}$ sous la forme $a\sqrt{3}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Simplifie d'abord $\sqrt{48}$, puis multiplie par le coefficient 2 qui le précède.
2. Une fois les deux termes écrits avec $\sqrt{3}$, additionne les coefficients.

CORRECTION

Extraire —

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

Le coefficient —

$2\sqrt{48} = 2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

Regrouper —

$C = (3 + 8)\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

$a = 11$

Le coefficient 2 multiplie ce qui sort de la racine : $2 \times 4 = 8$. On ne l'oublie pas en route.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Tu as additionné 3 et 2 comme si $\sqrt{48}$ était $\sqrt{3}$. Simplifie d'abord : $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

7 → Tu as oublié le coefficient 2 devant $\sqrt{48}$: $2\sqrt{48} = 2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

35 → Tu as écrit $\sqrt{48} = 16\sqrt{3}$. C'est $\sqrt{16} = 4$ qui sort de la racine.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

Trois radicaux à simplifier

On écrit $D = \sqrt{45} - 2\sqrt{20} + \sqrt{125}$ sous la forme $a\sqrt{5}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. 45, 20 et 125 sont tous des multiples de 5 : cherche le carré parfait dans chacun.
2. N'oublie pas le coefficient 2 devant $\sqrt{20}$, ni le signe moins.
3. Additionne enfin les trois coefficients avec leurs signes.

CORRECTION

Extraire —

$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

Le coefficient —

$2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$

Regrouper —

$D = (3 - 4 + 5)\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$a = 4$

Méthode en deux temps, toujours la même : simplifier chaque radical, puis regrouper ceux qui ont le même radicande.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → Tu as additionné tous les coefficients. Le deuxième terme est **soustrait** : $3 - 4 + 5$.

6 → Tu as oublié le coefficient 2 devant $\sqrt{20}$: $2\sqrt{20} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Presque tout se compense

On écrit $E = 2\sqrt{63} - 3\sqrt{28} + \sqrt{7}$ sous la forme $a\sqrt{7}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Simplifie $\sqrt{63}$ et $\sqrt{28}$: tous deux font apparaître $\sqrt{7}$.
2. Multiplie ensuite par les coefficients 2 et 3.
3. Le dernier terme, $\sqrt{7}$, a pour coefficient 1.

CORRECTION

Extraire —

$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$

Les coefficients —

$2\sqrt{63} = 6\sqrt{7} \quad ; \quad 3\sqrt{28} = 6\sqrt{7}$

Regrouper —

$E = (6 - 6 + 1)\sqrt{7} = \sqrt{7}$

$a = 1$

Un radical écrit seul, comme $\sqrt{7}$, porte le coefficient 1 : il compte dans le regroupement.

PIÈGES ANTICIPÉS

13 → Tu as additionné les trois coefficients. Le deuxième terme est **soustrait** : $6 - 6 + 1$.

0 → Tu as oublié le dernier terme : $\sqrt{7}$, c'est $1 \times \sqrt{7}$.

EXERCICE 68 · PRATIQUE

Deux radicandes différents

On écrit $F = \sqrt{72} + \sqrt{48} - \sqrt{50} + \sqrt{108}$ sous la forme $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$, avec a et b entiers.

Donner la valeur de l'entier b.

Maths à la carte — Abdelkader Hammami

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Simplifie les quatre radicaux : deux font apparaître $\sqrt{2}$, deux font apparaître $\sqrt{3}$.
2. Regroupe séparément les termes en $\sqrt{2}$ et les termes en $\sqrt{3}$: on ne peut pas les mélanger.

CORRECTION

Extraire —

$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$; $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

Les termes en racine de 2 —

$6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Les termes en racine de 3 —

$4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$F = \sqrt{2} + 10\sqrt{3}$, donc $b = 10$

$\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$ ne se réduit pas davantage, comme $x + 10y$. Deux radicandes différents restent deux termes différents.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → 1 est le coefficient de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire a. La question demande b, celui de $\sqrt{3}$.

`11` → Tu as additionné tous les coefficients ensemble. Les termes en $\sqrt{2}$ et en $\sqrt{3}$ ne se regroupent pas entre eux.

EXERCICE 69 · PRATIQUE

Développer avec un radical

Calculer $G = \sqrt{2} \times \left(3\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)$.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Distribue $\sqrt{2}$ sur chacun des deux termes de la parenthèse.
2. Utilise $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16}$.

CORRECTION

On distribue —

$G = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{8}$

Chaque produit —

$\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 3 \times 2 = 6$; $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

$G = 10$

On pouvait aussi simplifier d'abord la parenthèse : $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, puis $\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 10$. Deux voies, même résultat.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → Tu n'as multiplié que le premier terme. $\sqrt{2}$ multiplie **chaque** terme de la parenthèse.

`6+sqrt(10)` → $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ n'est pas $\sqrt{10}$: la racine d'un produit est $\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16}$.

EXERCICE 70 · PRATIQUE

Le produit de deux sommes

On écrit $H = \left(\sqrt{5} + 2\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)$ sous la forme $a + b\sqrt{5}$, avec a et b entiers.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe : chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde. Cela fait quatre produits.
2. Le produit $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ donne un entier.
3. Regroupe les entiers d'un côté, les termes en $\sqrt{5}$ de l'autre.

CORRECTION

Quatre produits —

$$H = \sqrt{5} \times \sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2$$

$$H = 5 - \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2$$

On regroupe —

$$H = (5 - 2) + (-1 + 2)\sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$$

$$a = 3$$

Les entiers viennent de $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ et de $2 \times (-1)$; les racines, des deux produits croisés. On développe comme avec x, puis on remplace x^2 par 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → Le produit $2 \times (-1)$ vaut -2, pas $+2$. Les entiers sont 5 et -2.

