– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Sections planes d'un solide

1re année secondaire · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum nabdaw le chapitre numéro 8 : les sections planes d'un solide. 7atta letawa konna n9isou les solides : une arête, un volume. Lyoum bech n9ossouhom b un plan, w nchoufou ech ta3tina la section : un rectangle, un polygone walla un cercle. Yalla nabdaw.

عسلامة ! لْيوم نبداو le chapitre numéro 8 : les sections planes d'un solide . حتّى لتوّا كنّا نقيسو les solides : une arête ، un volume . لْيوم باش نقصّوهم بـ un plan ، و نشوفو آش تعطينا la section : un rectangle ، un polygone ولّا un cercle . يالله نبداو.

Bonjour ! Aujourd'hui on commence le chapitre numéro 8 : les sections planes d'un solide. Jusqu'ici, on mesurait les solides : une arête, un volume. Aujourd'hui on va les couper par un plan, et regarder ce que donne la section : un rectangle, un polygone ou un cercle. Allons-y.

Jusqu'ici, un solide se mesurait : une arête, une aire, un volume. Ce chapitre le **coupe**.

On remet d'abord en place les solides usuels — prisme droit, pyramide, cylindre, cône de révolution, sphère — et le calcul de leur volume. Puis on les tranche par un plan, et une seule question revient : **quelle figure plane apparaît sur la tranche ?** Un pavé coupé parallèlement à une face donne un rectangle de la taille de cette face ; une pyramide ou un cône coupés parallèlement à la base donnent une **réduction** de la base ; une sphère coupée par un plan qui passe à moins d'un rayon de son centre donne un **cercle**. Les calculs, eux, se font dans des figures que tu connais déjà : le triangle rectangle de Pythagore et le triangle de Thalès.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Calculer le volume d'un prisme droit, d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône de révolution et d'une boule

> Calculer le volume d'un prisme droit, d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône de révolution et d'une boule.
> *Calculer le volume d'un prisme droit, d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône de révolution et d'une boule.*

- Justifier que deux droites sont parallèles quand un plan coupe deux plans parallèles
  > Justifier que deux droites sont parallèles, quand un plan coupe deux plans parallèles.
  > *Justifier que deux droites sont parallèles, quand un plan coupe deux plans parallèles.*
- Reconnaître la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face ou contenant une arête
  > Reconnaître la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, ou par un plan qui contient une arête.
  > *Reconnaître la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, ou par un plan qui contient une arête.*
- Reconnaître et calculer la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base
  > Reconnaître et calculer la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base.
  > *Reconnaître et calculer la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base.*
- Calculer le rayon de la section d'une sphère : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$
  > Calculer le rayon de la section d'une sphère : le petit r égale racine carrée de la parenthèse grand R au carré moins d au carré.
  > *Calculer le rayon de la section d'une sphère : le petit r égale racine carrée de la parenthèse grand R au carré moins d au carré.*
- Utiliser le coefficient de réduction k : longueurs multipliées par k, aires par k^2, volumes par k^3
  > Utiliser le coefficient de réduction k : les longueurs sont multipliées par k, les aires par k au carré, et les volumes par k au cube.
  > *Utiliser le coefficient de réduction k : les longueurs sont multipliées par k, les aires par k au carré, et les volumes par k au cube.*

---

1. ACTIVITÉ

Les solides usuels

CE QU'IL DIT

Nabdaw b les solides elli ta3refhom. Le cube : 6 faces, 8 sommets, w le volume a^3. Le parallélépipède rectangle : zeda 6 faces w 8 sommets, w le volume a × b × c. Le cylindre ma 3andouch sommets, w le volume $\pi R^2 h$: l'aire de la base fois la hauteur.

نبداو بـ les solides اللي تعرفهم . le cube : 6 faces ، 8 sommets ، و le volume l'arête au cube . le
parallélépipède rectangle : زادة 6 faces و 8 sommets ، و le volume la longueur fois la largeur fois la
. le cylindre hauteur ما عندوش sommets ، و hauteur fois la ، π R au carré ، le volume : l'aire de la base

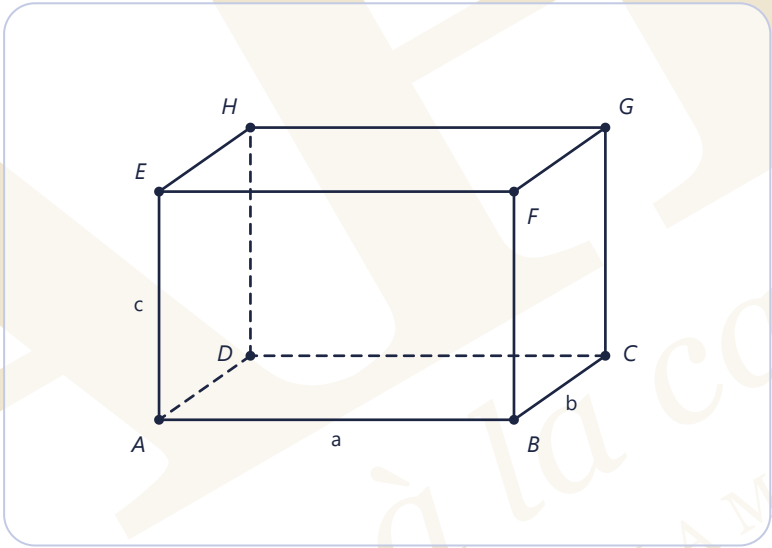
On commence par les solides que tu connais. Le cube : 6 faces, 8 sommets, et un volume égal à l'arête au cube. Le parallélépipède rectangle : 6 faces et 8 sommets lui aussi, et un volume égal à la longueur fois la

largeur fois la hauteur. Le cylindre n'a pas de sommet, et son volume vaut l'aire de la base, π R au carré, fois la hauteur.

Avant de couper un solide, il faut savoir le lire. Pour chacun des trois solides suivants, donne le nombre de faces et de sommets, le volume et l'aire totale.

1. Un **cube** d'arête a.
2. Un **parallélépipède rectangle** — on dit aussi un pavé droit — de dimensions a, b et c.
3. Un **cylindre de révolution** de rayon R et de hauteur h. Il n'a ni sommet ni arête : deux bases qui sont des disques, et une surface latérale.

Pour l'aire latérale du cylindre, déroule-la à plat : c'est un rectangle de hauteur h dont la longueur est le périmètre $2\pi R$ de la base.



Un parallélépipède rectangle : les arêtes cachées sont en pointillés.

Un parallélépipède rectangle ABCDEFGH vu en perspective. La face avant ABFE est un rectangle : A en bas à gauche, B en bas à droite, F en haut à droite, E en haut à gauche. La face du fond DCGH est décalée vers le haut et vers la droite : D est derrière A, C derrière B, H derrière E, G derrière F. Les trois arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les trois dimensions sont notées : a pour la longueur AB, b pour la profondeur BC et c pour la hauteur AE.

CUBE : 6 FACES, 8 SOMMETS

$$V = a^3 \quad ; \quad \text{aire} = 6a^2$$

PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE : 6 FACES, 8 SOMMETS

$$V = a \times b \times c \quad ; \quad \text{aire} = 2(ab + bc + ca)$$

CYLINDRE DE RAYON R ET DE HAUTEUR H

$$V = \pi R^2 h \quad ; \quad \text{aire} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

2. PROPRIÉTÉ

Prisme droit et pyramide : le volume

CE QU'IL DIT

Le prisme droit : l'aire de la base fois la hauteur. La pyramide : nafs el 7aja, ama na9smou 3la 3. 3lech ? Khater une pyramide elli 3andha nafs la base w nafs la hauteur mte3 un prisme, t3ammer ken le tiers mte3ou. W la hauteur, hiya la distance du sommet au plan de la base, mouch l'arête.

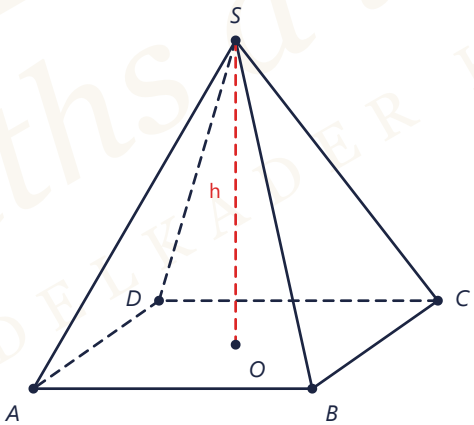
le prisme droit : l'aire de la base fois la hauteur . la pyramide نفس الحاجة ، أما نقسمو على 3 . علاش ؟
خاطر une pyramide اللي عندها نفس la base و نفس la hauteur متاع un prisme ، تعمّر كان le tiers متاعو . و la hauteur ، هي la distance du sommet au plan de la base ، موش l'arête .

Le prisme droit : l'aire de la base fois la hauteur. La pyramide : la même chose, mais on divise par 3. Pourquoi ? Parce qu'une pyramide qui a la même base et la même hauteur qu'un prisme n'en remplit que le tiers. Et la hauteur, c'est la distance du sommet au plan de la base, pas l'arête.

Un **prisme droit** a deux bases superposables, l'une au-dessus de l'autre, et des faces latérales qui sont des rectangles. Le cube et le pavé droit en sont des cas particuliers.

Une **pyramide** a une base polygonale et un **sommet** S relié à tous les sommets de la base : ses faces latérales sont des triangles. Sa **hauteur** est la distance de S au plan de la base. Un **tétraèdre** est une pyramide à base triangulaire.

En notant B l'aire de la base et h la hauteur :



La hauteur [SO] tombe sur la base ; l'arête [SA] est oblique.

Une pyramide SABCD à base carrée, vue en perspective. La base ABCD est dessinée comme un parallélogramme : A en bas à gauche, B en bas à droite, C derrière B, D derrière A. Le sommet S est au-dessus du centre O de la base. Les arêtes [SA], [SB] et [SC] sont en traits pleins ; l'arête [SD] et les côtés [AD] et [DC], cachés, sont en pointillés. La hauteur [SO], en pointillés rouges, tombe perpendiculairement sur la base en O et porte la lettre h : elle est plus courte que les arêtes latérales.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

PRISME DROIT

$$V_{\text{prisme}} = B \times h$$

PYRAMIDE, TÉTRAÈDRE

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \times B \times h$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un prisme droit a pour base un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $3{,}2$ cm et $1{,}8$ cm. Sa hauteur est $h = 4$ cm. Calculer son volume.

L'aire de la base — La base est un triangle rectangle : son aire est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

$$B = \frac{3{,}2 \times 1{,}8}{2} = 2{,}88 \text{ cm}^2$$

Le volume — Pour un prisme, c'est l'aire de la base fois la hauteur, sans facteur un tiers.

$$V = B \times h = 2{,}88 \times 4$$

$$V = 11{,}52 \text{ cm}^3$$

À ne pas faire : $V_{\text{pyramide}} = B \times h$ — $V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \times B \times h$. Une pyramide qui a la même base et la même hauteur qu'un prisme n'en remplit que **le tiers**. Oublier le facteur un tiers triple le volume.

À ne pas faire : La hauteur d'une pyramide est la longueur d'une arête latérale. — La hauteur est la distance du sommet S au plan de la base.. L'arête $[SA]$ est oblique : elle est plus longue que la hauteur $[SO]$, qui tombe perpendiculairement sur la base.

3. DÉFINITION

Sphère et boule

CE QU'IL DIT

La sphère, hiya la surface, kif la peau mte3 un ballon. La boule, hiya el solide el kol, el ballon bima fih. L'aire de la sphère = 4πR², w le volume de la boule = 4/3 πR³. W radd belek : R houwa le rayon, mouch le diamètre.

. بما فيه ballon الـ ، الكلّ solide هي الـ ، un ballon . la boule متاع la peau كيف ، la surface هي ، la sphère . le volume de la boule égale les quatre tiers de π R au cube و ، l'aire de la sphère égale 4 π R au carré و

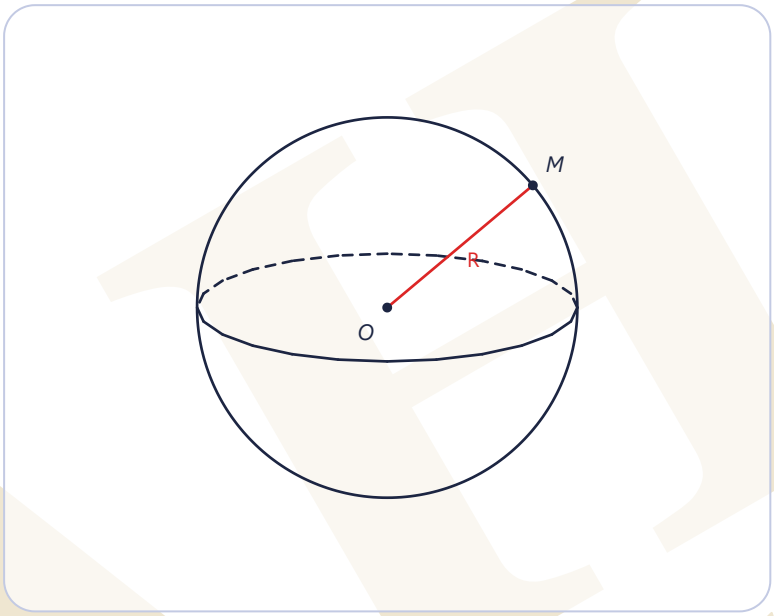
ردّ بالك : R هو le rayon ، موش le diamètre .

La sphère, c'est la surface, comme la peau d'un ballon. La boule, c'est le solide tout entier, le ballon avec ce qu'il contient. L'aire de la sphère vaut 4 π R au carré, et le volume de la boule vaut les quatre tiers de π R au cube. Et attention : R, c'est le rayon, pas le diamètre.

La **sphère** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés **à la distance R** de O. C'est une surface, comme la peau d'un ballon.

La **boule** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés **à une distance inférieure ou égale à R** de O. C'est le solide plein : le ballon avec tout ce qu'il contient.

On calcule donc l'**aire d'une sphère** et le **volume d'une boule**.



Tous les points de la sphère sont à la distance R du centre O.

Une sphère de centre O, dessinée comme un cercle. Une ellipse horizontale passe par le centre : c'est l'équateur vu en perspective, sa moitié avant en trait plein et sa moitié arrière, cachée, en pointillés. Un rayon [OM], en rouge, va du centre O à un point M de la sphère et porte la lettre R.

$$\text{aire de la sphère} = 4\pi R^2$$

$$\text{volume de la boule} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un ballon a un diamètre de 50 cm. Calculer l'aire de sa surface et son volume, en fonction de π.

Le rayon d'abord — Les formules demandent le rayon, pas le diamètre.

$$R = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$$

L'aire — On élève le rayon au carré, puis on multiplie par 4π.

$$4\pi R^2 = 4\pi \times 25^2 = 2500\pi \text{ cm}^2$$

Le volume — On élève le rayon au cube.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 25^3 = \frac{62500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{62500\pi}{3} \approx 65450 \text{ cm}^3$$

À ne pas faire : $R = 50$ cm, donc l'aire vaut $4\pi \times 50^2$. — $R = 25$ cm, donc l'aire vaut $4\pi \times 25^2$.. Les formules parlent du **rayon**. Avec le diamètre, l'aire serait multipliée par 4 et le volume par 8.

---

4. PROPRIÉTÉ

Le cône de révolution

CE QU'IL DIT

El cône de révolution, njibouh ki ndawrou un triangle SOA, rectangle en O, 3la la droite (SO). El volume, kif la pyramide : un tiers de l'aire de la base fois la hauteur. W la génératrice [SA], hiya l'hypoténuse mte3 le triangle SOA, na7sbouha b Pythagore. W l'aire latérale mte3ou : π × R × ℓ.

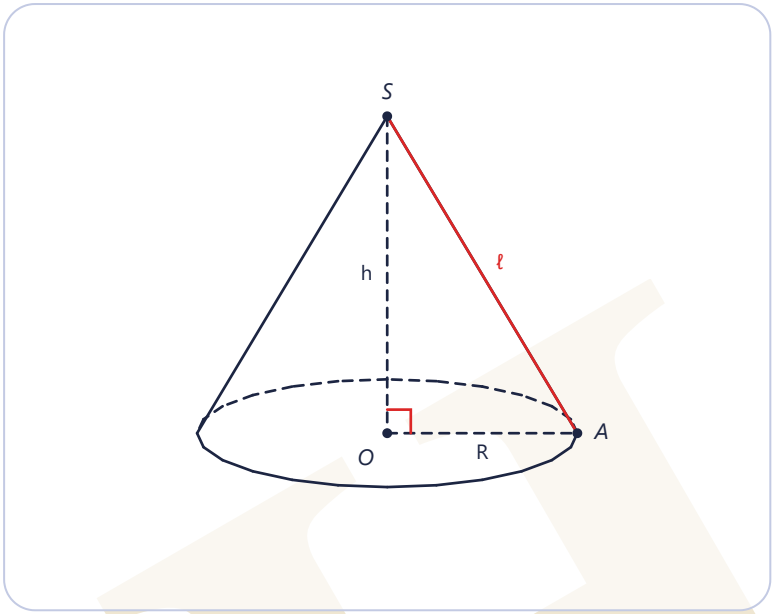
الـ cône de révolution ، نجيبوه كي ندوّرو un triangle S O A ، rectangle en O على ، la droite S O . الـ volume l'hypoténuse هي ، la génératrice S A و . la pyramide : un tiers de l'aire de la base fois la hauteur كيف ، متاع le triangle S O A ، نحسبوها بـ Pythagore . و l'aire latérale متاعو : π fois R fois la génératrice.

Le cône de révolution, on l'obtient en faisant tourner un triangle S O A, rectangle en O, autour de la droite S O. Le volume, c'est comme pour la pyramide : un tiers de l'aire de la base fois la hauteur. Et la génératrice S A, c'est l'hypoténuse du triangle S O A : on la calcule avec Pythagore. Son aire latérale, enfin : π fois R fois la génératrice.

Fais tourner un triangle SOA rectangle en O autour de la droite (SO) : il engendre un **cône de révolution**. Le point S est son **sommet**, le disque de centre O et de rayon $R = OA$ est sa **base**, $h = SO$ est sa **hauteur**, et le segment $[SA]$ est une **génératrice**.

Le triangle SOA reste rectangle en O : la longueur $\ell = SA$ d'une génératrice se calcule par le théorème de Pythagore.

Mis à plat, la surface latérale du cône est une portion de disque de rayon ℓ : la longueur de son arc est le périmètre $2\pi R$ de la base, et son angle mesure $a = 360 \times \dfrac{R}{\ell}$ degrés. Son aire, la fraction $\dfrac{a}{360}$ du disque de rayon ℓ, est l'**aire latérale** du cône : $\dfrac{a}{360} \times \pi\ell^2 = \pi R\ell$.



Le triangle SOA, rectangle en O, engendre le cône en tournant autour de (SO).

Un cône de révolution de sommet S, posé sur sa base. La base est un disque de centre O, dessiné en perspective comme une ellipse : la moitié avant en trait plein, la moitié arrière en pointillés. Deux génératrices partent de S vers les deux bords de la base, dont [SA] à droite, repassée en rouge et notée ℓ. La hauteur [SO] et le rayon [OA], cachés à l'intérieur du cône, sont en pointillés : [SO] est verticale et notée h, [OA] est horizontal et noté R. L'angle SOA porte la marque de l'angle droit : le triangle SOA est rectangle en O.

VOLUME

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

LA GÉNÉRATRICE

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$

ANGLE DU PATRON, EN DEGRÉS

$$a = 360 \times \frac{R}{\ell}$$

LE PATRON MIS À PLAT

$$\text{aire latérale} = \pi R \ell$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un cône de révolution a pour rayon de base $R = 3$ cm et pour hauteur $h = 4$ cm. Calculer la longueur d'une génératrice, l'angle de son patron, puis son volume en fonction de π.

La génératrice — Le triangle SOA est rectangle en O : théorème de Pythagore.

$$SA^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad \text{donc} \quad SA = 5 \text{ cm}$$

L'angle du patron —

$$a = 360 \times \frac{3}{5} = 216°$$

Le volume — Un tiers de l'aire de la base, fois la hauteur.

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4$$

$$V = 12\pi \approx 37{,}7 \text{ cm}^3$$

À ne pas faire : La génératrice $[SA]$ est la hauteur du cône. — La hauteur est $[SO]$; la génératrice $[SA]$ est l'hypoténuse du triangle SOA.. Dans le triangle rectangle SOA, l'hypoténuse $[SA]$ est le plus long côté : une génératrice est toujours plus longue que la hauteur.

---

5. ACTIVITÉ

Deux plans parallèles et un troisième

CE QU'IL DIT

P w Q parallèles : ma 3andhomch 7atta point commun. Le plan H y9oss P fi la droite D, w y9oss Q fi la droite D'. D w D' fi nafs el plan H, w ma yetla9aouch, khater P w Q ma yetla9aouch. Donc D w D' parallèles. Hedhi hiya el clé mte3 koll section : les côtés elli 3la deux faces parallèles yotl3ou parallèles.

P و Q parallèles : ما عندهمش حتى point commun . le plan H يقصّ P في la droite D ، و يقصّ Q في la
D و donc D . ما يتلاقاوش P و Q ، خاطر ما يتلاقاوش ، و plan H الـ في نفس D prime و droite D prime . D
يطلعو deux faces parallèles على اللي section : les côtés كل متاع clé الـ هاذي هي . prime parallèles
. parallèles

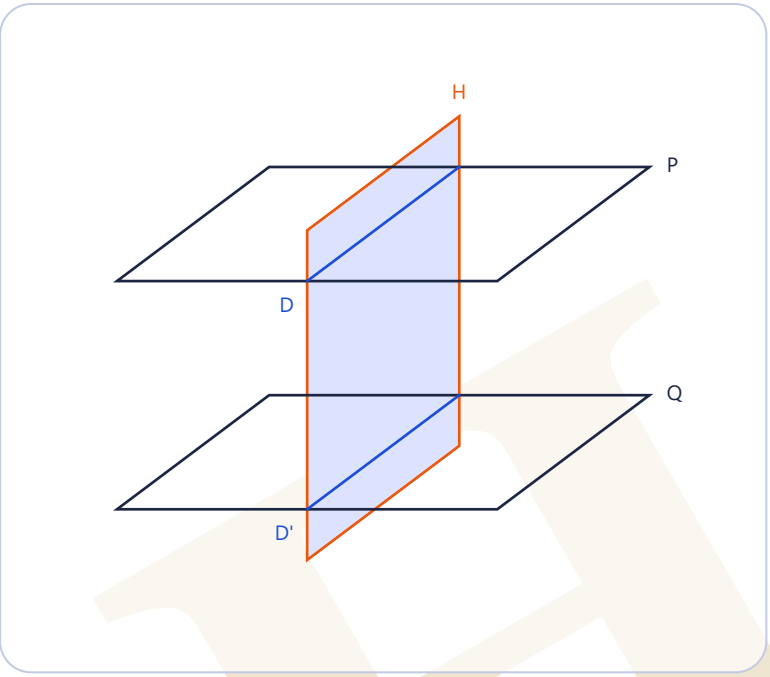
P et Q sont parallèles : ils n'ont aucun point commun. Le plan H coupe P suivant la droite D, et Q suivant la droite D prime. D et D prime sont dans le même plan H, et elles ne peuvent pas se rencontrer, puisque P et Q ne se rencontrent pas. Donc D et D prime sont parallèles. C'est la clé de toutes les sections : deux côtés tracés sur deux faces parallèles sont parallèles.

Dans l'espace, deux plans sont **parallèles** quand ils n'ont aucun point commun, ou quand ils sont confondus.

Sur la figure, les plans P et Q sont parallèles et distincts. Un troisième plan H coupe P suivant la droite D.

1. Explique pourquoi H coupe aussi Q, suivant une droite qu'on note D'.
2. Les droites D et D' sont dans un même plan, H. Peuvent-elles avoir un point commun ? Déduis-en qu'elles sont parallèles.
3. Justifie que la droite D est parallèle au plan Q.

Une dernière remarque, qui servira à chaque section : une droite **perpendiculaire à un plan** est orthogonale à **toutes** les droites de ce plan ; et si elle est perpendiculaire à P, elle l'est aussi à tout plan parallèle à P.



Le plan H coupe les plans parallèles P et Q suivant deux droites parallèles.

Deux plans horizontaux parallèles, dessinés comme deux parallélogrammes superposés : P en haut et Q en bas. Un troisième plan H, vertical et ombré, les traverse tous les deux. Il coupe P suivant la droite D et Q suivant la droite D', toutes deux tracées en bleu : D' est exactement sous D, et les deux droites ont la même direction.

6. PROPRIÉTÉ

Un plan coupe deux plans parallèles

CE QU'IL DIT

El propriété : ki un plan y9oss deux plans parallèles, ya3tik deux droites parallèles. W radd belek : fi l'espace, deux droites elli ma yetla9aouch, mouch lezem ykounou parallèles. Lezemhom ykounou fi nafs el plan.

الـ propriété : كي un plan يقصّ deux plans parallèles ، يعطيك deux droites parallèles . و ردّ بالك : في l'espace ، deux droites اللي ما يتلاقاوش ، موش لازم يكونو parallèles . لازمهم يكونو في نفس الـ plan .

La propriété : quand un plan coupe deux plans parallèles, il donne deux droites parallèles. Et attention : dans l'espace, deux droites qui ne se rencontrent pas ne sont pas forcément parallèles. Il faut qu'elles soient dans un même plan.

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe aussi l'autre, et les deux **droites d'intersection sont parallèles**.

C'est l'outil de toutes les sections : deux faces opposées d'un pavé, la base d'une pyramide et un plan parallèle à cette base sont des plans parallèles. Le plan de coupe y trace donc des côtés parallèles.

P parallèle à Q et $H \cap P = D \implies H \cap Q = D'$, parallèle à D

À ne pas faire : Deux droites de l'espace qui ne se coupent pas sont parallèles. — Deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles **si elles sont dans un même plan**.. Dans l'espace, deux droites peuvent ne jamais se rencontrer sans être parallèles : dans un pavé, l'arête $[AB]$ de la face du dessous et l'arête verticale $[CG]$ en sont un exemple.

---

7. ACTIVITÉ

Trancher un pavé

CE QU'IL DIT

Chouf le plan P : parallèle à la face ADHE. Y9oss la face du dessous w la face du dessus, w houma parallèles, donc (IJ) w (KL) parallèles. Nafs el 7aja m3a la face avant w la face arrière : (JK) w (IL) parallèles. Parallélogramme, w fih angle droit, donc rectangle. W zid : IJ = AD, w JK = AE : el section 3andha nafs les dimensions mte3 la face ADHE.

شوف le plan P : parallèle à la face A D H E . يقصّ la face du dessous و la face du dessus ، و هوما parallèles ، donc I J و parallèles . K L نفس الحاجة مع la face avant و la face arrière : J K . و I L parallèles section الـ : J K égale A E ، و I J égale A D : و زيد . angle droit ، donc rectangle و فيه ، parallélogramme عندها نفس les dimensions متاع la face A D H E .

Regarde le plan P : il est parallèle à la face A D H E. Il coupe la face du dessous et la face du dessus, qui sont parallèles, donc I J et K L sont parallèles. Même chose avec la face avant et la face arrière : J K et I L sont parallèles. C'est un parallélogramme avec un angle droit, donc un rectangle. Et de plus, I J égale A D, et J K égale A E : la section a exactement les dimensions de la face A D H E.

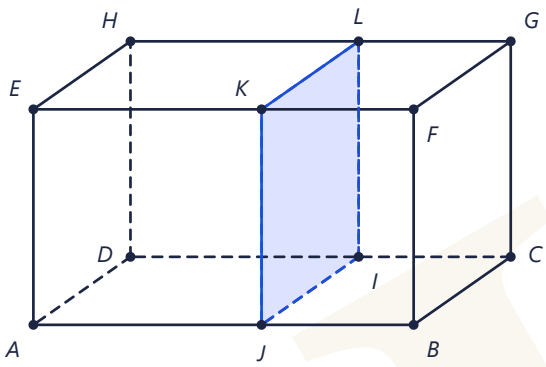
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle : $ABCD$ est la face du dessous, $EFGH$ celle du dessus, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont les arêtes verticales.

Première coupe. Par un point I de l'arête $[DC]$, on mène le plan P parallèle à la face $ADHE$. Il coupe $[AB]$ en J, $[EF]$ en K et $[HG]$ en L.

1. En utilisant les faces opposées du pavé, montre que $IJKL$ est un parallélogramme.
2. Pourquoi l'angle en J est-il droit ? Quelle est la nature de $IJKL$?
3. Compare IJ avec AD, et JK avec AE.

Deuxième coupe. On coupe maintenant le pavé par le plan qui contient les deux arêtes verticales $[AE]$ et $[CG]$.

1. Quelle est la nature de la section $ACGE$? Ses côtés $[AE]$ et $[AC]$ ont-ils la même longueur ?



La section IJKL, parallèle à la face ADHE.

Un parallélépipède rectangle ABCDEFGH en perspective : face du dessous ABCD, face du dessus EFGH ; A en bas à gauche devant, B en bas à droite devant, D et C derrière A et B, et E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Un point I est placé sur l'arête [DC]. Le plan parallèle à la face de gauche ADHE passant par I découpe dans le pavé le quadrilatère IJKL, ombré en bleu, avec J sur [AB], K sur [EF] et L sur [HG]. Ses côtés [IJ] et [IL], cachés, sont en pointillés ; [JK] et [KL] sont en traits pleins.

8. PROPRIÉTÉ

Section d'un parallélépipède rectangle

CE QU'IL DIT

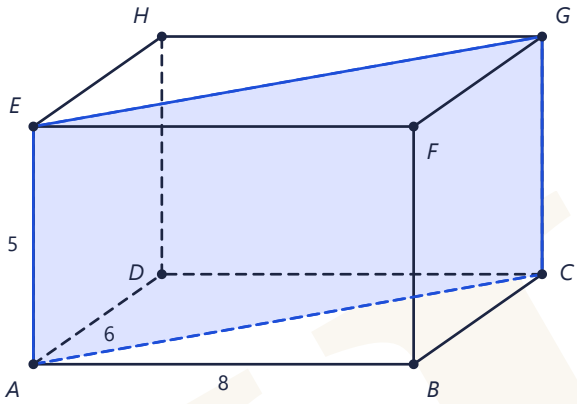
Zouz 7alet. Ki le plan parallèle à une face, el section rectangle isométrique à la face : nafs les dimensions bedhabt. Ki le plan contient une arête, el section rectangle zeda, ama el côté le5or mayel, marsoum 3la une face, w na7sbouh b Pythagore.

زوز حالات . كي le plan parallèle à une face ، الـ section rectangle isométrique à la face : نفس les dimensions بالضبط . كي le plan contient une arête ، الـ section rectangle زادة ، أما الـ côté الآخر مايل ، مرسوم على une face ، و نحسبوه بـ Pythagore .

Deux cas. Quand le plan est parallèle à une face, la section est un rectangle isométrique à cette face : exactement les mêmes dimensions. Quand le plan contient une arête, la section est encore un rectangle, mais son autre côté est oblique, tracé sur une face, et on le calcule avec Pythagore.

La section d'un parallélépipède rectangle par un plan **parallèle à une face** est un rectangle **isométrique à cette face** : mêmes dimensions, même aire.

La section d'un parallélépipède rectangle par un plan **contenant une arête** est un **rectangle**. Un de ses côtés est cette arête ; l'autre est un segment oblique tracé sur une face, hypoténuse d'un triangle rectangle : on le calcule par le théorème de Pythagore. Quand le plan contient aussi l'arête opposée, ce côté est la diagonale d'une face.



Un plan qui contient l'arête [AE] : la section ACGE est un rectangle.

Un parallélépipède rectangle ABCDEFGH en perspective : A en bas à gauche devant, B en bas à droite devant, D et C derrière A et B, et E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D ; les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les longueurs AB = 8, AD = 6 et AE = 5 sont notées sur les arêtes. Le plan qui contient les deux arêtes verticales [AE], devant à gauche, et [CG], derrière à droite, coupe le pavé en diagonale. La section ACGE est ombrée en bleu : ses côtés [AE] et [CG] sont des arêtes, son côté [EG] est la diagonale de la face du dessus, et son côté [AC], en pointillés, la diagonale de la face du dessous.

PARALLÈLE À UNE FACE

P parallèle à $(ADHE) \implies IJKL$ est un rectangle isométrique à $ADHE$

LE CÔTÉ OBLIQUE DE LA SECTION ACGE

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un parallélépipède rectangle a pour face du dessous $ABCD$ et pour face du dessus $EFGH$, avec $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm et $AE = 5$ cm. On le coupe par le plan qui contient les arêtes verticales $[AE]$ et $[CG]$. Calculer les dimensions et l'aire de la section $ACGE$.

La nature — Le plan contient l'arête $[AE]$: la section $ACGE$ est un rectangle. Un de ses côtés est l'arête $[AE]$, de longueur 5 cm.

