– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Quart de tour

1re année secondaire · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum nabdaw le chapitre numéro 7 : le quart de tour. Ta3ref la symétrie w la translation ; lyoum nzidou 7araka jdida : ndawrou la figure b 90 degrés 7awl un point. W bech nchoufou kifech el 7araka hedhi t5alli les longueurs kif ma hiya, w tradd koll droite perpendiculaire l l'image mte3ha. Yalla nabdaw.

عسلامة ! ليوم نبداو le chapitre numéro 7 : le quart de tour . تعرف la symétrie و la translation ؛ ليوم نزيدو حركة جديدة : ندوّرو la figure بـ 90 degrés حول un point . و باش نشوفو كيفاش الحركة هاذي تخلّي les longueurs كيف ما هي ، و تردّ كل droite perpendiculaire لـ l'image متاعها . يالله نبداو.

Bonjour ! Aujourd'hui on commence le chapitre numéro 7 : le quart de tour. Tu connais la symétrie et la translation ; aujourd'hui on ajoute un nouveau mouvement : on fait tourner la figure de 90 degrés autour d'un point. Et on va voir comment ce mouvement garde les longueurs, et rend chaque droite perpendiculaire à son image. Allons-y.

Après la symétrie axiale, la symétrie centrale et la translation, voici une quatrième façon de déplacer une figure sans la déformer : **le quart de tour**, qui la fait tourner de $90°$ autour d'un point.

On apprend d'abord à construire l'image d'un point, dans un sens ou dans l'autre. Puis on regarde ce que le quart de tour garde — les longueurs, les aires, les angles — et ce qu'il change : **une droite et son image sont perpendiculaires**. Enfin on s'en sert pour démontrer : dès qu'un triangle rectangle isocèle apparaît dans une figure, un quart de tour s'y cache, et il prouve des égalités de longueurs et des angles droits presque sans calcul.

Le décor des mosquées et des vieilles maisons de la médina le montre à qui sait regarder : un même motif géométrique s'y répète par symétrie, par translation, ou en tournant autour d'un point.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Construire l'image d'un point par un quart de tour direct ou indirect
  > Construire l'image d'un point par un quart de tour direct ou indirect.
  > *Construire l'image d'un point par un quart de tour direct ou indirect.*
- Reconnaître un quart de tour dans un triangle rectangle isocèle, et l'inverse
  > Reconnaître un quart de tour caché dans un triangle rectangle isocèle, et l'inverse.
  > *Reconnaître un quart de tour caché dans un triangle rectangle isocèle, et l'inverse.*
- Utiliser les images d'un segment, d'une droite, d'un cercle et d'un polygone
  > Utiliser les images d'un segment, d'une droite, d'un cercle et d'un polygone.
  > *Utiliser les images d'un segment, d'une droite, d'un cercle et d'un polygone.*
- Construire une image dans un quadrillage, en comptant les carreaux
  > Construire une image dans un quadrillage, sans rapporteur, en comptant les carreaux.
  > *Construire une image dans un quadrillage, sans rapporteur, en comptant les carreaux.*
- Démontrer une égalité de longueurs ou une perpendicularité avec un quart de tour
  > Démontrer que deux longueurs sont égales, ou que deux droites sont perpendiculaires, avec un quart de tour.
  > *Démontrer que deux longueurs sont égales, ou que deux droites sont perpendiculaires, avec un quart de tour.*

---

1. ACTIVITÉ

Le demi-tour, que tu connais déjà

CE QU'IL DIT

Chouf : n7ottou el papier calque, w ndawrouh un demi-tour 7awl O. A yji 3la C, B yji 3la D, w O ma yet7arrakch. Donc le demi-tour de centre O, houwa bidou la symétrie centrale de centre O. Tawa el so2al : w ken ndawrou ken un quart de tour ?

شوف : نحطّو الـ papier calque ، و ندوّروه un demi-tour حول O . A يجي على C ، B يجي على D ، و O ما يتحرّكش . donc le demi-tour de centre O ، هو بيدو la symétrie centrale de centre O . توّة السؤال : و كان ندوّرو كان un quart de tour ؟

Regarde : on pose le papier calque et on le fait tourner d'un demi-tour autour de O. A vient sur C, B vient sur D, et O ne bouge pas. Donc le demi-tour de centre O, c'est la symétrie centrale de centre O elle-même. Maintenant, la question : et si on ne tournait que d'un quart de tour ?

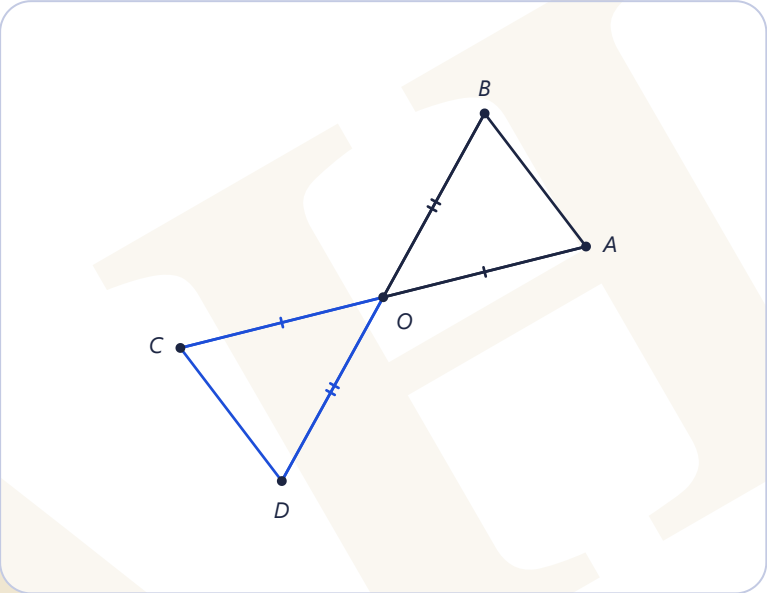
Tu connais trois façons de déplacer une figure sans la déformer : la **symétrie axiale**, la **symétrie centrale** et la **translation**.

Sur la figure, le triangle OCD est l'image du triangle OAB par la symétrie centrale de centre O. Décalque le triangle OAB, plante la pointe du compas en O, et fais tourner le papier calque d'un **demi-tour** autour de O, de sorte que A vienne sur C.

---

1. Que devient le point O pendant le mouvement ?
2. Où arrive le point B ?
3. En quelle figure se transforme le triangle OAB ?

Le demi-tour de centre O **est** la symétrie centrale de centre O. Et si, au lieu d'un demi-tour, on ne faisait qu'**un quart de tour** ?



Le demi-tour de centre O est la symétrie centrale de centre O.

Un triangle OAB, avec O au centre de la figure, A à sa droite et B au-dessus de A. Son image OCD par le demi-tour de centre O est le même triangle tourné d'un demi-tour autour de O : C est en bas à gauche, D en bas. Les points A, O, C sont alignés, et B, O, D aussi. Les côtés [OA] et [OC] portent une même barre, [OB] et [OD] deux barres : O est le milieu de [AC] et de [BD], donc C est le symétrique de A, et D celui de B.

2. ACTIVITÉ

Un quart de tour autour de O

CE QU'IL DIT

Mouch symétrie, mouch translation : el triangle dar un quart de tour 7awl O, 3aks 3a9areb essa3a. O yo93od fi blastou, w B yemchi l B' : OB égale OB', w l'angle BOB' droit. Donc le triangle OBB' rectangle isocèle en O. Hedha houwa le quart de tour direct.

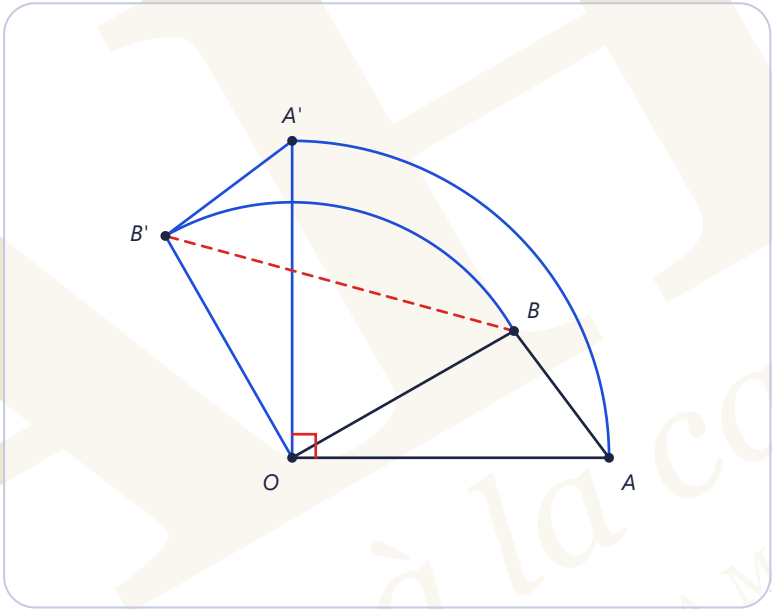
موش symétrie ، موش translation : الـ triangle دار un quart de tour حول O ، عكس عقارب الساعة . O يقعد
في بلاصتو ، و B يمشي لـ B prime : O B égale O B prime ، و O B donc le triangle . l'angle B O B prime droit
. B prime rectangle isocèle en O هذا هو le quart de tour direct .

Ni symétrie, ni translation : le triangle a tourné d'un quart de tour autour de O, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. O reste à sa place, et B va en B prime : O B égale O B prime, et l'angle B O B prime est droit. Le triangle O B B prime est donc rectangle isocèle en O. C'est le quart de tour direct.

Sur la figure, le triangle $OA'B'$ a été obtenu à partir du triangle OAB.

1. Peut-on l'obtenir par une symétrie centrale ? par une symétrie axiale ? par une translation ?
2. Décalque le triangle OAB, et fais tourner le papier calque d'un **quart de tour** autour de O, dans le **sens contraire des aiguilles d'une montre**, de sorte que A vienne sur A'. Que deviennent les points O et B ?
3. Quelle est la nature du triangle OAA' ? Et celle du triangle OBB' ?
4. Refais le mouvement dans le **sens des aiguilles d'une montre**. Où arrive le point A cette fois ?

On convient d'appeler **sens direct** le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre, et **sens indirect** le sens de leur mouvement.



Le quart de tour direct de centre O : A va en A', B va en B'.

Un triangle OAB, avec O en bas à gauche, A à sa droite et B au-dessus de [OA]. En le faisant tourner d'un quart de tour autour de O, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, on obtient le triangle OA'B' : A' est au-dessus de O, et B' en haut à gauche. Deux arcs de cercle de centre O montrent le chemin de A vers A' et de B vers B'. L'angle AOA' porte la marque de l'angle droit, et le segment [BB'] est tracé en pointillés.

3. DÉFINITION

L'image d'un point par un quart de tour

CE QU'IL DIT

Bech nal9aw l'image de M, yelzemna zouz 7ajet m3a b3adhhom : OM' égale OM, w l'angle MOM' égale 90 degrés. W ma nensewch el sens : direct, le sens contraire des aiguilles d'une montre ; indirect, le sens des aiguilles d'une montre. W O, houwa wa7dou elli ma yet7arrakch.

باش نلقاو l'image de M ، يلزمنا زوز حاجات مع بعضهم : O M prime égale O M ، و l'angle M O M prime égale 90 degrés . و ما ننساوش الـ sens : direct ، le sens contraire des aiguilles d'une montre ؛ le indirect ،

sens des aiguilles d'une montre . و O ، هو وحدو اللي ما يتحرّكش .

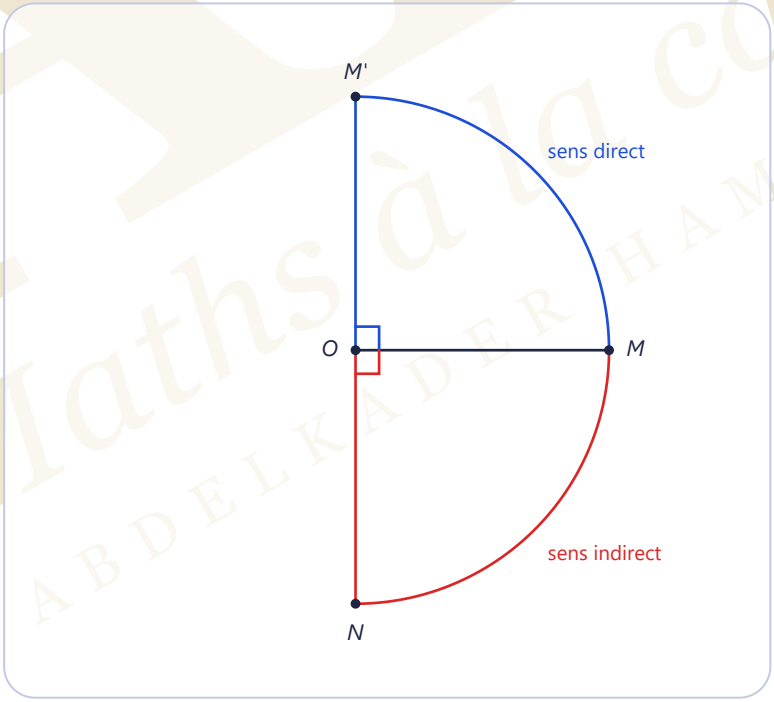
Pour trouver l'image de M, il faut deux choses à la fois : O M prime égale O M, et l'angle M O M prime égale 90 degrés. Et on n'oublie pas le sens : direct, le sens contraire des aiguilles d'une montre ; indirect, le sens des aiguilles d'une montre. Et O est le seul point qui ne bouge pas.

Soit O un point du plan.

- L'image d'un point M distinct de O par le **quart de tour direct** de centre O est le point M' tel que $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = 90°$, en tournant de M vers M' dans le **sens direct**, contraire des aiguilles d'une montre.
- L'image d'un point M distinct de O par le **quart de tour indirect** de centre O est le point N tel que $ON = OM$ et $\widehat{MON} = 90°$, en tournant de M vers N dans le **sens indirect**, celui des aiguilles d'une montre.
- L'image du point O par un quart de tour de centre O est le point O lui-même.

Pour un même point M distinct de O, les deux quarts de tour donnent deux points **différents**, symétriques par rapport à O. C'est pourquoi on précise toujours le sens.

Et deux quarts de tour directs de même centre, faits l'un après l'autre, font un **demi-tour** : l'image de M' par le quart de tour direct de centre O est le symétrique de M par rapport à O.



Le sens décide du point : M' dans le sens direct, N dans le sens indirect.

Un point O et un point M à sa droite. Le quart de tour direct de centre O envoie M en M', au-dessus de O : on tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, OM' = OM et l'angle MOM' est droit. Le quart de tour indirect de centre O envoie M en N, au-dessous de O : on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Deux arcs de centre O, marqués « sens direct » et « sens indirect », montrent les deux chemins. M' et N sont symétriques par rapport à O.

MÊME DISTANCE AU CENTRE

$$OM' = OM$$

UN ANGLE DROIT, DANS LE SENS ANNONCÉ

$$\widehat{MOM'} = 90°$$

EXEMPLE TRAITÉ

Construire l'image M' d'un point M par le quart de tour direct de centre O, avec une équerre et un compas.

Le rayon — Trace le segment $[OM]$.

L'angle droit — Avec l'équerre, trace en O la perpendiculaire à la droite (OM).

Le bon côté — Des deux demi-droites, garde celle qu'on atteint en tournant $[OM)$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : quand on regarde de O vers M, elle part vers la gauche.

La même distance — Au compas, reporte la longueur OM sur cette demi-droite, à partir de O. Le point obtenu est M'.

$$OM' = OM$$

À ne pas faire : $OM' = OM$, donc M' est l'image de M par le quart de tour de centre O. — $OM' = OM$ **et** $\widehat{MOM'} = 90°$, dans le sens annoncé.. Tous les points du cercle de centre O qui passe par M vérifient $OM' = OM$. C'est l'angle droit, et son sens, qui désignent un seul point.

À ne pas faire : Quart de tour direct : dans le sens des aiguilles d'une montre. — Quart de tour direct : dans le sens **contraire** des aiguilles d'une montre.. C'est une convention, et elle se retient à l'envers de l'habitude : les aiguilles d'une montre tournent dans le sens **indirect**.

---

4. PROPRIÉTÉ

Triangle rectangle isocèle et quart de tour

CE QU'IL DIT

Ki nchoufou triangle rectangle isocèle en A, na3rfou elli fih quart de tour de centre A : AC égale AB, w l'angle BAC droit. Hedhi bedhabt la définition, w bel 3aks. W dima nthabtou fil sens : men B l C, kif 3a9areb essa3a walla bel 3aks ? Hedheka elli y9ollna direct walla indirect.

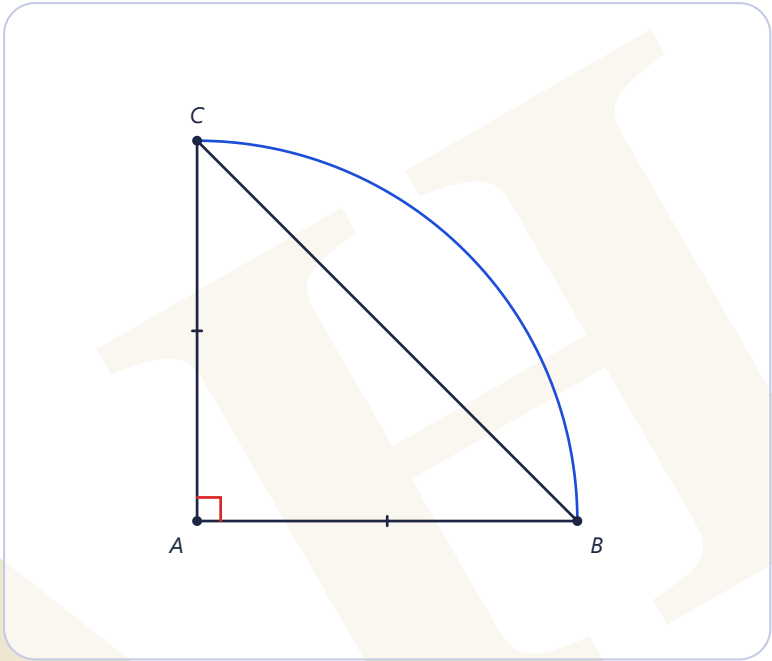
كي نشوفو triangle rectangle isocèle en A نعرفو اللي فيه quart de tour de centre A : A C égale A B ، و l'angle B A C droit . هاذي بالضبط la définition ، و بالعكس . و ديما نثبّتو في الـ sens : من B لـ C ، كيف عقارب الساعة ولّا بالعكس ؟ هاذاكا اللي يقلّنا direct ولّا indirect .

Quand on voit un triangle rectangle isocèle en A, on sait qu'il contient un quart de tour de centre A : A C égale A B, et l'angle B A C est droit. C'est exactement la définition, et inversement. Et on vérifie toujours le sens : de B vers C, comme les aiguilles d'une montre ou à l'inverse ? C'est ce qui nous dit direct ou indirect.

Dire que ABC est un triangle **rectangle isocèle en A**, c'est dire que C est l'image de B par un **quart de tour de centre A**.

Les deux phrases disent la même chose : $AC = AB$ et $\widehat{BAC} = 90°$. Le sens du quart de tour — direct ou indirect — se lit sur la figure, en tournant de B vers C autour de A.

C'est l'outil le plus utile du chapitre : **un triangle rectangle isocèle cache toujours un quart de tour**, et un carré en cache plusieurs.



AC = AB et l'angle BAC est droit : C est l'image de B.

Un triangle ABC rectangle isocèle en A : A en bas à gauche, B à sa droite, C au-dessus de A. Les côtés [AB] et [AC] portent la même marque d'égalité, et l'angle en A porte la marque de l'angle droit. Un arc de cercle de centre A va de B à C, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : C est l'image de B par le quart de tour direct de centre A.

PAR UN QUART DE TOUR DE CENTRE A

$$AC = AB \text{ et } \widehat{BAC} = 90° \iff C \text{ image de } B$$

DÉMONSTRATION

Si ABC est rectangle isocèle en A, alors $AC = AB$ et $\widehat{BAC} = 90°$: c'est exactement la définition de l'image de B par un quart de tour de centre A, dans le sens qui va de B vers C.

Réciproquement, si C est l'image de B par un quart de tour de centre A, la définition donne $AC = AB$ et $\widehat{BAC} = 90°$: le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

EXEMPLE TRAITÉ

M' est l'image de M par le quart de tour direct de centre O, et $OM = 3$ cm. Calculer la distance MM'.

Le triangle caché — $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = 90°$: le triangle OMM' est rectangle isocèle en O.

Pythagore — Dans le triangle OMM' rectangle en O :

$$MM'^2 = OM^2 + OM'^2 = 9 + 9 = 18$$

$$MM' = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$MM' = 3\sqrt{2}\ \text{cm}$$

À ne pas faire : $MM' = 2 \times OM = 6$ cm — $MM' = \sqrt{2} \times OM = 3\sqrt{2}$ cm. $2 \times OM$, c'est le demi-tour : le point, le centre et l'image sont alors alignés. Après un quart de tour, ils forment un triangle rectangle en O, et c'est Pythagore qui donne MM'.

À ne pas faire : Dans tout triangle ABC rectangle isocèle en A, C est l'image de B par le quart de tour **direct** de centre A. — Direct **ou** indirect : le sens se lit sur la figure, en tournant de B vers C.. Si l'on va de B vers C dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est le quart de tour indirect. Et B est alors l'image de C par le quart de tour direct.

---

5. ACTIVITÉ

Deux points, et la distance entre eux

CE QU'IL DIT

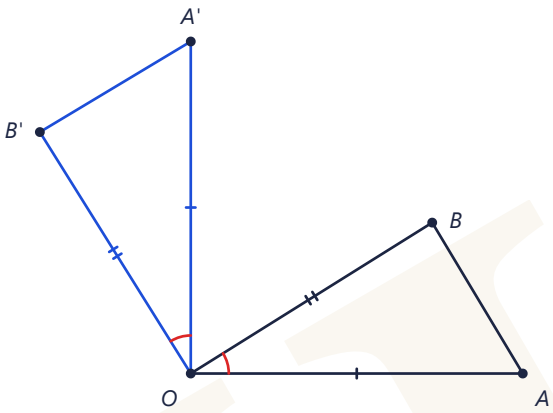
OA égale OA', w OB égale OB'. W el deux angles AOB w A'OB', koll wa7ed fihom 90 degrés moins l'angle BOA', donc kif kif. Deux côtés et l'angle compris : les triangles sont isométriques. Donc A'B' égale AB : le quart de tour ma ybaddelch les distances.

كل واحد ، A prime O B prime و deux angles A O B الـ و . O B égale O B prime و ، O A égale O A prime deux côtés et l'angle compris : les triangles . كيف كيف degrés moins l'angle B O A prime ، donc 90 فيهم les distances ما يبدّلش sont isométriques . donc A prime B prime égale A B : le quart de tour .

O A égale O A prime, et O B égale O B prime. Les deux angles A O B et A prime O B prime valent chacun 90 degrés moins l'angle B O A prime : ils sont égaux. Deux côtés et l'angle compris : les triangles sont isométriques. Donc A prime B prime égale A B : le quart de tour ne change pas les distances.

Soit O un point, et A, B deux points tels que O, A et B ne soient pas alignés. Le quart de tour direct de centre O transforme A en A' et B en B'.

1. Compare OA et OA', puis OB et OB'.
2. Sur la figure, la demi-droite $[OB)$ passe entre $[OA)$ et $[OA')$. Explique pourquoi $\widehat{AOB} = 90° - \widehat{BOA'}$, puis pourquoi $\widehat{A'OB'} = 90° - \widehat{BOA'}$.
3. Déduis-en que les triangles OAB et $OA'B'$ sont isométriques. Que peux-tu dire des longueurs AB et $A'B'$?
4. Soit M un point du segment $[AB]$, et M' son image. Pourquoi a-t-on $A'M' + M'B' = A'B'$? Où se trouve donc le point M' ?



Deux côtés égaux et l'angle compris égal : les triangles OAB et OA'B' sont isométriques.

Un triangle OAB et son image OA'B' par le quart de tour direct de centre O. O est en bas à gauche, A à sa droite, et B au-dessus du segment [OA] ; A' est au-dessus de O, et B' à gauche de A'. Les côtés [OA] et [OA'] portent une barre, [OB] et [OB'] deux barres. Les angles AOB et A'OB' sont marqués d'un même arc rouge. La demi-droite [OB) passe entre [OA) et [OA').

6. PROPRIÉTÉ

L'image d'un segment, l'image d'une droite

CE QU'IL DIT

Le quart de tour ma ybaddelch les longueurs : A'B' égale AB. W les points alignés yo93dou alignés, donc l'image d'une droite hiya droite. Ama redd balek : l'image d'une droite tkoun perpendiculaire liha, mouch parallèle. La translation w le demi-tour ya3tiwek parallèle ; le quart de tour ydawwer la direction b 90 degrés.

alignés ، يقعدو les points alignés و . les longueurs : A prime B prime égale A B ما يبدّلش le quart de tour ليها ، موش perpendiculaire تكون l'image d'une droite : أما ردّ بالك . droite هي donc l'image d'une droite . degrés 90 بـ la direction يدوّر le quart de tour ؛ parallèle يعطيوك le demi-tour و parallèle . la translation

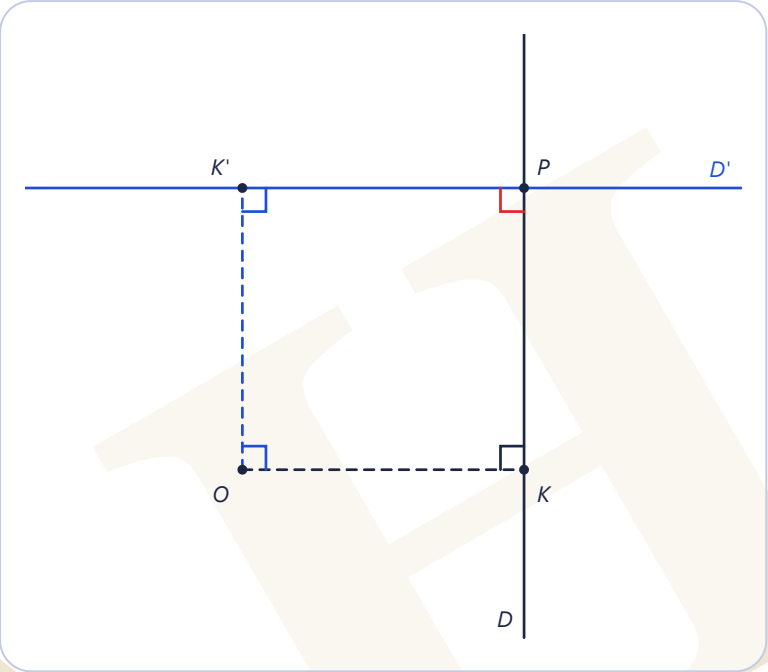
Le quart de tour ne change pas les longueurs : A prime B prime égale A B. Et des points alignés restent alignés, donc l'image d'une droite est une droite. Mais attention : l'image d'une droite lui est perpendiculaire, pas parallèle. La translation et le demi-tour donnent une parallèle ; le quart de tour fait tourner la direction de 90 degrés.

Par un quart de tour :

- l'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$, qui lui est **isométrique** : $A'B' = AB$. Chaque point de $[AB]$ a son image sur $[A'B']$, et tout point de $[A'B']$ est l'image d'un point de $[AB]$: l'image est le segment $[A'B']$ tout entier ;
- trois points alignés ont des images alignées : l'image d'une droite est une droite ;

- l'image d'une droite est une droite qui lui est **perpendiculaire**.

En particulier, l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.



Une droite et son image par un quart de tour sont perpendiculaires.

Un point O, et une droite verticale D à sa droite. K est le pied de la perpendiculaire menée de O à D, et l'angle en K est droit. Le quart de tour direct de centre O envoie K en K', au-dessus de O, et D en une droite horizontale D' qui passe par K', avec un angle droit en K'. L'angle KOK' est droit. Les droites D et D' se coupent en P, à angle droit.

LES LONGUEURS SONT CONSERVÉES

$$A'B' = AB$$

UNE DROITE ET SON IMAGE

$$(A'B') \perp (AB)$$

DÉMONSTRATION

La conservation des longueurs vient de l'activité précédente.

Pour la perpendicularité, prenons le quart de tour de centre O et une droite qui ne passe pas par O (si elle passe par O, c'est immédiat : $\widehat{AOA'} = 90°$). Soit K le projeté orthogonal de O sur cette droite, A un autre point de la droite, et K', A' leurs images.

Le triangle OKA, rectangle en K, a pour image le triangle $OK'A'$, qui lui est isométrique : il est donc rectangle en K', et la droite (OK') est perpendiculaire à l'image $(K'A')$.

Or (OK) est perpendiculaire à la droite de départ, et $\widehat{KOK'} = 90°$. La droite de départ et (OK') sont toutes deux perpendiculaires à (OK) : elles sont parallèles. L'image, perpendiculaire à (OK'), est donc perpendiculaire à la droite de départ.

EXEMPLE TRAITÉ

On donne une droite D et un point O. Construire l'image D' de D par le quart de tour direct de centre O.

Un seul point suffit — Choisis un point A sur D et construis son image A' : $OA' = OA$ et $\widehat{AOA'} = 90°$, dans le sens direct.

$$OA' = OA \quad \text{et} \quad \widehat{AOA'} = 90°$$

La direction — D' passe par A' et elle est perpendiculaire à D : trace la perpendiculaire à D qui passe par A'. C'est la droite D'.

$$D' \perp D \quad \text{et} \quad A' \in D'$$

Vérifier — L'image d'un second point de D doit tomber sur la droite tracée.

À ne pas faire : L'image d'une droite par un quart de tour lui est parallèle. — L'image d'une droite par un quart de tour lui est **perpendiculaire**.. Parallèle, c'est la translation et le demi-tour. Le quart de tour fait tourner toutes les directions de $90°$.

À ne pas faire : $A'B' = \sqrt{2} \times AB$ — $A'B' = AB$. Le segment **image** a la même longueur que le segment de départ. Ce qui vaut $\sqrt{2} \times OA$, c'est la distance AA' entre un point et son image.

---

7. PROPRIÉTÉ

L'image d'un cercle

CE QU'IL DIT

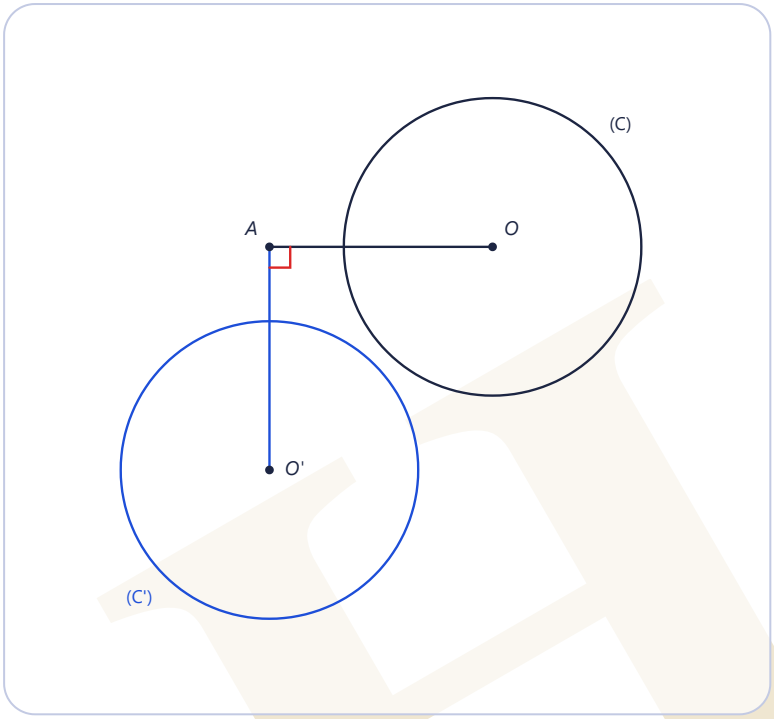
Un cercle, houwa centre w rayon. Le rayon ma yetbaddelch, w el centre yemchi l l'image mte3ou. Donc bech nebniw l'image d'un cercle, nebniw un seul point : O', l'image de O. W ba3d nrasmou le cercle de centre O' w nafs el rayon.

un cercle ، هو centre و rayon . le rayon ما يتبدّلش ، و الـ centre يمشي لـ l'image متاعو . donc باش نبنيو l'image d'un cercle ، نبنيو l'image de O ، un seul point : O prime . و بعد نرسمو le cercle de centre O و نفس الـ rayon . prime

Un cercle, c'est un centre et un rayon. Le rayon ne change pas, et le centre va sur son image. Donc pour construire l'image d'un cercle, on construit un seul point : O prime, l'image de O. Puis on trace le cercle de centre O prime et de même rayon.

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon r. Son image par un quart de tour est le cercle (C') de **même rayon** r, dont le centre O' est l'**image de** O.

Pour construire l'image d'un cercle, il suffit donc de construire un seul point : l'image de son centre.



Pour construire l'image d'un cercle, on construit l'image de son centre.

Un cercle (C) de centre O, et un point A extérieur au cercle, à gauche de O. Le quart de tour indirect de centre A envoie O en O', au-dessous de A : AO' = AO, et l'angle OAO' est droit. Le cercle (C'), image de (C), a pour centre O' et le même rayon que (C).

LE CENTRE SUIT, LE RAYON RESTE

$$O \longmapsto O' \quad \text{et} \quad r' = r$$

DÉMONSTRATION

Soit M un point de (C) et M' son image. Les distances sont conservées : $O'M' = OM = r$, donc M' est sur le cercle (C').

Réciproquement, tout point P' de (C') est l'image d'un point P, et $OP = O'P' = r$: le point P est sur (C). Les images des points de (C) remplissent donc tout le cercle (C').

EXEMPLE TRAITÉ

(C) est le cercle de centre O et de rayon 4 cm, et A est un point tel que $OA = 6$ cm. (C') est l'image de (C) par le quart de tour indirect de centre A. Quel est son rayon, et à quelle distance son centre O' est-il de O ?

Le rayon — Le rayon est conservé.

$r' = 4 \text{ cm}$

Le centre — O' est l'image de O : $AO' = AO = 6$ cm et $\widehat{OAO'} = 90°$. Le triangle OAO' est rectangle isocèle en A.