`-2` → Tu as oublié le produit $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$, qui est un entier : il compte dans a.

EXERCICE 71 · RAISONNEMENT

Le périmètre d'un triangle

Un triangle a des côtés de longueurs $\sqrt{20}$ cm, $\sqrt{45}$ cm et $\sqrt{80}$ cm. Son périmètre s'écrit $P = a\sqrt{5}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le périmètre est la somme des trois côtés.
2. Simplifie chaque côté : les trois font apparaître $\sqrt{5}$.

CORRECTION

Simplifier chaque côté —

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

La somme —

$P = (2+3+4)\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$

$a = 9$

Le périmètre vaut environ $20{,}1$ cm. Écrits avec $\sqrt{5}$, les côtés se comparent aussi d'un coup d'œil : ils sont proportionnels à 2, 3 et 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

29 → Tu as sorti de chaque racine le carré parfait lui-même (4, 9, 16). Ce sont leurs **racines** qui sortent : 2, 3 et 4.

EXERCICE 72 · RAISONNEMENT

Le périmètre d'un rectangle

Un rectangle a pour longueur $\sqrt{50}$ cm et pour largeur $\sqrt{18}$ cm. Son périmètre s'écrit $P = a\sqrt{2}$, avec a entier.

Donner la valeur de l'entier a.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le périmètre d'un rectangle est $2 \times (L + \ell)$.
2. Simplifie la longueur et la largeur : toutes deux s'écrivent avec $\sqrt{2}$.

CORRECTION

Simplifier —

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Le périmètre —

$P = 2\left(5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) = 2 \times 8\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

$a = 16$

À comparer avec l'aire : $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{900} = 30$ cm², un entier. Pour l'aire on multiplie, pour le périmètre on additionne : les deux règles sur les radicaux ne se ressemblent pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → $8\sqrt{2}$ est la somme d'une longueur et d'une largeur : c'est le **demi**-périmètre. Il faut multiplier par 2.

30 → 30 est l'aire du rectangle, en cm². On demande le périmètre : la somme des quatre côtés.

EXERCICE 73 · RAISONNEMENT

Le radical manquant

Déterminer l'entier naturel n tel que $\sqrt{n} + \sqrt{20} = 5\sqrt{5}$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Simplifie $\sqrt{20}$, puis isole $\sqrt{n}$.
2. Tu obtiens $\sqrt{n} = k\sqrt{5}$: fais rentrer le coefficient sous la racine en le mettant au carré.

CORRECTION

Isoler —

$$\sqrt{n} = 5\sqrt{5} - \sqrt{20} = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Revenir au radicande —

$$n = \left(3\sqrt{5}\right)^2 = 9 \times 5$$

$$n = 45$$

Vérification : $\sqrt{45} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$. Remarque que $45 + 20 = 65$, et non 125 : on ne peut pas additionner les radicandes.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Tu as trouvé $\sqrt{n} = 3\sqrt{5}$, mais n est le nombre **sous** la racine : $n = \left(3\sqrt{5}\right)^2$.

105 → Tu as écrit $n + 20 = 125$, comme si $\sqrt{n} + \sqrt{20} = \sqrt{n + 20}$. La racine ne se partage pas sur une somme.

EXERCICE 74 · DEFI

Le carré d'une somme de radicaux

On écrit $K = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec a et b entiers.

Donner la valeur de l'entier b.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise l'identité du carré d'une somme.
   $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. Le double produit vaut $2\sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{12}$: simplifie encore $\sqrt{12}$ pour faire apparaître $\sqrt{3}$.

CORRECTION

Les carrés —

$$\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 6 + 2 = 8$$

Le double produit —

$$2\sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{12} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$K = 8 + 4\sqrt{3}, \text{ donc } b = 4$$

Deux étapes s'enchaînent : l'identité remarquable, puis la simplification du radical $\sqrt{12}$. S'arrêter à $8 + 2\sqrt{12}$ laisse un radical non simplifié.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu t'es arrêté à $2\sqrt{12}$. Simplifie : $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, donc $2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$.

`0` → Tu as écrit $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. Il manque le double produit $2xy$: c'est le seul terme en $\sqrt{3}$.

EXERCICE 75 · BASE

Une seule racine en bas

Écrire $A = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$ sans racine au dénominateur, et donner sa valeur exacte.

Réponse attendue : `2*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quand le dénominateur est une seule racine, on multiplie en haut et en bas par **cette racine**.
   $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
2. Au dénominateur, $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$. Simplifie ensuite le quotient.

CORRECTION

Multiplier en haut et en bas —

$A = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$

On simplifie par 3 —

$A = 2\sqrt{3}$

Contrôle : $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$. Ici pas besoin d'expression conjuguée : une racine seule se multiplie par elle-même.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(3)` → Tu as fait disparaître la racine du dénominateur, mais oublié de diviser par 3 : $\dfrac{6\sqrt{3}}{3}$, et non $6\sqrt{3}$.

`2` → Tu as divisé 6 par 3 en perdant la racine. On ne remplace pas $\sqrt{3}$ par 3 : on multiplie en haut et en bas par $\sqrt{3}$.

`3.5 / 3.46 / 3.464 / 3.4641` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 76 · BASE

Un coefficient au dénominateur

Écrire $B = \dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ sans racine au dénominateur, et donner sa valeur exacte.