Le côté AC — $[AC]$ est la diagonale de la face du dessous $ABCD$. Le triangle ABC est rectangle en B, avec $BC = AD = 6$ cm : le théorème de Pythagore donne sa longueur.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad \text{donc} \quad AC = 10 \text{ cm}$$

L'aire —

$$\text{aire}(ACGE) = AC \times AE = 10 \times 5$$

$$\text{aire}(ACGE) = 50 \text{ cm}^2$$

À ne pas faire : La section par un plan parallèle à une face est un rectangle plus petit que cette face. — Elle est **isométrique** à cette face : mêmes dimensions.. Le pavé a la même épaisseur partout : où que l'on coupe

parallèlement à une face, on retrouve exactement cette face. Seules la pyramide et le cône rétrécissent vers leur sommet.

À ne pas faire : La section $ACGE$ est isométrique à la face $ABFE$. — $ACGE$ a pour côtés l'arête $[AE]$ et la diagonale $[AC]$ de la face $ABCD$.. Un plan qui contient une arête sans être une face coupe le pavé en biais : son côté oblique, $AC = 10$ cm, est plus long que l'arête $AB = 8$ cm.

---

9. ACTIVITÉ

Trancher une pyramide

CE QU'IL DIT

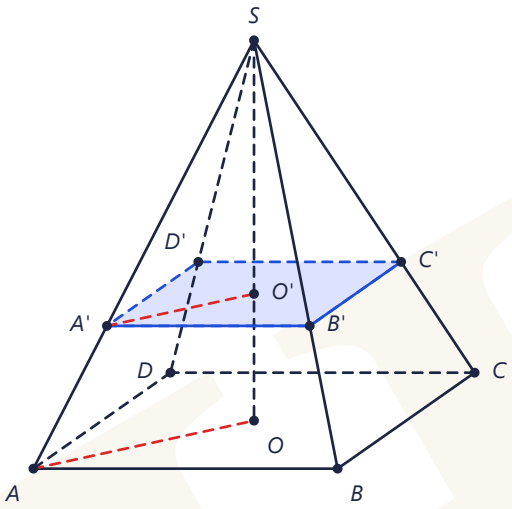
El plan P parallèle à la base, donc y9oss koll arête bin S w la base. Fi le triangle SAO, (A'O') parallèle à (AO) : hedha Thalès. SA'/SA = SO'/SO, ya3ni 12/18, 2/3. W nafs el rapport 3la koll côté : el section carré, w le côté mte3ou 12 × 2/3, 8 cm.

le triangle S A O ، A prime O prime في . la base و S بين arête كل يقصّ plan P parallèle à la base ، donc الـ نفس و . sur 18 ، 2 sur 3 12 يعني ، Thalès . S A prime sur S A égale S O prime sur S O هذا : parallèle à A O . fois 2 sur 3 ، 8 centimètres 12 متاعو le côté و ، section carré الـ : côté كل على rapport الـ

Le plan P est parallèle à la base, donc il coupe chaque arête entre S et la base. Dans le triangle S A O, A prime O prime est parallèle à A O : c'est Thalès. S A prime sur S A égale S O prime sur S O, c'est-à-dire 12 sur 18, soit 2 sur 3. Et le même rapport vaut sur chaque côté : la section est un carré, de côté 12 fois 2 sur 3, 8 centimètres.

$SABCD$ est une pyramide de sommet S ; sa base $ABCD$ est un carré de côté 12 cm de centre O, et sa hauteur SO mesure 18 cm. On la coupe par un plan P parallèle à la base, à 12 cm du sommet. Le plan P coupe $[SA]$ en A' et $[SO]$ en O'.

1. Explique pourquoi P coupe aussi les arêtes $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$, en des points B', C' et D'.
2. Pourquoi $(A'O')$ est-elle parallèle à (AO) ? Déduis-en la valeur du rapport $\dfrac{SA'}{SA}$.
3. Justifie que $A'B'C'D'$ est un carré. Quelle est la longueur de son côté ?
4. Quelle fraction de l'aire de la base l'aire de la section représente-t-elle ?



La section A’B’C’D’ est parallèle à la base ABCD.

Une pyramide SABCD à base carrée, en perspective : A en bas à gauche, B en bas à droite, C derrière B, D derrière A, et le sommet S au-dessus du centre O de la base. La hauteur [SO] est en pointillés, comme les arêtes cachées [SD], [AD] et [DC]. Un plan parallèle à la base coupe la pyramide aux deux tiers de la hauteur en partant de S : la section A'B'C'D', ombrée en bleu, est un carré plus petit que la base, avec A' sur [SA], B' sur [SB], C' sur [SC] et D' sur [SD]. Le plan coupe la hauteur en O'. Les segments [A'O'] et [AO], en pointillés rouges, sont parallèles.

10. PROPRIÉTÉ

Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base

CE QU’IL DIT

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base : un polygone de même nature que la base. Base carrée, section carrée. Ama asghar : une réduction, w le coefficient k = SO'/SO. Dima tebda men le sommet.

la section d'une pyramide par un plan parallèle à la base : un polygone de même nature que la base . ديما . le coefficient k égale S O prime sur S O و ، une réduction : أما أصغر . base carrée ، section carrée . le sommet تبدا من

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base : un polygone de même nature que la base. Base carrée, section carrée. Mais plus petite : c'est une réduction, de coefficient k égale S O prime sur S O. On part toujours du sommet.

La section d'une pyramide par un plan **parallèle à sa base** est un polygone **de même nature que la base** : un triangle pour un tétraèdre, un carré pour une base carrée, un hexagone pour une base hexagonale.

Plus précisément, c'est une **réduction** de la base. Si le plan coupe la hauteur $[SO]$ en O', le coefficient de réduction est

$$k = \frac{SO'}{SO},$$

et chaque côté de la section vaut k fois le côté correspondant de la base. Le rapport se lit **depuis le sommet** : c'est la distance du sommet au plan de coupe, divisée par la hauteur.

LE COEFFICIENT DE RÉDUCTION

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$$

EXEMPLE TRAITÉ

$SABCD$ est une pyramide à base carrée de côté 10 cm et de hauteur $SO = 15$ cm. On la coupe par un plan parallèle à la base, à 9 cm du sommet. Calculer le côté de la section, puis son aire.

Le coefficient — La distance se compte depuis le sommet : $SO' = 9$ cm.

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Le côté — La section est un carré, réduction de la base.

$$A'B' = \frac{3}{5} \times 10 = 6 \text{ cm}$$

L'aire —

$$\text{aire}(A'B'C'D') = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{aire}(A'B'C'D') = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

À ne pas faire : $k = \frac{6}{15}$, avec la distance du plan à la base — $k = \frac{9}{15}$: la distance se compte depuis le sommet. La petite pyramide a le même sommet S que la grande : c'est depuis S que tout se réduit. La distance à la base donne la hauteur du tronc, pas celle de la petite pyramide.

À ne pas faire : La section a la même aire que la base, comme pour le pavé. — La section est une réduction de la base, de coefficient $k < 1$.. Les arêtes latérales se rapprochent en montant vers S : plus on coupe près du sommet, plus la section est petite.

11. ACTIVITÉ

Trancher un cône

CE QU'IL DIT

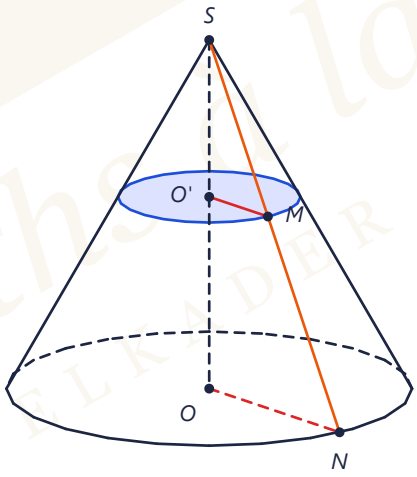
N9ossou le cône b un plan parallèle à la base. Nekhdhou un point M mel section, w la droite (SM) tousel lel cercle fi N. Fi le triangle SON, (O'M) parallèle à (ON), donc Thalès : O'M/ON = SO'/SO. Ya3ni O'M = R × d/h. W hedha ma yetbaddelch ki nbaddlou M : les points el kol 3la nafs el distance men O'. Donc el section cercle.

نقصّو le cône بـ un plan parallèle à la base . ناخذو un point M من الـ section ، و la droite S M توصل للـ le triangle S O N ، O prime M parallèle à O N ، donc Thalès : O prime M sur O N égale في . N في cercle S O prime sur S O . يعني O prime M égale R fois d sur la hauteur . و هذا ما يتبدّلش كي نبدّلو les points الكلّ على نفس الـ distance من donc . section cercle الـ O prime .

On coupe le cône par un plan parallèle à la base. On prend un point M de la section, et la droite S M atteint le cercle en N. Dans le triangle S O N, O prime M est parallèle à O N, donc Thalès : O prime M sur O N égale S O prime sur S O. Autrement dit, O prime M égale R fois d sur la hauteur. Et cela ne change pas quand on change de point M : tous les points sont à la même distance de O prime. La section est donc un cercle.

Un cône de révolution de sommet S et de hauteur h a pour base le cercle (C) de centre O et de rayon R. On le coupe par un plan P parallèle à la base, à la distance d du sommet.

1. La droite (SO) est perpendiculaire à la base. Justifie qu'elle est aussi perpendiculaire à P, en un point O' tel que $SO' = d$.
2. Soit M un point de la section. La droite (SM) coupe le cercle (C) en N. Explique pourquoi $(O'M)$ et (ON) sont parallèles.
3. Exprime $O'M$ en fonction de R, d et h.
4. $O'M$ dépend-il du point M choisi ? Déduis-en la nature de la section.



Dans le triangle SON, la droite (O'M) est parallèle à (ON).

Un cône de révolution de sommet S, en haut, et de base le cercle (C) de centre O, en bas, dessiné en ellipse dont la moitié arrière est en pointillés. La hauteur [SO] est en pointillés. Un plan parallèle à la base coupe le cône un peu au-dessus de la moitié : la section, ombrée en bleu, est un disque de centre O' situé sur [SO]. Un point M du bord de la section et le point N du cercle (C) sont alignés avec S, sur une même génératrice tracée en orange. Les rayons [O'M] et [ON], en rouge, sont parallèles ; [ON], caché dans la base, est en pointillés.

12. PROPRIÉTÉ

Section d'un cylindre, section d'un cône

CE QU'IL DIT

Le cylindre, nafs el 3ordh men louta lel fou9 : el section cercle de même rayon. Le cône yedhya9 ki notl3ou lel sommet : el section cercle zeda, ama le rayon = R × d/h, w d hiya la distance du plan au sommet. W Thalès dima men le sommet S : n9arnou les longueurs men S, mouch le morceau elli bin les deux cercles.

le cylindre ، نفس العرض من لوطة للفوق : الـ le cône . section cercle de même rayon يضيق كي نطلعو للـ sommet : الـ section cercle زادة ، أما le rayon égale R fois d sur la hauteur ، و d هي la distance du plan au sommet . و Thalès ديما من le sommet S : نقارنو les longueurs من S ، موش le morceau اللي بين les deux cercles .

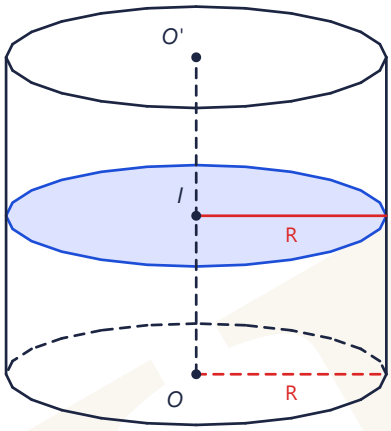
Le cylindre a la même largeur du bas jusqu'en haut : sa section est un cercle de même rayon. Le cône se resserre en montant vers le sommet : sa section est aussi un cercle, mais de rayon R fois d sur la hauteur, où d est la distance du plan au sommet. Et Thalès se lit toujours depuis le sommet S : on compare des longueurs mesurées depuis S, jamais le morceau entre les deux cercles.

La section d'un **cylindre** par un plan parallèle à une base est un **cercle de même rayon** que la base : le cylindre a la même largeur à toutes les hauteurs.

La section d'un **cône de révolution** par un plan parallèle à sa base est un **cercle**, centré sur l'axe (SO). Si le cône a pour hauteur h et pour rayon de base R, et si le plan est à la distance d du sommet, le rayon de la section est

$$r = R \times \frac{d}{h}.$$

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMANI



La section d'un cylindre parallèle à la base a le même rayon R.

Un cylindre de révolution debout. Ses deux bases, de centres O en bas et O' en haut, sont des disques de même rayon, dessinés en ellipses : celle du haut entièrement visible, celle du bas avec sa moitié arrière en pointillés. L'axe [OO'] est en pointillés. Un plan parallèle aux bases coupe le cylindre à mi-hauteur : la section, ombrée en bleu, est un disque de centre I exactement de la même taille que les bases. Le rayon de la base, caché, en pointillés rouges, et le rayon de la section, en rouge, portent tous les deux la lettre R.

CYLINDRE

$$r = R$$

CÔNE, À LA DISTANCE D DU SOMMET

$$r = R \times \frac{d}{h}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un abat-jour a la forme d'un cône de révolution dont on a coupé la pointe par un plan parallèle à la base. Le cercle du haut a pour rayon $O'A' = 15$ cm, celui du bas $OA = 20$ cm, et le côté de l'abat-jour mesure $AA' = 25$ cm, avec A' sur $[SA]$. Calculer la longueur SA de la génératrice du cône entier, puis l'aire du tissu de l'abat-jour en fonction de π.

Des parallèles — Le plan de coupe est parallèle à la base, donc $(O'A')$ est parallèle à (OA). Le théorème de Thalès dans le triangle SOA, lu depuis le sommet S, donne l'égalité des rapports.

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Une équation — Comme A' est sur $[SA]$, on a $SA' = SA - 25$.

$$\frac{SA - 25}{SA} = \frac{3}{4} \iff 4\,(SA - 25) = 3\,SA$$

$$4\,SA - 100 = 3\,SA \iff SA = 100 \text{ cm}$$

Le tissu — Le tissu est la surface latérale du grand cône, privée de celle du petit cône de sommet S : rayon 15 cm et génératrice $SA' = 100 - 25 = 75$ cm. L'aire latérale d'un cône est π fois le rayon fois la génératrice.

$$\pi \times 20 \times 100 - \pi \times 15 \times 75 = 2000\pi - 1125\pi$$

$$\text{aire du tissu} = 875\pi \approx 2749 \text{ cm}^2$$

À ne pas faire : La section d'un cône parallèle à sa base est un cercle de même rayon que la base. — C'est un cercle de rayon $r = R \times \frac{d}{h}$, plus petit que R.. « Même rayon », c'est le cylindre. Le cône se resserre vers son sommet : plus on coupe près de S, plus le cercle est petit.

À ne pas faire : $\frac{25}{SA} = \frac{15}{20} - \frac{SA - 25}{SA} = \frac{15}{20}$. 25 cm, c'est AA', le morceau de génératrice entre les deux cercles. Le rapport de Thalès se lit toujours depuis le sommet S : c'est SA' qu'il faut.

---

13. PROPRIÉTÉ

Couper parallèlement à la base, c'est réduire

CE QU'IL DIT

Hedhi ahamm 7aja fil chapitre. El petit solide, une réduction de coefficient k. Les longueurs fois k, les aires fois k², les volumes fois k³. Kès m3abbi l 3/5 de sa hauteur ? Mouch 3/5 du volume : (3/5)³, 27/125, ma yousselch 7atta lel moitié !

هاذي أهمّ حاجة في الـ chapitre . الـ les ، longueurs fois k les ، petit solide
كاس معبّي لـ trois cinquièmes de sa hauteur ؟ موش
، les volumes fois k au cube ، aires fois k au carré .
، 27 sur 125 ، trois cinquièmes au cube : trois cinquièmes du volume
! moitié للـ حتى يوصلش ما

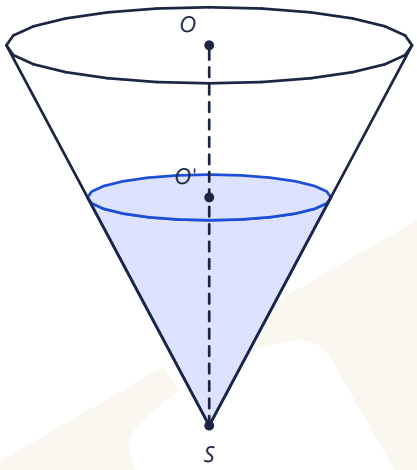
C'est la chose la plus importante du chapitre. Le petit solide est une réduction de coefficient k. Les longueurs sont multipliées par k, les aires par k au carré, les volumes par k au cube. Un verre rempli aux trois cinquièmes de sa hauteur ? Pas trois cinquièmes du volume : trois cinquièmes au cube, 27 sur 125, même pas la moitié !

Quand on coupe une pyramide ou un cône par un plan parallèle à la base, le petit solide du côté du sommet est une **réduction** du grand, de coefficient $k = \frac{SO'}{SO}$, avec $0 < k < 1$.

Dans une réduction de coefficient k : - les **longueurs** sont multipliées par k ; - les **aires** sont multipliées par k^2 ; - les **volumes** sont multipliés par k^3.

L'autre morceau, entre la section et la base, s'appelle un **tronc** de pyramide ou de cône : son volume est la différence des deux volumes.

Les mêmes règles valent pour un **agrandissement**, de coefficient $k > 1$: doubler toutes les longueurs d'un solide multiplie ses aires par 4 et son volume par 8 — pas par 2.



Le liquide est un cône réduit, de même sommet que le verre.

Un verre en forme de cône de révolution, pointe en bas : le sommet S est en bas, l'ouverture est un cercle de centre O dessiné en ellipse en haut. La hauteur [SO] est en pointillés. Le liquide, ombré en bleu, monte depuis la pointe jusqu'aux trois cinquièmes de la hauteur : sa surface est un disque de centre O', plus petit que l'ouverture. Le liquide forme un petit cône de même sommet S que le verre.

$$\text{longueur réduite} = k \times \text{longueur}$$

$$\text{aire réduite} = k^2 \times \text{aire}$$

$$\text{volume réduit} = k^3 \times \text{volume}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un verre a la forme d'un cône de révolution, pointe en bas, et contient 1 litre, soit $1000\ \text{cm}^3$. On le remplit jusqu'aux trois cinquièmes de sa hauteur. Quel est le volume du liquide ?

Le coefficient — Le liquide forme un petit cône de même sommet que le verre. Sa hauteur est les trois cinquièmes de celle du verre.

$$k = \frac{3}{5}$$

Le volume — Un volume se multiplie par k^3, pas par k.

$$V' = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times 1000 = \frac{27}{125} \times 1000$$

$$V' = 216\ \text{cm}^3$$

À ne pas faire : Rempli aux $\frac{3}{5}$ de sa hauteur, le verre contient les $\frac{3}{5}$ de son volume, soit $600\ \text{cm}^3$. — Il en contient $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$, soit $216\ \text{cm}^3$.. Le petit cône est réduit dans les trois directions à la fois : en

hauteur, mais aussi en largeur et en profondeur. D'où le cube — et un verre qui paraît plus plein qu'il ne l'est.

À ne pas faire : L'aire de la section vaut k fois l'aire de la base. — L'aire de la section vaut k^2 fois l'aire de la base.. Une aire a deux dimensions, et chacune est multipliée par k.

---

14. ACTIVITÉ

Trancher une sphère

CE QU'IL DIT

(OO') perpendiculaire au plan P, donc perpendiculaire à (O'M) : le triangle OO'M rectangle en O'. OM = R, khater M 3la la sphère. Pythagore : O'M² = R² − d². Nafs el distance l koll point M : el section cercle de centre O'. W fil application : 25² − 20², 225, w la racine carrée ta3ti 15.

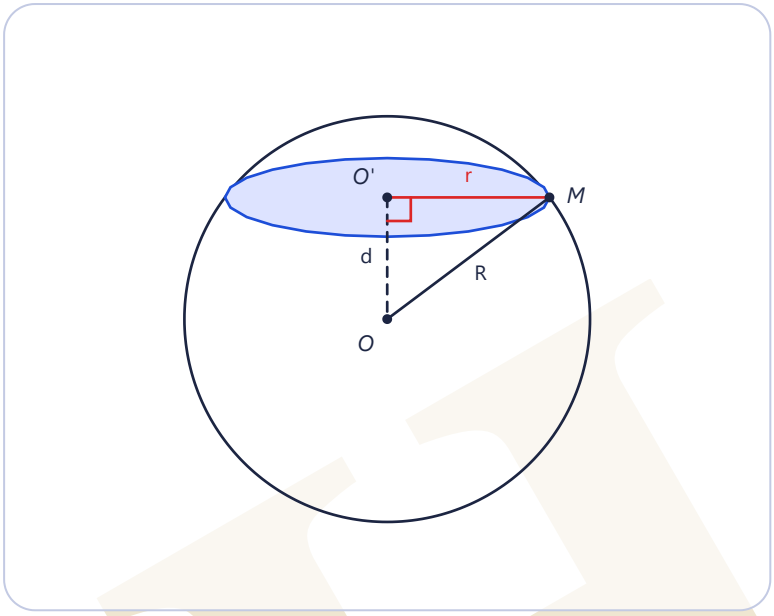
O O prime perpendiculaire au plan P ، donc perpendiculaire à O prime M : le triangle O O prime M la sphère . Pythagore : O prime M au carré égale R au على M خاطر ، rectangle en O prime . O M égale R و في . section cercle de centre O prime الـ : point M لكل distance الـ نفس . carré moins d au carré la racine carrée و ، l'application : 25 au carré moins 20 au carré ، 225 . 15 تعطي

O O prime est perpendiculaire au plan P, donc à O prime M : le triangle O O prime M est rectangle en O prime. O M égale R, parce que M est sur la sphère. Pythagore : O prime M au carré égale R au carré moins d au carré. La même distance pour tout point M : la section est un cercle de centre O prime. Et dans l'application : 25 au carré moins 20 au carré, 225, et sa racine carrée donne 15.

Une sphère de centre O et de rayon R est coupée par un plan P situé à la distance d de O, avec $d < R$. On note O' le point de P tel que (OO') est perpendiculaire à P : ainsi $OO' = d$. Soit M un point de la section.

1. Quelle est la nature du triangle $OO'M$? Justifie.
2. Exprime $O'M$ en fonction de R et de d.
3. Déduis-en la nature de la section.
4. **Application.** Une sphère de rayon 25 cm est coupée par un plan à 20 cm de son centre. Calcule le rayon r de la section.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMANI



Le triangle OO'M est rectangle en O'.

Une sphère de centre O, dessinée comme un cercle. Un plan horizontal la coupe au-dessus du centre : la section, ombrée en bleu, est un disque de centre O' dessiné en ellipse. Le segment [OO'], vertical et en pointillés, mesure d ; le segment [O'M], horizontal et en rouge, va de O' à un point M du bord de la section et mesure r ; le segment [OM] est un rayon de la sphère, noté R. L'angle en O' du triangle OO'M porte la marque de l'angle droit.

15. PROPRIÉTÉ

Section d'une sphère par un plan

CE QU'IL DIT

La section d'une sphère par un plan à la distance d du centre, avec d < R : un cercle. Le centre O', w le rayon r = √(R² − d²). Ki le plan passe par le centre, d = 0, w nal9aw le grand cercle, de rayon R. W radd belek : R − d, ghalet. Na7iw les carrés, mouch les longueurs.

la section d'une sphère par un plan à la distance d du centre ، avec d inférieur à R : un cercle . le centre . le rayon ، petit r ، égale racine carrée de la parenthèse grand R au carré moins d au carré و ، O prime ، R moins d : و ردّ بالك . le grand cercle ، de rayon R و نلقاو ، le plan passe par le centre ، d égale 0 كي . les longueurs موش ، les carrés نحّيو . غالط

La section d'une sphère par un plan à la distance d du centre, avec d inférieur à R : un cercle. Son centre est O prime, et son rayon, le petit r, égale racine carrée de la parenthèse grand R au carré moins d au carré. Quand le plan passe par le centre, d égale 0, et on obtient le grand cercle, de rayon R. Attention : R moins d, c'est faux. On soustrait les carrés, pas les longueurs.

La section d'une sphère de centre O et de rayon R par un plan situé à la distance d de O, avec $d < R$, est un **cercle**. Son centre est le point O' du plan tel que (OO') est perpendiculaire au plan, et son rayon est

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Si le plan passe par le centre, $d = 0$: la section est un cercle de rayon R, qu'on appelle un **grand cercle** de la sphère. Si $d = R$, le plan ne touche la sphère qu'en un point ; si $d > R$, il ne la rencontre pas.

RAYON DE LA SECTION

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

GRAND CERCLE

$$d = 0 \implies r = R$$

EXEMPLE TRAITÉ

Une sphère a pour rayon $R = 10$ cm. On la coupe par un plan à 6 cm de son centre. Calculer le rayon de la section, puis l'aire du disque de section en fonction de π.

Pythagore — Le triangle $OO'M$ est rectangle en O', et son hypoténuse $[OM]$ est un rayon de la sphère.

$r^2 = R^2 - d^2 = 10^2 - 6^2 = 64$

$r = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$

L'aire du disque —

$\pi r^2 = \pi \times 8^2 = 64\pi \text{ cm}^2$

$$\text{aire} = 64\pi \approx 201 \text{ cm}^2$$

À ne pas faire : $r = R - d = 10 - 6 = 4$ cm — $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ cm. Le rayon de la sphère, la distance au centre et le rayon de la section sont les côtés d'un triangle rectangle : ce ne sont pas les longueurs qui se soustraient, ce sont leurs **carrés**.

À ne pas faire : $r^2 = R^2 + d^2$ — $r^2 = R^2 - d^2$. L'hypoténuse du triangle $OO'M$ est $[OM]$, un rayon de la sphère : R est le plus grand des trois, et la section n'est jamais plus grande qu'un grand cercle.

---

16. APPLICATION

Cinq boules empilées

CE QU'IL DIT

Zouz boules ki ymassou b3adhhom, bin les centres 20 cm. Les centres ya3mlou une pyramide régulière. La hauteur b Pythagore fi le triangle SHA : 400 − 200, 200, w la racine carrée ta3ti 10√2. W ma tensech : les centres A, B, C, D fou9 la table b 10 cm.

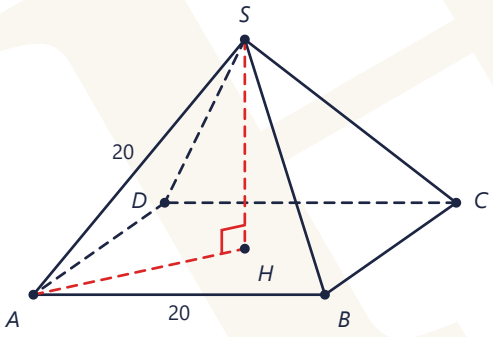
زوز boules كي يمسّو بعضهم ، بين les centres . les centres 20 centimètres يعملو une pyramide régulière .
la hauteur بـ Pythagore في 200 ، 200 moins 400 : le triangle S H A ، و la racine carrée تعطي racine de 10 .
و ما تنساش : A ، B ، C ، D les centres فوق la table بـ 10 centimètres . 2

Deux boules qui se touchent ont leurs centres à 20 centimètres. Les centres forment une pyramide régulière. On calcule la hauteur avec Pythagore dans le triangle S H A : 400 moins 200, 200, et sa racine

carrée donne 10 racine de 2. Et n'oublie pas : les centres A, B, C, D sont à 10 centimètres au-dessus de la table.

Quatre boules de rayon 10 cm sont posées sur une table, de sorte que leurs centres A, B, C, D forment un carré de côté 20 cm. Une cinquième boule, de même rayon, est posée sur elles et les touche toutes les quatre. À quelle distance de la table se trouve son centre S ?

Stratégie. Les centres des cinq boules forment une pyramide $SABCD$: on calcule sa hauteur, puis on ajoute la distance du plan des centres à la table.



Les centres des cinq boules forment une pyramide régulière SABCD.

La pyramide des centres, en perspective : la base ABCD est un carré de côté 20, avec A en bas à gauche, B en bas à droite, C derrière B et D derrière A ; le sommet S est au-dessus du centre H du carré. Les arêtes cachées [SD], [AD] et [DC] sont en pointillés. L'arête [SA] et le côté [AB] portent la longueur 20. Le triangle SHA est mis en évidence en rouge : la hauteur [SH] et la demi-diagonale [AH], toutes deux en pointillés, forment un angle droit en H.

EXEMPLE TRAITÉ

Calculer la hauteur SH de la pyramide $SABCD$, où H est le centre du carré $ABCD$, puis la distance du centre S à la table.

Les arêtes — Deux boules qui se touchent ont leurs centres à $10 + 10 = 20$ cm l'un de l'autre. Donc $SA = SB = SC = SD = 20$ cm : la pyramide est régulière, et son sommet S est au-dessus du centre H du carré.

La demi-diagonale — La diagonale d'un carré de côté 20 cm mesure $20\sqrt{2}$ cm, et H en est le milieu.

$$AH = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

La hauteur — Le triangle SHA est rectangle en H : théorème de Pythagore.

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = 400 - 200 = 200 \quad \text{donc} \quad SH = 10\sqrt{2}$$

La table — Les centres A, B, C, D sont à 10 cm au-dessus de la table : c'est le rayon des boules posées.

$$10 + 10\sqrt{2} \approx 24{,}1 \text{ cm}$$

$$10 + 10\sqrt{2} \approx 24{,}1 \text{ cm}$$

À ne pas faire : La distance cherchée est la hauteur $SH = 10\sqrt{2}$ cm. — Il faut ajouter 10 cm : la distance est $10 + 10\sqrt{2}$ cm.. SH se mesure depuis le plan des centres A, B, C, D, qui est à un rayon au-dessus de la table.

---

17. MÉTHODE

Devant une section : trois questions

CE QU'IL DIT

9oddem ay section, 3 questions. Awel 7aja : le plan kifech m7atout ? Hedha ya3tik la nature. Ba3d : fi ama triangle na7sbou ? Triangle rectangle l Pythagore, walla triangle men le sommet l Thalès. W fil le5er : pyramide walla cône ? Jib k men le sommet, w ba3d k, k au carré, k au cube.

قدّام أي 3 questions ، section . أوّل حاجة : le plan كيفاش محطوط ؟ هذا يعطيك la nature . بعد : في أما triangle نحسبو ؟ triangle rectangle لـ Pythagore ، وولّا triangle من le sommet لـ Thalès . و في الآخر : pyramide وولّا cône ؟ جيب k من le sommet ، و بعد k au cube ، k au carré ، k .

Devant une section, 3 questions. D'abord : comment le plan est-il placé ? C'est ce qui donne la nature. Ensuite : dans quel triangle calculer ? Un triangle rectangle pour Pythagore, ou un triangle issu du sommet pour Thalès. Et enfin : une pyramide ou un cône ? Prends k depuis le sommet, puis k, k au carré, k au cube.

1. **Comment le plan est-il placé ?** Parallèle à une face ou à la base, contenant une arête, passant par le centre : c'est ce qui décide de la **nature** de la section. Pavé coupé parallèlement à une face, ou par un plan qui contient une arête : un rectangle. Pyramide coupée parallèlement à la base : le même polygone que la base. Cylindre et cône coupés parallèlement à la base : un cercle. Sphère coupée par un plan à la distance $d < R$ de son centre : un cercle.
2. **Dans quel triangle calculer ?** On ne calcule jamais dans le solide entier, mais dans un triangle plan. Un triangle **rectangle** pour Pythagore — diagonale d'une face, rayon de la section d'une sphère. Un triangle **issu du sommet** pour Thalès — pyramide et cône.
3. **Faut-il un coefficient ?** Pour une pyramide ou un cône coupés parallèlement à la base, $k = \dfrac{SO'}{SO}$ se lit depuis le sommet ; puis les longueurs se multiplient par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Prisme droit : $V = B \times h$. Cylindre : $V = \pi R^2 h$. Pyramide et cône : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$. Boule : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; sphère : aire $4\pi R^2$.

   > Le prisme droit : B × h. Le cylindre : πR² × la hauteur. La pyramide w le cône : un tiers de B × h. La boule : 4/3 πR³, w l'aire de la sphère 4πR².
   > *Le prisme droit : B fois la hauteur. Le cylindre : π R au carré fois la hauteur. La pyramide et le cône : un tiers de B fois la hauteur. La boule : les quatre tiers de π R au cube, et l'aire de la sphère : 4 π R au carré.*

2. Un plan qui coupe deux plans parallèles les coupe suivant deux droites **parallèles**.

   > Un plan y9oss deux plans parallèles, ya3ti deux droites parallèles.
   > *Un plan qui coupe deux plans parallèles donne deux droites parallèles.*

3. Pavé coupé parallèlement à une face : un rectangle **isométrique** à cette face. Coupé par un plan contenant une arête : un **rectangle**.