$OO'^2 = 6^2 + 6^2 = 72$

$OO' = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$

$$r' = 4\ \text{cm} \quad ; \quad OO' = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$$

À ne pas faire : Le cercle (C') a le même centre O que (C). — Le centre de (C') est O', l'image de O.. Le cercle tourne avec son centre. Il ne reste en place que si le centre du quart de tour est justement le centre du cercle.

---

8. PROPRIÉTÉ

Des figures superposables

CE QU'IL DIT

Ki figure ta3mel un quart de tour, ma tokborch w ma tosghorch : najmou n7ottouha fou9 l'image mte3ha bedhabt. Donc nafs l'aire, nafs le périmètre, w les angles homologues égaux. El figure hiya elli daret, mouch les angles mte3ha.

كي figure تعمل un quart de tour ، ما تكبرش و ما تصغرش : نجّمو نحطّوها فوق l'image متاعها بالضبط . donc نفس l'aire ، نفس le périmètre ، و les angles homologues égaux . الـ figure هي اللي دارت ، موش الـ angles متاعها .

Quand une figure fait un quart de tour, elle ne grandit pas et ne rétrécit pas : on peut la poser exactement sur son image. Donc même aire, même périmètre, et des angles homologues égaux. C'est la figure qui a tourné, pas ses angles.

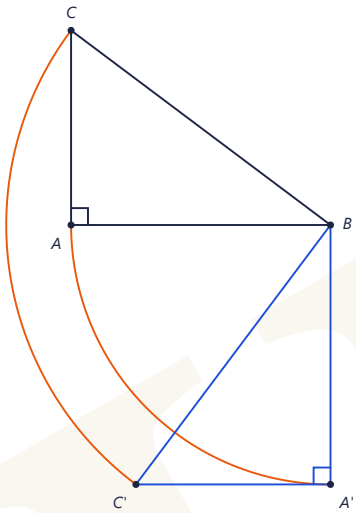
Une figure F et son image F' par un quart de tour sont **superposables** : on peut poser l'une exactement sur l'autre.

En particulier, un polygone et son image ont :

- la **même aire** ;
- le **même périmètre** ;
- des angles homologues **isométriques**.

Dans un quadrillage, construis l'image d'un polygone par un quart de tour, puis compte les carreaux : l'aire n'a pas bougé.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



Même forme, mêmes dimensions : les deux triangles sont superposables.

Un triangle ABC rectangle en A, avec AB = 4 horizontal et AC = 3 vertical, dans le haut de la figure : A à gauche, B à droite, C au-dessus de A. Le quart de tour direct de centre B l'envoie sur le triangle A'BC', au-dessous : B ne bouge pas, A vient en A' sous B, et C vient en C', en bas à gauche. Deux arcs de centre B montrent le chemin de A et de C. Le triangle image est lui aussi rectangle, en A'.

FIGURES SUPERPOSABLES

$$\text{aire de } F' = \text{aire de } F \quad ; \quad \widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On note $A'B'C'$ son image par un quart de tour. Calculer l'aire et le périmètre du triangle $A'B'C'$.

L'aire — Le triangle image a la même aire que ABC.

$$\text{aire} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

L'hypoténuse — Par Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad \text{donc} \quad BC = 5 \text{ cm}$$

Le périmètre — Le triangle image a aussi le même périmètre.

$$4 + 3 + 5 = 12 \text{ cm}$$

$$\text{aire} = 6 \text{ cm}^2 \quad ; \quad \text{périmètre} = 12 \text{ cm}$$

À ne pas faire : Après un quart de tour, $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} + 90°$. — $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$. C'est la figure entière qui tourne de $90°$, pas chacun de ses angles. Les angles homologues restent égaux, comme les longueurs.

9. MÉTHODE

Construire dans un quadrillage

CE QU'IL DIT

Fi quadrillage, ma yelzemnech rapporteur : na7sbou les carreaux. Men O l A : 3 carreaux à droite, w 1 en haut. Le quart de tour direct ydawwer koll 7araka : à droite twalli en haut, w en haut twalli à gauche. Donc men O l A' : 3 en haut, w 1 à gauche.

في quadrillage ، ما يلزمناش rapporteur : نحسبو les carreaux . من O لـ A : 3 carreaux à droite ، و 1 en haut .

le quart de tour direct : كل حركة يدوّر à droite تولّي en haut ، و en haut تولّي à gauche . donc من O لـ A

prime : 3 en haut ، و 1 à gauche .

Dans un quadrillage, pas besoin de rapporteur : on compte les carreaux. De O à A : 3 carreaux à droite, et 1 en haut. Le quart de tour direct fait tourner chaque déplacement : à droite devient en haut, et en haut devient à gauche. Donc de O à A prime : 3 en haut, et 1 à gauche.

Dans un quadrillage, on n'a besoin ni de rapporteur ni de compas : **on compte les carreaux**. Dans un repère orthonormé tracé sur le quadrillage, un carreau est une unité.

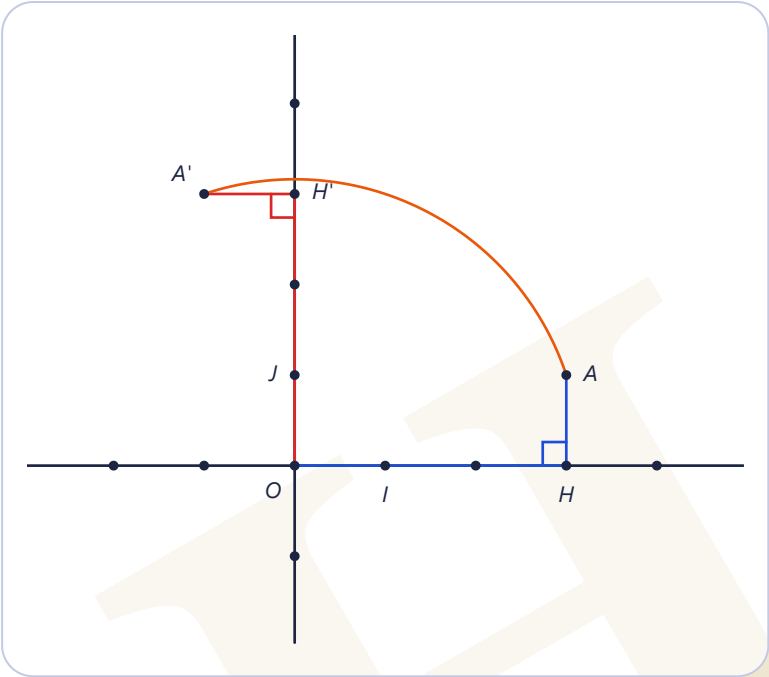
Pour aller de O à A, on fait par exemple 3 carreaux vers la droite, jusqu'au point H, puis 1 vers le haut. Le quart de tour **direct** fait tourner chaque déplacement d'un quart de tour dans le sens direct :

- « vers la droite » devient « vers le haut » ;
- « vers le haut » devient « vers la gauche » ;
- « vers la gauche » devient « vers le bas » ;
- « vers le bas » devient « vers la droite ».

Pour aller de O à A', on fait donc 3 carreaux vers le haut, jusqu'au point H', image de H, puis 1 vers la gauche. Pour le quart de tour **indirect**, on tourne dans l'autre sens : « vers la droite » devient « vers le bas ».

Pourquoi ça marche : le triangle OHA, rectangle en H, a pour image le triangle $OH'A'$, rectangle en H', avec $OH' = OH$ et $H'A' = HA$. Le chemin a tourné tout entier, chaque morceau d'un angle droit.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



A(3 ; 1) a pour image A'(−1 ; 3) par le quart de tour direct de centre O.

Un repère orthonormé d'origine O : I sur l'axe des abscisses et J sur l'axe des ordonnées marquent l'unité, et des petits points graduent les deux axes d'unité en unité. Pour aller de O à A, on fait 3 unités vers la droite jusqu'à H, puis 1 vers le haut. Après un quart de tour direct, ce chemin devient 3 unités vers le haut jusqu'à H', puis 1 vers la gauche : on arrive en A'. Les angles en H et en H' sont droits, et un arc de centre O relie A à A'.

QUART DE TOUR DIRECT

$$\text{droite} \to \text{haut} \to \text{gauche} \to \text{bas} \to \text{droite}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $A(3\,;1)$. Quelles sont les coordonnées de son image A' par le quart de tour direct de centre O ?

Le chemin vers A — De O à A : 3 carreaux vers la droite, puis 1 vers le haut.

On tourne le chemin — « Droite » devient « haut », « haut » devient « gauche » : de O à A', 3 carreaux vers le haut, puis 1 vers la gauche.

On lit l'abscisse, puis l'ordonnée : A' a pour coordonnées -1 et 3.

$A'(-1\,;3)$

$$A'(-1\,;3)$$

À ne pas faire : $A'(1\,;-3)$ — $A'(-1\,;3)$. $(1\,;-3)$ est l'image par le quart de tour **indirect** : on a tourné dans le sens des aiguilles d'une montre.

À ne pas faire : $A'(1\,;3)$ — $A'(-1\,;3)$. Échanger les deux coordonnées ne suffit pas : le déplacement « vers le haut » est devenu « vers la gauche », et l'abscisse de A' est négative.

10. MÉTHODE

Reconnaître la transformation

CE QU'IL DIT

Ki na3rfou elli figure hiya l'image d'une autre par une de ces quatre transformations, nchoufou awel 7aja tartib les sommets : ken t9aleb, hedhi symétrie axiale. Ken le, n9arnou segment m3a l'image mte3ou : même direction w même sens, translation ; sens contraires, demi-tour ; w ken perpendiculaires, hedha quart de tour.

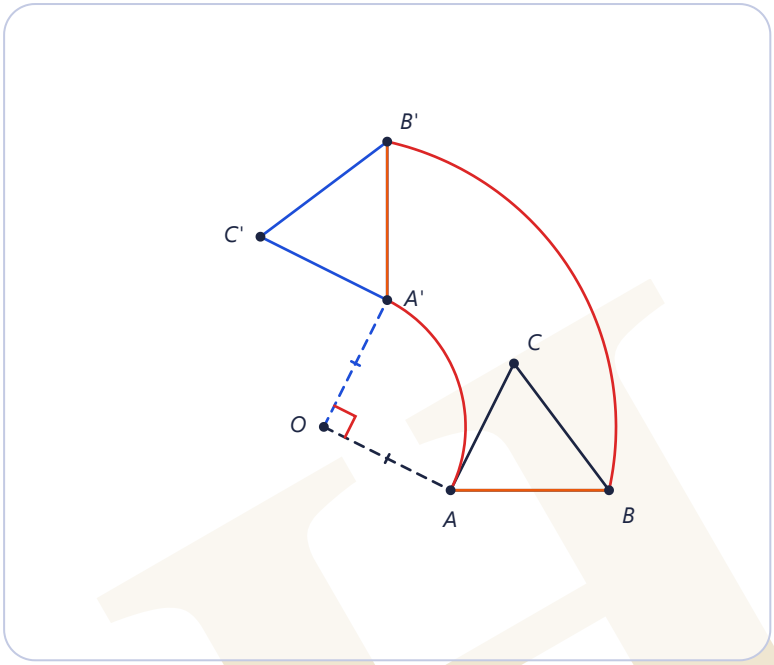
كي نعرفو اللي figure هي l'image d'une autre par une de ces quatre transformations ، نشوفو أوّل حاجة ترتيب les sommets : كان تقلب ، هاذي symétrie axiale . كان لا ، نقارنو segment مع l'image متاعو : même direction و translation ، même sens ؛ sens contraires ، demi-tour و كان perpendiculaires ، هذا quart de tour .

Quand on sait qu'une figure est l'image d'une autre par l'une de ces quatre transformations, on regarde d'abord l'ordre des sommets : s'il est inversé, c'est une symétrie axiale. Sinon, on compare un segment et son image : même direction et même sens, translation ; sens contraires, demi-tour ; et s'ils sont perpendiculaires, c'est un quart de tour.

Une figure et son image par une **symétrie axiale**, une **translation**, un **demi-tour** ou un **quart de tour** sont superposables. Quand on sait que la figure F' est l'image de F par l'une de ces quatre transformations, on la reconnaît grâce aux **sommets homologues**, en se posant les questions dans cet ordre :

1. L'ordre des sommets est-il **inversé** ? Si l'on parcourt A, B, C dans le sens direct et A', B', C' dans le sens indirect, c'est une **symétrie axiale**. Les trois autres gardent le sens.
2. Sinon, compare un segment $[MN]$ et son image $[M'N']$, parcourus de M vers N et de M' vers N'. Même direction et même sens ? C'est une **translation**.
3. Même direction, mais des sens contraires ? C'est un **demi-tour**, de centre le milieu de chaque segment $[MM']$.
4. Des directions **perpendiculaires** ? C'est un **quart de tour**. Son centre O est le point tel que chaque triangle OMM' soit rectangle isocèle en O, et son sens se lit en tournant de M vers M' autour de O.

Si le centre n'est pas donné, on le trouve : comme $OA' = OA$ et $OB' = OB$, le centre est sur la médiatrice de $[AA']$ et sur celle de $[BB']$. C'est le point où ces deux médiatrices se coupent. On vérifie ensuite que l'angle $\widehat{AOA'}$ est droit, et on y lit le sens.



A'B'C' est l'image de ABC par le quart de tour direct de centre O.

Un triangle ABC, dans le bas de la figure, à droite du point O : A et B sur une même horizontale, B à droite de A, et C au-dessus de [AB], plus près de A que de B. Un second triangle A'B'C', en bleu, est au-dessus de O : [A'B'] est vertical, B' au-dessus de A', et C' à gauche de [A'B']. Les deux triangles se parcourent A, B, C et A', B', C' dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Les côtés [AB] et [A'B'] sont repassés en orange : l'un est horizontal, l'autre vertical. Les segments [OA] et [OA'], en pointillés, portent la même marque d'égalité, et l'angle AOA' porte la marque de l'angle droit. Deux arcs de centre O vont de A à A' et de B à B', dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

EXEMPLE TRAITÉ

Sur la figure, le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par une symétrie axiale, une translation, un demi-tour ou un quart de tour. Reconnais la transformation, puis préciser son centre et son sens.

L'ordre des sommets — A, B, C se suivent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, et A', B', C' aussi : l'ordre n'est pas inversé, ce n'est pas une symétrie axiale.

Les directions — Le segment $[AB]$ est horizontal, et son image $[A'B']$ est verticale : leurs directions sont perpendiculaires. C'est un quart de tour.

Le centre — Le centre est à égale distance de A et de A', et de B et de B' : on trace les médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$, elles se coupent en O. Au compas et à l'équerre, on vérifie que le triangle OAA' est rectangle isocèle en O, et de même pour B et pour C.

$OA' = OA \quad$ et $\quad \widehat{AOA'} = 90°$

Le sens — Autour de O, on va de A vers A' dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : c'est le sens direct.

quart de tour direct de centre O

quart de tour direct de centre O

À ne pas faire : La figure a l'air « retournée », tête en bas : c'est une symétrie axiale. — On regarde l'ordre des sommets. S'il n'est pas inversé, ce n'est pas une symétrie axiale : c'est peut-être un demi-tour.. Un demi-tour met aussi la figure tête en bas, mais A', B', C' se suivent encore dans le même sens que A, B, C. Seule la symétrie axiale retourne la figure comme une page, et inverse l'ordre des sommets.

---

11. MÉTHODE

Construire avec l'image d'une droite

CE QU'IL DIT

Nebniw triangle rectangle isocèle en O, w A 3la D, w B 3la D'. Essir : B houwa l'image de A par le quart de tour de centre O, donc B 3la l'image de D, w zeda 3la D' : B houwa le point d'intersection de l'image de D et de D'. W redd balek : lezem D w D' ma ykounouch perpendiculaires ; w ken le, l'image de D twalli parallèle l D'.

نبنيو triangle rectangle isocèle en O ، و A على D ، و B على D prime . السرّ : B هو l'image de A par le quart de tour de centre O ، donc B l'image de D على ، و زادة على B : D prime هو le point d'intersection de l'image de D et de D prime . و ردّ بالك : لازم D و D prime ما يكونوش perpendiculaires ؛ و كان لا ، l'image de D تولّي D parallèle لـ D prime .

On construit un triangle rectangle isocèle en O, avec A sur D et B sur D prime. Le secret : B est l'image de A par le quart de tour de centre O, donc B est sur l'image de D, et aussi sur D prime : B est le point d'intersection de l'image de D et de D prime. Et attention : il faut que D et D prime ne soient pas perpendiculaires, sinon l'image de D serait parallèle à D prime.

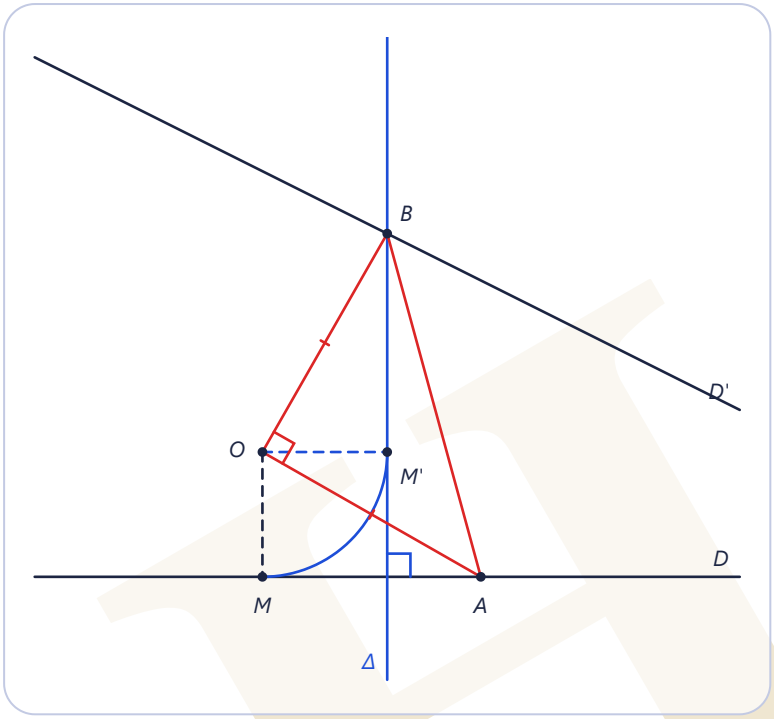
On donne deux droites D et D', **non perpendiculaires**, et un point O. On veut construire un triangle OAB rectangle isocèle en O, avec A sur D et B sur D'.

On suppose le problème résolu. Si OAB est rectangle isocèle en O, alors B est l'image de A par un quart de tour de centre O — prenons le quart de tour direct. Comme A est sur D, son image B est sur l'image de D, qu'on note Δ. Et B est aussi sur D'.

Donc B est le point commun de Δ et de D'. Ces deux droites se coupent bien : Δ est perpendiculaire à D, et D' ne l'est pas.

Avec le quart de tour indirect, on trouve en général une seconde solution.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



B est à la fois sur D' et sur Δ, l'image de D.

Deux droites : D, horizontale, dans le bas de la figure, et D', oblique, qui descend de gauche à droite dans le haut. Le point O est entre les deux, à gauche. M est le point de D situé juste au-dessous de O ; son image M' par le quart de tour direct de centre O est à droite de O, et un arc de centre O relie M à M'. La droite Δ, image de D, est la perpendiculaire à D passant par M' : elle est verticale, tracée en bleu, et coupe D' en B. A est le point de D, à droite, tel que le triangle OAB, tracé en rouge, soit rectangle isocèle en O : OA = OB, et l'angle AOB est droit.

B EST À L'INTERSECTION

$$A \in D \Rightarrow B \in \Delta \quad \text{et} \quad B \in D'$$

EXEMPLE TRAITÉ

Donner les étapes de construction du triangle OAB rectangle isocèle en O, avec A sur D et B sur D'.

L'image de D — Choisis un point M de D et construis son image M' par le quart de tour direct de centre O. L'image de D est la perpendiculaire à D qui passe par M'.

$$\Delta \perp D \quad \text{et} \quad M' \in \Delta$$

Le point B — B est le point d'intersection de l'image de D et de D'.

$$B \in \Delta \quad \text{et} \quad B \in D'$$

Le point A — A est le point de D dont B est l'image : c'est l'image de B par le quart de tour **indirect** de centre O, qui fait le chemin inverse.

Vérifier — A doit tomber sur D, et le triangle OAB doit être rectangle isocèle en O.

$$OA = OB \quad \text{et} \quad \widehat{AOB} = 90^\circ$$

À ne pas faire : B est le point commun de D et de D'. — B est le point commun de Δ, l'**image** de D, et de D'.. C'est A qui est sur D. Son image B est sur l'image de D : la droite tourne avec le point.

À ne pas faire : La construction marche aussi quand D et D' sont perpendiculaires. — Il faut que D et D' ne soient **pas** perpendiculaires.. L'image de D est perpendiculaire à D. Si D' l'était aussi, l'image de D et D' seraient parallèles : aucun point commun, ou une infinité si elles sont confondues.

---

12. MÉTHODE

Démontrer avec un quart de tour

CE QU'IL DIT

Bech nthabtou elli deux segments de même longueur walla deux droites perpendiculaires, nfattchou 3la quart de tour yab3ath wa7ed 3al le5er. Fi les deux carrés, A houwa le centre. D l'image de B, w G l'image de E, b nafs le quart de tour direct. Donc [BE] yemchi l [DG] : BE égale DG, w les droites perpendiculaires. Behi ?

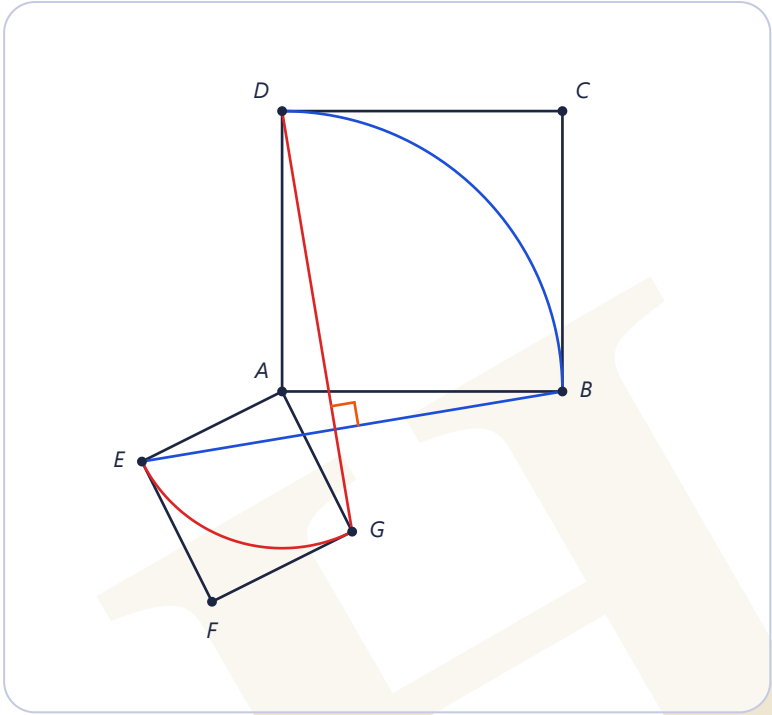
باش نثبّتو اللي deux segments de même longueur ولّا deux droites perpendiculaires ، نفتّشو على quart de tour يبعث واحد على لاخر . في A ، les deux carrés هو B l'image de D . le centre ، و E l'image de G ، بنفس le D G : B E égale D G يمشي لـ quart de tour direct . donc B E ، و les droites perpendiculaires . باهي ؟

Pour prouver que deux segments ont la même longueur, ou que deux droites sont perpendiculaires, on cherche un quart de tour qui envoie l'un sur l'autre. Dans les deux carrés, A est le centre. D est l'image de B, et G l'image de E, par le même quart de tour direct. Donc B E va sur D G : B E égale D G, et les droites sont perpendiculaires. D'accord ?

Pour montrer que deux segments ont la même longueur, ou que deux droites sont perpendiculaires, on cherche un quart de tour qui envoie l'un des segments sur l'autre.

1. **Repère le centre** : un point d'où partent deux triangles rectangles isocèles — le sommet commun de deux carrés, par exemple.
2. **Fixe le sens**, direct ou indirect, en tournant autour du centre.
3. **Vérifie les deux extrémités** : le même quart de tour, même centre et même sens, doit envoyer chacune d'elles sur une extrémité de l'autre segment.
4. **Conclus** avec la conservation : même longueur, et droites perpendiculaires.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



[DG] est l'image de [BE] par le quart de tour direct de centre A.

Deux carrés ABCD et AEFG qui ont le sommet A en commun, tous deux nommés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. ABCD est au-dessus et à droite de A ; AEFG, plus petit et incliné, est au-dessous de A. Les segments [BE] et [DG] sont tracés, en bleu et en rouge ; ils se coupent à angle droit. Un arc de centre A va de B à D, un autre de E à G : le même quart de tour direct de centre A envoie B sur D et E sur G.

MÊME CENTRE, MÊME SENS

$$[BE] \longmapsto [DG] \;\Rightarrow\; BE = DG \text{ et } (BE) \perp (DG)$$

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de sommet commun A, tous deux nommés dans le sens direct. Montrer que $BE = DG$ et que les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires.

Le centre et le sens — $ABCD$ est un carré : $AD = AB$ et $\widehat{BAD} = 90°$, en tournant de B vers D dans le sens direct. Donc D est l'image de B par le quart de tour direct de centre A.

La seconde extrémité — De même, $AEFG$ est un carré nommé dans le sens direct : G est l'image de E par **le même** quart de tour.

Le segment image — Le segment $[BE]$ a donc pour image le segment $[DG]$.

$[BE] \longmapsto [DG]$

Conclure — Un segment et son image ont la même longueur, et les droites qui les portent sont perpendiculaires.

$BE = DG$

$$BE = DG \text{ et } (BE) \text{ perpendiculaire à } (DG)$$

À ne pas faire : D est l'image de B, et G celle de E — sans vérifier le sens de chacun. — Un **seul** quart de tour, même centre et même sens, pour les deux extrémités.. Si l'un des carrés était nommé dans l'autre sens,

G serait l'image de E par le quart de tour indirect : $[DG]$ ne serait plus l'image de $[BE]$, et la conclusion tomberait.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Quart de tour **direct** de centre O : $M \mapsto M'$ avec $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = 90°$, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. **Indirect** : dans le sens des aiguilles.
   > Le quart de tour direct de centre O : OM' égale OM, w l'angle MOM' égale 90 degrés, 3aks 3a9areb essa3a. El indirect, kif 3a9areb essa3a.
   > *Quart de tour direct de centre O : O M prime égale O M, et l'angle M O M prime égale 90 degrés, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. L'indirect, dans le sens des aiguilles.*
2. Le centre O est sa propre image.
   > Le centre O, houwa wa7dou elli yo93od fi blastou.
   > *Le centre O est le seul point qui reste à sa place.*
3. ABC rectangle isocèle en $A \iff C$ est l'image de B par un quart de tour de centre A.
   > ABC rectangle isocèle en A, ma3neha C l'image de B par un quart de tour de centre A, w bel 3aks.
   > *A B C est rectangle isocèle en A si et seulement si C est l'image de B par un quart de tour de centre A.*
4. L'image d'un segment est un segment de **même longueur**.
   > L'image d'un segment, segment 3andou nafs el longueur.
   > *L'image d'un segment est un segment de même longueur.*
5. L'image d'une droite est une droite qui lui est **perpendiculaire**.
   > L'image d'une droite, droite perpendiculaire liha.
   > *L'image d'une droite est une droite qui lui est perpendiculaire.*
6. L'image du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre O', image de O, et de **même rayon r.**
   > L'image d'un cercle, cercle b nafs el rayon, w el centre mte3ou houwa l'image du centre.
   > *L'image d'un cercle est un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre.*
7. Un polygone et son image sont **superposables** : même aire, même périmètre, mêmes angles.
   > Un polygone w l'image mte3ou superposables : nafs l'aire, nafs le périmètre, w nafs les angles.
   > *Un polygone et son image sont superposables : même aire, même périmètre, mêmes angles.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna le quart de tour. Netfakkrou : même distance au centre, w un angle droit, fil sens direct walla indirect. Les longueurs ma tetbaddelch, w koll droite twalli perpendiculaire l l'image mte3ha. W ki nchoufou triangle rectangle isocèle, nfattchou 3al quart de tour. Yalla nemchiw lel exercices.

هكّا كمّلنا le quart de tour . نتفكّرو : même distance au centre ، و un angle droit ، في الـ sens direct ولّا indirect . les longueurs ما تتبدّلش ، و كل droite تولّي perpendiculaire لـ l'image متاعها . و كي نشوفو triangle rectangle isocèle ، نفتّشو على الـ quart de tour . يالله نمشيو للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé le quart de tour. On retient : même distance au centre, et un angle droit, dans le sens direct ou indirect. Les longueurs ne changent pas, et chaque droite devient perpendiculaire à son image. Et quand on voit un triangle rectangle isocèle, on cherche le quart de tour. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · LE DEMI-TOUR, QUE TU CONNAIS DÉJÀ

c'est quoi un demi-tour | demi-tour et symétrie centrale c'est pareil ? | demi-tour chnowa | le demi-tour de centre O | demi-tour w symétrie centrale kifkif ? | demi tour ya3ni chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Le demi-tour de centre O houwa la symétrie centrale de centre O : nafs el 7aja. Ki ndawrou la figure nos dawra 7ol O, koll point yemchi l le symétrique mte3ou par rapport à O.

le demi-tour de centre O هو la symétrie centrale de centre O : نفس الحاجة . كي ندوّرو la figure نصّ دورة حول O ، كل point يمشي لـ le symétrique متاعو par rapport à O .

Le demi-tour de centre O est la symétrie centrale de centre O : c'est la même transformation. En faisant tourner la figure d'un demi-tour autour de O, chaque point arrive sur son symétrique par rapport à O.

QUESTION 2 · L'IMAGE D'UN POINT PAR UN QUART DE TOUR

c'est quoi un quart de tour | chnowa quart de tour | quart de tour définition | l'image d'un point par un quart de tour | quart de tour ya3ni chnowa | quart de tour de centre O c'est quoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$OM' = OM \quad ; \quad \widehat{MOM'} = 90^\circ$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mte3 M par le quart de tour direct de centre O hiya M' elli $OM' = OM$ w $\widehat{MOM'} = 90^\circ$, w ndawrou men M l M' dans le sens direct. W l'image mte3 O hiya O nafsha.

O M prime égale O M w l'angle اللي M prime هي M par le quart de tour direct de centre O متاع l'image
M O M prime 90 degrés ، w ندوّرو من M لـ l'image . w M prime dans le sens direct متاع O هي O نفسها .

L'image de M par le quart de tour direct de centre O est le point M prime tel que O M prime égale O M et l'angle M O M prime mesure 90 degrés, en tournant de M vers M prime dans le sens direct. L'image de O est O lui-même.

QUESTION 3 · UN QUART DE TOUR AUTOUR DE O

c'est quoi le sens direct | sens direct ou sens indirect | le sens direct c'est le sens des aiguilles d'une montre ? | sens indirect chnowa | direct w indirect kifech nfarre9 | sens des aiguilles d'une montre direct ou indirect

CE QU'IL RÉPOND

Le sens direct houwa 3aks dawaran el aiguilles mte3 la montre, w le sens indirect houwa sens el aiguilles. Hedhi convention, w tet7fedh bel 3aks mte3 el 3ada.

le sens direct هو عكس دوران الـ aiguilles متاع w le sens indirect ، la montre هو sens الـ aiguilles . هاذي
convention ، w تتحفظ بالعكس متاع العادة .

Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre ; le sens indirect est celui des aiguilles. C'est une convention, qui se retient à l'envers de l'habitude.

QUESTION 4 · L'IMAGE D'UN POINT PAR UN QUART DE TOUR

pourquoi il faut préciser le sens du quart de tour | quart de tour direct et indirect même point ? | les deux quarts de tour donnent le même point ? | 3lech lezem n9oulou le sens | quart de tour sans préciser le sens | direct ou indirect ça change quoi

CE QU'IL RÉPOND

L nafs el point M, le quart de tour direct w l'indirect ya3tiw zouz points mekhtalfin, symétriques par rapport à O. Hedheka 3lech dima n9oulou le sens.

symétriques par rapport ، مختلفين points يعطيو زوز point M ، le quart de tour direct w l'indirect لنفس الـ
à O . هاذاكا علاش ديما نقولو le sens .

Pour un même point M, le quart de tour direct et le quart de tour indirect donnent deux points différents, symétriques par rapport à O. C'est pourquoi on précise toujours le sens.

QUESTION 5 · L'IMAGE D'UN POINT PAR UN QUART DE TOUR

comment construire l'image d'un point par un quart de tour | kifech nebni l'image b quart de tour | construire M' avec l'équerre et le compas | construction de l'image par un quart de tour | kifech nrasem M' b quart de tour | image d'un point équerre compas

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$OM' = OM$

CE QU'IL RÉPOND

Nrasmou $[OM]$, w b l'équerre la perpendiculaire l (OM) fi O. Nekhdhou la demi-droite elli nousslou-lha ki ndawrou dans le sens direct : men O nchoufou M, temchi lel ysar. W b le compas n7ottou 3liha $OM' = OM$.

نرسمو O M ، w بـ l'équerre la perpendiculaire لـ O M في O . ناخذو la demi-droite اللي نوصلولها كي ندوّرو dans le sens direct : من O نشوفو M ، تمشي لليسار . w بـ le compas نحطّو عليها O M prime égale O M .

On trace O M, puis à l'équerre la perpendiculaire à O M en O. On garde la demi-droite atteinte en tournant dans le sens direct : en regardant de O vers M, elle part vers la gauche. Au compas, on y reporte O M prime égale O M.

QUESTION 6 · L'IMAGE D'UN POINT PAR UN QUART DE TOUR

deux quarts de tour de suite | deux quarts de tour ça fait un demi-tour ? | quart de tour puis quart de tour | zouz quarts de tour chnowa ya3tiw | deux quarts : l'image de M' par le même quart de tour | deux quarts de tour directs

CE QU'IL RÉPOND

Zouz quarts de tour directs b nafs le centre, wa7ed ba3d le5or, ya3mlou demi-tour : l'image mte3 M' hiya le symétrique mte3 M par rapport à O.

زوز quarts de tour directs بنفس le centre ، واحد بعد الآخر ، يعملو demi-tour : l'image متاع M prime هي le symétrique متاع O par rapport à M .