Réponse attendue : `sqrt(5)/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Seul $\sqrt{5}$ pose problème au dénominateur : multiplie en haut et en bas par $\sqrt{5}$.
2. Au dénominateur : $2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 2 \times 5$. Simplifie ensuite.

CORRECTION

Multiplier par la racine —

$$B = \frac{5\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{10}$$

On simplifie par 5 —

$$B = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Le coefficient 2 reste au dénominateur : il ne gêne pas, c'est un entier. Seule la racine devait en partir.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(5)` → Tu as oublié le 2 du dénominateur : $2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 10$, pas 5.

`sqrt(5)/10` → Le numérateur vaut $5 \times \sqrt{5}$: tu as perdu le facteur 5 en haut. $\frac{5\sqrt{5}}{10}$ se simplifie en $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

`1.1 / 1.12 / 1.118 / 1.11` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 77 · BASE

Deux expressions conjuguées

Calculer $\left(2-\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{7}\right)$.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Tu reconnais l'identité qui sert à rendre un dénominateur rationnel.
   $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
2. Ici $a = 2$ et $b = \sqrt{7}$. Calcule a^2 et b^2.

CORRECTION

L'identité —

$$\left(2-\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{7}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$4 - 7 = -3$$

Le produit de deux expressions conjuguées ne contient plus de racine : c'est tout le principe de la méthode. Le résultat peut être négatif — ici $\sqrt{7} > 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Tu as calculé $7 - 4$. L'identité donne $a^2 - b^2$ avec $a = 2$: c'est $4 - 7$.

`-45` → Tu as élevé 7 au carré. Or $b = \sqrt{7}$, et $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

EXERCICE 78 · PRATIQUE

Rationaliser avec le conjugué

Écrire $C = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$ sans racine au dénominateur, et donner sa valeur exacte.

Réponse attendue : `(sqrt(5)-1)/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'expression conjuguée de $\sqrt{5}+1$ s'obtient en changeant le signe du milieu.
2. Multiplie le numérateur **et** le dénominateur par ce conjugué.
3. Au dénominateur : $\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2$. Simplifie ensuite par 2.

CORRECTION

Le conjugué —

$$C = \frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

Le dénominateur —

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4$$

On simplifie par 2 —

$$C = \frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Contrôle numérique : $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1} \approx \dfrac{2}{3{,}236} \approx 0{,}618$, et $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$. Le contrôle à la calculatrice rassure toujours après un conjugué.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(sqrt(5)+1)/2` → Au numérateur, c'est le **conjugué** $\sqrt{5}-1$ qui apparaît, pas l'expression de départ.

`(sqrt(5)-1)/3` → Le dénominateur vaut $5-1=4$: l'identité est une **différence** de carrés, a^2-b^2.

`0.62 / 0.618 / 0.61` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 79 · PRATIQUE

Un dénominateur qui vaut 3

Écrire $D = \dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$ sans racine au dénominateur, et donner sa valeur exacte.

Réponse attendue : `sqrt(7)+2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie en haut et en bas par l'expression conjuguée de $\sqrt{7}-2$.
2. Au dénominateur, la différence de carrés vaut un entier : regarde s'il se simplifie avec le 3 du numérateur.

CORRECTION

Le conjugué —

$$D = \frac{3\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}$$

Le dénominateur —

$$7 - 4 = 3$$

$$D = \frac{3\left(\sqrt{7}+2\right)}{3} = \sqrt{7}+2$$

Le dénominateur valait exactement le numérateur : il disparaît complètement. Quand c'est le cas, l'inverse s'écrit sans aucune fraction.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(7)-2` → Le conjugué de $\sqrt{7}-2$ est $\sqrt{7}+2$: c'est lui qui passe au numérateur.

`3*(sqrt(7)+2)/11` → Le dénominateur est une **différence** de carrés : $7-4=3$, pas $7+4$.

`4.6 / 4.65 / 4.646 / 4.6458 / 4.64 / 4.645` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 80 · PRATIQUE

Une racine en haut et en bas

Écrire $E=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ sans racine au dénominateur, et donner sa valeur exacte.

Réponse attendue : `2+sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie en haut et en bas par le conjugué de $\sqrt{2}-1$.
2. Au numérateur, développe $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$: $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.

CORRECTION

Le conjugué —

$$E=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

Le dénominateur —

$$2-1=1$$

Le numérateur —

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)=2+\sqrt{2}$$

$$E=2+\sqrt{2}$$

Un dénominateur qui vaut 1 disparaît : l'expression n'est plus une fraction. Reste à ne pas oublier le $\sqrt{2}$ du numérateur de départ.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2-sqrt(2)` → Tu as multiplié par $\sqrt{2}-1$ au lieu de son conjugué $\sqrt{2}+1$.

`sqrt(2)+1` → Tu as oublié le $\sqrt{2}$ du numérateur : le conjugué le **multiplie**, il ne le remplace pas.

`3.4 / 3.41 / 3.414 / 3.4142` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Deux radicaux au dénominateur

Écrire $F=\dfrac{2}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$ sans racine au dénominateur, et donner sa valeur exacte.

Réponse attendue : `sqrt(13)+sqrt(11)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le conjugué de $\sqrt{13}-\sqrt{11}$ s'obtient en changeant le signe du milieu.
2. Au dénominateur, les deux carrés sont des entiers : $\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{11}\right)^2$. Regarde s'il se simplifie avec le 2 du numérateur.