   > Le pavé coupé parallèlement à une face : un rectangle isométrique à cette face. W b un plan qui contient une arête : un rectangle.
   > *Le pavé coupé parallèlement à une face : un rectangle isométrique à cette face. Et par un plan qui contient une arête : un rectangle.*

4. Pyramide coupée parallèlement à la base : un polygone **de même nature** que la base.

   > La pyramide, ki n9ossouha parallèlement à la base : un polygone de même nature que la base.
   > *La pyramide coupée parallèlement à la base : un polygone de même nature que la base.*

5. Cylindre coupé parallèlement à une base : un cercle **de même rayon**. Cône coupé parallèlement à la base, à la distance d du sommet : un cercle de rayon $R \times \frac{d}{h}$.

   > Le cylindre : un cercle de même rayon. Le cône, m9oss 3la la distance d du sommet : un cercle, w le rayon R × d/h.
   > *Le cylindre : un cercle de même rayon. Le cône coupé à la distance d du sommet : un cercle de rayon R fois d sur la hauteur.*

6. Sphère coupée par un plan à la distance $d < R$ du centre : un cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$, grand cercle si le plan passe par le centre.

   > La sphère, m9ossa 3la la distance d du centre, avec d < R : un cercle, w le rayon √(R² − d²). W ki le plan passe par le centre, grand cercle.
   > *La sphère coupée à la distance d du centre, avec d inférieur à R : un cercle, de rayon racine carrée de la parenthèse grand R au carré moins d au carré. Et quand le plan passe par le centre, c'est un grand cercle.*

7. Réduction de coefficient $k = \frac{SO'}{SO}$: longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.

   > W la réduction : k men le sommet, les longueurs fois k, les aires fois k², les volumes fois k³.

> *Et la réduction : k depuis le sommet, les longueurs fois k, les aires fois k au carré, les volumes fois k au cube.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna les sections planes. Tfakker : parallèle à une face, el section isométrique à la face. Parallèle à la base mte3 pyramide walla cône, el section une réduction, w le coefficient k na7sbouh men le sommet. W la section d'une sphère, un cercle, w le rayon b Pythagore. Yalla nemchiw lel exercices.

section isométrique à la face . parallèle à la الـ ، parallèle à une face : تفكّر . les sections planes هكّا كمّلنا la و . le sommet من نحسبوه le coefficient k و ، section une réduction الـ ، cône ولّا pyramide متاع base . exercices لـ نمشيو يالله . Pythagore بـ le rayon و ، section d'une sphère ، un cercle

Voilà, nous avons terminé les sections planes. Retiens : parallèle à une face, la section est isométrique à la face. Parallèle à la base d'une pyramide ou d'un cône, la section est une réduction, et le coefficient k se compte depuis le sommet. Et la section d'une sphère est un cercle, avec un rayon qu'on trouve par Pythagore. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · LES SOLIDES USUELS

volume et aire d'un cube | volume d'un parallélépipède rectangle | aire totale d'un pavé droit | un cube kifech na7seb volume mte3ou | combien de faces et de sommets a un cube | formule du volume du pavé

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$V = a^3 \quad ; \quad V = a \times b \times c$$

CE QU'IL RÉPOND

Le cube d'arête a : 6 faces, 8 sommets, $V = a^{3}$, aire $6a^{2}$. Le pavé droit a, b, c : 6 faces, 8 sommets, $V = a \times b \times c$, aire $2(ab + bc + ca)$.

le cube d'arête a : 6 faces ، 8 sommets ، volume a au cube ، aire 6 a au carré . le pavé droit a ، b ، c : 6 . faces ، 8 sommets ، volume a fois b fois c ، aire 2 fois (a b plus b c plus c a)

Le cube d'arête a : 6 faces, 8 sommets, volume a au cube, aire 6 a au carré. Le pavé droit de dimensions a, b, c : 6 faces, 8 sommets, volume a fois b fois c, aire 2 fois (a b plus b c plus c a).

QUESTION 2 · LES SOLIDES USUELS

volume d'un cylindre | aire latérale d'un cylindre | cylindre formule volume | kifech na7seb volume cylindre | aire totale du cylindre | cylindre de révolution volume et aire

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$V = \pi R^2 h \quad ; \quad \text{aire} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

CE QU'IL RÉPOND

Le cylindre de rayon R w de hauteur h : $V = \pi R^{2} h$. L'aire latérale, ki nfarchouha, rectangle de hauteur h w de longueur $2\pi R$: $2\pi R h$. W l'aire totale nzidou les deux disques : $2\pi R h + 2\pi R^{2}$.

le cylindre de rayon R w de hauteur h : volume pi R au carré h . l'aire latérale ، كي نفرشوها rectangle de hauteur h w de longueur 2 pi R : 2 pi R h . w l'aire totale نزيدو les deux disques : 2 pi R h plus 2 pi R au carré .

Pour un cylindre de rayon R et de hauteur h : volume pi R au carré h. L'aire latérale, déroulée à plat, est un rectangle de hauteur h et de longueur 2 pi R : 2 pi R h. L'aire totale ajoute les deux disques : 2 pi R h plus 2 pi R au carré.

QUESTION 3 · PRISME DROIT ET PYRAMIDE : LE VOLUME

volume d'une pyramide | pourquoi un tiers dans le volume de la pyramide | volume du prisme droit | pyramide B fois h ou un tiers B fois h | kifech na7seb volume pyramide | volume prisme et pyramide différence

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$V_{\text{prisme}} = B \times h \quad ; \quad V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \times B \times h$$

CE QU'IL RÉPOND

Le prisme droit : $V = B \times h$. La pyramide : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$. Pyramide 3andha nafs la base w nafs la hauteur mte3 prisme, t3abbi ken le tiers mte3ou.

le prisme droit : V égale B fois h . la pyramide : V égale un tiers fois B fois h . pyramide عندها نفس la base w نفس la hauteur متاع prisme ، تعبّي كان le tiers متاعو .

Prisme droit : V égale B fois h. Pyramide : V égale un tiers fois B fois h. Une pyramide de même base et de même hauteur qu'un prisme n'en remplit que le tiers.

QUESTION 4 · PRISME DROIT ET PYRAMIDE : LE VOLUME

c'est quoi la hauteur d'une pyramide | la hauteur c'est l'arête latérale ? | hauteur de la pyramide SO ou SA | chnowa la hauteur mta3 pyramide | hauteur pyramide définition | SA est la hauteur ?

CE QU'IL RÉPOND

La hauteur mte3 la pyramide hiya la distance men le sommet S l le plan de la base : SO, elli tti7 perpendiculaire. L'arête SA mayla w atwel mel hauteur.

la hauteur متاع la pyramide هي la distance من le sommet S لـ S O le plan de la base : ، اللي تطيح perpendiculaire . l'arête S A مايلة w أطول من la hauteur .

La hauteur d'une pyramide est la distance du sommet S au plan de la base : S O, qui tombe perpendiculairement. L'arête S A est oblique et plus longue que la hauteur.

QUESTION 5 · SPHÈRE ET BOULE

quelle est la différence entre sphère et boule | sphère w boule chnowa el far9 | aire de la sphère et volume de la boule | volume d'une boule formule | aire d'une sphère formule | sphère c'est la surface et boule le solide ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$4\pi R^2 \quad ; \quad \frac{4}{3}\pi R^3$

CE QU'IL RÉPOND

La sphère hiya surface, kif jeldet el ballon : les points à la distance R de O. La boule hiya le solide plein. Na7sbou l'aire de la sphère, $4\pi R^{2}$, w le volume de la boule, $\dfrac{4}{3}\pi R^{3}$, b le rayon mouch le diamètre.

. le solide plein هي ballon : les points à la distance R de O . la boule الـ كيف جلدة ، surface هي la sphère le rayon بـ ، l'aire de la sphère ، 4 pi R au carré ، w le volume de la boule ، 4 tiers pi R au cube نحسبو . le diamètre موش

La sphère est une surface, comme la peau d'un ballon : les points à la distance R de O. La boule est le solide plein. On calcule l'aire de la sphère, 4 pi R au carré, et le volume de la boule, 4 tiers pi R au cube, avec le rayon, pas le diamètre.

QUESTION 6 · SPHÈRE ET BOULE

on utilise le rayon ou le diamètre | ballon de diamètre 50 cm quel R | diamètre dans la formule de la sphère | rayon wala diamètre fel formule | j'ai mis le diamètre dans la formule | R c'est le rayon ou le diamètre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$4\pi \times 25^2 = 2500\pi$

CE QU'IL RÉPOND

Les formules b le rayon. Ballon de diamètre 50 cm : $R = 25$ cm, w l'aire $4\pi \times 25^{2} = 2500\pi$ cm². B le diamètre, l'aire tetdhreb fi 4 w le volume fi 8.

يعني ، le rayon . ballon de diamètre 50 cm : R égale 25 cm ، w l'aire 4 pi fois 25 au carré بـ les formules . 8 في w le volume 4 تتضرب في le diamètre ، l'aire بـ . pi cm carrés 2500

Les formules utilisent le rayon. Pour un ballon de diamètre 50 cm : R égale 25 cm, et l'aire vaut 4 pi fois 25 au carré, soit 2500 pi centimètres carrés. Avec le diamètre, l'aire serait multipliée par 4 et le volume par 8.

QUESTION 7 · LE CÔNE DE RÉVOLUTION

volume d'un cône | comment calculer la génératrice d'un cône | cône de révolution formule | génératrice ou hauteur du cône | kifech na7seb volume cône | aire latérale du cône

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 \quad ; \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

CE QU'IL RÉPOND

Le cône : $V = \dfrac{1}{3}\pi R^{2} h$. La génératrice SA na7sbouha b Pythagore fi le triangle SOA rectangle en O. Mathalan $R = 3$ w $h = 4$: $SA = 5$, w $V = 12\pi$. L'aire latérale $\pi R \ell$.

le triangle S O A في Pythagore بـ نحسبوها le cône : V égale un tiers pi R au carré h . la génératrice S A . R 3 w h 4 : S A 5 ، w V égale 12 pi . l'aire latérale pi R fois la génératrice مثلا . rectangle en O

Volume du cône : un tiers pi R au carré h. La génératrice S A se calcule par Pythagore dans le triangle S O A rectangle en O. Par exemple, avec R égale 3 et h égale 4 : S A égale 5, et V égale 12 pi. L'aire latérale vaut pi fois R fois la génératrice.

QUESTION 8 · LE CÔNE DE RÉVOLUTION

angle du patron d'un cône | patron du cône comment le calculer | kifech na7seb l'angle mta3 patron | 360 fois R sur l | angle de la portion de disque | patron cône 216 degrés

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a = 360 \times \frac{R}{\ell}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le patron mte3 la surface latérale houwa portion de disque de rayon la génératrice ℓ, w l'angle mte3ou $a = 360 \times \dfrac{R}{\ell}$. Mathalan $R = 3$ w $\ell = 5$: $360 \times \dfrac{3}{5} = 216^\circ$.

a égale متاعو portion de disque de rayon la génératrice ℓ ، w l'angle هو la surface latérale متاع le patron . degrés 216 يعني ، R 3 w ℓ 5 : 360 fois 3 sur 5 مثلا . 360 fois R sur ℓ

Le patron de la surface latérale est une portion de disque de rayon la génératrice, et son angle vaut 360 fois R sur la génératrice. Par exemple, avec R égale 3 et une génératrice de 5 : 360 fois 3 sur 5, soit 216 degrés.

QUESTION 9 · UN PLAN COUPE DEUX PLANS PARALLÈLES

un plan qui coupe deux plans parallèles | plans parallèles droites d'intersection parallèles ? | c'est quoi deux plans parallèles | plan coupe deux plans parallèles pourquoi | plans parallèles dans l'espace | droites d'intersection de deux plans parallèles

CE QU'IL RÉPOND

Zouz plans parallèles ma 3andhomch 7atta point commun, walla confondus. Ken plan y9oss wa7ed, y9oss le5or zeda, w les deux droites d'intersection parallèles. Hedhi hiya l'outil mte3 les sections.

زوز plans parallèles ما عندهمش حتّى point commun ، ولّا confondus . كان plan يقصّ واحد ، يقصّ الآخر زادة ، w les deux droites d'intersection parallèles . هاذي هي l'outil متاع les sections .

Deux plans sont parallèles quand ils n'ont aucun point commun, ou quand ils sont confondus. Un plan qui coupe l'un coupe aussi l'autre, et les deux droites d'intersection sont parallèles. C'est l'outil de toutes les sections.

QUESTION 10 · UN PLAN COUPE DEUX PLANS PARALLÈLES

deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles ? | droites de l'espace qui ne se rencontrent pas | dans l'espace deux droites sans point commun | droites non coplanaires | AB et CG ne se coupent pas, parallèles ? | zouz droites ma yet9at3ouch parallèles ?

CE QU'IL RÉPOND

Fi l'espace, zouz droites ma yet9at3ouch mouch dima parallèles : lezem zeda ykounou fi nafs le plan. Fi le pavé, l'arête $[AB]$ w l'arête $[CG]$ ma ytla9awch, w mouch parallèles.

في l'espace ، زوز droites ما يتقاطعوش موش ديما parallèles : لازم زادة يكونو في نفس le plan . في ، le pavé l'arête A B w l'arête C G ما يتلاقاوش ، w موش parallèles .

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont parallèles que si elles sont dans un même plan. Dans un pavé, l'arête A B et l'arête C G ne se rencontrent jamais, et pourtant elles ne sont pas parallèles.

QUESTION 11 · DEUX PLANS PARALLÈLES ET UN TROISIÈME

droite perpendiculaire à un plan | une droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à quoi | perpendiculaire à un plan et au plan parallèle | droite orthogonale à toutes les droites du plan | chnowa droite perpendiculaire à un plan | perpendiculaire à P donc à Q ?

CE QU'IL RÉPOND

Droite perpendiculaire l plan tkoun orthogonale l les droites el koll mte3 le plan hedheka. W ken perpendiculaire l P, tkoun zeda perpendiculaire l ay plan parallèle l P.

droite perpendiculaire لـ plan تكون orthogonale لـ les droites الكل متاع le plan هاذاكا . w كان perpendiculaire لـ P ، تكون زادة perpendiculaire لـ أي plan parallèle لـ P .

Une droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan. Et si elle est perpendiculaire à P, elle l'est aussi à tout plan parallèle à P.

QUESTION 12 · SECTION D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

section d'un pavé par un plan parallèle à une face | coupe d'un parallélépipède parallèle à une face | la section du pavé est plus petite que la face ? | section pavé parallèle face nature | kifech tkoun la section mta3 pavé parallèle à une face | section parallèle à une face du pavé rectangle

CE QU'IL RÉPOND

La section mte3 pavé par un plan parallèle l face hiya rectangle isométrique l la face hedhika : nafs les dimensions w nafs l'aire. Le pavé 3andou nafs el épaisseur fi koll blasa.

la section متاع plan parallèle pavé par un face لـ هي isométrique rectangle la face لـ هاذيكا : نفس les dimensions w نفس pavé le . l'aire عندو نفس الـ épaisseur في كل بلاصة .

La section d'un pavé par un plan parallèle à une face est un rectangle isométrique à cette face : mêmes dimensions, même aire. Le pavé a la même épaisseur partout.

QUESTION 13 · SECTION D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

section d'un pavé par un plan contenant une arête | section ACGE nature | plan qui contient les arêtes AE et CG | section contenant une arête kifech na7seb l'aire | section du pavé en biais | diagonale de la face dans la section

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad ; \quad 10 \times 5 = 50$$

CE QU'IL RÉPOND

Plan y7tawi arête ya3ti rectangle : côté houwa l'arête, w le5or segment mayel 3la face, na7sbouh b Pythagore. Mathalan $AB = 8$, $AD = 6$, $AE = 5$: $AC = \sqrt{64 + 36} = 10$, w l'aire $10 \times 5 = 50$ cm².

plan يحتوي arête يعطي côté : rectangle هو w l'arête الآخر segment مايل على face ، نحسبوه بـ Pythagore .

مثلا A C égale racine de (64 plus 36) : A E 5 ، A D 6 ، A B 8 ، يعني 10 ، 50 cm carrés ، 5 fois 10 l'aire w .

Un plan contenant une arête donne un rectangle : un côté est l'arête, l'autre est un segment oblique sur une face, calculé par Pythagore. Par exemple, avec A B égale 8, A D égale 6 et A E égale 5 : A C égale racine de (64 plus 36), soit 10, et l'aire vaut 10 fois 5, soit 50 centimètres carrés.

QUESTION 14 · SECTION D'UNE PYRAMIDE PAR UN PLAN PARALLÈLE À LA BASE

section d'une pyramide par un plan parallèle à la base | section pyramide nature | la section de la pyramide est un carré ? | kifech tkoun la section mta3 pyramide | coupe d'une pyramide parallèle à la base | section pyramide même forme que la base

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

CE QU'IL RÉPOND

La section mte3 pyramide par un plan parallèle l la base polygone men nafs nature mte3 la base : réduction liha. $k = \dfrac{SO'}{SO}$, men le sommet. Mathalan base carrée de côté 10, $h = 15$, coupe à 9 cm du sommet : $k = \dfrac{3}{5}$, côté 6 cm.

la base : réduction متاع nature نفس من la base polygone لـ pyramide par un plan parallèle متاع la section
base carrée de côté 10 ، h 15 ، coupe à 9 cm du مثلا . le sommet من ، k égale S O prime sur S O . ليها
. sommet : k 3 sur 5 ، côté 6 cm

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que la base : une réduction de celle-ci, de coefficient k égale S O prime sur S O, lu depuis le sommet. Par exemple, base carrée de côté 10, hauteur 15, coupe à 9 cm du sommet : k égale 3 sur 5, côté 6 cm.

QUESTION 15 · SECTION D'UNE PYRAMIDE PAR UN PLAN PARALLÈLE À LA BASE

le coefficient k se lit depuis le sommet ou depuis la base | k = 6/15 ou 9/15 depuis le sommet | distance du plan à la base ou au sommet | pourquoi depuis le sommet | k men el sommet wala mel base | coefficient de réduction depuis le sommet

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$k = \frac{9}{15}$$

CE QU'IL RÉPOND

K yet9ra men le sommet : la distance men S l le plan de coupe, sur la hauteur. La petite pyramide 3andha nafs le sommet S. Mathalan $h = 15$ w le plan 9 cm men S : $k = \dfrac{9}{15}$, mouch $\dfrac{6}{15}$.

عندها le plan de coupe ، sur la hauteur . la petite pyramide لـ S من le sommet : la distance من يتقرى k
. sur 15 6 ، موش S : k égale 9 sur 15 من h 15 w le plan 9 cm مثلا . le sommet S نفس

Le coefficient k se lit depuis le sommet : distance du sommet au plan de coupe, divisée par la hauteur. La petite pyramide a le même sommet S. Par exemple, avec une hauteur de 15 et un plan à 9 cm de S : k égale 9 sur 15, pas 6 sur 15.

QUESTION 16 · SECTION D'UN CYLINDRE, SECTION D'UN CÔNE

section d'un cône par un plan parallèle à la base | section d'un cylindre | rayon de la section d'un cône | section cône cercle de même rayon ? | rayon du cône r = R fois d sur h | kifech na7seb rayon section cône

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$r = R \times \frac{d}{h}$$

CE QU'IL RÉPOND

Section cylindre parallèle l base : cercle b nafs le rayon. Section cône parallèle l la base : cercle asghar, $r = R \times \dfrac{d}{h}$, d la distance men le sommet. « Nafs le rayon » hedheka le cylindre.

، أصغر la base : cercle لـ le rayon . section cône parallèle بنفس base : cercle لـ section cylindre parallèle
. le cylindre هاذاكا « le rayon نفس » . le sommet من rayon r égale R fois d sur h ، d la distance

La section d'un cylindre parallèle à une base est un cercle de même rayon. Celle d'un cône parallèle à la base est un cercle plus petit, de rayon r égale R fois d sur h, où d est la distance au sommet. « Même rayon », c'est le cylindre.

QUESTION 17 · SECTION D'UN CYLINDRE, SECTION D'UN CÔNE

abat-jour tronc de cône comment calculer SA | Thalès dans le cône | 25 sur SA ou SA - 25 sur SA | abat-jour tronc de cône génératrice | aire du tissu de l'abat-jour | kifech nesta3mel Thalès fel cône

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{SA-25}{SA}=\frac{3}{4} \iff SA=100$$

CE QU'IL RÉPOND

Thalès fi le triangle SOA, men le sommet : $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{15}{20}$. W $SA' = SA - 25$, mouch 25. Donc $4(SA - 25) = 3\,SA$, w $SA = 100$ cm.

le sommet : S A prime sur S A égale 15 sur 20 . w S A prime égale S A من ، le triangle S O A في Thalès
. donc 4 fois (S A moins 25) égale 3 S A ، w S A égale 100 cm . 25 موش ، moins 25

Thalès dans le triangle S O A, lu depuis le sommet : S A prime sur S A égale 15 sur 20. Et S A prime vaut S A moins 25, pas 25. Donc 4 fois (S A moins 25) égale 3 S A, et S A égale 100 cm.

QUESTION 18 · COUPER PARALLÈLEMENT À LA BASE, C'EST RÉDUIRE

les volumes sont multipliés par k ou k au cube | réduction longueurs aires volumes k cube | verre rempli aux 3/5 de sa hauteur quel volume | pourquoi k au cube pour le volume | volume réduit formule | k k carré k cube

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \times 1000 = 216$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi réduction de coefficient k : les longueurs fois k, les aires fois k^{2}, w les volumes fois k^{3}. Verre de 1000 cm³ m3abbi l $\dfrac{3}{5}$ mte3 el hauteur : $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3} \times 1000 = 216$ cm³, mouch 600.

réduction de coefficient k : les longueurs fois k ، les aires fois k au carré ، w les volumes fois k au في
cm 216 يعني ، hauteur : (3 sur 5) au cube fois 1000 متاع الـ 5 3 sur معبّي لـ cube . verre de 1000 cm cubes
. cubes ، موش 600

Dans une réduction de coefficient k : longueurs multipliées par k, aires par k au carré, volumes par k au cube. Un verre de 1000 centimètres cubes rempli aux trois cinquièmes de sa hauteur contient 3

cinquièmes au cube fois 1000, soit 216 centimètres cubes, et non 600.

QUESTION 19 · COUPER PARALLÈLEMENT À LA BASE, C'EST RÉDUIRE

l'aire de la section vaut k fois l'aire de la base ? | aire de la section k ou k carré | aire réduite formule | aire section pyramide fois k carré | pourquoi k carré pour l'aire de la section | aire fois k2

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\text{aire réduite} = k^2 \times \text{aire}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'aire de la section tsewi k^{2} fois l'aire de la base, mouch k : l'aire 3andha zouz dimensions, w koll wa7da tetdhreb fi k.

l'aire de la section تساوي l'aire de la base au carré fois k ، موش k : l'aire عندها زوز dimensions ، w كل وحدة تتضرب في k .

L'aire de la section vaut k au carré fois l'aire de la base, pas k fois : une aire a deux dimensions, et chacune est multipliée par k.

QUESTION 20 · COUPER PARALLÈLEMENT À LA BASE, C'EST RÉDUIRE

c'est quoi un tronc de pyramide | volume d'un tronc de cône | tronc chnowa | comment calculer le volume du tronc | tronc de pyramide définition | le morceau entre la section et la base

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$V_{\text{tronc}} = V - k^3 V$$

CE QU'IL RÉPOND

Le tronc houwa el morceau bin la section w la base. Le volume mte3ou houwa le volume mte3 le grand solide moins le volume mte3 le petit, w le petit houwa réduction de coefficient k : k^{3} fois le grand.

le tronc هو الـ morceau بين le volume متاعو هو la section w la base . le volume متاع le grand solide moins le petit ، w le petit هو le grand fois le cube k : k réduction de coefficient .

Le tronc est le morceau entre la section et la base. Son volume est celui du grand solide moins celui du petit, et le petit est une réduction de coefficient k : k au cube fois le grand.

QUESTION 21 · COUPER PARALLÈLEMENT À LA BASE, C'EST RÉDUIRE

doubler les longueurs multiplie le volume par combien | agrandissement volume fois 8 ? | si on double toutes les dimensions | agrandissement solide aire et volume | doubler les dimensions d'un solide | k supérieur à 1 agrandissement

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$2^2 = 4 \quad ; \quad 2^3 = 8$$

CE QU'IL RÉPOND

Nafs les règles fi l'agrandissement : nda3fou les longueurs, $k = 2$, donc les aires fois $2^{2} = 4$ w le volume fois $2^{3} = 8$, mouch fois 2.

les longueurs ، k égale 2 ، donc les aires fois 4 w le volume نضاعفو : l'agrandissement في les règles نفس fois 8 ، موش 2 fois .

Les mêmes règles valent pour un agrandissement : doubler toutes les longueurs, c'est k égale 2, donc les aires sont multipliées par 4 et le volume par 8, pas par 2.

QUESTION 22 · SECTION D'UNE SPHÈRE PAR UN PLAN

section d'une sphère par un plan | rayon de la section d'une sphère | rayon section sphère : r = R - d ? | kifech na7seb le rayon de la section de la sphère | section sphère cercle rayon | sphère coupée par un plan à la distance d

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

CE QU'IL RÉPOND

La section hiya cercle, w le rayon mte3ou $r = \sqrt{R^{2} - d^{2}}$, b Pythagore fi le triangle OO'M. Mouch $R - d$: mathalan $R = 10$ w $d = 6$, $r = \sqrt{64} = 8$, mouch 4.

la section هي le rayon w ، cercle متاعو (R au carré moins d au carré) racine de égale ، Pythagore بـ في le triangle O O prime M . موش R moins d : مثلا 64 racine de égale section le rayon de la ، 10 w d 6 R ، يعني 8 ، موش 4 .

La section est un cercle, dont le rayon égale racine de (R au carré moins d au carré), par Pythagore dans le triangle O O prime M. Pas R moins d : avec R égale 10 et d égale 6, le rayon de la section égale racine de 64, soit 8, et non 4.

QUESTION 23 · SECTION D'UNE SPHÈRE PAR UN PLAN

c'est quoi un grand cercle | plan qui passe par le centre de la sphère | grand cercle de la sphère | si d = R le plan touche la sphère | d plus grand que R | grand cercle chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Ki le plan yet3adda 3la le centre, $d = 0$: la section cercle de rayon R, houwa grand cercle. Ki $d = R$, le plan ymess la sphère fi point wa7ed. W ki $d > R$, ma ytla9awch.

كي le plan يتعدّى على le centre ، d égale zéro : la section cercle de rayon R هو ، grand cercle . كي d أكبر من R ، ما يتلاقاوش . w كي d واحد point في la sphère يمسّ égale R ، le plan

Quand le plan passe par le centre, d égale zéro : la section est un cercle de rayon R, un grand cercle. Quand d égale R, le plan ne touche la sphère qu'en un point. Et quand d est plus grand que R, il ne la rencontre pas.

QUESTION 24 · CINQ BOULES EMPILÉES

cinq boules empilées hauteur du centre | boules empilées pyramide des centres | pourquoi ajouter 10 cm pour la distance à la table | boules empilées hauteur du centre de la boule du dessus | boules empilées kifech | distance du centre S à la table

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$10 + 10\sqrt{2} \approx 24{,}1 \text{ cm}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les centres ya3mlou pyramide SABCD, w $SA = 20$ cm 5ater les boules ytmassou. AH nos la diagonale, $10\sqrt{2}$, w b Pythagore $SH = 10\sqrt{2}$. W lezem nzidou 10 cm : les centres A, B, C, D fou9 la table b rayon.

les centres يعملو S A = 20 cm ، w les boules يتمسّو خاطر pyramide S A B C D . A H نصّ la diagonale ، 10 racine de 2 ، w بـ racine de 2 . Pythagore S H لازم نزيدو 10 cm : les centres A ، B ، C ، D فوق la table . rayon بـ

Les centres forment une pyramide S A B C D, avec S A égale 20 cm car les boules se touchent. A H est la moitié de la diagonale, 10 racine de 2, et Pythagore donne S H égale 10 racine de 2. Il faut ajouter 10 cm : les centres A, B, C, D sont à un rayon au-dessus de la table.

QUESTION 25 · DEVANT UNE SECTION : TROIS QUESTIONS

comment trouver la nature d'une section | par où commencer un exercice de section | quelle est la nature de la section | kifech na3ref nature mta3 la section | section d'un solide méthode | les trois questions devant une section

CE QU'IL RÉPOND

Trois as2la. Kifech le plan ma7tout : parallèle l face walla l la base, y7tawi arête, yet3adda 3la le centre, houwa elli y9arrer la nature. Fi ama triangle plan na7sbou : rectangle l Pythagore, men le sommet l Thalès. W yelzem coefficient k walla le.

trois أسئلة . كيفاش le plan محطوط : parallèle لـ face ولّا لـ la base ، يحتوي arête ، يتعدّى على le centre ، هو اللي يقرّر la nature . في أما triangle plan نحسبو : rectangle لـ Pythagore ، من le sommet لـ w . Thalès يلزم coefficient k ولّا لا .

Trois questions. Comment le plan est-il placé : parallèle à une face ou à la base, contenant une arête, passant par le centre ? C'est ce qui décide de la nature. Dans quel triangle plan calculer : rectangle pour Pythagore, issu du sommet pour Thalès. Enfin, pour une pyramide ou un cône, on cherche le coefficient k.

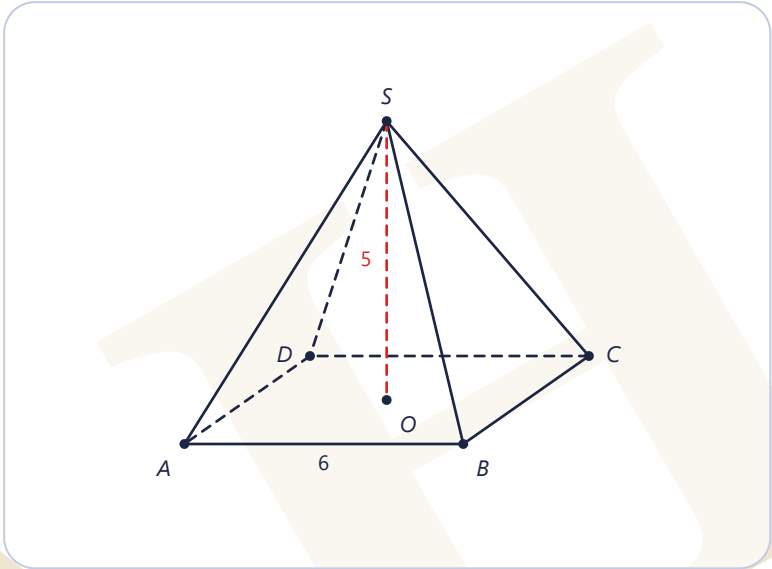
Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE

Le volume d'une pyramide

Une pyramide a pour base un carré de côté $c = 6$ cm et pour hauteur $h = 5$ cm.

Calculer son volume.



Une pyramide SABCD à base carrée, en perspective : A en bas à gauche, B en bas à droite, C derrière B, D derrière A, et le sommet S au-dessus du centre O de la base. Le côté [AB] porte la longueur 6. La hauteur [SO], en pointillés rouges, porte la longueur 5. Les arêtes cachées [SD], [AD] et [DC] sont en pointillés.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `60`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une pyramide n'est pas un prisme : son volume n'est pas simplement l'aire de la base fois la hauteur.
2. Calcule d'abord l'aire B de la base carrée, puis applique la formule de la pyramide.

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

CORRECTION

L'aire de la base — La base est un carré de côté 6 cm.

$$B = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

Le volume — Pour une pyramide, on prend le tiers de l'aire de la base fois la hauteur.

$$V = \frac{1}{3} \times 36 \times 5$$

$$V = 60 \text{ cm}^3$$

Sans le facteur un tiers, on trouverait 180 cm^3 : c'est le volume du pavé de même base et de même hauteur. La pyramide en occupe exactement le tiers.

PIÈGES ANTICIPÉS

`180` → Tu as calculé $B \times h = 36 \times 5$: c'est le volume d'un pavé. Pour une pyramide, il faut encore en prendre **le tiers**.

`90` → Tu as pris la **moitié** de $B \times h$, comme pour l'aire d'un triangle. Le volume d'une pyramide en est le **tiers**.