Deux quarts de tour directs de même centre, l'un après l'autre, font un demi-tour : l'image de M prime est le symétrique de M par rapport à O.

QUESTION 7 · L'IMAGE D'UN POINT PAR UN QUART DE TOUR

OM' = OM suffit pour le quart de tour ? | même distance au centre ça suffit ? | nafs el distance mel centre ykaffi ? | pourquoi il faut aussi l'angle droit | OM' = OM suffit pour avoir l'image par quart de tour | quart de tour il faut l'angle de 90

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = 90°$

CE QU'IL RÉPOND

Le : el points el koll mte3 le cercle de centre O elli yet3adda 3la M 3andhom $OM' = OM$. L'angle droit w le sens houma elli y7addou point wa7ed.

لا : الـ points الكل متاع le cercle de centre O اللي يتعدّى على M عندهم l'angle droit . O M prime égale O M w le sens هوما اللي يحدّدو point واحد .

Non : tous les points du cercle de centre O passant par M vérifient O M prime égale O M. Ce sont l'angle droit et son sens qui désignent un seul point.

QUESTION 8 · TRIANGLE RECTANGLE ISOCÈLE ET QUART DE TOUR

triangle rectangle isocèle et quart de tour | pourquoi un triangle rectangle isocèle cache un quart de tour | C image de B par un quart de tour de centre A | triangle rectangle isocèle ya3ni quart de tour ? | lien entre rectangle isocèle et quart de tour | ABC rectangle isocèle en A quart de tour

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AC = AB \text{ et } \widehat{BAC} = 90^\circ$$

CE QU'IL RÉPOND

ABC rectangle isocèle en A ya3ni C l'image mte3 B par un quart de tour de centre A : el zouz y9oulou $AC = AB$ w $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Le sens, direct walla indirect, n9rawh 3la la figure men B l C.

A C الزوز يقولو : B par un quart de tour de centre A متاع C l'image يعني A B C rectangle isocèle en A . C لـ B من la figure على نقراوه ، indirect ولّا égale A B w l'angle B A C 90 degrés . le sens ، direct

A B C rectangle isocèle en A signifie que C est l'image de B par un quart de tour de centre A : les deux disent A C égale A B et angle B A C égale 90 degrés. Le sens, direct ou indirect, se lit sur la figure en tournant de B vers C.

QUESTION 9 · TRIANGLE RECTANGLE ISOCÈLE ET QUART DE TOUR

comment calculer MM' après un quart de tour | MM' = 2 OM ? | distance entre un point et son image par quart de tour | kifech na7seb MM' | MM' racine de 2 fois OM pourquoi | OM = 3 cm combien fait MM'

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$MM' = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ \text{cm}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le triangle OMM' rectangle isocèle en O, donc b Pythagore : $MM'^{2} = OM^{2} + OM'^{2}$. Mathalan $OM = 3$ cm : $9 + 9 = 18$, w $MM' = 3\sqrt{2}$ cm. Mouch $2 \times OM$: hedheka le demi-tour.

Pythagore : M M prime au carré égale O M au بـ le triangle O M M prime rectangle isocèle en O ، donc 2 موش . O M 3 cm : 9 plus 9 ، 18 ، w M M prime égale 3 racine de 2 cm مثلا . carré plus O M au carré . le demi-tour هاذاكا : fois O M

Le triangle O M M prime est rectangle isocèle en O, donc par Pythagore : M M prime au carré égale O M au carré plus O M prime au carré. Par exemple, avec O M égale 3 cm : 9 plus 9 égale 18, et M M prime égale 3 racine de 2 cm. Pas 2 fois O M : ça, c'est le demi-tour.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

QUESTION 10 · L'IMAGE D'UN SEGMENT, L'IMAGE D'UNE DROITE

l'image d'un segment par un quart de tour | le quart de tour conserve les longueurs ? | A'B' = AB après un quart de tour ? | image mta3 segment b quart de tour | A'B' = racine de 2 fois AB ? | l'image du milieu par un quart de tour

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$A'B' = AB$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mte3 le segment $[AB]$ hiya le segment $[A'B']$, isométrique lih : $A'B' = AB$. W l'image mte3 le milieu hiya le milieu. Elli ysewi $\sqrt{2} \times OA$ hiya la distance AA', mouch $A'B'$.

A prime B prime égale A : ليه le segment A prime B prime ، isométrique هي le segment A B متاع l'image ، la distance A A prime هي racine de 2 fois O A اللي يساوي . le milieu هي le milieu متاع B . w l'image . A prime B prime موش

L'image du segment A B est le segment A prime B prime, qui lui est isométrique : A prime B prime égale A B. L'image du milieu est le milieu. Ce qui vaut racine de 2 fois O A, c'est la distance A A prime, pas A prime B prime.

QUESTION 11 · L'IMAGE D'UN SEGMENT, L'IMAGE D'UNE DROITE

l'image d'une droite par un quart de tour | image d'une droite parallèle ou perpendiculaire | comment tracer l'image d'une droite par un quart de tour | image mta3 droite b quart de tour | quart de tour droite perpendiculaire pourquoi | la droite image est parallèle ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D' \perp D$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mte3 droite par un quart de tour hiya droite perpendiculaire liha, mouch parallèle : parallèle hedhi la translation w le demi-tour. Bech nrasmouha, nabniw l'image A' mte3 point A menha, w nrasmou la perpendiculaire elli tet3adda 3la A'.

هاذي parallèle : parallèle موش ، ليها droite perpendiculaire هي droite par un quart de tour متاع l'image la نرسمو w ، منها point A متاع l'image A prime نبنيو ، باش نرسموها . la translation w le demi-tour . A prime على تتعدّى اللي perpendiculaire

L'image d'une droite par un quart de tour est une droite perpendiculaire, pas parallèle : parallèle, c'est la translation et le demi-tour. Pour la tracer, on construit l'image A prime d'un point A de la droite, puis la perpendiculaire qui passe par A prime.

QUESTION 12 · L'IMAGE D'UN CERCLE

l'image d'un cercle par un quart de tour | le cercle image a le même centre ? | image mta3 cercle b quart de tour

rayon du cercle image | comment construire l'image d'un cercle | cercle et quart de tour

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$O \longmapsto O' \quad ; \quad r' = r$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mte3 cercle de centre O w de rayon r hiya cercle b nafs le rayon r, w le centre mte3ou O', l'image mte3 O. Ykaffi nabniw l'image mte3 le centre. Le cercle yo93od fi blastou ken ki le centre du quart de tour houwa le centre du cercle.

l'image متاع cercle de centre O w de rayon r هي cercle بنفس le centre w le rayon r متاعو ، O prime l'image متاع O . يكفي نبنيو l'image متاع le cercle . le centre يقعد في بلاصتو كان كي le centre du quart de tour هو le centre du cercle .

L'image d'un cercle de centre O et de rayon r est le cercle de même rayon r dont le centre est O prime, l'image de O. Il suffit de construire l'image du centre. Le cercle ne reste en place que si le centre du quart de tour est le centre du cercle.

QUESTION 13 · DES FIGURES SUPERPOSABLES

le quart de tour conserve les aires ? | aire et périmètre de l'image par un quart de tour | les angles changent avec le quart de tour ? | angle image égal angle plus 90 ? | figure et image superposables | l'aire du triangle image

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6 \quad ; \quad 4 + 3 + 5 = 12$$

CE QU'IL RÉPOND

La figure w l'image mte3ha superposables : nafs l'aire, nafs le périmètre, w les angles homologues égaux. La figure el koll tdour 90°, mouch koll angle fiha. Mathalan triangle rectangle 4 w 3 cm : l'image 3andha aire 6 cm² w périmètre 12 cm.

متاعها la figure w l'image superposables : نفس l'aire ، نفس les angles homologues w le périmètre . la figure égaux الكل تدور 90 ، موش كل angle فيها . مثلا l'image : triangle rectangle 4 w 3 cm عندها aire 6 cm carrés w périmètre 12 cm .

Une figure et son image sont superposables : même aire, même périmètre, angles homologues égaux. C'est la figure entière qui tourne de 90 degrés, pas chacun de ses angles. Par exemple, un triangle rectangle de côtés 4 et 3 cm a une image d'aire 6 centimètres carrés et de périmètre 12 cm.

QUESTION 14 · CONSTRUIRE DANS UN QUADRILLAGE

comment faire un quart de tour dans un quadrillage | quart de tour avec les coordonnées | A(3;1) image par quart de tour direct | kifech na3mel quart de tour fel quadrillage | compter les carreaux quart de tour | coordonnées de l'image par un quart de tour de centre O

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$A(3\,;1) \longmapsto A'(-1\,;3)$

CE QU'IL RÉPOND

N3eddou les carreaux. Le quart de tour direct ydawwer koll déplacement : el imin ywalli el fou9, el fou9 ywalli el ysar, el ysar ywalli el louta, w el louta ywalli el imin. $A(3\,;1)$: 3 lel imin w 1 lel fou9, ywalliw 3 lel fou9 w 1 lel ysar, donc $A'(-1\,;3)$.

نعدّو les carreaux . le quart de tour direct يدوّر كل déplacement : اليمين يولّي الفوق ، الفوق يولّي اليسار ، اليسار يولّي اللوطة ، w اللوطة يولّي اليمين . A de coordonnées 3 w 1 : 3 لليمين 1 w للفوق ، يولّيو 3 للفوق 1 w لليسار ، 3 w 1 . donc A prime de coordonnées moins 1 w 3 .

On compte les carreaux. Le quart de tour direct fait tourner chaque déplacement : vers la droite devient vers le haut, le haut devient la gauche, la gauche devient le bas, et le bas devient la droite. Pour A de coordonnées 3 et 1 : 3 vers la droite et 1 vers le haut deviennent 3 vers le haut et 1 vers la gauche, donc A prime de coordonnées moins 1 et 3.

QUESTION 15 · RECONNAÎTRE LA TRANSFORMATION

comment reconnaître la transformation | symétrie, translation, demi-tour ou quart de tour comment savoir | kifech na3ref anahi transformation | reconnaître un quart de tour sur une figure | quelle transformation entre deux figures | figure tête en bas c'est une symétrie axiale ?

CE QU'IL RÉPOND

Nchoufou l'ordre des sommets : ken t9aleb, symétrie axiale. Ken le, ncomparer segment w l'image mte3ou : nafs la direction w nafs le sens, translation ; sens contraires, demi-tour ; directions perpendiculaires, quart de tour.

نشوفو l'ordre des sommets : كان تقلب ، symétrie axiale . كان لا ، نـ comparer segment w l'image متاعو : نفس la direction w نفس le sens ، translation ؛ sens contraires ، demi-tour ، directions perpendiculaires . quart de tour

On regarde l'ordre des sommets : s'il est inversé, c'est une symétrie axiale. Sinon, on compare un segment et son image : même direction et même sens, translation ; sens contraires, demi-tour ; directions perpendiculaires, quart de tour.

QUESTION 16 · RECONNAÎTRE LA TRANSFORMATION

comment trouver le centre du quart de tour | kifech nal9a le centre | centre du quart de tour avec les médiatrices | le centre n'est pas donné comment faire | trouver O centre du quart de tour | médiatrice de AA' et BB'

CE QU'IL RÉPOND

$OA' = OA$ w $OB' = OB$, donc le centre 3la la médiatrice mte3 $[AA']$ w 3la la médiatrice mte3 $[BB']$: houwa le point win yet9at3ou. Men ba3d nvérifier elli $\widehat{AOA'}$ droit, w n9raw le sens.

la على A A prime w متاع la médiatrice على O A prime égale O A w O B prime égale O B ، donc le centre l'angle A O A prime droit ، w اللي vérifier نـ من بعد . وين يتقاطعو le point هو : B B prime متاع médiatrice . le sens نقراو

Comme O A prime égale O A et O B prime égale O B, le centre est sur la médiatrice de A A prime et sur celle de B B prime : c'est leur point d'intersection. On vérifie ensuite que l'angle A O A prime est droit, et on y lit le sens.

QUESTION 17 · CONSTRUIRE AVEC L'IMAGE D'UNE DROITE

construire un triangle rectangle isocèle avec A sur D et B sur D' | on suppose le problème résolu | B est le point commun de quelles droites | kifech nebni OAB rectangle isocèle b les droites | pourquoi D et D' ne doivent pas être perpendiculaires | construction avec l'image d'une droite

CE QU'IL RÉPOND

Nefredhou le problème résolu : B l'image mte3 A par le quart de tour de centre O. A 3la D, donc B 3la l'image mte3 D. W B zeda 3la D' : B houwa le point commun mte3 l'image de D w D'. Lezem D w D' mouch perpendiculaires, walla ma yet9at3ouch.

نفرضو le problème résolu : B l'image متاع A par le quart de tour de centre O . على B donc ، على D l'image متاع B w . زادة على D : B prime هو le point commun متاع l'image de D w D prime . لازم D w D perpendiculaires موش prime ، وإلا ما يتقاطعوش .

On suppose le problème résolu : B est l'image de A par le quart de tour de centre O. A est sur D, donc B est sur l'image de D. Et B est aussi sur D prime : c'est le point commun de l'image de D et de D prime. Il faut que D et D prime ne soient pas perpendiculaires, sinon elles ne se couperaient pas.

QUESTION 18 · DÉMONTRER AVEC UN QUART DE TOUR

comment démontrer avec un quart de tour | deux carrés montrer BE = DG | kifech nwarri BE = DG b quart de tour | montrer que deux droites sont perpendiculaires avec un quart de tour | démontrer deux segments de même longueur avec un quart de tour | prouver avec le quart de tour

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$[BE] \longmapsto [DG] \Rightarrow BE = DG \text{ et } (BE) \perp (DG)$$

CE QU'IL RÉPOND

Nlawjou 3la quart de tour yab3eth segment 3al e5er. Nal9aw le centre, mathalan le sommet commun mte3 zouz carrés, nthabtou le sens, w nvérifier el zouz extrémités b nafs le quart de tour. Segment w l'image mte3ou : nafs la longueur w droites perpendiculaires.

carrés زوز متاع le sommet commun مثلا ، le centre نلقاو . الآخر على segment يبعث quart de tour على نلوّجو ، نثبّتو w ، le sens نـ vérifier الزوز extrémités بنفس segment w l'image . le quart de tour متاعو : نفس la . longueur w droites perpendiculaires

On cherche un quart de tour qui envoie un segment sur l'autre. On repère le centre, par exemple le sommet commun de deux carrés, on fixe le sens, et on vérifie les deux extrémités avec le même quart de tour. Un segment et son image ont même longueur et portent des droites perpendiculaires.

QUESTION 19 · DÉMONTRER AVEC UN QUART DE TOUR

un carré cache un quart de tour ? | carré ABCD D image de B | quart de tour dans un carré | carré w quart de tour | dans un carré quel quart de tour | sommet d'un carré centre de quart de tour

CE QU'IL RÉPOND

Fi carré ABCD, $AD = AB$ w $\widehat{BAD} = 90^\circ$: donc D l'image mte3 B par un quart de tour de centre A. Le sens yet3allaq b kifech sammina le carré : ken dans le sens direct, le quart de tour direct.

في carré A B C D ، A D égale A B w l'angle B A D 90 degrés : donc D l'image B par un quart de tour متاع يتعلّق بـ كيفاش سمّينا le carré : كان le quart de tour direct ، dans le sens direct . le sens de centre A .

Dans un carré A B C D, A D égale A B et l'angle B A D est droit : D est donc l'image de B par un quart de tour de centre A. Le sens dépend de la façon dont le carré est nommé : nommé dans le sens direct, c'est le quart de tour direct.

QUESTION 20 · L'IMAGE D'UN POINT PAR UN QUART DE TOUR

l'image du centre par un quart de tour | le centre O bouge avec le quart de tour ? | image de O par le quart de tour de centre O | le centre reste à sa place ? | le centre O yet7arrek ki ndawrou ? | que devient le centre O

CE QU'IL RÉPOND

L'image mte3 O par un quart de tour de centre O hiya O nafsha : le centre ma yet7arrekch, kif la pointe mte3 le compas.

l'image متاع O par un quart de tour de centre O هي O نفسها : le centre ما يتحرّكش ، كيف la pointe متاع le compas .

L'image du point O par un quart de tour de centre O est O lui-même : le centre ne bouge pas, comme la pointe du compas.

QUESTION 21 · L'IMAGE D'UN SEGMENT, L'IMAGE D'UNE DROITE

trois points alignés ont des images alignées ? | le quart de tour conserve l'alignement ? | points alignés et quart de tour | l'image de points alignés | alignement b quart de tour | pourquoi l'image d'une droite est une droite

CE QU'IL RÉPOND

Ey : trois points alignés 3andhom images alignées. Hedheka 3lech l'image mte3 droite hiya droite, w l'image mte3 segment hiya segment kemel.

إيه : trois points alignés عندهم images alignées . هاذاكا علاش l'image متاع droite هي l'image ، w droite متاع segment هي segment كامل .

Oui : trois points alignés ont des images alignées. C'est pourquoi l'image d'une droite est une droite, et l'image d'un segment un segment tout entier.

QUESTION 22 · RECONNAÎTRE LA TRANSFORMATION

comment savoir si c'est une symétrie axiale | symétrie axiale ou quart de tour | l'ordre des sommets est inversé c'est quoi | symétrie axiale retourne la figure | kifech na3ref symétrie axiale | ordre des sommets inversé symétrie axiale

CE QU'IL RÉPOND

La symétrie axiale wa7dha t9alleb la figure kif sa7fa : ken nemchiw 3la A, B, C dans le sens direct w A', B', C' dans le sens indirect, hiya symétrie axiale. La translation, le demi-tour w le quart de tour y5alliw le sens.

كيف صفحة : كان نمشيو على A ، B ، C dans le sens direct w A prime وحدها تقلب la figure la symétrie axiale symétrie axiale . la translation ، le demi-tour w le quart de هي ، ، B prime ، C prime dans le sens indirect يخلّيو le sens tour .

Seule la symétrie axiale retourne la figure comme une page : si A, B, C se suivent dans le sens direct et A prime, B prime, C prime dans le sens indirect, c'est une symétrie axiale. La translation, le demi-tour et le quart de tour gardent le sens.

QUESTION 23 · RECONNAÎTRE LA TRANSFORMATION

quelle est la différence entre une translation et un quart de tour | translation w quart de tour chnowa el far9 | translation ou quart de tour comment les distinguer | far9 bin translation w quart de tour | translation et quart de tour les directions | quart de tour et translation kifkif ?

CE QU'IL RÉPOND

El zouz ma ybaddlouch les longueurs. Ama la translation t5alli la direction w le sens mte3 koll segment, w le quart de tour ydawwer koll direction b 90° : segment w l'image mte3ou perpendiculaires.

الزوز ما يبدّلوش les longueurs . أما la translation تخلّي la direction w le sens متاع كل segment ، w le quart de tour يدوّر كل direction بـ 90 : segment w l'image متاعو perpendiculaires .

Les deux conservent les longueurs. Mais la translation garde la direction et le sens de chaque segment, alors que le quart de tour fait tourner chaque direction de 90 degrés : un segment et son image sont perpendiculaires.

QUESTION 24 · LE DEMI-TOUR, QUE TU CONNAIS DÉJÀ

quelles transformations déplacent une figure sans la déformer | les transformations qui ne déforment pas | déplacer une figure sans la déformer | transformations ma ybaddlouch la figure | déformer une figure quart de tour | symétrie translation quart de tour déforment ?

CE QU'IL RÉPOND

La symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation w le quart de tour : el koll y7arrkou la figure bla ma ybaddlouha. La figure w l'image mte3ha superposables.

الكل يحرّكو la figure بلا ما : la symétrie axiale ، la symétrie centrale ، la translation w le quart de tour
يبدّلوها . la figure w l'image متاعها superposables .

La symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation et le quart de tour déplacent tous une figure sans la déformer : la figure et son image sont superposables.

QUESTION 25 · DÉMONTRER AVEC UN QUART DE TOUR

pourquoi vérifier le sens pour les deux extrémités | le même quart de tour pour les deux extrémités | deux extrémités même centre même sens | chaque extrémité du segment | zouz extrémités nafs le quart de tour | vérifier les deux extrémités

CE QU'IL RÉPOND

Lezem quart de tour wa7ed, nafs le centre w nafs le sens, yab3eth les deux extrémités. Ken carré msammi bel 3aks, G ywalli l'image mte3 E par le quart de tour indirect, w $[DG]$ ma3adech l'image mte3 $[BE]$.

لازم quart de tour واحد ، نفس le centre w نفس le sens ، يبعث les deux extrémités . كان carré مسمّي
بالعكس ، G يولّي l'image متاع D G ، w par le quart de tour indirect E ماعادش l'image متاع B E .

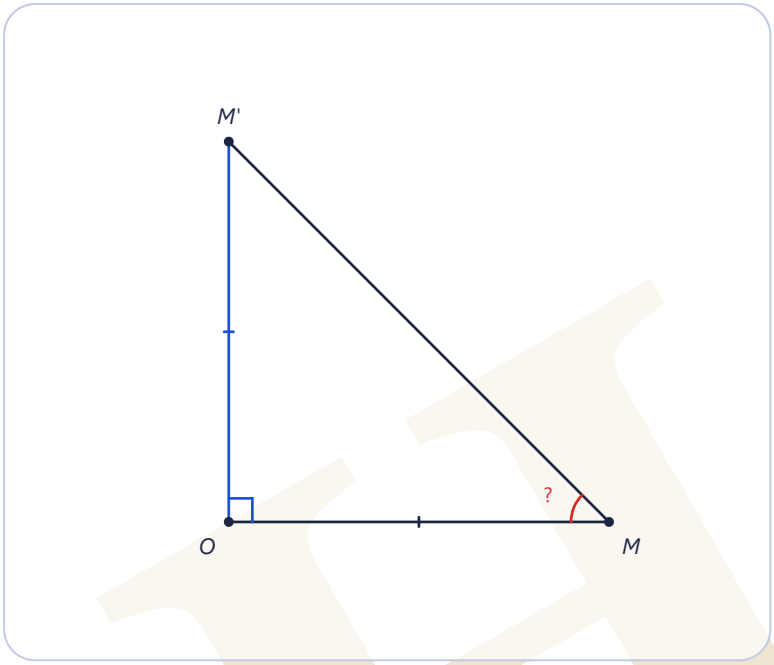
Il faut un seul quart de tour, même centre et même sens, pour les deux extrémités. Si l'un des carrés était nommé dans l'autre sens, G serait l'image de E par le quart de tour indirect, et D G ne serait plus l'image de B E.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Le triangle caché**

M' est l'image du point M par le quart de tour direct de centre O.

Calculer l'angle $\widehat{OMM'}$.



Le point O en bas à gauche, M à sa droite, et M' au-dessus de O. Les segments [OM] et [OM'] portent la même marque d'égalité, et l'angle MOM' porte la marque de l'angle droit. Le segment [MM'] ferme le triangle OMM', et l'angle OMM', au sommet M, porte un point d'interrogation.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis la définition : que sais-tu de OM' comparé à OM, et de l'angle $\widehat{MOM'}$?
2. Le triangle OMM' est rectangle **et** isocèle en O. Ses deux angles de base sont égaux, et les trois angles se partagent $180°$.
   $\widehat{OMM'} + \widehat{OM'M} + 90° = 180°$

CORRECTION

La définition — M' est l'image de M par le quart de tour de centre O.

$OM' = OM \quad$ et $\quad \widehat{MOM'} = 90°$

La nature — Le triangle OMM' est donc rectangle isocèle en O : ses deux angles de base, en M et en M', sont égaux.

La somme des angles du triangle vaut $180°$.

$\widehat{OMM'} = \frac{180° - 90°}{2}$

$\widehat{OMM'} = 45°$

Retiens ce triangle : un point, son image et le centre forment **toujours** un triangle rectangle isocèle, avec deux angles de $45°$. Il sert dans presque tous les exercices du chapitre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`90` → $90°$, c'est l'angle au sommet O, $\widehat{MOM'}$. L'angle demandé a son sommet en M : c'est un angle de la base du triangle isocèle.

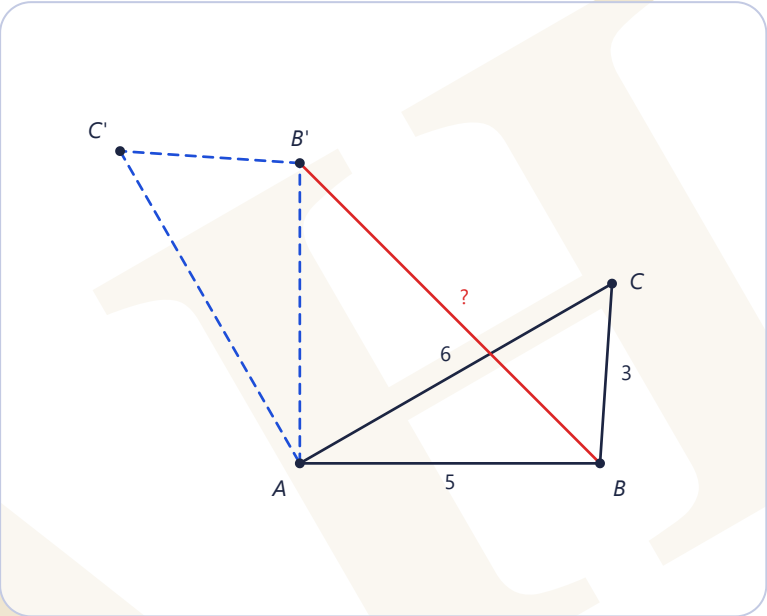
`60` → Le triangle OMM' n'est pas équilatéral : $[MM']$ est l'hypoténuse, plus longue que $[OM]$. Il est rectangle isocèle, et ses angles de base se partagent les $90°$ qui restent.

EXERCICE 2 · BASE

D'un point à son image

ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm et $AC = 6$ cm. Le quart de tour direct de centre A transforme B en B' et C en C'.

Calculer la distance BB'.



Un triangle ABC, avec AB = 5, BC = 3 et AC = 6 : A en bas à gauche, B à sa droite, C au-dessus de B, un peu à droite. Son image AB'C' par le quart de tour direct de centre A est tracée en pointillés bleus : B' est au-dessus de A, et C' en haut à gauche. Le segment [BB'], qui relie B à son image, est tracé en rouge et porte un point d'interrogation.

Donner la valeur exacte de BB' en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `5*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(50)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde le triangle ABB' : que sais-tu de AB', et de l'angle $\widehat{BAB'}$?
2. Le triangle ABB' est rectangle isocèle en A, avec $AB' = AB$. Pythagore donne BB'.
   $BB'^2 = AB^2 + AB'^2$

CORRECTION

Le triangle caché — B' est l'image de B par le quart de tour de centre A : $AB' = AB = 5$ cm et $\widehat{BAB'} = 90°$. Le triangle ABB' est rectangle isocèle en A.

Pythagore — Dans le triangle ABB' rectangle en A :

$BB'^2 = 5^2 + 5^2 = 50$

Comme $50 = 25 \times 2$, on sort le carré 25 de la racine :

$BB' = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm

Les longueurs BC et AC ne servaient pas ici : seule compte la distance au centre. De la même façon, $CC' = 6\sqrt{2}$ cm. Un point et son image sont toujours distants de leur distance au centre multipliée par $\sqrt{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → $10 = 2 \times 5$, c'est la distance entre B et son image par un **demi-tour** de centre A : B, A et l'image sont alors alignés. Après un quart de tour, le triangle ABB' est rectangle en A.

`50` → 50, c'est BB'^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`5` → 5 cm, c'est AB', la distance de B' au centre A. La distance BB' entre le point et son image est l'hypoténuse du triangle ABB' : elle est plus longue.

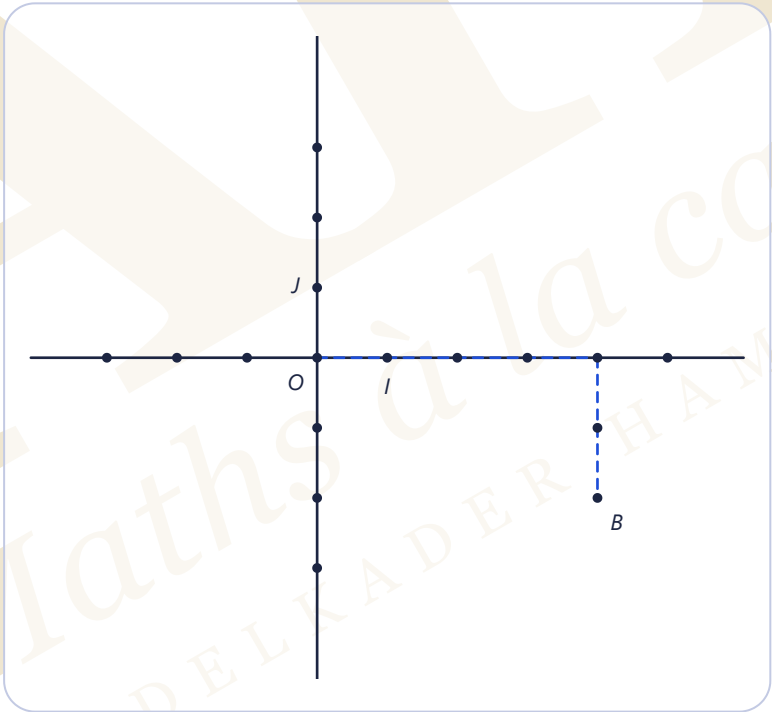
`7.07 / 7.1 / 7.071` → C'est une valeur approchée de BB', lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

`6*sqrt(2) / sqrt(72)` → $6\sqrt{2}$ cm, c'est CC', la distance de C à son image : elle part de $AC = 6$ cm. On demande BB', qui part de AB.

EXERCICE 3 · PRATIQUE **Dans un repère, sans rapporteur**

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $B(4\,;-2)$.

Donner les coordonnées du point B', image de B par le quart de tour direct de centre O.



Un repère orthonormé d'origine O : I sur l'axe des abscisses et J sur l'axe des ordonnées marquent l'unité, et des petits points graduent les deux axes d'unité en unité. Le point B est à 4 unités à droite de O et 2 unités plus bas. Deux pointillés bleus montrent le chemin : de O vers la droite sur 4 unités, puis vers le bas sur 2 unités jusqu'à B, avec un petit point à chaque unité.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(2;4)` — aussi acceptées : (2,4) · B'(2;4) · B'(2,4) · 2;4 · 2 et 4 · x=2;y=4 · x=2 et y=4 · (+2;+4) · (+2,+4) · B'(+2;+4) · +2;+4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte les unités pour aller de O à B : combien vers la droite, et combien vers le haut ou vers le bas ?

2. Le quart de tour direct fait tourner chaque déplacement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : « vers la droite » devient « vers le haut », et « vers le bas » devient « vers la droite ».
3. Refais le chemin tourné depuis O, puis lis l'abscisse et l'ordonnée du point d'arrivée.

CORRECTION

Le chemin vers B — De O à B : 4 unités vers la droite, puis 2 vers le bas.

On tourne le chemin — Dans le sens direct, « droite » devient « haut », et « bas » devient « droite ». De O à B' : 4 unités vers le haut, puis 2 vers la droite.

On lit l'abscisse, puis l'ordonnée : B' a pour abscisse 2 et pour ordonnée 4.

$B'(2\,;4)$

Vérifie toujours avec le triangle caché : $OB' = OB$, et l'angle $\widehat{BOB'}$ est droit. B est en bas à droite de O, B' en haut à droite : on a bien tourné d'un quart de tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;-4) / (-2,-4) / B'(-2;-4) / B'(-2,-4) / -2;-4 / -2 et -4` → $(-2\,;-4)$ est l'image par le quart de tour **indirect** : tu as tourné dans le sens des aiguilles d'une montre. Le sens direct est le sens contraire.

`(-4;2) / (-4,2) / B'(-4;2) / B'(-4,2) / -4;2 / -4 et 2` → $(-4\,;2)$ est l'image par le **demi-tour** de centre O : les deux coordonnées ont seulement changé de signe. Un quart de tour ne fait que la moitié de ce chemin.

`(-2;4) / (-2,4) / B'(-2;4) / B'(-2,4) / -2;4 / -2 et 4` → Tu as échangé les deux coordonnées sans tourner le chemin : « 2 unités vers le bas » doit devenir « 2 unités vers la **droite** ». L'abscisse de B' est donc positive.

`(2;-4) / (2,-4) / B'(2;-4) / B'(2,-4) / 2;-4 / 2 et -4` → Le second déplacement est bien tourné, mais pas le premier : « 4 unités vers la droite » devient « 4 unités vers le **haut** », pas vers le bas. Refais le chemin tourné : d'abord vers le haut, puis vers la droite.

`(4;2) / (4,2) / B'(4;2) / B'(4,2) / 4;2 / 4 et 2` → Tu as gardé 4 en abscisse. Mais le chemin tourné commence par « 4 unités vers le **haut** » — c'est une ordonnée — puis « 2 unités vers la droite » — c'est l'abscisse.

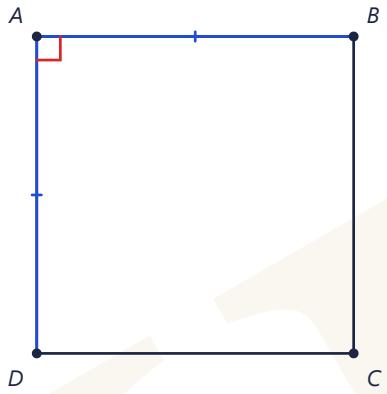
`2,4` → Écris le couple entre parenthèses, avec un point-virgule, comme $(x\,;y)$: « 2,4 » se lit comme le nombre décimal deux virgule quatre.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

Direct ou indirect ?

$ABCD$ est un carré nommé dans le sens des aiguilles d'une montre : A en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite et D en bas à gauche.

Le point D est l'image de B par un quart de tour de centre A. Ce quart de tour est-il direct ou indirect ?



Un carré ABCD : A en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite, D en bas à gauche. Les côtés [AB] et [AD] portent la même marque d'égalité, et l'angle BAD, au sommet A, porte la marque de l'angle droit.

Répondre par un mot : direct, ou indirect.

Réponse attendue : `indirect` — aussi acceptées : le quart de tour indirect · quart de tour indirect · un quart de tour indirect · c'est le quart de tour indirect · le quart de tour indirect de centre A · c'est indirect · il est indirect · sens indirect · le sens indirect · dans le sens indirect · sens des aiguilles d'une montre · dans le sens des aiguilles d'une montre · le sens des aiguilles d'une montre · comme les aiguilles d'une montre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place-toi en A et regarde B, à sa droite. Pour arriver sur D, en bas, dans quel sens tournes-tu autour de A ?
2. De la droite vers le bas, on tourne comme les aiguilles d'une montre. Quel nom le cours donne-t-il à ce sens ?