CORRECTION

Le conjugué —

$$F=\frac{2\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)}{\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)}$$

Le dénominateur —

$$13-11=2$$

$$F=\frac{2\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)}{2}=\sqrt{13}+\sqrt{11}$$

L'identité $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ fait disparaître **les deux** racines à la fois. Contrôle de bon sens : le dénominateur de départ est petit (environ $0{,}29$), le résultat est donc grand (environ $6{,}92$).

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(13)-sqrt(11)` → C'est le **conjugué** $\sqrt{13}+\sqrt{11}$ qui passe au numérateur, pas l'expression de départ.

`(sqrt(13)+sqrt(11))/12` → Le dénominateur est une **différence** de carrés : $13-11=2$, pas $13+11$.

`6.9 / 6.92 / 6.922 / 6.9222` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 82 · PRATIQUE

Un dénominateur négatif

Écrire $G=\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ sans racine au dénominateur, et donner sa valeur exacte.

Réponse attendue : `sqrt(7)-sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie en haut et en bas par le conjugué $\sqrt{3}-\sqrt{7}$.
2. Au dénominateur, $3-7$ est **négatif** : garde bien ce signe.
3. Diviser par -4, c'est diviser par 4 et changer tous les signes.

CORRECTION

Le conjugué —

$$G=\frac{4\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}$$

Le dénominateur —

$$3-7=-4$$

On simplifie —

$$G=\frac{4\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{-4}=-\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)$$

$$G=\sqrt{7}-\sqrt{3}$$

Contrôle de signe : G est le quotient de deux nombres positifs, donc positif. $\sqrt{7}-\sqrt{3}>0$; le résultat $\sqrt{3}-\sqrt{7}$, négatif, aurait trahi l'oubli du signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(3)-sqrt(7)` → Le dénominateur vaut $3-7=-4$, pas 4. Tu as perdu le signe moins : ton résultat est négatif alors que G est positif.

`(sqrt(3)-sqrt(7))*4/10` → Le dénominateur est une **différence** de carrés : $3-7$, pas $3+7$.

`0.91 / 0.914 / 0.9137 / 0.913` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT

Une somme d'inverses

Calculer $H=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$, et donner sa valeur exacte simplifiée, sans racine au dénominateur.

Réponse attendue : `sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Rends rationnel le dénominateur de chacun des deux quotients.
2. Les deux dénominateurs deviennent égaux : il suffit d'additionner les numérateurs.

CORRECTION

Le premier quotient —

$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Le second quotient —

$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

La somme —

$H=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}$

$H=\sqrt{3}$

Autre voie : réduire au même dénominateur $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=2$. Le numérateur vaut alors $(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}$. Même résultat : le conjugué **est** le dénominateur commun.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(3)+1` → Le second quotient a pour conjugué $\sqrt{3}-1$: il donne $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, et les 1 se compensent.

`2/(2*sqrt(3))` → Tu as additionné les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Une somme de quotients demande un dénominateur commun.

`1.7 / 1.73 / 1.732 / 1.7321` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

L'inverse d'un nombre

On pose $a = \sqrt{10} - 3$. Donner la valeur exacte de l'inverse de a, écrite sans racine au dénominateur.

Donner l'inverse de a.

Réponse attendue : `sqrt(10)+3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'inverse de a est $\dfrac{1}{a}$: rends rationnel son dénominateur.
2. Calcule le produit $\left(\sqrt{10} - 3\right)\left(\sqrt{10} + 3\right)$: sa valeur est remarquable.

CORRECTION

L'inverse —

$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{10}-3}$

Le conjugué —

$\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{10}+3}{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)} = \frac{\sqrt{10}+3}{10-9}$

$\frac{1}{a} = \sqrt{10} + 3$

$a \approx 0{,}162$ et son inverse $\approx 6{,}162$: même partie décimale ! C'est que leur différence vaut exactement 6. Quand le produit de deux conjugués vaut 1, chacun est l'inverse de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3-sqrt(10)` → Tu as donné l'**opposé** de a. L'inverse est $\dfrac{1}{a}$, et non $-a$.

`(sqrt(10)+3)/19` → Le dénominateur est une **différence** de carrés : $10 - 9 = 1$, pas $10 + 9$.

`6.2 / 6.16 / 6.162 / 6.1623` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 85 · RAISONNEMENT

Simplifier d'abord

Calculer $K = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2} + \sqrt{8}}$.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avant de chercher un conjugué, simplifie les trois radicaux.
2. Le dénominateur $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ se réduit à un seul terme en $\sqrt{2}$.

CORRECTION

Simplifier —

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Le dénominateur —

$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$K = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 1$

Le conjugué aurait marché, mais au prix d'un long calcul. Simplifier les radicaux en premier est souvent la moitié du travail.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(18)/sqrt(10)` → Tu as écrit $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$. La racine ne se partage pas sur une somme : simplifie $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

`9/5` → Tu as sorti les carrés parfaits eux-mêmes (9 et 4). Ce sont leurs racines qui sortent : $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

EXERCICE 86 · DEFI

Un coefficient dans le conjugué

Écrire $L = \dfrac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ sans racine au dénominateur, et donner sa valeur exacte.

Réponse attendue : `3+2*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le conjugué de $3 - 2\sqrt{2}$ est $3 + 2\sqrt{2}$: le coefficient 2 reste en place.
2. Au dénominateur, $b = 2\sqrt{2}$: calcule soigneusement b^2.

$$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 \times (\sqrt{2})^2$$

CORRECTION

Le conjugué —

$$L = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

Le dénominateur —

$$3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 9 - 8 = 1$$

$$L = 3 + 2\sqrt{2}$$

Tout se joue sur $(2\sqrt{2})^2 = 8$: le coefficient se met au carré lui aussi. Le dénominateur vaut alors 1, et l'inverse s'écrit sans fraction.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3-2*sqrt(2)` → C'est le **conjugué** $3 + 2\sqrt{2}$ qui passe au numérateur.