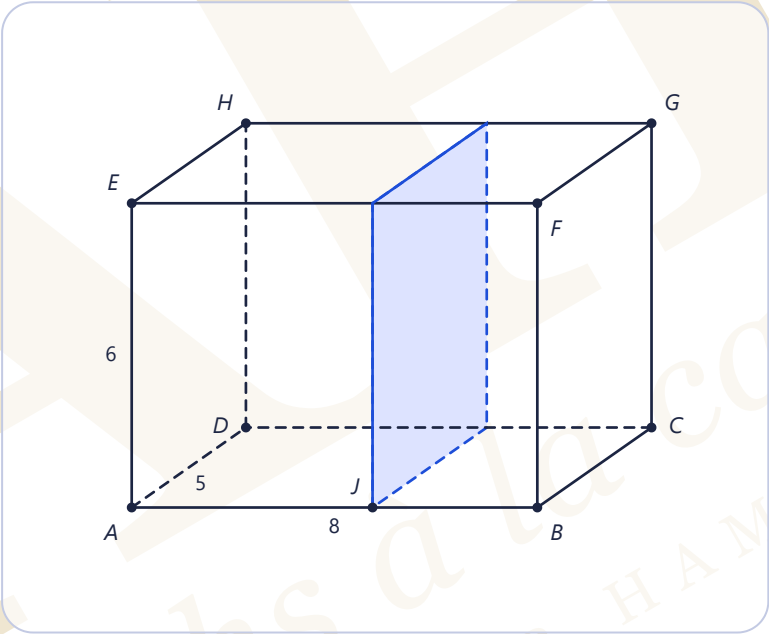
`10` → Tu as multiplié le **côté** par la hauteur : $\frac{1}{3} \times 6 \times 5$. La formule demande l'**aire** de la base, $6^2 = 36\ \text{cm}^2$.

EXERCICE 2 · BASE

Une tranche de pavé

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 8$ cm, $AD = 5$ cm et $AE = 6$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Un plan parallèle à la face $ADHE$ coupe l'arête $[AB]$ en J.

Calculer l'aire de la section.



Un parallélépipède rectangle ABCDEFGH en perspective, avec AB = 8, AD = 5 et AE = 6 notés sur les arêtes ; A en bas à gauche devant, B en bas à droite devant, D et C derrière, E, F, G, H au-dessus. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Un plan parallèle à la face de gauche ADHE coupe l'arête [AB] en J : la section, ombrée en bleu, est une tranche verticale qui traverse le pavé de l'avant vers l'arrière et du bas vers le haut, parallèle à la face ADHE.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan est parallèle à une face. Que dit le cours de la section, comparée à cette face ?
2. La section est **isométrique** à la face $ADHE$: cherche les deux dimensions de cette face-là.

CORRECTION

La nature — La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face est un rectangle isométrique à cette face : ici, à la face $ADHE$.

Les dimensions — La face $ADHE$ a pour côtés $AD = 5$ cm et $AE = 6$ cm.

$$\text{aire} = AD \times AE = 5 \times 6$$

$$\text{aire} = 30 \text{ cm}^2$$

La position du point J sur $[AB]$ ne change rien : partout où l'on coupe parallèlement à la face $ADHE$, on retrouve la même tranche de 5 cm sur 6 cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`48` → Tu as pris la face $ABFE$, de côtés 8 et 6. Le plan est parallèle à la face $ADHE$: c'est elle que la section reproduit, avec $AD = 5$ et $AE = 6$.

`40` → Tu as pris la face $ABCD$, de côtés 8 et 5. La section est isométrique à la face $ADHE$, qui a pour côtés AD et AE.

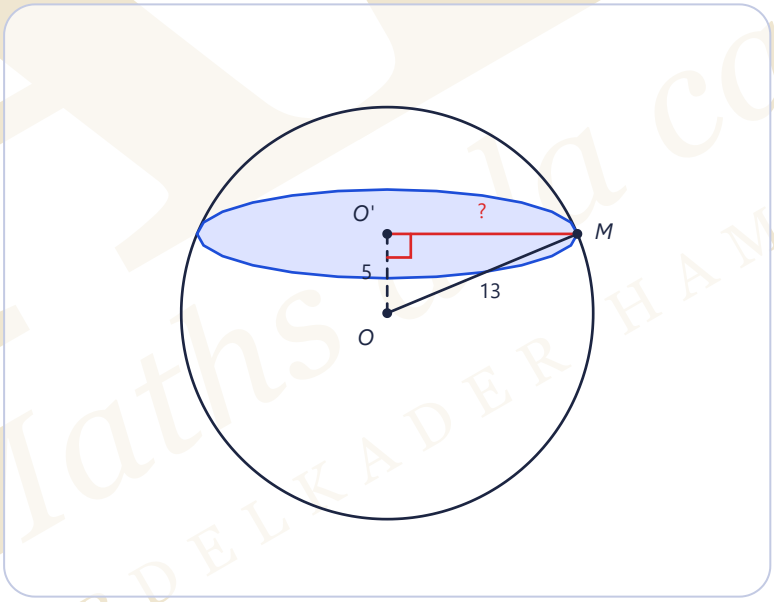
`240` → Tu as calculé le volume du pavé, $8 \times 5 \times 6$. La section est une surface plane : on demande son aire.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Le cercle de section d'une sphère

Une sphère de rayon $R = 13$ cm est coupée par un plan situé à la distance $d = OO' = 5$ cm de son centre O : la section est un cercle de centre O'.

Calculer le rayon r de ce cercle.



Une sphère de centre O, dessinée comme un cercle. Un plan horizontal la coupe au-dessus du centre : la section est un disque de centre O', ombré en bleu. Le segment [OO'], vertical et en pointillés, porte la longueur 5 ; le rayon [OM] de la sphère, qui va de O à un point M du bord de la section, porte la longueur 13 ; le rayon [O'M] de la section, horizontal et en rouge, porte un point d'interrogation. L'angle en O' est droit.

Donner le rayon en centimètres, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place le centre O de la sphère, le centre O' de la section et un point M du cercle de section. Quelle est la nature du triangle $OO'M$?
2. Le triangle $OO'M$ est rectangle en O', et son hypoténuse $[OM]$ est un rayon de la sphère.
   $O'M^2 = OM^2 - OO'^2$

CORRECTION

Le triangle — (OO') est perpendiculaire au plan de coupe, donc à $(O'M)$: le triangle $OO'M$ est rectangle en O', avec $OM = 13$ cm et $OO' = 5$ cm.

Pythagore —

$r^2 = OM^2 - OO'^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

$r = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$

Les nombres 5, 12 et 13 forment un triangle rectangle bien connu : $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → Tu as calculé $13 - 5$. Dans le triangle rectangle $OO'M$, ce sont les **carrés** des longueurs qui se soustraient : $r^2 = 13^2 - 5^2$.

`18` → Tu as additionné $13 + 5$. Le rayon de la section est plus petit que celui de la sphère : dans le triangle rectangle $OO'M$, l'hypoténuse est $OM = 13$ cm, et on travaille sur les **carrés** des longueurs.

`sqrt(194) / 194 / 13.9 / 13.93 / 13.928` → Tu as additionné les carrés : $13^2 + 5^2$. L'hypoténuse est $[OM]$, le rayon de la sphère : r est plus petit que 13, et $r^2 = 13^2 - 5^2$.

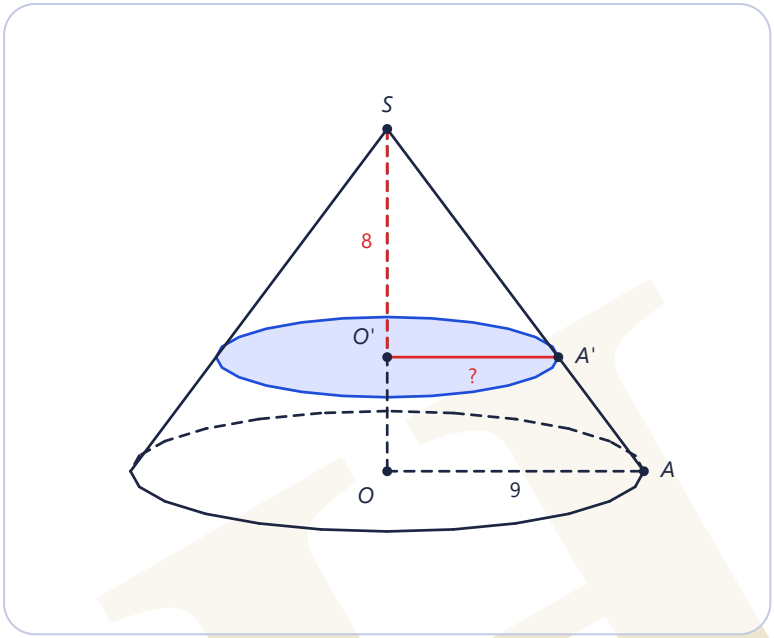
`144` → 144, c'est r^2. Il reste à prendre la racine carrée : $r = \sqrt{144}$.

EXERCICE 4 · PRATIQUE Le cercle de section d'un cône

Un cône de révolution a pour hauteur $SO = 12$ cm et pour rayon de base $OA = 9$ cm. On le coupe par un plan parallèle à la base, à la distance $SO' = 8$ cm du sommet S : la section est un cercle de centre O'.

Calculer le rayon $r = O'A'$ de la section, où A' est le point de la génératrice $[SA]$ situé dans le plan de coupe.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



Un cône de révolution de sommet S, en haut, et de base le disque de centre O, en bas, dessiné en ellipse dont la moitié arrière est en pointillés. La hauteur [SO] est en pointillés ; son morceau [SO'], du sommet jusqu'au plan de coupe, est repassé en rouge et porte la longueur 8. Le rayon de base [OA], à droite, caché dans la base et donc en pointillés, porte la longueur 9. Le plan parallèle à la base coupe le cône suivant un disque de centre O', ombré en bleu ; son rayon [O'A'], avec A' sur la génératrice [SA], porte un point d'interrogation.

Donner le rayon en centimètres, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan de coupe est parallèle à la base : que peux-tu dire des droites $(O'A')$ et (OA) ?
2. Applique le théorème de Thalès dans le triangle SOA, en partant du sommet S. Attention : les 8 cm sont la distance SO'.

$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO}$$

CORRECTION

Des parallèles — Le plan (SOA) coupe deux plans parallèles, celui de la section et celui de la base, suivant $(O'A')$ et (OA) : ces droites sont parallèles.

Thalès — Dans le triangle SOA, avec $SO' = 8$ cm et $SO = 12$ cm :

$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$r = O'A' = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \text{ cm}$$

Le coefficient de réduction est $k = \frac{2}{3}$: le petit cône de sommet S est une réduction du grand, et tous ses rayons sont multipliés par $\frac{2}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Tu as utilisé $\frac{4}{12}$, avec la distance du plan à la base. Le rapport de Thalès part du sommet : $SO' = 8$ cm, donc $\frac{SO'}{SO} = \frac{8}{12}$.

`9` → Un cercle de même rayon que la base, c'est la section d'un **cylindre**. Le cône se resserre vers son sommet : sa section est plus petite.

`13.5` / `13,5` → Tu as multiplié par $\frac{12}{8}$: le rapport est à l'envers, et le rayon obtenu dépasse celui de la base. La section est une **réduction**, de coefficient $\frac{8}{12}$, plus petit que 1.

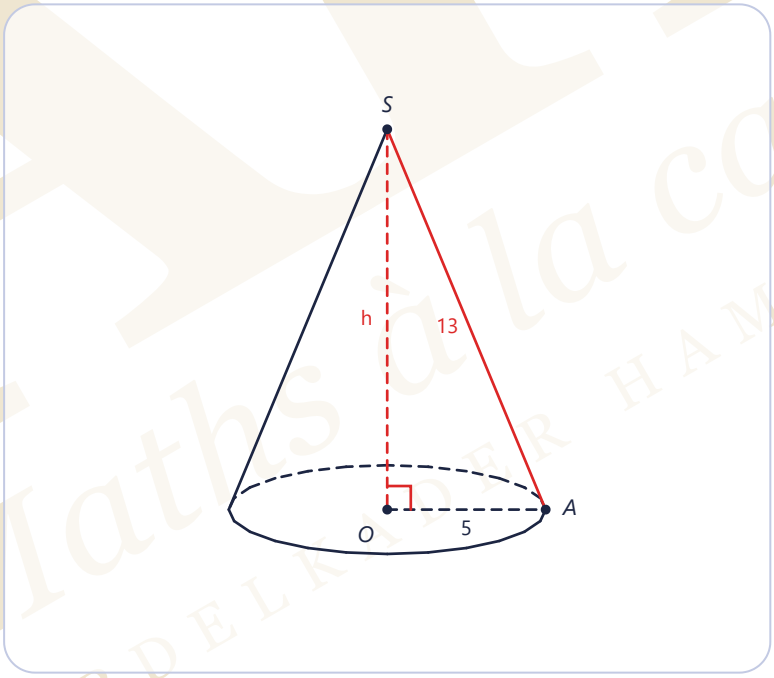
`8` → 8 cm, c'est la distance SO' du sommet au plan de coupe, pas le rayon de la section. Le rayon $O'A'$ se calcule avec Thalès dans le triangle SOA.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Le volume d'un cône

Un cône de révolution a pour rayon de base $OA = 5$ cm et pour génératrice $SA = 13$ cm ; S est son sommet et O le centre de sa base.

Calculer son volume, en fonction de π.



Un cône de révolution de sommet S, posé sur sa base : un disque de centre O dessiné en ellipse, la moitié avant en trait plein et la moitié arrière en pointillés. Deux génératrices partent de S vers les deux bords de la base ; celle de droite, [SA], est repassée en rouge et porte la longueur 13. Le rayon de base [OA], horizontal, caché dans la base et donc en pointillés, porte la longueur 5. La hauteur [SO], verticale, en pointillés rouges, porte la lettre h. L'angle SOA porte la marque de l'angle droit : le triangle SOA est rectangle en O.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `100pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le volume d'un cône demande sa hauteur $h = SO$, et l'énoncé ne la donne pas. Dans quel triangle rectangle peux-tu la calculer ?
2. Le triangle SOA est rectangle en O, et son hypoténuse est la génératrice $[SA]$.
   $SO^2 = SA^2 - OA^2$
3. Avec la hauteur, applique la formule du cône : un tiers de l'aire de la base, fois la hauteur.
   $V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$

CORRECTION

La hauteur — Le triangle SOA est rectangle en O, et son hypoténuse est la génératrice $[SA]$: théorème de Pythagore.

$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

$h = SO = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$

L'aire de la base — La base est un disque de rayon 5 cm.

$B = \pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$

Le volume — Un tiers de l'aire de la base, fois la hauteur.

$V = \frac{1}{3} \times 25\pi \times 12 = 100\pi \text{ cm}^3$

La génératrice n'est pas la hauteur : c'est l'hypoténuse du triangle SOA, donc elle est plus longue. En valeur approchée, $100\pi \approx 314{,}2 \text{ cm}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`325pi/3` → Tu as pris la génératrice $SA = 13$ cm pour la hauteur. La hauteur est SO, un côté de l'angle droit du triangle SOA : calcule-la d'abord avec Pythagore.

`200pi/3` → Tu as pris $h = 13 - 5 = 8$ cm. Dans le triangle rectangle SOA, ce sont les **carrés** des longueurs qui se soustraient : $SO^2 = 13^2 - 5^2$.

`300pi` → Tu as calculé l'aire de la base fois la hauteur : c'est le volume d'un cylindre. Pour un cône, il faut encore en prendre **le tiers**.

`20pi` → Tu as multiplié le **rayon** par la hauteur. La formule demande l'**aire** de la base, celle d'un disque : πR^2.

`100` → Il manque π : la base est un disque, et l'aire d'un disque de rayon R est πR^2.

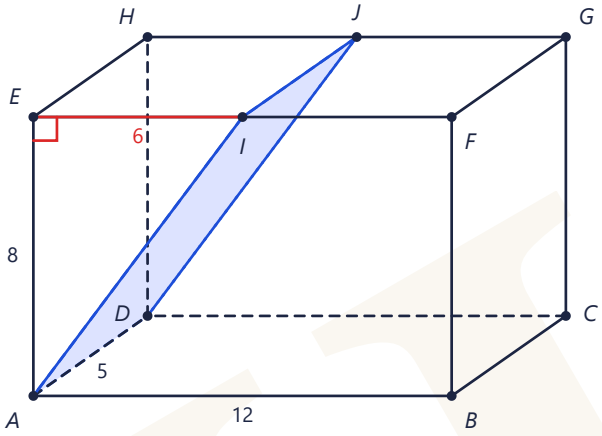
`314 / 314.1 / 314.16 / 314.2` → C'est une valeur approchée. La consigne demande le volume **en fonction de π** : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Un plan qui contient une arête

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 12$ cm, $AD = 5$ cm et $AE = 8$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Le point I de l'arête $[EF]$ est tel que $EI = 6$ cm. On coupe le pavé par le plan qui contient l'arête $[AD]$ et le point I ; ce plan coupe l'arête $[HG]$ en J.

Calculer l'aire de la section $ADJI$.



Un parallélépipède rectangle ABCDEFGH en perspective, avec AB = 12, AD = 5 et AE = 8 notés sur les arêtes ; A en bas à gauche devant, B en bas à droite devant, D et C derrière A et B, et E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point I est sur l'arête du haut devant [EF], avec EI = 6, et le point J sur l'arête du haut derrière [HG], à la même distance de H. La section ADJI, ombrée en bleu, part de l'arête du bas à gauche [AD] et monte en biais jusqu'au segment [IJ] sur la face du dessus : son côté [AI], sur la face avant, est oblique ; ses côtés [AD] et [DJ], cachés, sont en pointillés. Le triangle AEI, rectangle en E, est repassé en rouge.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `50`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan contient l'arête $[AD]$: quelle est la nature de la section ? Un de ses côtés est $[AD]$; l'autre, $[AI]$, est tracé en biais sur la face avant $ABFE$.
2. Le triangle AEI est rectangle en E : le théorème de Pythagore donne la longueur AI.
   $AI^2 = AE^2 + EI^2$

CORRECTION

La nature — Le plan contient l'arête $[AD]$: la section $ADJI$ est un rectangle. En effet, il coupe les faces parallèles $ABCD$ et $EFGH$ suivant deux droites parallèles, (AD) et (IJ) ; et (AD) est perpendiculaire à la face $ABFE$, donc à (AI). Un de ses côtés est l'arête $[AD]$, de longueur 5 cm.

Le côté AI — $[AI]$ est tracé sur la face avant $ABFE$. Le triangle AEI est rectangle en E, avec $AE = 8$ cm et $EI = 6$ cm.

$$AI^2 = AE^2 + EI^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \quad \text{donc} \quad AI = 10 \text{ cm}$$

L'aire —

$$\text{aire}(ADJI) = AD \times AI = 5 \times 10$$

$$\text{aire}(ADJI) = 50 \text{ cm}^2$$

Le plan partage le pavé en deux solides. Celui de gauche, $AEIDHJ$, est un prisme droit à base triangulaire : ses bases sont les triangles rectangles AEI et DHJ, d'aire $\dfrac{8 \times 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$, et sa hauteur

est $AD = 5$ cm. Son volume vaut $24 \times 5 = 120$ cm^3, et l'autre solide occupe le reste du pavé : $12 \times 5 \times 8 - 120 = 360$ cm^3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40` → Tu as pris la face $ADHE$, de côtés 5 et 8 : ce serait la section par un plan **parallèle** à cette face. Ici le plan est incliné : son côté $[AI]$ est oblique, plus long que l'arête AE.

`30` → Tu as pris $EI = 6$ cm comme second côté. Mais $[EI]$ est sur l'arête du haut : le côté de la section est $[AI]$, l'hypoténuse du triangle rectangle AEI.

`60` → Tu as pris la face $ABCD$, de côtés 12 et 5. La section ne va pas jusqu'à l'arête $[BF]$: elle s'arrête en I, sur l'arête $[EF]$, et son côté oblique est $[AI]$.

`70` → Tu as ajouté $AE + EI = 14$. Le théorème de Pythagore ajoute les **carrés** : $AI^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, donc $AI = 10$ cm.

`10*sqrt(7) / 5*sqrt(28)` → Tu as soustrait les carrés : $8^2 - 6^2$. Dans le triangle AEI, rectangle en E, l'hypoténuse est $[AI]$: c'est son carré qui est la **somme** des deux autres, $AI^2 = 8^2 + 6^2$.

`500` → 100, c'est AI^2. Il reste à prendre la racine carrée : $AI = 10$ cm, puis l'aire 5×10.

`25` → Tu as divisé par 2, comme pour un triangle. La section est un **rectangle** : son aire est $AD \times AI$, sans moitié.

`120` → 120 cm^3, c'est le volume du prisme $AEIDHJ$. On demande l'aire de la section, une surface plane : $AD \times AI$.

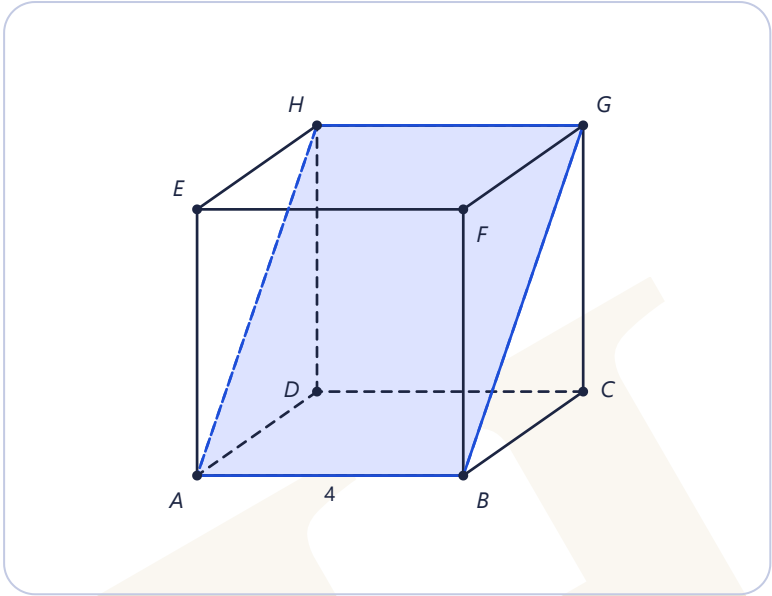
EXERCICE 7 · RAISONNEMENT

Le cube coupé en biais

Un cube d'arête $AB = 4$ cm a pour face du dessous $ABCD$ et pour face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On le coupe par le plan qui passe par A, B et G ; ce plan contient aussi le point H.

Quelle est la nature la plus précise de la section $ABGH$?

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Un cube ABCDEFGH d'arête 4 en perspective : A en bas à gauche devant, B en bas à droite devant, C et D derrière B et A, et E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D ; les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le plan qui passe par A, B et G coupe le cube en biais, de l'arête du bas devant, [AB], jusqu'à l'arête du haut derrière, [HG]. La section ABGH est ombrée en bleu : ses côtés [BG] et [AH] sont les diagonales des faces de droite et de gauche, [AH] en pointillés parce qu'elle est cachée.

Répondre en un mot.

Réponse attendue : `rectangle` — aussi acceptées : un rectangle · c'est un rectangle · ABGH est un rectangle · la section ABGH est un rectangle · la section est un rectangle · rectangle non carré · un rectangle non carré · un rectangle pas un carré · rectangle pas carré · un rectangle mais pas un carré · un rectangle et pas un carré · ABGH est un rectangle, pas un carré · un rectangle, pas un carré · rectangle, pas un carré · rectangle pas un carré · rectangle, pas carré · rectangle mais pas carré · rectangle mais pas un carré · cest un rectangle · rectangle ABGH · ABGH rectangle · rectangle (pas un carré) · rectangle (non carré) · le rectangle · rectangle (pas carré) · un rectangle (pas carré) · c'est rectangle · un parallélogramme rectangle · parallélogramme rectangle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles, comme les faces $ADHE$ et $BCGF$: que peux-tu dire des côtés opposés de $ABGH$? Et l'arête (AB) est perpendiculaire à la face $BCGF$: que vaut l'angle $\widehat{ABG}$?
2. Le plan contient l'arête $[AB]$, comme dans le cours. Pour savoir si la section est un carré, compare ses deux côtés AB et BG. Le segment $[BG]$ est la diagonale d'une face du cube.
3. Dans le triangle BCG, l'angle en C est droit : le théorème de Pythagore donne BG.
   $BG^2 = BC^2 + CG^2$

CORRECTION

Un parallélogramme — Le plan coupe les faces parallèles $ABCD$ et $EFGH$ suivant (AB) et (HG), et les faces parallèles $ADHE$ et $BCGF$ suivant (AH) et (BG). Les côtés opposés de $ABGH$ sont donc parallèles : c'est un parallélogramme.

Un angle droit — L'arête (AB) est perpendiculaire à (BC) et à (BF), donc à la face $BCGF$ et à toute droite de cette face, en particulier à (BG). Le parallélogramme $ABGH$ a un angle droit : c'est un rectangle.

$\widehat{ABG} = 90°$

Pas un carré — $[BG]$ est la diagonale d'un carré de côté 4 cm.

$BG = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66 \text{ cm} \neq AB = 4 \text{ cm}$

$ABGH$ est un rectangle, pas un carré

Le plan contient une arête du cube, donc la section est un rectangle. Son autre côté, $[BG]$, est une diagonale de face : elle est forcément plus longue qu'une arête, et la section ne peut pas être un carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`carré / un carré / ABGH est un carré / c'est un carré / cest un carré / c'est un carre` → Le cube a toutes ses arêtes égales, mais la section n'a que deux côtés qui sont des arêtes, $[AB]$ et $[HG]$, de longueur 4 cm. Les deux autres, $[BG]$ et $[AH]$, sont des diagonales de face : $BG = 4\sqrt{2}$ cm, plus long.

`parallélogramme / un parallélogramme` → C'est bien un parallélogramme, mais on peut être plus précis : l'angle $\widehat{ABG}$ est droit, car (AB) est perpendiculaire à la face $BCGF$.

`losange / un losange` → Un losange a ses quatre côtés égaux. Ici $AB = 4$ cm mais $BG = 4\sqrt{2}$ cm : deux côtés consécutifs n'ont pas la même longueur.

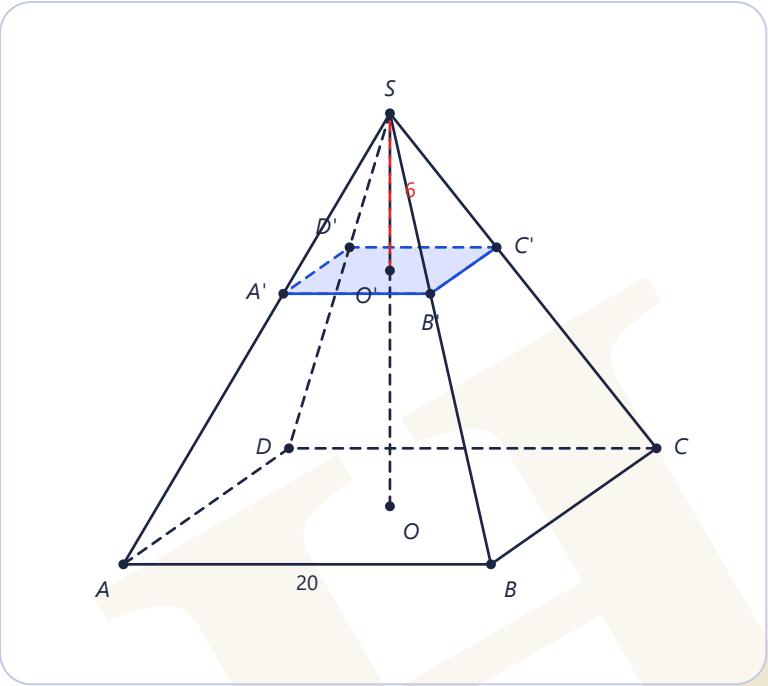
EXERCICE 8 · RAISONNEMENT

L'aire d'une section de pyramide

Une pyramide de hauteur $SO = 15$ cm a pour base un carré de côté $AB = 20$ cm. On la coupe par un plan parallèle à la base, à la distance $SO' = 6$ cm du sommet S : il coupe la hauteur $[SO]$ en O' et les arêtes $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$ en A', B', C', D'.

Calculer l'aire de la section $A'B'C'D'$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Une pyramide SABCD à base carrée, en perspective, de sommet S au-dessus du centre O de la base ; A en bas à gauche, B en bas à droite, C derrière B, D derrière A. Le côté [AB] porte la longueur 20. La hauteur [SO] est en pointillés, et son morceau [SO'], du sommet jusqu'au plan de coupe, est repassé en rouge et porte la longueur 6. La section A'B'C'D', ombrée en bleu, est un carré parallèle à la base, plus petit, situé du côté du sommet.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 64

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La section est un carré, réduction de la base. Commence par le coefficient de réduction, en partant du sommet.
2. $k = \dfrac{SO'}{SO}$ avec $SO' = 6$ cm. Ensuite, calcule le côté de la section — ou multiplie l'aire de la base par k^2.

CORRECTION

Le coefficient — La section est à 6 cm du sommet S.

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Le côté — La section est un carré, réduction de la base de coefficient k.

$$A'B' = \frac{2}{5} \times 20 = 8 \text{ cm}$$

L'aire —

$$\text{aire} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$

Autre chemin, même résultat : l'aire de la base, 400 cm^2, multipliée par $k^2 = \dfrac{4}{25}$, donne $\dfrac{4}{25} \times 400 = 64 \text{ cm}^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`160` → Tu as multiplié l'aire de la base par $k = \dfrac{2}{5}$. Une aire se multiplie par k^2 : les deux côtés du carré sont réduits.

144 → Tu as pris $k = \frac{9}{15}$, avec la distance du plan à la base. Le coefficient se lit depuis le sommet : $k = \frac{6}{15}$.

400 → $400\ \text{cm}^2$, c'est l'aire de la base. La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base en est une **réduction**, pas une copie.

8 → 8 cm, c'est le **côté** $A'B'$ de la section. On demande son **aire** : que vaut l'aire d'un carré de côté 8 cm ?

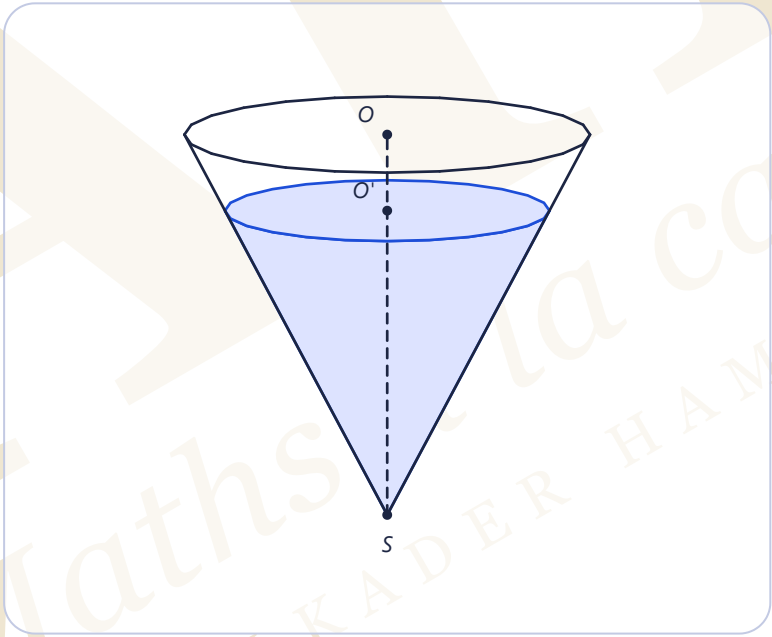
25.6 → Tu as multiplié l'aire de la base par k^3. Le cube sert aux **volumes** ; une aire a deux dimensions, elle se multiplie par k^2.

EXERCICE 9 · DEFI

Le verre aux quatre cinquièmes

Un verre a la forme d'un cône de révolution, pointe en bas. On le remplit jusqu'aux quatre cinquièmes de sa hauteur.

Quelle fraction du volume du verre le liquide occupe-t-il ?



Un verre conique, pointe en bas : le sommet S en bas, l'ouverture en haut, un cercle de centre O dessiné en ellipse. La hauteur [SO] est en pointillés. Le liquide, ombré en bleu, remplit le verre depuis la pointe jusqu'à un disque de centre O' situé aux quatre cinquièmes de la hauteur, juste sous l'ouverture.

Donner une fraction irréductible ou un nombre décimal.

Réponse attendue : 64/125 — aussi acceptées : 0.512

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le liquide forme un petit cône de même sommet que le verre. C'est une réduction du verre : quel est son coefficient ?
2. $k = \frac{4}{5}$. Mais on compare des **volumes** : par quelle puissance de k un volume est-il multiplié ?

CORRECTION

Le coefficient — Le liquide forme un cône de même sommet que le verre, dont la hauteur est les quatre cinquièmes de la sienne : c'est une réduction de coefficient

$$k = \frac{4}{5}$$

Le volume — Les volumes sont multipliés par k^3.

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512$$

À moitié plein ? — $0{,}512$, c'est à peine plus que $0{,}5$: le liquide occupe tout juste plus de la moitié du verre, alors qu'il monte aux quatre cinquièmes de la hauteur.

Toute la largeur d'un verre conique est en haut. Rempli à la moitié de sa hauteur, il ne contiendrait que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ de son volume.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/5 / 0.8` → Tu as supposé le volume proportionnel à la hauteur. Le petit cône est réduit dans les trois dimensions : le volume est multiplié par k^3, pas par k.

`16/25 / 0.64` → Tu as élevé $\frac{4}{5}$ au carré : c'est ainsi que se multiplient les **aires**, comme celle de la surface du liquide. Pour un volume, c'est k^3.

`61/125 / 0.488` → Tu as calculé la partie **vide** du verre, celle qui reste au-dessus du liquide. On demande la fraction occupée par le **liquide** lui-même : le petit cône de même sommet que le verre.

`1/2 / 0.5` → La moitié, c'est une estimation à l'œil. La fraction se calcule : le liquide est un cône réduit, de coefficient $k = \frac{4}{5}$, et un volume se multiplie par k^3.

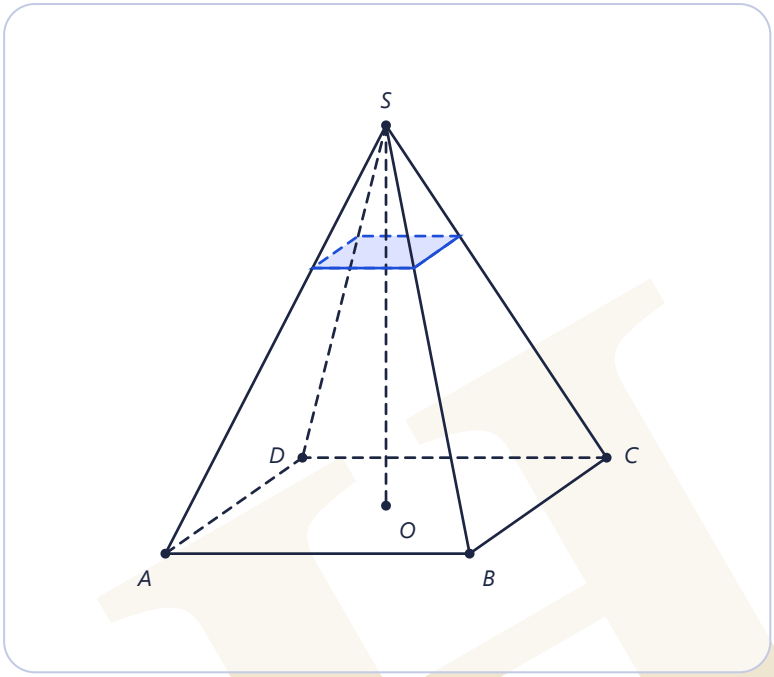
EXERCICE 10 · DEFI

Le tronc de pyramide

Une pyramide a pour volume $270\ \text{cm}^3$. On la coupe par un plan parallèle à sa base, au tiers de sa hauteur **en partant du sommet**. On obtient une petite pyramide et un tronc de pyramide.

Calculer le volume du tronc.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMA



Une pyramide SABCD à base carrée, en perspective, de sommet S au-dessus du centre O de la base ; la hauteur [SO] et les arêtes cachées [SD], [AD] et [DC] sont en pointillés. Un plan parallèle à la base la coupe au tiers de la hauteur en partant du sommet : la section, ombrée en bleu, est un petit carré près de S. Au-dessus, une petite pyramide de sommet S ; en dessous, le tronc de pyramide, entre la section et la base.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `260`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La petite pyramide, du côté du sommet, est une réduction de la grande. Quel est son coefficient k ?
2. $k = \dfrac{1}{3}$. Calcule le volume de la petite pyramide avec k^3, puis retire-le du volume de la grande.

CORRECTION

Le coefficient — Le plan est au tiers de la hauteur depuis le sommet : la petite pyramide a pour hauteur le tiers de celle de la grande.

$$k = \frac{1}{3}$$

La petite pyramide — Les volumes sont multipliés par k^3.

$$V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 270 = \frac{270}{27} = 10 \text{ cm}^3$$

Le tronc — Le tronc, c'est la grande pyramide privée de la petite.

$$V_{\text{tronc}} = 270 - 10 = 260 \text{ cm}^3$$

La petite pyramide prend le tiers de la hauteur, mais seulement $\dfrac{1}{27}$ du volume : presque tout le volume d'une pyramide est près de sa base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 cm^3, c'est le volume de la **petite** pyramide. Le tronc, c'est ce qui reste de la grande : que fais-tu avec 270 ?

`190 / 80` → Tu as pris $k = \frac{2}{3}$, comme si le plan était au tiers de la hauteur en partant de la base.
L'énoncé dit **en partant du sommet** : la petite pyramide a pour hauteur le tiers de la grande.
`90` → Tu as pris le tiers de 270. Le volume de la petite pyramide ne se multiplie pas par k mais par k^3 — et on demande le volume du **tronc**, pas celui de la petite pyramide.
`180` → Tu as retiré le tiers du volume. Le volume de la petite pyramide est multiplié par $k^3 = \frac{1}{27}$, pas par k.
`240` → Tu as retiré le neuvième du volume, avec k^2. k^2 sert aux aires ; pour un volume, c'est $k^3 = \frac{1}{27}$.

EXERCICE 11 · BASE

Le volume d'un cube

Un cube a pour arête $a = 7$ cm.

Calculer son volume.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 343

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le volume d'un cube, c'est l'arête multipliée trois fois par elle-même.
2. Calcule 7×7, puis multiplie encore par 7.

$$V = a^3$$

CORRECTION

La formule — Le cube est un pavé dont les trois dimensions valent a.

$$V = a^3 = 7^3 = 7 \times 7 \times 7$$

$$V = 343 \text{ cm}^3$$

a^3, c'est $a \times a \times a$: trois facteurs pour les trois dimensions de l'espace. Ni 7^2, qui est l'aire d'une face, ni 3×7.

PIÈGES ANTICIPÉS

`49` → 49 cm^2, c'est 7^2 : l'aire d'**une face**. Le volume demande un troisième facteur 7.
`21` → Tu as calculé 3×7. L'exposant 3 ne multiplie pas l'arête par 3 : $7^3 = 7 \times 7 \times 7$.
`294` → 294 cm^2, c'est l'aire totale des six faces, 6×49. On demande le **volume** : 7^3.

EXERCICE 12 · BASE

L'aire totale d'un pavé

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $a = 9$ cm, $b = 4$ cm et $c = 2{,}5$ cm.

Calculer son aire totale, c'est-à-dire la somme des aires de ses six faces.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Maths à la carte — Nader Hammami

Réponse attendue : `137`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les six faces vont par paires de faces identiques : combien de rectangles différents y a-t-il, et quelles sont leurs dimensions ?
2. Il y a trois sortes de faces : $a \times b$, $b \times c$ et $c \times a$, chacune deux fois.

$$\text{aire} = 2(ab + bc + ca)$$

CORRECTION

Les trois faces —

$$ab = 9 \times 4 = 36 \quad ; \quad bc = 4 \times 2{,}5 = 10 \quad ; \quad ca = 2{,}5 \times 9 = 22{,}5$$

Les six faces — Chaque face a sa jumelle, en face d'elle.

$$\text{aire} = 2(36 + 10 + 22{,}5) = 2 \times 68{,}5$$

$$\text{aire} = 137 \text{ cm}^2$$

Pour l'aire d'un pavé, on compte les faces deux par deux : $2(ab + bc + ca)$. Le produit abc, lui, est le volume.

PIÈGES ANTICIPÉS

`90` → $9 \times 4 \times 2{,}5 = 90$, c'est le **volume**, en cm^3. On demande l'aire des six faces.

`68.5` / `68,5` → Tu as compté trois faces. Le pavé en a **six** : chacune des trois a sa jumelle sur la face opposée.

EXERCICE 13 · BASE

Le volume d'un cylindre

Un cylindre de révolution a pour rayon de base $R = 5$ cm et pour hauteur $h = 8$ cm.

Calculer la valeur exacte de son volume.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `200pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cylindre est un « prisme » à base ronde : son volume est l'aire de la base fois la hauteur.
2. La base est un disque de rayon 5 cm.

$$V = \pi R^2 \times h$$

CORRECTION

L'aire de la base —

$$B = \pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

Le volume —

$$V = B \times h = 25\pi \times 8$$

$$V = 200\pi \text{ cm}^3$$

Comme pour le prisme droit : aire de la base fois hauteur. En valeur approchée, $200\pi \approx 628{,}3 \text{ cm}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`80pi` → $2\pi Rh = 80\pi$, c'est l'**aire latérale** du cylindre. Le volume utilise l'aire du disque de base, πR^2.

`800pi` → Tu as pris 10 cm, le diamètre, comme rayon. Le rayon est $R = 5$ cm.

`40pi` → Tu as calculé $\pi \times 5 \times 8$: il manque le carré du rayon. L'aire du disque est πR^2.

`628 / 628.3 / 628.32 / 628,3 / 628,32` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 14 · BASE

Un prisme à base triangulaire

Un prisme droit a pour base un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 5 cm. Sa hauteur est $h = 9$ cm.

Calculer son volume.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `135`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le volume d'un prisme droit est l'aire de sa base fois sa hauteur. Commence par l'aire du triangle.
2. Un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle.

$$B = \frac{6 \times 5}{2}$$

CORRECTION

L'aire de la base —

$$B = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Le volume —

$$V = B \times h = 15 \times 9$$

$$V = 135 \text{ cm}^3$$

Pour un prisme droit, pas de un tiers : $V = B \times h$. Le un tiers est réservé à la pyramide et au cône.

PIÈGES ANTICIPÉS

`270` → Tu as pris $6 \times 5 = 30$ pour l'aire de la base : c'est l'aire du rectangle. Le triangle rectangle en est la **moitié**.

`45` → Tu as pris le tiers de $B \times h$, comme pour une pyramide. Un prisme droit a pour volume $B \times h$, sans facteur.

EXERCICE 15 · BASE

Une pyramide à base rectangulaire

Une pyramide a pour base un rectangle de 8 cm sur $4{,}5$ cm, et pour hauteur $h = 10$ cm.

Calculer son volume.

Maths à la carte
KRADER HAMMAMI

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `120`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord l'aire B du rectangle de base.
2. Une pyramide occupe le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

CORRECTION

L'aire de la base —

$$B = 8 \times 4{,}5 = 36 \text{ cm}^2$$

Le volume —

$$V = \frac{1}{3} \times 36 \times 10 = 12 \times 10$$

$$V = 120 \text{ cm}^3$$

Diviser d'abord 36 par 3 simplifie le calcul : $\frac{1}{3} \times 36 = 12$, puis 12×10.

PIÈGES ANTICIPÉS

`360` → $36 \times 10 = 360$, c'est le volume du pavé de même base et de même hauteur. La pyramide en est le **tiers**.

`180` → Tu as pris la **moitié** de $B \times h$. Le volume d'une pyramide en est le **tiers**.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Retrouver la hauteur d'une pyramide

Une pyramide a pour volume 84 cm^3, et l'aire de sa base est $B = 21 \text{ cm}^2$.

Calculer sa hauteur h.

Donner la hauteur en centimètres.

Réponse attendue : `12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la formule du volume de la pyramide et remplace ce que tu connais : il ne reste qu'une inconnue, h.
2. De $V = \frac{1}{3}Bh$, on tire h en multipliant par 3 puis en divisant par B.

$$h = \frac{3V}{B}$$

CORRECTION

L'équation —

$$\frac{1}{3} \times 21 \times h = 84 \iff 7h = 84$$

$$h = \frac{84}{7} = 12 \text{ cm}$$

Pour retrouver une dimension, on écrit la formule et on résout l'équation : ici $h = \dfrac{3V}{B}$. Le 3 ne disparaît pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → $\dfrac{84}{21} = 4$ serait la hauteur d'un **prisme** de ce volume. Pour une pyramide, $V = \dfrac{1}{3}Bh$: il faut multiplier par 3.

`4/3` → Tu as divisé par 3 au lieu de multiplier. De $\dfrac{1}{3}Bh = V$, on tire $h = \dfrac{3V}{B}$.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

La base d'un tétraèdre

Un tétraèdre a pour volume $40\ \text{cm}^3$. La hauteur relative à sa base BCD mesure 6 cm.

Calculer l'aire de la base BCD.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire : même formule de volume.
2. Remplace V et h dans la formule, puis isole B.

$$\frac{1}{3} \times B \times 6 = 40$$

CORRECTION

L'équation — $\dfrac{1}{3} \times 6 = 2$:

$$\frac{1}{3} \times B \times 6 = 40 \iff 2B = 40$$

$$B = 20\ \text{cm}^2$$

La formule $V = \dfrac{1}{3}Bh$ vaut pour toutes les pyramides, le tétraèdre compris : on y isole l'inconnue, $B = \dfrac{3V}{h}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20/3` → $\dfrac{40}{6}$ oublie le un tiers de la formule : $B = \dfrac{3V}{h}$, pas $\dfrac{V}{h}$.

`240` → Tu as multiplié 40×6. Pour isoler B, il faut **diviser** par la hauteur : $B = \dfrac{3 \times 40}{6}$.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

Du papier d'emballage au volume

Pour recouvrir exactement les six faces d'un cube, il faut $150\ \text{cm}^2$ de papier.

Calculer le volume de ce cube.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 125

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les six faces sont des carrés identiques : quelle est l'aire d'une face ?
2. Une face a pour aire $\dfrac{150}{6}$. Quel nombre positif a vérifie $a^2 = 25$?

CORRECTION

Une face —

$$a^2 = \frac{150}{6} = 25$$

L'arête —

$$a = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Le volume —

$$V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$$

On remonte de l'aire à l'arête — diviser par 6, puis prendre la racine carrée — et de l'arête au volume.

PIÈGES ANTICIPÉS

$25 \to 25 \text{ cm}^2$, c'est l'aire d'**une face**. Il reste à trouver l'arête, puis le volume.

$5 \to 5$ cm, c'est l'**arête** du cube. On demande son volume : 5^3.

EXERCICE 19 · RAISONNEMENT

La hauteur d'eau dans un aquarium

Un aquarium a la forme d'un parallélépipède rectangle. Son fond, horizontal, est un rectangle de 50 cm sur 30 cm. On y verse 36 litres d'eau. On rappelle que $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

Calculer la hauteur de l'eau dans l'aquarium.

Donner la hauteur en centimètres.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'eau forme elle-même un pavé : même fond que l'aquarium, et une hauteur h inconnue. Que vaut son volume, en cm^3 ?
2. Le volume d'eau est l'aire du fond fois la hauteur h. Mets tout en centimètres avant de diviser.
   $50 \times 30 \times h = 36\,000$

CORRECTION

Le volume en cm³ —

$$36 \text{ L} = 36\,000 \text{ cm}^3$$

L'aire du fond —

$$B = 50 \times 30 = 1500 \text{ cm}^2$$

La hauteur —

$$h = \frac{36\,000}{1500}$$
$$h = 24 \text{ cm}$$

Dans un pavé, $V = B \times h$ donne aussi $h = \dfrac{V}{B}$ — à condition d'exprimer V et B dans la même unité : ici les cm^3 et les cm^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2.4 / 2,4` → Ta conversion des litres est fausse : $1\ \text{L} = 1000\ \text{cm}^3$, donc $36\ \text{L} = 36\,000\ \text{cm}^3$, pas 3600.

`0.024 / 0,024 / 6/250` → Tu as divisé 36 par 1500 sans convertir les litres. Le fond est en cm^2 : le volume doit être en cm^3, $36\,000\ \text{cm}^3$.

EXERCICE 20 · DEFI

Le coin du cube

Un cube d'arête 6 cm a pour face du dessous $ABCD$ et pour face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On le coupe par le plan qui passe par B, D et E : on retire ainsi le coin $ABDE$, une pyramide de sommet E dont la base est le triangle ABD.

Calculer le volume du solide qui reste.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `180`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le solide qui reste, c'est le cube privé de la pyramide $ABDE$. Quelle est la base de cette pyramide, et quelle est sa hauteur ?
2. La base ABD est un triangle rectangle en A, moitié d'une face du cube. La hauteur est l'arête $[AE]$, perpendiculaire à la face $ABCD$.
3. Volume du coin : un tiers de l'aire de ABD fois AE. Retire-le du volume du cube.

$$V = 6^3 - \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 6$$

CORRECTION

Le cube —

$$V_{\text{cube}} = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$$

La base du coin — ABD est un triangle rectangle en A, avec $AB = AD = 6$ cm.

$$\text{aire}(ABD) = \frac{6 \times 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

Le coin — (AE) est perpendiculaire à la face $ABCD$: $AE = 6$ cm est la hauteur de la pyramide.

$$V_{ABDE} = \frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36 \text{ cm}^3$$

Ce qui reste —

$$V = 216 - 36 = 180 \text{ cm}^3$$

Le coin ne prend que $\frac{36}{216} = \frac{1}{6}$ du cube : la moitié d'une face pour base, puis le tiers de la pyramide. Pour un solide « troué », on calcule ce qu'on enlève et on le soustrait.

PIÈGES ANTICIPÉS

`36` → $36\ \text{cm}^3$, c'est le volume du coin $ABDE$ que l'on retire. On demande ce qui **reste** du cube.

`108` → Tu as retiré $18 \times 6 = 108$: c'est le volume d'un prisme. Le coin est une **pyramide** : son volume est le tiers de $B \times h$.

`144` → Tu as pris toute la face $ABCD$ pour base du coin. Sa base est le triangle ABD, la **moitié** de la face : $18\ \text{cm}^2$.

EXERCICE 21 · BASE

L'aire d'une sphère

Une sphère a pour rayon $R = 6$ cm.

Calculer la valeur exacte de son aire.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `144pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire d'une sphère vaut quatre fois l'aire d'un disque de même rayon.
   $\text{aire} = 4\pi R^2$
2. Calcule d'abord R^2, puis multiplie par 4.

CORRECTION

La formule —

$\text{aire} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 6^2 = 4\pi \times 36$

$\text{aire} = 144\pi\ \text{cm}^2$

L'aire de la sphère, c'est quatre grands cercles : $4\pi R^2$. Le cube du rayon, lui, sert au volume de la boule. En valeur approchée, $144\pi \approx 452{,}4\ \text{cm}^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`36pi` → $\pi R^2 = 36\pi$, c'est l'aire d'**un** disque de rayon 6 cm. La sphère en vaut **quatre** : $4\pi R^2$.

`288pi` → 288π, c'est le **volume** de la boule, $\frac{4}{3}\pi R^3$. On demande l'aire de la sphère : $4\pi R^2$.

`24pi` → Tu as calculé $4\pi \times 6$: il manque le carré du rayon. L'aire est $4\pi R^2$.

`452` / `452.4` / `452.39` / `452,4` / `452,39` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 22 · BASE

Le volume d'une boule

Une boule a pour diamètre 18 cm.

Calculer la valeur exacte de son volume.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `972pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule du volume de la boule utilise le **rayon**. Que vaut-il ?
2. $R = 9$ cm. Calcule 9^3, puis prends les quatre tiers de $\pi \times 9^3$.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CORRECTION

Le rayon —

$$R = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$$

Le volume —

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 9^3 = \frac{4}{3}\pi \times 729 = 4\pi \times 243$$

$$V = 972\pi \text{ cm}^3$$

Toujours le rayon dans la formule, jamais le diamètre. Et diviser 729 par 3 d'abord, 243, rend le calcul simple. En valeur approchée, $972\pi \approx 3053{,}6 \text{ cm}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7776pi` → Tu as pris 18 cm, le diamètre, comme rayon. Le rayon est $R = 9$ cm : avec le diamètre, on trouve huit fois trop.

`324pi` → $4\pi R^2 = 324\pi$, c'est l'**aire** de la sphère. Le volume de la boule est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

`729pi` → Il manque le facteur $\frac{4}{3}$: le volume de la boule est $\frac{4}{3}\pi R^3$, pas πR^3.

`3053.6 / 3053.63 / 3054 / 3053,6 / 3053,63` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Le rayon d'après l'aire

L'aire d'une sphère vaut $196\pi \text{ cm}^2$.

Calculer son rayon R.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'égalité $4\pi R^2 = 196\pi$: il reste une équation en R.
2. Divise les deux membres par 4π : tu obtiens R^2. Le rayon est positif.

CORRECTION

L'équation —

$$4\pi R^2 = 196\pi \iff R^2 = \frac{196}{4} = 49$$

Le rayon — Un rayon est positif :

$$R = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

De l'aire au rayon : diviser par 4π, puis prendre la racine carrée. π s'élimine des deux côtés, sans jamais passer par $3{,}14$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`49` → 49, c'est R^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`14` → Tu as résolu $\pi R^2 = 196\pi$: il manque le facteur 4 de l'aire de la sphère, $4\pi R^2$.

EXERCICE 24 · PRATIQUE

Le rayon d'après le volume

Une boule a pour volume $2304\pi \text{ cm}^3$.

Calculer son rayon R.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : `12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'égalité $\frac{4}{3}\pi R^3 = 2304\pi$ et isole R^3.
2. Multiplie par 3, puis divise par 4π. Il reste à trouver le nombre entier dont le cube vaut ce résultat : $10^3 = 1000$ est un peu trop petit.

CORRECTION

L'équation —

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2304\pi \iff R^3 = \frac{3 \times 2304}{4} = 1728$$

Le rayon — $12 \times 12 = 144$ et $144 \times 12 = 1728$:

$$R = 12 \text{ cm}$$

Pour remonter du volume au rayon, on isole R^3, puis on cherche le nombre dont le cube vaut ce résultat. Les cubes à connaître : $8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1728` → 1728, c'est R^3. Le rayon est le nombre dont le cube vaut 1728.

`13.2 / 13,2 / 13.21 / 13,21` → Tu as cherché le nombre dont le cube vaut 2304, en oubliant le facteur $\frac{4}{3}$. Isole d'abord $R^3 = \frac{3 \times 2304}{4}$.

EXERCICE 25 · PRATIQUE

La contenance d'un bol

L'intérieur d'un bol a la forme d'une demi-boule de rayon 9 cm.

Calculer la valeur exacte de sa contenance.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `486pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une demi-boule, c'est la moitié d'une boule. Commence par le volume de la boule entière de rayon 9 cm.
2. Prends la moitié des quatre tiers : c'est $\frac{2}{3}$.

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

CORRECTION

La boule entière —

$$\frac{4}{3}\pi \times 9^3 = \frac{4}{3}\pi \times 729 = 972\pi$$

La moitié —

$$V = \frac{972\pi}{2}$$

$$V = 486\pi \text{ cm}^3$$

Une demi-boule a pour volume $\frac{2}{3}\pi R^3$. Ici $486\pi \approx 1527 \text{ cm}^3$, soit environ $1{,}5$ litre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`972pi` → 972π, c'est la boule **entière**. Le bol n'en est que la moitié.

`162pi` → $2\pi R^2 = 162\pi$, c'est l'aire de la demi-sphère, la surface du bol. La contenance est un **volume** : $\frac{2}{3}\pi R^3$.

`1526.8 / 1526.81 / 1527 / 1526,8 / 1526,81` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

De l'aire au volume

Une sphère a pour aire $100\pi \text{ cm}^2$.

Calculer la valeur exacte du volume de la boule qu'elle limite.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `500pi/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le volume demande le rayon : retrouve-le d'abord grâce à l'aire.
2. $4\pi R^2 = 100\pi$ donne R^2, puis R. Applique ensuite la formule du volume de la boule.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CORRECTION

Le rayon —

$$4\pi R^2 = 100\pi \iff R^2 = 25 \iff R = 5 \text{ cm}$$

Le volume —

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{4}{3}\pi \times 125$$

$$V = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Aire et volume se relient par le rayon : on remonte d'abord au rayon, on redescend ensuite. Le résultat $\frac{500\pi}{3} \approx 523{,}6 \text{ cm}^3$ ne se simplifie pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`500pi` → Tu as calculé $4\pi R^3$: le volume de la boule est $\frac{4}{3}\pi R^3$, il faut encore diviser par 3.

`125pi` → Tu as calculé πR^3 : il manque le facteur $\frac{4}{3}$ du volume de la boule.

`523.6 / 523.59 / 524 / 523,6 / 523,59` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 27 · RAISONNEMENT

Une boule dans une boîte cubique

Une boule est enfermée dans une boîte cubique d'arête 10 cm : elle touche les six faces de la boîte.

Calculer la valeur exacte du volume de l'espace vide dans la boîte.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `1000-500pi/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La boule touche deux faces opposées : son diamètre est donc égal à l'arête du cube. Que vaut son rayon ?
2. Le rayon est 5 cm. Le vide, c'est le volume du cube moins celui de la boule.

CORRECTION

Le rayon — La boule touche deux faces opposées : son diamètre vaut l'arête, 10 cm.

$$R = 5 \text{ cm}$$

Les deux volumes —

$$V_{\text{cube}} = 10^3 = 1000 \quad ; \quad V_{\text{boule}} = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$

Le vide —

$$V = 1000 - \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Une boule « inscrite » dans un cube a pour diamètre l'arête. Le vide vaut environ $1000 - 523{,}6 = 476{,}4 \text{ cm}^3$: près de la moitié de la boîte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1000-4000pi/3` → Tu as pris 10 cm comme rayon : cette boule serait plus grande que la boîte, et ton résultat est négatif. C'est le **diamètre** qui vaut 10 cm.

`500pi/3` → $\dfrac{500\pi}{3}$, c'est le volume de la **boule**. On demande le vide autour : le cube moins la boule.

`476.4 / 476.40 / 476 / 476,4` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 28 · DEFI

Fondre une boule en billes

On fond une boule de métal de rayon 6 cm pour fabriquer des billes de rayon 2 cm, sans perte de métal.

Calculer le nombre de billes obtenues.

Donner un nombre entier.

Réponse attendue : 27

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le métal se conserve : le nombre de billes est le volume de la boule divisé par le volume d'une bille.
2. Dans ce quotient, $\dfrac{4}{3}\pi$ apparaît en haut et en bas : il se simplifie.

$$\frac{\frac{4}{3}\pi \times 6^3}{\frac{4}{3}\pi \times 2^3}$$

CORRECTION

Le quotient — Le facteur $\dfrac{4}{3}\pi$ se simplifie :

$$n = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 6^3}{\frac{4}{3}\pi \times 2^3} = \frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3$$

$$n = 3^3 = 27$$

Un rayon trois fois plus grand donne un volume $3^3 = 27$ fois plus grand : c'est la règle des volumes, multipliés par le **cube** du rapport des longueurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3, c'est le rapport des **rayons**. Les volumes, eux, sont dans le rapport 3^3.

`9` → $3^2 = 9$, c'est le rapport des **aires** des deux sphères. Le métal est un volume : le rapport est 3^3.

EXERCICE 29 · BASE

Le volume d'un cône

Un cône de révolution a pour rayon de base $R = 6$ cm et pour hauteur $h = 5$ cm.

Calculer la valeur exacte de son volume.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `60pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cône se calcule comme la pyramide : un tiers de l'aire de la base, fois la hauteur.
2. La base est un disque de rayon 6 cm.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

CORRECTION

L'aire de la base —

$B = \pi \times 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$

Le volume —

$V = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 5 = 12\pi \times 5$

$V = 60\pi \text{ cm}^3$

Un cône occupe le tiers du cylindre de même base et de même hauteur : $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. En valeur approchée, $60\pi \approx 188{,}5 \text{ cm}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`180pi` → 180π, c'est le volume du **cylindre** de même base et de même hauteur. Le cône en est le tiers.

`10pi` → Tu as multiplié le **rayon** par la hauteur. La formule demande l'aire du disque de base, πR^2.

`90pi` → Tu as pris la **moitié** de $B \times h$. Le volume d'un cône en est le **tiers**.

`188.5 / 188.50 / 188 / 188,5` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 30 · BASE

La génératrice d'un cône

Un cône de révolution de sommet S a pour base un disque de centre O et de rayon $OA = 9$ cm, et pour hauteur $SO = 12$ cm.

Calculer la longueur SA d'une génératrice.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : `15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle SOA est rectangle : en quel point ? Quelle est son hypoténuse ?
2. Le triangle SOA est rectangle en O et la génératrice $[SA]$ est son hypoténuse.

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$

CORRECTION

Le triangle — La hauteur (SO) est perpendiculaire à la base, donc à (OA) : le triangle SOA est rectangle en O.

Pythagore —

$SA^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$

$SA = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$

La génératrice est l'hypoténuse du triangle SOA : toujours plus longue que la hauteur et que le rayon. Ici on reconnaît le triangle $3, 4, 5$ agrandi trois fois.

PIÈGES ANTICIPÉS

`21` → Tu as additionné $12 + 9$. Le théorème de Pythagore additionne les **carrés** des longueurs.

`3*sqrt(7) / sqrt(63)` → Tu as soustrait les carrés. L'hypoténuse du triangle SOA est $[SA]$: c'est son carré qui est la **somme** des deux autres.

`225` → 225, c'est SA^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`3` → Tu as calculé $12 - 9$. Pythagore travaille sur les **carrés** : $SA^2 = 12^2 + 9^2$.

EXERCICE 31 · PRATIQUE

L'angle du patron d'un cône

Un cône de révolution a pour rayon de base $R = 4$ cm et pour génératrice $\ell = 10$ cm. Mise à plat, sa surface latérale est une portion de disque de rayon ℓ.

Calculer l'angle a de cette portion de disque, en degrés.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 144

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'arc de la portion de disque s'enroule exactement autour de la base du cône : leurs longueurs sont égales.
2. L'angle est la même fraction de $360°$ que le rapport $\dfrac{R}{\ell}$.

$$a = 360 \times \frac{R}{\ell}$$

CORRECTION

La formule — L'arc a la longueur $2\pi R$ du périmètre de la base ; le cercle entier de rayon ℓ mesure $2\pi\ell$.

$a = 360 \times \dfrac{R}{\ell} = 360 \times \dfrac{4}{10}$

$a = 144°$

$\dfrac{R}{\ell}$ est toujours plus petit que 1, puisque la génératrice est plus longue que le rayon : l'angle du patron est toujours inférieur à $360°$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.4 / 0,4 / 2/5` → $\dfrac{4}{10}$, c'est la **fraction** du disque. L'angle en degrés est cette fraction de $360°$.

`900` → Tu as calculé $360 \times \dfrac{10}{4}$: le rapport est à l'envers, et un angle de $900°$ fait plus de deux tours. C'est $\dfrac{R}{\ell}$.

`36` → Tu as divisé 360 par ℓ sans multiplier par R : l'angle est $360 \times \dfrac{R}{\ell}$.

EXERCICE 32 · PRATIQUE

L'aire latérale d'un cône

Un cône de révolution a pour rayon de base $R = 7$ cm et pour génératrice $\ell = 12$ cm.

Calculer la valeur exacte de son aire latérale.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `84pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire latérale, c'est la portion de disque du patron, sans le disque de base.
2. La formule du cours donne directement cette aire.

$$\text{aire latérale} = \pi R \ell$$

CORRECTION

La formule —

$$\text{aire latérale} = \pi R \ell = \pi \times 7 \times 12$$

$$\text{aire latérale} = 84\pi \text{ cm}^2$$

L'aire latérale du cône est $\pi R \ell$, sans facteur 2 : celui du cylindre, $2\pi Rh$, ne s'applique pas ici. En valeur approchée, $84\pi \approx 263{,}9 \text{ cm}^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`168pi` → $2\pi R\ell$, c'est la formule du **cylindre**. L'aire latérale du cône est $\pi R\ell$, la moitié.

`133pi` → Tu as ajouté le disque de base, 49π : c'est l'aire **totale**. On ne demande que l'aire latérale, $\pi R\ell$.

`49pi` → 49π, c'est l'aire du disque de base. L'aire latérale est la surface du « chapeau » : $\pi R\ell$.

`263.9` / `263.89` / `264` / `263,9` / `263,89` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 33 · PRATIQUE

Retrouver la hauteur d'un cône

Un cône de révolution a pour volume $96\pi \text{ cm}^3$ et pour rayon de base $R = 6$ cm.

Calculer sa hauteur h.

Donner la hauteur en centimètres.

Réponse attendue : `8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la formule du volume avec ce que tu connais : il ne reste que h.
2. $\dfrac{1}{3}\pi \times 36 \times h = 96\pi$: simplifie par π, puis résous.

CORRECTION

L'équation —

$$\frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times h = 96\pi \iff 12h = 96$$

$$h = \frac{96}{12} = 8 \text{ cm}$$

π apparaît des deux côtés : il s'élimine, et la hauteur est un nombre sans π. De façon générale, $h = \dfrac{3V}{\pi R^2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

8/3 → Tu as résolu $36h = 96$, comme pour un cylindre. Le volume du cône contient le facteur $\frac{1}{3}$: $12h = 96$.

48 → Tu as divisé par 6 au lieu de $6^2 = 36$: l'aire de la base est πR^2.

EXERCICE 34 · PRATIQUE

Du patron au cône

On découpe dans du carton une portion de disque de rayon 15 cm et d'angle $120°$. On l'enroule pour former la surface latérale d'un cône de révolution, sans recouvrement.