CORRECTION

Le quart de tour — $ABCD$ est un carré : $AD = AB$ et $\widehat{BAD} = 90°$. Le triangle ABD est rectangle isocèle en A, donc D est l'image de B par un quart de tour de centre A.

Le sens — Autour de A, on va de B, à droite, vers D, en bas : c'est le sens des aiguilles d'une montre, le sens indirect.

quart de tour indirect de centre A

Le sens dépend de l'ordre dans lequel le carré est nommé. Si $ABCD$ était nommé dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, D serait l'image de B par le quart de tour **direct** de centre A. Et, dans tous les cas, B est l'image de D par le quart de tour de sens contraire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`direct / le quart de tour direct / quart de tour direct / un quart de tour direct / c'est le quart de tour direct / le quart de tour direct de centre A / c'est direct / sens direct / le sens direct`

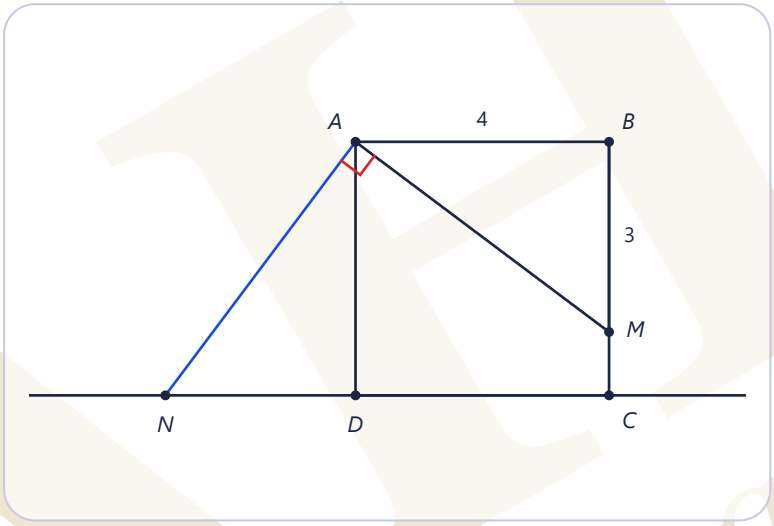
→ Direct, c'est le sens **contraire** des aiguilles d'une montre. Pose la pointe du compas en A et va de B vers D : dans quel sens tournes-tu ?

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Le point N, sur la droite (CD)

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. M est le point du segment $[BC]$ tel que $BM = 3$ cm. La perpendiculaire à la droite (AM) passant par A coupe la droite (CD) au point N.

Calculer la longueur AN.



Un carré ABCD de côté 4, avec A en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite et D en bas à gauche. M est sur le côté [BC], à 3 de B. Le segment [AM] est tracé. La droite (CD) est prolongée vers la gauche au-delà de D. La perpendiculaire à (AM) en A, tracée en bleu, coupe cette droite en N, à gauche de D. L'angle MAN porte la marque de l'angle droit.

Donner la longueur AN en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quel quart de tour de centre A envoie B sur D ? Cherche l'image de la droite (BC) par ce quart de tour.
2. Le point M est à la fois sur (AM) et sur (BC). Son image est donc sur l'image de (AM) et sur l'image de (BC). Quelles sont ces deux droites ?
3. L'image de M, c'est N : donc $AN = AM$. Calcule AM dans le triangle ABM, rectangle en B. $AM^2 = AB^2 + BM^2$

CORRECTION

Le quart de tour — Le triangle ABD est rectangle isocèle en A : D est l'image de B par un quart de tour de centre A — sur la figure, le quart de tour indirect.

Les deux droites images — L'image de (BC) passe par D et elle est perpendiculaire à (BC) : c'est la droite (CD). L'image de (AM) passe par A et elle est perpendiculaire à (AM) : c'est la perpendiculaire à (AM) en A.

L'image de M — M est sur (AM) et sur (BC), donc son image est sur ces deux droites images : c'est leur point commun, N. Les longueurs sont conservées.

$$AN = AM$$

Pythagore — Dans le triangle ABM rectangle en B :

$$AM^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$AN = AM = 5 \text{ cm}$$

Le calcul passait par un point qu'on ne voyait pas : N est l'image de M. Et on a aussi $DN = BM = 3$ cm, car $[DN]$ est l'image de $[BM]$. Quand M se déplace sur (BC), N reste sur la droite (CD).

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(7)` → $\sqrt{7}$ vient de $4^2 - 3^2$. Dans le triangle ABM rectangle en B, l'hypoténuse est $[AM]$: on **ajoute** les carrés des deux autres côtés.

`3` → 3 cm, c'est DN, l'image de BM. La longueur demandée est AN, l'image de AM.

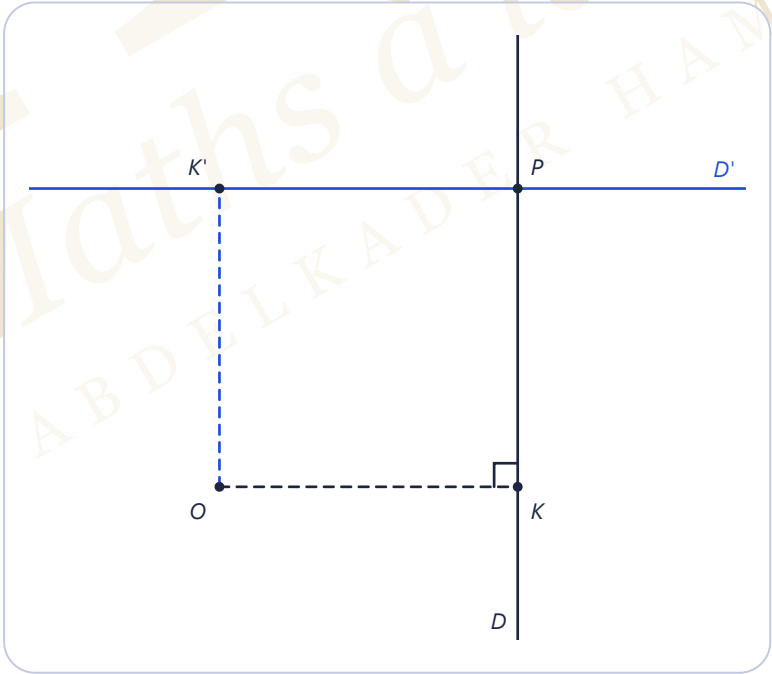
`7` → $AB + BM = 7$ ne donne pas AM : passer par B fait un détour. Utilise Pythagore dans le triangle ABM, rectangle en B.

EXERCICE 6 · RAISONNEMENT

Une droite, son image, et le centre

D est une droite qui ne passe pas par le point O, et K est le projeté orthogonal de O sur D. Le quart de tour direct de centre O transforme la droite D en D', et le point K en K'. Les droites D et D' se coupent en P.

Quelle est la nature du quadrilatère $OKPK'$?



Un point O et une droite verticale D à sa droite. K est le pied de la perpendiculaire menée de O à D, et l'angle en K est droit. Le quart de tour direct de centre O envoie K en K', au-dessus de O, et D en la droite horizontale D', tracée en bleu, qui passe par K'. D et D' se coupent en P. Les segments [OK] et [OK'] sont en pointillés.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

Donner sa nature la plus précise, en un mot.

Réponse attendue : `carré` — aussi acceptées : un carré · c'est un carré · OKPK' est un carré · OKPK' est carré · le quadrilatère OKPK' est un carré · le quadrilatère OKPK' est carré · le quadrilatère est un carré · quadrilatère carré · un quadrilatère carré

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte les angles droits du quadrilatère : en K, en O et en K'. Pourquoi chacun est-il droit ?
2. K est sur D, donc K' est sur D'. Et l'angle droit que font (OK) et D en K a pour image un angle droit que font (OK') et D' en K'.
3. Trois angles droits font un rectangle. Compare maintenant deux côtés consécutifs, OK et OK'.

CORRECTION

L'angle en O — K' est l'image de K : $OK' = OK$ et $\widehat{KOK'} = 90°$.

L'angle en K — K est le projeté orthogonal de O sur D, et P est sur D : l'angle $\widehat{OKP}$ est droit.

Le troisième angle — Un quart de tour conserve les angles : l'angle droit formé en K par (OK) et D a pour image un angle droit formé en K' par (OK') et D'. Comme P est sur D', l'angle $\widehat{OK'P}$ est droit.

La nature — Trois angles droits : $OKPK'$ est un rectangle. Et deux côtés consécutifs sont égaux, $OK = OK'$: c'est un carré.

$OKPK'$ est un carré

Le quart de tour a tout fourni : l'angle droit en O, l'égalité $OK' = OK$, et l'angle droit en K', qui vient de celui en K. Il restait à les rassembler.

PIÈGES ANTICIPÉS

`rectangle / un rectangle / c'est un rectangle / OKPK' est un rectangle / le quadrilatère est un rectangle` → C'est bien un rectangle : il a trois angles droits. Mais regarde deux côtés consécutifs : $OK' = OK$, car K' est l'image de K. Un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux porte un nom plus précis.

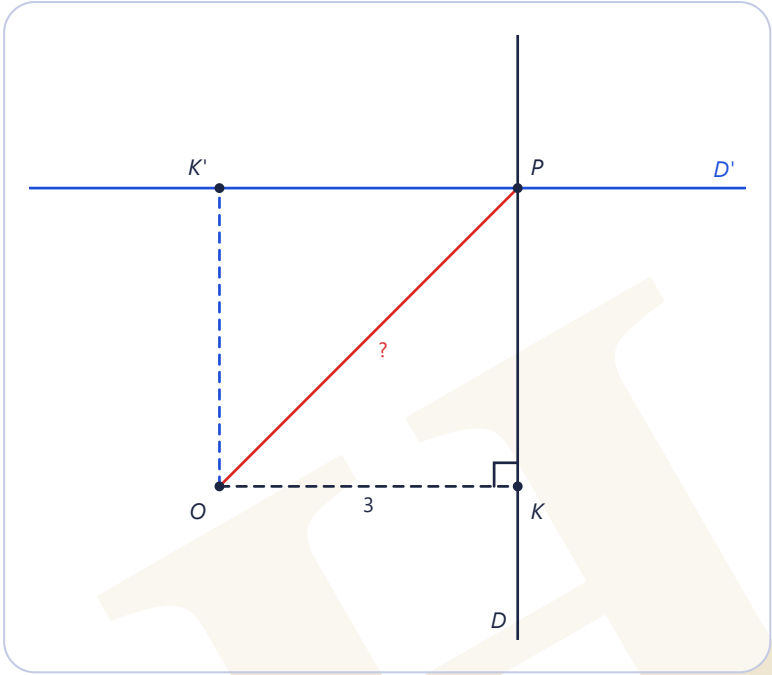
`losange / un losange / c'est un losange / OKPK' est un losange / le quadrilatère est un losange` → Ses quatre côtés sont bien égaux, mais un losange n'a pas forcément d'angle droit. Celui-ci en a : en K, en O et en K'. Quel losange a des angles droits ?

EXERCICE 7 · RAISONNEMENT

Du centre au point de rencontre

D est une droite qui ne passe pas par le point O, et K est le projeté orthogonal de O sur D, avec $OK = 3$ cm. Le quart de tour direct de centre O transforme la droite D en D', et le point K en K'. Les droites D et D' se coupent en P.

Calculer la distance OP.



Le point O, et la droite verticale D à sa droite. K est le pied de la perpendiculaire menée de O à D, avec OK = 3, et l'angle en K est droit. La droite D', image de D, est horizontale et passe par K', au-dessus de O. D et D' se coupent en P. Le segment [OP], tracé en rouge, porte un point d'interrogation.

Donner la valeur exacte de OP en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `3*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(18)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre d'abord que $OKPK'$ est un carré : l'angle en K est droit, et son image, en K', aussi ; l'angle $\widehat{KOK'}$ est droit, et $OK' = OK$. C'est aussi l'exercice « Une droite, son image, et le centre ».
2. Que représente le segment $[OP]$ pour le carré $OKPK'$?
3. $[OP]$ est une diagonale du carré : c'est l'hypoténuse du triangle OKP, rectangle isocèle en K. $OP^2 = OK^2 + KP^2$

CORRECTION

Le carré — L'angle droit que font (OK) et D en K a pour image un angle droit en K', entre (OK') et D'. L'angle $\widehat{KOK'}$ est droit et $OK' = OK$: $OKPK'$ est un carré de côté 3 cm, donc $KP = 3$ cm.

Pythagore — Dans le triangle OKP rectangle en K :

$$OP^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

$$OP = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Le point où une droite coupe son image est toujours à une distance de O égale à la distance de O à la droite multipliée par $\sqrt{2}$. C'est le carré $OKPK'$ qui le dit.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 cm, c'est OK, la distance de O à la droite D. Le point P est plus loin : c'est le sommet du carré opposé à O.

`4.24` / `4.2` / `4.243` → C'est une valeur approchée de OP, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

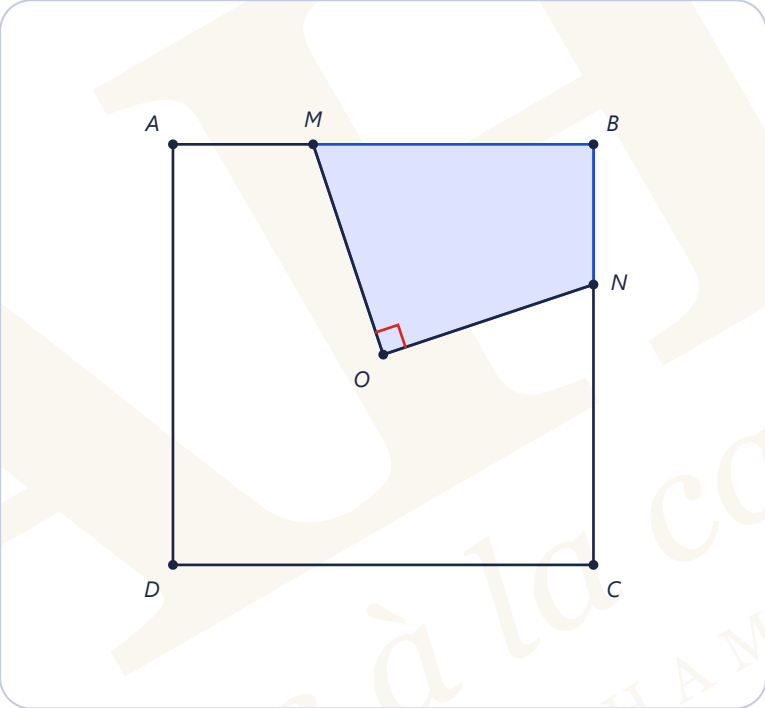
`18` → 18, c'est OP^2. Il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 8 · DEFI

Une aire qui ne dépend pas de M

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté 6 cm. M est un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[BC]$, tels que l'angle $\widehat{MON}$ soit droit.

Calculer l'aire du quadrilatère $OMBN$.



Un carré ABCD de centre O : A en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite, D en bas à gauche. M est sur le côté [AB], un peu à gauche de son milieu ; N est sur le côté [BC], un peu au-dessus de son milieu. Les segments [OM] et [ON] forment un angle droit en O, marqué en rouge. Le quadrilatère OMBN est coloré en bleu clair.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trace les demi-diagonales $[OA]$ et $[OB]$. Que peux-tu dire du triangle OAB ?
2. Le triangle OAB est rectangle isocèle en O : un quart de tour de centre O envoie A sur B, et B sur C. Où envoie-t-il le point M ?
3. L'image de M est sur $[BC]$, et elle fait avec M un angle droit en O : c'est N. Le triangle OAM a donc pour image le triangle OBN. Compare leurs aires.

CORRECTION

Le quart de tour — Les diagonales d'un carré sont égales, perpendiculaires, et se coupent en leur milieu : $OA = OB$ et $\widehat{AOB} = 90°$. Le quart de tour de centre O qui envoie A sur B envoie aussi B sur C — sur

la figure, c'est le quart de tour indirect.

L'image de M — Ce quart de tour envoie le segment $[AB]$ sur le segment $[BC]$. L'image de M est donc le point de $[BC]$ qui fait avec M un angle droit en O : c'est N.

Deux triangles superposables — Le triangle OAM a pour image le triangle OBN : ils ont la même aire.

$$\text{aire de } OBN = \text{aire de } OAM$$

Recoller — Dans le quadrilatère $OMBN$, on remplace le triangle OBN par le triangle OAM :

$$\text{aire de } OMBN = \text{aire de } OMB + \text{aire de } OAM = \text{aire de } OAB$$

Le triangle OAB est le quart du carré.

$$\text{aire de } OMBN = \frac{6\times 6}{4} = 9 \text{ cm}^2$$

L'aire ne dépend pas de la position de M : elle vaut toujours le quart du carré. C'est le quart de tour qui l'explique — il découpe le triangle OAM et le recolle en OBN.

PIÈGES ANTICIPÉS

36 → 36 cm², c'est l'aire du carré entier. Le quadrilatère $OMBN$ n'en couvre qu'une partie : recolle le triangle OBN sur le triangle OAM pour voir laquelle.

18 → 18 cm², c'est la moitié du carré, l'aire du triangle ABC. Mais O est le centre : le triangle OAB, qui a la même aire que $OMBN$, n'en est que le quart.

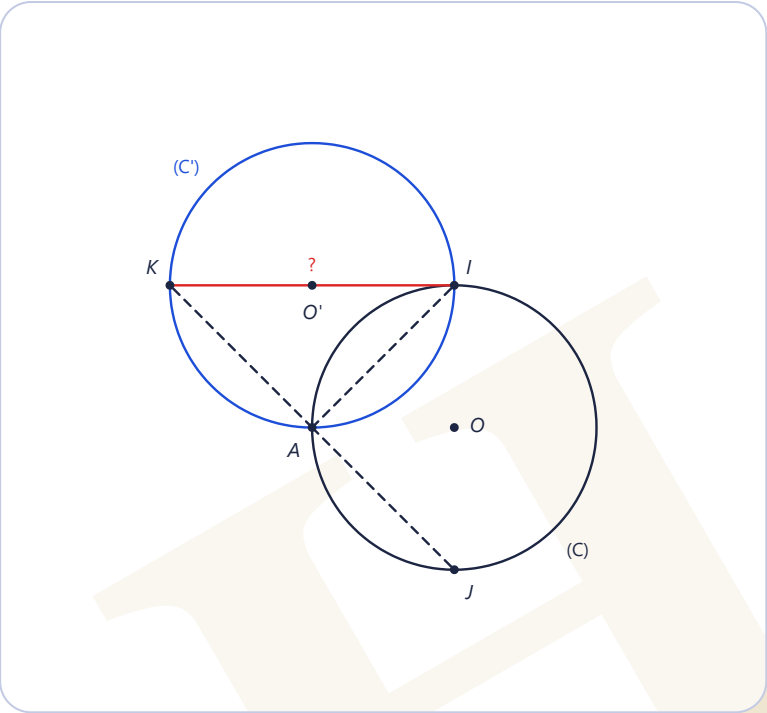
EXERCICE 9 · DEFI

Deux cercles qui se recoupent

Le cercle (C) a pour centre O et pour rayon 6 cm, et A est un point de (C). Le cercle (C') est l'image de (C) par le quart de tour direct de centre A ; les cercles (C) et (C') se recoupent en I. On note K l'image de I par le quart de tour direct de centre A, et J son image par le quart de tour indirect de centre A.

Calculer la longueur IK.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Le cercle (C) de centre O passe par A, qui est à gauche de O. Son image (C'), par le quart de tour direct de centre A, a pour centre O', au-dessus de A, et passe aussi par A. Les deux cercles se recoupent en I, en haut à droite. K, image de I par le quart de tour direct de centre A, est à gauche, sur (C') ; J, son image par le quart de tour indirect de centre A, est en bas, sur (C). Les segments [AI], [AK] et [AJ] sont en pointillés, et le segment [IK], tracé en rouge, porte un point d'interrogation.

Donner la longueur IK en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Construis O', l'image de O : c'est le centre de (C'), et son rayon vaut encore 6 cm. Que peux-tu dire du quadrilatère $AOIO'$?
2. $AOIO'$ a quatre côtés de 6 cm et un angle droit en A : c'est un carré. Sa diagonale $[AI]$ se calcule par Pythagore.
3. Le triangle AIK est rectangle isocèle en A, avec $AK = AI$.
   $IK^2 = AI^2 + AK^2$

CORRECTION

Le cercle image — (C') a pour centre O', l'image de O, et le même rayon : $AO' = AO = 6$ cm et $\widehat{OAO'} = 90°$.

Un carré caché — I est sur les deux cercles : $OI = 6$ cm et $O'I = 6$ cm. Le quadrilatère $AOIO'$ a quatre côtés égaux, c'est un losange, et il a un angle droit en A : c'est un carré.

La diagonale — Dans le triangle AOI rectangle en O :

$AI^2 = 6^2 + 6^2 = 72$

L'image de I — K est l'image de I : $AK = AI$ et $\widehat{IAK} = 90°$. Le triangle AIK est rectangle isocèle en A.

$IK^2 = AI^2 + AK^2 = 72 + 72 = 144$

Maths à la carte — Abdelkader Hammou

$IK = 12$ cm

Pas besoin de calculer $AI = 6\sqrt{2}$: son carré, 72, suffisait. De même, $IJ = 12$ cm. Comme $\widehat{KAI} + \widehat{IAJ} = 180°$ et $AK = AJ$, le point A est le milieu de $[KJ]$; et l'angle $\widehat{KIJ}$, fait de deux angles de $45°$, est droit : le triangle IJK est rectangle isocèle en I. Enfin, I et K sont tous deux sur (C') — K comme image de I, qui est sur (C) — et $O'I + O'K = 6 + 6 = 12 = IK$: le point O' est sur $[IK]$, qui est donc un diamètre de (C').

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(2) / sqrt(72)` → $6\sqrt{2}$ cm, c'est AI, la diagonale du carré $AOIO'$. La longueur demandée est IK : c'est l'hypoténuse du triangle AIK, rectangle isocèle en A.

`12*sqrt(2) / sqrt(288)` → $12\sqrt{2}$ cm, c'est KJ, qui vaut $2 \times AI$ puisque A est le milieu de $[KJ]$. On demande IK, un côté de l'angle droit du triangle IJK.

`144` → 144, c'est IK^2. Il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 10 · BASE

Même distance au centre

M' est l'image du point M par le quart de tour indirect de centre O, et $OM = 7$ cm.

Donner la distance OM'.

Donner la longueur OM' en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la définition : que dit-elle de la distance entre le centre et l'image ?
2. Le sens, direct ou indirect, change la position de M', mais pas sa distance au centre.

CORRECTION

La définition — Par le quart de tour indirect de centre O, l'image M' de M vérifie :

$OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = 90°$

$OM' = 7$ cm

Un quart de tour, direct ou indirect, garde la distance au centre : le point et son image sont sur un même cercle de centre O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7*sqrt(2) / sqrt(98)` → $7\sqrt{2}$ cm, c'est la distance MM' entre le point et son image. On demande la distance de l'image au centre O.

`14` → 14 cm, c'est la distance entre M et son symétrique par rapport à O. On demande OM', la distance au centre.

EXERCICE 11 · BASE

Le cadran de la montre

Sur le cadran d'une montre, l'aiguille des minutes pointe vers le 12. On la fait tourner d'un quart de tour **direct** autour du centre du cadran.

Vers quel nombre du cadran pointe-t-elle ensuite ?

Donner le nombre du cadran.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le sens direct, c'est le sens contraire des aiguilles d'une montre : l'aiguille « recule ».
2. Un tour complet fait 12 graduations ; combien en fait un quart de tour ?

CORRECTION

Le sens — Le sens direct est le sens contraire du mouvement des aiguilles : partant du 12, l'aiguille passe par le 11, puis le 10…

Un quart de tour — Un tour complet compte 12 graduations, donc un quart de tour en compte 3 : on recule de 3 graduations.

$$12 - 3 = 9$$

$$\text{vers le } 9$$

Pour ne plus confondre les deux sens : direct, c'est à contre-sens de la montre ($12 \to 9$) ; indirect, c'est dans le sens de la montre ($12 \to 3$).

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Le 3, c'est le quart de tour **indirect** : tu as tourné dans le sens des aiguilles. Le sens direct est le sens contraire.

6 → Le 6, c'est un demi-tour : 6 graduations. Un quart de tour n'en fait que 3.

EXERCICE 12 · BASE

Deux images, deux sens

M est un point distinct de O. M' est son image par le quart de tour direct de centre O, et N son image par le quart de tour indirect de centre O.

Calculer l'angle $\widehat{M'ON}$.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 180

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Combien vaut l'angle $\widehat{MOM'}$? Et l'angle $\widehat{MON}$?
2. Les deux quarts de tour partent de $[OM)$, l'un d'un côté, l'autre de l'autre côté : les deux angles s'ajoutent.

CORRECTION

Les deux angles droits — $\widehat{MOM'} = 90°$ d'un côté de $[OM)$, et $\widehat{MON} = 90°$ de l'autre côté.

On ajoute —

$\widehat{M'ON} = 90° + 90°$

$\widehat{M'ON} = 180°$

Les points M', O et N sont alignés, et $OM' = ON$: N est le symétrique de M' par rapport à O. Les deux sens donnent deux points différents : c'est pour cela qu'on précise toujours le sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`90` → $90°$, c'est l'angle entre $[OM)$ et l'une des images. Mais M' et N sont de part et d'autre de $[OM)$: les deux angles droits s'ajoutent.

`0` → M' et N ne sont pas confondus : les deux sens donnent deux points différents, de part et d'autre de $[OM)$.

EXERCICE 13 · BASE

Le demi-tour, en deux fois

M' est l'image du point M par le quart de tour direct de centre O, et M'' est l'image de M' par ce même quart de tour.

Par quelle transformation, connue depuis le collège, passe-t-on directement de M à M'' ?

Nommer la transformation.

Réponse attendue : `demi-tour` — aussi acceptées : le demi-tour · un demi-tour · c'est un demi-tour · demi tour · un demi tour · demi-tour de centre O · le demi-tour de centre O · symétrie centrale · la symétrie centrale · une symétrie centrale · symétrie centrale de centre O · la symétrie centrale de centre O · symétrie de centre O · la symétrie de centre O

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Additionne les deux angles $\widehat{MOM'}$ et $\widehat{M'OM''}$, puis compare OM'' à OM.
2. Un angle de $180°$ en O : les points M, O et M'' sont alignés, et O est à égale distance des deux.

CORRECTION

Deux angles droits — $\widehat{MOM'} = 90°$ et $\widehat{M'OM''} = 90°$, dans le même sens : $\widehat{MOM''} = 180°$, et les points M, O, M'' sont alignés.

Les distances — $OM'' = OM' = OM$: O est le milieu de $[MM'']$.

$OM'' = OM$ et M, O, M'' alignés

M'' est donc le symétrique de M par rapport à O.

le demi-tour de centre O

Deux quarts de tour de même centre et de même sens font un demi-tour : la symétrie centrale de centre O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`quart de tour indirect / le quart de tour indirect / un quart de tour indirect / quart de tour indirect de centre O` → Le quart de tour indirect ne tourne que d'un angle droit, dans l'autre sens. Ici, on a tourné **deux** fois d'un angle droit dans le même sens : $180°$ en tout.

`symétrie axiale / la symétrie axiale / une symétrie axiale` → Une symétrie axiale retourne la figure. Ici, M'' est obtenu en tournant de $180°$ autour de O : O est le milieu de $[MM'']$.

`translation / une translation` → Une translation ne laisse aucun point en place. Ici, O ne bouge pas, et il est le milieu de $[MM'']$.

EXERCICE 14 · PRATIQUE

Deux quarts de tour, une distance

$OM = 5$ cm. M_1 est l'image de M par le quart de tour direct de centre O, et M_2 est l'image de M_1 par ce même quart de tour.

Calculer la distance MM_2.

Donner la longueur MM_2 en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule l'angle $\widehat{MOM_2}$: deux angles droits, dans le même sens.
2. Les points M, O et M_2 sont alignés, et O est à la même distance de chacun d'eux.

CORRECTION

L'angle — $\widehat{MOM_1} + \widehat{M_1OM_2} = 90° + 90° = 180°$: M, O et M_2 sont alignés, O entre les deux.

Les distances — $OM_2 = OM_1 = OM = 5$ cm : O est le milieu de $[MM_2]$.

$$MM_2 = OM + OM_2 = 5 + 5$$

$$MM_2 = 10 \text{ cm}$$

Deux quarts de tour directs font un demi-tour : M_2 est le symétrique de M par rapport à O, et MM_2 vaut deux fois la distance au centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5*sqrt(2) / sqrt(50)` → $5\sqrt{2}$ cm, c'est MM_1, après **un** quart de tour. Après le second, M_2 est de l'autre côté de O, aligné avec M.

`5` → 5 cm, c'est OM_2, la distance au centre. MM_2 va de M à M_2 en passant par O.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Trois quarts de tour

On fait subir au point M trois quarts de tour directs successifs de centre O : M_1 est l'image de M, M_2 celle de M_1, et M_3 celle de M_2.

M_3 est aussi l'image de M par un seul quart de tour de centre O. Ce quart de tour est-il direct ou indirect ?

Répondre par un mot : direct, ou indirect.

Réponse attendue : `indirect` — aussi acceptées : le quart de tour indirect · quart de tour indirect · un quart de tour indirect · c'est le quart de tour indirect · le quart de tour indirect de centre O · c'est indirect · il est indirect · sens indirect · le sens indirect · dans le sens indirect · sens des aiguilles d'une montre ·

dans le sens des aiguilles d'une montre · le sens des aiguilles d'une montre · comme les aiguilles d'une montre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Combien de quarts de tour directs faut-il pour faire un tour complet et revenir sur M ?
2. Il manque un seul quart de tour direct pour aller de M_3 à M. Pour aller de M à M_3, on fait donc le chemin inverse.

CORRECTION

Le tour complet — Quatre quarts de tour directs font un tour complet : l'image de M_3 par le quart de tour direct de centre O est M lui-même.

Le sens — Un quart de tour direct envoie M_3 sur M. Pour aller de M à M_3, on tourne donc d'un quart de tour dans l'autre sens.

M_3 image de M par le quart de tour indirect de centre O

Trois quarts de tour dans un sens valent un quart de tour dans l'autre sens. Vérifie sur un cadran : partant du 12, trois quarts de tour directs mènent au 3, comme un seul quart de tour indirect.

PIÈGES ANTICIPÉS

`le quart de tour direct / quart de tour direct / un quart de tour direct / c'est le quart de tour direct / le quart de tour direct de centre O / c'est direct / il est direct / sens direct / le sens direct / dans le sens direct / sens contraire des aiguilles d'une montre / dans le sens contraire des aiguilles d'une montre / le sens contraire des aiguilles d'une montre / contraire des aiguilles d'une montre / direct` → Trois quarts de tour directs, c'est presque un tour complet : il ne manque qu'un quart de tour **direct** pour revenir de M_3 à M. De M à M_3, on tourne donc dans l'autre sens.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Le centre, à partir de la distance

A' est l'image du point A par un quart de tour de centre O, et $AA' = 8$ cm.

Calculer la distance OA.

Donner la valeur exacte de OA en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `4*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(32)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est la nature du triangle OAA' ? Lequel de ses côtés mesure 8 cm ?
2. Le triangle OAA' est rectangle isocèle en O, d'hypoténuse $[AA']$. Pose $OA' = OA$ et écris Pythagore.
   $OA^2 + OA'^2 = AA'^2$

CORRECTION

Le triangle caché — $OA' = OA$ et $\widehat{AOA'} = 90°$: le triangle OAA' est rectangle isocèle en O, d'hypoténuse $[AA']$.

Pythagore — Comme $OA' = OA$:

$2\,OA^2 = AA'^2 = 64 \quad \text{donc} \quad OA^2 = 32$

Et $32 = 16 \times 2$:
$OA = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm

C'est le chemin inverse de « distance au centre fois $\sqrt{2}$ » : ici, la distance au centre vaut AA' divisée par $\sqrt{2}$, soit $\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 cm, c'est la moitié de AA' : ce serait la bonne réponse pour un **demi-tour**, dont le centre est le milieu de $[AA']$. Ici, O n'est pas sur $[AA']$: c'est le sommet de l'angle droit.

`32` → 32, c'est OA^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`8*sqrt(2) / sqrt(128)` → Tu as multiplié par $\sqrt{2}$ au lieu de diviser. $[AA']$ est l'hypoténuse, le plus long côté du triangle : OA est plus court que 8 cm.

`5.66 / 5.7 / 5.657` → C'est une valeur approchée de OA, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 17 · RAISONNEMENT

Le triangle des deux images

$OM = 3$ cm. M' est l'image de M par le quart de tour direct de centre O, et N son image par le quart de tour indirect de centre O.

Calculer l'aire du triangle $MM'N$.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points M', O et N sont alignés : pourquoi ? Quelle est la longueur $M'N$?
2. La droite (OM) est perpendiculaire à $(M'N)$ en O : $[OM]$ est une hauteur du triangle.

CORRECTION

La base — $\widehat{M'OM} + \widehat{MON} = 90° + 90° = 180°$: M', O, N sont alignés, et O est le milieu de $[M'N]$.
$M'N = 3 + 3 = 6$ cm

La hauteur — (OM) est perpendiculaire à $(M'N)$ en O : la hauteur issue de M mesure $OM = 3$ cm.

L'aire —
$\text{aire de } MM'N = \frac{6 \times 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$

Le triangle $MM'N$ est formé de deux triangles rectangles isocèles, OMM' et OMN, chacun d'aire 4,5 cm². Il est lui-même rectangle isocèle en M.

PIÈGES ANTICIPÉS

`18` → 18, c'est 6×3. L'aire d'un triangle est la **moitié** du produit de la base par la hauteur.

`4.5 / 9/2` → $4{,}5$ cm², c'est l'aire du seul triangle OMM'. Le triangle $MM'N$ en contient deux : OMM' et OMN.

EXERCICE 18 · RAISONNEMENT

Quatre images, un carré

$OM = 2$ cm. M_1 est l'image de M par le quart de tour direct de centre O, M_2 celle de M_1, et M_3 celle de M_2, par ce même quart de tour.