`(3+2*sqrt(2))/5` → Tu as pris $(2\sqrt{2})^2 = 4$. Le coefficient 2 et la racine passent **tous deux** au carré : $4 \times 2 = 8$.

`(3+2*sqrt(2))/7` → Tu as pris $(2\sqrt{2})^2 = 2$, en oubliant le coefficient. Il passe au carré lui aussi : $4 \times 2 = 8$.

`5.8 / 5.83 / 5.828 / 5.8284 / 5.82` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde la racine dans ton écriture.

EXERCICE 87 · DEFI

Deux quotients conjugués

Calculer $M = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux dénominateurs ont pour produit $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4$: c'est un dénominateur commun.
2. Au numérateur, tu obtiens deux carrés : $(\sqrt{5}+1)^2$ et $(\sqrt{5}-1)^2$. Développe-les.
3. Les termes en $\sqrt{5}$ se compensent.

CORRECTION

Le dénominateur commun —

$$M = \frac{(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

Les deux carrés —

$$(\sqrt{5}+1)^2 = 6+2\sqrt{5} \quad ; \quad (\sqrt{5}-1)^2 = 6-2\sqrt{5}$$

Le dénominateur —

$$5-1=4$$

$$M = \frac{12}{4} = 3$$

Deux nombres irrationnels, inverses l'un de l'autre, dont la somme est entière. Le dénominateur commun était le produit des deux conjugués : la méthode du conjugué et celle du dénominateur commun ne font qu'une.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Le dénominateur commun vaut $(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5-1 = 4$, pas $5+1$.

1 → Tu as multiplié les deux quotients : ils sont inverses l'un de l'autre, leur **produit** vaut 1. Mais on demande leur **somme**.

EXERCICE 88 · BASE **Le signe d'un produit**

On pose $P = (-3)^5 \times (-0{,}2) \times (-7)^2$. Sans calculer P, déterminer son signe.

Répondre par « positif » ou « négatif ».

Réponse attendue : `positif` — aussi acceptées : P est positif

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Détermine le signe de chacun des trois facteurs.
2. Une puissance d'un négatif est négative si l'exposant est impair, positive s'il est pair.
3. Compte ensuite les facteurs négatifs : s'ils sont en nombre pair, les signes moins s'annulent deux à deux.

CORRECTION

Les trois signes —

$$(-3)^5 < 0 \quad ; \quad -0{,}2 < 0 \quad ; \quad (-7)^2 > 0$$

On compte — Deux facteurs négatifs : leur produit est positif, et le troisième facteur est positif.

$P > 0$

Le signe d'un produit se lit sans rien calculer : on compte les facteurs négatifs. Pair : positif. Impair : négatif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`négatif / P est négatif` → Compte les facteurs négatifs : $(-3)^5$ (exposant impair) et $-0{,}2$. Le troisième, $(-7)^2$, est positif. Deux signes moins, c'est pair.

EXERCICE 89 · BASE

Multiplier par un négatif

On sait que $x < 4$. Compléter par le bon symbole : $-5x \ \ldots \ -20$.

Répondre par $<$ ou $>$.

Réponse attendue : > — aussi acceptées : -5x>-20 · -20<-5x · supérieur · strictement supérieur

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Passer de x à $-5x$, c'est multiplier les deux membres par -5.
2. Multiplier une inégalité par un réel **négatif** renverse son sens.

CORRECTION

On multiplie par -5 — -5 est négatif : le sens de l'inégalité change.

$x < 4 \implies -5 \times x > -5 \times 4$

$-5x > -20$

Contrôle avec une valeur : $x = 0$ vérifie $x < 4$, et $-5 \times 0 = 0 > -20$. Un exemple suffit à vérifier le sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`< / ≤ / <= / -5x<-20 / -5x≤-20 / -5x<=-20 / inférieur / strictement inférieur` → Tu as gardé le sens de l'inégalité. On multiplie par -5, un nombre **négatif** : le sens se renverse.

`≥ / >= / -5x≥-20 / -5x>=-20 / supérieur ou égal` → Le sens est bon, mais l'inégalité de départ est **stricte** : elle le reste après multiplication.

EXERCICE 90 · BASE

Passer aux inverses

On sait que $2 \leq x \leq 5$. Déterminer la plus grande valeur que peut prendre $\dfrac{1}{x}$.

Donner la plus grande valeur de l'inverse.

Réponse attendue : `1/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les nombres 2, x et 5 sont tous positifs : on peut passer aux inverses.
2. Passer aux inverses **renverse** l'ordre, pour des nombres de même signe.

CORRECTION

On passe aux inverses — Tous positifs : l'ordre se renverse.

$2 \leq x \leq 5 \implies \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

Plus x est petit, plus son inverse est grand : c'est pour $x = 2$ que $\dfrac{1}{x}$ est le plus grand. Diviser 1 par un petit nombre donne un grand nombre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/5` → $\dfrac{1}{5}$ est la **plus petite** valeur. Passer aux inverses renverse l'ordre : le plus grand inverse vient du plus petit x.

`5` → 5 est la plus grande valeur de x. On demande celle de son **inverse** $\dfrac{1}{x}$.

EXERCICE 91 · BASE

Encadrer une somme

On sait que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ et $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. On en déduit un encadrement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ en ajoutant membre à membre.