Calculer le rayon R de la base de ce cône.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon du carton devient la génératrice du cône : $\ell = 15$ cm. Et la formule de l'angle relie a, R et ℓ.

$$a = 360 \times \frac{R}{\ell}$$

2. Remplace a et ℓ, et résous l'équation en R.

CORRECTION

L'équation — La génératrice est le rayon du carton, $\ell = 15$ cm :

$$360 \times \frac{R}{15} = 120 \iff \frac{R}{15} = \frac{1}{3}$$

$$R = 5 \text{ cm}$$

$120°$ est le tiers d'un tour : le rayon de la base est le tiers de la génératrice. Autre lecture : l'arc mesure $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 15 = 10\pi$, le périmètre d'un cercle de rayon 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

45 → Tu as trouvé un rayon plus grand que la génératrice : impossible, le rayon est un côté de l'angle droit du triangle SOA. Le rapport est $\dfrac{R}{\ell} = \dfrac{120}{360}$.

15 → 15 cm, c'est le rayon du carton : il devient la **génératrice** du cône, pas le rayon de sa base.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

L'aire totale d'un cône

Un cône de révolution a pour rayon de base $R = 6$ cm et pour hauteur $h = 8$ cm.

Calculer la valeur exacte de son aire totale : aire latérale et disque de base.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `96pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire latérale $\pi R\ell$ demande la génératrice ℓ, que l'énoncé ne donne pas : calcule-la avec Pythagore.
2. $\ell^2 = h^2 + R^2$. Ajoute ensuite l'aire latérale et l'aire du disque de base.

CORRECTION

La génératrice —

$$\ell^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad \text{donc} \quad \ell = 10 \text{ cm}$$

L'aire latérale —

$$\pi R\ell = \pi \times 6 \times 10 = 60\pi$$

La base —

$$\pi R^2 = 36\pi$$

$$\text{aire totale} = 60\pi + 36\pi = 96\pi \text{ cm}^2$$

L'aire latérale utilise la génératrice, pas la hauteur. L'aire totale ajoute le disque de base : $\pi R\ell + \pi R^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60pi` → 60π, c'est l'aire **latérale** seule. L'aire totale ajoute le disque de base.

`84pi` → Tu as pris la hauteur 8 cm dans $\pi R\ell$. La formule demande la **génératrice** $\ell = 10$ cm.

`301.6 / 301.59 / 302 / 301,6 / 301,59` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 36 · RAISONNEMENT

De l'aire latérale au volume

Un cône de révolution a pour rayon de base $R = 8$ cm, et son aire latérale vaut $136\pi \text{ cm}^2$.

Calculer la valeur exacte de son volume.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `320pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire latérale $\pi R\ell$ donne la génératrice ℓ. Mais le volume demande la **hauteur**.
2. Dans le triangle SOA rectangle en O, l'hypoténuse est la génératrice.
   $h^2 = \ell^2 - R^2$

CORRECTION

La génératrice —

$\pi \times 8 \times \ell = 136\pi \iff \ell = 17 \text{ cm}$

La hauteur —

$h^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225 \quad \text{donc} \quad h = 15 \text{ cm}$

Le volume —

$V = \frac{1}{3}\pi \times 8^2 \times 15 = \frac{1}{3} \times 64\pi \times 15$

$V = 320\pi \text{ cm}^3$

Trois étapes : l'aire latérale donne ℓ, Pythagore donne h, la formule donne V. Prendre ℓ pour la hauteur est l'erreur la plus fréquente.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1088pi/3` → Tu as pris la génératrice $\ell = 17$ cm pour la hauteur. La hauteur est un côté de l'angle droit du triangle SOA : $h^2 = 17^2 - 8^2$.

`960pi` → 960π, c'est le volume du cylindre de même base et de même hauteur. Le cône en est le tiers.

`1005.3 / 1005.31 / 1005 / 1005,3` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 37 · RAISONNEMENT

Le patron d'un cône, sans la génératrice

Un cône de révolution a pour rayon de base $R = 7$ cm et pour hauteur $h = 24$ cm.

Calculer l'angle a de son patron, en degrés.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `100.8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule de l'angle utilise la génératrice ℓ, pas la hauteur. Calcule d'abord ℓ.

   $a = 360 \times \frac{R}{\ell}$

2. Le triangle formé par la hauteur, le rayon et la génératrice est rectangle : $\ell^2 = h^2 + R^2$.

CORRECTION

La génératrice —

$\ell^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \quad \text{donc} \quad \ell = 25 \text{ cm}$

L'angle —

$a = 360 \times \frac{7}{25} = \frac{2520}{25}$

$a = 100{,}8°$

Le patron se construit avec la génératrice : c'est le rayon de la portion de disque. Les nombres $7, 24, 25$ forment un triangle rectangle : $49 + 576 = 625$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`105` → Tu as divisé par la hauteur 24. La formule demande la **génératrice** ℓ, calculée par Pythagore : $\ell = 25$ cm.

`0.28` / `0,28` / `7/25` → $\dfrac{7}{25}$, c'est la fraction du disque. L'angle est cette fraction de $360°$.

EXERCICE 38 · DEFI

Le cornet en demi-disque

On roule un demi-disque de papier de rayon 12 cm pour en faire un cornet : un cône de révolution, sans recouvrement, dont le demi-disque est la surface latérale.

Calculer la valeur exacte du volume de ce cône.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `72*sqrt(3)*pi` — aussi acceptées : 72pi*sqrt(3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon du papier devient la génératrice : $\ell = 12$ cm. L'arc du demi-disque devient le cercle de base : que vaut sa longueur ?
2. L'arc mesure la moitié de $2\pi \times 12$: c'est le périmètre $2\pi R$ de la base. On en tire R, puis la hauteur par Pythagore.
3. Avec $R = 6$ cm et $\ell = 12$ cm :
   $h^2 = \ell^2 - R^2 = 144 - 36$

CORRECTION

Le rayon de la base — L'arc du demi-disque devient le périmètre de la base :

$$2\pi R = \frac{2\pi \times 12}{2} = 12\pi \quad \text{donc} \quad R = 6 \text{ cm}$$

La hauteur —

$$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \quad \text{donc} \quad h = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Le volume —

$$V = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 6\sqrt{3} = 12\pi \times 6\sqrt{3}$$

$$V = 72\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^3$$

Un demi-disque donne toujours un cône dont le rayon est la moitié de la génératrice : l'angle du patron, $180°$, vaut $360 \times \dfrac{R}{\ell}$. En valeur approchée, $V \approx 391{,}8 \text{ cm}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`144pi` → Tu as pris 12 cm pour la hauteur. C'est la **génératrice** ; la hauteur se calcule par Pythagore, $h^2 = 12^2 - 6^2$.

`216*sqrt(3)*pi` → Il manque le facteur $\dfrac{1}{3}$ du volume d'un cône : tu as calculé le volume du cylindre.

`391.8` / `391.78` / `392` / `391,8` / `391,78` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 39 · BASE

Deux arêtes de faces opposées

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Les droites (AB) et (HG) sont dans les faces parallèles $ABCD$ et $EFGH$.

Quelle est la position relative des droites (AB) et (HG) : parallèles, sécantes ou non coplanaires ?

Répondre en un mot.

Réponse attendue : `parallèles` — aussi acceptées : elles sont parallèles · AB et HG sont parallèles · les droites sont parallèles · les droites AB et HG sont parallèles · parallèle · elles sont paralleles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites tracées sur deux faces opposées du pavé ne se coupent jamais. Mais cela ne suffit pas : il faut aussi qu'elles soient dans un **même plan**.
2. Cherche un plan qui contient à la fois (AB) et (HG) : pense au plan (ABG), qui coupe la face du dessous et la face du dessus.

CORRECTION

Un même plan — Le plan $(ABGH)$ contient (AB) et (HG). Il coupe les faces parallèles $ABCD$ et $EFGH$ suivant ces deux droites.

La propriété — Un plan qui coupe deux plans parallèles les coupe suivant deux droites parallèles.

$(AB) \parallel (HG)$

Deux droites de deux faces parallèles ne se rencontrent jamais ; elles ne sont parallèles que si un même plan les contient — ici, le plan $(ABGH)$. On peut aussi le voir sans propriété : (AB) et (HG) sont toutes deux parallèles à (DC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`sécantes / elles sont sécantes` → (AB) est dans la face du dessous, (HG) dans celle du dessus : ces deux plans parallèles n'ont aucun point commun, donc les droites ne peuvent pas se couper.

`non coplanaires / elles sont non coplanaires` → Elles sont pourtant coplanaires : le plan $(ABGH)$ les contient toutes les deux.

EXERCICE 40 · BASE

Ni parallèles, ni sécantes

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D.

Quelle est la position relative de la droite (AD) et de la droite (BG) : parallèles, sécantes ou non coplanaires ?

Répondre en deux mots.

Réponse attendue : `non coplanaires` — aussi acceptées : elles sont non coplanaires · non coplanaire · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · ni parallèles ni sécantes · elles ne sont ni parallèles ni

sécantes · ni sécantes ni parallèles · AD et BG sont non coplanaires · AD et BG ne sont pas coplanaires · non-coplanaires · elles sont non-coplanaires · (AD) et (BG) sont non coplanaires · (AD) et (BG) ne sont pas coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AD) est dans la face de gauche $ADHE$, (BG) dans la face de droite $BCGF$. Ces deux faces sont parallèles : les droites peuvent-elles se couper ?
2. Elles ne se coupent pas. Sont-elles parallèles pour autant ? Compare (BG) à (BC), qui est la parallèle à (AD) passant par B.

CORRECTION

Pas sécantes — (AD) est dans le plan $(ADHE)$ et (BG) dans le plan $(BCGF)$. Ces plans sont parallèles et distincts : ils n'ont aucun point commun, donc les droites non plus.

Pas parallèles — La parallèle à (AD) passant par B est (BC). Or (BG) est la diagonale de la face $BCGF$: elle n'est pas confondue avec (BC). Donc (BG) n'est pas parallèle à (AD).

(AD) et (BG) sont non coplanaires

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas forcément parallèles : elles peuvent n'être dans aucun plan commun. On dit qu'elles sont **non coplanaires**.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallèles / elles sont parallèles` → Elles ne se coupent pas, c'est vrai. Mais la parallèle à (AD) menée par B est (BC), pas (BG) : ne pas se rencontrer ne suffit pas, dans l'espace, pour être parallèles.

`sécantes / elles sont sécantes` → (AD) et (BG) sont dans deux faces parallèles du pavé, qui n'ont aucun point commun : elles ne peuvent pas se couper.

EXERCICE 41 · PRATIQUE

La trace sur la face du dessous

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle avec $AB = 10$ cm, $AD = 7$ cm et $AE = 4$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Le point I de l'arête $[AB]$ vérifie $AI = 3$ cm. Le plan qui contient l'arête $[EH]$ et le point I coupe l'arête $[DC]$ en J.

Calculer DJ.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan de coupe rencontre les faces parallèles $EFGH$ et $ABCD$. Que peux-tu dire des droites (EH) et (IJ) ?
2. (IJ) est parallèle à (EH), donc à (AD) : le quadrilatère $AIJD$ est un rectangle.

CORRECTION

Deux droites parallèles — Le plan (EHI) coupe les faces parallèles $EFGH$ et $ABCD$ suivant (EH) et (IJ) : ces droites sont parallèles.

$(IJ) \parallel (EH) \parallel (AD)$

Un rectangle — Dans la face $ABCD$, (IJ) est parallèle à (AD), et I, J sont sur les côtés $[AB]$ et $[DC]$: $AIJD$ est un rectangle.

$DJ = AI$

$DJ = 3 \text{ cm}$

Pour tracer une section, on commence par ce que la propriété des plans parallèles impose : sur deux faces opposées, les côtés de la section sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7 cm, c'est $CJ = 10 - 3$. On demande DJ : J est en face de I, et $DJ = AI$.

4 → 4 cm, c'est la hauteur AE du pavé. Le point J se place sur la face du dessous, en face de I : $DJ = AI$.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

Un tétraèdre coupé à mi-arête

$ABCD$ est un tétraèdre, avec $BC = 9$ cm. Le plan qui passe par le milieu I de l'arête $[AB]$ et qui est parallèle à la face BCD coupe l'arête $[AC]$ en J.

Calculer IJ.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ABC) coupe le plan de coupe et la face BCD, qui sont parallèles. Que peux-tu dire de (IJ) et (BC) ?
2. Dans le triangle ABC, (IJ) est parallèle à (BC) et passe par le milieu de $[AB]$.

CORRECTION

Des parallèles — Le plan (ABC) coupe les deux plans parallèles suivant (IJ) et (BC) :

$(IJ) \parallel (BC)$

Le triangle ABC — La droite qui passe par le milieu I de $[AB]$ parallèlement à (BC) coupe $[AC]$ en son milieu J, et :

$$IJ = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}$$

$IJ = 4{,}5 \text{ cm}$

La propriété des plans parallèles ramène l'espace au plan : une fois $(IJ) \parallel (BC)$ établi, c'est le théorème des milieux dans le triangle ABC.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → IJ n'est pas égal à BC : le plan coupe le tétraèdre à mi-hauteur, et la section est deux fois plus petite que la face BCD.

18 → Tu as multiplié par 2. $[IJ]$ relie deux milieux : c'est la **moitié** de BC.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Le périmètre de la section

$ABCD$ est un tétraèdre. Le triangle BCD a pour côtés $BC = 6$ cm, $CD = 9$ cm et $BD = 12$ cm. Le point I de l'arête $[AB]$ vérifie $AI = \frac{2}{3}AB$. Le plan qui passe par I parallèlement à la face BCD coupe $[AC]$ en J et $[AD]$ en K.

Calculer le périmètre du triangle IJK.

Donner le périmètre en centimètres.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans chaque face issue de A, le plan de coupe trace un côté parallèle au côté de BCD : $(IJ) \parallel (BC)$, $(JK) \parallel (CD)$, $(IK) \parallel (BD)$.
2. Le théorème de Thalès, depuis le sommet A, donne le même rapport pour les trois côtés.

$$\frac{IJ}{BC} = \frac{AI}{AB} = \frac{2}{3}$$

CORRECTION

Des parallèles — Les faces ABC, ACD et ABD coupent les deux plans parallèles : $(IJ) \parallel (BC)$, $(JK) \parallel (CD)$ et $(IK) \parallel (BD)$.

Thalès — Dans chaque face, depuis A, le rapport est $\frac{AI}{AB} = \frac{2}{3}$:

$$IJ = \frac{2}{3} \times 6 = 4 \quad ; \quad JK = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \quad ; \quad IK = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

$$\text{périmètre}(IJK) = 4 + 6 + 8 = 18 \text{ cm}$$

Le triangle IJK est une réduction de BCD de coefficient $\frac{2}{3}$: son périmètre est aussi multiplié par $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \times 27 = 18$.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → Tu as pris le rapport $\frac{1}{3}$. Thalès se lit depuis le sommet A : $\frac{AI}{AB} = \frac{2}{3}$, et I est aux deux tiers de l'arête en partant de A.

27 → 27 cm, c'est le périmètre de la face BCD. La section est plus petite : ses côtés valent les $\frac{2}{3}$ de ceux de BCD.

EXERCICE 44 · RAISONNEMENT

Deux droites de faces parallèles

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. La droite (AB) est dans la face du dessous et la droite (FG) dans la face du dessus, et ces deux faces sont parallèles.

Les droites (AB) et (FG) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne sont pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · pas parallèles · non pas parallèles · non elles sont non coplanaires · non coplanaires · elles sont non coplanaires · faux · non, elles ne sont pas parallèles · non, elles sont non coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Elles ne se coupent pas, puisque les deux faces n'ont aucun point commun. Mais pour être parallèles, il faut encore autre chose : quoi ?
2. Compare les directions : (AB) est parallèle à (EF), et (FG) part de F dans une autre direction que (EF).

CORRECTION

Pas de point commun — (AB) et (FG) sont dans deux faces parallèles distinctes : elles ne se coupent pas.

Pas la même direction — La parallèle à (AB) passant par F est (EF). Or (FG) est perpendiculaire à (EF) dans la face $EFGH$: elle n'est pas parallèle à (AB).

Non : (AB) et (FG) sont non coplanaires

La propriété du cours dit : un **même** plan qui coupe deux plans parallèles donne deux droites parallèles. Prises au hasard, une droite de chaque plan ne sont en général pas parallèles. Aucun plan ne contient à la fois (AB) et (FG).

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / vrai / oui elles sont parallèles / elles sont parallèles / parallèles` → Deux faces parallèles ne suffisent pas. La propriété exige que les deux droites soient tracées par un **même** plan. Ici, (FG) n'a pas la direction de (AB) : la parallèle à (AB) par F est (EF).

`sécantes / elles sont sécantes` → Les deux faces parallèles n'ont aucun point commun : (AB) et (FG) ne peuvent pas se couper.

EXERCICE 45 · RAISONNEMENT

La section par une diagonale du dessus

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle avec $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm et $AE = 4$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Le point I de l'arête $[AB]$ vérifie $BI = 4$ cm. Le plan (EGI) coupe l'arête $[BC]$ en J.

Calculer BJ.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (EGI) coupe les faces parallèles $EFGH$ et $ABCD$: la droite (IJ) est parallèle à (EG), donc à la diagonale (AC) de la face du dessous.
2. Dans le triangle ABC, $(IJ) \parallel (AC)$: applique le théorème de Thalès depuis B.
$$\frac{BJ}{BC} = \frac{BI}{BA}$$

CORRECTION

Des parallèles — Le plan (EGI) coupe les faces parallèles suivant (EG) et (IJ), donc $(IJ) \parallel (EG)$. Et $(EG) \parallel (AC)$, car $ACGE$ est un rectangle.
$(IJ) \parallel (AC)$

Thalès — Dans le triangle BAC :
$$\frac{BJ}{BC} = \frac{BI}{BA} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
$$BJ = \frac{1}{3} \times 9 = 3 \text{ cm}$$

La section $EGJI$ a deux côtés parallèles, $[EG]$ et $[IJ]$, imposés par les deux faces parallèles. Thalès dans la face du dessous place ensuite le point J.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → BJ n'est pas égal à BI : la face $ABCD$ n'est pas un carré, et (IJ) est parallèle à la diagonale (AC). Le rapport $\frac{BI}{BA} = \frac{1}{3}$ s'applique à $BC = 9$ cm.

6 → 6 cm, c'est CJ. On demande BJ, la longueur depuis B.

16/3 → Tu as mélangé les côtés : dans le triangle BAC, $\frac{BJ}{BC} = \frac{BI}{BA}$, donc $BJ = \frac{4}{12} \times 9$.

EXERCICE 46 · RAISONNEMENT

La nature de la section EGJI

On reprend le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ avec $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm et $AE = 4$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Le point I de $[AB]$ vérifie $BI = 4$ cm, et le plan (EGI) coupe $[BC]$ en J, avec $BJ = 3$ cm.

Quelle est la nature de la section $EGJI$?

Répondre en un mot.

Réponse attendue : `trapèze` — aussi acceptées : un trapèze · c'est un trapèze · EGJI est un trapèze · la section est un trapèze · trapeze · un trapeze

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux côtés de la section sont sur des faces parallèles : $[EG]$ sur la face du dessus, $[IJ]$ sur la face du dessous. Que dit la propriété ?
2. $(EG) \parallel (IJ)$. Compare maintenant leurs longueurs : EG est la diagonale d'un rectangle de 12 sur 9, et IJ celle d'un rectangle de 4 sur 3.

CORRECTION

Deux côtés parallèles — Le plan coupe les faces parallèles $EFGH$ et $ABCD$ suivant (EG) et (IJ) : ces côtés sont parallèles.

De longueurs différentes —

$$EG = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm} \quad ; \quad IJ = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

Pas un parallélogramme — Deux côtés opposés parallèles mais de longueurs différentes : les deux autres côtés, $[EI]$ et $[GJ]$, ne sont pas parallèles.

$$EGJI \text{ est un trapèze}$$

Ici les faces latérales $ABFE$ et $BCGF$ ne sont pas parallèles entre elles : rien n'impose $(EI) \parallel (GJ)$. Seule la paire de faces parallèles du dessus et du dessous donne des côtés parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallélogramme / un parallélogramme` → Un parallélogramme aurait ses côtés opposés de même longueur. Or $EG = 15$ cm et $IJ = 5$ cm : une seule paire de côtés est parallèle.

`rectangle / un rectangle` → La section n'est un rectangle que si le plan contient une arête ou est parallèle à une face. Ici $EG = 15$ cm et $IJ = 5$ cm : les côtés opposés ne sont même pas égaux.

`triangle / un triangle` → La section a quatre sommets : E, G sur la face du dessus, J et I sur la face du dessous.

EXERCICE 47 · BASE

Le périmètre d'une tranche

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 9$ cm, $AD = 4$ cm et $AE = 7$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Un plan parallèle à la face $ABFE$ coupe l'arête $[AD]$ en un point I.

Calculer le périmètre de la section.

Donner le périmètre en centimètres.

Réponse attendue : 32

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan est parallèle à une face : la section est isométrique à cette face. Laquelle, et quelles sont ses dimensions ?
2. La face $ABFE$ a pour côtés AB et AE. Le périmètre d'un rectangle est $2 \times (\text{longueur} + \text{largeur})$.

CORRECTION

La nature — La section par un plan parallèle à la face $ABFE$ est un rectangle isométrique à cette face : ses côtés mesurent $AB = 9$ cm et $AE = 7$ cm.

Le périmètre —

$$2 \times (9 + 7) = 2 \times 16$$

$$\text{périmètre} = 32 \text{ cm}$$

L'arête $AD = 4$ cm ne sert pas : elle est perpendiculaire au plan de coupe, et c'est seulement là que se place I.

PIÈGES ANTICIPÉS

26 → Tu as pris la face $ABCD$, de côtés 9 et 4. Le plan est parallèle à $ABFE$: la section a pour côtés $AB = 9$ et $AE = 7$.

22 → Tu as pris la face $ADHE$, de côtés 4 et 7. La section reproduit la face $ABFE$, de côtés 9 et 7.

63 → $63\ \text{cm}^2$, c'est l'**aire** de la section. On demande son périmètre : la somme de ses quatre côtés.

EXERCICE 48 · BASE

La tranche d'un cube

Un cube est coupé par un plan parallèle à l'une de ses faces.

Quelle est la nature la plus précise de la section ?

Répondre en un mot.

Réponse attendue : `carré` — aussi acceptées : un carré · c'est un carré · la section est un carré · carre · un carre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un cube est un parallélépipède rectangle. Que dit le cours de la section par un plan parallèle à une face ?
2. La section est isométrique à la face. Et les faces d'un cube sont toutes du même type : lequel ?

CORRECTION

La propriété — La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face est isométrique à cette face.

Le cube — Les faces d'un cube sont des carrés de côté l'arête :

$$\text{la section est un carré}$$

« Rectangle » est vrai, mais pas assez précis : la section a exactement les dimensions d'une face du cube, quatre côtés égaux et quatre angles droits.

PIÈGES ANTICIPÉS

`rectangle / un rectangle` → C'est bien un rectangle, mais on peut être plus précis : la section est isométrique à une face du cube, dont les quatre côtés sont égaux.

`losange / un losange` → Un losange a ses côtés égaux, mais pas forcément d'angle droit. La section reproduit une face du cube : elle a aussi ses quatre angles droits.

EXERCICE 49 · BASE

Une tranche parallèle à la face de droite

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 12$ cm, $AD = 3{,}5$ cm et $AE = 6$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Un plan parallèle à la face $BCGF$ coupe l'arête $[AB]$.

Calculer l'aire de la section.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 21

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La section est isométrique à la face $BCGF$. Quelles arêtes du pavé ont la même longueur que BC et BF ?
2. $BC = AD$ et $BF = AE$.

CORRECTION

La nature — La section est un rectangle isométrique à la face $BCGF$, de côtés $BC = AD = 3{,}5$ cm et $BF = AE = 6$ cm.

L'aire —

$$\text{aire} = 3{,}5 \times 6$$

$$\text{aire} = 21 \text{ cm}^2$$

Pour reconnaître la face reproduite, on regarde l'arête que le plan coupe : ici $[AB]$. Les deux autres dimensions, AD et AE, sont celles de la section.

PIÈGES ANTICIPÉS

72 → Tu as pris $AB \times AE$: c'est la face $ABFE$. Le plan coupe l'arête $[AB]$, qui n'est donc pas un côté de la section.

42 → Tu as pris $AB \times AD$: c'est la face $ABCD$. La section reproduit $BCGF$, de côtés $3{,}5$ et 6.

EXERCICE 50 · PRATIQUE

La section diagonale ACGE

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 5$ cm, $AD = 12$ cm et $AE = 7$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On le coupe par le plan qui contient les arêtes $[AE]$ et $[CG]$.

Calculer l'aire de la section $ACGE$.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 91

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan contient une arête : la section $ACGE$ est un rectangle. Un côté est l'arête $[AE]$; l'autre, $[AC]$, est la diagonale de la face du dessous.
2. Le triangle ABC est rectangle en B.
   $AC^2 = AB^2 + BC^2$

CORRECTION

La nature — Le plan contient l'arête $[AE]$: la section $ACGE$ est un rectangle de côtés AE et AC.

La diagonale — Dans le triangle ABC rectangle en B, avec $BC = AD = 12$ cm :

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \quad \text{donc} \quad AC = 13 \text{ cm}$$

L'aire —

$\text{aire}(ACGE) = AC \times AE = 13 \times 7$

$\text{aire}(ACGE) = 91 \text{ cm}^2$

La section diagonale est plus grande que les faces $ABFE$ (35 cm^2) et $ADHE$ (84 cm^2) : son côté AC est plus long que AB et que AD.

PIÈGES ANTICIPÉS

`84` → $12 \times 7 = 84$, c'est la face $ADHE$. Le côté horizontal de la section est la diagonale $[AC]$, plus longue que AD.

`35` → $5 \times 7 = 35$, c'est la face $ABFE$. Le côté horizontal de la section est la diagonale $[AC]$.

`119` → Tu as pris $AC = 5 + 12 = 17$. Pythagore additionne les **carrés** : $AC^2 = 25 + 144 = 169$.

`60` → $5 \times 12 = 60$, c'est l'aire de la face du dessous. La section est verticale : ses côtés sont AC et AE.

EXERCICE 51 · PRATIQUE

Un plan qui contient l'arête [FG]

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 15$ cm, $AD = 4$ cm et $AE = 9$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Le point I de l'arête $[AB]$ vérifie $AI = 3$ cm. Le plan qui contient l'arête $[FG]$ et le point I coupe l'arête $[DC]$ en J.

Calculer l'aire de la section $IJGF$.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `60`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan contient une arête : la section est un rectangle. Un côté est $[FG]$; l'autre est le segment oblique $[FI]$, tracé sur la face avant $ABFE$.
2. Le triangle FBI est rectangle en B, avec $BI = AB - AI$.
   $FI^2 = BF^2 + BI^2$

CORRECTION

La nature — Le plan contient l'arête $[FG]$: $IJGF$ est un rectangle, de côtés $FG = AD = 4$ cm et FI.

Le côté FI — Dans le triangle FBI rectangle en B, $BI = 15 - 3 = 12$ cm et $BF = AE = 9$ cm :

$FI^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \quad \text{donc} \quad FI = 15 \text{ cm}$

L'aire —

$\text{aire}(IJGF) = FG \times FI = 4 \times 15$

$\text{aire}(IJGF) = 60 \text{ cm}^2$

Pour un plan qui contient une arête, on cherche le triangle rectangle qui porte le côté oblique : ici FBI, sur la face avant, avec $BI = AB - AI$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12*sqrt(10) / 4*sqrt(90)` → Tu as pris $AI = 3$ cm dans le triangle rectangle. Le côté oblique est $[FI]$, et le triangle rectangle qui le porte est FBI : il faut $BI = 15 - 3 = 12$ cm.

`36` → $4 \times 9 = 36$, c'est la face $BCGF$: celle d'un plan vertical. Ici le plan est incliné, et son côté $[FI]$ est plus long que BF.

`84` → Tu as pris $FI = 9 + 12 = 21$. Pythagore additionne les **carrés** : $FI^2 = 81 + 144 = 225$.

`30` → La section est un **rectangle**, pas un triangle : son aire est $FG \times FI$, sans moitié.

EXERCICE 52 · PRATIQUE

Les deux morceaux du pavé

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm et $AE = 5$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Le point I de l'arête $[AB]$ vérifie $BI = 4$ cm. Le plan qui contient l'arête $[CG]$ et le point I partage le pavé en deux solides.

Calculer le volume du solide qui contient le sommet A.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `240`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan contient l'arête verticale $[CG]$: il coupe la face du dessous suivant $[IC]$. Le petit solide, du côté de B, est un prisme droit : quelle est sa base ?
2. La base du petit prisme est le triangle IBC, rectangle en B, et sa hauteur est AE. Le solide cherché est le pavé privé de ce prisme.

CORRECTION

Le pavé —

$$V_{\text{pavé}} = 10 \times 6 \times 5 = 300 \text{ cm}^3$$

Le petit prisme — Du côté de B, le plan découpe un prisme droit de base le triangle IBC, rectangle en B, et de hauteur $AE = 5$ cm.

$$V_{\text{prisme}} = \frac{4 \times 6}{2} \times 5 = 12 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$$

Le solide de A —

$$V = 300 - 60 = 240 \text{ cm}^3$$

Un plan qui contient une arête découpe un prisme droit à base triangulaire : on calcule le morceau simple, puis on le retire du pavé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → 60 cm^3, c'est le prisme du côté de B. Le solide qui contient A est l'autre morceau : le pavé moins ce prisme.

`180` → Tu as retiré $4 \times 6 \times 5 = 120$: c'est un pavé, pas un prisme à base triangulaire. L'aire du triangle IBC est $\frac{4 \times 6}{2}$.

AH Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

`150` → Le plan ne coupe pas le pavé en deux moitiés : il passe par I, à 4 cm de B seulement. Calcule le volume du petit prisme.

EXERCICE 53 · RAISONNEMENT

L'aire de la section ABGH

Un cube d'arête 5 cm a pour face du dessous $ABCD$ et pour face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On le coupe par le plan qui contient les arêtes $[AB]$ et $[HG]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire de la section $ABGH$.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `25*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(1250)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan contient l'arête $[AB]$: la section est un rectangle, de côtés AB et BG.
2. $[BG]$ est la diagonale de la face carrée $BCGF$: calcule-la avec Pythagore dans le triangle BCG.

CORRECTION

La nature — Le plan contient l'arête $[AB]$: $ABGH$ est un rectangle, de côtés $AB = 5$ cm et BG.

La diagonale — Dans le triangle BCG rectangle en C :

$$BG^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \quad \text{donc} \quad BG = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

L'aire —

$$\text{aire}(ABGH) = 5 \times 5\sqrt{2}$$

$$\text{aire}(ABGH) = 25\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

La diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$: la section $ABGH$ est $\sqrt{2}$ fois plus grande qu'une face, environ $35{,}4$ cm^2 contre 25 cm^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`25` → 25 cm^2, c'est l'aire d'une face. La section est inclinée : son côté $[BG]$ est une diagonale de face, $5\sqrt{2}$ cm, plus longue qu'une arête.

`50` → Tu as pris $BG = 10$ cm, le double de l'arête. La diagonale d'un carré de côté 5 cm mesure $\sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ cm.

`35.36` / `35.4` / `35,36` / `35,4` / `35.35` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde la racine carrée, $\sqrt{2}$, dans ton résultat.

EXERCICE 54 · RAISONNEMENT

La grande diagonale d'un pavé

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 6$ cm, $AD = 3$ cm et $AE = 2$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On s'intéresse à la section $ACGE$ par le plan qui contient les arêtes $[AE]$ et $[CG]$.

Calculer la longueur de la diagonale $[AG]$ du pavé.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AG]$ est la diagonale du rectangle $ACGE$: dans le triangle ACG, rectangle en C, il faut d'abord AC.
2. AC est la diagonale de la face $ABCD$: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Pas besoin de calculer AC lui-même : AC^2 suffit.

CORRECTION

La face du dessous — Dans le triangle ABC rectangle en B, avec $BC = AD = 3$ cm :

$$AC^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$

La section ACGE — $ACGE$ est un rectangle : le triangle ACG est rectangle en C, avec $CG = AE = 2$ cm.

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 45 + 4 = 49$$

$$AG = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

Deux fois Pythagore, dans deux plans différents : la face du dessous, puis la section $ACGE$. Au total, $AG^2 = AB^2 + AD^2 + AE^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(45) / 3*sqrt(5)` → $\sqrt{45}$, c'est AC, la diagonale de la face du dessous. G est au-dessus de C : il reste à monter de $CG = 2$ cm, dans le triangle ACG.

`11` → Tu as additionné $6 + 3 + 2$. La diagonale se calcule avec les **carrés** des longueurs : $AG^2 = 36 + 9 + 4$.

`49` → 49, c'est AG^2. Il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 55 · DEFI

Trois sections pour un volume

Un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ est coupé par trois plans. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D.

- la section par un plan parallèle à la face $ABCD$ a pour aire 48 cm^2 ;
- la section par un plan parallèle à la face $ADHE$ a pour aire 30 cm^2 ;
- la section par un plan parallèle à la face $ABFE$ a pour aire 40 cm^2.

Calculer le volume du pavé.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `240`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque section est isométrique à sa face : traduis les trois aires avec $a = AB$, $b = AD$ et $c = AE$.

2. $ab = 48$, $bc = 30$ et $ac = 40$. Que donne le produit des trois égalités ?
3. Le produit vaut $(abc)^2$, et le volume est abc : un nombre positif.

CORRECTION

Les trois aires — Chaque section est isométrique à sa face. Avec $a = AB$, $b = AD$, $c = AE$:

$$ab = 48 \quad ; \quad bc = 30 \quad ; \quad ac = 40$$

Le produit —

$$(abc)^2 = ab \times bc \times ac = 48 \times 30 \times 40 = 57\,600$$

Le volume —

$$V = abc = \sqrt{57\,600} = 240 \text{ cm}^3$$

On en tire aussi chaque arête : $a = \dfrac{240}{30} = 8$ cm, $b = \dfrac{240}{40} = 6$ cm, $c = \dfrac{240}{48} = 5$ cm. Vérification : $8 \times 6 = 48$, $6 \times 5 = 30$, $8 \times 5 = 40$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`57600` → $57\,600$, c'est le produit des trois aires, c'est-à-dire $(abc)^2$. Le volume est abc : prends la racine carrée.

`118` → Additionner les trois aires ne donne pas un volume. Écris-les avec les arêtes, ab, bc, ac, et multiplie-les.

EXERCICE 56 · DEFI

Un prisme au tiers du reste

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions $AB = 12$ cm, $AD = 5$ cm et $AE = 7$ cm. Sa face du dessous est $ABCD$, sa face du dessus $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Un point I de l'arête $[EF]$ est placé à la distance EI de E. Le plan qui contient l'arête $[AD]$ et le point I coupe $[HG]$ en J, et partage le pavé en un prisme droit $AEIDHJ$ et un autre solide. On veut que le volume du prisme soit le **tiers** du volume de l'autre solide.

Calculer EI.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le prisme $AEIDHJ$ a pour base le triangle AEI, rectangle en E, et pour hauteur AD. Exprime son volume en fonction de $x = EI$.
2. Le prisme a pour volume $\dfrac{7x}{2} \times 5 = 17{,}5x$, et l'autre solide le reste du pavé. Si le prisme est le tiers de l'autre, quelle fraction du pavé entier représente-t-il ?
3. Prisme et autre solide sont dans le rapport 1 pour 3 : le prisme est le quart du pavé.

$$17{,}5x = \frac{1}{4} \times 12 \times 5 \times 7$$

CORRECTION

Le prisme — Avec $x = EI$, le prisme a pour base le triangle AEI rectangle en E et pour hauteur $AD = 5$ cm :

$$V_{\text{prisme}} = \frac{7x}{2} \times 5 = 17{,}5x$$

La condition — Le pavé a pour volume $12 \times 5 \times 7 = 420\ \text{cm}^3$. Si le prisme vaut le tiers de l'autre solide, il est le quart du pavé :

$$17{,}5x = \frac{420}{4} = 105$$

$$x = EI = \frac{105}{17{,}5} = 6\ \text{cm}$$

Vérification : le prisme vaut $17{,}5 \times 6 = 105\ \text{cm}^3$, l'autre solide $420 - 105 = 315\ \text{cm}^3$, et $315 = 3 \times 105$. « Le tiers de l'autre » n'est pas « le tiers du tout ».

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → Avec $EI = 8$ cm, le prisme vaut $140\ \text{cm}^3$, le tiers du **pavé entier**. L'énoncé demande le tiers de l'**autre solide** : le prisme est alors le quart du pavé.

3 → Tu as pris $AE \times EI$ pour l'aire de la base du prisme. Le triangle AEI est rectangle : son aire est $\dfrac{AE \times EI}{2}$.

EXERCICE 57 · BASE

La section d'un tétraèdre régulier

Un tétraèdre régulier a ses six arêtes de même longueur. On le coupe par un plan parallèle à l'une de ses faces, prise pour base.

Quelle est la nature la plus précise de la section ?

Répondre en deux mots.

Réponse attendue : `triangle équilatéral` — aussi acceptées : un triangle équilatéral · c'est un triangle équilatéral · la section est un triangle équilatéral · triangle equilateral · un triangle equilateral · équilatéral · equilateral

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire. La section par un plan parallèle à la base est de même nature que la base.
2. Quelle est la nature de chaque face d'un tétraèdre dont toutes les arêtes sont égales ?

CORRECTION

La base — Les trois côtés de la base sont des arêtes du tétraèdre : ils sont égaux, la base est un triangle équilatéral.

La section — La section par un plan parallèle à la base est une réduction de la base : ses trois côtés sont multipliés par le même k, ils restent égaux.

la section est un triangle équilatéral

Une réduction garde la forme : un triangle équilatéral reste équilatéral, un carré reste carré. Seule la taille change.

PIÈGES ANTICIPÉS

`triangle / un triangle` → C'est bien un triangle, mais on peut être plus précis : ses trois côtés sont tous multipliés par le même coefficient k.

`triangle isocèle / un triangle isocèle` → Il est isocèle, mais plus encore : ses **trois** côtés sont égaux, comme ceux de la base.

EXERCICE 58 · BASE

Une pyramide à huit faces

Une pyramide a huit faces en tout, base comprise. On la coupe par un plan parallèle à sa base.

Combien de côtés la section a-t-elle ?

Donner un nombre entier.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une pyramide a une base, et une face latérale triangulaire par côté de la base.
2. Si la base a n côtés, la pyramide a $n + 1$ faces. La section a le même nombre de côtés que la base.

CORRECTION

La base — Si la base a n côtés, il y a n faces latérales, plus la base :

$$n + 1 = 8 \iff n = 7$$

La section — La section par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que la base :

7 côtés

Le plan coupe chaque face latérale suivant un côté de la section : autant de côtés que de faces latérales, autant que de côtés de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → Huit faces, base comprise : il n'y a que **sept** faces latérales. Le plan de coupe, parallèle à la base, ne rencontre que les faces latérales.

EXERCICE 59 · BASE

Le coefficient de réduction

Une pyramide a pour hauteur $SO = 20$ cm. S est son sommet, O le centre de sa base, et $[SO]$ sa hauteur. On la coupe par un plan parallèle à la base, à 5 cm du sommet S : il coupe la hauteur en O'.

Calculer le coefficient de réduction k de la section par rapport à la base.

Donner une fraction irréductible ou un nombre décimal.

Réponse attendue : `1/4` — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient se lit depuis le sommet : distance du sommet au plan de coupe, divisée par la hauteur.
$$k = \frac{SO'}{SO}$$
2. Ici $SO' = 5$ cm. Simplifie la fraction.

CORRECTION

Depuis le sommet —

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{5}{20}$$
$$k = \frac{1}{4}$$

La section est quatre fois plus petite que la base en longueur : chacun de ses côtés vaut le quart du côté correspondant de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/4 / 0.75` → Tu as pris $\frac{15}{20}$, avec la distance du plan à la base. Le coefficient se lit depuis le sommet : $SO' = 5$ cm.

`4` → Un coefficient de réduction est plus petit que 1 : la section est plus petite que la base. C'est $\frac{SO'}{SO}$, pas $\frac{SO}{SO'}$.

EXERCICE 60 · PRATIQUE

Le côté de la section

Une pyramide a pour base un carré de côté 14 cm et pour hauteur $SO = 21$ cm. S est son sommet, O le centre de sa base, et $[SO]$ sa hauteur. On la coupe par un plan parallèle à la base, à 6 cm du sommet.

Calculer le côté de la section.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La section est un carré, réduction de la base. Commence par le coefficient k, depuis le sommet.
2. $k = \frac{6}{21}$: simplifie-le, puis multiplie le côté de la base par k.

CORRECTION

Le coefficient —

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Le côté —

$$\frac{2}{7} \times 14$$
$$\text{côté} = 4 \text{ cm}$$

Le coefficient $\frac{2}{7}$ vaut pour toutes les longueurs de la section : côtés, diagonales, périmètre.

PIÈGES ANTICIPÉS

10 → Tu as pris $k = \frac{15}{21}$, avec la distance à la base. Depuis le sommet, $k = \frac{6}{21}$.

49 → Tu as multiplié par $\frac{21}{6}$: ta section dépasse la base. Le coefficient de réduction est $\frac{6}{21}$, plus petit que 1.

EXERCICE 61 · PRATIQUE

Coupée à partir de la base

Une pyramide a pour base un rectangle de 16 cm sur 12 cm et pour hauteur $SO = 24$ cm. S est son sommet, O le centre de sa base, et $[SO]$ sa hauteur. On la coupe par un plan parallèle à la base, situé à 9 cm **au-dessus de la base**.

Calculer l'aire de la section.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient se lit depuis le sommet. À quelle distance de S se trouve le plan ?
2. $SO' = 24 - 9 = 15$ cm. Réduis chaque côté du rectangle, ou multiplie l'aire de la base par k^2.

CORRECTION

Depuis le sommet —

$$SO' = 24 - 9 = 15 \text{ cm} \quad ; \quad k = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

Les côtés — La section est un rectangle, réduction de la base :

$$\frac{5}{8} \times 16 = 10 \text{ cm} \quad ; \quad \frac{5}{8} \times 12 = 7{,}5 \text{ cm}$$

L'aire —

$$\text{aire} = 10 \times 7{,}5 = 75 \text{ cm}^2$$

Autre chemin : $k^2 \times 192 = \frac{25}{64} \times 192 = 75 \text{ cm}^2$. Une distance donnée depuis la base se convertit d'abord en distance depuis le sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

27 → Tu as pris $k = \frac{9}{24}$. Mais 9 cm, c'est la distance à la **base** : depuis le sommet, $SO' = 24 - 9 = 15$ cm.

120 → Tu as multiplié l'aire de la base par $k = \frac{5}{8}$. Une aire se multiplie par k^2 : les deux côtés du rectangle sont réduits.

192 → 192 cm^2, c'est l'aire de la base. La section en est une réduction.

EXERCICE 62 · PRATIQUE

Où couper la pyramide ?

Une pyramide a pour base un carré de côté 18 cm et pour hauteur $SO = 12$ cm. S est son sommet, O le centre de sa base, et $[SO]$ sa hauteur. On veut la couper par un plan parallèle à la base pour obtenir une section carrée de côté 6 cm.

À quelle distance du sommet S faut-il placer le plan ?

Donner la distance en centimètres.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport des côtés donne le coefficient k : côté de la section sur côté de la base.
2. Le même k relie les distances au sommet.

$$\frac{SO'}{SO} = k$$

CORRECTION

Le coefficient —

$$k = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

La distance —

$$SO' = k \times SO = \frac{1}{3} \times 12$$

$$SO' = 4 \text{ cm}$$

Le coefficient se lit dans les deux sens : des longueurs vers les distances, ou l'inverse. Le plan est à 4 cm du sommet, donc à 8 cm de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → 8 cm, c'est la distance du plan à la **base**. On demande la distance au sommet S, $SO' = k \times SO$.

36 → Tu as multiplié par $\frac{18}{6}$: une distance de 36 cm dépasse la hauteur. $k = \frac{6}{18}$ est plus petit que 1.

EXERCICE 63 · PRATIQUE

Le morceau d'arête sous la section

Une pyramide $SABCD$ a pour hauteur $SO = 15$ cm, et son arête latérale $[SA]$ mesure 20 cm. S est son sommet, O le centre de sa base, et $[SO]$ sa hauteur. Un plan parallèle à la base, à 9 cm du sommet, coupe l'arête $[SA]$ en A'.

Calculer AA'.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient $k = \dfrac{SO'}{SO}$ s'applique aussi aux arêtes latérales : $SA' = k \times SA$.
2. A' est entre S et A : $AA' = SA - SA'$.

CORRECTION

Le coefficient —

$$k = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Thalès — Dans le triangle SOA, $(O'A') \parallel (OA)$:

$$SA' = \frac{3}{5} \times 20 = 12 \text{ cm}$$

Le reste —

$$AA' = 20 - 12 = 8 \text{ cm}$$

Le même coefficient se retrouve sur la hauteur et sur chaque arête latérale : $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SO'}{SO}$. Le morceau sous la section en est le complément.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 cm, c'est SA', du sommet à la section. On demande AA', de la section à la base.

6 → Tu as reporté l'écart de la hauteur, $15 - 9 = 6$, sur l'arête. Mais l'arête est plus longue que la hauteur : c'est le **rapport** qui se conserve, pas la différence.

EXERCICE 64 · RAISONNEMENT

D'une aire à une distance

Une pyramide a pour base un carré de côté 15 cm et pour hauteur $SO = 30$ cm. S est son sommet, O le centre de sa base, et $[SO]$ sa hauteur. Un plan parallèle à la base donne une section d'aire 36 cm^2.

À quelle distance du sommet se trouve ce plan ?

Donner la distance en centimètres.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport des aires n'est pas k : c'est k^2. Retrouve d'abord le côté de la section.
2. Un carré d'aire 36 cm^2 a pour côté 6 cm. Le coefficient est le rapport des côtés.

CORRECTION

Le côté —

$$\text{côté} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Le coefficient —

$$k = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

La distance —

$$SO' = \frac{2}{5} \times 30 = 12 \text{ cm}$$

Autre chemin : $k^2 = \dfrac{36}{225} = \dfrac{4}{25}$, donc $k = \dfrac{2}{5}$. Une aire donne k^2 ; pour revenir à k, on prend la racine carrée.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4.8 / 4,8 / 24/5` → Tu as pris $k = \dfrac{36}{225}$, le rapport des **aires**. Ce rapport vaut k^2 : $k = \sqrt{\dfrac{36}{225}} = \dfrac{2}{5}$.

`18` → 18 cm, c'est la distance du plan à la **base**. On demande la distance au sommet, $SO' = k \times SO$.

EXERCICE 65 · RAISONNEMENT

La hauteur d'une pyramide régulière

Une pyramide $SABCD$ a pour base le carré $ABCD$ de côté 8 cm et de centre O, et ses quatre arêtes latérales mesurent $SA = SB = SC = SD = 9$ cm. Sa hauteur est $[SO]$.

Calculer la hauteur SO.

Donner la hauteur en centimètres.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle SOA est rectangle en O, d'hypoténuse $[SA]$. Il faut d'abord OA.
2. O est le milieu de la diagonale $[AC]$ du carré : $OA = \dfrac{AC}{2}$, et $AC^2 = 8^2 + 8^2$.

CORRECTION

La demi-diagonale —

$AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2} \quad \text{donc} \quad OA = 4\sqrt{2}\ \text{cm} \quad ; \quad OA^2 = 32$

Pythagore — Dans le triangle SOA rectangle en O :

$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 81 - 32 = 49$

$SO = 7\ \text{cm}$

Le pied de la hauteur est le centre du carré : OA est la **demi-diagonale**, pas le demi-côté. Ensuite, Pythagore dans le triangle SOA.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(65)` → Tu as pris $OA = 4$ cm, la moitié du côté. O est le centre du carré et A un sommet : OA est la moitié de la **diagonale**, $4\sqrt{2}$ cm.

`sqrt(17)` → Tu as pris $OA = 8$ cm, le côté du carré. OA est la moitié de la diagonale : $4\sqrt{2}$ cm.

`sqrt(113)` → Tu as additionné les carrés. L'hypoténuse du triangle SOA est l'arête $[SA]$: $SO^2 = SA^2 - OA^2$.

EXERCICE 66 · RAISONNEMENT

Retrouver la hauteur par la section

Une pyramide a pour base un carré de périmètre 48 cm. S est son sommet, O le centre de sa base, et $[SO]$ sa hauteur. Un plan parallèle à la base, à 5 cm du sommet, donne une section d'aire $16\ \text{cm}^2$.

Calculer la hauteur SO de la pyramide.

Donner la hauteur en centimètres.

Réponse attendue : `15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare les côtés : celui de la base vient du périmètre, celui de la section de son aire.
2. Le rapport des côtés est le coefficient k, et $k = \dfrac{SO'}{SO}$ avec $SO' = 5$ cm.

CORRECTION

Les côtés —

$$\text{base} : \frac{48}{4} = 12\ \text{cm} \quad ; \quad \text{section} : \sqrt{16} = 4\ \text{cm}$$

Le coefficient —

$$k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

La hauteur —

$$\frac{5}{SO} = \frac{1}{3} \iff SO = 15\ \text{cm}$$

Le coefficient k relie la figure plane (côtés de la section et de la base) aux distances dans l'espace (depuis le sommet). On le calcule là où c'est facile, on l'utilise là où on en a besoin.

PIÈGES ANTICIPÉS

`45` → Tu as pris $k = \dfrac{16}{144} = \dfrac{1}{9}$, le rapport des **aires**. Le coefficient des longueurs est sa racine carrée : $k = \dfrac{1}{3}$.

`5` → 5 cm, c'est la distance du sommet au plan de coupe. La hauteur est plus grande : $SO = \dfrac{SO'}{k}$.

EXERCICE 67 · DEFI

La moitié de l'aire de la base

Une pyramide a pour hauteur $SO = 12$ cm. S est son sommet, O le centre de sa base, et $[SO]$ sa hauteur. On veut la couper par un plan parallèle à la base, de sorte que l'aire de la section soit la **moitié** de l'aire de la base.

Calculer la valeur exacte de la distance SO' du sommet au plan de coupe.

Donner la valeur exacte de la distance en centimètres.

Réponse attendue : `6*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(72) · 12/sqrt(2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les aires sont multipliées par k^2. Que vaut k^2 si la section a la moitié de l'aire de la base ?

2. $k^2 = \dfrac{1}{2}$, donc $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Multiplie la hauteur par k.

CORRECTION

Le coefficient —

$$k^2 = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La distance —

$$SO' = k \times SO = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 12$$

$$SO' = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$$

$6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm : pour garder la moitié de l'aire, il faut couper bien plus bas que la mi-hauteur. À mi-hauteur, $k = \dfrac{1}{2}$ et l'aire n'est que le quart de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → À mi-hauteur, $k = \dfrac{1}{2}$ et l'aire est multipliée par $k^2 = \dfrac{1}{4}$: c'est le **quart** de la base, pas la moitié. Il faut $k^2 = \dfrac{1}{2}$.

`12-6*sqrt(2)` → $12 - 6\sqrt{2}$, c'est la distance du plan à la **base**. On demande la distance au sommet, $SO' = k \times SO$.

`8.49` / `8.5` / `8.485` / `8,49` / `8,5` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de la distance : garde la racine carrée, $\sqrt{2}$, dans ton résultat.

EXERCICE 68 · BASE

La tranche d'un cylindre

Un cylindre de révolution a pour rayon de base 7 cm et pour hauteur 20 cm. On le coupe par un plan parallèle à ses bases, à 6 cm de la base du dessous.

Calculer la valeur exacte de l'aire du disque de section.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `49pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cylindre a la même largeur à toutes les hauteurs : quel est le rayon de la section ?
2. La section est un cercle de même rayon que la base. Les 6 cm ne servent à rien.

$$\text{aire} = \pi r^2$$

CORRECTION

La nature — La section d'un cylindre par un plan parallèle à une base est un cercle de même rayon que la base :

$$r = 7\ \text{cm}$$

L'aire —

$$\text{aire} = \pi \times 7^2 = 49\pi \text{ cm}^2$$

Contrairement au cône, le cylindre ne se resserre pas : la hauteur de la coupe ne change rien à la section. En valeur approchée, $49\pi \approx 153{,}9 \text{ cm}^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`14pi` → $2\pi r = 14\pi$, c'est le **périmètre** du cercle de section. On demande l'aire du disque : πr^2.

`7pi` → Il manque le carré du rayon : l'aire d'un disque est πr^2.

`441pi/100` → Tu as réduit le rayon comme pour un cône. Le cylindre garde la même largeur partout : la section a le rayon de la base, 7 cm.

`153.9 / 153.94 / 154 / 153,9 / 153,94` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 69 · BASE

La nature de la section d'un cône

Un cône de révolution est coupé par un plan parallèle à sa base.

Quelle est la nature de la section ?

Répondre en un mot.

Réponse attendue : `cercle` — aussi acceptées : un cercle · c'est un cercle · la section est un cercle · disque · un disque · c'est un disque · la section est un disque

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cône est engendré par un triangle SOA qui tourne autour de l'axe (SO). Que décrit le point de $[SA]$ situé dans le plan de coupe ?
2. Ce point reste à la même distance de l'axe (SO) en tournant.

CORRECTION

La rotation — Le plan de coupe est perpendiculaire à l'axe (SO) en un point O'. Le point de $[SA]$ qui est dans ce plan tourne autour de l'axe en restant à la même distance de O'.

La nature —

la section est un cercle de centre O'

Cylindre, cône et sphère sont des solides de révolution : coupés perpendiculairement à leur axe, ils donnent un cercle. Pour le cône, ce cercle est plus petit que la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`triangle / un triangle` → Un triangle, c'est la section par un plan qui passe par le **sommet** et l'axe du cône. Un plan parallèle à la base coupe l'axe perpendiculairement : la section est ronde.

`carré / un carré` → Le carré est la section d'une pyramide à base carrée. La base du cône est un disque : la section, de même forme qu'elle, est un cercle.

EXERCICE 70 · BASE

Un cône coupé près du sommet

Un cône de révolution a pour hauteur $SO = 16$ cm et pour rayon de base $R = 12$ cm. S est son sommet et O le centre de sa base. On le coupe par un plan parallèle à la base, à la distance $d = 4$ cm du sommet.

Calculer le rayon r de la section.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon de la section est une réduction du rayon de la base, de coefficient $\frac{d}{h}$ lu depuis le sommet.

   $r = R \times \frac{d}{h}$
2. $\frac{d}{h} = \frac{4}{16}$: simplifie, puis multiplie par R.

CORRECTION

Le coefficient —

$\frac{d}{h} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Le rayon —

$r = 12 \times \frac{1}{4}$

$r = 3 \text{ cm}$

La formule $r = R \times \frac{d}{h}$ est le théorème de Thalès dans le triangle SOA, avec d mesuré depuis le sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → Tu as utilisé $\frac{12}{16}$, avec la distance du plan à la base. Dans $r = R \times \frac{d}{h}$, d se mesure depuis le **sommet** : $d = 4$ cm.

48 → Tu as multiplié par $\frac{16}{4}$: ta section est plus grande que la base. Le coefficient $\frac{d}{h}$ est plus petit que 1.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

Un cône coupé près de la base

Un cône de révolution a pour hauteur $SO = 20$ cm et pour rayon de base $R = 16$ cm. S est son sommet et O le centre de sa base. On le coupe par un plan parallèle à la base, situé à 5 cm **au-dessus de la base**.

Calculer le rayon r de la section.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule $r = R \times \dfrac{d}{h}$ demande la distance d au **sommet**. Que vaut-elle ici ?
2. $d = 20 - 5 = 15$ cm.

CORRECTION

Depuis le sommet —

$$d = 20 - 5 = 15 \text{ cm}$$

Le rayon —

$$r = 16 \times \frac{15}{20} = 16 \times \frac{3}{4}$$

$$r = 12 \text{ cm}$$

Coupé près de la base, le cône donne une section presque aussi grande que la base : le coefficient $\dfrac{3}{4}$ est proche de 1.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Tu as pris $d = 5$ cm. Mais 5 cm, c'est la distance à la **base** : la distance au sommet est $20 - 5 = 15$ cm.

16 → Un rayon égal à celui de la base, c'est la section d'un **cylindre**. Le cône se resserre vers son sommet.

EXERCICE 72 · PRATIQUE

Où couper le cône ?

Un cône de révolution a pour hauteur $SO = 30$ cm et pour rayon de base $R = 12$ cm. S est son sommet et O le centre de sa base. On veut le couper par un plan parallèle à la base pour obtenir un cercle de rayon 8 cm.

À quelle distance de la **base** faut-il placer le plan ?

Donner la distance en centimètres.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $r = R \times \dfrac{d}{h}$ avec $r = 8$: tu obtiens la distance d au sommet.
2. La distance à la base est ce qui reste de la hauteur : $h - d$.

CORRECTION

Depuis le sommet —

$$8 = 12 \times \frac{d}{30} \iff d = \frac{8 \times 30}{12} = 20 \text{ cm}$$

Depuis la base —

$$30 - 20 = 10 \text{ cm}$$

La formule donne toujours la distance au sommet. La question portait sur la base : on termine par une soustraction.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20` → 20 cm, c'est la distance au **sommet**. On demande la distance à la base : $30 - 20$.

`45` → Tu as calculé $30 \times \dfrac{12}{8}$: cette distance dépasse la hauteur du cône. Le rapport est $\dfrac{r}{R} = \dfrac{8}{12}$.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

L'aire de la section d'un cône

Un cône de révolution a pour rayon de base $R = 9$ cm et pour hauteur $h = 15$ cm. On le coupe par un plan parallèle à la base, à 10 cm du sommet.

Calculer la valeur exacte de l'aire du disque de section.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `36pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le rayon de la section : $r = R \times \dfrac{d}{h}$, avec d depuis le sommet.
2. $r = 9 \times \dfrac{10}{15}$. Puis l'aire d'un disque, πr^2.

CORRECTION

Le rayon —

$$r = 9 \times \frac{10}{15} = 9 \times \frac{2}{3} = 6 \text{ cm}$$

L'aire —

$$\text{aire} = \pi \times 6^2$$

$$\text{aire} = 36\pi \text{ cm}^2$$

Autre chemin : l'aire de la base, 81π, multipliée par $k^2 = \dfrac{4}{9}$, donne 36π. En valeur approchée, $36\pi \approx 113{,}1 \text{ cm}^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`81pi` → 81π, c'est l'aire de la **base**. La section d'un cône est plus petite : son rayon vaut $9 \times \dfrac{2}{3}$.

`54pi` → Tu as multiplié l'aire de la base par $k = \dfrac{2}{3}$. Une aire se multiplie par k^2.

`12pi` → $2\pi r = 12\pi$, c'est le **périmètre** du cercle de section. L'aire du disque est πr^2.

`113.1 / 113.10 / 113 / 113,1` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

Sur la génératrice

Un cône de révolution de sommet S a pour base un disque de centre O et de rayon $OA = 10$ cm, et sa génératrice mesure $SA = 26$ cm. Un plan parallèle à la base coupe la hauteur $[SO]$ en O',

avec $SO' = 18$ cm, et la génératrice $[SA]$ en A'.

Calculer SA'.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : 39/2 — aussi acceptées : 19.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient $k = \dfrac{SO'}{SO}$ demande la hauteur SO, que l'énoncé ne donne pas : calcule-la dans le triangle SOA, rectangle en O.
2. $SO^2 = SA^2 - OA^2$. Ensuite, Thalès : $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SO'}{SO}$.

CORRECTION

La hauteur —

$SO^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576 \quad \text{donc} \quad SO = 24 \text{ cm}$

Le coefficient —

$k = \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$

Thalès — Dans le triangle SOA, $(O'A') \parallel (OA)$:

$SA' = \dfrac{3}{4} \times 26$

$SA' = 19{,}5 \text{ cm}$

Le même coefficient k vaut sur la hauteur, sur la génératrice et sur le rayon : $O'A' = \dfrac{3}{4} \times 10 = 7{,}5$ cm. Il faut seulement l'obtenir là où l'on connaît deux longueurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7.5 / 7,5` → $7{,}5$ cm, c'est le rayon $O'A'$ de la section. On demande SA', sur la génératrice : $\dfrac{3}{4} \times 26$.

`6.5 / 6,5` → $6{,}5$ cm, c'est AA', le morceau de génératrice sous la section. On demande SA', depuis le sommet.

`18` → Tu as pris $SA' = SO'$. Mais la génératrice est inclinée, plus longue que la hauteur : $SA' = k \times SA$.

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT

Le cône d'un tronc

Un tronc de cône est obtenu en coupant un cône de sommet S par un plan parallèle à sa base. Le cercle de base a pour rayon $OA = 10$ cm, le cercle de section a pour rayon $O'A' = 6$ cm, avec A' sur la génératrice $[SA]$, et $AA' = 12$ cm.

Calculer la longueur SA de la génératrice du cône entier.

Donner la longueur en centimètres.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Thalès dans le triangle SOA, depuis le sommet : $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{O'A'}{OA}$. Mais on ne connaît que AA'.
2. Écris $SA' = SA - 12$ et résous l'équation.
$$\frac{SA - 12}{SA} = \frac{6}{10}$$

CORRECTION

Thalès —
$$\frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
L'équation — Avec $SA' = SA - 12$:
$$\frac{SA - 12}{SA} = \frac{3}{5} \iff 5\,(SA - 12) = 3\,SA \iff 2\,SA = 60$$
$$SA = 30 \text{ cm}$$

Vérification : $SA' = 30 - 12 = 18$ cm et $\dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5}$. Le rapport de Thalès part du sommet : c'est SA', pas AA', qui se compare à SA.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20` → Tu as écrit $\dfrac{12}{SA} = \dfrac{3}{5}$. Mais 12 cm, c'est AA', le morceau entre les deux cercles : le rapport de Thalès part du sommet, avec $SA' = SA - 12$.

`18` → 18 cm, c'est SA', du sommet au cercle de section. La génératrice du cône entier est $SA = SA' + 12$.

EXERCICE 76 · DEFI Le volume d'un tronc de cône

Un tronc de cône est obtenu en coupant un cône de sommet S par un plan parallèle à sa base. Le cercle de base a pour centre O et pour rayon 6 cm ; le cercle de section a pour centre O' et pour rayon 4 cm ; la distance entre les deux plans est $OO' = 5$ cm.

Calculer la valeur exacte du volume du tronc.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `380pi/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le tronc est le grand cône privé du petit. Il faut d'abord la hauteur SO du grand cône.
2. Thalès depuis le sommet : $\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{4}{6}$, avec $SO' = SO - 5$.
3. Calcule les deux volumes de cônes, puis leur différence.

CORRECTION

La hauteur —

$$\frac{SO-5}{SO}=\frac{2}{3} \iff 3\,SO-15=2\,SO \iff SO=15\text{ cm}$$

Le grand cône —

$$V=\frac{1}{3}\pi\times 6^2\times 15=180\pi$$

Le petit cône — Sa hauteur est $SO'=10$ cm et son rayon 4 cm :

$$V'=\frac{1}{3}\pi\times 4^2\times 10=\frac{160\pi}{3}$$

Le tronc —

$$V_{\text{tronc}}=180\pi-\frac{160\pi}{3}=\frac{540\pi-160\pi}{3}=\frac{380\pi}{3}\text{ cm}^3$$

Vérification par la réduction : $k=\frac{2}{3}$, donc $V'=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times 180\pi=\frac{8}{27}\times 180\pi=\frac{160\pi}{3}$. En valeur approchée, le tronc vaut $397{,}9\text{ cm}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`180pi` → 180π, c'est le volume du **grand cône**, pointe comprise. Le tronc, c'est ce qui reste quand on retire le petit cône.

`160pi/3` → $\frac{160\pi}{3}$, c'est le **petit cône**, celui qu'on retire. Le tronc est la différence des deux volumes.

`397.9 / 397.94 / 398 / 397,9 / 397,94` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 77 · BASE

Les aires réduites

Une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base. La petite pyramide obtenue est une réduction de la grande, de coefficient $k=\frac{2}{3}$.

Par quel nombre l'aire de la base est-elle multipliée pour obtenir l'aire de la section ?

Donner une fraction irréductible ou un nombre décimal.

Réponse attendue : `4/9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une aire a deux dimensions, et chacune est multipliée par k.
2. Calcule k^2 : le carré d'une fraction, c'est le carré du numérateur sur le carré du dénominateur.

CORRECTION

La règle — Dans une réduction de coefficient k, les aires sont multipliées par k^2.

$$k^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

Longueurs fois k, aires fois k^2, volumes fois k^3. Ici les volumes seraient multipliés par $\frac{8}{27}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2/3 → $\frac{2}{3}$, c'est le coefficient des **longueurs**. Une aire est multipliée par k^2.

8/27 → $k^3 = \frac{8}{27}$ sert aux **volumes**. Une aire a deux dimensions : k^2.

4/3 → Le carré d'une fraction élève au carré le numérateur **et** le dénominateur : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

EXERCICE 78 · BASE

Un agrandissement de coefficient 3

On agrandit un solide de volume $5\ \text{cm}^3$: toutes ses longueurs sont multipliées par 3.

Calculer le volume du solide agrandi.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 135

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les règles de la réduction valent aussi pour un agrandissement, avec $k = 3$.
2. Un volume est multiplié par k^3.

CORRECTION

Le coefficient —

$k^3 = 3^3 = 27$

Le volume —

$V' = 27 \times 5 = 135\ \text{cm}^3$

Tripler les longueurs multiplie le volume par 27, pas par 3 : le solide grandit dans les trois dimensions à la fois.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → Tu as multiplié le volume par $k = 3$. Les volumes sont multipliés par $k^3 = 27$.

45 → Tu as multiplié par $k^2 = 9$: c'est la règle des **aires**. Un volume se multiplie par $k^3 = 27$.

EXERCICE 79 · BASE

L'aire d'une section, sans le côté

Une pyramide a une base d'aire $50\ \text{cm}^2$. On la coupe par un plan parallèle à la base : la petite pyramide est une réduction de la grande, de coefficient $k = 0{,}4$.

Calculer l'aire de la section.

Donner l'aire en centimètres carrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pas besoin de connaître la forme de la base : une aire réduite vaut k^2 fois l'aire de départ.
2. $0{,}4^2 = 0{,}16$.

CORRECTION

Le coefficient des aires —

$k^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$

L'aire —

$\text{aire} = 0{,}16 \times 50$

$\text{aire} = 8 \text{ cm}^2$

La règle k^2 marche pour n'importe quelle base — carrée, triangulaire ou ronde — puisque toutes ses longueurs sont multipliées par k.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20` → Tu as multiplié par $k = 0{,}4$. Une aire se multiplie par $k^2 = 0{,}16$.

`3.2 / 3,2` → Tu as multiplié par k^3 : c'est la règle des volumes. Une aire se multiplie par k^2.

EXERCICE 80 · PRATIQUE

La petite pyramide

Une pyramide a pour volume 500 cm^3. On la coupe par un plan parallèle à sa base, aux trois cinquièmes de sa hauteur en partant du sommet.

Calculer le volume de la petite pyramide, du côté du sommet.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `108`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La petite pyramide est une réduction de la grande : quel est son coefficient ?
2. $k = \dfrac{3}{5}$, et un volume se multiplie par k^3.

CORRECTION

Le coefficient —

$k = \dfrac{3}{5} \quad ; \quad k^3 = \dfrac{27}{125}$

Le volume —

$V' = \dfrac{27}{125} \times 500 = 27 \times 4$

$V' = 108 \text{ cm}^3$

Aux trois cinquièmes de la hauteur, la petite pyramide ne prend que $\dfrac{27}{125}$ du volume, à peine plus d'un cinquième.

PIÈGES ANTICIPÉS

`300` → Tu as multiplié par $k = \dfrac{3}{5}$. Le volume se multiplie par $k^3 = \dfrac{27}{125}$.

`180` → Tu as multiplié par $k^2 = \dfrac{9}{25}$: c'est la règle des aires. Pour un volume, c'est k^3.

`392` → $392\ \text{cm}^3$, c'est le volume du **tronc**. On demande la petite pyramide, du côté du sommet.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Retrouver le coefficient

Un cône a pour volume $640\ \text{cm}^3$. Un plan parallèle à sa base découpe, du côté du sommet, un petit cône de volume $10\ \text{cm}^3$.

Calculer le coefficient de réduction k.

Donner une fraction irréductible ou un nombre décimal.

Réponse attendue : `1/4` — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport des volumes n'est pas k : c'est k^3.
2. $k^3 = \dfrac{10}{640}$: simplifie, puis cherche le nombre dont le cube vaut ce résultat.

CORRECTION

Le rapport des volumes —

$$k^3 = \frac{10}{640} = \frac{1}{64}$$

Le coefficient — $4^3 = 64$:

$$k = \frac{1}{4}$$

Un volume 64 fois plus petit ne veut pas dire des longueurs 64 fois plus petites : seulement 4 fois, puisque $4^3 = 64$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/64` → $\dfrac{1}{64}$, c'est le rapport des **volumes**, c'est-à-dire k^3. Le coefficient des longueurs est le nombre dont le cube vaut $\dfrac{1}{64}$.

`1/8` → Tu as pris la racine **carrée** de $\dfrac{1}{64}$. Pour un volume, c'est $k^3 = \dfrac{1}{64} : \left(\dfrac{1}{8}\right)^3 = \dfrac{1}{512}$, pas $\dfrac{1}{64}$.

EXERCICE 82 · PRATIQUE

Le verre à mi-hauteur

Un verre a la forme d'un cône de révolution, pointe en bas, et contient $400\ \text{cm}^3$ quand il est plein. On le remplit jusqu'à la moitié de sa hauteur.

Calculer le volume du liquide.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `50`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le liquide forme un petit cône de même sommet que le verre, de coefficient $k = \frac{1}{2}$.
2. Un volume se multiplie par k^3.

CORRECTION

Le coefficient —

$$k = \frac{1}{2} \quad ; \quad k^3 = \frac{1}{8}$$

Le volume —

$$V' = \frac{1}{8} \times 400$$

$$V' = 50 \text{ cm}^3$$

Rempli à mi-hauteur, un verre conique ne contient qu'un huitième de sa contenance : toute la largeur du verre est en haut.

PIÈGES ANTICIPÉS

`200` → Tu as supposé le volume proportionnel à la hauteur. Le petit cône est réduit dans les trois dimensions : $k^3 = \frac{1}{8}$.

`100` → Tu as multiplié par $k^2 = \frac{1}{4}$: c'est la surface du liquide qui est divisée par 4. Le volume, lui, est divisé par 8.

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT

Le tronc aux deux tiers

Un cône de révolution a pour volume 216 cm^3. On le coupe par un plan parallèle à sa base, aux deux tiers de sa hauteur en partant du sommet.

Calculer le volume du tronc de cône, entre la section et la base.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `152`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le tronc est le grand cône privé du petit cône, du côté du sommet. Commence par le petit cône.
2. $k = \frac{2}{3}$ et $k^3 = \frac{8}{27}$.

CORRECTION

Le petit cône —

$$V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 216 = \frac{8}{27} \times 216 = 64 \text{ cm}^3$$

Le tronc —

$V_{\text{tronc}} = 216 - 64 = 152 \text{ cm}^3$

Le tronc n'a qu'un tiers de la hauteur, mais il contient plus des deux tiers du volume : $\dfrac{152}{216} \approx 0{,}70$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`64` → 64 cm^3, c'est le **petit cône**, du côté du sommet. Le tronc est le reste : $216 - 64$.

`72` → Tu as retiré les deux tiers du volume, 144. Le petit cône vaut $k^3 = \dfrac{8}{27}$ du grand, pas k.

`120` → Tu as retiré $\dfrac{4}{9}$ du volume, avec k^2. Pour un volume, c'est $k^3 = \dfrac{8}{27}$.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

La hauteur du liquide

Un verre conique, pointe en bas, a une hauteur de 15 cm et contient 250 cm^3 quand il est plein. On y verse 16 cm^3 de sirop.

Calculer la hauteur du sirop dans le verre.

Donner la hauteur en centimètres.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le sirop forme un petit cône de même sommet que le verre. Le rapport des volumes est k^3.
2. $k^3 = \dfrac{16}{250}$: simplifie la fraction et reconnais deux cubes.

CORRECTION

Le rapport des volumes —

$$k^3 = \frac{16}{250} = \frac{8}{125}$$

Le coefficient — $2^3 = 8$ et $5^3 = 125$:

$$k = \frac{2}{5}$$

La hauteur —

$$h' = \frac{2}{5} \times 15 = 6 \text{ cm}$$

Moins de $7\,\%$ du volume suffit à monter aux deux cinquièmes de la hauteur : c'est l'effet du cube, lu à l'envers.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.96 / 0,96 / 24/25` → Tu as supposé la hauteur proportionnelle au volume. Le rapport des volumes est k^3 : il faut d'abord retrouver k.

`2/5 / 0.4` → $\dfrac{2}{5}$, c'est le coefficient k. La hauteur du sirop est k fois la hauteur du verre.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 85 · RAISONNEMENT

Deux statues semblables

Deux statues ont exactement la même forme : la petite mesure $1{,}2$ m de haut, la grande $3{,}6$ m. Il faut 2 litres de peinture pour peindre toute la surface de la petite.

Calculer la quantité de peinture nécessaire pour peindre la grande.

Donner la quantité en litres.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La grande statue est un agrandissement de la petite. Quel est son coefficient ?
2. $k = 3$. La peinture couvre une **surface** : par quoi une aire est-elle multipliée ?

CORRECTION

Le coefficient —

$$k = \frac{3{,}6}{1{,}2} = 3$$

Les surfaces — La quantité de peinture est proportionnelle à l'aire à peindre, multipliée par k^2 :

$$2 \times 3^2 = 2 \times 9$$

$$18 \text{ L}$$

Pour savoir quelle puissance de k utiliser, on se demande ce que l'on mesure : une longueur (k), une surface (k^2) ou un volume (k^3). La peinture se compte en surface.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Tu as multiplié par $k = 3$. La peinture couvre une **surface**, multipliée par $k^2 = 9$.

54 → Tu as multiplié par $k^3 = 27$: ce serait vrai pour la quantité de bronze, un volume. La peinture couvre une surface : k^2.

EXERCICE 86 · DEFI

Le tronc de pyramide

Une pyramide a pour base un carré de côté 9 cm et pour hauteur $SO = 12$ cm. On la coupe par un plan parallèle à la base, situé à 4 cm **au-dessus de la base**.

Calculer le volume du tronc de pyramide, entre la section et la base.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 228

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord le volume de la grande pyramide, puis le coefficient k de la petite — en partant du sommet.
2. Le plan est à $12 - 4 = 8$ cm du sommet : $k = \frac{8}{12}$. La petite pyramide vaut k^3 fois la grande.

CORRECTION

La grande pyramide —

$$V = \frac{1}{3} \times 9^2 \times 12 = \frac{1}{3} \times 81 \times 12 = 324 \text{ cm}^3$$

Le coefficient —

$$SO' = 12 - 4 = 8 \text{ cm} \quad ; \quad k = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

La petite pyramide —

$$V' = \frac{8}{27} \times 324 = 96 \text{ cm}^3$$

Le tronc —

$$V_{\text{tronc}} = 324 - 96 = 228 \text{ cm}^3$$

Vérification directe : la section a pour côté $\frac{2}{3} \times 9 = 6$ cm, et $\frac{1}{3} \times 36 \times 8 = 96 \text{ cm}^3$. Les deux chemins donnent la même petite pyramide.

PIÈGES ANTICIPÉS

96 → 96 cm^3, c'est la **petite** pyramide. Le tronc est ce qui reste de la grande : $324 - 96$.

312 → Tu as pris $k = \frac{4}{12}$, avec la distance à la base. Le coefficient se lit depuis le sommet : $SO' = 12 - 4 = 8$ cm.

180 → Tu as retiré $\frac{4}{9}$ du volume, avec k^2. Un volume se multiplie par $k^3 = \frac{8}{27}$.

324 → 324 cm^3, c'est la pyramide entière. Il faut encore retirer la petite pyramide du sommet.

EXERCICE 87 · DEFI

Un cône en trois tranches

Un cône de révolution a pour volume 540 cm^3. Deux plans parallèles à sa base le coupent au tiers et aux deux tiers de sa hauteur, en partant du sommet. On obtient trois morceaux : un petit cône, une tranche du milieu et un tronc près de la base.

Calculer le volume de la tranche du milieu.

Donner le volume en centimètres cubes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `140`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque plan découpe, du côté du sommet, un cône réduit. La tranche du milieu est la différence de deux de ces cônes.
2. Les cônes de coefficients $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ ont pour volumes $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 540$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 540$.

CORRECTION

Le petit cône —

$$V_1 = \frac{1}{27} \times 540 = 20 \text{ cm}^3$$

Le cône aux deux tiers —

$$V_2 = \frac{8}{27} \times 540 = 160 \text{ cm}^3$$

La tranche du milieu —

$$V_{\text{milieu}} = 160 - 20 = 140 \text{ cm}^3$$

Les trois tranches ont la même épaisseur, mais pas le même volume : 20, 140 et 380 cm^3, dans le rapport $1, 7, 19$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`180` → Trois tranches de même épaisseur n'ont pas le même volume : le cône s'élargit vers la base. Calcule les cônes réduits avec k^3.

`160` → 160 cm^3, c'est tout le cône jusqu'au deuxième plan, petit cône compris. Il faut encore retirer le petit cône.

`20` → 20 cm^3, c'est le petit cône du sommet. La tranche du milieu est entre les deux plans.

EXERCICE 88 · BASE

Le rayon de la section

Une sphère de centre O a pour rayon $R = 17$ cm. Un plan situé à la distance $d = 8$ cm de O la coupe suivant un cercle.

Calculer le rayon r de ce cercle.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre O, le centre O' du cercle et un point M du cercle forment un triangle rectangle en O', d'hypoténuse $OM = R$.
2. Applique la formule du cours.
   $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

CORRECTION

Pythagore —

$$r^2 = R^2 - d^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$$

$$r = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

Les nombres $8, 15, 17$ forment un triangle rectangle : $64 + 225 = 289$. Le rayon de la section est toujours plus petit que celui de la sphère.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → Tu as calculé $17 - 8$. Ce sont les **carrés** qui se soustraient : $r^2 = 17^2 - 8^2$.

`25` → Tu as additionné $17 + 8$: la section serait plus grande que la sphère. Dans le triangle $OO'M$, l'hypoténuse est $OM = 17$ cm.

`225` → 225, c'est r^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`sqrt(353)` → Tu as additionné les carrés. L'hypoténuse est $[OM]$, le rayon de la sphère : $r^2 = R^2 - d^2$.

EXERCICE 89 · BASE

Un grand cercle

Une sphère a pour diamètre 22 cm. On la coupe par un plan qui passe par son centre.

Calculer le rayon du cercle de section.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan passe par le centre : la distance d du centre au plan vaut 0.
2. Avec $d = 0$, la formule $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ donne $r = R$. Que vaut R ?

CORRECTION

Un grand cercle — Le plan passe par le centre, $d = 0$: la section est un grand cercle, de même rayon que la sphère.

$$r = R$$

Le rayon —

$$r = \frac{22}{2} = 11 \text{ cm}$$

Un grand cercle est la plus grande section possible d'une sphère : son rayon est celui de la sphère, la moitié du diamètre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`22` → 22 cm, c'est le **diamètre**. Le rayon du grand cercle est celui de la sphère, sa moitié.

`0` → 0, c'est la distance d du centre au plan. Le rayon de la section est $r = \sqrt{R^2 - 0^2} = R$.

EXERCICE 90 · PRATIQUE

La distance du plan au centre

Une sphère de centre O a pour rayon $R = 41$ cm. Un plan la coupe suivant un cercle de rayon $r = 40$ cm.

Calculer la distance d du centre O au plan.

Donner la distance en centimètres.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le même triangle rectangle $OO'M$ relie R, r et d : R est son hypoténuse.
2. De $r^2 = R^2 - d^2$, on tire $d^2 = R^2 - r^2$.

CORRECTION

Pythagore —

$d^2 = R^2 - r^2 = 41^2 - 40^2 = 1681 - 1600 = 81$

$d = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$

Une section presque aussi grande qu'un grand cercle, 40 cm pour 41 cm, est pourtant à 9 cm du centre : le rayon varie lentement près du centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Tu as calculé $41 - 40$. Ce sont les **carrés** qui se soustraient : $d^2 = 41^2 - 40^2$.

`81` → 81, c'est d^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`sqrt(3281)` → Tu as additionné les carrés. L'hypoténuse du triangle $OO'M$ est le rayon R de la sphère : $d^2 = R^2 - r^2$.

EXERCICE 91 · PRATIQUE

L'aire du disque de section

Une sphère de centre O a pour rayon $R = 9$ cm. Un plan situé à 5 cm de O la coupe suivant un cercle.

Calculer la valeur exacte de l'aire du disque de section.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `56pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire du disque est πr^2 : il suffit de connaître r^2, pas r.
2. $r^2 = R^2 - d^2$.

CORRECTION

Le carré du rayon —

$r^2 = 9^2 - 5^2 = 81 - 25 = 56$

L'aire —

$\text{aire} = \pi r^2 = 56\pi \text{ cm}^2$

Inutile de calculer $r = \sqrt{56}$: l'aire n'a besoin que de r^2. En valeur approchée, $56\pi \approx 175{,}9 \text{ cm}^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16pi` → Tu as pris $r = 9 - 5 = 4$ cm. Ce sont les **carrés** qui se soustraient : $r^2 = 81 - 25 = 56$.

`106pi` → Tu as additionné les carrés : la section serait plus grande qu'un grand cercle. $r^2 = R^2 - d^2$.

`81pi` → 81π, c'est l'aire d'un **grand** cercle, quand le plan passe par le centre. Ici le plan est à 5 cm du centre.

`175.9 / 175.93 / 176 / 175,9 / 175,93` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

Maths à la carte · DELKADER HAMMAMI

EXERCICE 92 · PRATIQUE

Un rayon avec une racine

Une sphère de centre O a pour rayon $R = 6$ cm. Un plan situé à 4 cm de O la coupe suivant un cercle.

Calculer la valeur exacte du rayon r de ce cercle.

Donner la valeur exacte du rayon en centimètres.

Réponse attendue : `2*sqrt(5)` — aussi acceptées : sqrt(20)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $r^2 = R^2 - d^2$. Le résultat n'est pas un carré parfait : garde la racine.
2. Simplifie la racine : $20 = 4 \times 5$.

CORRECTION

Pythagore —

$r^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

La racine —

$r = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ cm

Quand $R^2 - d^2$ n'est pas un carré parfait, la valeur exacte s'écrit avec une racine carrée, simplifiée : $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu as calculé $6 - 4$. Ce sont les **carrés** qui se soustraient : $r^2 = 36 - 16$.

`2*sqrt(13) / sqrt(52)` → Tu as additionné les carrés. L'hypoténuse est le rayon R de la sphère : $r^2 = R^2 - d^2$.

`20` → 20, c'est r^2. Il reste à prendre la racine carrée.

`4.47 / 4.5 / 4.472 / 4,47 / 4,5` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du rayon : garde la racine carrée, et simplifie-la.

EXERCICE 93 · RAISONNEMENT

Du périmètre à la distance

Une sphère de centre O a pour rayon $R = 37$ cm. Un plan la coupe suivant un cercle de périmètre 70π cm.

Calculer la distance du centre O au plan.

Donner la distance en centimètres.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$: retrouve d'abord r.
2. Puis $d^2 = R^2 - r^2$, dans le triangle rectangle $OO'M$.

CORRECTION

Le rayon —

$2\pi r = 70\pi \iff r = 35 \text{ cm}$

Pythagore —

$d^2 = 37^2 - 35^2 = 1369 - 1225 = 144$

$d = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$

Une astuce de calcul : $37^2 - 35^2 = (37-35)(37+35) = 2 \times 72 = 144$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Tu as calculé $37 - 35$. Ce sont les **carrés** qui se soustraient : $d^2 = 37^2 - 35^2$.

35 → 35 cm, c'est le rayon r de la section. On demande la distance d du centre au plan.

EXERCICE 94 · RAISONNEMENT

Deux tranches de part et d'autre

Une sphère de centre O a pour rayon $R = 5$ cm. Deux plans parallèles la coupent, de part et d'autre de O : l'un à 3 cm de O, l'autre à 4 cm.

Calculer la valeur exacte de la somme des aires des deux disques de section.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `25pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour chaque plan, $r^2 = R^2 - d^2$: l'aire du disque est πr^2, sans avoir besoin de r.
2. Calcule r_1^2 avec $d = 3$, r_2^2 avec $d = 4$, puis $\pi(r_1^2 + r_2^2)$.

CORRECTION

Le premier plan —

$r_1^2 = 25 - 9 = 16$

Le second plan —

$r_2^2 = 25 - 16 = 9$

La somme —

$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 16\pi + 9\pi = 25\pi \text{ cm}^2$

Coïncidence instructive : la somme vaut l'aire d'un grand cercle, $\pi R^2 = 25\pi$, parce que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Le côté « de part et d'autre » ne change rien aux calculs : seule compte la distance au centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5pi` → Tu as pris $r = R - d$: 2 cm et 1 cm. Ce sont les **carrés** qui se soustraient : $r^2 = R^2 - d^2$.

`25` → Il manque π : l'aire d'un disque de rayon r est πr^2.

`78.5` / `78.54` / `79` / `78,5` / `78,54` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 95 · RAISONNEMENT

Une calotte d'orange

Une orange est assimilée à une boule de diamètre 10 cm. D'un coup de couteau plan, on en détache une calotte de 1 cm d'épaisseur : le plan de coupe est à 1 cm du bord de l'orange.

Calculer le rayon du disque de coupe.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ demande la distance d au **centre**, pas au bord.
2. Le rayon de l'orange est 5 cm : le plan est à $5 - 1 = 4$ cm du centre.

CORRECTION

La distance au centre —

$R = 5 \text{ cm} \quad ; \quad d = 5 - 1 = 4 \text{ cm}$

Pythagore —

$r^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$r = 3 \text{ cm}$

Une calotte de 1 cm seulement donne un disque de 6 cm de diamètre : près du bord, le rayon de la section grandit très vite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(6) / sqrt(24)` → Tu as pris $d = 1$ cm. Mais 1 cm est la distance au **bord** : la distance au centre est $5 - 1 = 4$ cm.

`sqrt(84) / 2*sqrt(21)` → Tu as pris $R = 10$ cm, le diamètre. Le rayon de l'orange est 5 cm.

`4` → 4 cm, c'est la distance d du centre au plan. Le rayon de la coupe est $\sqrt{5^2 - 4^2}$.

EXERCICE 96 · DEFI

La moitié d'un grand cercle

Une sphère de centre O a pour rayon $R = 8$ cm. On veut la couper par un plan pour que l'aire du disque de section soit la **moitié** de l'aire d'un grand cercle.

Calculer la valeur exacte de la distance du centre O au plan.

Donner la valeur exacte de la distance en centimètres.

Réponse attendue : `4*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(32)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un grand cercle a pour aire $\pi R^2 = 64\pi$. Le disque de section doit avoir pour aire 32π : que vaut r^2 ?
2. $r^2 = 32$, et $d^2 = R^2 - r^2$.

CORRECTION

Le carré du rayon —

$$\pi r^2 = \frac{64\pi}{2} = 32\pi \iff r^2 = 32$$

La distance —

$$d^2 = R^2 - r^2 = 64 - 32 = 32$$

$$d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Ici $d = r = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ cm : le triangle $OO'M$ est rectangle **isocèle**. Couper à mi-rayon, à 4 cm, garderait les trois quarts de l'aire, pas la moitié.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → À 4 cm du centre, $r^2 = 64 - 16 = 48$: l'aire vaut les **trois quarts** d'un grand cercle. Il faut $r^2 = 32$.

`32` → 32, c'est d^2. Il reste à prendre la racine carrée, et à la simplifier.

`5.66 / 5.7 / 5.657 / 5,66 / 5,7` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de la distance : garde la racine carrée, et simplifie-la.

EXERCICE 97 · DEFI

L'eau dans un bol hémisphérique

L'intérieur d'un bol est une demi-sphère de centre O et de rayon 26 cm, posée sur sa partie arrondie : son bord est un grand cercle, horizontal, et le point le plus bas est à 26 cm sous O. On y verse de l'eau jusqu'à une profondeur de 16 cm, mesurée depuis le point le plus bas.

Calculer le rayon du cercle que forme la surface de l'eau.

Donner le rayon en centimètres.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La surface de l'eau est la section de la sphère par un plan horizontal. À quelle distance du centre O se trouve ce plan ?
2. Le fond est à 26 cm sous O, et l'eau monte de 16 cm : le plan est à $26 - 16 = 10$ cm sous O.

CORRECTION

La distance au centre —

$$d = 26 - 16 = 10\ \text{cm}$$

Pythagore —

$$r^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$$

$$r = \sqrt{576} = 24\ \text{cm}$$

Une profondeur se mesure depuis le fond, la formule demande la distance au centre : on passe de l'une à l'autre par $d = R - \text{profondeur}$. Les nombres $10, 24, 26$ forment le triangle $5, 12, 13$ agrandi deux fois.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(105) / sqrt(420)` → Tu as pris $d = 16$ cm, la profondeur. Mais la formule demande la distance au **centre** O, qui est au niveau du bord : $d = 26 - 16 = 10$ cm.

`10` → 10 cm, c'est la distance du centre au plan de l'eau. Le rayon de la surface est $\sqrt{26^2 - 10^2}$.

EXERCICE 98 · PRATIQUE

L'eau qui déborde

Une boîte cylindrique de rayon 4 cm et de hauteur 11 cm est remplie d'eau à ras bord. On y plonge entièrement une bille de rayon $1{,}5$ cm.

Calculer la valeur exacte du volume d'eau qui déborde.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `9pi/2` — aussi acceptées : 4.5pi

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'eau qui déborde occupe exactement la place de la bille. Les dimensions de la boîte ne servent qu'à vérifier que la bille y entre.
2. Calcule le volume d'une boule de rayon $1{,}5$ cm : $1{,}5^3 = 3{,}375$.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CORRECTION

Le principe — La bille chasse un volume d'eau égal au sien.

La bille —

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 1{,}5^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3{,}375 = 4{,}5\pi$$

$$V = \frac{9\pi}{2}\ \text{cm}^3$$

Avant de calculer, on se demande quel solide compte vraiment : ici la bille seule. $\frac{9\pi}{2} \approx 14{,}1\ \text{cm}^3$, à peine $3\,\%$ de la boîte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9pi` → $4\pi R^2 = 9\pi$, c'est l'**aire** de la bille. L'eau déplacée est un **volume** : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

`27pi/2 / 13.5pi` → Tu as calculé $4\pi R^3$: le volume de la boule est $\frac{4}{3}\pi R^3$, il faut encore diviser par 3.

`176pi` → 176π, c'est le volume de la boîte entière. Il ne déborde que ce que la bille déplace.

`14.1 / 14.14 / 14 / 14,1 / 14,14` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 99 · PRATIQUE

Le silo à grains

Un silo est formé d'un cylindre de révolution de rayon 3 m et de hauteur 10 m, surmonté d'un toit en forme de cône de révolution de même rayon et de hauteur 4 m.

Calculer la valeur exacte du volume du silo.

Donner la valeur exacte du volume en mètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `102pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le silo est formé de deux solides : calcule le volume de chacun, puis additionne.
2. Même base, un disque de rayon 3 m : $\pi R^2 h$ pour le cylindre, et le tiers de $\pi R^2 h$ pour le cône.

CORRECTION

Le cylindre —

$$\pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi$$

Le cône —

$$\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$$

Le silo —

$$V = 90\pi + 12\pi = 102\pi \text{ m}^3$$

Un solide composé se calcule morceau par morceau. En valeur approchée, $102\pi \approx 320{,}4 \text{ m}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`126pi` → Tu as calculé le toit comme un cylindre, 36π. Le toit est un **cône** : un tiers de $\pi R^2 h$, soit 12π.

`90pi` → 90π, c'est le cylindre seul. Il faut ajouter le toit conique.

`320.4 / 320.44 / 320 / 320,4 / 320,44` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT

Le cornet de glace

Un cornet de glace est modélisé par un cône de révolution de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm, entièrement rempli, surmonté d'une demi-boule de glace de même rayon posée sur sa base.

Calculer la valeur exacte du volume total de glace.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `48pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux solides : le cône rempli, et la demi-boule au-dessus.
2. Cône : $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Demi-boule : la moitié de $\frac{4}{3}\pi R^3$.

CORRECTION

Le cône —

$$\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi$$

La demi-boule —

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = \frac{2}{3}\pi \times 27 = 18\pi$$

Le total —

$$V = 30\pi + 18\pi = 48\pi \text{ cm}^3$$

Les deux morceaux partagent le même rayon, mais pas la même formule. En valeur approchée, $48\pi \approx 150{,}8 \text{ cm}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`66pi` → Tu as compté une boule **entière**, 36π. Sur le cornet, il n'y a qu'une demi-boule : 18π.

`108pi` → Tu as calculé le cône comme un cylindre, 90π. Le volume d'un cône est le tiers : 30π.

`150.8 / 150.80 / 151 / 150,8` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

EXERCICE 101 · RAISONNEMENT

Un cube percé

Un cube de bois a pour arête 10 cm. On le perce de part en part d'un trou cylindrique de rayon 3 cm, dont l'axe est perpendiculaire à deux faces opposées.

Calculer la valeur exacte du volume de bois restant.

Donner la valeur exacte du volume en centimètres cubes, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `1000-90pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le trou traverse tout le cube : quelle est la hauteur du cylindre retiré ?
2. Le cylindre a pour hauteur l'arête, 10 cm. Le bois restant, c'est le cube moins ce cylindre.

CORRECTION

Le cube —

$$10^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

Le trou — Un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm :

$$\pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi$$

Le bois restant —

$$V = 1000 - 90\pi \text{ cm}^3$$

Chaque tranche parallèle aux deux faces percées est un carré troué d'un disque : $100 - 9\pi$, sur 10 cm d'épaisseur. En valeur approchée, $V \approx 717{,}3 \text{ cm}^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`90pi` → 90π, c'est le volume du **trou**. On demande le bois qui reste : le cube moins le trou.

`1000-30pi` → Il manque le carré du rayon dans le volume du trou : $\pi R^2 h = \pi \times 9 \times 10$.

`717.3 / 717.26 / 717 / 717,3 / 717,26` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** du volume : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAM

EXERCICE 102 · DEFI

Quatre boules en pyramide

Trois boules de rayon 5 cm sont posées sur une table horizontale et se touchent deux à deux : leurs centres A, B, C forment un triangle équilatéral de côté 10 cm. Une quatrième boule de même rayon, de centre S, est posée sur elles et les touche toutes les trois. Le pied H de la hauteur issue de S du tétraèdre $SABC$ est le centre du triangle ABC, situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

Calculer la valeur exacte de la distance du centre S à la table.

Donner la valeur exacte de la distance en centimètres.

Réponse attendue : `5+10*sqrt(6)/3` — aussi acceptées : (15+10*sqrt(6))/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux boules qui se touchent ont leurs centres à 10 cm : $SA = SB = SC = 10$ cm. Il faut la hauteur SH, puis ajouter la hauteur du plan des centres au-dessus de la table.
2. La médiane d'un triangle équilatéral de côté 10 mesure $5\sqrt{3}$: AH en vaut les deux tiers. Puis Pythagore dans le triangle SHA, rectangle en H.
3. Le plan (ABC) est à 5 cm au-dessus de la table : un rayon.

CORRECTION

La distance AH —

$$AH = \frac{2}{3} \times 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad AH^2 = \frac{300}{9} = \frac{100}{3}$$

La hauteur SH — Dans le triangle SHA rectangle en H, avec $SA = 10$ cm :

$$SH^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \quad \text{donc} \quad SH = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Jusqu'à la table — Les centres A, B, C sont à un rayon, 5 cm, au-dessus de la table :

$$5 + \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

Même stratégie que pour les cinq boules du cours : la pyramide des centres, sa hauteur par Pythagore, puis un rayon de plus. En valeur approchée, la distance vaut environ $13{,}2$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10*sqrt(6)/3` → $\frac{10\sqrt{6}}{3}$, c'est la hauteur SH, mesurée depuis le plan des centres. Ce plan est à 5 cm au-dessus de la table : ajoute un rayon.

`10` → Tu as pris AH égal à la médiane entière, $5\sqrt{3}$. Le centre du triangle est aux **deux tiers** de la médiane : $AH = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

`13.2` / `13.16` / `13.165` / `13,2` / `13,16` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de la distance : garde la racine carrée dans ton résultat.

EXERCICE 103 · DEFI

Une boule dans un cube, coupée

Une boule de rayon 4 cm est enfermée dans une boîte cubique d'arête 8 cm, en touchant ses six faces. On coupe le tout par un plan parallèle à une face de la boîte, situé à 1 cm de cette face.

Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie de la section du cube qui est **hors** de la boule.

Donner la valeur exacte de l'aire en centimètres carrés, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `64-7pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux sections à calculer : celle du cube, parallèle à une face, et celle de la boule, qui est un disque.
2. Le centre de la boule est au centre du cube, à 4 cm de chaque face. À quelle distance du centre est le plan de coupe ?
3. Le plan est à $d = 4 - 1 = 3$ cm du centre : $r^2 = 4^2 - 3^2$.

CORRECTION

La section du cube — Parallèle à une face, elle est isométrique à cette face :

$$8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$$

La distance au centre — Le centre de la boule est à 4 cm de la face ; le plan à 1 cm d'elle :

$$d = 4 - 1 = 3 \text{ cm}$$

La section de la boule —

$$r^2 = 4^2 - 3^2 = 7 \quad ; \quad \pi r^2 = 7\pi$$

Hors de la boule —

$$\text{aire} = 64 - 7\pi \text{ cm}^2$$

Une même coupe, deux propriétés du cours : la section du pavé est isométrique à la face, celle de la sphère est un cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$. En valeur approchée, l'aire vaut environ $42{,}0 \text{ cm}^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`64-15pi` → Tu as pris $d = 1$ cm. Mais 1 cm est la distance à la **face** : le centre de la boule est à 4 cm de la face, donc à 3 cm du plan.

`64-16pi` → 16π, c'est un grand cercle : le plan passerait par le centre. Ici il est à 3 cm du centre, et $r^2 = 16 - 9 = 7$.

`7pi` → 7π, c'est le disque de la boule. On demande ce qui est **hors** de la boule : le carré moins le disque.

`42` / `42.0` / `42.01` / `42,0` / `42,01` → C'est une valeur approchée. La consigne demande la **valeur exacte** de l'aire : garde π dans ton résultat, sans le remplacer par $3{,}14$.