Calculer le périmètre du quadrilatère $MM_1M_2M_3$.

Donner la valeur exacte du périmètre en cm, sans l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `8*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(128)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque côté, par exemple $[MM_1]$, relie un point à son image : calcule sa longueur dans le triangle OMM_1.
2. Les quatre côtés relient chacun un point à son image par le même quart de tour : ils ont tous la même longueur.

CORRECTION

Un côté — Le triangle OMM_1 est rectangle isocèle en O :

$$MM_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \quad \text{donc} \quad MM_1 = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

Les quatre côtés — De même, $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M]$ relient chacun un point à son image, à 2 cm du centre : ils mesurent tous $2\sqrt{2}$ cm.

Le périmètre —

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$MM_1M_2M_3$ est un carré de centre O : le quart de tour de centre O envoie chaque sommet sur le suivant. C'est ainsi qu'on construit un carré connaissant son centre et un sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → 8 cm, c'est $4 \times OM$. Mais le côté du carré n'est pas OM : c'est MM_1, l'hypoténuse du triangle OMM_1.

`16` → 16 cm suppose des côtés de 4 cm. Or 4 cm, c'est la diagonale MM_2, pas un côté.

`2*sqrt(2) / sqrt(8)` → $2\sqrt{2}$ cm, c'est un seul côté. Le périmètre en compte quatre.

`11.31 / 11.3 / 11.314` → C'est une valeur approchée du périmètre, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 19 · RAISONNEMENT

Deux centres, un carré

A et B sont deux points distincts. B' est l'image de B par le quart de tour direct de centre A, et A' est l'image de A par le quart de tour indirect de centre B.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABA'B'$?

Donner sa nature la plus précise, en un mot.

Réponse attendue : `carré` — aussi acceptées : un carré · c'est un carré · ABA'B' est un carré · le quadrilatère est un carré · le quadrilatère ABA'B' est un carré

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place A à gauche et B à droite. Où est B' ? Où est A' ? Sont-ils du même côté de (AB) ?
2. Compare AB' et BA' à AB, et regarde les angles en A et en B.

CORRECTION

En A — $AB' = AB$ et $\widehat{BAB'} = 90°$, en tournant dans le sens direct : avec B à droite de A, B' est au-dessus de A.

En B — $BA' = BA$ et $\widehat{ABA'} = 90°$, en tournant dans le sens indirect : avec A à gauche de B, A' est au-dessus de B.

La nature — $[AB']$ et $[BA']$ sont perpendiculaires à (AB), du même côté, et de même longueur AB : $ABA'B'$ est un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux.

$ABA'B'$ est un carré

Deux quarts de tour de sens contraires, autour des deux extrémités d'un segment, dressent deux côtés du même côté : on obtient le carré construit sur $[AB]$. Avec le même sens, A' et B' seraient de part et d'autre de (AB).

PIÈGES ANTICIPÉS

`rectangle / un rectangle / c'est un rectangle` → C'est bien un rectangle, mais regarde deux côtés consécutifs : $AB' = AB$. Un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux porte un nom plus précis.

`losange / un losange / c'est un losange` → Ses quatre côtés sont bien égaux, mais celui-ci a aussi des angles droits, en A et en B. Quel losange a des angles droits ?

`parallélogramme / un parallélogramme` → C'est bien un parallélogramme, mais on peut être plus précis : il a un angle droit en A, et $AB' = AB$.

EXERCICE 20 · DEFI

Deux centres à la suite

$OM = 3$ cm. M' est l'image de M par le quart de tour direct de centre O, puis M'' est l'image de M' par le quart de tour direct de centre M.

Calculer la distance $M'M''$.

Donner la longueur $M'M''$ en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord MM'^2 dans le triangle OMM', rectangle isocèle en O.
2. M'' est l'image de M' par un quart de tour de centre M : le triangle $MM'M''$ est rectangle isocèle en M.

$$M'M''^2 = MM'^2 + MM''^2$$

CORRECTION

Premier quart de tour — Le triangle OMM' est rectangle isocèle en O :

$MM'^2 = 3^2 + 3^2 = 18$

Second quart de tour — $MM'' = MM'$ et $\widehat{M'MM''} = 90°$: le triangle $MM'M''$ est rectangle isocèle en M.

$M'M''^2 = MM'^2 + MM''^2 = 18 + 18 = 36$

$M'M'' = 6$ cm

Pas besoin de calculer $MM' = 3\sqrt{2}$: son carré suffisait. Et $6 = 2 \times 3$: M'' est le symétrique de M' par rapport à O, car $\widehat{OMM'} = 45°$ et $\widehat{OMM''} = 45°$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(2) / sqrt(18)` → $3\sqrt{2}$ cm, c'est MM' — et aussi MM''. La longueur demandée, $M'M''$, est l'hypoténuse du triangle $MM'M''$.

`36` → 36, c'est $M'M''^2$. Il reste à prendre la racine carrée.

`3` → 3 cm, c'est OM. $M'M''$ est bien plus longue : c'est l'hypoténuse d'un triangle dont les côtés de l'angle droit mesurent déjà $3\sqrt{2}$ cm.

EXERCICE 21 · BASE

Le centre caché

ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

C est l'image de B par un quart de tour dont le centre est l'un des sommets du triangle. Quel est ce sommet ?

Nommer le sommet.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · centre A · le centre A · de centre A · c'est A · le centre est A · le sommet A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre d'un quart de tour est à la même distance d'un point et de son image, et il est le sommet de l'angle droit.
2. Quel sommet du triangle est à égale distance de B et de C, avec un angle droit ?

CORRECTION

Ce que dit le triangle — ABC est rectangle isocèle en A :

$AC = AB \quad$ et $\quad \widehat{BAC} = 90°$

Le centre — C'est exactement la définition : C est l'image de B par un quart de tour de centre A.

centre : A

Le centre du quart de tour caché dans un triangle rectangle isocèle est **toujours** le sommet de l'angle droit. Le sens se lit ensuite sur la figure.

PIÈGES ANTICIPÉS

`B / le point B / le sommet B` → B ne peut pas être le centre : il bouge, puisque son image est C. Le centre est le seul point qui reste en place.

`C / le point C / le sommet C` → C est l'image, pas le centre. Le centre est le sommet de l'angle droit, à égale distance de B et de C.

EXERCICE 22 · BASE

Le sens, dans un triangle nommé

ABC est un triangle rectangle isocèle en A, et ses sommets A, B, C se suivent dans le sens direct, contraire des aiguilles d'une montre.

B est l'image de C par un quart de tour de centre A. Ce quart de tour est-il direct ou indirect ?

Répondre par un mot : direct, ou indirect.

Réponse attendue : `indirect` — aussi acceptées : le quart de tour indirect · quart de tour indirect · un quart de tour indirect · c'est le quart de tour indirect · le quart de tour indirect de centre A · c'est indirect · il est indirect · sens indirect · le sens indirect · dans le sens indirect · sens des aiguilles d'une montre · dans le sens des aiguilles d'une montre · le sens des aiguilles d'une montre · comme les aiguilles d'une montre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place A en bas à gauche et B à sa droite. Où doit être C pour que A, B, C se suivent dans le sens contraire des aiguilles ?
2. C est au-dessus de A. Pour aller de C, en haut, à B, à droite, dans quel sens tournes-tu autour de A ?

CORRECTION

Le quart de tour — $AB = AC$ et $\widehat{CAB} = 90°$: B est l'image de C par un quart de tour de centre A.

Le sens — Avec A, B, C dans le sens direct, C est au-dessus de A quand B est à sa droite. De C vers B, on tourne comme les aiguilles d'une montre.

quart de tour indirect de centre A

Retiens : si A, B, C se suivent dans le sens direct, C est l'image de B par le quart de tour **direct** de centre A, et B est l'image de C par le quart de tour **indirect**.

PIÈGES ANTICIPÉS

`le quart de tour direct / quart de tour direct / un quart de tour direct / c'est le quart de tour direct / le quart de tour direct de centre A / c'est direct / il est direct / sens direct / le sens direct / dans le sens direct / sens contraire des aiguilles d'une montre / dans le sens contraire des aiguilles d'une montre / le sens contraire des aiguilles d'une montre / contraire des aiguilles d'une montre / direct` → Direct, c'est le sens qui mène de B vers C. Ici, on part de C pour arriver sur B : on tourne dans l'autre sens.

EXERCICE 23 · BASE

L'aire du triangle caché

M' est l'image du point M par le quart de tour indirect de centre O, et $OM = 5$ cm.

Calculer l'aire du triangle OMM'.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : `12.5` — aussi acceptées : 25/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est la nature du triangle OMM' ? Où est son angle droit ?
2. Dans un triangle rectangle, l'aire est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit.

CORRECTION

La nature — $OM' = OM = 5$ cm et $\widehat{MOM'} = 90°$: le triangle OMM' est rectangle isocèle en O.

L'aire —

$$\text{aire} = \frac{OM \times OM'}{2} = \frac{5 \times 5}{2}$$

$$\text{aire de } OMM' = 12{,}5 \text{ cm}^2$$

Le sens ne change rien à l'aire : avec le quart de tour direct, on obtiendrait le triangle symétrique, de même aire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`25` → 25, c'est 5×5, l'aire du carré construit sur $[OM]$. Le triangle n'en est que la moitié.

`5*sqrt(2) / sqrt(50)` → $5\sqrt{2}$, c'est la longueur MM', l'hypoténuse. On demande une aire : la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit.

EXERCICE 24 · BASE

Dans le carré : l'image de B

$ABCD$ est un carré dont les sommets A, B, C, D se suivent dans le sens direct.

Quelle est l'image de B par le quart de tour direct de centre A ?

Nommer le sommet.

Réponse attendue : `D` — aussi acceptées : le point D · c'est le point D · point D · le sommet D · c'est le sommet D · sommet D

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle ABD : que sais-tu de AB et AD, et de l'angle $\widehat{BAD}$?
2. Place A en bas à gauche et B à sa droite. En tournant de B dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour de A, sur quel sommet arrives-tu ?

CORRECTION

Le triangle ABD — $AD = AB$ et $\widehat{BAD} = 90°$: ABD est rectangle isocèle en A.

Le sens — Les sommets se suivent dans le sens direct : avec A en bas à gauche et B en bas à droite, D est en haut à gauche. De B vers D autour de A, on tourne dans le sens direct.

$$B \longmapsto D$$

Un carré cache un quart de tour en chacun de ses sommets. Dans l'autre sens, le quart de tour indirect de centre A envoie D sur B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / le sommet C` → C n'est pas à la même distance de A que B : $[AC]$ est une diagonale, plus longue que le côté $[AB]$.

EXERCICE 25 · PRATIQUE

Autour du centre du carré

$ABCD$ est un carré de centre O, dont les sommets A, B, C, D se suivent dans le sens direct.

Quelle est l'image de A par le quart de tour direct de centre O ?

Nommer le sommet.

Réponse attendue : `B` — aussi acceptées : le point B · le sommet B · c'est B · c'est le sommet B · point B · sommet B · c'est le point B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales d'un carré ont la même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Que dis-tu du triangle OAB ?
2. Les triangles OAB, OBC, OCD et ODA sont rectangles isocèles en O. En tournant autour de O dans le sens direct, quel sommet vient après A ?

CORRECTION

Les diagonales — Les diagonales du carré sont égales, perpendiculaires, et O est leur milieu : $OA = OB = OC = OD$, et deux demi-diagonales voisines font un angle droit.

Le sens — Les sommets se suivent dans le sens direct : en tournant d'un quart de tour direct autour de O, on passe de A au sommet suivant.

$A \longmapsto B$

Le quart de tour direct de centre O fait « avancer » chaque sommet d'un cran : $A \mapsto B$, $B \mapsto C$, $C \mapsto D$, $D \mapsto A$. Le carré tout entier a pour image lui-même.

PIÈGES ANTICIPÉS

`D / le point D / le sommet D` → D, c'est l'image de A par le quart de tour **indirect** de centre O : tu as tourné dans le sens des aiguilles d'une montre.

`C / le point C / le sommet C` → C, c'est l'image de A par le **demi-tour** de centre O, milieu de $[AC]$. Un quart de tour ne fait que la moitié du chemin.

EXERCICE 26 · PRATIQUE

L'image d'un côté

$ABCD$ est un carré de centre O, dont les sommets se suivent dans le sens direct.

Quelle est l'image du segment $[AB]$ par le quart de tour direct de centre O ?

Écrire le segment avec ses crochets, par exemple $[MN]$.

Réponse attendue : [BC] — aussi acceptées : [CB] · BC · CB · le segment [BC] · le segment [CB] · segment [BC] · segment [CB] · le côté [BC] · le côté [CB]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image d'un segment est le segment qui joint les images de ses extrémités. Cherche l'image de A, puis celle de B.
2. Le quart de tour direct de centre O fait avancer chaque sommet d'un cran dans le sens direct.

CORRECTION

Les extrémités — OAB, OBC, OCD, ODA sont rectangles isocèles en O, et les sommets se suivent dans le sens direct :

$A \longmapsto B \quad \text{et} \quad B \longmapsto C$

Le segment — L'image de $[AB]$ est le segment qui joint les images de ses extrémités.

$[AB] \longmapsto [BC]$

Comme prévu : $BC = AB$, et $(BC) \perp (AB)$. Un segment et son image ont toujours la même longueur et des supports perpendiculaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

[DA] / [AD] / DA / AD → $[DA]$ est l'image de $[AB]$ par le quart de tour **indirect** de centre O : tu as fait reculer les sommets d'un cran au lieu de les faire avancer.

[CD] / [DC] / CD / DC → $[CD]$ est l'image de $[AB]$ par le **demi-tour** de centre O : $[CD]$ est parallèle à $[AB]$. L'image par un quart de tour lui est perpendiculaire.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

L'aire, sans la racine

B est l'image du point A par un quart de tour de centre O, et $AB = 6$ cm.

Calculer l'aire du triangle OAB.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle OAB est rectangle isocèle en O, d'hypoténuse $[AB]$. Écris Pythagore avec $OB = OA$.
   $OA^2 + OB^2 = AB^2$
2. Tu n'as pas besoin de OA lui-même : l'aire vaut $\frac{OA \times OB}{2}$, c'est-à-dire $\frac{OA^2}{2}$.

CORRECTION

Le triangle caché — $OB = OA$ et $\widehat{AOB} = 90°$: OAB est rectangle isocèle en O, d'hypoténuse $[AB]$.

Pythagore —

$2\,OA^2 = AB^2 = 36 \quad \text{donc} \quad OA^2 = 18$

L'aire —

$\text{aire de } OAB = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}^2$

Garder OA^2 sans extraire la racine évite de calculer avec $\sqrt{18}$. Un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse c a pour aire $\frac{c^2}{4}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`18` → 18 : soit tu as oublié de diviser $OA \times OB = 18$ par 2, soit tu as pris $OA = 6$ cm. Or 6 cm est l'hypoténuse AB, pas un côté de l'angle droit.

`36` → 36, c'est AB^2. Le triangle OAB a pour aire le quart de ce nombre : $AB^2 = 2\,OA^2$, et l'aire vaut $\frac{OA^2}{2}$.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

Vrai ou faux : une seule égalité

O, A et B sont trois points tels que $OA = OB$.

Vrai ou faux : « B est forcément l'image de A par un quart de tour de centre O » ?

Répondre par vrai, ou faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · non · faux, pas forcément · pas forcément · pas toujours · faux, pas toujours

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La définition demande deux conditions. Lesquelles ? L'égalité $OA = OB$ en donne-t-elle une seule, ou les deux ?
2. Pense à un triangle équilatéral OAB : $OA = OB$, mais combien vaut l'angle $\widehat{AOB}$?

CORRECTION

La définition — B est l'image de A par un quart de tour de centre O si et seulement si :

$$OB = OA \quad \text{et} \quad \widehat{AOB} = 90°$$

Un contre-exemple — Dans un triangle équilatéral OAB, on a bien $OA = OB$, mais $\widehat{AOB} = 60°$: B n'est l'image de A par aucun quart de tour de centre O.

faux

$OA = OB$ dit seulement que B est sur le cercle de centre O passant par A. Il faut **aussi** l'angle droit : le triangle OAB doit être rectangle isocèle en O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / c'est vrai / oui` → Il manque une condition : l'angle $\widehat{AOB}$ doit être droit. Dans un triangle équilatéral OAB, $OA = OB$ mais l'angle en O vaut $60°$.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

Les deux centres possibles

A et B sont deux points tels que $AB = 4$ cm. Il existe exactement deux points O_1 et O_2 tels que B soit l'image de A par un quart de tour de centre O_1, et aussi par un quart de tour de centre O_2.

Calculer la distance O_1O_2.

Donner la longueur O_1O_2 en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle O_1AB est rectangle isocèle en O_1 : O_1 est sur la médiatrice de $[AB]$. Même chose pour O_2.
2. Si I est le milieu de $[AB]$, le triangle O_1IA est lui aussi rectangle isocèle, en I. Combien vaut IO_1 ?

CORRECTION

Où sont les centres — Chacun des triangles O_1AB et O_2AB est rectangle isocèle en son sommet O_1 ou O_2 : ces deux points sont sur la médiatrice de $[AB]$, de part et d'autre de (AB).

La distance au milieu — Soit I le milieu de $[AB]$. Dans le triangle O_1AB, isocèle en O_1, la médiane $[O_1I]$ est aussi hauteur ; l'angle $\widehat{O_1AI}$ vaut $45°$, donc le triangle O_1IA est rectangle isocèle en I.

$IO_1 = IA = 2$ cm

La distance cherchée — De même, $IO_2 = 2$ cm, de l'autre côté de (AB).

$O_1O_2 = 2 + 2 = 4$ cm

AO_1BO_2 est un carré de diagonale $[AB]$: ses deux diagonales ont la même longueur. Autour de l'un des centres, on tourne dans le sens direct ; autour de l'autre, dans le sens indirect.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 cm, c'est la distance de O_1 à la droite (AB). O_2 est de l'autre côté : il faut doubler.

`2*sqrt(2) / sqrt(8)` → $2\sqrt{2}$ cm, c'est O_1A, le côté du carré AO_1BO_2. On demande sa seconde diagonale, O_1O_2.

EXERCICE 30 · DEFI

Une image hors du carré

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm, dont les sommets se suivent dans le sens direct. E est l'image de A par le quart de tour direct de centre B.

Calculer la distance DE.

Donner la valeur exacte de DE en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `6*sqrt(5)` — aussi acceptées : sqrt(180)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Situe E d'abord. Autour de B, le quart de tour direct envoie déjà C sur A. Que fait-il deux fois de suite ?
2. E est le symétrique de C par rapport à B : il est sur la droite (BC), avec $CE = 12$ cm. Regarde le triangle DCE.

   $DE^2 = DC^2 + CE^2$

CORRECTION

Où est E — Autour de B, le quart de tour direct envoie C sur A, puis A sur E : deux quarts de tour directs font un demi-tour. E est le symétrique de C par rapport à B.

$CE = 2 \times BC = 12 \text{ cm}$

Pythagore — Le triangle DCE est rectangle en C :

$DE^2 = 6^2 + 12^2 = 180$

Comme $180 = 36 \times 5$:

$DE = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ cm}$

Le réflexe : situer l'image avant de calculer. Ici, deux quarts de tour de même centre ont fait un demi-tour, et E s'est placé sur la droite (BC), sous B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → 6 cm, c'est DC : tu as tourné dans le sens indirect, qui envoie A sur C. Le quart de tour direct de centre B envoie C sur A, et A plus loin encore, sous B.

`6*sqrt(2) / sqrt(72)` → $6\sqrt{2}$ cm, c'est AE, la distance entre A et son image — ou la diagonale $[BD]$. On demande DE : calcule-la dans le triangle DCE, rectangle en C.

`180` → 180, c'est DE^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`13.42 / 13.4 / 13.416` → C'est une valeur approchée de DE, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 31 · RAISONNEMENT

Un triangle qui déborde

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm, dont les sommets se suivent dans le sens direct. E est l'image de C par le quart de tour direct de centre D.

Calculer l'aire du triangle BCE.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Où est E ? Autour de D, le quart de tour direct envoie A sur C. Que donne-t-il pour C ?
2. E est sur la droite (AD), de l'autre côté de D. Prends $[BC]$ pour base : quelle est la distance de E à la droite (BC) ?

CORRECTION

Où est E — Autour de D, le quart de tour direct envoie A sur C, puis C sur E : E est le symétrique de A par rapport à D, sur la droite (AD).

La hauteur — Les droites (AD) et (BC) sont parallèles, distantes de $AB = 6$ cm. Comme E est sur (AD), la hauteur du triangle issue de E mesure 6 cm.

L'aire —

$\text{aire de } BCE = \frac{BC \times 6}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

Le triangle BCE sort du carré, mais son aire se lit avec la base $[BC]$ et la distance entre les deux côtés parallèles du carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`36` → 36, c'est 6×6, base fois hauteur. L'aire du triangle en est la moitié.

`9` → 9 cm², c'est le quart du carré. La hauteur issue de E n'est pas 3 cm : E est sur la droite (AD), à 6 cm de (BC).

EXERCICE 32 · BASE

La longueur ne change pas

$[AB]$ est un segment de longueur $7{,}5$ cm, et $[A'B']$ est son image par le quart de tour direct de centre O.

Donner la longueur $A'B'$.

Donner la longueur $A'B'$ en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : `7.5` — aussi acceptées : 15/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un quart de tour déforme-t-il les figures ?
2. Relis la propriété : l'image d'un segment est un segment qui lui est isométrique.

CORRECTION

La propriété — Un quart de tour conserve les longueurs : un segment et son image sont isométriques.

$$A'B' = AB$$

$$A'B' = 7{,}5 \text{ cm}$$

Peu importe où se trouve le centre O : le quart de tour déplace le segment sans changer sa longueur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7.5*sqrt(2)` / `15*sqrt(2)/2` → Multiplier par $\sqrt{2}$ sert à calculer la distance entre un point et son image, comme AA'. Ici, on compare un segment et son image : ils ont la même longueur.

`15` → 15 cm, c'est le double. Un quart de tour ne change pas les longueurs : $A'B' = AB$.

EXERCICE 33 · BASE

L'image du milieu

I est le milieu du segment $[AB]$, et $AB = 10$ cm. Un quart de tour transforme A, B et I en A', B' et I'.

Calculer la longueur $A'I'$.

Donner la longueur $A'I'$ en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Où se trouve I' par rapport au segment $[A'B']$?
2. L'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$, et $A'B' = AB$.

CORRECTION

Le segment image — Les longueurs sont conservées :

$$A'B' = AB = 10 \text{ cm}$$

Le milieu — L'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$:

$$A'I' = \frac{A'B'}{2}$$

$$A'I' = 5 \text{ cm}$$

On pouvait aller plus vite : $[A'I']$ est l'image de $[AI]$, donc $A'I' = AI = 5$ cm. Le quart de tour conserve les longueurs **et** les milieux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 cm, c'est $A'B'$, le segment entier. I' en est le milieu.

`5*sqrt(2) / sqrt(50)` → $5\sqrt{2}$ cm ressemble à la distance entre un point et son image. Mais $[A'I']$ est l'image du segment $[AI]$: il a la même longueur que lui.

EXERCICE 34 · BASE **Une droite et son image**

D est une droite, et D' est son image par le quart de tour indirect de centre O.

Les droites D et D' sont-elles parallèles ou perpendiculaires ?

Répondre par un mot : parallèles, ou perpendiculaires.

Réponse attendue : `perpendiculaires` — aussi acceptées : perpendiculaire · elles sont perpendiculaires · sont perpendiculaires · perpendiculaires entre elles · D et D' sont perpendiculaires · D est perpendiculaire à D'

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends deux points A et B de D, et leurs images A' et B'. Que dit le cours des droites (AB) et $(A'B')$?
2. Le sens du quart de tour, direct ou indirect, change la position de D', mais pas l'angle qu'elle fait avec D.

CORRECTION

La propriété — L'image d'une droite par un quart de tour est une droite qui lui est perpendiculaire, quel que soit le sens.

$$D' \perp D$$

Cette propriété permet de construire D' très vite : l'image d'un seul point de D suffit, puis on trace la perpendiculaire à D qui passe par cette image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallèles / parallèle / elles sont parallèles / D et D' sont parallèles` → Une droite et son image sont parallèles par une translation ou un demi-tour. Le quart de tour, lui, fait tourner la droite d'un angle droit.

`confondues / elles sont confondues` → Une droite n'est jamais sa propre image par un quart de tour : son image lui est perpendiculaire.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

Une droite qui passe par le centre

D est une droite qui passe par le point O, et D' est son image par le quart de tour direct de centre O.

Combien de points communs ont les droites D et D' ?

Donner le nombre de points communs.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point O est sur D. Quelle est son image ?
2. D' passe donc par O, et elle est perpendiculaire à D.

CORRECTION

Le centre — O est sur D, et son image est O lui-même : O est aussi sur D'.

La position — D' est perpendiculaire à D : deux droites perpendiculaires se coupent en un seul point.

$$\text{un seul point commun : } O$$

Une droite qui passe par le centre a pour image la perpendiculaire en O. Si D ne passe pas par O, D et D' se coupent encore en un seul point, mais ailleurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → D et D' ne sont pas parallèles : l'image d'une droite lui est perpendiculaire, et deux droites perpendiculaires se coupent.

`2` → Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

EXERCICE 36 · PRATIQUE

La distance du centre à l'image

D est une droite qui ne passe pas par O, et la distance du point O à la droite D est 5 cm. D' est l'image de D par le quart de tour direct de centre O.

Donner la distance du point O à la droite D'.

Donner la distance en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note K le projeté orthogonal de O sur D, et K' son image. Combien vaut OK' ?
2. L'angle droit en K, entre (OK) et D, a pour image un angle droit en K', entre (OK') et D'.

CORRECTION

Le projeté — Soit K le projeté orthogonal de O sur D : $OK = 5$ cm, et $(OK) \perp D$.

Son image — K', image de K, est sur D', avec $OK' = OK$. Les angles sont conservés : $(OK') \perp D'$, donc K' est le projeté orthogonal de O sur D'.

$OK' = 5$ cm

Le centre est à la même distance d'une droite et de son image. Ainsi, l'image d'une tangente à un cercle de centre O est encore tangente à ce cercle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5*sqrt(2) / sqrt(50)` → $5\sqrt{2}$ cm, c'est la distance de O au point où D et D' se coupent. La distance de O à la droite D' se mesure perpendiculairement : jusqu'à K'.

`10` → Le quart de tour conserve les distances : O ne bouge pas, K devient K', et $OK' = OK$.

EXERCICE 37 · PRATIQUE

Trois points alignés

A, B et C sont trois points alignés dans cet ordre, avec $AB = 3$ cm et $BC = 5$ cm. Un quart de tour les transforme en A', B' et C'.

Calculer $A'C'$.

Donner la longueur $A'C'$ en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points A', B', C' sont-ils alignés ? Dans quel ordre ?
2. Le quart de tour conserve l'alignement et les longueurs : $A'B' = AB$ et $B'C' = BC$.

CORRECTION

L'alignement — Trois points alignés ont des images alignées. Comme B est sur $[AC]$, B' est sur $[A'C']$.

Les longueurs —

$A'C' = A'B' + B'C' = 3 + 5$

$A'C' = 8$ cm

Plus court encore : $[A'C']$ est l'image de $[AC]$, donc $A'C' = AC = 8$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → $5 - 3 = 2$: ce serait juste si A était entre B et C. Ici, B est entre A et C, et il le reste après le quart de tour.

`8*sqrt(2) / sqrt(128)` → $A'C'$ n'est pas la distance entre un point et son image : c'est l'image du segment $[AC]$, de même longueur que lui.

EXERCICE 38 · PRATIQUE

Deux droites parallèles

D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, et D_1', D_2' sont leurs images par le quart de tour direct de centre O.

Les droites D_1' et D_2' sont-elles parallèles ou perpendiculaires ?

Répondre par un mot : parallèles, ou perpendiculaires.

Réponse attendue : `parallèles` — aussi acceptées : parallèle · elles sont parallèles · sont parallèles · parallèles entre elles · les droites sont parallèles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que sais-tu de D'_1 par rapport à D_1, et de D'_2 par rapport à D_2 ?
2. D'_1 est perpendiculaire à D_1, et D'_2 à D_2, qui est parallèle à D_1. Deux droites perpendiculaires à une même droite…

CORRECTION

Chaque image —

$D'_1 \perp D_1 \quad \text{et} \quad D'_2 \perp D_2$

On compare — Comme $D_2 \parallel D_1$, la droite D'_2 est aussi perpendiculaire à D_1. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

$D'_1 \parallel D'_2$

Un quart de tour conserve le parallélisme : l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme, l'image d'un rectangle est un rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`perpendiculaires / perpendiculaire / elles sont perpendiculaires / sont perpendiculaires / perpendiculaires entre elles` → Chaque image est perpendiculaire à **sa** droite : $D'_1 \perp D_1$. Mais compare D'_1 et D'_2 entre elles : elles sont toutes deux perpendiculaires à D_1.

EXERCICE 39 · PRATIQUE

Les milieux de deux côtés

ABC est un triangle tel que $BC = 8$ cm. I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Le quart de tour direct de centre A transforme I en I' et J en J'.

Calculer $I'J'$.

Donner la longueur $I'J'$ en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle ABC, que dit le théorème de la droite des milieux sur le segment $[IJ]$?
2. $[I'J']$ est l'image de $[IJ]$ par le quart de tour : même longueur.

CORRECTION

Les milieux — Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$: par le théorème de la droite des milieux, $IJ = \frac{BC}{2}$.

$IJ = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$

Le quart de tour — $[I'J']$ est l'image de $[IJ]$, et les longueurs sont conservées.

$I'J' = IJ = 4 \text{ cm}$

De plus, I' et J' sont les milieux de $[AB']$ et $[AC']$: la droite des milieux du triangle ABC a pour image la droite des milieux du triangle $AB'C'$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → 8 cm, c'est BC, ou son image $B'C'$. $[I'J']$ joint deux milieux : sa longueur est la moitié.

`4*sqrt(2) / sqrt(32)` → $[I'J']$ n'est pas la distance entre un point et son image : c'est l'image du segment $[IJ]$, de même longueur que lui.

EXERCICE 40 · RAISONNEMENT

Le carré OKPK', à rebours

D est une droite qui ne passe pas par O, et D' est son image par le quart de tour direct de centre O. Les droites D et D' se coupent en P, et $OP = 8$ cm.

Calculer la distance du point O à la droite D.

Donner la valeur exacte de la distance en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `4*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(32)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note K le projeté orthogonal de O sur D, et K' son image. Quelle est la nature du quadrilatère $OKPK'$?
2. $OKPK'$ est un carré, de diagonale $[OP]$. Écris Pythagore dans le triangle OKP, avec $KP = OK$. $OK^2 + KP^2 = OP^2$

CORRECTION

Le carré — Avec K projeté orthogonal de O sur D et K' son image, $OKPK'$ est un carré : angles droits en K, en O et en K', et $OK' = OK$. Sa diagonale est $[OP]$.

Pythagore — Dans le triangle OKP, rectangle isocèle en K :

$$2\,OK^2 = OP^2 = 64 \quad \text{donc} \quad OK^2 = 32$$

$$OK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

C'est la règle de l'exercice « Du centre au point de rencontre », lue à l'envers : $OP = OK\sqrt{2}$, donc $OK = \frac{OP}{\sqrt{2}}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 cm, c'est la moitié de OP : la distance de O au centre du carré $OKPK'$. La distance de O à D, c'est un côté du carré, OK.

`8` → 8 cm, c'est OP, la diagonale du carré. La distance de O à D se mesure perpendiculairement à D : c'est le côté OK, plus court.

`32` → 32, c'est OK^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`5.66 / 5.7 / 5.657` → C'est une valeur approchée de la distance, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 41 · RAISONNEMENT

Le point N, de l'autre côté

$ABCD$ est un carré de côté 5 cm, dont les sommets se suivent dans le sens direct. M est le point du segment $[BC]$ tel que $BM = 2$ cm, et N est son image par le quart de tour direct de centre A.

Calculer la longueur CN.

Donner la longueur CN en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est l'image de B par ce quart de tour ? Et l'image de la droite (BC) ?
2. N est sur la droite (CD), avec $DN = BM$. Mais est-il entre C et D, ou au-delà de D ? Tourne le chemin « de B vers M ».

CORRECTION

L'image de B — $AD = AB$, $\widehat{BAD} = 90°$, et l'on tourne de B vers D dans le sens direct : l'image de B est D.

L'image de (BC) — Elle passe par D et elle est perpendiculaire à (BC) : c'est la droite (CD). Comme M est sur (BC), N est sur (CD), et $DN = BM = 2$ cm.

Le bon côté — Place A en bas à gauche. Le chemin de B à M monte vers C, « vers le haut » ; tourné d'un quart de tour direct, il part de D « vers la gauche », à l'opposé de C. N est au-delà de D.

$$CN = CD + DN = 5 + 2$$

$$CN = 7 \text{ cm}$$

Placer l'image du bon côté est la vraie difficulté. Contrôle : l'angle $\widehat{MAN}$ doit être droit. Avec N entre C et D, il serait aigu.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 cm suppose N entre C et D. Mais $[DN]$ est l'image de $[BM]$, tourné d'un quart de tour direct : de D, il part vers l'extérieur du carré, à l'opposé de C.

`2` → 2 cm, c'est DN, l'image de BM. On demande CN, qui contient aussi le côté $[CD]$.

`sqrt(29)` → $\sqrt{29}$ cm, c'est AM, et donc aussi AN. On demande CN, sur la droite (CD).

EXERCICE 42 · RAISONNEMENT

Deux quarts de tour pour une droite

D est une droite qui ne passe pas par O. D' est son image par le quart de tour direct de centre O, et D'' est l'image de D' par ce même quart de tour.

Les droites D'' et D sont-elles parallèles, perpendiculaires ou confondues ?

Répondre par un mot : parallèles, perpendiculaires, ou confondues.

Réponse attendue : `parallèles` — aussi acceptées : parallèle · elles sont parallèles · sont parallèles · parallèles entre elles · les droites sont parallèles · strictement parallèles · parallèles et distinctes · parallèles distinctes · parallèles mais distinctes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare d'abord D' et D, puis D'' et D'.
2. D et D'' sont toutes deux perpendiculaires à D'. Et deux quarts de tour directs de centre O, que font-ils ensemble ?