Donner la borne inférieure de cet encadrement.

Réponse attendue : `3.1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux inégalités de même sens s'ajoutent membre à membre.
2. La borne inférieure s'obtient en ajoutant les deux bornes inférieures.

CORRECTION

Membre à membre —

$1{,}4 + 1{,}7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}5 + 1{,}8$

$3{,}1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}3$

$3{,}1$

L'encadrement est d'amplitude $0{,}2$: les amplitudes s'additionnent elles aussi. La valeur réelle, environ $3{,}146$, est bien dedans.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3.3` → $3{,}3$ est la borne **supérieure**. La borne inférieure s'obtient avec les deux bornes inférieures.

`sqrt(5)` → On ne demande pas $\sqrt{2+3}$, qui n'est d'ailleurs pas égal à $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Ajoute les bornes membre à membre.

EXERCICE 92 · PRATIQUE

Encadrer une expression affine

On sait que $-1 \leq x \leq 3$. On cherche un encadrement de $-2x + 5$.

Donner la borne inférieure de l'encadrement de $-2x + 5$.

Réponse attendue : -1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Procède en deux étapes : multiplie d'abord par -2, puis ajoute 5.
2. Multiplier par -2 renverse le sens des inégalités : les bornes échangent leur place.

CORRECTION

Multiplier par -2 — Le sens se renverse.

$$-1 \leq x \leq 3 \implies 2 \geq -2x \geq -6$$

On réécrit dans l'ordre croissant.

$$-6 \leq -2x \leq 2$$

Ajouter 5 — Ajouter conserve l'ordre.

$$-1 \leq -2x + 5 \leq 7$$

$$-1$$

La borne inférieure vient de $x = 3$, la borne **supérieure** de l'encadrement de départ : c'est le renversement par le facteur négatif. Contrôle : $-2 \times 3 + 5 = -1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7 est la plus **grande** valeur de $-2x + 5$, obtenue pour $x = -1$. En multipliant par -2, les bornes échangent leur place.

3 → Tu as multiplié par 2 au lieu de -2. Le coefficient est négatif : c'est lui qui renverse l'ordre.

EXERCICE 93 · PRATIQUE

Comparer deux radicaux

On pose $A = 3\sqrt{5}$ et $B = 2\sqrt{11}$. Comparer A et B sans calculatrice.

Répondre par $A < B$, $A = B$ ou $A > B$.

Réponse attendue : A>B — aussi acceptées : B<A · 3√5>2√11 · 2√11<3√5 · √45>√44 · √44<√45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux nombres sont positifs : ils sont rangés comme leurs carrés.
2. Calcule A^2 et B^2 : le carré d'un produit est le produit des carrés.

CORRECTION

Les carrés —

$$A^2 = 9 \times 5 = 45 \quad ; \quad B^2 = 4 \times 11 = 44$$

On compare — A et B sont positifs, et le carré conserve l'ordre des nombres positifs.

$$A^2 > B^2 \implies A > B$$

Ni le coefficient ($3 > 2$) ni le radicande ($5 < 11$) ne décident seuls. Faire rentrer le coefficient sous la racine — $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$, $2\sqrt{11} = \sqrt{44}$ — tranche aussitôt.

PIÈGES ANTICIPÉS

A<B / B>A → Tu as comparé les radicandes 5 et 11, en oubliant les coefficients. Compare plutôt les carrés : 45 et 44.

A=B → $A^2 = 45$ et $B^2 = 44$: les deux nombres sont proches, mais pas égaux.

EXERCICE 94 · PRATIQUE

Comparer par la différence

On pose $A = \dfrac{7}{9}$ et $B = \dfrac{10}{13}$. Pour les comparer, on étudie le signe de $A - B$.

Calculer $A - B$, et donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : `1/117`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis au même dénominateur : 9×13 convient.
2. Calcule les deux produits en croix 7×13 et 9×10, puis soustrais.
3. Le signe du résultat dit lequel des deux nombres est le plus grand.

CORRECTION

Le dénominateur commun —

$A - B = \frac{7\times13 - 10\times9}{9\times13}$

$A - B = \frac{91-90}{117} = \frac{1}{117}$

Le signe — $A - B > 0$, donc $A > B$.

$\frac{1}{117}$

$a \geq b \iff a - b \geq 0$: c'est la méthode de base, qui marche quand les autres échouent. Ici les deux nombres ne diffèrent que de $\dfrac{1}{117}$ — à peine $0{,}009$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/117` → Tu as calculé $B - A$. $7 \times 13 = 91$ et $9 \times 10 = 90$: $A - B$ est positif.

`3/4` → Tu as soustrait numérateurs et dénominateurs entre eux. Une différence de quotients demande un dénominateur commun.

`0.01` / `0.009` / `0.0085` / `0.008` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde l'écriture en fraction.

EXERCICE 95 · PRATIQUE

Ranger trois nombres

On range dans l'ordre croissant les trois nombres $2\sqrt{6}$, 5 et $3\sqrt{3}$.

Donner le nombre qui se trouve au milieu.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les trois nombres sont positifs : compare leurs carrés.

2. $\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 4 \times 6$. Calcule de même les deux autres carrés.

CORRECTION

Les carrés —

$$\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 24 \quad ; \quad 5^2 = 25 \quad ; \quad \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27$$

L'ordre — Pour des nombres positifs, l'ordre des carrés est celui des nombres.

$$2\sqrt{6} < 5 < 3\sqrt{3}$$

$$5$$

$24 < 25 < 27$: trois nombres très proches, que les carrés départagent sans approximation. C'est la méthode la plus sûre pour ranger des radicaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(3)` → Tu as rangé les nombres d'après leurs coefficients 2, 3 et 5. Compare plutôt les carrés : 24, 25 et 27.

`2*sqrt(6)` → $2\sqrt{6}$ est le **plus petit** des trois : son carré vaut 24, le plus petit des trois carrés.

EXERCICE 96 · RAISONNEMENT

Encadrer avec un carré

On sait que $3 \leq x \leq 7$. On cherche un encadrement de $2x^2 + 1$.

Donner la borne inférieure de l'encadrement de $2x^2 + 1$.

Réponse attendue : 19

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les nombres 3, x et 7 sont positifs : élever au carré conserve l'ordre.
2. Ensuite, multiplie par 2 (positif), puis ajoute 1.

CORRECTION

Le carré — Tout est positif : l'ordre est conservé.

$$9 \leq x^2 \leq 49$$

Multiplier par 2 —

$$18 \leq 2x^2 \leq 98$$

Ajouter 1 —

$$19 \leq 2x^2 + 1 \leq 99$$

$$19$$

Chaque étape utilise une règle du cours : le carré (nombres positifs), la multiplication par un positif, l'addition. On les enchaîne dans l'ordre des priorités : d'abord le carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`37` → Tu as calculé $(2 \times 3)^2 + 1$. Dans $2x^2$, seul x est au carré : on calcule x^2 d'abord, puis on multiplie par 2.

`13` → Tu as remplacé x^2 par $2x$. Pour $x = 3$, $x^2 = 9$, pas 6.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMA

EXERCICE 97 · RAISONNEMENT

Le carré d'un nombre négatif

On sait que $-4 \leq x \leq -1$. On cherche un encadrement de x^2.

Donner la borne inférieure de l'encadrement de x^2.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Attention : la règle « le carré conserve l'ordre » ne vaut que pour des nombres **positifs**. Ici x est négatif.
2. Encadre d'abord $-x$, qui est positif : multiplier par -1 renverse l'ordre.
3. Puis élève au carré : $(-x)^2 = x^2$.

CORRECTION

On passe à -x — Multiplier par -1 renverse l'ordre.

$$-4 \leq x \leq -1 \implies 1 \leq -x \leq 4$$

Le carré — Tout est positif désormais.

$$1 \leq (-x)^2 \leq 16$$

$$1 \leq x^2 \leq 16$$

Pour des nombres négatifs, élever au carré **renverse** l'ordre : $-4 < -1$ mais $16 > 1$. Le plus petit carré vient du nombre le plus proche de 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

16 → 16 est la plus **grande** valeur de x^2. Pour des nombres négatifs, le carré renverse l'ordre : $-4 \leq -1$ mais $16 \geq 1$.

-16 → Un carré n'est jamais négatif. $(-4)^2 = 16$, et c'est même la plus grande valeur.

EXERCICE 98 · RAISONNEMENT

Deux sommes de radicaux

On pose $A = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $B = \sqrt{2} + \sqrt{6}$. Comparer A et B sans calculatrice.

Répondre par $A < B$, $A = B$ ou $A > B$.

Réponse attendue : A>B — aussi acceptées : B<A · √3+√5>√2+√6 · √2+√6<√3+√5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux nombres sont positifs : compare leurs carrés.
2. Développe A^2 et B^2 avec $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
3. Les parties entières sont égales : tout se joue sur le double produit.

CORRECTION

Le carré de A —

$$A^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$$

Le carré de B —

$$B^2 = 2 + 2\sqrt{12} + 6 = 8 + 2\sqrt{12}$$

On compare — $15 > 12$, donc $\sqrt{15} > \sqrt{12}$ et $A^2 > B^2$. Comme A et B sont positifs :
$A > B$

$3 + 5 = 2 + 6$: les radicandes ont la même somme, et c'est leur produit qui départage. Le passage au carré transforme une comparaison difficile en une comparaison d'entiers.

PIÈGES ANTICIPÉS

`A<B / B>A` → Reprends les carrés : $A^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ et $B^2 = 8 + 2\sqrt{12}$. Comme $15 > 12$, c'est A^2 le plus grand.

`A=B` → $3 + 5 = 2 + 6$, mais la racine ne se partage pas sur une somme : A et B ne sont pas égaux. Compare leurs carrés.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

Le plus petit des quatre

On pose $a = 2{,}25$. Parmi les quatre nombres a, a^2, $\sqrt{a}$ et $\dfrac{1}{a}$, on cherche **le plus petit**.

Donner la valeur exacte du plus petit des quatre, sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : `4/9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Situe a par rapport à 1 : la règle du cours range alors $\sqrt{a}$, a et a^2.
2. Pour $a > 1$, l'inverse $\dfrac{1}{a}$ est plus petit que 1, alors que $\sqrt{a}$ ne l'est pas.
3. Écris $2{,}25$ sous forme de fraction pour obtenir son inverse exact.

CORRECTION

Les trois premiers — $a \geq 1$.
$\sqrt{a} = 1{,}5 \leq a = 2{,}25 \leq a^2 = 5{,}0625$

L'inverse —
$\frac{1}{a} = \frac{1}{2{,}25} = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}$

On compare — $\dfrac{4}{9} < 1 < 1{,}5$.

$\frac{4}{9}$

Pour $a > 1$, l'ordre complet est $\dfrac{1}{a} < 1 < \sqrt{a} < a < a^2$. Le nombre 1 sépare l'inverse de tous les autres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1.5` → $\sqrt{a} = 1{,}5$ est le plus petit des trois premiers, mais l'inverse $\dfrac{1}{a}$ est plus petit que 1 : il passe devant.