CORRECTION

Deux perpendiculaires —

$D' \perp D \quad \text{et} \quad D'' \perp D'$

Conclusion — Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Elles sont distinctes : deux quarts de tour directs font un demi-tour, donc D'' est la symétrique de D par rapport à O, qui n'est pas sur D.

$D'' \parallel D$

Deux quarts de tour de même sens font un demi-tour, et un demi-tour transforme une droite en une droite parallèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`perpendiculaires / perpendiculaire / elles sont perpendiculaires / sont perpendiculaires / perpendiculaires entre elles` → C'est D' qui est perpendiculaire à D. D'' est perpendiculaire à D' : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

`confondues / elles sont confondues / la même droite` → D'' est la symétrique de D par rapport à O. Comme O n'est pas sur D, elle ne peut pas être D elle-même.

EXERCICE 43 · DEFI

L'aire du triangle AMN

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. M est un point de la droite (BC) tel que $AM = 10$ cm. La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe la droite (CD) en N.

Calculer l'aire du triangle AMN.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : `50`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Comme dans l'exercice « Le point N, sur la droite (CD) », cherche le quart de tour de centre A qui envoie B sur D. Quelle est l'image de M ?
2. N est l'image de M : que valent AN et l'angle $\widehat{MAN}$?

CORRECTION

Le quart de tour — Le quart de tour de centre A qui envoie B sur D envoie la droite (BC) sur la droite (CD), et la droite (AM) sur la perpendiculaire à (AM) en A. L'image de M est sur ces deux droites : c'est N.

Le triangle — $AN = AM = 10$ cm et $\widehat{MAN} = 90°$: AMN est rectangle isocèle en A.

L'aire —

$\text{aire de } AMN = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ cm}^2$

Le côté du carré ne servait qu'à placer les points : l'aire ne dépend que de AM. On pourrait calculer $BM = 8$ cm par Pythagore — M est alors au-delà de C, ou de l'autre côté de B : l'aire est la même —, mais on n'en avait pas besoin.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100` → 100, c'est $AM \times AN$. L'aire du triangle rectangle en est la moitié.

`36` → 36 cm², c'est l'aire du carré $ABCD$. Le triangle AMN a pour côtés de l'angle droit $[AM]$ et $[AN]$, qui mesurent 10 cm.

EXERCICE 44 · BASE

Le rayon de l'image

(C) est le cercle de centre O et de rayon 3 cm, et A est un point du plan. (C') est l'image de (C) par le quart de tour direct de centre A.

Donner le rayon de (C').

Donner le rayon en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un quart de tour change-t-il les longueurs ?
2. Le rayon est la distance entre le centre et un point du cercle : l'image conserve cette distance.

CORRECTION

La propriété — L'image d'un cercle par un quart de tour est un cercle de **même rayon**, dont le centre est l'image du centre.

$r' = r$

$r' = 3 \text{ cm}$

Le rayon ne dépend ni du centre A du quart de tour, ni du sens : seul le centre du cercle se déplace.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(2) / sqrt(18)` → Multiplier par $\sqrt{2}$ donne la distance entre un point et son image. Le rayon, lui, est conservé : le cercle image est superposable au cercle de départ.

`6` → 6 cm, c'est le diamètre. On demande le rayon, qui est conservé.

EXERCICE 45 · BASE

Le centre de l'image

(C) est le cercle de centre O et de rayon 5 cm, et A est un point tel que $OA = 4$ cm. Le quart de tour indirect de centre A transforme (C) en un cercle (C') de centre O'.

Donner la distance AO'.

Donner la longueur AO' en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quel point est O' pour le point O ?
2. O' est l'image de O par un quart de tour de centre A : compare AO' et AO.

CORRECTION

Le centre suit — Le centre O' du cercle image est l'image du centre O.

La distance au centre — Par un quart de tour de centre A, la distance à A est conservée :

$$AO' = AO = 4 \text{ cm}$$

Le rayon, 5 cm, ne servait pas : il donne le rayon de (C'), pas la position de son centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(2) / sqrt(32)` → $4\sqrt{2}$ cm, c'est OO', la distance entre les deux centres. On demande AO', la distance au centre du quart de tour.

`5` → 5 cm, c'est le rayon de (C) et de (C'). La position de O' dépend de AO, pas du rayon.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Le diamètre et son image

(C) est le cercle de diamètre $[MN]$, avec $MN = 10$ cm. (C') est son image par le quart de tour direct de centre M.

Calculer la distance entre les centres de (C) et de (C').

Donner la valeur exacte de la distance en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `5*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(50)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre O de (C) est le milieu de $[MN]$. Combien vaut MO ?
2. Le centre O' de (C') est l'image de O : le triangle MOO' est rectangle isocèle en M.

CORRECTION

Le centre de (C) — Le centre O de (C) est le milieu du diamètre $[MN]$:

$$MO = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Le centre de (C') — O' est l'image de O : $MO' = MO = 5$ cm et $\widehat{OMO'} = 90°$. Le triangle MOO' est rectangle isocèle en M.

$$OO'^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

$$OO' = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

Le cercle (C') passe lui aussi par M : $MO' = 5$ cm, c'est son rayon. Un cercle et son image par un quart de tour centré sur le cercle se recoupent toujours en ce centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 cm, c'est le rayon, ou la distance MO'. La distance entre les deux centres est l'hypoténuse du triangle MOO'.

`10*sqrt(2) / sqrt(200)` → $10\sqrt{2}$ cm, c'est NN', la distance entre N et son image. Les centres sont deux fois plus près de M que N.

`10` → 10 cm, c'est le diamètre MN. Calcule d'abord la distance de M au centre O.

`7.07 / 7.1 / 7.071` → C'est une valeur approchée de la distance, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Du centre au centre, à rebours

(C) est un cercle de centre O, et (C') son image par un quart de tour de centre A ; le centre de (C') est noté O'. On sait que $OO' = 10$ cm.

Calculer la distance AO.

Donner la valeur exacte de AO en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `5*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(50)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O' est l'image de O par le quart de tour de centre A. Quelle est la nature du triangle AOO' ?
2. Le triangle AOO' est rectangle isocèle en A, d'hypoténuse $[OO']$.
   $AO^2 + AO'^2 = OO'^2$

CORRECTION

Le triangle caché — O' est l'image de O : $AO' = AO$ et $\widehat{OAO'} = 90°$. Le triangle AOO' est rectangle isocèle en A, d'hypoténuse $[OO']$.

Pythagore —

$2\,AO^2 = OO'^2 = 100 \quad \text{donc} \quad AO^2 = 50$

Et $50 = 25 \times 2$:

$AO = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm

Le rayon du cercle n'intervient pas : tout se passe entre le centre du quart de tour, le centre du cercle et son image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 cm, c'est la moitié de OO' : ce serait le cas pour un demi-tour, dont le centre est au milieu de $[OO']$. Ici, A est le sommet de l'angle droit du triangle AOO'.

`50` → 50, c'est AO^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`10*sqrt(2) / sqrt(200)` → Tu as multiplié par $\sqrt{2}$ au lieu de diviser : $[OO']$ est l'hypoténuse, donc AO est plus court que 10 cm.

`7.07 / 7.1 / 7.071` → C'est une valeur approchée de AO, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 48 · PRATIQUE

Les images de E et de F

(C) est le cercle de centre O et de rayon 3 cm, et A est un point tel que $OA = 8$ cm. La droite (OA) coupe (C) en E et F, avec E entre O et A. Le quart de tour direct de centre A transforme E en E' et F en F'.

Calculer la distance AF'.

Donner la longueur AF' en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Où sont E et F sur la droite (OA) ? Calcule AE et AF.
2. Le quart de tour de centre A conserve la distance à A : compare AF' et AF.

CORRECTION

Les points E et F — E et F sont sur (OA), à 3 cm de O ; E est entre O et A, F est de l'autre côté de O.

$AE = 8 - 3 = 5 \quad ; \quad AF = 8 + 3 = 11$

L'image — F' est l'image de F par un quart de tour de centre A :

$AF' = AF = 11 \text{ cm}$

Sans construction : E' et F' sont sur l'image de la droite (OA), la perpendiculaire à (OA) en A. Ce sont les extrémités du diamètre, porté par cette droite, du cercle image de (C).

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 cm, c'est AE, donc AE'. F est de l'autre côté de O, plus loin de A.

`8` → 8 cm, c'est AO, donc AO' : la distance de A au centre du cercle image. F' est sur ce cercle, 3 cm plus loin.

`11*sqrt(2) / sqrt(242)` → $11\sqrt{2}$ cm, c'est FF', la distance entre F et son image. On demande AF', la distance au centre A.

EXERCICE 49 · PRATIQUE

Le carré des deux cercles

(C) est le cercle de centre O et de rayon 5 cm, et A est un point de (C). (C') est l'image de (C) par le quart de tour direct de centre A, et O' est son centre. Les cercles (C) et (C') se recoupent en I.

Calculer l'aire du quadrilatère $AOIO'$.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mesure les quatre côtés : AO, OI, IO' et $O'A$. Pourquoi valent-ils tous 5 cm ?

2. Un quadrilatère à quatre côtés égaux est un losange. Celui-ci a un angle droit en A : lequel des losanges est-ce ?

CORRECTION

Les quatre côtés — A et I sont sur (C) : $OA = OI = 5$ cm. O' est l'image de O : $AO' = AO = 5$ cm, et I est sur (C'), de rayon 5 cm : $O'I = 5$ cm.

La nature — Quatre côtés égaux : $AOIO'$ est un losange. Et $\widehat{OAO'} = 90°$: c'est un carré de côté 5 cm.

L'aire —

$$\text{aire de } AOIO' = 5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$$

Ce carré caché est la clé des exercices où un cercle et son image se recoupent : leur second point commun I est le quatrième sommet du carré construit sur $[AO]$ et $[AO']$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12.5 / 25/2` → $12{,}5$ cm², c'est l'aire du triangle AOO', la moitié du quadrilatère. $AOIO'$ est un carré entier.

`50` → 50, c'est AI^2, le carré de la diagonale. L'aire du carré est le carré de son **côté**, 5 cm.

EXERCICE 50 · RAISONNEMENT

Du point commun au rayon

(C) est un cercle de centre O, et A est un point de (C). (C') est l'image de (C) par le quart de tour direct de centre A. Les cercles (C) et (C') se recoupent en I, et $AI = 8$ cm.

Calculer le rayon de (C).

Donner la valeur exacte du rayon en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `4*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(32)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note O' le centre de (C'), et r le rayon. Quelle est la nature du quadrilatère $AOIO'$?
2. $AOIO'$ est un carré de côté r, et $[AI]$ en est une diagonale. Écris Pythagore dans le triangle AOI, rectangle en O.
   $$AO^2 + OI^2 = AI^2$$

CORRECTION

Le carré caché — $OA = OI = r$, $AO' = AO = r$ et $O'I = r$: $AOIO'$ a quatre côtés égaux et un angle droit en A. C'est un carré de côté r, de diagonale $[AI]$.

Pythagore — Dans le triangle AOI, rectangle isocèle en O :

$$2\,r^2 = AI^2 = 64 \quad \text{donc} \quad r^2 = 32$$

$$r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

On remonte de la diagonale au côté en divisant par $\sqrt{2}$: $r = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 cm, c'est la moitié de AI. Mais $[AI]$ n'est pas un diamètre de (C) : c'est la diagonale du carré $AOIO'$, dont le côté est le rayon.

`8` → 8 cm, c'est AI, la diagonale du carré $AOIO'$. Le rayon est un côté de ce carré : il est plus court.

`32` → 32, c'est r^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`5.66 / 5.7 / 5.657` → C'est une valeur approchée du rayon, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 51 · RAISONNEMENT

Deux sens, deux cercles

(C) est le cercle de centre O et de rayon 3 cm, et A est un point tel que $OA = 4$ cm. Le quart de tour direct de centre A transforme (C) en (C_1), de centre O_1 ; le quart de tour indirect de centre A le transforme en (C_2), de centre O_2.

Calculer la distance O_1O_2.

Donner la longueur O_1O_2 en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O_1 et O_2 sont les images de O par les deux quarts de tour de centre A. Combien vaut l'angle $\widehat{O_1AO_2}$?
2. Les points O_1, A et O_2 sont alignés, et A est à 4 cm de chacun.

CORRECTION

Les deux centres — O_1 et O_2 sont les images de O : $AO_1 = AO_2 = AO = 4$ cm, avec $\widehat{OAO_1} = \widehat{OAO_2} = 90°$, de part et d'autre de $[AO)$.

L'alignement — $\widehat{O_1AO_2} = 90° + 90° = 180°$: O_1, A, O_2 sont alignés, et A est le milieu de $[O_1O_2]$.

$O_1O_2 = 4 + 4 = 8$ cm

Les deux sens donnent deux images symétriques par rapport au centre du quart de tour. Le rayon, 3 cm, ne servait pas ici.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(2) / sqrt(32)` → $4\sqrt{2}$ cm, c'est OO_1, la distance entre O et l'une de ses images. On demande la distance entre les deux images, O_1 et O_2.

`4` → 4 cm, c'est AO_1 seulement. O_2 est de l'autre côté de A : il faut doubler.

`6` → 6 cm, c'est deux fois le rayon. La position des centres ne dépend pas du rayon, mais de AO.

EXERCICE 52 · DEFI

Le triangle des trois centres

(C) est un cercle de centre O, et A est un point tel que $OA = 5$ cm. Le quart de tour direct de centre A transforme (C) en un cercle de centre O_1, et le quart de tour indirect de centre A le transforme en un cercle de centre O_2.

Calculer l'aire du triangle OO_1O_2.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points O_1, A et O_2 sont alignés : pourquoi ? Quelle est la longueur O_1O_2 ?
2. La droite (OA) est perpendiculaire à (O_1O_2) en A : $[OA]$ est une hauteur du triangle.

CORRECTION

La base — $AO_1 = AO_2 = AO = 5$ cm, et $\widehat{O_1AO_2} = 90° + 90° = 180°$: A est le milieu de $[O_1O_2]$. $O_1O_2 = 10$ cm

La hauteur — $\widehat{OAO_1} = 90°$: la droite (OA) est perpendiculaire à (O_1O_2) en A. La hauteur issue de O mesure $OA = 5$ cm.

L'aire —

$\text{aire de } OO_1O_2 = \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ cm}^2$

Le triangle OO_1O_2 est rectangle isocèle en O : il est fait de deux triangles OAO_1 et OAO_2, rectangles isocèles en A. Le rayon du cercle n'intervient jamais.

PIÈGES ANTICIPÉS

`50` → 50, c'est 10×5. L'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur.

`12.5 / 25/2` → $12{,}5$ cm², c'est l'aire du seul triangle OAO_1. Le triangle OO_1O_2 en contient deux.

EXERCICE 53 · DEFI

Deux cercles images qui se touchent

(C) est le cercle de centre O et de rayon 4 cm, et A est un point de (C). (C_1) est l'image de (C) par le quart de tour direct de centre A, et (C_2) son image par le quart de tour indirect de centre A.

Combien de points communs ont les cercles (C_1) et (C_2) ?

Donner le nombre de points communs.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note O_1 et O_2 les centres des deux cercles. Où sont-ils par rapport à A ? Combien vaut O_1O_2 ?
2. Le point A est-il sur (C_1) ? Sur (C_2) ? Et si un point M était sur les deux cercles, que vaudrait $O_1M + MO_2$?

CORRECTION

Les centres — $AO_1 = AO_2 = AO = 4$ cm, et A est le milieu de $[O_1O_2]$: $O_1O_2 = 8$ cm.

Le point A — $AO_1 = 4$ cm, le rayon de (C_1) : A est sur (C_1). De même, A est sur (C_2).

Un seul — Si M est sur les deux cercles, $O_1M + MO_2 = 4 + 4 = 8 = O_1O_2$: M est sur le segment $[O_1O_2]$, à 4 cm de O_1. C'est le milieu A.

un seul point commun : A

Les deux cercles images se touchent en A sans se couper : ils sont tangents. Si A n'était pas sur (C), ils auraient deux points communs, ou aucun.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Deux cercles qui se coupent ont deux points communs, mais ceux-ci se touchent seulement : la distance entre leurs centres, 8 cm, est égale à la somme des rayons.

`0` → Ils en ont au moins un : A est à 4 cm de O_1 et de O_2, donc sur les deux cercles.

EXERCICE 54 · BASE

L'aire de l'image

ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. $A'B'C'$ est son image par un quart de tour.

Calculer l'aire du triangle $A'B'C'$.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une figure et son image par un quart de tour sont superposables. Que peux-tu dire de leurs aires ?
2. Calcule l'aire du triangle ABC, rectangle en A : la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

CORRECTION

Superposables — Le triangle $A'B'C'$ est superposable à ABC : il a la même aire.

L'aire de ABC —

$$\text{aire de } ABC = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$\text{aire de } A'B'C' = 24 \text{ cm}^2$$

On n'a pas eu besoin de construire l'image : le quart de tour déplace la figure sans la déformer, son aire est la même.

PIÈGES ANTICIPÉS

`48` → 48, c'est 6×8, l'aire du rectangle. Le triangle rectangle en est la moitié.

`14` → 14, c'est $6 + 8$. L'aire d'un triangle rectangle est la moitié du **produit** des côtés de l'angle droit.

EXERCICE 55 · BASE

Un angle qui ne bouge pas

ABC est un triangle tel que $\widehat{ABC} = 70°$. $A'B'C'$ est son image par le quart de tour direct de centre O.

Donner la mesure de l'angle $\widehat{A'B'C'}$.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `70`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un quart de tour fait tourner la figure d'un angle droit. Les angles **à l'intérieur** de la figure changent-ils ?
2. Un polygone et son image ont des angles homologues isométriques.

CORRECTION

La propriété — Le triangle $A'B'C'$ est superposable à ABC : leurs angles homologues sont isométriques.

$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$

$\widehat{A'B'C'} = 70^\circ$

Le 90° du quart de tour est l'angle dont tourne chaque point autour de O, pas un angle qui s'ajoute à ceux de la figure.

PIÈGES ANTICIPÉS

`160` → $70^\circ + 90^\circ$: l'angle droit du quart de tour ne s'ajoute pas aux angles de la figure. Il dit seulement de combien chaque point tourne autour de O.

`20` → $90^\circ - 70^\circ$ ne mesure rien ici. Le quart de tour conserve les angles : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

EXERCICE 56 · BASE

Le périmètre du rectangle image

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ cm et $BC = 3$ cm. $A'B'C'D'$ est son image par le quart de tour indirect de centre B.

Calculer le périmètre de $A'B'C'D'$.

Donner le périmètre en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : `16`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rectangle image est superposable au rectangle $ABCD$. Que peux-tu dire de leurs périmètres ?
2. Le périmètre d'un rectangle est le double de la somme de sa longueur et de sa largeur.

CORRECTION

Superposables — $A'B'C'D'$ a le même périmètre que $ABCD$.

Le périmètre —

$2 \times (5 + 3) = 16 \text{ cm}$

Le centre B est un sommet du rectangle : il reste en place, mais le rectangle tourne autour de lui sans changer de dimensions.

PIÈGES ANTICIPÉS

`15` → 15, c'est 5×3, l'aire du rectangle en cm². On demande son périmètre.

`8` → 8 cm, c'est $5 + 3$, le demi-périmètre. Le contour compte deux longueurs et deux largeurs.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

L'hypoténuse de l'image

ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 5$ cm et $AC = 12$ cm. Le quart de tour direct de centre A le transforme en $AB'C'$.

Calculer la longueur $B'C'$.

Donner la longueur $B'C'$ en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[B'C']$ est l'image de quel segment ?
2. $B'C' = BC$: calcule BC dans le triangle ABC, rectangle en A.
   $BC^2 = AB^2 + AC^2$

CORRECTION

Le segment image — $[B'C']$ est l'image de $[BC]$: les longueurs sont conservées.

$B'C' = BC$

Pythagore — Dans le triangle ABC rectangle en A :

$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

$B'C' = BC = 13 \text{ cm}$

On calcule dans la figure de départ, où l'on connaît tout, puis on transporte le résultat par le quart de tour.

PIÈGES ANTICIPÉS

`17` → $5 + 12 = 17$: on n'additionne pas les côtés. Pythagore additionne leurs **carrés**.

`169` → 169, c'est BC^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`sqrt(119)` → $\sqrt{119}$ vient de $12^2 - 5^2$. L'hypoténuse est $[BC]$: on **ajoute** les carrés des deux autres côtés.

EXERCICE 58 · PRATIQUE

Deux carrés côte à côte

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. On construit son image $A'B'C'D'$ par le quart de tour de centre A qui envoie B sur D.

Calculer l'aire de la figure formée par les deux carrés réunis.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 32

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est l'image de B ? Et celle de D ? Les deux carrés ont-ils une partie commune, ou seulement un côté ?

2. Le carré image a $[AD]$ pour côté, et il est de l'autre côté de (AD) par rapport à B : les deux carrés ne se chevauchent pas.

CORRECTION

Le carré image — $A' = A$ et $B' = D$: le côté $[AB]$ devient $[AD]$. Le carré image est construit sur $[AD]$, de l'autre côté de la droite (AD), car $[AD']$ est perpendiculaire à $[AD]$ et tourné à l'opposé de B.

Superposables — Les deux carrés ont la même aire, $4 \times 4 = 16$ cm², et n'ont en commun que le côté $[AD]$, qui n'a pas d'aire.

L'aire totale —

$16 + 16 = 32 \text{ cm}^2$

Avant d'ajouter deux aires, vérifie que les figures ne se chevauchent pas. Ici, le quart de tour a posé le carré image contre le carré de départ.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → 16 cm², c'est l'aire d'un seul carré. Les deux carrés ne se recouvrent pas : ils ont seulement le côté $[AD]$ en commun.

EXERCICE 59 · PRATIQUE

Un carré qui tourne sur lui-même

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté 4 cm. On construit son image par le quart de tour direct de centre O.

Calculer l'aire de la partie commune au carré $ABCD$ et à son image.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche l'image de chaque sommet : le quart de tour de centre O envoie chaque sommet sur un sommet voisin.
2. Si l'image de chaque sommet est un sommet du carré, quelle est l'image du carré tout entier ?

CORRECTION

Les sommets — Les triangles OAB, OBC, OCD, ODA sont rectangles isocèles en O : le quart de tour direct de centre O envoie chaque sommet sur un sommet voisin.

L'image — L'image du carré $ABCD$ est donc le carré $ABCD$ lui-même : les deux figures se superposent exactement.

La partie commune —

$4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$

Un carré est sa propre image par les quarts de tour de centre son centre : c'est ce qui fait de lui une figure « qui tourne sur elle-même ».

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Les deux carrés ne sont pas séparés : chaque sommet a pour image un sommet du carré lui-même. L'image se pose exactement sur le carré.

8 → Le carré image ne recouvre pas la moitié du carré : il le recouvre entièrement.

EXERCICE 60 · RAISONNEMENT

Le rectangle tourné

$ABCD$ est un rectangle de centre O, avec $AB = 8$ cm et $BC = 2$ cm. On construit son image par le quart de tour direct de centre O.

Calculer l'aire de la partie commune au rectangle et à son image.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rectangle image a le même centre O et les mêmes dimensions. Mais sa longueur est dans quelle direction ?
2. Dessine les deux rectangles : l'un « couché », de 8 sur 2, l'autre « debout », de 2 sur 8, avec le même centre. Quelle forme a leur partie commune ?

CORRECTION

Le rectangle image — Le quart de tour de centre O garde le centre et les dimensions, et fait tourner chaque côté d'un angle droit : le rectangle « couché » de 8 cm sur 2 cm devient un rectangle « debout » de 2 cm sur 8 cm, de même centre O.

La partie commune — Leur partie commune est le carré de centre O qui a la largeur du premier, 2 cm, et la largeur du second, 2 cm.

L'aire —

$2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$

La croix formée par les deux rectangles a pour aire $16 + 16 - 4 = 28$ cm² : on retire une fois la partie commune, comptée deux fois.

PIÈGES ANTICIPÉS

16 → 16 cm², c'est l'aire du rectangle entier. L'image est tournée d'un angle droit : elle n'en recouvre qu'une partie, au centre.

28 → 28 cm², c'est l'aire de la croix formée par les deux rectangles réunis. On demande seulement leur partie commune.

EXERCICE 61 · RAISONNEMENT

Quatre morceaux superposables

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté a. Deux droites perpendiculaires Δ et Δ' passent par O, sans passer par aucun sommet du carré : elles découpent le carré en quatre quadrilatères.

Exprimer en fonction de a l'aire de l'un de ces quadrilatères.

Écrire l'aire en fonction de a, par exemple « a^2/3 ».

Réponse attendue : a^2/4 — aussi acceptées : (a^2)/4 · 0.25*a^2 · a*a/4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quart de tour de centre O envoie le carré $ABCD$ sur lui-même. Que devient la droite Δ, qui passe par O ?
2. L'image de Δ est la perpendiculaire à Δ en O : c'est Δ'. Et l'image de Δ' est Δ. Où va chacun des quatre morceaux ?

CORRECTION

Le carré tourne sur lui-même — Les diagonales du carré sont égales, perpendiculaires et se coupent en leur milieu O : le quart de tour direct de centre O envoie chaque sommet sur le suivant, et le carré $ABCD$ sur lui-même.

Les deux droites — Δ passe par O : son image est la perpendiculaire à Δ en O, c'est Δ'. De même, l'image de Δ' est la perpendiculaire à Δ' en O, c'est Δ.

Les quatre morceaux — Le quart de tour envoie donc chaque morceau sur le morceau voisin : les quatre quadrilatères sont superposables, de même aire, et ensemble ils recouvrent le carré.

$$4 \times \text{aire d'un morceau} = a^2$$

$$\text{aire d'un morceau} = \frac{a^2}{4}$$

Un carré est sa propre image par le quart de tour de centre son centre : deux droites perpendiculaires passant par ce centre le partagent toujours en quatre morceaux superposables, où qu'on les place.

PIÈGES ANTICIPÉS

a^2/2 → $\frac{a^2}{2}$, c'est la moitié du carré. Les deux droites le découpent en **quatre** morceaux superposables, pas en deux.

a^2 → a^2, c'est l'aire du carré entier. Il est partagé en quatre morceaux de même aire.

a/4 → Une aire s'exprime avec a^2, pas avec a : c'est le produit de deux longueurs.

EXERCICE 62 · RAISONNEMENT

Le périmètre de l'octogone

OPQ est un triangle isocèle de sommet principal O, avec $PQ = 3$ cm et $\widehat{POQ} = 45°$; en tournant autour de O dans le sens direct, on rencontre P puis Q. Le quart de tour direct de centre O transforme P et Q en R et S ; le demi-tour de centre O les transforme en T et U ; le quart de tour indirect de centre O les transforme en V et W.

On admet que $PQRSTUVW$ est un octogone. Calculer son périmètre.

Donner le périmètre en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les côtés $[RS]$, $[TU]$ et $[VW]$ sont les images de $[PQ]$: que valent-ils ?
2. Il reste les côtés comme $[QR]$. Compare le triangle OQR au triangle OPQ : mêmes côtés en O ? même angle en O ?

CORRECTION

Quatre côtés images — $[RS]$, $[TU]$ et $[VW]$ sont les images de $[PQ]$ par un quart de tour ou un demi-tour : ils mesurent 3 cm.

Les quatre autres — Les huit sommets sont à la même distance de O, et deux sommets voisins font un angle de $45°$ en O : par exemple $\widehat{QOR} = 90° - 45° = 45°$. Les triangles OQR, OST, OUV, OWP sont donc isométriques à OPQ : leurs côtés $[QR]$, $[ST]$, $[UV]$, $[WP]$ mesurent aussi 3 cm.

Le périmètre —

$$8 \times 3 = 24 \text{ cm}$$

Les huit côtés sont égaux et les huit angles en O aussi : $PQRSTUVW$ est un octogone régulier, construit avec un seul triangle et trois transformations.

PIÈGES ANTICIPÉS

$12 \to 12$ cm compte seulement $[PQ]$ et ses trois images. L'octogone a huit côtés : $[QR]$, $[ST]$, $[UV]$ et $[WP]$ mesurent aussi 3 cm.

EXERCICE 63 · DEFI

L'aire de l'octogone régulier

On obtient un octogone régulier de côté 4 cm en coupant les quatre coins d'un carré. Chaque coin coupé est un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est un côté de l'octogone, et les quatre coins sont superposables : le quart de tour de centre le centre du carré envoie chacun sur le suivant.

Calculer l'aire de l'octogone.

Donner la valeur exacte de l'aire en cm², sans l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `32+32*sqrt(2)` — aussi acceptées : 32*(1+sqrt(2)) · 32*sqrt(2)+32

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un coin coupé est rectangle isocèle d'hypoténuse 4 cm. Note x la longueur d'un côté de son angle droit.
   $x^2 + x^2 = 4^2$
2. Le carré de départ a pour côté $x + 4 + x$. Découpe-le en un carré central de côté 4 cm, quatre rectangles de 4 cm sur x le long des bords, et quatre petits carrés de côté x dans les angles. Que reste-t-il de chaque petit carré dans l'octogone ?

CORRECTION

Un coin — Dans un coin, $2x^2 = 16$, donc $x^2 = 8$ et $x = 2\sqrt{2}$ cm. Son aire vaut $\frac{x \times x}{2} = 4$ cm².

Le découpage — Le carré de départ se découpe en un carré central de côté 4 cm, quatre rectangles de 4 cm sur $2\sqrt{2}$ cm le long des bords, et quatre petits carrés de côté $2\sqrt{2}$ cm dans les angles. Chaque petit carré est coupé en deux par un côté de l'octogone : une moitié est un coin coupé, l'autre reste dans l'octogone, et elle a la même aire, 4 cm².

L'octogone — Les quatre coins sont superposables, les quatre rectangles aussi :

$$\text{aire} = 4 \times 4 + 4 \times (4 \times 2\sqrt{2}) + 4 \times 4$$

$$\text{aire} = 32 + 32\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

Le quart de tour garantit que les quatre coins sont identiques : un seul calcul suffit pour les quatre. L'aire vaut environ $77{,}3$ cm².

PIÈGES ANTICIPÉS

`48+32*sqrt(2)` → $48 + 32\sqrt{2}$, c'est l'aire du carré de départ tout entier : tu as gardé les quatre coins coupés.

`16+32*sqrt(2)` → Il manque 16 cm². Un coin coupé a pour aire $\frac{2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}{2} = 4$ cm², pas 8 : seule la moitié de chaque petit carré d'angle est retirée, l'autre reste dans l'octogone.

`32` → Tu as oublié les quatre rectangles de 4 cm sur $2\sqrt{2}$ cm, le long des bords : ils ajoutent $4 \times 4 \times 2\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$ cm².

`77.25 / 77.3 / 77.255` → C'est une valeur approchée de l'aire, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 64 · DEFI

Un carré qui tourne autour d'un milieu

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm, et I est le milieu de $[AB]$. On construit l'image du carré par le quart de tour direct de centre I.

Calculer l'aire de la partie commune au carré $ABCD$ et à son image.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche l'image de B : $IB = 2$ cm, et l'angle droit en I part vers l'intérieur ou vers l'extérieur du carré ? Où arrive-t-on ?
2. L'image du côté $[AB]$ est portée par la perpendiculaire à (AB) en I. Le carré image a donc un côté sur cette droite, qui coupe $ABCD$ en deux moitiés.

CORRECTION

Les images de A et B — Place A en bas à gauche, B en bas à droite, et $ABCD$ dans le sens direct. $IA = IB = 2$ cm : l'image de B est sur la perpendiculaire à (AB) en I, à 2 cm au-dessus de I — c'est le centre O du carré ; l'image de A est à 2 cm au-dessous de I.

Le carré image — Le carré image a pour côté le segment vertical de 4 cm centré en I, et il s'étend vers la gauche de ce côté, sur 4 cm. Dans $ABCD$, il recouvre ce qui est à gauche de la droite (IO) et au-dessous de l'image de (BC), à 2 cm au-dessus de (AB).

La partie commune — C'est le carré de côtés $[AI]$ et $[IO]$, de côté 2 cm.

$$2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$$

Avec le quart de tour indirect, on trouverait aussi 4 cm², à droite de (IO). Dans les deux cas, la partie commune est un quart du carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → 8 cm², c'est la moitié du carré, à gauche de la droite (IO). Mais le carré image ne monte qu'à 2 cm au-dessus de (AB) : il n'en recouvre que la partie basse.

16 → Le carré image ne se pose pas sur $ABCD$: son centre n'est pas celui de $ABCD$, mais l'image de ce centre.

EXERCICE 65 · BASE

Compter les carreaux

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $C(5\,;2)$.

Donner les coordonnées du point C', image de C par le quart de tour direct de centre O.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(-2;5)` — aussi acceptées : (-2,5) · C'(-2;5) · C'(-2,5) · -2;5 · -2 et 5 · x=-2;y=5 · x=-2 et y=5 · (-2;+5) · (-2,+5) · C'(-2;+5) · -2;+5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte les carreaux pour aller de O à C : combien vers la droite, et combien vers le haut ?
2. Le quart de tour direct tourne chaque déplacement : « vers la droite » devient « vers le haut », et « vers le haut » devient « vers la gauche ».

CORRECTION

Le chemin vers C — De O à C : 5 carreaux vers la droite, puis 2 vers le haut.

On tourne le chemin — « Droite » devient « haut », « haut » devient « gauche » : de O à C', 5 carreaux vers le haut, puis 2 vers la gauche.

On lit l'abscisse, puis l'ordonnée :

$C'(-2\,;5)$

Contrôle avec le triangle caché : C' est en haut à gauche de O, C en haut à droite ; on a bien tourné dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;-5) / (2,-5) / C'(2;-5) / C'(2,-5) / 2;-5 / 2 et -5` → $(2\,;-5)$ est l'image par le quart de tour **indirect** : tu as tourné dans le sens des aiguilles d'une montre.

`(-5;-2) / (-5,-2) / C'(-5;-2) / C'(-5,-2) / -5;-2 / -5 et -2` → $(-5\,;-2)$ est l'image par le **demi-tour** de centre O : les deux coordonnées ont seulement changé de signe.

`(2;5) / (2,5) / C'(2;5) / C'(2,5) / 2;5 / 2 et 5` → Tu as échangé les coordonnées sans tourner le chemin : « 2 vers le haut » devient « 2 vers la **gauche** ». L'abscisse de C' est négative.

EXERCICE 66 · BASE

Un point sur l'axe

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $E(-4\,;0)$.

Donner les coordonnées du point E', image de E par le quart de tour indirect de centre O.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(0;4)` — aussi acceptées : (0,4) · E'(0;4) · E'(0,4) · 0;4 · 0 et 4 · x=0;y=4 · x=0 et y=4 ·

(0;+4) · (0,+4) · E'(0;+4) · 0;+4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De O à E : 4 carreaux vers la gauche, et c'est tout.
2. Le quart de tour indirect tourne dans le sens des aiguilles d'une montre : « vers la gauche » devient « vers le haut ».

CORRECTION

Le chemin vers E — De O à E : 4 carreaux vers la gauche.

On tourne le chemin — Dans le sens indirect, « gauche » devient « haut » : de O à E', 4 carreaux vers le haut.

$E'(0\,;4)$

Un point de l'axe des abscisses a pour image un point de l'axe des ordonnées : l'image de la droite (OE) est la perpendiculaire à (OE) en O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(0;-4) / (0,-4) / E'(0;-4) / E'(0,-4) / 0;-4 / 0 et -4` → $(0\,;-4)$ est l'image par le quart de tour **direct** : « gauche » devient « bas » dans le sens contraire des aiguilles. Le sens indirect est celui des aiguilles.

`(4;0) / (4,0) / E'(4;0) / E'(4,0) / 4;0 / 4 et 0` → $(4\,;0)$ est le symétrique de E par rapport à O : un demi-tour. Un quart de tour ne fait que la moitié du chemin.

EXERCICE 67 · BASE

La distance au centre, dans le repère

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $A(3\,;4)$, et A' est son image par le quart de tour direct de centre O.

Calculer la distance OA', en unités du repère.

Donner la distance, en unités du repère.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pas besoin de calculer les coordonnées de A' : que dit la définition de OA' ?
2. $OA' = OA$. Pour OA, le chemin de O à A forme un triangle rectangle : 3 vers la droite, 4 vers le haut.
   $OA^2 = 3^2 + 4^2$

CORRECTION

La définition —

$OA' = OA$

Pythagore — De O à A : 3 carreaux vers la droite, 4 vers le haut. L'hypoténuse de ce triangle rectangle est $[OA]$.

$OA^2 = 9 + 16 = 25$

$OA' = OA = 5$

Contrôle : $A'(-4\,;3)$, et le chemin de O à A' fait 4 vers la gauche et 3 vers le haut — le même triangle rectangle, tourné.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → $3+4=7$, c'est la longueur du chemin en suivant le quadrillage. La distance en ligne droite est l'hypoténuse : Pythagore.

`5*sqrt(2) / sqrt(50)` → $5\sqrt{2}$, c'est AA', la distance entre A et son image. On demande la distance au centre.

`25` → 25, c'est OA'^2. Il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 68 · PRATIQUE

Depuis le bas à gauche

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $F(-1\,;-3)$.

Donner les coordonnées du point F', image de F par le quart de tour direct de centre O.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(3;-1)` — aussi acceptées : (3,-1) · F'(3;-1) · F'(3,-1) · 3;-1 · 3 et -1 · x=3;y=-1 · x=3 et y=-1 · (+3;-1) · (+3,-1) · F'(+3;-1) · +3;-1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De O à F : combien de carreaux vers la gauche, et combien vers le bas ?
2. Dans le sens direct, « vers la gauche » devient « vers le bas », et « vers le bas » devient « vers la droite ».

CORRECTION

Le chemin vers F — De O à F : 1 carreau vers la gauche, puis 3 vers le bas.

On tourne le chemin — « Gauche » devient « bas », « bas » devient « droite » : de O à F', 1 carreau vers le bas, puis 3 vers la droite.

On lit l'abscisse, puis l'ordonnée :

$F'(3\,;-1)$

F est en bas à gauche de O, F' en bas à droite : en tournant dans le sens direct, on passe bien du bas à gauche au bas à droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-3;1) / (-3,1) / F'(-3;1) / F'(-3,1) / -3;1 / -3 et 1` → $(-3\,;1)$ est l'image par le quart de tour **indirect** : tu as tourné dans le sens des aiguilles d'une montre.

`(1;3) / (1,3) / F'(1;3) / F'(1,3) / 1;3 / 1 et 3` → $(1\,;3)$ est le symétrique de F par rapport à O : un demi-tour.

`(-3;-1) / (-3,-1) / F'(-3;-1) / F'(-3,-1) / -3;-1 / -3 et -1` → Tu as échangé les coordonnées sans tourner le chemin : « 3 vers le bas » devient « 3 vers la **droite** ». L'abscisse de F' est positive.

EXERCICE 69 · PRATIQUE

Dans le sens des aiguilles

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $G(-2\,;5)$.

Donner les coordonnées du point G', image de G par le quart de tour indirect de centre O.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(5;2)` — aussi acceptées : (5,2) · G'(5;2) · G'(5,2) · 5;2 · 5 et 2 · x=5;y=2 · x=5 et y=2 · (+5;+2) · (+5,+2) · G'(+5;+2) · +5;+2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De O à G : 2 carreaux vers la gauche, puis 5 vers le haut.
2. Le sens indirect tourne comme les aiguilles d'une montre : « gauche » devient « haut », et « haut » devient « droite ».

CORRECTION

Le chemin vers G — De O à G : 2 carreaux vers la gauche, puis 5 vers le haut.

On tourne le chemin — Dans le sens indirect : de O à G', 2 carreaux vers le haut, puis 5 vers la droite.

On lit l'abscisse, puis l'ordonnée :

$G'(5\,;2)$

Pour le sens indirect, la roue des directions tourne à l'envers : droite → bas → gauche → haut → droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-5;-2) / (-5,-2) / G'(-5;-2) / G'(-5,-2) / -5;-2 / -5 et -2` → $(-5\,;-2)$ est l'image par le quart de tour **direct**. Le sens indirect est celui des aiguilles d'une montre : « haut » devient « droite ».

`(2;-5) / (2,-5) / G'(2;-5) / G'(2,-5) / 2;-5 / 2 et -5` → $(2\,;-5)$ est le symétrique de G par rapport à O : un demi-tour.

`(5;-2) / (5,-2) / G'(5;-2) / G'(5,-2) / 5;-2 / 5 et -2` → Le premier déplacement est mal tourné : « 2 vers la gauche » devient « 2 vers le **haut** » dans le sens indirect. L'ordonnée de G' est positive.

EXERCICE 70 · PRATIQUE

Retrouver le point de départ

Dans un repère orthonormé d'origine O, le point $M'(-3\,;2)$ est l'image d'un point M par le quart de tour direct de centre O.

Donner les coordonnées du point M.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(2;3)` — aussi acceptées : (2,3) · M(2;3) · M(2,3) · 2;3 · 2 et 3 · x=2;y=3 · x=2 et y=3 · (+2;+3) · (+2,+3) · M(+2;+3) · +2;+3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour revenir de M' à M, dans quel sens faut-il tourner autour de O ?
2. On défait un quart de tour direct par un quart de tour indirect : tourne le chemin de O à M' dans le sens des aiguilles d'une montre.

CORRECTION

Le sens du retour — Si M' est l'image de M par le quart de tour direct de centre O, alors M est l'image de M' par le quart de tour indirect de centre O.

Le chemin — De O à M' : 3 carreaux vers la gauche, puis 2 vers le haut. Dans le sens indirect, « gauche » devient « haut », « haut » devient « droite » : 3 vers le haut, puis 2 vers la droite.

$M(2\,;3)$

Vérifie toujours dans le bon sens : de $M(2\,;3)$, le chemin « 2 à droite, 3 en haut » tourné dans le sens direct donne « 2 en haut, 3 à gauche » : c'est bien $M'(-3\,;2)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;-3) / (-2,-3) / M(-2;-3) / M(-2,-3) / -2;-3 / -2 et -3` → $(-2\,;-3)$ est l'image de M' par le quart de tour **direct** : tu as tourné une seconde fois dans le même sens au lieu de revenir en arrière.

`(3;-2) / (3,-2) / M(3;-2) / M(3,-2) / 3;-2 / 3 et -2` → $(3\,;-2)$ est le symétrique de M' par rapport à O. Pour défaire un quart de tour, il suffit d'un quart de tour dans l'autre sens.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

Un centre qui n'est pas l'origine

Dans un repère orthonormé, on donne les points $\Omega(1\,;1)$ et $A(4\,;2)$.

Donner les coordonnées du point A', image de A par le quart de tour direct de centre Ω.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(0;4)` — aussi acceptées : (0,4) · A'(0;4) · A'(0,4) · 0;4 · 0 et 4 · x=0;y=4 · x=0 et y=4 · (0;+4) · (0,+4) · A'(0;+4) · 0;+4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le chemin part du centre Ω, pas de l'origine : de Ω à A, combien de carreaux vers la droite, et vers le haut ?
2. Tourne ce chemin dans le sens direct, puis refais-le en partant de Ω.

CORRECTION

Le chemin depuis le centre — De $\Omega(1\,;1)$ à $A(4\,;2)$: 3 carreaux vers la droite, puis 1 vers le haut.

On tourne le chemin — Dans le sens direct : 3 carreaux vers le haut, puis 1 vers la gauche — toujours en partant de Ω.

Depuis $\Omega(1\,;1)$: on monte à l'ordonnée $1+3=4$, et on va à l'abscisse $1-1=0$.

$A'(0\,;4)$

La méthode des carreaux marche pour n'importe quel centre, à condition de partir du centre — à l'aller comme au retour.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;4) / (-2,4) / A'(-2;4) / A'(-2,4) / -2;4 / -2 et 4` → $(-2\,;4)$ est l'image de A par le quart de tour de centre l'**origine** O. Le centre est $\Omega(1\,;1)$: le chemin part de lui.

`(-1;3) / (-1,3) / A'(-1;3) / A'(-1,3) / -1;3 / -1 et 3` → $(-1\,;3)$, c'est le chemin tourné, compté depuis l'origine. Il faut le refaire en partant du centre $\Omega(1\,;1)$.

EXERCICE 72 · PRATIQUE

Un point et son image, dans le repère

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $A(1\,;3)$, et A' est son image par le quart de tour indirect de centre O.

Calculer la distance AA', en unités du repère.

Donner la valeur exacte de la distance, en unités du repère. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `2*sqrt(5)` — aussi acceptées : sqrt(20)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord OA : le chemin de O à A fait 1 vers la droite et 3 vers le haut.
   $OA^2 = 1^2 + 3^2$
2. Le triangle OAA' est rectangle isocèle en O : $AA'^2 = OA^2 + OA'^2$.

CORRECTION

La distance au centre —
$OA^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

Le triangle caché — $OA' = OA$ et $\widehat{AOA'} = 90°$: le triangle OAA' est rectangle isocèle en O.
$AA'^2 = 10 + 10 = 20$

Et $20 = 4 \times 5$:
$AA' = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Contrôle par les carreaux : $A'(3\,;-1)$, et de A à A' on fait 2 vers la droite et 4 vers le bas : $AA'^2 = 4 + 16 = 20$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(10)` → $\sqrt{10}$, c'est OA, la distance au centre. On demande AA', l'hypoténuse du triangle OAA'.

`20` → 20, c'est AA'^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`4.47 / 4.5 / 4.472` → C'est une valeur approchée de AA', lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 73 · RAISONNEMENT

Une coordonnée inconnue

Dans un repère orthonormé d'origine O, le point K a pour coordonnées $(a\,;2)$, où a est un nombre positif. Son image par le quart de tour direct de centre O est le point $K'(-2\,;5)$.

Déterminer le nombre a.

Donner la valeur de a.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De O à K : a carreaux vers la droite, puis 2 vers le haut. Comment ce chemin tourne-t-il ?
2. Après le quart de tour direct : a carreaux vers le haut, puis 2 vers la gauche. Compare avec les coordonnées de K'.

CORRECTION

Le chemin tourné — De O à K : a vers la droite, 2 vers le haut. Tourné dans le sens direct : a vers le haut, 2 vers la gauche.

$K'(-2\,;a)$

On identifie — L'abscisse -2 est bien celle de K'. Son ordonnée vaut a, et elle vaut 5 :

$a = 5$

Contrôle : $K(5\,;2)$, et le chemin « 5 à droite, 2 en haut » tourné dans le sens direct donne « 5 en haut, 2 à gauche » : $K'(-2\,;5)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est l'ordonnée de K, pas l'inconnue. Après le quart de tour direct, c'est a qui devient l'ordonnée de K'.

-5 → L'énoncé dit que a est positif, et l'ordonnée de K' est a lui-même : « a vers la droite » devient « a vers le **haut** », sans changement de signe.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

Le quatrième sommet du carré

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $A(3\,;1)$. On veut construire le carré $OABC$, dont les sommets O, A, B, C se suivent dans le sens direct.

Donner les coordonnées du sommet B.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(2;4)` — aussi acceptées : (2,4) · B(2;4) · B(2,4) · 2;4 · 2 et 4 · x=2;y=4 · x=2 et y=4 · (+2;+4) · (+2,+4) · B(+2;+4) · +2;+4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le carré $OABC$, le sommet C est l'image de A par un quart de tour de centre O. Lequel ? Calcule C d'abord.
2. Pour aller de O à B, on peut faire le chemin de O à A, puis celui de O à C, l'un après l'autre : $OABC$ est un parallélogramme.

CORRECTION

Le sommet C — $OC = OA$ et $\widehat{AOC} = 90°$, sens direct : C est l'image de A par le quart de tour direct de centre O. Le chemin « 3 à droite, 1 en haut » devient « 3 en haut, 1 à gauche ».

$C(-1\,;3)$

Le sommet B — Un carré est un parallélogramme : le chemin de A à B est le même que celui de O à C, 1 vers la gauche et 3 vers le haut.

$B(3-1\,;1+3)$

$B(2\,;4)$

Contrôle en comptant les carreaux : de A à B, 1 vers la gauche et 3 vers le haut, c'est le chemin de O à A tourné d'un quart de tour direct. Donc $AB = OA$ et $\widehat{OAB} = 90°$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1;3) / (-1,3) / B(-1;3) / B(-1,3) / -1;3 / -1 et 3` → $(-1\,;3)$, ce sont les coordonnées de C, le sommet voisin de O. B est le sommet opposé à O : de A, refais le chemin de O à C.

`(4;-2) / (4,-2) / B(4;-2) / B(4,-2) / 4;-2 / 4 et -2` → $(4\,;-2)$ donne le carré $OABC$ tourné dans le sens **indirect** : C serait alors $(1\,;-3)$. L'énoncé veut le sens direct.

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT

L'autre centre

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $A(4\,;0)$ et $A'(0\,;4)$. A' est l'image de A par le quart de tour direct de centre O, mais aussi par un quart de tour **indirect** dont le centre Ω est un autre point.

Donner les coordonnées de Ω.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(4;4)` — aussi acceptées : (4,4) · Ω(4;4) · Ω(4,4) · 4;4 · 4 et 4 · x=4;y=4 · x=4 et y=4 · (+4;+4) · (+4,+4) · Ω(+4;+4) · +4;+4 · W(4;4) · W(4,4) · W(+4;+4)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle $\Omega AA'$ est rectangle isocèle en Ω, comme le triangle OAA' en O. Les deux centres sont sur la médiatrice de $[AA']$, de part et d'autre de (AA').
2. $OA\Omega A'$ est alors un carré de diagonale $[AA']$. Quel est son quatrième sommet ?

CORRECTION

Les deux centres — $\Omega A = \Omega A'$ et $\widehat{A\Omega A'} = 90°$: Ω est, comme O, sur la médiatrice de $[AA']$, mais de l'autre côté de (AA'). Le quadrilatère $OA\Omega A'$ est un carré.

Le sens — Le carré de sommets $O(0\,;0)$, $A(4\,;0)$ et $A'(0\,;4)$ a pour quatrième sommet le point $(4\,;4)$. Contrôle : de ce point à A, le chemin descend de 4 ; vers A', il va de 4 vers la gauche. « Bas » devient « gauche » : c'est le sens des aiguilles d'une montre, le sens indirect.

Le quatrième sommet —

$\Omega(4\,;4)$

Un point et son image ont toujours deux centres possibles, un pour chaque sens : les deux sommets du carré construit sur la diagonale $[AA']$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(0;0) / (0,0) / Ω(0;0) / Ω(0,0) / 0;0 / 0 et 0 / O` → $O(0\,;0)$ est le centre du quart de tour **direct**. Le centre du quart de tour indirect est de l'autre côté de (AA').

`(2;2) / (2,2) / Ω(2;2) / Ω(2,2) / 2;2 / 2 et 2` → $(2\,;2)$ est le milieu de $[AA']$: ce serait le centre d'un **demi-tour**. Pour un quart de tour, le triangle $\Omega AA'$ doit être rectangle en Ω.

Maths à la carte · ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 76 · DEFI

Centre et sens imposés

Dans un repère orthonormé, on donne les points $\Omega(2\,;-1)$ et $B(-1\,;3)$.

Donner les coordonnées du point B', image de B par le quart de tour indirect de centre Ω.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(6;2)` — aussi acceptées : (6,2) · B'(6;2) · B'(6,2) · 6;2 · 6 et 2 · x=6;y=2 · x=6 et y=2 · (+6;+2) · (+6,+2) · B'(+6;+2) · +6;+2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pars du centre : de $\Omega(2\,;-1)$ à $B(-1\,;3)$, combien de carreaux vers la gauche, et combien vers le haut ?
2. Dans le sens indirect, « gauche » devient « haut » et « haut » devient « droite ». Refais le chemin tourné depuis Ω.

CORRECTION

Le chemin depuis le centre — De $\Omega(2\,;-1)$ à $B(-1\,;3)$: 3 carreaux vers la gauche, puis 4 vers le haut.

On tourne le chemin — Dans le sens indirect : 3 carreaux vers le haut, puis 4 vers la droite.

Depuis $\Omega(2\,;-1)$: abscisse $2+4=6$, ordonnée $-1+3=2$.
$B'(6\,;2)$

Contrôle : $\Omega B^2=3^2+4^2=25$ et $\Omega B'^2=4^2+3^2=25$; le chemin a tourné tout entier, chaque morceau d'un angle droit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;-4) / (-2,-4) / B'(-2;-4) / B'(-2,-4) / -2;-4 / -2 et -4` → $(-2\,;-4)$ est l'image par le quart de tour **direct** de centre Ω. Le sens indirect est celui des aiguilles d'une montre.

`(3;1) / (3,1) / B'(3;1) / B'(3,1) / 3;1 / 3 et 1` → $(3\,;1)$ est l'image de B par le quart de tour indirect de centre l'**origine**. Le chemin doit partir de Ω.

`(4;3) / (4,3) / B'(4;3) / B'(4,3) / 4;3 / 4 et 3` → $(4\,;3)$, c'est le chemin tourné, compté depuis l'origine. Refais-le en partant de $\Omega(2\,;-1)$.

EXERCICE 77 · DEFI

Un carré à partir de deux sommets

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;1)$ et $B(4\,;2)$. $ABCD$ est le carré dont les sommets A, B, C, D se suivent dans le sens direct.

Donner les coordonnées du sommet C.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(3;5)` — aussi acceptées : (3,5) · C(3;5) · C(3,5) · 3;5 · 3 et 5 · x=3;y=5 · x=3 et y=5 · (+3;+5) · (+3,+5) · C(+3;+5) · +3;+5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le sommet C est l'image de A par un quart de tour de centre B. Lequel ? Regarde dans quel sens on tourne de A vers C autour de B.
2. Autour de B, le chemin de B à C s'obtient en tournant le chemin de B à A. Commence par compter les carreaux de B à A.

CORRECTION

Le quart de tour — $BC = BA$ et $\widehat{ABC} = 90°$. Les sommets A, B, C se suivent dans le sens direct : autour de B, on va de C vers A dans le sens direct, donc de A vers C dans le sens indirect.

Le chemin — De $B(4\,;2)$ à $A(1\,;1)$: 3 vers la gauche, 1 vers le bas. Dans le sens indirect, « gauche » devient « haut » et « bas » devient « gauche » : 3 vers le haut, 1 vers la gauche.

Depuis $B(4\,;2)$: abscisse $4 - 1 = 3$, ordonnée $2 + 3 = 5$.

$C(3\,;5)$

Contrôle : D s'obtient de même, $D(0\,;4)$, et de D à C on fait 3 vers la droite et 1 vers le haut, comme de A à B : $ABCD$ est bien un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5;-1) / (5,-1) / C(5;-1) / C(5,-1) / 5;-1 / 5 et -1` → $(5\,;-1)$ donne un carré dont les sommets se suivent dans le sens **indirect** : il est de l'autre côté de (AB).

`(0;4) / (0,4) / C(0;4) / C(0,4) / 0;4 / 0 et 4` → $(0\,;4)$, c'est le sommet D, voisin de A. C est le voisin de B : il s'obtient en tournant autour de B.

EXERCICE 78 · BASE **Laquelle des quatre ? (1)**

Dans un repère orthonormé d'origine O, le triangle ABC a pour sommets $A(2\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(2\,;1)$, et le triangle $A'B'C'$ a pour sommets $A'(0\,;2)$, $B'(0\,;4)$ et $C'(-1\,;2)$.

$A'B'C'$ est l'image de ABC — A, B, C ayant pour images A', B', C' — par une symétrie axiale, une translation, un demi-tour ou un quart de tour. Laquelle ?

Répondre par : symétrie axiale, translation, demi-tour ou quart de tour.

Réponse attendue : `quart de tour` — aussi acceptées : un quart de tour · le quart de tour · c'est un quart de tour · quart de tour direct · le quart de tour direct · un quart de tour direct · quart de tour direct de centre O · le quart de tour direct de centre O

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Premier test : A, B, C tournent-ils dans le même sens que A', B', C' ?
2. Compare le segment $[AB]$, horizontal, et son image $[A'B']$: même direction, ou directions perpendiculaires ?

CORRECTION

L'ordre des sommets — A, B, C se suivent dans le sens direct, et A', B', C' aussi : l'ordre n'est pas inversé, ce n'est pas une symétrie axiale.

Les directions — $[AB]$ est horizontal, de $A(2\,;0)$ à $B(4\,;0)$; son image $[A'B']$ est verticale, de $A'(0\,;2)$ à $B'(0\,;4)$. Directions perpendiculaires : c'est un quart de tour.

un quart de tour

Pour aller plus loin : $OA' = OA$, $OB' = OB$, et l'on tourne dans le sens direct. C'est le quart de tour direct de centre O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`translation / une translation / la translation / c'est une translation` → Par une translation, $[AB]$ et $[A'B']$ auraient la même direction. Ici, $[AB]$ est horizontal et $[A'B']$ vertical.

`demi-tour / le demi-tour / un demi-tour / c'est un demi-tour / demi tour / un demi tour / demi-tour de centre O / le demi-tour de centre O / symétrie centrale / la symétrie centrale / une symétrie centrale / symétrie centrale de centre O / la symétrie centrale de centre O / symétrie de centre O / la symétrie de centre O` → Par un demi-tour, $[A'B']$ serait parallèle à $[AB]$, de sens contraire. Ici, les deux segments sont perpendiculaires.

`symétrie axiale / la symétrie axiale / une symétrie axiale / c'est une symétrie axiale / symétrie orthogonale / une symétrie orthogonale` → Une symétrie axiale inverse l'ordre des sommets. Ici, A', B', C' tournent dans le même sens que A, B, C.

`quart de tour indirect / le quart de tour indirect / un quart de tour indirect` → C'est bien un quart de tour, mais pas indirect : de $A(2\,;0)$ à $A'(0\,;2)$ autour de O, on tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

EXERCICE 79 · BASE

Laquelle des quatre ? (2)

Dans un repère orthonormé d'origine O, le triangle ABC a pour sommets $A(2\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(2\,;1)$, et le triangle $A'B'C'$ a pour sommets $A'(-2\,;0)$, $B'(-4\,;0)$ et $C'(-2\,;-1)$.

$A'B'C'$ est l'image de ABC — A, B, C ayant pour images A', B', C' — par une symétrie axiale, une translation, un demi-tour ou un quart de tour. Laquelle ?

Répondre par : symétrie axiale, translation, demi-tour ou quart de tour.

Réponse attendue : `demi-tour` — aussi acceptées : le demi-tour · un demi-tour · c'est un demi-tour · demi tour · un demi tour · demi-tour de centre O · le demi-tour de centre O · symétrie centrale · la symétrie centrale · une symétrie centrale · symétrie centrale de centre O · la symétrie centrale de centre O · symétrie de centre O · la symétrie de centre O

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ordre des sommets est-il inversé ? Regarde dans quel sens tournent A, B, C, puis A', B', C'.
2. $[AB]$ va de $A(2\,;0)$ à $B(4\,;0)$, vers la droite. Et $[A'B']$, de A' à B' ?

CORRECTION

L'ordre des sommets — A, B, C et A', B', C' se suivent tous deux dans le sens direct : ce n'est pas une symétrie axiale.

Les directions — $[AB]$ va vers la droite, $[A'B']$, de $A'(-2\,;0)$ à $B'(-4\,;0)$, vers la gauche : même direction, sens contraires. C'est un demi-tour.

un demi-tour

Son centre est le milieu de $[AA']$, ici l'origine O : chaque coordonnée a simplement changé de signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`quart de tour / un quart de tour / le quart de tour / c'est un quart de tour / quart de tour direct / le quart de tour direct / un quart de tour direct / quart de tour direct de centre O / le quart de tour direct de centre O` → Par un quart de tour, l'image de $[AB]$, horizontal, serait verticale. Ici $[A'B']$ est encore horizontal : la direction n'a pas changé.

`translation / une translation / la translation / c'est une translation` → Par une translation, $[A'B']$ irait dans le même sens que $[AB]$, vers la droite. Ici il va vers la gauche.

`symétrie axiale / la symétrie axiale / une symétrie axiale / c'est une symétrie axiale / symétrie orthogonale / une symétrie orthogonale` → Une symétrie axiale inverse l'ordre des sommets. Ici, A', B', C' tournent dans le même sens que A, B, C.

EXERCICE 80 · PRATIQUE

Laquelle des quatre ? (3)

Dans un repère orthonormé d'origine O, le triangle ABC a pour sommets $A(2\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(2\,;1)$, et le triangle $A'B'C'$ a pour sommets $A'(-2\,;0)$, $B'(-4\,;0)$ et $C'(-2\,;1)$.

$A'B'C'$ est l'image de ABC — A, B, C ayant pour images A', B', C' — par une symétrie axiale, une translation, un demi-tour ou un quart de tour. Laquelle ?

Répondre par : symétrie axiale, translation, demi-tour ou quart de tour.

Réponse attendue : `symétrie axiale` — aussi acceptées : la symétrie axiale · une symétrie axiale · c'est une symétrie axiale · symétrie orthogonale · une symétrie orthogonale

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier test du cours porte sur l'ordre des sommets. A, B, C tournent dans quel sens ? Et A', B', C' ?
2. C est au-dessus de $[AB]$ et à gauche de B. Où est C' par rapport à $[A'B']$ et à B' ?

CORRECTION

L'ordre des sommets — En allant de A à B vers la droite, C est au-dessus : A, B, C tournent dans le sens direct. En allant de A' à B' vers la gauche, C' est encore au-dessus : A', B', C' tournent dans le sens indirect.

Conclusion — L'ordre des sommets est inversé : seule la symétrie axiale fait cela. Ici, son axe est l'axe des ordonnées.

une symétrie axiale

Le piège : $[AB]$ et $[A'B']$ ont même direction et des sens contraires, comme pour un demi-tour. C'est pourquoi le cours fait **d'abord** le test de l'ordre des sommets.

PIÈGES ANTICIPÉS

`demi-tour / le demi-tour / un demi-tour / c'est un demi-tour / demi tour / un demi tour / demi-tour de centre O / le demi-tour de centre O / symétrie centrale / la symétrie centrale / une symétrie centrale / symétrie centrale de centre O / la symétrie centrale de centre O / symétrie de centre O / la symétrie de centre O` → $[AB]$ et $[A'B']$ ont bien des sens contraires, mais un demi-tour garde l'ordre des sommets. Ici il est inversé : regarde où est C' par rapport à $[A'B']$.

`quart de tour / un quart de tour / le quart de tour / c'est un quart de tour / quart de tour direct / le quart de tour direct / un quart de tour direct / quart de tour direct de centre O / le quart de tour direct de centre O` → Par un quart de tour, l'image de $[AB]$, horizontal, serait verticale. Ici $[A'B']$ est horizontal.

`translation / une translation / la translation / c'est une translation` → Par une translation, $[A'B']$ irait dans le même sens que $[AB]$. Ici il va vers la gauche.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Quel sens ?

Dans un repère orthonormé d'origine O, le triangle ABC a pour sommets $A(2\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(2\,;1)$, et le triangle $A'B'C'$ a pour sommets $A'(0\,;-2)$, $B'(0\,;-4)$ et $C'(1\,;-2)$. On sait que $A'B'C'$ est l'image de ABC par un quart de tour de centre O.

Ce quart de tour est-il direct ou indirect ?

Répondre par un mot : direct, ou indirect.

Réponse attendue : `indirect` — aussi acceptées : le quart de tour indirect · quart de tour indirect · un quart de tour indirect · c'est le quart de tour indirect · le quart de tour indirect de centre O · c'est indirect · il est indirect · sens indirect · le sens indirect · dans le sens indirect · sens des aiguilles d'une montre · dans le sens des aiguilles d'une montre · le sens des aiguilles d'une montre · comme les aiguilles d'une montre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Suis un seul point : $A(2\,;0)$ est à droite de O. Où est A' ?
2. De la droite vers le bas, autour de O : est-ce le sens des aiguilles d'une montre, ou le sens contraire ?

CORRECTION

Un point suffit — $A(2\,;0)$ est à droite de O, et $A'(0\,;-2)$ au-dessous.

Le sens — De la droite vers le bas, on tourne comme les aiguilles d'une montre : c'est le sens indirect.

quart de tour indirect de centre O

Contrôle avec un deuxième point : $B(4\,;0)$, à droite, a pour image $B'(0\,;-4)$, en bas. Même sens de rotation.

PIÈGES ANTICIPÉS

`le quart de tour direct / quart de tour direct / un quart de tour direct / c'est le quart de tour direct / le quart de tour direct de centre O / c'est direct / il est direct / sens direct / le sens direct / dans le sens direct / sens contraire des aiguilles d'une montre / dans le sens contraire des aiguilles d'une montre / le sens contraire des aiguilles d'une montre / contraire des aiguilles d'une montre / direct` → Direct, c'est le sens contraire des aiguilles d'une montre : la droite deviendrait le haut. Ici, A, à droite de O, a pour image un point situé au-dessous.

EXERCICE 82 · PRATIQUE

Laquelle des quatre ? (4)

Dans un repère orthonormé d'origine O, le triangle ABC a pour sommets $A(2\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(2\,;1)$, et le triangle $A'B'C'$ a pour sommets $A'(5\,;3)$, $B'(7\,;3)$ et $C'(5\,;4)$.

$A'B'C'$ est l'image de ABC — A, B, C ayant pour images A', B', C' — par une symétrie axiale, une translation, un demi-tour ou un quart de tour. Laquelle ?

Répondre par : symétrie axiale, translation, demi-tour ou quart de tour.

Réponse attendue : `translation` — aussi acceptées : une translation · la translation · c'est une translation

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ordre des sommets est-il inversé ?
2. Compare $[AB]$ et $[A'B']$: directions, et sens de parcours.

CORRECTION

L'ordre des sommets — A', B', C' tournent dans le même sens que A, B, C : ce n'est pas une symétrie axiale.

Les directions — $[AB]$ et $[A'B']$ sont horizontaux, et tous deux vont vers la droite : même direction, même sens. C'est une translation.

une translation

Chaque point a fait le même chemin : 3 carreaux vers la droite, puis 3 vers le haut. C'est la marque d'une translation.

PIÈGES ANTICIPÉS

`quart de tour / un quart de tour / le quart de tour / c'est un quart de tour / quart de tour direct / le quart de tour direct / un quart de tour direct / quart de tour direct de centre O / le quart de tour direct de centre O` → Par un quart de tour, l'image de $[AB]$, horizontal, serait verticale. Ici, $[A'B']$ est horizontal.

`demi-tour / le demi-tour / un demi-tour / c'est un demi-tour / demi tour / un demi tour / demi-tour de centre O / le demi-tour de centre O / symétrie centrale / la symétrie centrale / une symétrie centrale / symétrie centrale de centre O / la symétrie centrale de centre O / symétrie de centre O / la symétrie de centre O` → Par un demi-tour, $[A'B']$ irait dans le sens contraire de $[AB]$. Ici, les deux vont vers la droite.

`symétrie axiale / la symétrie axiale / une symétrie axiale / c'est une symétrie axiale / symétrie orthogonale / une symétrie orthogonale` → Une symétrie axiale inverse l'ordre des sommets. Ici, il est conservé.

EXERCICE 83 · PRATIQUE

Le triangle image, dans le carré

$ABCD$ est un carré de centre O, dont les sommets se suivent dans le sens direct.

Quelle est l'image du triangle ABC par le quart de tour direct de centre O ?

Nommer le triangle par ses trois sommets.

Réponse attendue : BCD — aussi acceptées : BDC · CBD · CDB · DBC · DCB · le triangle BCD · triangle BCD · le triangle CBD · le triangle DCB

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche l'image de chaque sommet, l'un après l'autre.
2. Le quart de tour direct de centre O fait avancer chaque sommet d'un cran dans le sens direct : $A \mapsto B$…

CORRECTION

Les sommets — Les triangles OAB, OBC, OCD, ODA sont rectangles isocèles en O, et les sommets se suivent dans le sens direct :

$A \longmapsto B \quad ; \quad B \longmapsto C \quad ; \quad C \longmapsto D$

Le triangle —

$ABC \longmapsto BCD$

Les deux triangles sont superposables, et rectangles isocèles : ABC en B, et son image BCD en C, image de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

DAB / DBA / ADB / ABD / BAD / BDA → DAB est l'image de ABC par le quart de tour **indirect** : tu as fait reculer chaque sommet d'un cran.

CDA / CAD / DCA / DAC / ACD / ADC → CDA est l'image de ABC par le **demi-tour** de centre O : chaque sommet a avancé de deux crans.

ABC / ACB / BAC / BCA / CAB / CBA → Le triangle ABC n'est pas sa propre image : seul le carré entier l'est. Chaque sommet avance d'un cran.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

Trouver le centre

Dans un repère orthonormé, on donne $A(4\,;1)$, $B(4\,;3)$, $A'(1\,;4)$ et $B'(-1\,;4)$. Le segment $[A'B']$ est l'image du segment $[AB]$ par un quart de tour, A ayant pour image A'.

Donner les coordonnées du centre de ce quart de tour.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(1;1)` — aussi acceptées : (1,1) · Ω(1;1) · Ω(1,1) · 1;1 · 1 et 1 · x=1;y=1 · x=1 et y=1 · (+1;+1) · (+1,+1) · Ω(+1;+1) · +1;+1 · W(1;1) · I(1;1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre est à égale distance de A et de A', et de B et de B' : il est sur les médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$.
2. $[AB]$ monte et $[A'B']$ va vers la gauche : « haut » devient « gauche », c'est le sens direct. Cherche un point Ω tel que le chemin de Ω à A, tourné dans le sens direct, mène à A' ; puis vérifie avec B et B'.

CORRECTION

Les médiatrices — Le centre Ω vérifie $\Omega A = \Omega A'$ et $\Omega B = \Omega B'$: il est à l'intersection des médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$.

Un candidat — Essayons $\Omega(1\,;1)$. De Ω à A : 3 vers la droite ; de Ω à A' : 3 vers le haut. Donc $\Omega A = \Omega A' = 3$ et l'angle $\widehat{A\Omega A'}$ est droit.

La vérification — De Ω à B : 3 à droite, 2 en haut ; tourné dans le sens direct : 3 en haut, 2 à gauche — on arrive en $(1-2\,;1+3) = (-1\,;4)$, c'est B'.

$\Omega(1\,;1)$

C'est le quart de tour **direct** de centre $\Omega(1\,;1)$. Un seul couple de points ne suffit pas à trouver le centre : il en faut deux, ou bien le sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(0;0)` / `(0,0)` / `Ω(0;0)` / `Ω(0,0)` / `0;0` / `0 et 0` / `O` → Le centre n'est pas forcément l'origine : $OA^2 = 17$ et $OA'^2 = 17$, mais $OB^2 = 25$ et $OB'^2 = 17$. L'origine n'est pas à égale distance de B et de B'.

EXERCICE 85 · RAISONNEMENT

Deux indices suffisent

Le triangle PQS est l'image du triangle MNR — M, N, R ayant pour images P, Q, S — par une symétrie axiale, une translation, un demi-tour ou un quart de tour. On sait que M, N, R et P, Q, S tournent dans le même sens, et que les droites (MN) et (PQ) sont perpendiculaires.

Laquelle des quatre transformations est-ce ?

Répondre par : symétrie axiale, translation, demi-tour ou quart de tour.

Réponse attendue : `quart de tour` — aussi acceptées : un quart de tour · le quart de tour · c'est un quart de tour

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier indice élimine une transformation. Laquelle ?
2. Par une translation ou un demi-tour, quelle est la position d'une droite et de son image ?

CORRECTION

Le sens — Les deux triangles tournent dans le même sens : ce n'est pas une symétrie axiale, qui inverse l'ordre des sommets.

Les directions — Par une translation ou un demi-tour, une droite et son image sont parallèles. Ici, (MN) et son image (PQ) sont perpendiculaires.

un quart de tour

Le premier indice est indispensable : une symétrie axiale dont l'axe fait un angle de $45°$ avec (MN) donnerait, elle aussi, une image perpendiculaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`symétrie axiale` / `la symétrie axiale` / `une symétrie axiale` / `c'est une symétrie axiale` / `symétrie orthogonale` / `une symétrie orthogonale` → Une symétrie axiale peut bien donner une image perpendiculaire, mais elle inverse l'ordre des sommets. Ici, les deux triangles tournent dans le même sens.

`translation / une translation / la translation / c'est une translation` → Par une translation, (PQ) serait parallèle à (MN). Ici, elles sont perpendiculaires.

`demi-tour / le demi-tour / un demi-tour / c'est un demi-tour / demi tour / un demi tour / demi-tour de centre O / le demi-tour de centre O / symétrie centrale / la symétrie centrale / une symétrie centrale / symétrie centrale de centre O / la symétrie centrale de centre O / symétrie de centre O / la symétrie de centre O` → Par un demi-tour, (PQ) serait parallèle à (MN). Ici, elles sont perpendiculaires.

`quart de tour direct / le quart de tour direct / un quart de tour direct / quart de tour indirect / le quart de tour indirect / un quart de tour indirect` → C'est bien un quart de tour, mais les deux indices ne disent pas dans quel sens on tourne. Réponds seulement par le nom de la transformation.

EXERCICE 86 · PRATIQUE

D'un sommet à l'opposé

$ABCD$ est un carré de centre O. Une transformation, parmi la symétrie axiale, la translation, le demi-tour et le quart de tour, envoie A sur C et B sur D.

Laquelle ?

Répondre par : symétrie axiale, translation, demi-tour ou quart de tour.

Réponse attendue : `demi-tour` — aussi acceptées : le demi-tour · un demi-tour · c'est un demi-tour · demi tour · un demi tour · demi-tour de centre O · le demi-tour de centre O · symétrie centrale · la symétrie centrale · une symétrie centrale · symétrie centrale de centre O · la symétrie centrale de centre O · symétrie de centre O · la symétrie de centre O

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare le segment $[AB]$ et son image $[CD]$, parcourus de A vers B et de C vers D.
2. $[CD]$ est parallèle à $[AB]$, mais dans quel sens est-il parcouru ?

CORRECTION

Le segment image — $[AB]$ a pour image $[CD]$. Les côtés opposés du carré sont parallèles, et, de C vers D, on va dans le sens contraire de A vers B.

La transformation — Même direction, sens contraires : c'est un demi-tour. Son centre est le milieu de $[AC]$, le centre O du carré, qui est aussi le milieu de $[BD]$.

le demi-tour de centre O

Un quart de tour de centre O envoie A sur un sommet **voisin**, B ou D. Pour atteindre le sommet opposé, il en faut deux : un demi-tour.

PIÈGES ANTICIPÉS

`quart de tour / un quart de tour / le quart de tour / c'est un quart de tour / quart de tour direct / le quart de tour direct / un quart de tour direct / quart de tour direct de centre O / le quart de tour direct de centre O` → Un quart de tour de centre O envoie A sur un sommet voisin, B ou D, pas sur le sommet opposé C. Et $[CD]$ est parallèle à $[AB]$, non perpendiculaire.

`translation / une translation / la translation / c'est une translation` → Une translation qui envoie A sur C enverrait B hors du carré, pas sur D : $[CD]$ est parcouru dans le sens contraire de $[AB]$.

`symétrie axiale / la symétrie axiale / une symétrie axiale / c'est une symétrie axiale / symétrie orthogonale / une symétrie orthogonale` → La symétrie qui envoie A sur C a pour axe la droite (BD) : elle laisse B en place, au lieu de l'envoyer sur D.

EXERCICE 87 · DEFI

Un centre à trouver par le calcul

Dans un repère orthonormé, on donne $A(3\,;0)$, $B(5\,;0)$, $A'(1\,;4)$ et $B'(1\,;6)$. Le segment $[A'B']$ est l'image du segment $[AB]$ par un quart de tour, A ayant pour image A'.

Donner les coordonnées du centre de ce quart de tour.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(0;1)` — aussi acceptées : (0,1) · Ω(0;1) · Ω(0,1) · 0;1 · 0 et 1 · x=0;y=1 · x=0 et y=1 · (0;+1) · (0,+1) · Ω(0;+1) · 0;+1 · W(0;1) · I(0;1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AB]$ va vers la droite et $[A'B']$ vers le haut : dans quel sens a-t-on tourné ? Garde la réponse pour choisir entre deux candidats.
2. Le triangle $\Omega AA'$ est rectangle isocèle en Ω : Ω est un sommet du carré de diagonale $[AA']$. Note K le milieu de $[AA']$: les deux candidats sont les images de A par les deux quarts de tour de centre K.

CORRECTION

Le sens — $[AB]$ va vers la droite, $[A'B']$ vers le haut : « droite » devient « haut », c'est un quart de tour direct.

Deux candidats — Le triangle $\Omega AA'$ est rectangle isocèle en Ω : Ω est l'un des deux autres sommets du carré de diagonale $[AA']$. Les diagonales de ce carré sont égales, perpendiculaires, et se coupent en leur milieu $K(2\,;2)$: ces deux sommets sont les images de A par les quarts de tour de centre K. De K à A : 1 vers la droite, 2 vers le bas. Tourné dans le sens direct : 2 vers la droite, 1 vers le haut, d'où $(4\,;3)$; dans le sens indirect : 2 vers la gauche, 1 vers le bas, d'où $(0\,;1)$.

Le bon candidat — De $(0\,;1)$ à $A(3\,;0)$: 3 à droite, 1 en bas ; tourné dans le sens direct : 3 en haut, 1 à droite, on arrive en $(1\,;4)$, c'est A'. Autour de $(4\,;3)$, on irait de A à A' dans le sens indirect.

$\Omega(0\,;1)$

Vérifie avec B : de $\Omega(0\,;1)$ à $B(5\,;0)$, 5 à droite et 1 en bas ; tourné : 5 en haut et 1 à droite, on arrive en $(1\,;6)$, c'est bien B'. Un point et son image laissent deux centres possibles : c'est le sens qui choisit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(0;0) / (0,0) / Ω(0;0) / Ω(0,0) / 0;0 / 0 et 0 / O` → L'origine n'est pas à égale distance de A et de A' : $OA = 3$, alors que $OA'^2 = 1 + 16 = 17$.

`(2;2) / (2,2) / Ω(2;2) / Ω(2,2) / 2;2 / 2 et 2` → $(2\,;2)$ est le milieu de $[AA']$: ce serait le centre d'un **demi-tour**. Le centre d'un quart de tour est le sommet de l'angle droit du triangle $\Omega AA'$.

`(4;3) / (4,3) / Ω(4;3) / Ω(4,3) / 4;3 / 4 et 3` → $(4\,;3)$ est bien à égale distance de A et de A', avec un angle droit, mais autour de ce point on va de A à A' dans le sens indirect. Or $[AB]$ et $[A'B']$ montrent un quart de tour direct.

EXERCICE 88 · PRATIQUE

L'image d'une droite, dans le repère

Dans un repère orthonormé d'origine O, D est la droite parallèle à l'axe des abscisses qui passe par le point $E(0\,;2)$. Son image par le quart de tour direct de centre O est une droite Δ, qui coupe l'axe des abscisses en H.

Donner les coordonnées du point H.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(-2;0)` — aussi acceptées : (-2,0) · H(-2;0) · H(-2,0) · -2;0 · -2 et 0 · x=-2;y=0 · x=-2 et y=0

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un seul point de D suffit : construis l'image E' de E.
2. Δ passe par E' et elle est perpendiculaire à D, donc parallèle à l'axe des ordonnées. Où coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

CORRECTION

L'image de E — De O à E : 2 vers le haut. Dans le sens direct, « haut » devient « gauche » : $E'(-2\,;0)$

La droite image — Δ passe par E' et elle est perpendiculaire à D : c'est la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par E'. Elle coupe l'axe des abscisses en E' lui-même. $H(-2\,;0)$

Tous les points de Δ ont pour abscisse -2. C'est la première étape de la construction du cours : l'image de D s'obtient avec un seul point.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;0)` / `(2,0)` / `H(2;0)` / `H(2,0)` / `2;0` / `2 et 0` → $(2\,;0)$ vient du quart de tour **indirect** : « haut » devient « droite » dans le sens des aiguilles. Dans le sens direct, il devient « gauche ».

`(0;-2)` / `(0,-2)` / `H(0;-2)` / `H(0,-2)` / `0;-2` / `0 et -2` → $(0\,;-2)$ est le symétrique de E par rapport à O : un demi-tour. Et il n'est pas sur l'axe des abscisses.

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

Le sommet B, sur D'

Dans un repère orthonormé d'origine O, D est la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par $E(0\,;2)$, et D' la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par $F(0\,;-3)$. On cherche un triangle OAB rectangle isocèle en O, avec A sur D, B sur D', et B image de A par le quart de tour direct de centre O.

Donner les coordonnées du point B.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(-2;-3)` — aussi acceptées : (-2,-3) · B(-2;-3) · B(-2,-3) · -2;-3 · -2 et -3 · x=-2;y=-3 · x=-2 et y=-3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Suppose le problème résolu. A est sur D : sur quelle droite se trouve son image B ?
2. B est sur l'image Δ de D — la droite des points d'abscisse -2 — et sur D', la droite des points d'ordonnée -3.

CORRECTION

On suppose le problème résolu — A est sur D, donc son image B est sur l'image Δ de D. L'image de $E(0\,;2)$ est $(-2\,;0)$, et Δ est la perpendiculaire à D en ce point : ses points ont pour abscisse -2.

L'intersection — B est aussi sur D', dont les points ont pour ordonnée -3. B est le point commun de Δ et de D' :

$B(-2\,;-3)$

C'est la méthode du cours : l'image de D ramène deux conditions, « A sur D » et « B sur D' », à une intersection de deux droites.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;-3) / (2,-3) / B(2;-3) / B(2,-3) / 2;-3 / 2 et -3` → $(2\,;-3)$ est la solution avec le quart de tour **indirect** : l'image de D serait alors la droite des points d'abscisse 2.

`(0;-3) / (0,-3) / B(0;-3) / B(0,-3) / 0;-3 / 0 et -3` → $F(0\,;-3)$ est bien sur D', mais rien ne dit que B soit en F : B doit aussi être sur l'image de D.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Puis le sommet A

On reprend l'exercice « Le sommet B, sur D' » : D et D' sont les droites parallèles à l'axe des abscisses passant par $E(0\,;2)$ et par $F(0\,;-3)$, et $B(-2\,;-3)$ est l'image du point A de D par le quart de tour direct de centre O.

Donner les coordonnées du point A.

Écrire le couple $(x\,;y)$ de ses coordonnées.

Réponse attendue : `(-3;2)` — aussi acceptées : (-3,2) · A(-3;2) · A(-3,2) · -3;2 · -3 et 2 · x=-3;y=2 · x=-3 et y=2 · (-3;+2) · (-3,+2) · A(-3;+2) · -3;+2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour revenir de B à A, dans quel sens faut-il tourner autour de O ?
2. De O à B : 2 vers la gauche, 3 vers le bas. Tourne ce chemin dans le sens indirect.

CORRECTION

Le retour — B est l'image de A par le quart de tour direct de centre O : A est l'image de B par le quart de tour indirect de centre O.

Le chemin — De O à B : 2 vers la gauche, puis 3 vers le bas. Dans le sens indirect, « gauche » devient « haut » et « bas » devient « gauche » : 2 vers le haut, puis 3 vers la gauche.

$A(-3\,;2)$

Contrôle : A a pour ordonnée 2, il est bien sur D ; et $OA^2 = 9 + 4 = 13 = OB^2$. Le triangle OAB est rectangle isocèle en O, comme voulu.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3;-2) / (3,-2) / A(3;-2) / A(3,-2) / 3;-2 / 3 et -2` → $(3\,;-2)$ est l'image de B par le quart de tour **direct** : tu as tourné encore dans le même sens. Ce point n'est d'ailleurs pas sur D.

`(0;2) / (0,2) / A(0;2) / A(0,2) / 0;2 / 0 et 2` → $E(0\,;2)$ est sur D, mais $OE = 2$, alors que $OB^2 = 13$: le triangle OEB n'est pas isocèle.

EXERCICE 91 · PRATIQUE

Combien de solutions ?

On reprend les droites D et D' de l'exercice « Le sommet B, sur D' », parallèles à l'axe des abscisses et passant par $E(0\,;2)$ et $F(0\,;-3)$. On cherche les triangles OAB rectangles isocèles en O, avec A sur D et B sur D', en utilisant les deux sens de quart de tour.

Combien y a-t-il de tels triangles ?

Donner le nombre de triangles.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec le quart de tour direct, l'image de D coupe D' en un point. Et avec le quart de tour indirect ?
2. Par le quart de tour indirect, l'image de D est la droite des points d'abscisse 2. Coupe-t-elle D' ?

CORRECTION

Le sens direct — L'image de D est la droite des points d'abscisse -2 : elle coupe D' en $B_1(-2\,;-3)$, et $A_1(-3\,;2)$.

Le sens indirect — L'image de D est la droite des points d'abscisse 2 : elle coupe D' en $B_2(2\,;-3)$, et l'on trouve $A_2(3\,;2)$.

Chaque sens donne un triangle, et ils sont différents.

2 triangles

C'est la remarque du cours : avec le quart de tour indirect, on trouve en général une seconde solution. Les deux triangles sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Tu n'as utilisé qu'un seul sens. Le triangle OAB peut être tourné dans un sens ou dans l'autre : le quart de tour indirect donne une seconde solution.

`4` → Chaque sens donne une seule intersection de l'image de D avec D', donc un seul triangle.

EXERCICE 92 · PRATIQUE

Pourquoi pas perpendiculaires ?

Dans la construction du cours, on donne deux droites D et D' et un point O, et l'on cherche B sur D' et sur l'image Δ de D par un quart de tour de centre O. Supposons que D' soit perpendiculaire à D.

Les droites Δ et D' sont-elles alors parallèles ou perpendiculaires ?

Répondre par un mot : parallèles, ou perpendiculaires.

Réponse attendue : `parallèles` — aussi acceptées : parallèle · elles sont parallèles · sont parallèles · parallèles entre elles · les droites sont parallèles · parallèles ou confondues · elles sont parallèles ou confondues

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que sais-tu de Δ par rapport à D ?
2. Δ et D' sont toutes deux perpendiculaires à D.

CORRECTION

Deux perpendiculaires —

$\Delta \perp D$ et $D' \perp D$

Conclusion — Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles : en général, Δ et D' n'ont aucun point commun, et le point B n'existe pas.

$\Delta \parallel D'$

Voilà pourquoi le cours exige D et D' **non perpendiculaires** : sinon l'intersection qui donne B disparaît — ou bien, si Δ et D' sont confondues, il y a une infinité de solutions.

PIÈGES ANTICIPÉS

`perpendiculaires / perpendiculaire / elles sont perpendiculaires / sont perpendiculaires / perpendiculaires entre elles` → Δ est perpendiculaire à D, pas à D'. Et D' aussi est perpendiculaire à D : deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

`sécantes / elles sont sécantes / elles se coupent` → Si elles se coupaient, on aurait deux droites perpendiculaires à D qui se rencontrent : c'est impossible, sauf si elles sont confondues.

EXERCICE 93 · DEFI

Construire, puis calculer

Dans un repère orthonormé d'origine O, D est la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par $E(0\,;2)$, et D' est la droite qui passe par les points $(0\,;4)$ et $(4\,;0)$: ce sont les points dont la somme des coordonnées vaut 4. OAB est le triangle rectangle isocèle en O, avec A sur D, B sur D', et B image de A par le quart de tour direct de centre O.

Calculer l'aire du triangle OAB, en unités d'aire.

Donner l'aire, en unités d'aire.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Comme dans l'exercice « Le sommet B, sur D' », B est sur l'image de D, la droite des points d'abscisse -2. Quelle est son ordonnée, si B est aussi sur D' ?
2. Une fois B trouvé, l'aire vaut $\frac{OA \times OB}{2} = \frac{OB^2}{2}$.
   $OB^2 = x_B^2 + y_B^2$

CORRECTION

Le point B — B est sur l'image de D : son abscisse vaut -2. Il est sur D' : la somme de ses coordonnées vaut 4, donc son ordonnée vaut $4 - (-2) = 6$.
$B(-2\,;6)$

Contrôle — A est l'image de B par le quart de tour indirect : de O à B, 2 à gauche et 6 en haut ; tourné, 2 en haut et 6 à droite. $A(6\,;2)$ est bien sur D.

La distance — De O à B : 2 vers la gauche, 6 vers le haut.
$OB^2 = 2^2 + 6^2 = 40$

L'aire — Le triangle est rectangle isocèle en O :
$\text{aire de } OAB = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{40}{2} = 20$

La construction a donné les coordonnées, et le triangle caché a donné l'aire. Avec le quart de tour indirect, on trouverait l'autre solution, $B(2\,;2)$ et $A(-2\,;2)$, d'aire 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40` → 40, c'est $OB^2 = OA \times OB$. L'aire du triangle rectangle en est la moitié.

`4` → 4, c'est l'aire de l'**autre** solution, obtenue avec le quart de tour indirect. L'énoncé impose le quart de tour direct.

EXERCICE 94 · BASE **Deux carrés, deux segments égaux**

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de sommet commun A, dont les sommets se suivent tous deux dans le sens direct, et $BE = 7$ cm.

Calculer DG.

Donner la longueur DG en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un quart de tour de centre A qui envoie B sur D. Où envoie-t-il E ?
2. Ce quart de tour envoie le segment $[BE]$ sur le segment $[DG]$. Que conserve-t-il ?

CORRECTION

Le centre et le sens — $ABCD$ est un carré nommé dans le sens direct : D est l'image de B par le quart de tour direct de centre A.

La seconde extrémité — $AEFG$ est aussi nommé dans le sens direct : G est l'image de E par **le même** quart de tour.
$[BE] \longmapsto [DG]$

La conservation —
$DG = BE = 7\ \text{cm}$

La méthode du cours en quatre temps : le centre, le sens, les deux extrémités, la conservation. On n'a jamais eu besoin des côtés des carrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7*sqrt(2) / sqrt(98)` → $[DG]$ n'est pas la distance entre un point et son image : c'est l'image du segment $[BE]$, de même longueur que lui.

EXERCICE 95 · BASE

L'angle entre les deux droites

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de sommet commun A, dont les sommets se suivent tous deux dans le sens direct. Les points B, E, D, G sont distincts.

Donner la mesure de l'angle formé par les droites (BE) et (DG).

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quart de tour direct de centre A envoie B sur D et E sur G. Que devient la droite (BE) ?
2. Une droite et son image par un quart de tour sont…

CORRECTION

Le quart de tour — Le quart de tour direct de centre A envoie B sur D et E sur G : la droite (BE) a pour image la droite (DG).

La propriété — Une droite et son image par un quart de tour sont perpendiculaires.
$(BE) \perp (DG)$
$90°$

Le même quart de tour donne deux résultats d'un coup : $BE = DG$, et $(BE) \perp (DG)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` / `180` → (BE) et (DG) ne sont pas parallèles : l'une est l'image de l'autre par un quart de tour, elles sont donc perpendiculaires.

`45` → $45°$, c'est l'angle entre un côté et une diagonale du carré. L'angle entre une droite et son image par un quart de tour est droit.

EXERCICE 96 · PRATIQUE

Le bon centre

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de sommet commun A, dont les sommets se suivent tous deux dans le sens direct. Un quart de tour envoie le segment $[BE]$ sur le segment $[DG]$, B ayant pour image D.

Quel est le centre de ce quart de tour ?

Nommer le point.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · centre A · le centre A · c'est A · le sommet A · le centre est A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre est à égale distance de B et de son image D, et de E et de son image G.
2. Quel point est à la fois le sommet de l'angle droit du triangle BAD et de celui du triangle EAG ?

CORRECTION

Les deux triangles — ABD est rectangle isocèle en A (dans le carré $ABCD$), et AEG est rectangle isocèle en A (dans le carré $AEFG$).

Le centre — Le sommet commun A envoie, par le même quart de tour direct, B sur D et E sur G.

centre : A

Premier temps de la méthode du cours : repérer le centre, un point d'où partent deux triangles rectangles isocèles. Ici, le sommet commun des deux carrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / le sommet C` → C n'est pas à égale distance de E et de G en général. Le centre doit être le sommet de l'angle droit de **deux** triangles rectangles isocèles : BAD et EAG.

`F / le point F / le sommet F` → F est le sommet opposé à A dans le carré $AEFG$: il n'est pas à égale distance de B et de D en général.

EXERCICE 97 · PRATIQUE

Pythagore, puis le quart de tour

$ABCD$ est un carré de côté 3 cm et $AEFG$ un carré de côté 4 cm, de sommet commun A, dont les sommets se suivent tous deux dans le sens direct. L'angle $\widehat{BAE}$ est droit.

Calculer DG.

Donner la longueur DG en cm, sans l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quart de tour direct de centre A envoie $[BE]$ sur $[DG]$: il suffit de calculer BE.
2. Le triangle ABE est rectangle en A, avec $AB = 3$ cm et $AE = 4$ cm.
   $BE^2 = AB^2 + AE^2$

CORRECTION

Le quart de tour — D est l'image de B et G celle de E par le quart de tour direct de centre A : $DG = BE$.

Pythagore — Dans le triangle ABE rectangle en A :

$BE^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

$DG = BE = 5$ cm

Calculer DG directement serait plus difficile : on ne connaît aucun angle du triangle ADG. Le quart de tour transporte la question dans le triangle ABE, où tout est connu.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → $3 + 4 = 7$: on n'additionne pas les côtés. Dans le triangle ABE, rectangle en A, Pythagore additionne leurs carrés.

1 → $4 - 3 = 1$ ne mesure rien ici. Calcule BE par Pythagore dans le triangle ABE, puis utilise $DG = BE$.

25 → 25, c'est BE^2, donc DG^2. Il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 98 · RAISONNEMENT

Un angle droit au centre

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté 6 cm, dont les sommets se suivent dans le sens direct. M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 2$ cm, et N le point de $[BC]$ tel que $BN = 2$ cm.

Calculer l'angle $\widehat{MON}$.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quart de tour direct de centre O envoie A sur B et B sur C. Où envoie-t-il le segment $[AB]$?
2. M est sur $[AB]$ à 2 cm de A : son image est sur $[BC]$, à 2 cm de B. Quel est ce point ?

CORRECTION

Le quart de tour — Les diagonales du carré sont égales, perpendiculaires et se coupent en leur milieu O : le quart de tour direct de centre O envoie A sur B et B sur C, donc $[AB]$ sur $[BC]$.

L'image de M — L'image de M est sur $[BC]$, et sa distance à B, image de A, vaut $AM = 2$ cm : c'est N.

L'angle — N est l'image de M par un quart de tour de centre O :

$\widehat{MON} = 90°$

On a montré bien plus qu'un angle : $OM = ON$, et le triangle OMN est rectangle isocèle en O. Et cela vaut pour toute longueur $AM = BN$.

PIÈGES ANTICIPÉS

45 → $45°$, c'est l'angle $\widehat{AOM}$ si M était au milieu de $[AB]$. Ici, N est l'image de M par un quart de tour de centre O : l'angle en O est droit.

60 → Le triangle OMN n'est pas équilatéral : N est l'image de M par un quart de tour de centre O, l'angle en O vaut donc $90°$.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

L'aire du triangle OMN

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté 6 cm, dont les sommets se suivent dans le sens direct. M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 2$ cm, et N le point de $[BC]$ tel que $BN = 2$ cm.

Calculer l'aire du triangle OMN.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Comme dans l'exercice « Un angle droit au centre », N est l'image de M par le quart de tour direct de centre O. Quelle est la nature du triangle OMN ?
2. Pour OM^2, note I le milieu de $[AB]$: $OI = 3$ cm, $(OI) \perp (AB)$, et $IM = 1$ cm.

CORRECTION

Le triangle caché — N est l'image de M par le quart de tour direct de centre O : le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

La distance OM — Soit I le milieu de $[AB]$: $OI = 3$ cm, $(OI) \perp (AB)$, et $IM = AI - AM = 3 - 2 = 1$ cm. Dans le triangle OIM rectangle en I :

$$OM^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

L'aire —

$$\text{aire de } OMN = \frac{OM \times ON}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}^2$$

Le quart de tour a transformé une aire difficile en celle d'un triangle rectangle isocèle : il suffisait de connaître OM^2, sans calculer $OM = \sqrt{10}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10, c'est $OM^2 = OM \times ON$. L'aire du triangle rectangle en O en est la moitié.

`4` → 4 cm², c'est l'aire du triangle MBN, rectangle en B : $\frac{4 \times 2}{2}$. On demande celle du triangle OMN.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT

Deux milieux, un centre

$ABCD$ est un carré de centre O, dont les sommets se suivent dans le sens direct. I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[CD]$. Un quart de tour envoie A sur B et I sur J.

Quel est le centre de ce quart de tour ?

Nommer le point.

Réponse attendue : O — aussi acceptées : le point O · point O · le centre O · centre O · c'est O · le centre du carré · centre du carré · le centre est O

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quels sont les deux centres possibles d'un quart de tour qui envoie A sur B ?
2. Le quart de tour direct de centre O envoie B sur C et C sur D. Où envoie-t-il le milieu de $[BC]$?

CORRECTION

A sur B — Le triangle OAB est rectangle isocèle en O : le quart de tour direct de centre O envoie A sur B.

I sur J — Ce même quart de tour envoie B sur C et C sur D, donc $[BC]$ sur $[CD]$. L'image du milieu de $[BC]$ est le milieu de $[CD]$: I a pour image J.

centre : O

On en déduit que (AI) et (BJ) sont perpendiculaires et que $AI = BJ$: $[BJ]$ est l'image de $[AI]$ par ce quart de tour.

PIÈGES ANTICIPÉS

`A / le point A / le sommet A` → A ne peut pas être le centre : il bouge, puisque son image est B.

`B / le point B / le sommet B` → B ne peut pas être le centre : il est l'image de A, donc distinct du centre, qui reste en place.

`C / le point C / le sommet C` → C n'est pas à égale distance de A et de B : CA est une diagonale, CB un côté.

EXERCICE 101 · RAISONNEMENT

Les droites (AI) et (BJ)

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm, dont les sommets se suivent dans le sens direct. I est le point de $[BC]$ tel que $BI = 2$ cm, et J le point de $[CD]$ tel que $CJ = 2$ cm. Les droites (AI) et (BJ) se coupent en H.

Calculer l'angle $\widehat{AHB}$.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un quart de tour qui envoie A sur B et B sur C : son centre est le centre O du carré. Où envoie-t-il le point I ?
2. Ce quart de tour envoie I sur J, donc la droite (AI) sur la droite (BJ). Quelle est la position d'une droite et de son image ?

CORRECTION

Le quart de tour — Soit O le centre du carré. Le quart de tour direct de centre O envoie A sur B, B sur C et C sur D : il envoie $[BC]$ sur $[CD]$.

L'image de I — L'image de I est sur $[CD]$, à $BI = 2$ cm de C, l'image de B : c'est J.

Les droites — La droite (AI) a pour image la droite (BJ) : elles sont perpendiculaires.

$(AI) \perp (BJ)$

H est leur point d'intersection, sur (AI) et sur (BJ) :

$\widehat{AHB} = 90°$

Sans quart de tour, il faudrait comparer des angles dans plusieurs triangles. Le même quart de tour donne aussi $AI = BJ$: $[BJ]$ est l'image de $[AI]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`45` → Les droites (AI) et (BJ) ne font pas un angle de $45°$: l'une est l'image de l'autre par un quart de tour, elles sont perpendiculaires.

`60` → Le triangle AHB n'est pas équilatéral : son angle en H est droit.

EXERCICE 102 · DEFI

Un carré posé sur le centre

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm et de centre E. $AEFG$ est un carré de sommet A, et les sommets de ces deux carrés se suivent dans le sens direct.

Calculer DG.

Donner la valeur exacte de DG en cm, sans écrire l'unité. Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « 7 racine 3 ».

Réponse attendue : `2*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(8)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Comme pour deux carrés de sommet commun A : le quart de tour direct de centre A envoie B sur D et E sur G. Donc $DG = BE$.
2. E est le centre du carré $ABCD$: $[BE]$ est une demi-diagonale. Calcule la diagonale BD.
   $BD^2 = AB^2 + AD^2$

CORRECTION

Le quart de tour — D est l'image de B, et G celle de E, par le quart de tour direct de centre A : $[DG]$ est l'image de $[BE]$.

$$DG = BE$$

La demi-diagonale — Dans le triangle ABD rectangle en A : $BD^2 = 16 + 16 = 32$, donc $BD = 4\sqrt{2}$ cm. E est le milieu de $[BD]$:

$$BE = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

$$DG = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Le côté du petit carré vaut $AE = 2\sqrt{2}$ cm aussi : ici $DG = BE = AE$. Et $(DG) \perp (BD)$, puisque (DG) est l'image de (BE), qui est la droite (BD).

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 cm, c'est le côté du carré $ABCD$. DG est égal à BE, la moitié de la diagonale BD.

`4*sqrt(2) / sqrt(32)` → $4\sqrt{2}$ cm, c'est la diagonale BD entière. E en est le milieu : BE en est la moitié.

`8` → 8, c'est BE^2, donc DG^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`2.83 / 2.8 / 2.828` → C'est une valeur approchée de DG, lue sur la calculatrice. On demande la valeur exacte : écris-la avec une racine carrée, sans arrondir.

EXERCICE 103 · DEFI

Le carré inscrit

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté 6 cm, dont les sommets se suivent dans le sens direct. On place M sur $[AB]$, N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$, tels que $AM = BN = CP = DQ = 2$ cm.

Calculer l'aire du quadrilatère $MNPQ$.

Donner l'aire en cm², sans l'unité.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quart de tour direct de centre O envoie $[AB]$ sur $[BC]$, $[BC]$ sur $[CD]$… Où envoie-t-il M, puis N, puis P ?
2. $MNPQ$ est donc un carré. Calcule le carré de son côté dans le triangle MBN, rectangle en B. $MN^2 = MB^2 + BN^2$

CORRECTION

Le quart de tour — Le quart de tour direct de centre O envoie $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$, et conserve les distances : il envoie M sur N, N sur P, P sur Q et Q sur M.

Un carré — $ON = OM$ et $\widehat{MON} = 90°$, et de même pour les autres sommets : $MNPQ$ est un carré de centre O, et $[NP]$, $[PQ]$, $[QM]$ sont les images successives de $[MN]$.

Son côté — Dans le triangle MBN rectangle en B, $MB = 6 - 2 = 4$ cm et $BN = 2$ cm :
$MN^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

L'aire —
$\text{aire de } MNPQ = MN^2 = 20 \text{ cm}^2$

On retrouve l'aire autrement : le grand carré, 36 cm², moins quatre triangles superposables de $\frac{4\times2}{2} = 4$ cm² chacun : $36 - 16 = 20$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`36` → 36 cm², c'est l'aire du carré $ABCD$. Il faut retirer les quatre triangles des coins, comme MBN.

`2*sqrt(5) / sqrt(20)` → $2\sqrt{5}$ cm, c'est le côté MN du carré $MNPQ$. Son aire est le carré de ce côté.

`28 / 32` → Les quatre coins sont superposables, chacun d'aire $\frac{4\times2}{2} = 4$ cm² : il faut en retirer $4 \times 4 = 16$ du grand carré.