`5.0625` → a^2 est au contraire le plus **grand** des quatre : pour $a \geq 1$, élever au carré agrandit.

`0.44 / 0.444 / 0.4444` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde l'écriture en fraction.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

`9/4` → $a = 2{,}25$ n'est pas le plus petit : pour $a > 1$, $\sqrt{a}$ est déjà plus petit que a, et l'inverse $\dfrac{1}{a}$, plus petit que 1, passe devant tous les autres.

EXERCICE 100 · DEFI

Encadrer un quotient

On sait que $2 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 3$. On cherche un encadrement de $\dfrac{x}{y}$.

Donner la valeur exacte de la borne inférieure de l'encadrement de $\dfrac{x}{y}$.

Réponse attendue : `2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On ne divise pas des encadrements membre à membre : écris $\dfrac{x}{y} = x \times \dfrac{1}{y}$.
2. Encadre d'abord $\dfrac{1}{y}$: passer aux inverses renverse l'ordre.
3. Multiplie ensuite les encadrements de x et de $\dfrac{1}{y}$, tous les nombres étant positifs.

CORRECTION

L'inverse de y —

$1 \leq y \leq 3 \implies \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq 1$

Le produit — Tout est positif : on multiplie membre à membre.

$2 \times \frac{1}{3} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 4 \times 1$

$\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq 4$

Le quotient est le plus petit quand le numérateur est le plus petit **et** le dénominateur le plus grand : $\dfrac{2}{3}$.

Diviser les bornes « dans l'ordre », $\dfrac{2}{1}$ et $\dfrac{4}{3}$, donne un faux encadrement.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu as divisé les bornes inférieures entre elles : $\dfrac{2}{1}$. Pour un quotient, le dénominateur le plus **grand** donne le résultat le plus petit : $\dfrac{2}{3}$.

`4/3` → $\dfrac{4}{3}$ n'est pas la plus petite valeur : avec $x = 2$ et $y = 3$, on obtient $\dfrac{2}{3}$, plus petit.

`0.67 / 0.667 / 0.6667 / 0.66 / 0.666` → Ta valeur est approchée : la consigne demande la **valeur exacte**. Garde l'écriture en fraction.

EXERCICE 101 · DEFI

Comparer deux quotients avec une lettre

Soit x un réel positif. On pose $A = \dfrac{x}{x+1}$ et $B = \dfrac{x+1}{x+2}$. Comparer A et B.

Répondre par $A < B$, $A = B$ ou $A > B$.

Réponse attendue : A<B — aussi acceptées : B>A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Étudie le signe de la différence $A - B$, en réduisant au même dénominateur.
2. Au numérateur, développe $x(x+2)$ et $(x+1)^2$, puis soustrais.
3. Le dénominateur $(x+1)(x+2)$ est positif : le signe de $A - B$ est celui du numérateur.

CORRECTION

Le même dénominateur —

$A - B = \frac{x(x+2)-(x+1)^2}{(x+1)(x+2)}$

Le numérateur —

$x^2 + 2x - (x^2 + 2x + 1) = -1$

Le signe — Le numérateur est négatif, le dénominateur positif.

$A - B = \frac{-1}{(x+1)(x+2)} < 0$

$A < B$

Pour $x = 1$: $A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{2}{3}$, cohérent. Avec une lettre, aucun essai ne suffit à conclure : seule la différence le prouve pour **tous** les x positifs.

PIÈGES ANTICIPÉS

A>B / B<A → Recalcule le numérateur de $A - B$: $x(x+2) - (x+1)^2 = -1$, qui est négatif. Donc $A - B < 0$.

A=B → Essaie $x = 1$: $A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{2}{3}$ ne sont pas égaux. Étudie le signe de $A - B$.

EXERCICE 102 · DEFI

Encadrer un inverse

On sait que $4{,}12 < \sqrt{17} < 4{,}13$. On veut un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{17} - 4}$. Pour cela, on rend d'abord son dénominateur rationnel.

Donner la borne inférieure de l'encadrement obtenu.

Réponse attendue : `8.12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie en haut et en bas par le conjugué de $\sqrt{17} - 4$: le dénominateur devient un entier.
2. Tu obtiens une somme $\sqrt{17} + \ldots$: il suffit d'ajouter le même nombre aux trois membres de l'encadrement de $\sqrt{17}$.

CORRECTION

Le conjugué —

$\frac{1}{\sqrt{17}-4} = \frac{\sqrt{17}+4}{17-16} = \sqrt{17} + 4$

Ajouter 4 — Ajouter conserve l'ordre.

$4{,}12 + 4 < \sqrt{17} + 4 < 4{,}13 + 4$

$8{,}12 < \frac{1}{\sqrt{17}-4} < 8{,}13$

En passant directement aux inverses ($0{,}12 < \sqrt{17} - 4 < 0{,}13$), on n'obtient que $7{,}69 < \cdots < 8{,}34$: juste, mais plus de soixante fois moins précis. Rendre le dénominateur rationnel, c'est aussi ce qui permet d'**encadrer** finement.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100/13 / 7.69` → Tu es passé directement aux inverses : $\frac{1}{0{,}13}$. C'est juste, mais l'encadrement est grossier. La consigne demande de rendre d'abord le dénominateur rationnel : $\sqrt{17} + 4$.

`8.13` → $8{,}13$ est la borne **supérieure**. La borne inférieure vient de $4{,}12 < \sqrt{17}$.

AH Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI