— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Théorème de Thalès et sa réciproque

1re année secondaire · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum nabdaw le chapitre numéro 2 : le théorème de Thalès et sa réciproque. Deux droites parallèles w deux sécantes : men el figure hedhi bech nal9aw des longueurs bla ma n9isou chay. W bel 3aks, un calcul de rapports bech ythabbet elli deux droites sont parallèles. Yalla nabdaw.

عسلامة ! ليوم نبداو le chapitre numéro 2 : le théorème de Thalès et sa réciproque . deux droites parallèles و deux sécantes : من الـ figure هاذي باش نلقاو des longueurs بلا ما نقيسو شيء . و بالعكس ، un calcul de rapports باش يثبّت اللي deux droites sont parallèles . يالله نبداو.

Bonjour ! Aujourd'hui on commence le chapitre numéro 2 : le théorème de Thalès et sa réciproque. Deux droites parallèles et deux sécantes : de cette figure, on va tirer des longueurs sans rien mesurer. Et dans l'autre sens, un calcul de rapports va prouver que deux droites sont parallèles. Allons-y.

Deux droites parallèles coupées par deux sécantes : c'est la figure la plus rentable de la géométrie. Elle donne des **longueurs sans les mesurer** et, dans l'autre sens, elle **prouve un parallélisme** par un simple calcul.

On part d'un cas que tu connais, la droite des milieux, puis on le généralise : c'est le **théorème de Thalès**. Sa **réciproque** fait le chemin inverse. Au passage, on apprend à agrandir, à réduire, à construire une longueur et à partager un segment, avec une règle, un compas et une équerre.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Utiliser la droite des milieux pour prouver un parallélisme ou placer un milieu

  > Utiliser la droite des milieux pour prouver un parallélisme ou placer un milieu.
  > *Utiliser la droite des milieux pour prouver un parallélisme ou placer un milieu.*

- Calculer une longueur avec le théorème de Thalès dans un triangle

> Calculer une longueur avec le théorème de Thalès dans un triangle.
> *Calculer une longueur avec le théorème de Thalès dans un triangle.*

- Relier agrandissement et réduction : longueurs multipliées par k, aires par k^2
  > Qu'avec un rapport k, les longueurs sont multipliées par k et les aires par k au carré.
  > *Qu'avec un rapport k, les longueurs sont multipliées par k et les aires par k au carré.*
- Démontrer que deux droites sont parallèles avec la réciproque du théorème de Thalès
  > Démontrer que deux droites sont parallèles avec la réciproque du théorème de Thalès.
  > *Démontrer que deux droites sont parallèles avec la réciproque du théorème de Thalès.*
- Construire un segment de longueur donnée et partager un segment dans une proportion donnée
  > Construire un segment de longueur donnée, et partager un segment dans une proportion donnée.
  > *Construire un segment de longueur donnée, et partager un segment dans une proportion donnée.*

---

1. ACTIVITÉ

Un parallélogramme, deux milieux

CE QU'IL DIT

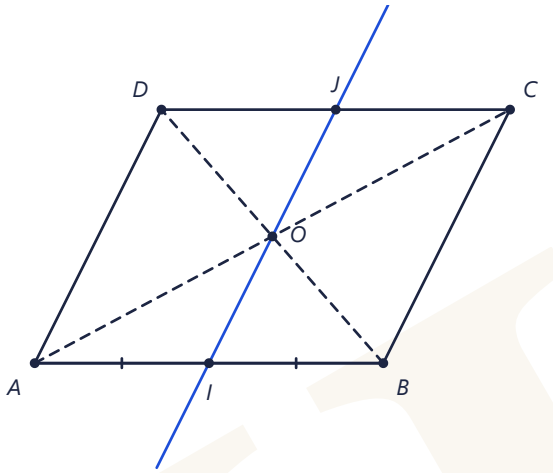
Chouf le triangle ABD. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : donc O houwa le milieu de [BD], w I houwa le milieu de [AB]. Zouz milieux fi nafs el triangle : la droite elli tjam3hom parallèle au troisième côté, (AD). Ba3d, fi le triangle ACD, O houwa le milieu de [AC], w la droite (OJ) parallèle à (AD). Donc t9oss [DC] fi westha : J houwa le milieu de [DC].

شوف donc O le milieu de A B D هو le triangle . les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : donc O شوف
parallèle au تجمعهم اللي triangle : la droite الـ في نفس milieux زوز . le milieu de A B هو I و ، milieu de B D
la droite O J parallèle à A D . و ، le milieu de A C هو le triangle A C D ، O في ، بعد . troisième côté ، A D
. le milieu de D C هو J : وسطها في D C تقصّ donc

Regarde le triangle A B D. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : O est donc le milieu de B D, et I est le milieu de A B. Deux milieux dans un même triangle : la droite qui les joint est parallèle au troisième côté, A D. Ensuite, dans le triangle A C D, O est le milieu de A C, et la droite O J est parallèle à A D. Elle coupe donc D C en son milieu : J est le milieu de D C.

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O, et I est le milieu du côté $[AB]$.

1. Dans le triangle ABD, que représentent les points I et O ? Explique pourquoi les droites (OI) et (AD) sont parallèles.
2. La droite (OI) coupe le côté $[DC]$ en J. Dans le triangle ACD, que représente le point O ? Quelle est la position de J sur $[DC]$? Justifie.



La droite (OI) et le côté [AD].

Un parallélogramme ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. Ses diagonales [AC] et [BD], en pointillés, se coupent en son centre O. Le point I est le milieu du côté [AB] : les deux moitiés [AI] et [IB] portent le même petit trait. La droite (OI), tracée en bleu, monte vers la droite parallèlement au côté [AD] et coupe le côté [DC] au point J.

2. THÉORÈME

La droite des milieux

CE QU'IL DIT

Tfakker les deux sens. Premier énoncé : deux milieux, donc une parallèle. Deuxième énoncé : un milieu w une parallèle, donc un deuxième milieu. W le segment elli yjamma3 les deux milieux mesure la moitié du troisième côté. Le premier ythabbet un parallélisme, w le second y7ott un milieu.

تفكّر les deux sens . premier énoncé : deux milieux ، donc une parallèle . deuxième énoncé : un milieu و le segment اللي يجمع les deux milieux mesure la moitié du . une parallèle ، donc un deuxième milieu troisième côté . le premier يثبّت un parallélisme ، و le second يحطّ un milieu .

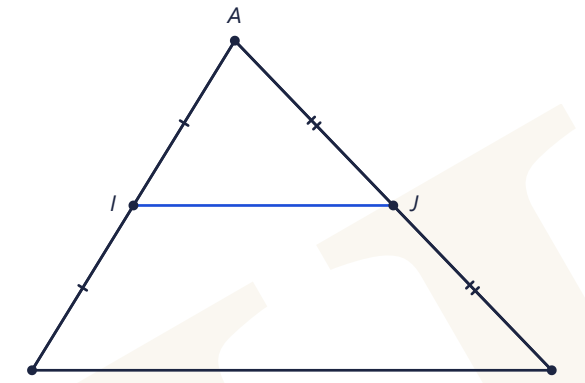
Retiens les deux sens. Premier énoncé : deux milieux, donc une parallèle. Deuxième énoncé : un milieu et une parallèle, donc un deuxième milieu. Et le segment qui joint les deux milieux mesure la moitié du troisième côté. Le premier prouve un parallélisme, le second place un milieu.

Deux énoncés, qui vont ensemble.

1. Dans un triangle, la droite qui joint **les milieux de deux côtés** est parallèle au troisième côté.
2. Dans un triangle, la droite qui passe par **le milieu d'un côté** et qui est **parallèle à un deuxième côté** coupe le troisième côté **en son milieu**.

De plus, le segment qui joint les deux milieux mesure **la moitié** du troisième côté : $IJ = \frac{BC}{2}$. Le théorème de Thalès, juste après, le démontre.

Le premier énoncé sert à **prouver un parallélisme**, le second à **placer un milieu**.



I et J sont les milieux de [AB] et [AC].

Un triangle ABC, A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC] : les deux moitiés de [AB] portent un petit trait, les deux moitiés de [AC] en portent deux. Le segment [IJ], tracé en bleu, est parallèle à la base [BC] et en mesure la moitié.

DEUX MILIEUX

$$I \text{ milieu de } [AB] \text{ et } J \text{ milieu de } [AC] \implies (IJ) \parallel (BC)$$

UN MILIEU, UNE PARALLÈLE

$$I \text{ milieu de } [AB],\ J \in [AC] \text{ et } (IJ) \parallel (BC) \implies J \text{ milieu de } [AC]$$

LA LONGUEUR

$$IJ = \frac{BC}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$ en J. On sait que $AC = 7$ cm et $BC = 9$ cm. Calculer AJ et IJ.

Le bon énoncé — On a un milieu et une parallèle : c'est le second énoncé. Le point J est donc le milieu de $[AC]$.

$$AJ = \frac{AC}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

La longueur IJ — Maintenant, I et J sont deux milieux : le segment $[IJ]$ mesure la moitié du troisième côté $[BC]$.

$$IJ = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ cm}$$

$$AJ = 3{,}5 \text{ cm} \quad ; \quad IJ = 4{,}5 \text{ cm}$$

À ne pas faire : I est le milieu de $[AB]$, donc J est le milieu de $[AC]$. — I est le milieu de $[AB]$ **et** (IJ) est parallèle à (BC), donc J est le milieu de $[AC]$.. Un seul milieu ne suffit pas : sans la parallèle, la droite qui part de I peut couper $[AC]$ n'importe où. Les deux hypothèses sont indispensables.

---

3. ACTIVITÉ

Un triangle agrandi

CE QU'IL DIT

N9isou mli7 : nal9aw AE égale 6. W les trois rapports yti7ou 3la nafs el nombre, 3 sur 2 : AD sur AB, AE sur AC, w 7atta DE sur BC. Le triangle ADE, houwa le triangle ABC mkabber marra w nos. Hedha bedhabt elli y9oulou le théorème de Thalès.

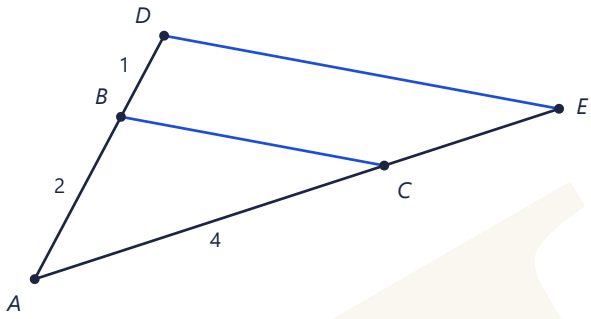
نقيسو مليح : نلقاو A E égale 6 . و les trois rapports يطيحو على نفس الـ A E ، A D sur A B ، 3 sur 2 : nombre
، و حتّى A D E le triangle . D E sur B C ، هو A B C le triangle مكبّر مرّة و نص . هذا بالضبط اللي يقولو
. le théorème de Thalès sur A C

On mesure bien : on trouve A E égale 6. Et les trois rapports tombent sur le même nombre, 3 sur 2 : A D sur A B, A E sur A C, et même D E sur B C. Le triangle A D E, c'est le triangle A B C agrandi une fois et demie. C'est exactement ce que dit le théorème de Thalès.

Sur la figure, les points A, B, D sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, C, E, et les droites (BC) et (DE) sont parallèles. On donne $AB = 2$, $AD = 3$ et $AC = 4$.

1. Reproduis la figure et mesure AE, BC et DE.
2. Calcule les trois rapports
3. $$\frac{AD}{AB}, \quad \frac{AE}{AC}, \quad \frac{DE}{BC}$$
4. Que remarques-tu ?
5. Le triangle ADE est un agrandissement du triangle ABC. À quelle échelle ?

Maths à la carte
ABDELHADER HAMMAMI



(BC) et (DE) sont parallèles.

Deux segments [AD] et [AE] partent du point A, en bas à gauche : l'un monte vers le haut en penchant à droite, l'autre part vers la droite en montant légèrement. Sur le premier se suivent B puis D, avec AB = 2 et BD = 1, donc AD = 3. Sur le second se suivent C puis E, avec AC = 4. Les segments [BC] et [DE], tracés en bleu, sont parallèles : le grand triangle ADE contient le petit triangle ABC.

4. THÉORÈME

Le théorème de Thalès dans un triangle

CE QU'IL DIT

Hedha houwa le théorème. Deux droites sécantes en A, w deux parallèles, (MN) w (BC). Donc AM sur AB égale AN sur AC égale MN sur BC. Fi koll rapport, nafs el triangle el fou9, w nafs el triangle el louta. W rodd belek : le théorème ma yemchich ken ki les droites parallèles. Hiya l'hypothèse mte3ou.

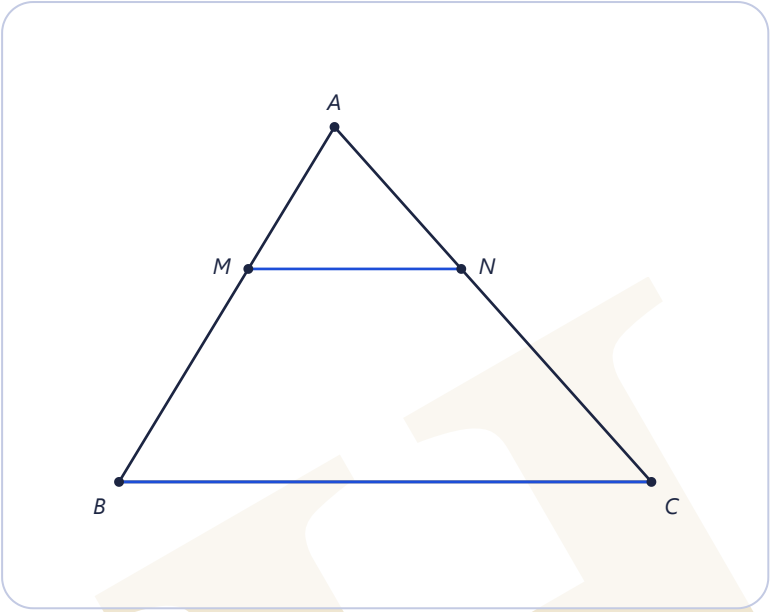
هذا هو A deux droites sécantes en ، le théorème . و M N deux parallèles و A B égale A M sur A C . donc B C
في كل rapport ، نفس الـ triangle الفوق ، و نفس الـ triangle اللوطة . و ردّ A N sur A C égale M N sur B C
بالك : le théorème ما يمشيش كان كي les droites parallèles . هي l'hypothèse متاعو .

Voici le théorème. Deux droites sécantes en A, et deux parallèles, M N et B C. Alors A M sur A B égale A N sur A C égale M N sur B C. Dans chaque rapport, le même triangle en haut et le même en bas. Et attention : le théorème ne marche que si les droites sont parallèles. C'est son hypothèse.

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A, M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

Si les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**, **alors** les trois rapports ci-dessous sont égaux.

Chacun compare une longueur du triangle AMN à la longueur **correspondante** du triangle ABC. Sur les deux sécantes, les longueurs se mesurent **depuis** A : AM et AB, AN et AC. Le troisième rapport compare les deux côtés parallèles, MN et BC. Le théorème reste vrai quand M et N sont au-delà de B et de C, ou de l'autre côté de A : les trois figures sont rassemblées plus bas.



(MN) et (BC) sont parallèles.

Un triangle ABC, A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. Le point M est sur le côté [AB] et le point N sur le côté [AC], chacun aux deux cinquièmes du côté en partant de A. Le segment [MN] et la base [BC] sont tracés en bleu : ils sont parallèles. Le petit triangle AMN, en haut, est une réduction du triangle ABC.

THÉORÈME DE THALÈS

$$(MN) \parallel (BC) \implies \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le triangle ABC, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $AM = 2$ cm, $AB = 5$ cm, $AC = 7{,}5$ cm et $BC = 6$ cm. Calculer AN et MN.

Les rapports — Les droites sont parallèles : on écrit l'égalité de Thalès, avec les longueurs du triangle AMN au numérateur.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{2}{5} = \frac{AN}{7{,}5} = \frac{MN}{6}$$

La longueur AN — On garde les deux premiers rapports, et on isole AN.

$$AN = \frac{2 \times 7{,}5}{5} = 3 \text{ cm}$$

La longueur MN — Le premier et le troisième rapport donnent MN.

$$MN = \frac{2 \times 6}{5} = 2{,}4 \text{ cm}$$

$$AN = 3 \text{ cm} \quad ; \quad MN = 2{,}4 \text{ cm}$$

À ne pas faire : $\frac{AM}{MB} = \frac{MN}{BC}$ — $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$. Le rapport $\frac{MN}{BC}$ compare deux côtés entiers de deux triangles. On le met en face de $\frac{AM}{AB}$, avec le côté entier AB, et jamais de $\frac{AM}{MB}$, qui ne compare que deux morceaux du même côté.

À ne pas faire : $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AN}$ — $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Dans chaque rapport, le même triangle en haut et le même en bas. Retourner un rapport sur deux donne une égalité fausse.

5. PROPRIÉTÉ

Agrandir, réduire

CE QU'IL DIT

Ki les droites parallèles, el triangle AMN copie mte3 el triangle ABC, bel rapport k égale AM sur AB. Ken k inférieur à 1, hedhi une réduction ; ken k supérieur à 1, un agrandissement. Les longueurs tetdharb fi k, w le périmètre zeda. Ama l'aire, tetdharb fi k au carré.

. rapport k égale A M sur A B بالـ ، triangle A B C الـ متاع triangle A M N copie الـ ، les droites parallèles كي
تتضرب k supérieur à 1 ، un agrandissement . les longueurs كان ؛ une réduction هاذي ، k inférieur à 1 كان
في k ، و le périmètre زادة . أما l'aire ، تتضرب في k au carré .

Quand les droites sont parallèles, le triangle A M N est une copie du triangle A B C, au rapport k égale A M sur A B. Si k est inférieur à 1, c'est une réduction ; si k est supérieur à 1, un agrandissement. Les longueurs sont multipliées par k, le périmètre aussi. Mais l'aire, elle, est multipliée par k au carré.

Quand (MN) et (BC) sont parallèles, les trois côtés du triangle AMN s'obtiennent en multipliant ceux du triangle ABC par le même nombre

$$k = \frac{AM}{AB}$$

- si $k < 1$, le triangle AMN est une **réduction** de ABC ; si $k > 1$, c'est un **agrandissement** ;
- les **longueurs**, donc le **périmètre**, sont multipliées par k ;
- les **aires** sont multipliées par k^2.

LONGUEURS

$$\text{périmètre}(AMN) = k \times \text{périmètre}(ABC)$$

AIRES

$$\text{aire}(AMN) = k^2 \times \text{aire}(ABC)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Le triangle ADE est un agrandissement du triangle ABC de rapport $k = \frac{3}{2}$. Le triangle ABC a un périmètre de 10 cm et une aire de 3 cm². Calculer le périmètre et l'aire du triangle ADE.

Le périmètre — Les longueurs sont multipliées par k, le périmètre aussi.

$$\text{périmètre}(ADE) = \frac{3}{2} \times 10 = 15 \text{ cm}$$

L'aire — L'aire, elle, est multipliée par $k^2 = \frac{9}{4}$.

$$\text{aire}(ADE) = \frac{9}{4} \times 3 = 6{,}75 \text{ cm}^2$$

$\text{périmètre} = 15 \text{ cm} \quad ; \quad \text{aire} = 6{,}75 \text{ cm}^2$

À ne pas faire : $\text{aire}(ADE) = \frac{3}{2} \times \text{aire}(ABC)$ — $\text{aire}(ADE) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \text{aire}(ABC)$. Une aire se mesure dans deux directions à la fois. Chacune est multipliée par k, donc l'aire l'est par $k \times k = k^2$.

---

6. ACTIVITÉ

Des rapports égaux, et après ?

CE QU'IL DIT

Nrasmou la parallèle à (BC) elli tet3adda men M. T9oss [AC] fi N', w Thalès ya3tina AN' sur AC égale AM sur AB. Ama hedha zeda AN sur AC. Donc AN' égale AN : zouz points fi nafs el segment, 3la nafs la distance men A, houma nafs el point. N' w N confondus, w la droite (MN) parallèle à (BC). Hedhi hiya la réciproque.

نرسمو la parallèle à B C اللي تتعدّى من M . تقصّ A C في N prime ، و Thalès يعطينا A N prime sur A C . donc A N prime égale A N أما هذا زادة . égale A M sur A B ، segment الـ في نفس points زوز : A N sur A C . la droite M N parallèle à B C ، و N confondus و point . N prime الـ هوما نفس ، A من la distance على نفس هاذي هي la réciproque .

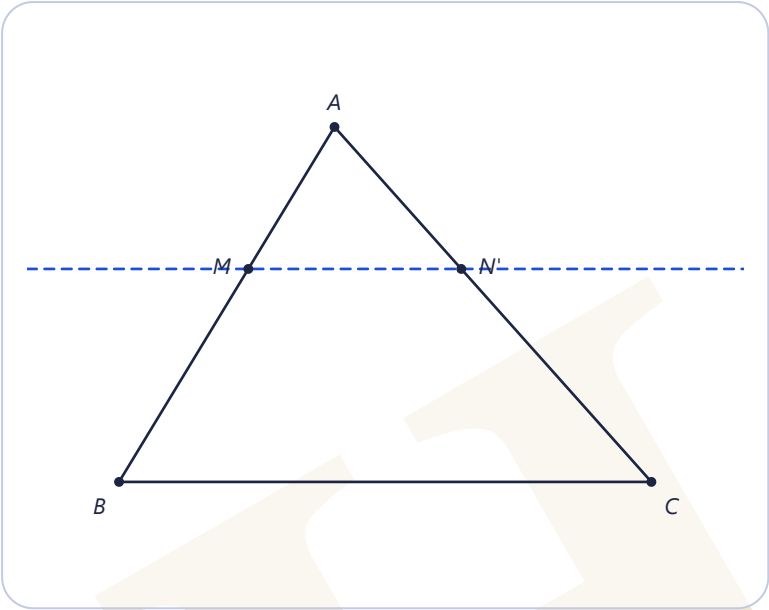
On trace la parallèle à B C passant par M. Elle coupe A C en N prime, et Thalès donne A N prime sur A C égale A M sur A B. Or c'est aussi A N sur A C. Donc A N prime égale A N : deux points du même segment, à la même distance de A, c'est le même point. N prime et N sont confondus, et la droite M N est bien parallèle à B C. C'est la réciproque.

Dans le triangle ABC, on place M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, tous deux distincts de A, de sorte que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Les droites (MN) et (BC) sont-elles forcément parallèles ?

1. Trace la parallèle à (BC) passant par M : elle coupe $[AC]$ en un point N'. Que donne le théorème de Thalès pour le rapport $\frac{AN'}{AC}$?
2. Compare AN' et AN. Les points N et N' sont sur le même segment $[AC]$: que peux-tu en conclure ?
3. Conclus sur les droites (MN) et (BC).



La parallèle à (BC) menée par M.

Le triangle ABC, A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite, et un point M sur le côté [AB]. En pointillés bleus, la parallèle à (BC) passant par M : elle coupe le côté [AC] au point N'. Le point N, choisi sur [AC] avec AN/AC = AM/AB, n'est pas dessiné : l'activité montre qu'il est confondu avec N'.

7. THÉORÈME

La réciproque du théorème de Thalès

CE QU'IL DIT

Tawa nemchiw bel 3aks. Na7sbou AM sur AB, w na7sbou AN sur AC. Madamhom 9ad 9ad, w les points dans le même ordre, nenjem n9oul elli la droite (MN) parallèle à (BC). Zouz conditions, mouch wa7da : les rapports égaux, w le même ordre. W ken les rapports différents, les droites mouch parallèles.

توّا نمشيو بالعكس . نحسبو A M sur A B ، و نحسبو A N sur A C . مادامهم قد قد ، و les points dans le même ordre ، ننجّم نقول اللي . la droite M N parallèle à B C . زوز conditions ، موش وحدة : les rapports égaux ، و le . و كان les droites ، les rapports différents موش parallèles .

Maintenant, le chemin inverse. On calcule A M sur A B, et on calcule A N sur A C. Puisqu'ils sont égaux, et que les points sont dans le même ordre, on peut dire que la droite M N est parallèle à B C. Deux conditions, pas une seule : les rapports égaux, et le même ordre. Et si les rapports sont différents, les droites ne sont pas parallèles.

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A, M un point de (AB) et N un point de (AC), tous deux distincts de A et **placés dans le même ordre** : soit M est du même côté de A que B **et** N du même côté de A que C, soit M et N sont **tous les deux** de l'autre côté de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, **alors** les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

À l'inverse, si les deux rapports sont **différents**, les droites **ne sont pas** parallèles : si elles l'étaient, le théorème de Thalès rendrait les rapports égaux.

POINTS DANS LE MÊME ORDRE

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \implies (MN) \parallel (BC)$$

EXEMPLE TRAITÉ

On a $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$, avec $AM = 3$ cm, $AB = 5$ cm, $AN = 4{,}2$ cm et $AC = 7$ cm. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Premier rapport —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Second rapport —

$$\frac{AN}{AC} = \frac{4{,}2}{7} = 0{,}6$$

Conclusion — Les deux rapports sont égaux, et M, N sont dans le même ordre sur $[AB]$ et $[AC]$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites sont parallèles.

$(MN) \parallel (BC)$

$(MN) \parallel (BC)$

À ne pas faire : Les rapports sont égaux, avec $M \in [AB]$ mais N de l'autre côté de A : donc (MN) est parallèle à (BC). — Il faut les rapports égaux **et** M, N placés dans le même ordre par rapport à A.. Si N passe de l'autre côté de A, les rapports ne changent pas, mais la droite (MN) bascule et n'est plus parallèle à (BC). L'ordre des points fait partie des hypothèses.

À ne pas faire : Les droites sont parallèles, donc les rapports sont égaux : c'est la réciproque. — Des parallèles vers les rapports : Thalès. Des rapports vers les parallèles : la réciproque.. Pour **démontrer** un parallélisme, on part des rapports. Partir des parallèles, c'est utiliser le théorème direct : il suppose ce qu'on veut prouver.

À ne pas faire : $\frac{5}{7} \approx 0{,}7$ et $\frac{12}{17} \approx 0{,}7$, donc les rapports sont égaux. — $5 \times 17 = 85$ et $7 \times 12 = 84$: les rapports sont différents.. Deux arrondis égaux ne prouvent pas une égalité. On compare les fractions exactement, par les produits en croix.

8. REMARQUE

Les trois figures de Thalès

CE QU'IL DIT

Trois figures, w ktiba wa7da. El triangle es-sghir fi west el kbir ; M w N men ba3d B w C : el triangle AMN houwa el kbir ; w le papillon, win les deux triangles opposés par le sommet A. Fi le papillon, dima nabdaw men A : AM w AB 3la droite, AN w AC 3al o5ra.

هو triangle A M N الـ : C و B من بعد N و M ؛ الكبير وسط في الصغير triangle الـ . وحدة كتيبة و ، trois figures الكبير ؛ و le papillon ، وين A sommet le par opposés triangles deux les . le papillon في ، A من نبداو ديما ،

A M و A B على droite ، A N و A C على الأخرى .

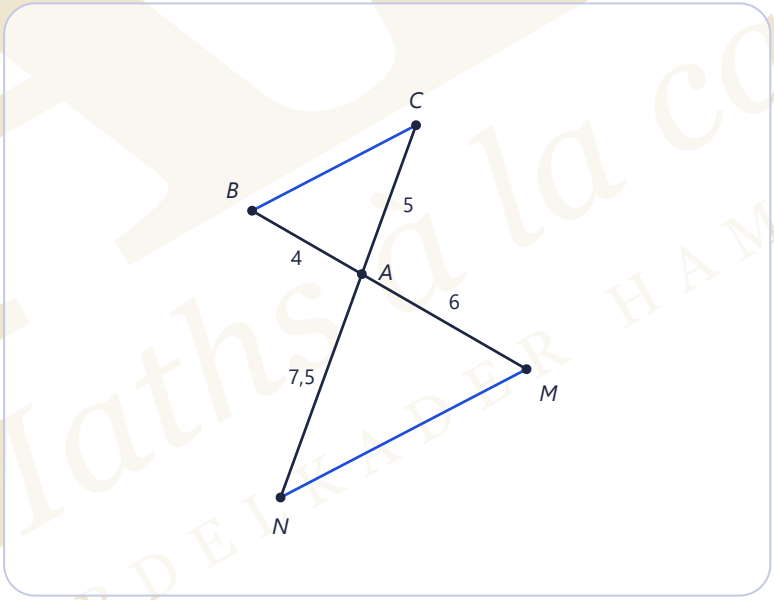
Trois figures, une seule écriture. Le petit triangle dans le grand ; M et N au-delà de B et C : le grand triangle, c'est A M N ; et le papillon, où les deux triangles sont opposés par le sommet A. Dans le papillon, on part toujours de A : A M et A B sur une droite, A N et A C sur l'autre.

Le théorème de Thalès et sa réciproque s'appliquent dans trois figures. Dans les trois, (BC) et (MN) sont parallèles et les rapports s'écrivent **de la même façon** : sur les sécantes, les longueurs se lisent à partir de A.

1. $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$: le triangle AMN est à l'intérieur de ABC ;
2. $B \in [AM]$ et $C \in [AN]$: le triangle AMN est un agrandissement de ABC ;
3. $A \in [BM]$ et $A \in [CN]$: les deux triangles sont opposés par le sommet A. C'est la figure **en papillon**, dessinée ci-dessous.

La première figure est celle du théorème, plus haut ; la deuxième est celle de l'activité du triangle agrandi, où $B \in [AD]$ et $C \in [AE]$.

Dans le papillon, on lit toujours les longueurs **à partir de** A : AM et AB sur une droite, AN et AC sur l'autre.



La figure en papillon : A est entre B et M, et entre C et N.

Deux droites se coupent au point A, au centre. Sur la première, B est en haut à gauche de A et M en bas à droite ; sur la seconde, C est en haut, un peu à droite de A, et N en bas à gauche. Les longueurs sont AB = 4, AM = 6, AC = 5 et AN = 7,5. Les segments [BC], en haut, et [MN], en bas, sont tracés en bleu et sont parallèles : les triangles ABC et AMN sont opposés par le sommet A, comme les deux ailes d'un papillon.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure en papillon, A est entre B et M, et entre C et N, avec $AB = 4$, $AM = 6$, $AC = 5$ et $AN = 7{,}5$. Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ? Si $BC = 3$, combien mesure

MN ?

Les rapports — Les points sont dans le même ordre : A est entre B et M, et entre C et N.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{AN}{AC} = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$$

La réciproque — Les deux rapports sont égaux : les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

La longueur MN — Maintenant qu'elles sont parallèles, le théorème de Thalès donne le troisième rapport.

$$MN = 1{,}5 \times BC = 1{,}5 \times 3 = 4{,}5$$

$$MN = 4{,}5$$

À ne pas faire : $\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{BC} - \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$. Dans le papillon, B et M sont de part et d'autre de A. Les longueurs se mesurent depuis A : c'est AM, pas BM.

9. MÉTHODE

Construire un segment de longueur donnée

CE QU'IL DIT

Bech nebniw une longueur d telle que 9 sur 7 égale 5 sur d, ma na7sbou chay. 3la une première demi-droite, n7ottou 7 unités, ba3d 9 : houma les points I w J. 3la une deuxième demi-droite, 5 unités : houwa le point K. Nrasmou la droite (JK), ba3d la parallèle mte3ha elli tet3adda men I : t9oss la deuxième demi-droite fi D. Thalès ya3tina OI sur OJ égale OD sur OK, donc 7 sur 9 égale OD sur 5 : OD hiya la longueur d. W d égale 35 sur 9, ma tti7ch juste : bel règle graduée nal9aw ken une valeur approchée, ama la construction ta3tiha exactement.

باش نبنيو une longueur d telle que 9 sur 7 égale 5 sur d ، ما نحسبو شيء . على une première demi-droite ، نحطّو 7 unités ، بعد 9 : هوما les points I و J . على 5 unités ، une deuxième demi-droite : هو le point K . نرسمو la droite J K ، بعد la parallèle متاعها اللي تتعدّى من I : تقصّ la deuxième demi-droite في Thalès . D يعطينا OI sur OJ égale OD sur OK ، donc 7 sur 9 égale OD sur 5 : OD هي la longueur d . و d égale 35 sur 9 ، ما تطيحش juste : بالـ règle graduée نلقاو كان une valeur approchée ، أما la construction تعطيها exactement .

Pour construire une longueur d telle que 9 sur 7 égale 5 sur d, on ne calcule rien. Sur une première demi-droite, on reporte 7 unités, puis 9 : ce sont les points I et J. Sur une deuxième, 5 unités : c'est le point K. On trace la droite J K, puis sa parallèle qui passe par I : elle coupe la deuxième demi-droite en D. Thalès donne O I sur O J égale O D sur O K, donc 7 sur 9 égale O D sur 5 : O D, c'est la longueur d. Et d égale 35 sur 9, qui ne tombe pas juste : la règle graduée n'en donne qu'une valeur approchée, la construction la donne exactement.

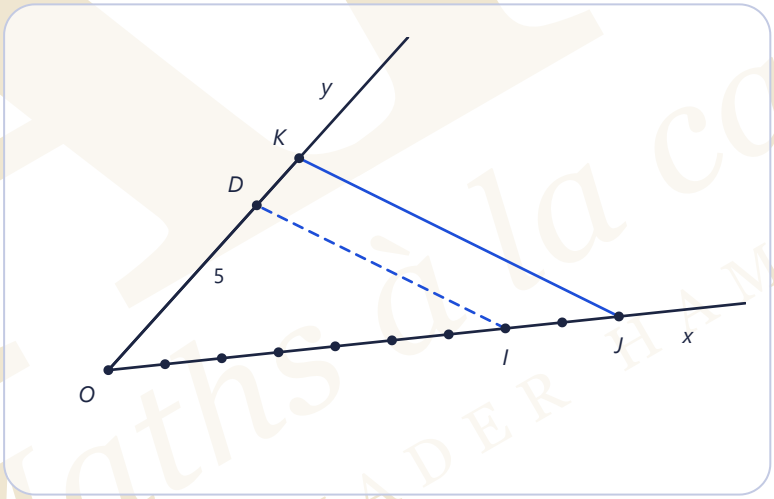
Le théorème de Thalès sert aussi à **construire** une longueur, avec une règle, un compas et une équerre, sans rien calculer.

Construire un segment de longueur d tel que $\frac{9}{7} = \frac{5}{d}$.

1. On choisit une unité, et on trace deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine O, qui ne sont pas portées par une même droite.
2. Sur $[Ox)$, on reporte au compas neuf fois l'unité à partir de O : I est le septième point et J le neuvième, donc $OI = 7$ et $OJ = 9$. Sur $[Oy)$, on place K tel que $OK = 5$.
3. On trace (JK), puis la parallèle à (JK) passant par I : elle coupe $[Oy)$ en D. Le segment $[OD]$ est le segment cherché.

Pourquoi ça marche : dans le triangle OJK, la droite (ID) est parallèle à (JK), donc le théorème de Thalès donne $\frac{OI}{OJ} = \frac{OD}{OK}$, soit $\frac{7}{9} = \frac{OD}{5}$. En renversant les deux rapports, $\frac{9}{7} = \frac{5}{OD}$: la longueur OD est bien d.

La même idée place un point M de la droite (AB) tel que $AM = \frac{7}{6}\,AB$: sur une demi-droite $[Ax)$ d'origine A, non portée par (AB), on reporte sept fois la même longueur ; on relie à B le sixième point, et la parallèle menée par le septième coupe (AB) en M, **au-delà** de B.



La parallèle à (JK) menée par I donne OD = d.

Deux demi-droites partent du point O, en bas à gauche : [Ox) presque horizontale vers la droite, [Oy) qui monte en penchant vers la droite. Sur [Ox), neuf points marqués à la même distance les uns des autres, à partir de O : le septième s'appelle I, le neuvième J. Sur [Oy), le point K est à 5 unités de O. Le segment [JK] est tracé en bleu. La parallèle à (JK) passant par I, en pointillés bleus, coupe [Oy) au point D, entre O et K : OD vaut 35/9 unités, un peu moins de 4.

THALÈS DANS LE TRIANGLE OJK

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{OD}{OK} \quad \text{soit} \quad \frac{7}{9} = \frac{OD}{5}$$

EXEMPLE TRAITÉ

On prend le centimètre pour unité et on construit le point D comme ci-dessus. Calculer OD, puis vérifier que $\frac{9}{7} = \frac{5}{OD}$.

Thalès dans le triangle OJK — $I \in [OJ]$, $D \in [OK]$ et (ID) est parallèle à (JK) : on écrit l'égalité des deux rapports qui partent de O.

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{OD}{OK} \quad \text{soit} \quad \frac{7}{9} = \frac{OD}{5}$$

La longueur OD — On isole OD : $\frac{35}{9}$ cm, environ $3{,}89$ cm.

$$OD = \frac{7 \times 5}{9} = \frac{35}{9} \approx 3{,}89 \text{ cm}$$

Le contrôle — On renverse : $\frac{5}{OD} = 5 \times \frac{9}{35} = \frac{9}{7}$. C'est bien la longueur d cherchée.

$$\frac{5}{OD} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$$

$$d = OD = \frac{35}{9} \text{ cm} \approx 3{,}89 \text{ cm}$$

À ne pas faire : Pour $\frac{9}{7} = \frac{5}{d}$, on trace la parallèle à (IK) passant par J. — On trace la parallèle à (JK) passant par I : on relie le point 9 au point 5, et la parallèle part du point 7.. La parallèle à (IK) menée par J coupe la demi-droite $[Oy)$ en un point D' tel que $\frac{OD'}{5} = \frac{9}{7}$, soit $OD' = \frac{45}{7}$: c'est la réponse à une autre égalité, $\frac{9}{7} = \frac{d}{5}$.

---

10. MÉTHODE

Partager un segment dans une proportion donnée

CE QU'IL DIT

Bech n9assmou [AB] bel rapport 3 sur 5, ma n9isou chay. N7ottou 8 parts égales 3la une demi-droite, 3 plus 5. Nrabtou le huitième point b B, w nrasmou la parallèle elli tet3adda mel troisième. Tti7 3la P. Thalès yadhmen elli AP fiha 3 parts men 8.

. une demi-droite ، 3 plus 5 على parts égales 8 نحطّو . ما نقيسو شيء ، rapport 3 sur 5 بالـ A B باش نقسّمو
يضمن P . Thalès تطيح على . troisième الـ من تتعدّى اللي la parallèle نرسمو و ، B بـ le huitième point نربطو
اللي A P فيها 3 parts من 8 .

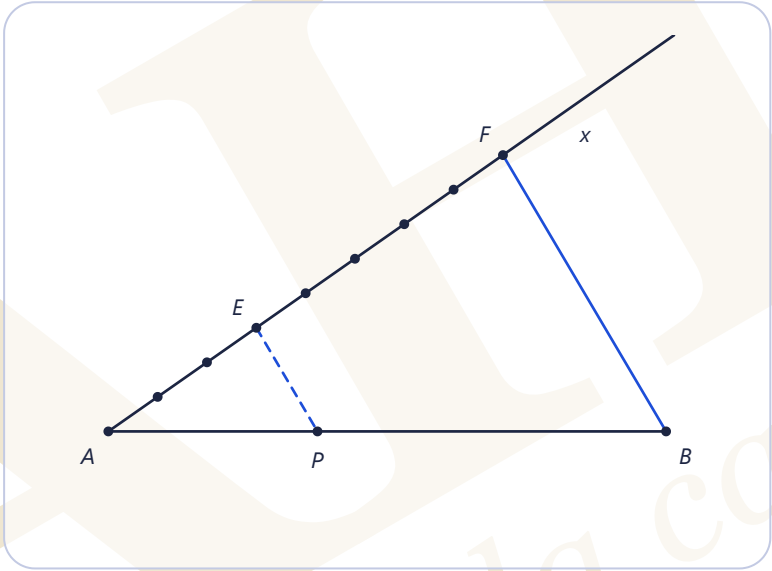
Pour partager A B dans le rapport 3 sur 5, on ne mesure rien. On reporte 8 parts égales sur une demi-droite, 3 plus 5. On relie le huitième point à B, et on trace la parallèle qui passe par le troisième. Elle tombe sur P. Thalès garantit que A P fait 3 parts sur 8.

La même méthode **partage** un segment, avec une règle, un compas et une équerre, sans rien mesurer d'autre que des parts égales.

Placer P sur $[AB]$ tel que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{3}{5}$.

1. PA compte 3 parts et PB en compte 5 : le segment $[AB]$ en compte $3 + 5 = 8$.
2. On trace une demi-droite $[Ax)$ d'origine A, non portée par (AB), et on y reporte au compas huit fois la même longueur à partir de A. On note E le troisième point et F le huitième.
3. On trace (FB), puis la parallèle à (FB) passant par E : elle coupe $[AB]$ en P.

Pourquoi ça marche : dans le triangle AFB, la droite (EP) est parallèle à (FB), donc le théorème de Thalès donne $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{3}{8}$. Le point P prend 3 parts sur 8, et PB les 5 autres.



Huit parts égales sur [Ax), et une parallèle.

Un segment [AB] horizontal, A à gauche et B à droite. De A part une demi-droite [Ax) qui monte vers la droite ; on y a reporté huit fois la même longueur et marqué les huit points obtenus : le troisième s'appelle E, le huitième F. Le segment [FB] est tracé en bleu. La parallèle à (FB) passant par E, en bleu aussi, coupe [AB] au point P, situé aux trois huitièmes de [AB] en partant de A.

THALÈS DANS LE TRIANGLE AFB

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{3}{8}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Le segment $[AB]$ mesure 12 cm. Où tombe le point P de $[AB]$ tel que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{3}{5}$?

Les parts — Le segment $[AB]$ compte $3 + 5 = 8$ parts égales, de $\dfrac{12}{8} = 1{,}5$ cm chacune, et AP en prend 3.

$AP = 3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ cm

Et PB prend les 5 autres parts.

$PB = 5 \times 1{,}5 = 7{,}5$ cm

$$AP = 4{,}5\text{ cm} \quad ; \quad PB = 7{,}5\text{ cm}$$

À ne pas faire : $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{5}$, donc je reporte 5 parts et je relie la troisième. — Je reporte $3 + 5 = 8$ parts, et la parallèle part de la troisième.. $\frac{3}{5}$ compare les deux morceaux entre eux, pas un morceau au segment entier. Le segment entier compte $3 + 5$ parts.

---

11. MÉTHODE

Quel outil, pour quelle question

CE QU'IL DIT

Trois questions, trois outils. Nlawjou 3la une longueur w 3andna des parallèles : Thalès. N7ebbou nthabtou des parallèles : la réciproque, walla la droite des milieux ken famma deux milieux. N7ebbou nthabtou elli mouch parallèles : deux rapports différents yekfiw. W dima, 3al sécantes, les longueurs tet9as men A.

نلوّجو على une longueur و عندنا Thalès : des parallèles . نحبّو نثبّتو des parallèles : la réciproque ، ولّا la droite des milieux كان فمّا deux milieux . نحبّو نثبّتو اللي موش parallèles : deux rapports différents يكفيو . و ديما ، على les longueurs ، les sécantes تتقاس من A .

Trois questions, trois outils. On cherche une longueur et on a des parallèles : Thalès. On veut prouver des parallèles : la réciproque, ou la droite des milieux s'il y a deux milieux. On veut prouver qu'elles ne sont pas parallèles : deux rapports différents suffisent. Et toujours, sur les sécantes, les longueurs se mesurent depuis A.

Devant deux droites sécantes en A coupées par deux autres droites, trois questions, trois outils :

1. **On cherche une longueur**, et on sait que (MN) et (BC) sont parallèles : **théorème de Thalès**. On écrit les trois rapports, puis on garde les deux qui contiennent l'inconnue et des longueurs connues.
2. **On veut prouver que (MN) et (BC) sont parallèles** : **réciproque**. On calcule $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ exactement, et on vérifie que les points sont dans le même ordre. Si M et N sont des milieux, la **droite des milieux** suffit.
3. **On veut prouver qu'elles ne sont pas parallèles** : on montre que $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

Dans tous les cas, sur les sécantes, les longueurs se mesurent **depuis A**, et le même triangle reste au numérateur.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Droite des milieux : deux milieux ⇒ parallèle au troisième côté ; un milieu et une parallèle ⇒ un deuxième milieu.
   > La droite des milieux : deux milieux ya3tiw une parallèle au troisième côté ; un milieu w une parallèle ya3tiw un deuxième milieu.
   > *Droite des milieux : deux milieux donnent une parallèle au troisième côté ; un milieu et une parallèle donnent un deuxième milieu.*
2. Thalès : si $(MN) \parallel (BC)$, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.
   > Thalès : ken (MN) parallèle à (BC), donc AM sur AB égale AN sur AC égale MN sur BC.
   > *Thalès : si M N est parallèle à B C, alors A M sur A B égale A N sur A C égale M N sur B C.*
3. Sur les sécantes, les longueurs se mesurent depuis A ; le troisième rapport compare les côtés parallèles MN et BC. Le même triangle reste au numérateur.
   > 3al sécantes, les longueurs tet9as men A ; w le troisième rapport y9aren les deux côtés parallèles, MN w BC. W nafs el triangle au numérateur.
   > *Sur les sécantes, les longueurs se mesurent depuis A ; le troisième rapport compare les deux côtés parallèles, M N et B C. Et le même triangle reste au numérateur.*
4. Rapport k : longueurs et périmètre multipliés par k, aires par k^2.
   > B un rapport k, les longueurs w le périmètre tetdharb fi k, w les aires fi k au carré.
   > *Avec un rapport k, les longueurs et le périmètre sont multipliés par k, les aires par k au carré.*
5. Réciproque : rapports égaux **et** points dans le même ordre ⇒ droites parallèles.
   > La réciproque : des rapports égaux, w les points dans le même ordre, ya3tiw des droites parallèles.
   > *Réciproque : des rapports égaux, et les points dans le même ordre, donnent des droites parallèles.*
6. Rapports différents ⇒ droites non parallèles.
   > Des rapports différents ythabtou elli les droites mouch parallèles.
   > *Des rapports différents prouvent que les droites ne sont pas parallèles.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna le théorème de Thalès. Tfakker les trois gestes : mel parallèles lel rapports, hedha Thalès ; mel rapports lel parallèles, hedhi la réciproque ; w 3al sécantes, les longueurs tet9as mel sommet commun. Yalla nemchiw lel exercices.

> les trois gestes تفكّر . le théorème de Thalès هكّا كمّلنا : من الـ parallèles لـ rapports ، هذا Thalès ؛ من الـ
> le sommet تتقاس من les sécantes ، les longueurs على و ؛ la réciproque هاذي ، parallèles لـ rapports
> commun . exercices لـ نمشيو يالله .

Voilà, nous avons terminé le théorème de Thalès. Retiens les trois gestes : des parallèles vers les rapports, c'est Thalès ; des rapports vers les parallèles, c'est la réciproque ; et sur les sécantes, les longueurs se

mesurent depuis le sommet commun. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · LA DROITE DES MILIEUX

c'est quoi la droite des milieux | théorème de la droite des milieux | chnowa la droite des milieux | droite des milieux énoncé | la droite des milieux kifech nesta3melha | droite des milieux les deux énoncés

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$I \text{ milieu de } [AB],\ J \text{ milieu de } [AC] \Longrightarrow (IJ) \parallel (BC)$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz énoncés. La droite elli torbot les milieux mte3 deux côtés parallèle l le troisième côté. W la droite elli tet3adda 3la le milieu mte3 côté w parallèle l deuxième côté, t9oss le troisième côté fi le milieu mte3ou. Le premier yprouvi parallélisme, w le deuxième y7ott milieu.

زوز énoncés . la droite اللي تربط les milieux متاع deux côtés parallèle لـ la droite w le troisième côté . اللي تتعدّى على le milieu متاع parallèle لـ côté w deuxième côté ، تقصّ le troisième côté في le milieu متاعو . premier يـ le deuxième w ، parallélisme prouver يحط milieu .

Deux énoncés. La droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté. Et la droite qui passe par le milieu d'un côté, parallèlement à un deuxième côté, coupe le troisième côté en son milieu. Le premier prouve un parallélisme, le second place un milieu.

QUESTION 2 · LA DROITE DES MILIEUX

un seul milieu suffit pour dire que J est le milieu ? | I milieu donc J milieu ? | milieu wa7ed ykaffi ? | pourquoi un seul milieu ne suffit pas | seul milieu sans parallèle | kifech nwarri elli J milieu de AC

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$I \text{ milieu de } [AB] \text{ et } (IJ) \parallel (BC) \Longrightarrow J \text{ milieu de } [AC]$$

CE QU'IL RÉPOND

Le, milieu wa7ed ma ykaffich. Lezem I milieu de $[AB]$, w zeda (IJ) parallèle l (BC) : wa9tha J milieu de $[AC]$. Bla la parallèle, la droite elli to5rej men I tnajjem t9oss $[AC]$ win ma ja.

لا ، milieu واحد ما يكفيش . لازم w ، A B milieu de I زادة parallèle I J لـ B C : وقتها A C milieu de J . بلا la droite ، parallèle اللي تخرج من I تنجّم تقصّ A C وين ما جا .

Non, un seul milieu ne suffit pas. Il faut que I soit le milieu de A B et que I J soit parallèle à B C : alors J est le milieu de A C. Sans la parallèle, la droite issue de I peut couper A C n'importe où.

QUESTION 3 · LA DROITE DES MILIEUX

IJ égale la moitié de BC ? | le segment des milieux mesure combien | pourquoi IJ = BC/2 | longueur du segment qui joint les milieux | IJ kifech na7sbou | segment des milieux la moitié du troisième côté

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$IJ = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ cm}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le segment elli yorbot les milieux mte3 deux côtés y9is la moitié mte3 le troisième côté : $IJ = \dfrac{BC}{2}$. Mathalan ken $BC = 9$ cm, $IJ = 4{,}5$ cm. W Thalès houwa elli ydémontri hedha.

le troisième côté : I J égale B C sur 2 متاع la moitié يقيس deux côtés متاع les milieux اللي يربط le segment . هذا démontrer يـ اللي هو B C 9 cm ، I J 4,5 cm . w Thalès كان مثلا .

Le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté : I J égale B C sur 2. Par exemple, si B C mesure 9 cm, I J mesure 4,5 cm. C'est le théorème de Thalès qui le démontre.

QUESTION 4 · LE THÉORÈME DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

c'est quoi le théorème de Thalès | chnowa théorème de Thalès | énoncé du théorème de Thalès | Thalès ya3ni chnowa | théorème de Thalès définition | que dit le théorème de Thalès

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(MN) \parallel (BC) \Longrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz droites sécantes en A, M 3la (AB) w N 3la (AC). Ken (MN) parallèle l (BC), donc les trois rapports égaux : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

زوز droites sécantes en A ، M على A B w N على A C . كان parallèle M N ـل B C ، donc les trois rapports égaux : A M sur A B égale A N sur A C égale M N sur B C .

Deux droites sécantes en A, M sur la droite A B et N sur la droite A C. Si M N est parallèle à B C, alors les trois rapports sont égaux : A M sur A B égale A N sur A C égale M N sur B C.

QUESTION 5 · LE THÉORÈME DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

quand utiliser le théorème de Thalès | Thalès wa9tech nesta3mlou | les conditions pour appliquer Thalès | Thalès il faut quoi comme hypothèse | quand est-ce qu'on applique Thalès | hypothèses du théorème de Thalès

CE QU'IL RÉPOND

Ki nlawjou 3la longueur, w na3rfou elli (MN) w (BC) parallèles, w M 3la (AB) w N 3la (AC). El parallélisme lezem ykoun ma3ti walla prouvé 9bal : houwa l'hypothèse.

Maths à la carte
ABDELKARIM AMMAMI

كي نلوّجو على w ، longueur نعرفو اللي M w N على M N w B C parallèles ، A B على A C . الـ parallélisme لازم يكون معطى ولّا مـ prouvé قبْلْ : هو l'hypothèse .

Quand on cherche une longueur et qu'on sait que M N et B C sont parallèles, avec M sur la droite A B et N sur la droite A C. Le parallélisme doit être donné ou déjà démontré : c'est l'hypothèse.

QUESTION 6 · LE THÉORÈME DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

comment écrire les rapports de Thalès | kifech nekteb les rapports | quelle longueur en haut dans les rapports | les rapports de Thalès dans quel ordre | numérateur et dénominateur dans les rapports de Thalès | chnowa nekteb fou9 w louta fel rapport

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi koll rapport, nafs le triangle fou9 w nafs le triangle louta. Le triangle AMN fou9 : $\dfrac{AM}{AB}$, $\dfrac{AN}{AC}$, $\dfrac{MN}{BC}$. W 3la les sécantes, les longueurs n9isouhom men A. Ma t9allebch rapport wa7dou.

في كل rapport ، نفس le triangle w فوق نفس le triangle لوطة . le triangle A M N فوق : A N ، A M sur A B وحدو rapport ما تقلبش . A من نقيسوهم les sécantes ، les longueurs على sur A C ، M N sur B C . w

Dans chaque rapport, le même triangle en haut et le même en bas. Le triangle A M N en haut : A M sur A B, A N sur A C, M N sur B C. Sur les sécantes, les longueurs se mesurent depuis A. Ne retourne jamais un seul des rapports.

QUESTION 7 · LE THÉORÈME DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

AM/MB = MN/BC c'est juste ? | pourquoi AM sur AB et pas AM sur MB | 3lech mouch AM/MB | on peut écrire AM sur MB ? | AM/MB wala AM/AB | rapport avec MB c'est faux ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad \text{et non} \quad \frac{AM}{MB}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le. $\dfrac{MN}{BC}$ ycomparer deux côtés kemlin mte3 deux triangles, donc n7ottou 9oddemou $\dfrac{AM}{AB}$, b le côté kemel AB. $\dfrac{AM}{MB}$ ycomparer zouz 7wayej men nafs le côté bark.

لا . M N sur B C يـ comparer deux côtés ، donc كاملين متاع deux triangles ، نحطّو قدّامو le ، بـ A M sur A B كامل côté A M sur M B . A B يـ comparer زوز حوايج من نفس le côté برك .

Non. M N sur B C compare deux côtés entiers de deux triangles, on le met donc en face de A M sur A B, avec le côté entier A B. A M sur M B ne compare que deux morceaux du même côté.

QUESTION 8 · LE THÉORÈME DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

comment calculer une longueur avec Thalès | kifech na7seb AN b Thalès | trouver une longueur avec le théorème de Thalès | Thalès pour calculer MN | kifech nal9a longueur b Thalès | calcul de longueur Thalès exemple

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{2}{5} = \frac{AN}{7{,}5} \iff AN = \frac{2 \times 7{,}5}{5} = 3 \text{ cm}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nektbou les trois rapports, w n5alliw el zouz elli fihom l'inconnue w des longueurs ma3roufin. Mathalan $AM = 2$, $AB = 5$, $AC = 7{,}5$: $\dfrac{2}{5} = \dfrac{AN}{7{,}5}$, donc $AN = \dfrac{2 \times 7{,}5}{5} = 3$ cm.

نكتبو les trois rapports ، w نخلّيو الزوز اللي فيهم l'inconnue w des longueurs معروفين . مثلا ، A B 5 ، A M 2 ، A C 7,5 : 2 sur 5 égale A N sur 7,5 ، donc A N égale 2 fois 7,5 sur 5 ، يعني 3 cm .

On écrit les trois rapports, puis on garde les deux qui contiennent l'inconnue et des longueurs connues. Par exemple A M égale 2, A B égale 5, A C égale 7,5 : 2 sur 5 égale A N sur 7,5, donc A N égale 2 fois 7,5 sur 5, soit 3 cm.

QUESTION 9 · LE THÉORÈME DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

comment isoler AN dans l'égalité | produit en croix kifech | kifech n3azel l'inconnue fel rapport | comment isoler x dans 2/5 = x/7,5 | isoler la longueur inconnue | produit en croix Thalès

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$5 \times AN = 2 \times 7{,}5 \iff AN = 3$$

CE QU'IL RÉPOND

B le produit en croix : $\dfrac{2}{5} = \dfrac{AN}{7{,}5}$ ya3ti $5 \times AN = 2 \times 7{,}5$. Donc $AN = \dfrac{2 \times 7{,}5}{5} = 3$.

بـ le produit en croix : 2 sur 5 égale A N sur 7,5 يعطي 5 fois A N égale 2 fois 7,5 . donc A N égale 2 fois 5 sur 7,5 ، يعني 3 .

Avec le produit en croix : 2 sur 5 égale A N sur 7,5 donne 5 fois A N égale 2 fois 7,5. Donc A N égale 2 fois 7,5 sur 5, soit 3.

QUESTION 10 · LES TROIS FIGURES DE THALÈS

c'est quoi la figure en papillon | Thalès en papillon kifech | papillon les longueurs depuis A | figure papillon chnowa | Thalès marche dans le papillon ? | triangles opposés par le sommet Thalès

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi le papillon, A bin B w M, w bin C w N : les deux triangles opposés par le sommet A. Thalès yemchi kif kif, w les longueurs n9rawhom dima men A : AM w AB, AN w AC. Mouch BM.

يمشي C w N : les deux triangles opposés par le sommet A . Thalès بين B w M ، w بين le papillon ، A في كيف كيف ، les longueurs w نقراوهم ديما من A C ، A N w A B ، A M w A : A . موش B M .

Dans le papillon, A est entre B et M, et entre C et N : les deux triangles sont opposés par le sommet A. Le théorème de Thalès s'applique de la même façon, et les longueurs se lisent toujours à partir de A : A M et A B, A N et A C. Pas B M.

QUESTION 11 · LES TROIS FIGURES DE THALÈS

les trois figures de Thalès | Thalès marche si M est après B ? | M au-delà de B Thalès reste vrai ? | les 3 figures de Thalès c'est quoi | Thalès fi les trois figures | trois configurations de Thalès

CE QU'IL RÉPOND

Thalès w la réciproque yemchiw fi trois figures : M w N dekhel les segments, M w N ba3d B w C, walla M w N mel jiha lo5ra mte3 A, le papillon. Fel thletha, les rapports yetketbou kif kif, w les longueurs men A.

M w N ولّا ، B w C بعد les segments ، M w N داخل trois figures : M w N يمشيو في Thalès w la réciproque من الجيهة الأخرى متاع le papillon ، A . في الثلاثة ، les rapports يتكتبو كيف كيف ، les longueurs w من A .

Le théorème et sa réciproque s'appliquent dans trois figures : M et N sur les segments, M et N au-delà de B et de C, ou M et N de l'autre côté de A, en papillon. Dans les trois, les rapports s'écrivent de la même façon, avec les longueurs mesurées depuis A.

QUESTION 12 · AGRANDIR, RÉDUIRE

agrandissement ou réduction comment savoir | c'est quoi le rapport d'agrandissement | kifech na3ref réduction wala agrandissement | l'échelle du triangle agrandi | réduction ya3ni chnowa | triangle AMN réduction de ABC ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$k = \frac{AM}{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les côtés mte3 AMN houma les côtés mte3 ABC fois nafs el nombre k, $k = \dfrac{AM}{AB}$. Ken $k < 1$, réduction. Ken $k > 1$, agrandissement.

أصغر k كان . nombre k ، k égale A M sur A B نفس الـ A B C fois متاع les côtés هوما A M N متاع les côtés من 1 ، réduction . كان k أكبر من 1 ، agrandissement .

Les côtés du triangle A M N sont ceux du triangle A B C multipliés par le même nombre k, avec k égale A M sur A B. Si k est inférieur à 1, c'est une réduction ; si k est supérieur à 1, un agrandissement.

QUESTION 13 · AGRANDIR, RÉDUIRE

l'aire est multipliée par k ou par k^2 ? | aire d'un agrandissement kifech | pourquoi l'aire est multipliée par k au carré | aire fois k wala k carré | comment calculer l'aire du triangle agrandi | aire après réduction

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\text{aire}(AMN) = k^2 \times \text{aire}(ABC)$$

$$\frac{9}{4} \times 3 = 6{,}75$$

CE QU'IL RÉPOND

L'aire tetmultiplier par k^{2}, mouch par k : l'aire tet9es fi zouz ettijahat, w koll wa7ed yetmultiplier par k. Mathalan $k = \dfrac{3}{2}$ w aire 3 cm² : $\dfrac{9}{4} \times 3 = 6{,}75$ cm².

. multiplier par k يتـ كل واحد w ، تتقاس في زوز اتجاهات par k : l'aire موش ، multiplier par k au carré تتـ l'aire
. cm carrés 6,75 يعني ، k égale 3 sur 2 w aire 3 cm carrés : 9 sur 4 fois 3 مثلا

L'aire est multipliée par k au carré, pas par k : une aire se mesure dans deux directions, chacune multipliée par k. Par exemple, avec k égale 3 sur 2 et une aire de 3 centimètres carrés : 9 sur 4 fois 3, soit 6,75 centimètres carrés.

QUESTION 14 · AGRANDIR, RÉDUIRE

le périmètre est multiplié par k ? | périmètre d'un agrandissement | périmètre du triangle réduit kifech | périmètre fois k wala k carré | comment calculer le périmètre après agrandissement | périmètre AMN fois k

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{3}{2} \times 10 = 15 \text{ cm}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les longueurs tetmultiplier par k, donc le périmètre zeda par k. Mathalan $k = \dfrac{3}{2}$ w périmètre 10 cm : $\dfrac{3}{2} \times 10 = 15$ cm.

k égale 3 sur 2 w périmètre 10 cm : مثلا . par k زادة multiplier par k ، donc le périmètre تتـ les longueurs
. cm 15 يعني ، 3 sur 2 fois 10

Les longueurs sont multipliées par k, donc le périmètre aussi. Par exemple, avec k égale 3 sur 2 et un périmètre de 10 cm : 3 sur 2 fois 10, soit 15 cm.

QUESTION 15 · LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

c'est quoi la réciproque de Thalès | chnowa la réciproque du théorème de Thalès | énoncé de la réciproque | réciproque ya3ni chnowa | la réciproque de Thalès sert à quoi | réciproque définition

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Longrightarrow (MN) \parallel (BC)$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, w les points M w N fi nafs l'ordre, donc (MN) w (BC) parallèles. Thalès yemchi men les parallèles l les rapports, w la réciproque men les rapports l les parallèles.

كان M w N les points ، w A C sur A N égale A B sur A M في نفس l'ordre ، donc M N w B C parallèles . يمشي من Thalès les parallèles لـ les rapports من les rapports ، w la réciproque les parallèles لـ .

Si A M sur A B égale A N sur A C, et que M et N sont placés dans le même ordre, alors M N et B C sont parallèles. Thalès va des parallèles vers les rapports ; la réciproque, des rapports vers les parallèles.

QUESTION 16 · LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

comment montrer que deux droites sont parallèles avec Thalès | kifech nwarri elli MN w BC parallèles | prouver que (MN) est parallèle à (BC) | démontrer le parallélisme avec les rapports | kifech nthabbet parallèles b les rapports | montrer que les droites sont parallèles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{3}{5} = 0{,}6 \quad ; \quad \frac{4{,}2}{7} = 0{,}6$$

CE QU'IL RÉPOND

B la réciproque : na7sbou $\dfrac{AM}{AB}$ w $\dfrac{AN}{AC}$ bedhabt, w nt2akdou elli les points fi nafs l'ordre. Mathalan $\dfrac{3}{5} = 0{,}6$ w $\dfrac{4{,}2}{7} = 0{,}6$: égaux, donc $(MN) \parallel (BC)$. W ken M w N milieux, la droite des milieux tekfi.

بـ la réciproque : نحسبو A N sur A C w A M sur A B بالظبط ، w نتأكّدو اللي les points في نفس l'ordre . مثلا 3 sur 5 égale 0,6 w 4,2 sur 7 égale 0,6 : égaux ، donc M N parallèle à B C . w لـ كان M w N milieux ، la droite des milieux تكفي .

Avec la réciproque : on calcule exactement A M sur A B et A N sur A C, et on vérifie que les points sont dans le même ordre. Par exemple 3 sur 5 égale 0,6 et 4,2 sur 7 égale 0,6 : ils sont égaux, donc M N est parallèle à B C. Si M et N sont des milieux, la droite des milieux suffit.

QUESTION 17 · LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

comment montrer que deux droites ne sont pas parallèles | kifech nwarri elli mouch parallèles | les rapports sont différents donc pas parallèles ? | rapports différents ya3ni chnowa | prouver que MN n'est pas parallèle à BC | droites pas parallèles avec Thalès

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC} \Longrightarrow (MN) \nparallel (BC)$$

CE QU'IL RÉPOND

Na7sbou les deux rapports. Ken $\dfrac{AM}{AB} \ne \dfrac{AN}{AC}$, les droites mouch parallèles : 5ater ken kenou parallèles, Thalès ya3ti des rapports égaux.

خاطر : parallèles موش A M sur A B différent de A N sur A C ، les droites كان . les deux rapports نحسبو
كان كانو Thalès ، parallèles يعطي des rapports égaux .

On calcule les deux rapports. Si A M sur A B est différent de A N sur A C, les droites ne sont pas parallèles : si elles l'étaient, le théorème de Thalès rendrait les rapports égaux.

QUESTION 18 · LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

pourquoi les points doivent être dans le même ordre | même ordre ya3ni chnowa | 3lech lezem nafs l'ordre fel réciproque | N de l'autre côté de A la réciproque marche ? | l'ordre des points dans la réciproque | les rapports égaux ça suffit pour la réciproque ?

CE QU'IL RÉPOND

Ken N yet3adda lel jiha lo5ra mte3 A, les rapports ma yetbaddlouch, ama la droite (MN) tmil w ma3adech parallèle. Donc lezem M w N fi nafs l'ordre par rapport à A : el zouz men jihet B w C, walla el zouz mel jiha lo5ra.

كان N يتعدّى للجيهة الأخرى متاع les rapports ، A ما يتبدّلوش ، أما la droite M N تميل w ماعادش parallèle .
donc لازم M w N في نفس A l'ordre par rapport à : الزوز من جيهة B w C ، ولّا الزوز من الجيهة الأخرى .

Si N passe de l'autre côté de A, les rapports ne changent pas, mais la droite M N bascule et n'est plus parallèle. Il faut donc que M et N soient dans le même ordre par rapport à A : tous deux du côté de B et C, ou tous deux de l'autre côté.

QUESTION 19 · QUEL OUTIL, POUR QUELLE QUESTION

Thalès ou réciproque lequel utiliser | chnowa el far9 bin Thalès w la réciproque | quand utiliser Thalès et quand la réciproque | Thalès w la réciproque kifkif ? | différence entre Thalès et sa réciproque | anahi nesta3mel Thalès wala réciproque

CE QU'IL RÉPOND

Nlawjou 3la longueur w na3rfou les droites parallèles : Thalès. N7ebbou nprouvi elli les droites parallèles : la réciproque. W n7ebbou nprouvi elli mouch parallèles : nwarriw elli les rapports différents.

les droites parallèles : la اللي prouver نـ نحبّو . les droites parallèles : Thalès نعرفو longueur w على نلوّجو
. les rapports différents نوريو اللي : parallèles موش اللي prouver نـ نحبّو réciproque . w

On cherche une longueur et on sait que les droites sont parallèles : théorème de Thalès. On veut prouver que les droites sont parallèles : la réciproque. On veut prouver qu'elles ne le sont pas : on montre que les rapports sont différents.

QUESTION 20 · CONSTRUIRE UN SEGMENT DE LONGUEUR DONNÉE

comment construire un segment de longueur donnée avec Thalès | construire d tel que 9/7 = 5/d | kifech nebni segment b Thalès | construction d'une longueur avec règle et compas | construire un segment avec des parallèles | Thalès pour construire une longueur

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{OD}{OK} \quad \text{soit} \quad \frac{7}{9} = \frac{OD}{5}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nrasmou zouz demi-droites men O. 3al wa7da n7ottou I w J b $OI = 7$ w $OJ = 9$, w 3al o5ra K b $OK = 5$. Nrasmou (JK), w la parallèle l (JK) men I t9oss el o5ra fi D. Thalès ya3ti $\dfrac{7}{9} = \dfrac{OD}{5}$, donc $\dfrac{9}{7} = \dfrac{5}{OD}$.

نرسمو زوز demi-droites من O . على وحدة نحطّو I w J بـ 9 ، w O J égale 9 w O I égale 7 على الأخرى O K بـ K
sur 9 égale O D sur 5 ، 7 يعطي D . Thalès في الأخرى تقصّ I من J K لـ J K ، w la parallèle نرسمو . égale 5
. donc 9 sur 7 égale 5 sur O D

On trace deux demi-droites d'origine O. Sur l'une, on place I et J avec O I égale 7 et O J égale 9 ; sur l'autre, K avec O K égale 5. On trace J K, et la parallèle à J K passant par I coupe l'autre demi-droite en D. Thalès donne 7 sur 9 égale O D sur 5, donc 9 sur 7 égale 5 sur O D.

QUESTION 21 · PARTAGER UN SEGMENT DANS UNE PROPORTION DONNÉE

comment partager un segment dans une proportion donnée | placer P sur AB tel que PA/PB = 3/5 | partager un segment avec Thalès | kifech n9assem segment b Thalès | partage d'un segment avec des parallèles | diviser un segment dans une proportion

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{3}{8}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nrasmou demi-droite men A, w n7ottou 3liha 8 parts égales b le compas : E le troisième point w F le huitième. Nrasmou (FB), w la parallèle l (FB) men E t9oss $[AB]$ fi P. Thalès ya3ti $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{3}{8}$.

. le compas : E le troisième point w F le huitième بـ parts égales 8 نحطّو عليها A ، w من demi-droite نرسمو
. A P sur A B égale 3 sur 8 يعطي P . Thalès في A B تقصّ E من F B لـ F B ، w la parallèle نرسمو

On trace une demi-droite d'origine A et on y reporte au compas 8 parts égales : E est le troisième point, F le huitième. On trace F B, et la parallèle à F B passant par E coupe A B en P. Thalès donne A P sur A B égale 3 sur 8.

QUESTION 22 · PARTAGER UN SEGMENT DANS UNE PROPORTION DONNÉE

pourquoi 8 parts et pas 5 | 3/5 donc je reporte 5 parts ? | combien de parts reporter | 3lech 3 plus 5 parts | 9addech men part nhott | le nombre de parts pour PA/PB = 3/5

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{12}{8} = 1{,}5 \quad ; \quad AP = 3 \times 1{,}5 = 4{,}5 \text{ cm}$$

CE QU'IL RÉPOND

$\dfrac{3}{5}$ ycomparer les deux morceaux binethom, mouch morceau m3a le segment kemel. PA fih 3 parts w PB fih 5, donc le segment kemel $3 + 5 = 8$ parts. Mathalan $AB = 12$ cm : koll part $1{,}5$ cm, $AP = 4{,}5$ cm w $PB = 7{,}5$ cm.

3 sur 5 يـ comparer les deux morceaux بيناتهم ، موش morceau مع le segment كامل . P A فيه 3 parts w P B فيه 5 ، donc le segment كامل 3 plus 5 ، يعني 8 parts . مثلا A B 12 cm : كل A P 4,5 cm w P B part 1,5 cm ، 7,5 cm .

3 sur 5 compare les deux morceaux entre eux, pas un morceau au segment entier. P A compte 3 parts et P B en compte 5 : le segment entier compte 3 plus 5, soit 8 parts. Par exemple, avec A B égale 12 cm : chaque part mesure 1,5 cm, A P mesure 4,5 cm et P B 7,5 cm.

QUESTION 23 · QUEL OUTIL, POUR QUELLE QUESTION

les longueurs se mesurent depuis quel point | pourquoi depuis A | mesurer à partir de A dans Thalès | BM wala AM | les longueurs men A 3lech | on mesure depuis le point d'intersection ?

CE QU'IL RÉPOND

3la les sécantes, les longueurs n9isouhom dima men A, le point win yet9at3ou : AM w AB, AN w AC. 7atta fi le papillon, mouch BM. W nafs le triangle yo93od dima fou9.

على les longueurs ، les sécantes نقيسوهم ديما من A ، النقطة وين يتقاطعو : A C w A N ، A B w A M . حتى في le papillon ، موش w . B M نفس le triangle يقعد ديما فوق .

Sur les sécantes, les longueurs se mesurent toujours depuis A, le point où elles se coupent : A M et A B, A N et A C. Même dans le papillon, jamais B M. Et le même triangle reste toujours au numérateur.

QUESTION 24 · LA DROITE DES MILIEUX

la droite des milieux c'est un cas de Thalès ? | lien entre la droite des milieux et Thalès | droite des milieux w Thalès chnowa el 3ala9a | Thalès avec des milieux

est-ce que Thalès démontre la droite des milieux | milieux et théorème de Thalès

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \Longrightarrow MN = \frac{BC}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ey : ki M w N milieux, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Thalès ya3ti $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{2}$ zeda, ya3ni MN la moitié mte3 BC. W ki M w N milieux, la droite des milieux tekfi bech nprouvi parallélisme.

إيه : كي Thalès . A M sur A B égale 1 sur 2 يعطي M w N milieux ، M N sur B C égale 1 sur 2 زادة ، يعني M la moitié N متاع w B C . كي la droite des milieux ، M w N milieux تكفي باش نـ prouver parallélisme .

Oui : quand M et N sont des milieux, A M sur A B égale 1 sur 2. Thalès donne alors M N sur B C égale 1 sur 2 : M N est la moitié de B C. Et quand M et N sont des milieux, la droite des milieux suffit pour prouver un parallélisme.

QUESTION 25 · LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

faut-il calculer les rapports en valeur exacte | rapports arrondis pour la réciproque c'est bon ? | valeur approchée des rapports | kifech na7seb les rapports bedhabt | arrondir les rapports ou pas | rapports exacts pourquoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{3}{5} = \frac{4{,}2}{7} = 0{,}6$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi la réciproque, ncomparer les rapports bedhabt : fractions walla décimaux exacts. Zouz valeurs arrondies ynajjmou ytcheb-hou w les rapports différents. Mathalan $\dfrac{3}{5}$ w $\dfrac{4{,}2}{7}$ el zouz $0{,}6$ bedhabt.

في la réciproque ، نـ comparer les rapports بالظبط : fractions ولّا décimaux exacts . زوز valeurs arrondies ينجّمو يتشابهو les rapports différents w . مثلا 3 sur 5 w 4,2 sur 7 الزوز 0,6 بالظبط .

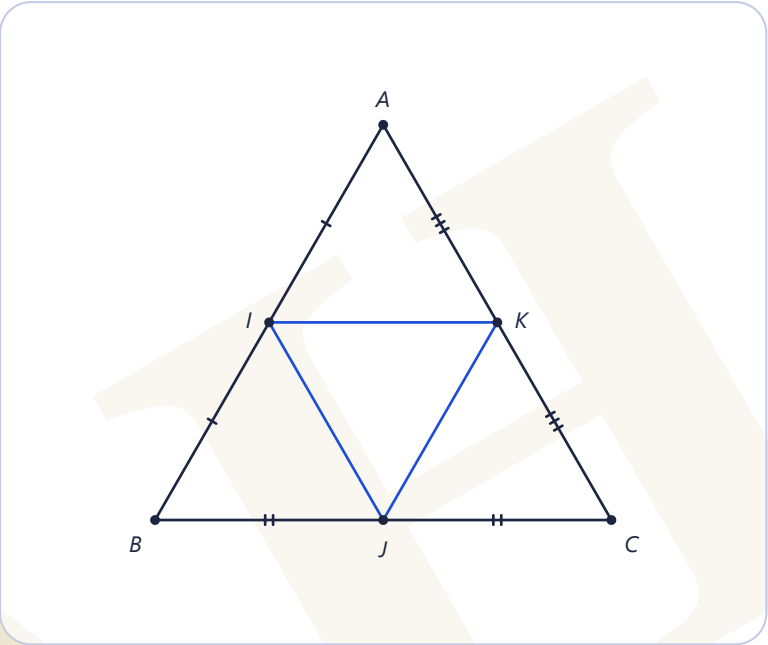
Dans la réciproque, on compare les rapports exactement : en fractions ou en décimaux exacts. Deux valeurs arrondies peuvent se ressembler alors que les rapports sont différents. Par exemple 3 sur 5 et 4,2 sur 7 valent tous deux exactement 0,6.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Les milieux d'un triangle équilatéral**

ABC est un triangle équilatéral de côté 3 cm. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

Calculer le périmètre du triangle IJK.



Un triangle équilatéral ABC de côté 3 cm, A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. I est le milieu de [AB], J celui de [BC] et K celui de [AC] ; les deux moitiés de chaque côté portent la même marque d'égalité. Le triangle IJK, tracé en bleu, relie les trois milieux : il est retourné, sa pointe J en bas, sur la base [BC].

Donner ce périmètre en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque côté du triangle IJK joint les milieux de deux côtés du triangle ABC. Que sais-tu de la longueur d'un tel segment ?
2. Dans le triangle ABC, I et K sont les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$: le segment $[IK]$ mesure la moitié du troisième côté. Même chose pour $[IJ]$ et $[JK]$.
   $$IK = \frac{BC}{2}$$
3. Les trois côtés de IJK mesurent chacun la moitié de 3 cm. Il reste à les additionner.

CORRECTION

Un côté de IJK — I et K sont les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$. D'après la droite des milieux, (IK) est parallèle à (BC) et $[IK]$ mesure la moitié de $[BC]$.

$$IK = \frac{BC}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ cm}$$

Les deux autres — De la même façon, $IJ = \frac{AC}{2}$ et $JK = \frac{AB}{2}$. Les trois côtés de ABC mesurent 3 cm.

$$IJ = JK = KI = 1{,}5 \text{ cm}$$

Le périmètre —

$IJ + JK + KI = 3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ cm

Le triangle des milieux a des côtés deux fois plus courts : son périmètre est la moitié de celui de ABC, $\frac{9}{2} = 4{,}5$ cm. Et au passage, IJK est lui aussi équilatéral.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → Tu as donné le périmètre de ABC, $3 \times 3 = 9$ cm. Le triangle IJK est plus petit : chacun de ses côtés joint deux milieux et ne mesure que la moitié d'un côté de ABC.

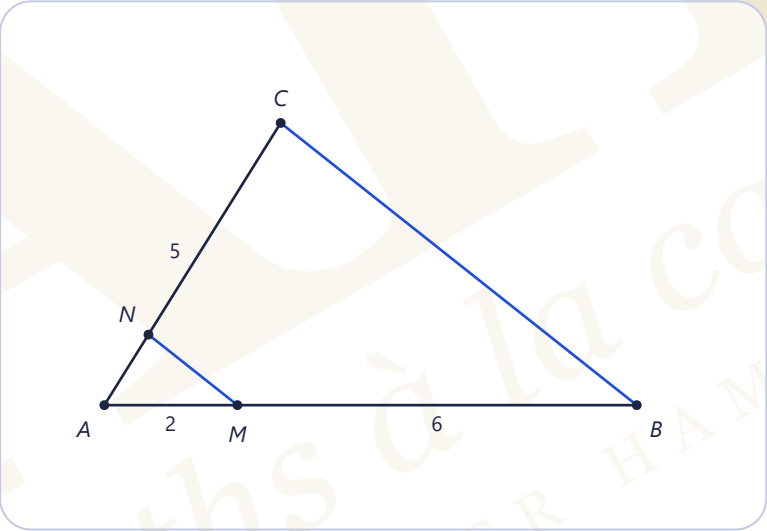
3/2 → $1{,}5$ cm, c'est la longueur d'**un** côté de IJK. Le périmètre est la somme des trois côtés.

EXERCICE 2 · BASE

Le côté entier, pas le morceau

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, N, C. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $AM = 2$ cm, $MB = 6$ cm et $AC = 5$ cm.

Calculer AN.



Un triangle ABC couché : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut, un peu à gauche du milieu. Sur la base [AB], le point M est tel que AM = 2 cm et MB = 6 cm. Le côté [AC] mesure 5 cm, et le point N y est placé de sorte que [MN], tracé en bleu, soit parallèle à [BC], tracé en bleu aussi. Le petit triangle AMN est dans le coin A ; la longueur AN est inconnue.

Donner AN en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 5/4 — aussi acceptées : 1.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par la longueur du côté entier AB : le point M est entre A et B.
2. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles : écris l'égalité de Thalès avec les deux rapports qui partent de A.
   $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$
3. Remplace : $\frac{2}{8} = \frac{AN}{5}$, puis isole AN.

CORRECTION

Le côté entier — Le point M appartient au segment $[AB]$, donc $AB = AM + MB$.

$$AB = 2 + 6 = 8 \text{ cm}$$

Thalès — Dans le triangle ABC, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Le théorème de Thalès donne :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{2}{8} = \frac{AN}{5}$$

On isole AN en multipliant les deux membres par 5.

$$AN = \frac{2 \times 5}{8} = \frac{10}{8}$$

$$AN = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ cm}$$

Contrôle de bon sens : AM est le quart de AB, donc AN doit être le quart de AC. Et $\frac{5}{4}$ est bien le quart de 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/3 → Tu as mis $MB = 6$ cm au dénominateur, comme si c'était le côté entier. Dans Thalès, AM se compare au côté **entier** $AB = AM + MB = 8$ cm.

20 → Tu as retourné un des deux rapports : AN ne peut pas dépasser $AC = 5$ cm, puisque N appartient au segment $[AC]$. Garde le triangle AMN au numérateur des deux côtés : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

15/4 → Tu as calculé NC, l'autre morceau du côté $[AC]$: $NC = 5 - AN$. On demande AN, la longueur qui part de A.

1/4 → $\frac{1}{4}$, c'est le rapport $\frac{AM}{AB}$: la bonne idée, mais pas encore la réponse. On demande la longueur AN en cm, soit le quart de $AC = 5$ cm.

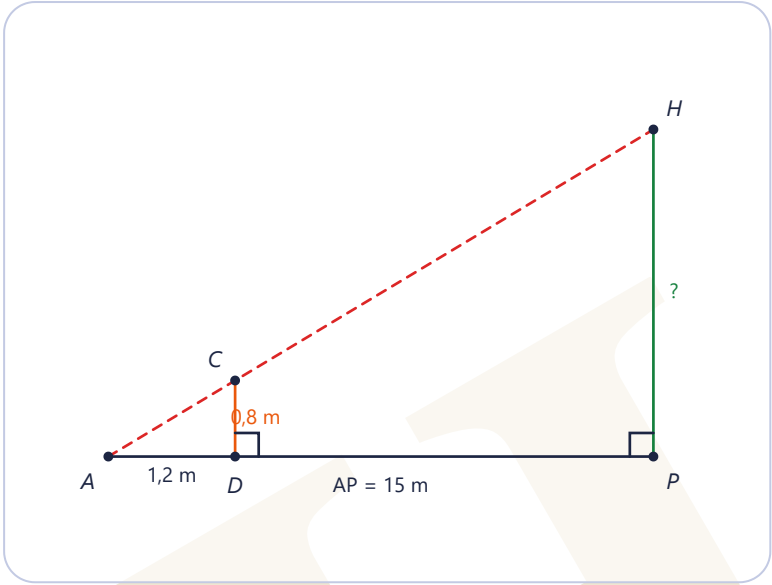
EXERCICE 3 · PRATIQUE

La hauteur de l'arbre

L'ombre du sommet H d'un arbre tombe au point A du sol. On plante verticalement en D un bâton $[DC]$, de sorte que l'ombre de son sommet C tombe elle aussi en A. Sur le sol, les points A, D et P sont alignés, où P est le pied de l'arbre ; les points A, C et H sont sur un même rayon de soleil.

On donne $AD = 1{,}2$ mètre, $DC = 0{,}8$ mètre et $AP = 15$ mètres. Le bâton et l'arbre sont verticaux, donc parallèles.

Calculer la hauteur PH de l'arbre.



La figure n'est pas à l'échelle.

Schéma qui n'est pas à l'échelle. Le sol est une droite horizontale sur laquelle se suivent, de gauche à droite, le point A, le pied D du bâton et le pied P de l'arbre. Le bâton [DC] et l'arbre [PH] sont verticaux, avec un angle droit marqué à leur pied. Un rayon de soleil, en pointillés, part de A, passe par le sommet C du bâton et atteint le sommet H de l'arbre. On lit AD = 1,2 m, DC = 0,8 m et AP = 15 m ; la hauteur PH porte un point d'interrogation.

Donner la hauteur PH en mètres, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le bâton $[DC]$ et l'arbre $[PH]$ sont tous les deux verticaux, donc parallèles. Quel triangle contient toute la figure, et quel est son sommet commun avec le petit triangle ?
2. Dans le triangle APH, $D \in [AP]$, $C \in [AH]$, et (DC) est parallèle à (PH). Garde le rapport des longueurs du sol et celui qui contient PH.
   $$\frac{AD}{AP} = \frac{DC}{PH}$$
3. Remplace : $\frac{1{,}2}{15} = \frac{0{,}8}{PH}$. Les produits en croix donnent $1{,}2 \times PH = 15 \times 0{,}8$.

CORRECTION

La configuration — Le bâton et l'arbre sont verticaux, donc les droites (DC) et (PH) sont parallèles. Dans le triangle APH, on a $D \in [AP]$ et $C \in [AH]$.

Thalès — On garde le rapport des longueurs du sol, et celui des deux verticales qui contient PH.

$$\frac{AD}{AP} = \frac{DC}{PH} \quad \text{soit} \quad \frac{1{,}2}{15} = \frac{0{,}8}{PH}$$

On fait les produits en croix.

$$1{,}2 \times PH = 15 \times 0{,}8 = 12$$

$$PH = \frac{12}{1{,}2} = 10 \text{ mètres}$$

L'arbre mesure 10 mètres. C'est la méthode que l'on prête à Thalès pour mesurer la pyramide de Khéops : un bâton, deux ombres, et aucune échelle à grimper.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.064` → Un arbre de $6{,}4$ cm ! Tu as retourné un rapport. Garde le petit triangle ADC au numérateur des deux côtés : $\dfrac{AD}{AP} = \dfrac{DC}{PH}$.

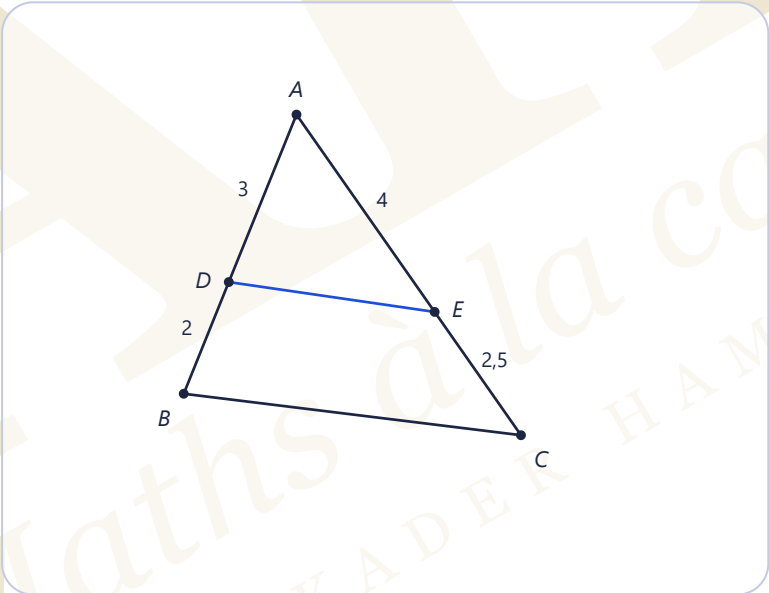
`22.5` → Tu as calculé $15 \times 1{,}2 \div 0{,}8$: les longueurs sont mal appariées. Un rapport de Thalès compare deux longueurs **correspondantes** : AD avec AP, toutes deux sur le sol, et DC avec PH, toutes deux verticales. D'où $\dfrac{AD}{AP} = \dfrac{DC}{PH}$, et $PH = \dfrac{15 \times 0{,}8}{1{,}2}$.

`12` → Tu t'es arrêté à $15 \times 0{,}8 = 12$. Les produits en croix donnent $1{,}2 \times PH = 12$: ce n'est pas PH qui vaut 12, c'est $1{,}2 \times PH$. Il reste à diviser par $1{,}2$.

EXERCICE 4 · PRATIQUE **Parallèles, vraiment ?**

Dans le triangle ABC, on a $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$. On donne $AD = 3$ cm, $AB = 5$ cm, $AE = 4$ cm et $AC = 6{,}5$ cm. Sur la figure, les droites (DE) et (BC) ont l'air parallèles.

Les droites (DE) et (BC) sont-elles parallèles ?



Un triangle ABC, A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. Le point D est sur [AB] avec AD = 3 cm et DB = 2 cm ; le point E est sur [AC] avec AE = 4 cm et EC = 2,5 cm. Le segment [DE], tracé en bleu, semble parallèle à la base [BC].

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne sont pas parallèles · non, elles ne sont pas parallèles · non elles sont pas parallèles · non, elles sont pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · elles sont pas parallèles · ne sont pas parallèles · pas parallèles · non parallèles · non pas parallèles · non, pas parallèles · non parallèle · pas parallèle · non, pas parallèle · non pas parallèle · elles ne sont pas parallèle · ne sont pas parallèle · les droites ne sont pas parallèles · non, les droites ne sont pas parallèles · (DE) et (BC) ne sont pas parallèles · non, (DE) et (BC) ne sont pas parallèles · les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles · sécantes · elles sont sécantes · non, elles sont sécantes · non les rapports sont différents · non, les rapports sont différents · non car les rapports sont différents · non, car les rapports sont différents · no · nn · la · lé · la mouch parallèles · la, mouch parallèles · non (DE) et (BC) ne sont pas parallèles · (DE)

n'est pas parallèle à (BC) · non (DE) n'est pas parallèle à (BC) · non, (DE) n'est pas parallèle à (BC) · (DE) et (BC) sont sécantes · non (DE) et (BC) sont sécantes · non, (DE) et (BC) sont sécantes · elles se coupent · non elles se coupent · non, elles se coupent

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si les droites étaient parallèles, que dirait le théorème de Thalès des rapports $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$?
2. Calcule les deux rapports exactement, sans arrondir : compare les produits en croix $AD \times AC$ et $AE \times AB$.
3. $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Et $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{6{,}5}$: est-ce exactement le même nombre ?

CORRECTION

L'idée — Si (DE) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès dans le triangle ABC donnerait $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. On compare donc ces deux rapports.

On compare exactement, par les produits en croix.

$$AD \times AC = 3 \times 6{,}5 = 19{,}5 \quad ; \quad AE \times AB = 4 \times 5 = 20$$

Conclusion — Les produits en croix sont différents, donc $\frac{AD}{AB} \neq \frac{AE}{AC}$. Si les droites étaient parallèles, ces rapports seraient égaux.

(DE) et (BC) ne sont pas parallèles

Des rapports différents prouvent que les droites ne sont **pas** parallèles : si elles l'étaient, le théorème de Thalès rendrait les rapports égaux. Une figure, elle, ne prouve rien : $0{,}6$ et $0{,}615$ se ressemblent à l'œil, pas au calcul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui elles sont parallèles / oui, elles sont parallèles / elles sont parallèles / sont parallèles / parallèles / parallèle / oui parallèles / ouii / yes / (DE)//(BC) / (DE) // (BC) / (DE)∥(BC) / ey / eyh / ih` → La figure est trompeuse. $\frac{AD}{AB} = 0{,}6$ alors que $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{6{,}5} \approx 0{,}615$: les rapports sont proches, pas égaux. Or si les droites étaient parallèles, Thalès les rendrait égaux.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Trois parts contre cinq

Le segment $[AB]$ mesure 16 cm. On veut placer sur $[AB]$ le point P tel que $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{5}$.

Pour cela, on trace une demi-droite $[Ax)$ d'origine A, non portée par (AB), et on y reporte au compas huit fois la même longueur à partir de A ; on note E le troisième point et F le huitième. La parallèle à (FB) passant par E coupe $[AB]$ en P.

Calculer AP.

Donner AP en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si PA compte 3 parts, PB en compte 5. Combien de parts dans le segment $[AB]$ tout entier ?
2. Dans le triangle AFB, (EP) est parallèle à (FB), et E est le troisième point sur huit.
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{3}{8}$$

CORRECTION

Les parts — Quand PA compte 3 parts, PB en compte 5 : le segment $[AB]$ compte $3 + 5 = 8$ parts égales.
$$\frac{AP}{AB} = \frac{3}{8}$$

Pourquoi la construction marche — Sur la demi-droite $[Ax)$, AE vaut 3 longueurs et AF en vaut 8. La droite (EP) est parallèle à (FB), donc le théorème de Thalès dans le triangle AFB donne $\frac{AP}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{3}{8}$.

On calcule AP.
$$AP = \frac{3}{8} \times 16 = 6 \text{ cm}$$

Et $PB = 16 - 6 = 10$ cm : on vérifie que $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. La construction n'a besoin d'aucune mesure, seulement de parts égales sur une demi-droite et d'une parallèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

48/5 → Tu as pris $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{5}$. Mais $\frac{3}{5}$ compare PA à PB, les deux morceaux, et pas PA au segment entier. Le segment entier compte $3 + 5 = 8$ parts.

10 → Tu as calculé PB, les 5 parts du côté de B. On demande AP, les 3 parts du côté de A.

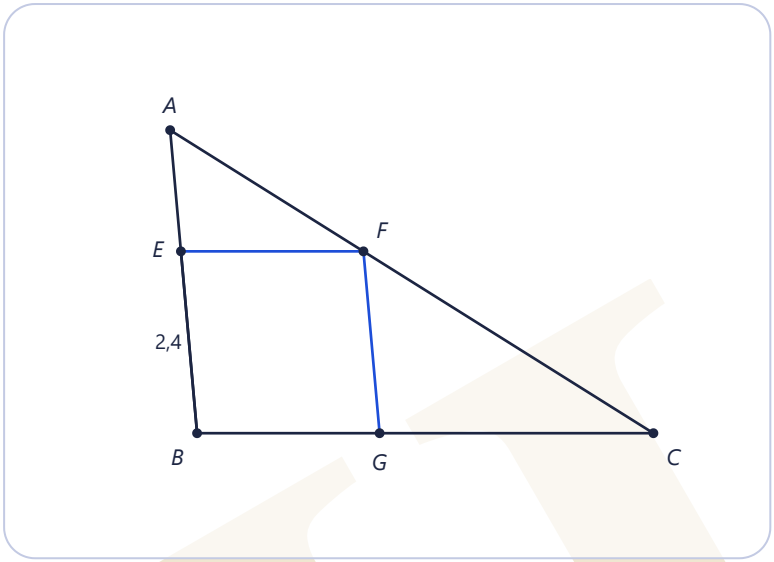
3/8 → $\frac{3}{8}$, c'est le rapport $\frac{AP}{AB}$: la bonne idée, mais pas encore la réponse. On demande la longueur AP en cm, soit $\frac{3}{8}$ de 16 cm.

EXERCICE 6 · RAISONNEMENT

Un quadrilatère dans le coin

ABC est un triangle tel que $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $AC = 7{,}5$ cm. On place $E \in [AB]$ tel que $BE = 2{,}4$ cm. La parallèle à (BC) passant par E coupe $[AC]$ en F, et la parallèle à (AB) passant par F coupe $[BC]$ en G.

Quelle est la nature la plus précise du quadrilatère $EFGB$?



Un triangle ABC, A en haut à gauche, B en bas à gauche, C en bas à droite ; l'angle en B est un peu plus grand qu'un angle droit. Le point E est sur [AB], avec BE = 2,4 cm. La parallèle à (BC) passant par E coupe [AC] en F, et la parallèle à (AB) passant par F coupe [BC] en G : les segments [EF] et [FG] sont tracés en bleu. Le quadrilatère EFGB occupe le coin B du triangle.

Donner sa nature la plus précise, en un mot.

Réponse attendue : `losange` — aussi acceptées : un losange · c'est un losange · EFGB est un losange · le quadrilatère EFGB est un losange · lozange · un lozange · cest un losange · il s'agit d'un losange · EFGB est un lozange · c'est un lozange · EFGB losange · EFGB un losange · un losange mais pas un carré · c'est un losange mais pas un carré · losange mais pas carré · losange non carré · un losange pas un carré

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les côtés opposés de $EFGB$ sont parallèles deux à deux : c'est déjà un parallélogramme. Pour aller plus loin, compare deux côtés consécutifs, EB et EF.
2. $EB = 2{,}4$ cm est donné. Pour EF, utilise le théorème de Thalès dans le triangle ABC, avec $AE = AB - BE$.
   $$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$$
3. $AE = 1{,}6$ cm, donc $\dfrac{EF}{6} = \dfrac{1{,}6}{4}$. Calcule EF et compare-le à EB.

CORRECTION

Un parallélogramme — (EF) est parallèle à (BG) et (FG) est parallèle à (EB) : les côtés opposés de $EFGB$ sont parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.

Le côté EF — Dans le triangle ABC, $E \in [AB]$, $F \in [AC]$ et (EF) est parallèle à (BC). Avec $AE = 4 - 2{,}4 = 1{,}6$ cm, le théorème de Thalès donne :

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad \text{soit} \quad EF = \frac{1{,}6 \times 6}{4} = 2{,}4 \text{ cm}$$

Deux côtés consécutifs égaux — $EF = EB = 2{,}4$ cm. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

$$EF = EB \implies EFGB \text{ est un losange}$$

Ce n'est pas un carré : $AB^2 + BC^2 = 16 + 36 = 52$ alors que $AC^2 = 56{,}25$, donc le triangle n'est pas rectangle en B et l'angle $\widehat{EBG}$ n'est pas droit. Losange est la nature la plus précise.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallélogramme / un parallélogramme / c'est un parallélogramme` → C'est vrai, ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. Mais ce n'est pas le plus précis : calcule EF avec Thalès et compare-le à EB.

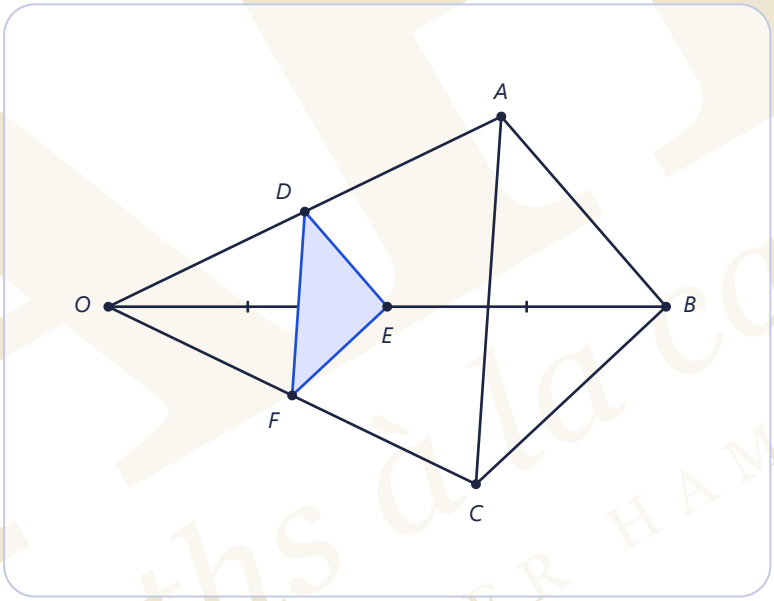
`rectangle / un rectangle / carré / un carré` → Rien ne donne d'angle droit : $AB^2 + BC^2 = 52$ et $AC^2 = 56{,}25$, donc l'angle en B n'est pas droit. Regarde plutôt les longueurs de deux côtés consécutifs, EF et EB.

EXERCICE 7 · RAISONNEMENT

L'aire du grand triangle

Sur la figure, D, E et F sont des points des segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$. Les droites (DE) et (AB) sont parallèles, et les droites (EF) et (BC) aussi. On sait que $OE = EB = 3$ cm et que l'aire du triangle DEF est de 5 cm².

Calculer l'aire du triangle ABC.



Un point O à gauche, d'où partent trois segments : [OA] vers le haut à droite, [OB] horizontal vers la droite, [OC] vers le bas à droite. Le triangle ABC relie leurs extrémités. Le point E est le milieu de [OB] : OE = EB = 3 cm, deux petits traits égaux. D est sur [OA] et F sur [OC], de sorte que (DE) soit parallèle à (AB) et (EF) parallèle à (BC). Le petit triangle DEF, grisé et tracé en bleu, a une aire de 5 cm².

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. E est le milieu de $[OB]$. Dans le triangle OAB, (DE) est parallèle à (AB) : que vaut $\dfrac{DE}{AB}$? Et dans le triangle OBC, que vaut $\dfrac{EF}{BC}$?
2. Ces rapports valent tous $\dfrac{1}{2}$. Pour le troisième côté, la réciproque de Thalès dans le triangle OAC montre que (DF) est parallèle à (AC), et donc $DF = \dfrac{AC}{2}$.

3. DEF est une réduction de ABC de rapport $k = \dfrac{1}{2}$. Les aires sont multipliées par k^2, pas par k.

$$\text{aire}(DEF) = k^2 \times \text{aire}(ABC)$$

CORRECTION

Le rapport — Dans le triangle OAB, (DE) est parallèle à (AB). Comme $OB = 6$ cm, le théorème de Thalès donne :

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{DE}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

De même dans le triangle OBC, avec (EF) parallèle à (BC) :

$$\frac{OF}{OC} = \frac{EF}{BC} = \frac{OE}{OB} = \frac{1}{2}$$

Le troisième côté — $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OF}{OC} = \dfrac{1}{2}$, où $D \in [OA]$ et $F \in [OC]$: par la réciproque du théorème de Thalès, (DF) est parallèle à (AC). Le théorème de Thalès dans le triangle OAC donne alors $DF = \dfrac{AC}{2}$. On pouvait aussi remarquer que D et F sont les milieux de $[OA]$ et de $[OC]$, et conclure par la droite des milieux.

Les aires — Les trois côtés de DEF sont la moitié de ceux de ABC : DEF est une réduction de ABC de rapport $k = \dfrac{1}{2}$, et son aire est multipliée par $k^2 = \dfrac{1}{4}$.

$$\text{aire}(ABC) = 4 \times \text{aire}(DEF) = 4 \times 5 = 20 \text{ cm}^2$$

Longueurs divisées par 2, aire divisée par 4. C'est la règle de toute réduction : les longueurs suivent k, les aires suivent k^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Tu as multiplié l'aire par 2. Les côtés de ABC sont bien deux fois plus longs, mais une aire se mesure dans deux directions : elle est multipliée par $2^2 = 4$.

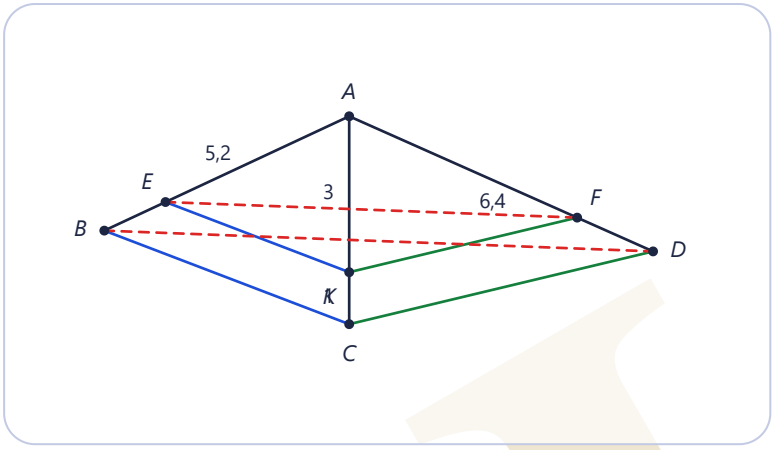
`5/4 / 5/2` → Tu as divisé l'aire de DEF. Mais c'est ABC le grand triangle : DEF en est la réduction, donc l'aire de ABC est plus grande que 5 cm².

EXERCICE 8 · RAISONNEMENT

Deux parallèles en appellent une troisième

On donne $AK = 3$ cm, $KC = 1$ cm, $AB = 5{,}2$ cm et $AD = 6{,}4$ cm. Sur la figure, $ABCD$ est un quadrilatère et K un point de sa diagonale $[AC]$. La parallèle à (BC) passant par K coupe $[AB]$ en E ; la parallèle à (DC) passant par K coupe $[AD]$ en F.

Les droites (EF) et (BD) sont-elles parallèles ?



Un quadrilatère ABCD : A en haut, B à gauche, C en bas, D à droite. La diagonale [AC] est verticale ; le point K y est placé avec AK = 3 cm et KC = 1 cm. On lit aussi AB = 5,2 cm et AD = 6,4 cm. Le point E est sur le côté [AB] et le point F sur le côté [AD]. Le segment [KE], en bleu, est parallèle au côté [BC], en bleu lui aussi ; le segment [KF], en vert, est parallèle au côté [DC], en vert lui aussi. Enfin les segments [EF] et [BD] sont tracés en pointillés rouges : ce sont les deux droites dont on se demande si elles sont parallèles.

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles sont parallèles · oui, elles sont parallèles · oui elles sont parallèle · oui, elles sont parallèle · elles sont parallèles · elles sont parallèle · sont parallèles · parallèles · parallèle · oui parallèles · oui, parallèles · oui parallèle · oui, parallèle · les droites sont parallèles · oui les droites sont parallèles · oui, les droites sont parallèles · oui les deux droites sont parallèles · oui, les deux droites sont parallèles · (EF) et (BD) sont parallèles · oui (EF) et (BD) sont parallèles · oui, (EF) et (BD) sont parallèles · les droites (EF) et (BD) sont parallèles · oui, les droites (EF) et (BD) sont parallèles · EF et BD sont parallèles · oui, EF et BD sont parallèles · (EF)//(BD) · (BD)//(EF) · oui (EF)//(BD) · oui, (EF)//(BD) · (EF)∥(BD) · oui, (EF)∥(BD) · oui car les rapports sont égaux · oui, car les rapports sont égaux · oui, les rapports sont égaux · ouii · ouais · yes · ey · eyh · ih · iyeh · oui (BD)//(EF) · oui, (BD)//(EF) · (EF) est parallèle à (BD) · oui (EF) est parallèle à (BD) · oui, (EF) est parallèle à (BD) · (BD) est parallèle à (EF) · oui, (BD) est parallèle à (EF) · oui sont parallèles · oui, sont parallèles · ils sont parallèles · oui ils sont parallèles · oui, ils sont parallèles · les deux droites sont parallèles · oui elles le sont · oui, elles le sont · (BD) et (EF) sont parallèles · oui (BD) et (EF) sont parallèles · oui, (BD) et (EF) sont parallèles · oui les droites (EF) et (BD) sont parallèles · oui EF et BD sont parallèles · oui (BD) est parallèle à (EF) · EF est parallèle à BD · oui EF est parallèle à BD · oui, EF est parallèle à BD · oui (EF)∥(BD) · (BD)∥(EF) · oui (BD)∥(EF) · oui, (BD)∥(EF)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le triangle ABC : $E \in [AB]$, $K \in [AC]$, et (KE) est parallèle à (BC). Que donne le théorème de Thalès pour le rapport $\dfrac{AE}{AB}$?
2. Avec $AC = AK + KC = 4$ cm, Thalès dans ABC donne le premier rapport. Fais de même dans le triangle ADC pour $\dfrac{AF}{AD}$.
   $$\frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{3}{4}$$
3. Les rapports $\dfrac{AE}{AB}$ et $\dfrac{AF}{AD}$ valent tous les deux $\dfrac{3}{4}$, et E, F sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$. Quel théorème part de rapports égaux pour conclure sur deux droites ?

CORRECTION

Dans le triangle ABC — $E \in [AB]$, $K \in [AC]$ et (KE) est parallèle à (BC). Avec $AC = 3 + 1 = 4$ cm, le théorème de Thalès donne :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{3}{4} \quad \text{donc} \quad AE = \frac{3}{4} \times 5{,}2 = 3{,}9 \text{ cm}$$

Dans le triangle ADC — $F \in [AD]$, $K \in [AC]$ et (KF) est parallèle à (DC). Le théorème de Thalès donne de même :

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} = \frac{3}{4} \quad \text{donc} \quad AF = \frac{3}{4} \times 6{,}4 = 4{,}8 \text{ cm}$$

La réciproque — Dans le triangle ABD, les deux rapports sont égaux, $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{3}{4}$, et les points sont dans le même ordre : $E \in [AB]$ et $F \in [AD]$. D'après la réciproque du théorème de Thalès :

(EF) et (BD) sont parallèles

Oui, (EF) et (BD) sont parallèles. Le théorème de Thalès, deux fois, donne deux rapports égaux au même $\frac{AK}{AC}$; la réciproque, elle, conclut au parallélisme. Les longueurs $AE = 3{,}9$ cm et $AF = 4{,}8$ cm ne servent qu'à le vérifier : l'égalité $\frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{AF}{AD}$ suffisait.

PIÈGES ANTICIPÉS

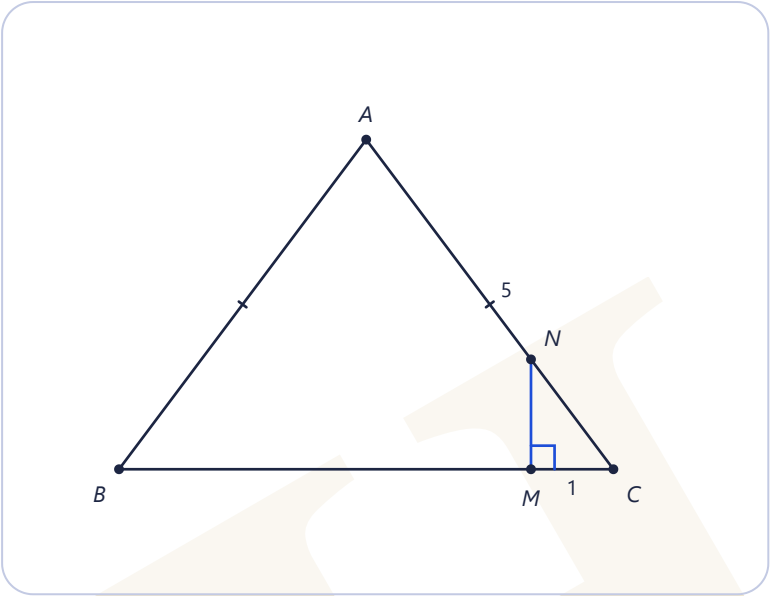
non / non elles ne sont pas parallèles / non, elles ne sont pas parallèles / elles ne sont pas parallèles / ne sont pas parallèles / pas parallèles / pas parallèle / non parallèles / non parallèle / non pas parallèles / non, pas parallèles / les droites ne sont pas parallèles / non, les droites ne sont pas parallèles / (EF) et (BD) ne sont pas parallèles / non, (EF) et (BD) ne sont pas parallèles / sécantes / elles sont sécantes / non, elles sont sécantes / no / nn / la / lé / la mouch parallèles / la, mouch parallèles → Regarde bien ce que tu compares. Que AE et AF soient différents ne prouve rien, et des rapports croisés non plus. La réciproque compare, sur chaque sécante, la longueur depuis A au côté entier : calcule $\frac{AE}{AB}$ dans le triangle ABC et $\frac{AF}{AD}$ dans le triangle ADC, avec le théorème de Thalès.

EXERCICE 9 · DEFI

La parallèle qu'il faut tracer

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm. Soit M le point de $[BC]$ tel que $CM = 1$ cm. La perpendiculaire à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.

Calculer le périmètre du triangle CMN.



Un triangle ABC isocèle en A, A en haut, la base [BC] horizontale en bas : les côtés [AB] et [AC] portent la même marque d'égalité, AC = 5 cm et BC = 6 cm. Le point M est sur [BC], à 1 cm de C. La perpendiculaire à (BC) en M, tracée en bleu avec son angle droit, monte jusqu'au point N du côté [AC]. Le petit triangle CMN est dans le coin C.

Donner ce périmètre en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il manque une droite parallèle à (MN). Trace la hauteur issue de A : dans un triangle isocèle en A, elle tombe au milieu H de $[BC]$.
2. (AH) et (MN) sont toutes les deux perpendiculaires à (BC), donc parallèles. Calcule d'abord AH avec le théorème de Pythagore dans le triangle AHC, où $HC = 3$ cm.
3. Thalès dans le triangle AHC, avec $\dfrac{CM}{CH} = \dfrac{1}{3}$:
$$\frac{CM}{CH} = \frac{CN}{CA} = \frac{MN}{HA}$$

CORRECTION

La hauteur — Soit H le milieu de $[BC]$. Le triangle ABC est isocèle en A, donc (AH) est perpendiculaire à (BC), et $HC = 3$ cm. Le théorème de Pythagore dans le triangle AHC, rectangle en H, donne :

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 = 25 - 9 = 16 \quad \text{donc} \quad AH = 4 \text{ cm}$$

Deux perpendiculaires — (MN) et (AH) sont perpendiculaires à la même droite (BC) : elles sont parallèles. Dans le triangle AHC, on a $M \in [CH]$ et $N \in [CA]$, et le théorème de Thalès donne :

$$\frac{CM}{CH} = \frac{CN}{CA} = \frac{MN}{HA} = \frac{1}{3}$$

On en tire les deux côtés qui manquent.

$$CN = \frac{5}{3} \text{ cm} \quad ; \quad MN = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

Le périmètre —

$$CM + MN + NC = 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 4 \text{ cm}$$

Le triangle CMN est une réduction du triangle CHA de rapport $\frac{1}{3}$: son périmètre est le tiers de celui de CHA, qui mesure $3+4+5=12$ cm, soit $\frac{12}{3}=4$ cm. Deux chemins, le même résultat.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/2 / 8/3 → Tu as pris le rapport $\frac{CM}{CB}=\frac{1}{6}$. Mais la droite parallèle à (MN) est la hauteur (AH) : le triangle de Thalès est AHC, et le côté qui correspond à CM est $CH=3$ cm, pas CB.

2/3 → Tu as calculé l'aire du triangle CMN, $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{4}{3}$. On demande son périmètre : la somme de ses trois côtés.

3 → Tu as additionné CN et MN seulement. Le périmètre compte les trois côtés : il manque $CM=1$ cm.

EXERCICE 10 · BASE

Deux milieux, un segment

ABC est un triangle tel que $BC=7{,}4$ cm. Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Calculer IJ.

Donner IJ en cm.

Réponse attendue : `37/10` — aussi acceptées : 3.7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. I et J sont les milieux de deux côtés du triangle ABC. Que dit la droite des milieux du segment $[IJ]$?
2. Le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.

$$IJ=\frac{BC}{2}$$

CORRECTION

Droite des milieux — Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$: (IJ) est parallèle à (BC) et $[IJ]$ mesure la moitié de $[BC]$.

$$IJ=\frac{BC}{2}$$

$$IJ=\frac{7{,}4}{2}=3{,}7\text{ cm}$$

Deux milieux de côtés : le segment qui les joint est parallèle au troisième côté et mesure sa moitié.

PIÈGES ANTICIPÉS

74/5 → Tu as doublé BC. C'est l'inverse : $[IJ]$ est le **petit** segment, il mesure la moitié de BC.

EXERCICE 11 · BASE

Retrouver le troisième côté

Dans un triangle ABC, I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. On mesure $IJ=4{,}5$ cm.

Calculer BC.

Donner BC en cm.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle relation la droite des milieux donne-t-elle entre IJ et BC ?
2. IJ est la moitié de BC : donc BC est le double de IJ.
   $BC = 2 \times IJ$

CORRECTION

Droite des milieux — I et J sont les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$, donc $IJ = \dfrac{BC}{2}$.

On en déduit BC en multipliant par 2.

$BC = 2 \times 4{,}5 = 9 \text{ cm}$

La relation $IJ = \dfrac{BC}{2}$ se lit dans les deux sens : connaissant IJ, on retrouve $BC = 2\,IJ$.

PIÈGES ANTICIPÉS

9/4 → Tu as encore divisé par 2. Ici on connaît le petit segment IJ : le côté BC est deux fois plus long.

EXERCICE 12 · BASE **Le triangle des milieux**

ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm et $AC = 8$ cm. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

Calculer le périmètre du triangle IJK.

Donner ce périmètre en cm.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque côté du triangle IJK joint les milieux de deux côtés de ABC : il mesure la moitié du troisième côté.
2. $IJ = \dfrac{AC}{2}$, $JK = \dfrac{AB}{2}$ et $KI = \dfrac{BC}{2}$. Additionne.

CORRECTION

Les trois côtés — D'après la droite des milieux, chaque côté de IJK mesure la moitié du côté de ABC qui lui est parallèle.

$IJ = \dfrac{8}{2} = 4 \quad ; \quad JK = \dfrac{6}{2} = 3 \quad ; \quad KI = \dfrac{10}{2} = 5$

Le périmètre —

$IJ + JK + KI = 4 + 3 + 5 = 12 \text{ cm}$

Le périmètre du triangle des milieux est la moitié de celui de ABC : $\dfrac{24}{2} = 12$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

24 → 24 cm, c'est le périmètre de ABC. Les côtés de IJK sont deux fois plus courts.

EXERCICE 13 · BASE

Un milieu et une parallèle

Dans un triangle ABC, I est le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$ en J. On donne $AC = 9$ cm.

Calculer AJ.

Donner AJ en cm.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le deuxième énoncé de la droite des milieux : une droite qui passe par le milieu d'un côté, parallèle à un deuxième côté… où coupe-t-elle le troisième ?
2. J est le milieu de $[AC]$.

CORRECTION

Placer un milieu — Dans le triangle ABC, la droite (IJ) passe par le milieu I de $[AB]$ et elle est parallèle à (BC) : elle coupe $[AC]$ en son milieu. Donc J est le milieu de $[AC]$.

$$AJ = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ cm}$$

Un milieu et une parallèle donnent un deuxième milieu : c'est le second énoncé de la droite des milieux.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → 9 cm, c'est le côté AC entier. J est sur $[AC]$, en son milieu : AJ en est la moitié.

EXERCICE 14 · BASE

Le centre du parallélogramme

$EFGH$ est un parallélogramme de centre K tel que $EH = 7$ cm. Le point M est le milieu du côté $[EF]$.

Calculer KM.

Donner KM en cm.

Réponse attendue : 7/2 — aussi acceptées : 3.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre K d'un parallélogramme est le milieu de ses diagonales. Dans le triangle EFH, que représentent M et K ?
2. M est le milieu de $[EF]$ et K celui de $[FH]$: le segment $[KM]$ joint deux milieux de côtés du triangle EFH.

$$KM = \frac{EH}{2}$$

CORRECTION

Deux milieux — Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : K est le milieu de $[FH]$. Dans le triangle EFH, M et K sont donc les milieux de $[EF]$ et de $[FH]$.

Droite des milieux — Le segment $[KM]$ est parallèle à $[EH]$ et mesure sa moitié.

$$KM = \frac{EH}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

Dans un parallélogramme, le centre est un milieu, celui de chaque diagonale : la droite des milieux s'applique dans les triangles formés par une diagonale.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → $[KM]$ joint deux milieux du triangle EFH : il mesure la **moitié** de EH, pas EH.

EXERCICE 15 · PRATIQUE **Le trapèze sous les milieux**

ABC est un triangle tel que $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 10$ cm. Les points I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$.

Calculer le périmètre du quadrilatère $BCJI$.

Donner ce périmètre en cm.

Réponse attendue : 22

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les côtés $[BI]$ et $[JC]$ sont des moitiés de côtés de ABC. Et $[IJ]$?
2. $IJ = \frac{BC}{2}$ d'après la droite des milieux. Le quatrième côté, $[BC]$, est entier.

CORRECTION

Les moitiés —

$$BI = \frac{8}{2} = 4 \quad ; \quad JC = \frac{6}{2} = 3$$

Droite des milieux — I et J sont les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$, donc $IJ = \frac{BC}{2}$.

$$IJ = \frac{10}{2} = 5$$

Le périmètre —

$$BI + IJ + JC + CB = 4 + 5 + 3 + 10 = 22 \text{ cm}$$

(IJ) est parallèle à (BC) : $BCJI$ est un trapèze, dont la petite base IJ est la moitié de la grande base BC.

PIÈGES ANTICIPÉS

27 → Tu as pris $IJ = 10$ cm, comme BC. Le segment qui joint deux milieux mesure la **moitié** du troisième côté.

24 → 24 cm, c'est le périmètre du triangle ABC. On demande celui du quadrilatère $BCJI$.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Les milieux d'un quadrilatère

$EFGH$ est un quadrilatère dont les diagonales mesurent $EG = 9$ cm et $FH = 5$ cm. Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs de $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$.

Calculer le périmètre du quadrilatère $MNPQ$.

Donner ce périmètre en cm.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Coupe le quadrilatère par une diagonale. Dans le triangle EFG, que vaut MN ? Dans le triangle EGH, que vaut PQ ?
2. MN et PQ sont des moitiés de EG ; NP et QM sont des moitiés de FH.

CORRECTION

Avec la diagonale [EG] — Dans le triangle EFG, M et N sont des milieux de côtés ; de même P et Q dans le triangle EGH.

$$MN = PQ = \frac{EG}{2} = 4{,}5$$

Avec la diagonale [FH] — Dans les triangles FGH et EFH :

$$NP = QM = \frac{FH}{2} = 2{,}5$$

Le périmètre —

$$MN + NP + PQ + QM = 4{,}5 + 2{,}5 + 4{,}5 + 2{,}5 = 14 \text{ cm}$$

Le périmètre de $MNPQ$ est égal à $EG + FH$: la somme des diagonales. Et $MNPQ$ est toujours un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

28 → Tu as pris les diagonales entières. Chaque côté de $MNPQ$ joint deux milieux : il mesure la **moitié** d'une diagonale.

7 → $4{,}5 + 2{,}5 = 7$: tu n'as compté que deux côtés. $MNPQ$ en a quatre.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Deux parallèles, deux milieux

ABC est un triangle tel que $AB = 7$ cm et $BC = 12$ cm. I est le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$ en J, puis la parallèle à (AB) passant par J coupe $[BC]$ en K.

Calculer BK.

Donner BK en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le point J : la droite (IJ) passe par un milieu et elle est parallèle à un côté.
2. J est le milieu de $[AC]$. Dans le même triangle ABC, la droite (JK) passe par ce milieu et elle est parallèle à (AB) : où coupe-t-elle $[BC]$?

CORRECTION

Le point J — Dans le triangle ABC, (IJ) passe par le milieu I de $[AB]$ et est parallèle à (BC) : J est le milieu de $[AC]$.

Le point K — (JK) passe par le milieu J de $[AC]$ et est parallèle à (AB) : elle coupe $[BC]$ en son milieu. K est le milieu de $[BC]$.

$$BK = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

Le second énoncé de la droite des milieux, appliqué deux fois de suite, fabrique des milieux en chaîne.

PIÈGES ANTICIPÉS

7/2 → $\frac{7}{2}$, c'est la moitié de AB, la longueur JK. K est sur $[BC]$: BK est la moitié de BC.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

Un petit triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.

Calculer l'aire du triangle BIJ.

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle ABC, I et J sont des milieux : que sais-tu de la droite (IJ) et de la longueur IJ ?
2. (IJ) est parallèle à (AC), et (AC) est perpendiculaire à (AB). Le triangle BIJ est donc rectangle en I.
3. Il reste les deux côtés de l'angle droit : BI et IJ.

CORRECTION

Droite des milieux — I et J sont les milieux de $[AB]$ et de $[BC]$: (IJ) est parallèle à (AC) et $IJ = \frac{AC}{2} = 4$ cm.

Un angle droit — (AC) est perpendiculaire à (AB) et (IJ) est parallèle à (AC), donc (IJ) est perpendiculaire à (AB) : le triangle BIJ est rectangle en I, avec $BI = 3$ cm.

L'aire —

$$\text{aire}(BIJ) = \frac{BI \times IJ}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

La droite des milieux donne à la fois une longueur et un parallélisme ; ici, le parallélisme transporte l'angle droit.

PIÈGES ANTICIPÉS

24 → 24 cm², c'est l'aire de ABC. Le triangle BIJ a des côtés deux fois plus petits.

12 → Tu as oublié de diviser par 2 : l'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Le triangle du coin

ABC est un triangle tel que $AB = 7$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 10$ cm. M est le milieu de $[BC]$, et la parallèle à (AB) passant par M coupe $[AC]$ en N.

Calculer le périmètre du triangle MNC.

Donner ce périmètre en cm.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite (MN) passe par le milieu de $[BC]$ et elle est parallèle à (AB) : où coupe-t-elle $[AC]$?
2. N est le milieu de $[AC]$. Les trois côtés de MNC sont alors des moitiés de côtés de ABC.

CORRECTION

Le point N — Dans le triangle ABC, (MN) passe par le milieu M de $[BC]$ et est parallèle à (AB) : N est le milieu de $[AC]$.

Les trois côtés —

$$MN = \frac{AB}{2} = 3{,}5 \quad ; \quad NC = \frac{AC}{2} = 4{,}5 \quad ; \quad CM = \frac{BC}{2} = 5$$

Le périmètre —

$$MN + NC + CM = 3{,}5 + 4{,}5 + 5 = 13 \text{ cm}$$

Une fois N reconnu comme milieu, le triangle MNC a des côtés deux fois plus petits que ABC : son périmètre est la moitié de 26 cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

26 → 26 cm, c'est le périmètre de ABC. Les côtés de MNC sont deux fois plus courts.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

La ligne du milieu d'un trapèze

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, avec $AB = 9$ cm et $CD = 5$ cm. I est le milieu de $[AD]$. La parallèle à (AB) passant par I coupe la diagonale $[AC]$ en K et le côté $[BC]$ en J.

Calculer IJ.

Donner IJ en cm.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Coupe le trapèze par la diagonale $[AC]$. Dans le triangle ACD, la droite (IK) passe par un milieu et elle est parallèle à (DC).
2. K est le milieu de $[AC]$ et $IK = \dfrac{DC}{2}$. Fais le même raisonnement dans le triangle ABC pour KJ.
3. $IJ = IK + KJ$.

CORRECTION

Dans le triangle ACD — (IK) passe par le milieu I de $[AD]$ et est parallèle à (DC) (puisque (DC) est parallèle à (AB)) : K est le milieu de $[AC]$, et IK est la moitié de DC.

$$IK = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Dans le triangle ABC — (KJ) passe par le milieu K de $[AC]$ et est parallèle à (AB) : J est le milieu de $[BC]$, et KJ est la moitié de AB.

$$KJ = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

La somme —

$$IJ = IK + KJ = 2{,}5 + 4{,}5 = 7 \text{ cm}$$

Le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze mesure la demi-somme des bases : $\dfrac{9+5}{2} = 7$ cm. La diagonale ramène tout à deux triangles.

PIÈGES ANTICIPÉS

14 → Tu as additionné les bases sans diviser. IK et KJ sont chacun la **moitié** d'une base.

2 → Tu as soustrait IK de KJ. Le point K est **entre** I et J : $IJ = IK + KJ$.

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

Une diagonale en trois

$EFGH$ est un parallélogramme. K est le milieu de $[EF]$ et L le milieu de $[GH]$. La diagonale $[EG]$ coupe $[HK]$ en R et $[FL]$ en S. On admet que les droites (HK) et (FL) sont parallèles. On mesure $ES = 9$ cm.

Calculer EG.

Donner EG en cm.

Réponse attendue : 27/2 — aussi acceptées : 13.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle EFS, K est le milieu de $[EF]$ et (KR) est parallèle à (FS) : que peux-tu dire de R ?
2. R est le milieu de $[ES]$. De même, dans le triangle GHR, S est le milieu de $[GR]$.
3. Les trois segments $[ER]$, $[RS]$ et $[SG]$ ont la même longueur : combien d'entre eux forment $[ES]$?

CORRECTION

Dans le triangle EFS — (KR) passe par le milieu K de $[EF]$ et est parallèle à (FS) : R est le milieu de $[ES]$, donc $ER = RS$.

Dans le triangle GHR — (LS) passe par le milieu L de $[GH]$ et est parallèle à (HR) : S est le milieu de $[GR]$, donc $RS = SG$.

Trois parts égales — $ER = RS = SG$: $[ES]$ compte deux de ces parts, et $[EG]$ en compte trois.

$$RS = \frac{ES}{2} = 4{,}5 \quad \text{donc} \quad EG = 3 \times 4{,}5 = 13{,}5 \text{ cm}$$

Les droites (HK) et (FL) partagent la diagonale $[EG]$ en trois segments égaux. Il fallait choisir les bons triangles : EFS et GHR.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → 18 cm, ce serait le cas si S était le milieu de $[EG]$. Les points R et S partagent $[EG]$ en **trois** segments égaux, et $[ES]$ en contient deux.

6 → 6 cm, ce sont les deux tiers de ES. C'est l'inverse : ES représente les deux tiers de EG, donc EG est plus long que ES.

EXERCICE 22 · RAISONNEMENT

Quatre triangles pareils

ABC est un triangle d'aire 36 cm². Les points I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

Calculer l'aire du triangle IJK.

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les trois côtés de IJK mesurent la moitié des côtés de ABC. Regarde les trois triangles des coins : AIK, IBJ et KJC.
2. Chacun des quatre petits triangles a ses côtés égaux à $\frac{AB}{2}$, $\frac{BC}{2}$ et $\frac{CA}{2}$: ils sont superposables.

CORRECTION

Les côtés — D'après la droite des milieux, $IJ = \frac{AC}{2}$, $JK = \frac{AB}{2}$ et $KI = \frac{BC}{2}$. Les triangles des coins ont aussi pour côtés des moitiés de AB, BC et CA.

Quatre triangles égaux — Les quatre triangles AIK, IBJ, KJC et IJK ont les mêmes côtés : ils sont superposables, donc de même aire, et ils recouvrent ABC.

$$\text{aire}(IJK) = \frac{36}{4} = 9 \text{ cm}^2$$

Les milieux découpent un triangle en quatre triangles superposables : chacun a le quart de l'aire. Longueurs divisées par 2, aire divisée par 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → Les côtés sont divisés par 2, mais pas l'aire : le triangle ABC se découpe en **quatre** triangles comme IJK.

12 → Tu as compté trois triangles. Avec IJK au centre et les trois triangles des coins, il y en a **quatre**.

EXERCICE 23 · RAISONNEMENT

Un milieu de milieu

ABC est un triangle tel que $BC = 12$ cm. I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AI]$. Les parallèles à (BC) passant par I et par J coupent $[AC]$ respectivement en L et en K.

Calculer JK.

Donner JK en cm.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le grand triangle ABC : que représente L, et que vaut IL ?
2. $IL = 6$ cm. Regarde ensuite le triangle AIL : J est le milieu de $[AI]$, et (JK) est parallèle à (IL).

CORRECTION

Dans le triangle ABC — (IL) passe par le milieu I de $[AB]$ et est parallèle à (BC) : L est le milieu de $[AC]$ et $IL = \dfrac{BC}{2}$.

$$IL = \frac{12}{2} = 6$$

Dans le triangle AIL — (JK) et (IL) sont parallèles à (BC), donc parallèles entre elles. (JK) passe par le milieu J de $[AI]$: K est le milieu de $[AL]$, et $JK = \dfrac{IL}{2}$.

$$JK = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

Deux fois la droite des milieux, dans deux triangles emboîtés : JK est le quart de BC.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 cm, c'est IL. J n'est pas le milieu de $[AB]$ mais celui de $[AI]$: il faut appliquer la droite des milieux une deuxième fois, dans le triangle AIL.

4 → Tu as divisé par 3. AJ est la moitié de la moitié de AB, soit le **quart** : JK est le quart de BC.

EXERCICE 24 · DEFI

Des carrés dans le carré

$KLMN$ est un carré de côté 6 cm. P, Q, R et S sont les milieux respectifs de $[KL]$, $[LM]$, $[MN]$ et $[NK]$: on admet que $PQRS$ est un carré. Puis T, U, V et W sont les milieux respectifs de $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$ et $[SP]$: $TUVW$ est encore un carré.

Calculer le périmètre du carré $TUVW$.

Donner ce périmètre en cm.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un côté de $TUVW$ joint les milieux de deux côtés consécutifs de $PQRS$: dans le triangle formé avec une diagonale de $PQRS$, il mesure la moitié de cette diagonale.
2. La diagonale $[QS]$ de $PQRS$ joint les milieux de $[LM]$ et de $[NK]$: elle mesure autant que le côté du grand carré.
3. Le côté de $TUVW$ est donc la moitié de QS. Il reste à compter ses quatre côtés.

CORRECTION

La diagonale de PQRS — Q et S sont les milieux des côtés opposés $[LM]$ et $[NK]$ du carré : $KLQS$ est un rectangle et $QS = KL$.

$$QS = 6 \text{ cm}$$

Le côté de TUVW — Un côté de $TUVW$, par exemple $[TU]$, joint les milieux de $[PQ]$ et de $[QR]$; dans le triangle PQR, il mesure la moitié de PR. Les deux diagonales du carré $PQRS$ sont égales, $PR = QS$.

$$TU = \frac{PR}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

Le périmètre —

$$\text{périmètre}(TUVW) = 4 \times 3 = 12 \text{ cm}$$

Deux étapes de milieux divisent le côté par 2 : le côté de $TUVW$ est la moitié de celui de $KLMN$, et son périmètre aussi, $\frac{24}{2} = 12$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 cm, c'est le **côté** de $TUVW$. On demande son périmètre : la somme de ses quatre côtés.

`12*sqrt(2)` → $12\sqrt{2}$ cm, c'est le périmètre de $PQRS$, le premier carré des milieux. $TUVW$ est le suivant.

`24` → 24 cm, c'est le périmètre du grand carré $KLMN$. Le carré $TUVW$ est deux fois plus petit.

EXERCICE 25 · DEFI

Des diagonales perpendiculaires

$ABCD$ est un quadrilatère dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires, avec $AC = 10$ cm et $BD = 6$ cm. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Calculer l'aire du quadrilatère $IJKL$.

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec la droite des milieux : (IJ) et (LK) sont parallèles à (AC), (JK) et (IL) parallèles à (BD). Quelle est la nature de $IJKL$?
2. (AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc deux côtés consécutifs de $IJKL$ aussi : c'est un rectangle.

3. Ses côtés mesurent la moitié de AC et la moitié de BD.

CORRECTION

Les côtés — Dans les triangles ABC et ACD : (IJ) et (LK) sont parallèles à (AC), et $IJ = LK = \dfrac{AC}{2} = 5$ cm. Dans les triangles BCD et ABD : (JK) et (IL) sont parallèles à (BD), et $JK = IL = \dfrac{BD}{2} = 3$ cm.

Un rectangle — $IJKL$ a ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme. (IJ) est parallèle à (AC), (JK) à (BD), et $(AC) \perp (BD)$: l'angle $\widehat{IJK}$ est droit. $IJKL$ est un rectangle.

L'aire —

$\text{aire}(IJKL) = IJ \times JK = 5 \times 3 = 15 \text{ cm}^2$

Le quadrilatère des milieux a des côtés parallèles aux diagonales et deux fois plus courts : son aire est ici la moitié de celle de $ABCD$, qui vaut $\dfrac{10 \times 6}{2} = 30$ cm².

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → 30 cm², c'est l'aire de $ABCD$ (diagonales perpendiculaires : $\dfrac{10 \times 6}{2}$). On demande l'aire du quadrilatère des milieux, dont les côtés valent 5 et 3 cm.

`60` → Tu as multiplié les diagonales entières. Les côtés de $IJKL$ en sont les **moitiés** : 5 cm et 3 cm.

EXERCICE 26 · BASE

Les deux rapports qui partent de A

Dans un triangle ABC, M est un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$ tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $AM = 3$ cm, $AB = 5$ cm et $AC = 7$ cm.

Calculer AN.

Donner AN en cm.

Réponse attendue : `21/5` — aussi acceptées : 4.2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles : écris les trois rapports égaux du théorème de Thalès.
2. Garde les deux rapports qui contiennent AN et des longueurs connues.
   $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$
3. Remplace : $\dfrac{3}{5} = \dfrac{AN}{7}$, puis isole AN.

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle ABC, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et (MN) est parallèle à (BC). Le théorème de Thalès donne :

$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

On garde les deux premiers rapports.

$$\frac{3}{5} = \frac{AN}{7}$$

$$AN = \frac{3 \times 7}{5} = \frac{21}{5} = 4{,}2 \text{ cm}$$

On écrit les trois rapports, on garde les deux utiles, on fait les produits en croix.

PIÈGES ANTICIPÉS

35/3 → Tu as retourné un des deux rapports. Garde le même triangle au numérateur des deux côtés de l'égalité, celui qui contient l'inconnue et celui qui ne la contient pas. Ici AN ne peut pas dépasser $AC = 7$ cm.

14/5 → Tu as calculé $NC = AC - AN$. On demande AN, la longueur qui part de A.

EXERCICE 27 · BASE

Le côté parallèle

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $AM = 4$ cm, $AB = 6$ cm et $BC = 9$ cm.

Calculer MN.

Donner MN en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le troisième rapport de Thalès compare les deux côtés parallèles, MN et BC.
2. Garde le rapport qui contient MN et celui dont tu connais les deux longueurs.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

CORRECTION

Thalès — $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et (MN) est parallèle à (BC) :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{4}{6} = \frac{MN}{9}$$

$$MN = \frac{4 \times 9}{6} = 6 \text{ cm}$$

Le troisième rapport, $\frac{MN}{BC}$, sert dès qu'on cherche un côté parallèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

27/2 → Tu as retourné un des deux rapports. Garde le même triangle au numérateur des deux côtés de l'égalité, celui qui contient l'inconnue et celui qui ne la contient pas. Ici MN est plus court que BC, puisque le triangle AMN est une réduction de ABC.

EXERCICE 28 · BASE

Remonter au grand côté

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $AN = 2$ cm, $AC = 8$ cm et $MN = 1{,}5$ cm.

Calculer BC.

Donner BC en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quels sont les deux rapports qui contiennent BC et des longueurs connues ?
2. Écris l'égalité puis fais les produits en croix.
$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

CORRECTION

Thalès —
$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{2}{8} = \frac{1{,}5}{BC}$$
Les produits en croix donnent $2 \times BC = 8 \times 1{,}5 = 12$.
$$BC = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$
Quand l'inconnue est au dénominateur, les produits en croix la remontent.

PIÈGES ANTICIPÉS

3/8 → Tu as retourné un des deux rapports. Garde le même triangle au numérateur des deux côtés de l'égalité, celui qui contient l'inconnue et celui qui ne la contient pas. Ici BC doit être plus long que $MN = 1{,}5$ cm.

12 → Tu t'es arrêté à $8 \times 1{,}5 = 12$. C'est $2 \times BC$ qui vaut 12 : il reste à diviser par 2.

EXERCICE 29 · BASE **Le triangle agrandi**

Les points A, B, M sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, C, N. Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. On donne $AB = 4$ cm, $AM = 10$ cm et $AC = 6$ cm.

Calculer AN.

Donner AN en cm.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ici $B \in [AM]$ et $C \in [AN]$: c'est la deuxième figure de Thalès, le triangle AMN agrandit ABC. Les rapports s'écrivent de la même façon.
2. Les longueurs se lisent depuis A.
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

CORRECTION

Thalès — $B \in [AM]$, $C \in [AN]$ et (BC) est parallèle à (MN) : le théorème de Thalès s'applique encore.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{10}{4} = \frac{AN}{6}$$

$$AN = \frac{10 \times 6}{4} = 15 \text{ cm}$$

Que le petit triangle soit dedans ou que le grand soit dehors, les rapports se lisent toujours à partir du sommet commun A.

PIÈGES ANTICIPÉS

12/5 → Tu as retourné un des deux rapports. Garde le même triangle au numérateur des deux côtés de l'égalité, celui qui contient l'inconnue et celui qui ne la contient pas. Ici C est entre A et N, donc AN dépasse $AC = 6$ cm.

EXERCICE 30 · BASE

Le papillon

Les droites (BM) et (CN) se coupent en A, avec $A \in [BM]$ et $A \in [CN]$. Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. On donne $AB = 6$ cm, $AM = 3$ cm et $AC = 8$ cm.

Calculer AN.

Donner AN en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C'est la figure en papillon : les deux triangles sont opposés par le sommet A. Le théorème de Thalès s'applique toujours.
2. Lis les longueurs à partir de A sur chaque droite.
   $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

CORRECTION

Thalès en papillon — $A \in [BM]$, $A \in [CN]$ et (MN) est parallèle à (BC) :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{3}{6} = \frac{AN}{8}$$

$$AN = \frac{3 \times 8}{6} = 4 \text{ cm}$$

Dans le papillon, les longueurs se mesurent depuis le point de croisement A, de part et d'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

16 → Tu as retourné un des deux rapports. Garde le même triangle au numérateur des deux côtés de l'égalité, celui qui contient l'inconnue et celui qui ne la contient pas. Le triangle AMN est le plus petit des deux : AN est plus court que AC.

EXERCICE 31 · PRATIQUE

Le morceau ou le côté ?

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, N, C. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $AM = 2{,}5$ cm, $MB = 3{,}5$ cm et $AC = 9$ cm.

Calculer AN.

Donner AN en cm.

Réponse attendue : 15/4 — aussi acceptées : 3.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans les rapports de Thalès, on compare AM au côté **entier** AB. Calcule-le d'abord.
2. $AB = AM + MB$. Puis $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

CORRECTION

Le côté entier —

$$AB = AM + MB = 2{,}5 + 3{,}5 = 6 \text{ cm}$$

Thalès —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{2{,}5}{6} = \frac{AN}{9}$$

$$AN = \frac{2{,}5 \times 9}{6} = 3{,}75 \text{ cm}$$

Avant tout calcul, vérifie que chaque rapport compare une longueur au côté entier qui part de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

45/7 → Tu as mis MB au dénominateur. Thalès compare AM au côté **entier** $AB = AM + MB = 6$ cm.

21/4 → Tu as calculé NC, l'autre morceau de $[AC]$. On demande AN.

EXERCICE 32 · PRATIQUE

Le morceau qui manque

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, N, C. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $AM = 4$ cm, $AN = 5$ cm et $NC = 2{,}5$ cm.

Calculer MB.

Donner MB en cm.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par $AC = AN + NC$, puis cherche AB avec le théorème de Thalès.
2. $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ donne AB ; il reste $MB = AB - AM$.

CORRECTION

Le côté entier —

$AC = AN + NC = 5 + 2{,}5 = 7{,}5 \text{ cm}$

Thalès —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{4}{AB} = \frac{5}{7{,}5}$$

Les produits en croix donnent $5 \times AB = 4 \times 7{,}5 = 30$, donc $AB = 6$ cm.

$MB = AB - AM = 6 - 4 = 2 \text{ cm}$

On passe par le côté entier AB, puis on retire AM. Vérification : $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{2}$ et $\frac{AN}{NC} = \frac{5}{2{,}5}$ valent tous deux 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 cm, c'est AB, le côté entier. On demande le morceau $MB = AB - AM$.

EXERCICE 33 · PRATIQUE

La poutre du toit

La charpente d'un abri a la forme d'un triangle ABC : A est le sommet du toit et $[BC]$ la poutre du bas, horizontale. Une seconde poutre $[MN]$, elle aussi horizontale, relie $M \in [AB]$ à $N \in [AC]$. On donne $AM = 1{,}2$ m, $AB = 3$ m et $BC = 5$ m.

Calculer la longueur MN de la seconde poutre.

Donner MN en mètres.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux poutres sont horizontales : les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
2. Thalès dans le triangle ABC, avec le rapport qui contient MN.
   $$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

CORRECTION

La configuration — Les poutres $[MN]$ et $[BC]$ sont horizontales, donc (MN) est parallèle à (BC), avec $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$.

Thalès —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{1{,}2}{3} = \frac{MN}{5}$$

$$MN = \frac{1{,}2 \times 5}{3} = 2 \text{ m}$$

Deux droites horizontales sont parallèles : c'est l'hypothèse de Thalès, cachée dans la situation.

PIÈGES ANTICIPÉS

25/2 → Une poutre de $12{,}5$ m, plus longue que celle du bas ! Tu as retourné un rapport : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, le petit triangle en haut des deux fractions.

EXERCICE 34 · PRATIQUE

Le papillon, côté parallèle

Les droites (BM) et (CN) se coupent en A, avec $A \in [BM]$ et $A \in [CN]$. Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. On donne $AB = 5$ cm, $AM = 2$ cm et $BC = 7{,}5$ cm.

Calculer MN.

Donner MN en cm.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Figure en papillon : les triangles ABC et AMN sont opposés par le sommet A.
2. Compare le côté parallèle MN à BC, avec le rapport des longueurs connues sur la droite (BM).

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

CORRECTION

Thalès en papillon —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{2}{5} = \frac{MN}{7{,}5}$$

$$MN = \frac{2 \times 7{,}5}{5} = 3 \text{ cm}$$

Le papillon donne les trois mêmes rapports que les autres figures : AMN est ici une réduction de ABC de rapport $\dfrac{2}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

75/4 → Tu as retourné un des deux rapports. Garde le même triangle au numérateur des deux côtés de l'égalité, celui qui contient l'inconnue et celui qui ne la contient pas.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

Le périmètre du trapèze

ABC est un triangle tel que $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 10$ cm. M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 2$ cm, et la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.

Calculer le périmètre du quadrilatère $BMNC$.

Donner ce périmètre en cm.

Réponse attendue : 23

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport de Thalès vaut $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$. Il donne AN et MN.
2. Puis $BM = AB - AM$ et $NC = AC - AN$. N'oublie pas le côté $[BC]$.

CORRECTION

Thalès — (MN) est parallèle à (BC), $M \in [AB]$, $N \in [AC]$:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{4}$$

On en tire les deux longueurs.

$$AN = \frac{6}{4} = 1{,}5 \quad ; \quad MN = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

Les morceaux —

$$BM = 8 - 2 = 6 \quad ; \quad NC = 6 - 1{,}5 = 4{,}5$$

Le périmètre —

$$BM + MN + NC + CB = 6 + 2{,}5 + 4{,}5 + 10 = 23 \text{ cm}$$

Un seul rapport, $\dfrac{1}{4}$, donne toutes les longueurs du petit triangle ; les morceaux s'obtiennent par différence.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 cm, c'est le périmètre du petit triangle AMN. On demande celui du quadrilatère $BMNC$.

24 → 24 cm, c'est le périmètre de ABC. Le quadrilatère $BMNC$ a pour côtés $[BM]$, $[MN]$, $[NC]$ et $[CB]$.

EXERCICE 36 · PRATIQUE

De l'autre côté de l'étang

Pour mesurer la distance entre deux arbres B et C situés de l'autre côté d'un étang, on plante deux piquets M et N de sorte que $A \in [BM]$, $A \in [CN]$ et que les droites (MN) et (BC) soient parallèles. On mesure $AM = 6$ m, $AB = 30$ m et $MN = 4$ m.

Calculer la distance BC.

Donner BC en mètres.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points B, A, M et C, A, N forment un papillon, avec (MN) parallèle à (BC).
2. Écris le rapport des longueurs connues sur (BM) et celui des côtés parallèles.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

CORRECTION

Thalès en papillon —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{6}{30} = \frac{4}{BC}$$

Les produits en croix donnent $6 \times BC = 30 \times 4 = 120$.

$$BC = \frac{120}{6} = 20 \text{ m}$$

On mesure une distance inaccessible avec des longueurs prises sur la rive : c'est l'usage le plus ancien du théorème.

PIÈGES ANTICIPÉS

4/5 → Des arbres à $0{,}8$ m l'un de l'autre, de l'autre côté de l'étang ? Tu as retourné un rapport : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$.

EXERCICE 37 · RAISONNEMENT

Deux parallèles à la suite

ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm et $BC = 10$ cm. M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 2$ cm. La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N, puis la parallèle à (AB) passant par N coupe $[BC]$ en P.

Calculer BP.

Donner BP en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde le quadrilatère $BMNP$: ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
2. $BMNP$ est un parallélogramme, donc $BP = MN$. Il reste à calculer MN avec le théorème de Thalès dans ABC.

CORRECTION

Un parallélogramme — (MN) est parallèle à (BP) et (NP) est parallèle à (MB) : $BMNP$ est un parallélogramme, donc $BP = MN$.

Thalès — Dans le triangle ABC, (MN) est parallèle à (BC) :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \quad \text{soit} \quad MN = \frac{2 \times 10}{5} = 4$$

$$BP = MN = 4 \text{ cm}$$

Deux parallèles fabriquent un parallélogramme, qui transporte une longueur. On pouvait aussi appliquer Thalès dans ABC avec (NP) parallèle à (AB) : $\frac{CP}{CB} = \frac{CN}{CA} = \frac{3}{5}$, donc $CP = 6$ et $BP = 4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 cm, c'est CP, l'autre morceau de $[BC]$. On demande $BP = BC - CP$.

EXERCICE 38 · RAISONNEMENT

Une équation dans la figure

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, N, C, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $MB = 3$ cm, $AN = 4$ cm et $NC = 6$ cm, et on note $x =$

AM, en cm.

Calculer x.

Donner x en cm.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime le côté entier AB en fonction de x, et calcule AC.
2. Thalès donne une équation en x.
   $$\frac{x}{x+3} = \frac{4}{10}$$
3. Produits en croix : $10x = 4(x+3)$.

CORRECTION

Les côtés entiers —

$AB = x + 3 \quad ; \quad AC = 4 + 6 = 10$

Thalès —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{x}{x+3} = \frac{4}{10}$$

L'équation —

$10x = 4x + 12 \quad \text{donc} \quad 6x = 12$

$x = 2 \text{ cm}$

Quand une longueur est inconnue, le théorème de Thalès devient une équation. Vérification : $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6/5 → Tu as écrit $\frac{x}{3} = \frac{4}{10}$: un morceau au dénominateur à gauche, un côté entier à droite. Compare AM au côté entier $AB = x + 3$.

EXERCICE 39 · RAISONNEMENT

Les diagonales du trapèze

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, avec $AB = 9$ cm et $CD = 6$ cm. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O, et $AC = 10$ cm.

Calculer OA.

Donner OA en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales et les bases forment un papillon de centre O : (AB) est parallèle à (CD), avec $O \in [AC]$ et $O \in [BD]$.

2. Thalès donne $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3}{2}$. Sur les 10 cm de $[AC]$, combien de parts pour OA ?

CORRECTION

Thalès en papillon — (AB) est parallèle à (CD), $O \in [AC]$ et $O \in [BD]$:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Le partage — OA compte 3 parts quand OC en compte 2 : $[AC]$ en compte 5, de 2 cm chacune.

$$OA = \frac{3}{5} \times 10 = 6 \text{ cm}$$

Les diagonales d'un trapèze se coupent dans le rapport des bases. Vérification : $OC = 4$ cm et $\dfrac{6}{4} = \dfrac{9}{6}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 cm, c'est OC. OA est du côté de la grande base $[AB]$: c'est la plus grande des deux parts.

15 → OA ne peut pas dépasser $AC = 10$ cm. Le rapport $\dfrac{3}{2}$ compare OA à OC, pas OA à AC.

EXERCICE 40 · RAISONNEMENT

Au-delà du triangle

Les points A, B, M sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, C, N, et les droites (BC) et (MN) sont parallèles. On donne $AB = 3$ cm, $BM = 2$ cm et $BC = 4{,}5$ cm.

Calculer MN.

Donner MN en cm.

Réponse attendue : `15/2` — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle AMN agrandit ABC. Dans les rapports, les longueurs partent de A : calcule d'abord AM.
2. $AM = AB + BM$, puis $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$.

CORRECTION

Depuis A —

$$AM = AB + BM = 3 + 2 = 5 \text{ cm}$$

Thalès — $B \in [AM]$, $C \in [AN]$ et (BC) est parallèle à (MN) :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \quad \text{soit} \quad \frac{MN}{4{,}5} = \frac{5}{3}$$

$$MN = \frac{4{,}5 \times 5}{3} = 7{,}5 \text{ cm}$$

Le rapport d'agrandissement est $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{5}{3}$, pas $\dfrac{BM}{AB}$: on part toujours du sommet commun.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Tu as utilisé $BM = 2$ cm. Les longueurs se mesurent depuis A : c'est $AM = 5$ cm qui se compare à AB.

27/10 → Tu as retourné un des deux rapports. Garde le même triangle au numérateur des deux côtés de l'égalité, celui qui contient l'inconnue et celui qui ne la contient pas. Ici MN doit dépasser BC, puisque AMN est un agrandissement.

EXERCICE 41 · DEFI

Deux longueurs égales

ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm et $BC = 3$ cm. On cherche le point M de $[AB]$ tel que, si la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N, on ait $MN = MB$.

Calculer AM.

Donner AM en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $AM = x$. Exprime MB en fonction de x, puis MN avec le théorème de Thalès.
2. $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$ donne $MN = \dfrac{3x}{6} = \dfrac{x}{2}$, et $MB = 6 - x$.
3. Résous l'équation $\dfrac{x}{2} = 6 - x$.

CORRECTION

Les deux longueurs — On pose $AM = x$, avec $0 < x < 6$. Alors $MB = 6 - x$, et le théorème de Thalès dans ABC donne :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \quad \text{soit} \quad MN = \frac{3x}{6} = \frac{x}{2}$$

L'équation —

$$\frac{x}{2} = 6 - x \quad \text{donc} \quad x = 12 - 2x \quad \text{donc} \quad 3x = 12$$

$$AM = x = 4 \text{ cm}$$

Vérification : $MN = 2$ cm et $MB = 6 - 4 = 2$ cm. Une condition sur la figure se traduit en équation grâce à Thalès.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Si M était le milieu de $[AB]$, on aurait $MB = 3$ cm mais $MN = 1{,}5$ cm. Mets le problème en équation avec $AM = x$.

2 → 2 cm, c'est MB (et MN). On demande AM.

EXERCICE 42 · DEFI

Une coupe dans le triangle isocèle

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 10$ cm et $BC = 12$ cm. H est le milieu de $[BC]$. On place M sur $[AH]$ tel que $AM = 2$ cm ; la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AB]$ en P et $[AC]$ en Q.

Calculer PQ.

Donner PQ en cm.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un triangle isocèle en A, (AH) est perpendiculaire à (BC). Calcule AH avec le théorème de Pythagore dans le triangle AHB.
2. $AH = 8$ cm. Thalès dans le triangle ABH, avec (PM) parallèle à (BH), donne $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AM}{AH}$.
3. Puis Thalès dans ABC avec (PQ) parallèle à (BC) : $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AP}{AB}$.

CORRECTION

La hauteur — H est le milieu de $[BC]$ et ABC est isocèle en A : $(AH) \perp (BC)$ et $BH = 6$ cm. Pythagore dans AHB, rectangle en H :

$$AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \quad \text{donc} \quad AH = 8 \text{ cm}$$

Dans le triangle ABH — $P \in [AB]$, $M \in [AH]$ et (PM) est parallèle à (BH) :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AH} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Dans le triangle ABC — $P \in [AB]$, $Q \in [AC]$ et (PQ) est parallèle à (BC) :

$$PQ = \frac{AP}{AB} \times BC = \frac{1}{4} \times 12 = 3 \text{ cm}$$

Le rapport se lit sur la hauteur, $\dfrac{AM}{AH}$, puis se transporte au côté $[BC]$ par un second Thalès. Le piège était de comparer AM à AB.

PIÈGES ANTICIPÉS

12/5 → Tu as pris le rapport $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{2}{10}$. Mais M est sur la hauteur $[AH]$, pas sur $[AB]$: le bon rapport est $\dfrac{AM}{AH}$, avec $AH = 8$ cm.

3/2 → 1,5 cm, c'est PM, la moitié de $[PQ]$. M est le milieu de $[PQ]$: $PQ = 2 \times PM$.

EXERCICE 43 · DEFI

Le carré posé sur la base

ABC est un triangle tel que $BC = 12$ cm ; le pied H de sa hauteur issue de A est sur $[BC]$ et $AH = 6$ cm. On construit un carré $MNPQ$ avec $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, et P, Q sur $[BC]$. On note x le côté du carré, en cm, et K le point où (MN) coupe $[AH]$.

Calculer x.

Donner x en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (MN) est parallèle à (BC) et le carré a pour hauteur x : la distance de K à H est x, donc $AK = 6 - x$.
2. Thalès dans ABH donne $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AK}{AH}$, et Thalès dans ABC donne $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$.
3. On obtient l'équation $\dfrac{x}{12} = \dfrac{6-x}{6}$.

CORRECTION

Les longueurs — $MN = x$, et comme $KHQM$ est un rectangle, $KH = MQ = x$, donc $AK = 6 - x$.

Deux fois Thalès — Dans ABH, (MK) est parallèle à (BH) ; dans ABC, (MN) est parallèle à (BC) :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AK}{AH} \quad \text{soit} \quad \frac{x}{12} = \frac{6-x}{6}$$

L'équation —

$$6x = 12(6-x) \quad \text{donc} \quad 18x = 72$$

$$x = 4 \text{ cm}$$

Vérification : $AK = 2$ cm, et $\dfrac{2}{6} = \dfrac{4}{12}$. La hauteur sert de deuxième sécante : le rapport $\dfrac{AK}{AH}$ est le même que $\dfrac{MN}{BC}$.

EXERCICE 44 · BASE

Un côté réduit

Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC de rapport $k = \dfrac{2}{5}$: le côté $[MN]$ correspond au côté $[BC]$. On donne $BC = 10$ cm.

Calculer MN.

Donner MN en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans une réduction de rapport k, chaque longueur est multipliée par k.
2. $MN = k \times BC$.

CORRECTION

Multiplier par k —

$$MN = k \times BC = \frac{2}{5} \times 10 = 4 \text{ cm}$$

Rapport $k < 1$: réduction. Toutes les longueurs sont multipliées par le même k.

PIÈGES ANTICIPÉS

25 → Tu as divisé par k, ce qui agrandit. Une réduction de rapport $\dfrac{2}{5}$ **multiplie** les longueurs par $\dfrac{2}{5}$.

EXERCICE 45 · BASE

L'aire triplée ?

Un triangle d'aire 4 cm² est agrandi : ses longueurs sont multipliées par $k = 3$.

Calculer l'aire du triangle agrandi.

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les longueurs sont multipliées par k. Et les aires ?
2. Les aires sont multipliées par $k^2 = 9$.

CORRECTION

Le coefficient des aires —

$k^2 = 3^2 = 9$

$\text{aire} = 9 \times 4 = 36 \text{ cm}^2$

Longueurs fois 3, aire fois 9 : le triangle agrandi contient neuf fois le petit.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → Tu as multiplié l'aire par k. Les longueurs sont multipliées par k, mais une aire se mesure dans deux directions : elle est multipliée par k^2.

EXERCICE 46 · BASE

Trouver le rapport

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec les droites (MN) et (BC) parallèles. On donne $AM = 3$ cm et $AB = 4$ cm. Le triangle AMN est une réduction de ABC de rapport k.

Calculer k.

Donner k.

Réponse attendue : 3/4 — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport de réduction compare une longueur de AMN à la longueur correspondante de ABC.
2. $k = \dfrac{AM}{AB}$: le petit triangle au numérateur.

CORRECTION

Le rapport — (MN) est parallèle à (BC) : les côtés de AMN sont ceux de ABC multipliés par le même nombre.

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$$

Pour une réduction, $k < 1$: le triangle d'arrivée au numérateur, le triangle de départ au dénominateur.

PIÈGES ANTICIPÉS

4/3 → $\frac{4}{3}$ est plus grand que 1 : ce serait un agrandissement. On passe de ABC à AMN, plus petit : $k = \frac{AM}{AB}$.

EXERCICE 47 · BASE **Le périmètre agrandi**

Un triangle a pour périmètre 14 cm. On l'agrandit à l'échelle $k = 1{,}5$.

Calculer le périmètre du triangle agrandi.

Donner ce périmètre en cm.

Réponse attendue : 21

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un périmètre est une somme de longueurs. Par quoi est-il multiplié ?
2. Chaque côté est multiplié par k, donc leur somme aussi.

CORRECTION

Multiplier par k — Chaque côté est multiplié par $1{,}5$, donc le périmètre aussi.

$1{,}5 \times 14 = 21$ cm

Le périmètre est une longueur : il suit k. Seules les aires suivent k^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

63/2 → Tu as multiplié par $k^2 = 2{,}25$. Ça, c'est pour les aires. Un périmètre est une longueur : il est multiplié par k.

EXERCICE 48 · PRATIQUE **L'aire du petit triangle**

Dans un triangle ABC d'aire 50 cm², $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec les droites (MN) et (BC) parallèles. On donne $AM = 2$ cm et $AB = 5$ cm.

Calculer l'aire du triangle AMN.

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. AMN est une réduction de ABC. Quel est son rapport k ?
2. $k = \frac{2}{5}$; l'aire est multipliée par k^2.

CORRECTION

Le rapport —

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$$

L'aire —

$$\text{aire}(AMN) = k^2 \times \text{aire}(ABC) = \frac{4}{25} \times 50 = 8 \text{ cm}^2$$

Thalès donne le rapport k, et k^2 donne l'aire.

PIÈGES ANTICIPÉS

20 → Tu as multiplié l'aire par k. Les longueurs sont multipliées par k, mais une aire se mesure dans deux directions : elle est multipliée par k^2.

EXERCICE 49 · PRATIQUE

Du rapport des aires au côté

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec les droites (MN) et (BC) parallèles. L'aire de AMN est 12 cm², celle de ABC est 48 cm², et $AM = 3$ cm.

Calculer AB.

Donner AB en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport des aires est $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$. C'est k^2, pas k.
2. $k^2 = \frac{1}{4}$ donne $k = \frac{1}{2}$: AM est la moitié de AB.

CORRECTION

Le rapport des aires —

$$k^2 = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad k = \frac{1}{2}$$

Le côté — $k = \frac{AM}{AB}$, donc $AB = \frac{AM}{k}$.

$$AB = 3 \times 2 = 6 \text{ cm}$$

Pour remonter des aires aux longueurs, on prend la racine carrée du rapport des aires.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → Tu as pris $k = \frac{1}{4}$. Mais $\frac{1}{4}$ est le rapport des **aires**, c'est k^2 ; le rapport des longueurs est $k = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 50 · PRATIQUE

La bande autour du triangle

Les points A, B, M sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, C, N, et les droites (BC) et (MN) sont parallèles. On donne $AB = 4$ cm, $AM = 6$ cm, et l'aire du triangle ABC est 8 cm².

Calculer l'aire du quadrilatère $BMNC$.

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. AMN est un agrandissement de ABC de rapport $k = \dfrac{AM}{AB}$.
2. Calcule l'aire de AMN avec k^2, puis retire celle de ABC.

CORRECTION

Le rapport —

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

L'aire de AMN —

$$\text{aire}(AMN) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 8 = \frac{9}{4} \times 8 = 18$$

Par différence —

$$\text{aire}(BMNC) = 18 - 8 = 10 \text{ cm}^2$$

L'aire d'une bande entre deux parallèles s'obtient par différence entre le grand et le petit triangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → 18 cm², c'est l'aire du grand triangle AMN. Le quadrilatère $BMNC$ est ce qui reste quand on enlève ABC.

4 → Tu as multiplié l'aire par k. Les longueurs sont multipliées par k, mais une aire se mesure dans deux directions : elle est multipliée par k^2.

EXERCICE 51 · PRATIQUE

La maquette

La maquette d'une maison est une réduction à l'échelle $\dfrac{1}{50}$: les longueurs réelles sont multipliées par $\dfrac{1}{50}$ sur la maquette. Sur la maquette, le salon mesure 12 cm de long.

Calculer la longueur réelle du salon, en mètres.

Donner cette longueur en mètres.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour revenir au réel, on fait l'agrandissement inverse : de rapport 50.
2. 12×50 donne des centimètres. Convertis en mètres.

CORRECTION

L'agrandissement —

$$12 \times 50 = 600 \text{ cm}$$

En mètres —

$600\ \text{cm} = 6\ \text{m}$

Une réduction de rapport $\dfrac{1}{50}$ se défait par un agrandissement de rapport 50.

PIÈGES ANTICIPÉS

`600` → 600, ce sont des centimètres. On demande la longueur en mètres.

EXERCICE 52 · PRATIQUE

Deux carrés

Un premier carré a pour aire 9 cm², un second carré a pour aire 36 cm². Le second est un agrandissement du premier.

Calculer le rapport k de cet agrandissement.

Donner k.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport des aires vaut k^2.
2. $k^2 = \dfrac{36}{9}$. Quel nombre positif a ce carré ?

CORRECTION

Le rapport des aires —

$k^2 = \dfrac{36}{9} = 4$

$k = 2$

Vérification avec les côtés : 3 cm et 6 cm, le double. Le rapport des aires est le carré du rapport des longueurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 est le rapport des aires, k^2. Le rapport des longueurs est k, dont le carré vaut 4.

EXERCICE 53 · PRATIQUE

Le reste du triangle

Dans un triangle ABC, M et N sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$. L'aire du triangle AMN est 7 cm².

Calculer l'aire du quadrilatère $BMNC$.

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 21

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (MN) est parallèle à (BC), et AMN est une réduction de ABC de rapport $\frac{1}{2}$.
2. L'aire de ABC est celle de AMN multipliée par 2^2. Retire ensuite l'aire de AMN.

CORRECTION

La réduction — D'après la droite des milieux, (MN) est parallèle à (BC) et AMN est une réduction de ABC de rapport $k = \frac{1}{2}$.

L'aire de ABC —

$$\text{aire}(ABC) = 2^2 \times 7 = 28$$

Par différence —

$$\text{aire}(BMNC) = 28 - 7 = 21 \text{ cm}^2$$

Le triangle des deux milieux occupe le quart du triangle : le quadrilatère qui reste en occupe les trois quarts.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → Tu as doublé l'aire de AMN pour avoir ABC. Les longueurs doublent, l'aire est multipliée par 4 : ABC fait 28 cm².

28 → 28 cm², c'est l'aire de ABC. Il reste à retirer celle de AMN.

EXERCICE 54 · RAISONNEMENT

Neuf vingt-cinquièmes

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec les droites (MN) et (BC) parallèles. L'aire de AMN est égale aux $\frac{9}{25}$ de l'aire de ABC, et $BC = 10$ cm.

Calculer MN.

Donner MN en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\frac{9}{25}$ est le rapport des aires : c'est k^2.
2. $k^2 = \frac{9}{25}$ donne $k = \frac{3}{5}$. Puis $MN = k \times BC$.

CORRECTION

Le rapport des longueurs —

$$k^2 = \frac{9}{25} \quad \text{donc} \quad k = \frac{3}{5}$$

Le côté —

$$MN = \frac{3}{5} \times 10 = 6 \text{ cm}$$

Rapport des aires $\frac{9}{25}$, rapport des longueurs $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

18/5 → Tu as multiplié BC par $\frac{9}{25}$, le rapport des **aires**. Les longueurs suivent $k = \frac{3}{5}$, dont le carré vaut $\frac{9}{25}$.

EXERCICE 55 · RAISONNEMENT

Agrandir une photo

Une photo de 10 cm sur 15 cm est agrandie en une photo de 25 cm de large sur $37{,}5$ cm de long.

Par quel nombre son aire est-elle multipliée ?

Donner ce nombre.

Réponse attendue : `25/4` — aussi acceptées : 6.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le rapport d'agrandissement k des longueurs : $\frac{25}{10}$.
2. L'aire est multipliée par k^2.

CORRECTION

Le rapport des longueurs — $\frac{25}{10} = \frac{37{,}5}{15} = 2{,}5$: c'est bien un agrandissement, de rapport $k = 2{,}5$.

Le rapport des aires —
$k^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$

Vérification directe : $\frac{25 \times 37{,}5}{10 \times 15} = \frac{937{,}5}{150} = 6{,}25$. Une photo deux fois et demie plus large prend plus de six fois plus de papier.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/2 → $2{,}5$ est le rapport des longueurs, k. L'aire est multipliée par k^2.

EXERCICE 56 · RAISONNEMENT

Du A3 au A4

Une photocopieuse réduit une affiche du format A3 au format A4 : l'affiche réduite a la même forme, et son aire est exactement la moitié de l'aire de départ.

Calculer le rapport k de cette réduction des longueurs.

Donner k en valeur exacte.

Réponse attendue : `sqrt(2)/2` — aussi acceptées : 1/sqrt(2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport des aires est $\frac{1}{2}$: c'est k^2, pas k.
2. k est le nombre positif dont le carré vaut $\frac{1}{2}$.

CORRECTION

Le rapport des aires —

$$k^2 = \frac{\text{aire réduite}}{\text{aire de départ}} = \frac{1}{2}$$

Le rapport des longueurs —

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les longueurs ne sont pas divisées par 2, seulement l'aire : $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$, le « $71\,\%$ » qu'affichent les photocopieuses pour passer du A3 au A4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → $\dfrac{1}{2}$ est le rapport des **aires**, k^2. Les côtés de l'affiche ne sont pas divisés par 2 : k est la racine carrée de $\dfrac{1}{2}$.

`0.7 / 0.71 / 0.707` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 57 · DEFI

Le trapèze aux deux tiers

ABC est un triangle d'aire 54 cm². M est le point de $[AB]$ tel que $AM = \dfrac{2}{3}\,AB$, et la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.

Calculer l'aire du quadrilatère $BMNC$.

Donner cette aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. AMN est une réduction de ABC de rapport $k = \dfrac{2}{3}$.
2. L'aire de AMN est $\dfrac{4}{9}$ de celle de ABC. Le quadrilatère est ce qui reste.

CORRECTION

Le rapport — (MN) est parallèle à (BC) : d'après Thalès, AMN est une réduction de ABC de rapport $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{2}{3}$.

L'aire de AMN —

$$\text{aire}(AMN) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 54 = \frac{4}{9} \times 54 = 24$$

Par différence —

$$\text{aire}(BMNC) = 54 - 24 = 30 \text{ cm}^2$$

Le triangle AMN garde $\dfrac{4}{9}$ de l'aire, pas $\dfrac{2}{3}$: le quadrilatère, qui semble étroit, en prend plus de la moitié.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → Tu as multiplié l'aire par k. Les longueurs sont multipliées par k, mais une aire se mesure dans deux directions : elle est multipliée par k^2.

24 → 24 cm², c'est l'aire du triangle AMN. On demande celle du quadrilatère $BMNC$, le reste.

EXERCICE 58 · DEFI

Couper le triangle en deux

ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm. On cherche le point M de $[AB]$ tel que, si la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N, l'aire du triangle AMN soit la moitié de celle de ABC.

Calculer AM.

Donner AM en cm, en valeur exacte, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `3*sqrt(2)` — aussi acceptées : 6/sqrt(2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. AMN est une réduction de ABC de rapport $k = \dfrac{AM}{AB}$. Que doit valoir k^2 ?
2. $k^2 = \dfrac{1}{2}$, donc $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CORRECTION

Le rapport cherché — On veut $\text{aire}(AMN) = \dfrac{1}{2}\,\text{aire}(ABC)$, soit $k^2 = \dfrac{1}{2}$.

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La longueur —

$$AM = k \times AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 = 3\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Pour couper l'aire en deux, on ne prend pas le milieu : $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ cm, bien plus que 3 cm. Le milieu ne garderait qu'un quart de l'aire.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Avec M au milieu, $k = \dfrac{1}{2}$ et l'aire de AMN n'est que le **quart** de celle de ABC. C'est k^2 qui doit valoir $\dfrac{1}{2}$.

`4.2` / `4.24` / `4.243` / `4.3` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte : $3\sqrt{2}$.

EXERCICE 59 · BASE

Deux rapports égaux

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. On donne $AM = 2$ cm, $AB = 5$ cm, $AN = 3$ cm et $AC = 7{,}5$ cm.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : parallèles · parallèle · oui parallèles · oui elles sont parallèles · elles sont parallèles · les droites sont parallèles · oui les droites sont parallèles · oui mn et bc sont parallèles · mn et bc sont parallèles · oui bc et mn sont parallèles · bc et mn sont parallèles · oui mn est parallèle à bc · mn est parallèle à bc · oui bc est parallèle à mn · bc est parallèle à mn · (MN)//(BC) · (BC)//(MN) · oui (MN)//(BC) · oui (BC)//(MN) · oui, parallèles · oui parallèle · oui, parallèle · oui, elles sont parallèles · elles sont parallèle · oui elles sont parallèle · oui, elles sont parallèle · sont parallèles · oui sont parallèles · oui, sont parallèles · ils sont parallèles · oui ils sont parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, les droites sont parallèles · les deux droites sont parallèles · oui les deux droites sont parallèles · oui, les deux droites sont parallèles · oui elles le sont · oui, elles le sont · (MN) et (BC) sont parallèles · oui (MN) et (BC) sont parallèles · oui, (MN) et (BC) sont parallèles · (BC) et (MN) sont parallèles · oui (BC) et (MN) sont parallèles · oui, (BC) et (MN) sont parallèles · les droites (MN) et (BC) sont parallèles · oui les droites (MN) et (BC) sont parallèles · oui, les droites (MN) et (BC) sont parallèles · oui, MN et BC sont parallèles · (MN) est parallèle à (BC) · oui (MN) est parallèle à (BC) · oui, (MN) est parallèle à (BC) · (BC) est parallèle à (MN) · oui (BC) est parallèle à (MN) · oui, (BC) est parallèle à (MN) · oui, MN est parallèle à BC · oui, (MN)//(BC) · oui, (BC)//(MN) · (MN)∥(BC) · oui (MN)∥(BC) · oui, (MN)∥(BC) · (BC)∥(MN) · oui (BC)∥(MN) · oui, (BC)∥(MN)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule exactement les deux rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.
2. Si les rapports sont égaux et les points dans le même ordre, la réciproque du théorème de Thalès conclut.

CORRECTION

Les rapports —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \quad ; \quad \frac{AN}{AC} = \frac{3}{7{,}5} = 0{,}4$$

La réciproque — Les rapports sont égaux, et $M \in [AB]$, $N \in [AC]$: les points sont dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès :

$$(MN) \parallel (BC)$$

Rapports égaux **et** points dans le même ordre : les droites sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / pas parallèles / non parallèles / ne sont pas parallèles / elles ne sont pas parallèles / non elles ne sont pas parallèles / non, elles ne sont pas parallèles / sécantes / elles sont sécantes / non ils ne sont pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / non les droites ne sont pas parallèles / non, les droites ne sont pas parallèles / les droites ne sont pas parallèles / non, pas parallèles / non pas parallèles / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non, sécantes / non elles sont sécantes / non, elles sont sécantes / les droites sont sécantes / elles se coupent / non elles se coupent / non, elles se coupent / non (MN) et (BC) ne sont pas parallèles / non, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles / (MN) et (BC) ne sont pas parallèles / (MN) n'est pas parallèle à (BC) / non (MN) n'est pas parallèle à (BC) / non, (MN) n'est pas parallèle à (BC) / non (MN) et (BC) sont sécantes / non, (MN) et (BC) sont sécantes / (MN) et (BC) sont sécantes` → Calcule à nouveau : $\frac{2}{5} = 0{,}4$ et $\frac{3}{7{,}5} = 0{,}4$. Les rapports sont égaux et les points sont dans le même ordre : la réciproque donne le parallélisme.

EXERCICE 60 · BASE

Deux rapports différents

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. On donne $AM = 3$ cm, $AB = 4$ cm, $AN = 4$ cm et $AC = 6$ cm.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas parallèles · pas parallèle · non parallèles · non parallèle · non pas parallèles · non, pas parallèles · ne sont pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · non elles ne sont pas parallèles · non, elles ne sont pas parallèles · les droites ne sont pas parallèles · non les droites ne sont pas parallèles · non, les droites ne sont pas parallèles · non elles ne le sont pas · non, elles ne le sont pas · sécantes · sécante · elles sont sécantes · les droites sont sécantes · non sécantes · non, sécantes · non elles sont sécantes · non, elles sont sécantes · non les droites sont sécantes · non, les droites sont sécantes · elles se coupent · non elles se coupent · non, elles se coupent · non ils ne sont pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · non (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · non, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non, (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) et (BC) sont sécantes · non, (MN) et (BC) sont sécantes · (MN) et (BC) sont sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.
2. Si les droites étaient parallèles, le théorème de Thalès rendrait ces rapports égaux.

CORRECTION

Les rapports —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{AN}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Conclusion — $\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{2}{3}$. Si (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait des rapports égaux.

(MN) et (BC) ne sont pas parallèles

Des rapports différents prouvent que les droites ne sont **pas** parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

oui / parallèles / parallèle / oui parallèles / oui, parallèles / elles sont parallèles / oui elles sont parallèles / oui, elles sont parallèles / les droites sont parallèles / oui ils sont parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, les droites sont parallèles / oui les droites sont parallèles / oui (MN) et (BC) sont parallèles / oui, (MN) et (BC) sont parallèles / (MN) et (BC) sont parallèles / oui (MN)//(BC) / oui, (MN)//(BC) / (MN)//(BC) / (BC)//(MN) / oui (MN) est parallèle à (BC) / oui, (MN) est parallèle à (BC) / (MN) est parallèle à (BC) → $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$ et $\dfrac{4}{6} \approx 0{,}67$: les rapports sont différents. Si les droites étaient parallèles, Thalès les rendrait égaux.

Maths à la carte — Mr HAMMAMI

EXERCICE 61 · BASE

Où placer N ?

Dans un triangle ABC, on donne $AB = 6$ cm et $AC = 9$ cm. M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 2$ cm. On veut placer N sur $[AC]$ de sorte que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.

Calculer AN.

Donner AN en cm.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'après la réciproque, il suffit que $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$, avec $N \in [AC]$.
2. $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$: AN doit être le tiers de AC.

CORRECTION

La condition — $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ sont dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) est parallèle à (BC) dès que :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$AN = \frac{1}{3} \times 9 = 3 \text{ cm}$$

La réciproque sert aussi à construire : on place N pour que les deux rapports soient égaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

27 → AN ne peut pas dépasser $AC = 9$ cm. Garde $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$: le petit triangle au numérateur.

EXERCICE 62 · BASE

Un papillon parallèle ?

Les droites (BM) et (CN) se coupent en A, avec $A \in [BM]$ et $A \in [CN]$. On donne $AB = 4$ cm, $AM = 6$ cm, $AC = 5$ cm et $AN = 7{,}5$ cm.

Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : parallèles · parallèle · oui parallèles · oui elles sont parallèles · elles sont parallèles · les droites sont parallèles · oui les droites sont parallèles · oui bc et mn sont parallèles · bc et mn sont parallèles · oui mn et bc sont parallèles · mn et bc sont parallèles · oui bc est parallèle à mn · bc est parallèle à mn · oui mn est parallèle à bc · mn est parallèle à bc · (BC)//(MN) · (MN)//(BC) · oui (BC)//(MN) · oui (MN)//(BC) · oui, parallèles · oui parallèle · oui, parallèle · oui, elles sont parallèles · elles sont parallèle · oui elles sont parallèle · oui, elles sont parallèle · sont parallèles · oui sont parallèles · oui, sont parallèles · ils sont parallèles · oui ils sont parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, les droites sont parallèles · les deux droites sont parallèles · oui les deux droites sont parallèles · oui, les deux

droites sont parallèles · oui elles le sont · oui, elles le sont · (BC) et (MN) sont parallèles · oui (BC) et (MN) sont parallèles · oui, (BC) et (MN) sont parallèles · (MN) et (BC) sont parallèles · oui (MN) et (BC) sont parallèles · oui, (MN) et (BC) sont parallèles · les droites (BC) et (MN) sont parallèles · oui les droites (BC) et (MN) sont parallèles · oui, les droites (BC) et (MN) sont parallèles · oui, BC et MN sont parallèles · (BC) est parallèle à (MN) · oui (BC) est parallèle à (MN) · oui, (BC) est parallèle à (MN) · (MN) est parallèle à (BC) · oui (MN) est parallèle à (BC) · oui, (MN) est parallèle à (BC) · oui, BC est parallèle à MN · oui, (BC)//(MN) · oui, (MN)//(BC) · (BC)∥(MN) · oui (BC)∥(MN) · oui, (BC)∥(MN) · (MN)∥(BC) · oui (MN)∥(BC) · oui, (MN)∥(BC)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$, et regarde l'ordre des points.
2. M et N sont tous les deux de l'autre côté de A : les points sont dans le même ordre.

CORRECTION

Les rapports —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{AN}{AC} = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$$

L'ordre — $A \in [BM]$ et $A \in [CN]$: M et N sont tous deux de l'autre côté de A, les points sont dans le même ordre.

La réciproque —

$(BC) \parallel (MN)$

La réciproque vaut aussi pour le papillon, à condition que M et N soient **tous les deux** de l'autre côté de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

non / pas parallèles / non parallèles / ne sont pas parallèles / elles ne sont pas parallèles / non elles ne sont pas parallèles / non, elles ne sont pas parallèles / sécantes / elles sont sécantes / non ils ne sont pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / non les droites ne sont pas parallèles / non, les droites ne sont pas parallèles / les droites ne sont pas parallèles / non, pas parallèles / non pas parallèles / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non, sécantes / non elles sont sécantes / non, elles sont sécantes / les droites sont sécantes / elles se coupent / non elles se coupent / non, elles se coupent / non (BC) et (MN) ne sont pas parallèles / non, (BC) et (MN) ne sont pas parallèles / (BC) et (MN) ne sont pas parallèles / (BC) n'est pas parallèle à (MN) / non (BC) n'est pas parallèle à (MN) / non, (BC) n'est pas parallèle à (MN) / non (BC) et (MN) sont sécantes / non, (BC) et (MN) sont sécantes / (BC) et (MN) sont sécantes → Les rapports valent tous deux $1{,}5$ et les points sont dans le même ordre : la réciproque du théorème de Thalès s'applique aussi au papillon.

EXERCICE 63 · PRATIQUE

Les rapports ne suffisent pas

Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A. M est un point de $[AB]$, et N un point de la droite (AC) tel que $A \in [NC]$. On donne $AM = 2$ cm, $AB = 6$ cm, $AN = 3$ cm et $AC = 9$ cm.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas parallèles · pas parallèle · non parallèles · non parallèle · non pas parallèles · non, pas parallèles · ne sont pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · non elles ne sont pas parallèles · non, elles ne sont pas parallèles · les droites ne sont pas parallèles · non les droites ne sont pas parallèles · non, les droites ne sont pas parallèles · non elles ne le sont pas · non, elles ne le sont pas · sécantes · sécante · elles sont sécantes · les droites sont sécantes · non sécantes · non, sécantes · non elles sont sécantes · non, elles sont sécantes · non les droites sont sécantes · non, les droites sont sécantes · elles se coupent · non elles se coupent · non, elles se coupent · non ils ne sont pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · non (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · non, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non, (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) et (BC) sont sécantes · non, (MN) et (BC) sont sécantes · (MN) et (BC) sont sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les deux rapports. Puis regarde où sont M et N par rapport à A.
2. M est du même côté de A que B, mais N est de l'autre côté de A par rapport à C.

CORRECTION

Les rapports —
$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

L'ordre — Les rapports sont égaux, mais M est du côté de B alors que N est de l'autre côté de A par rapport à C : les points ne sont pas dans le même ordre, et la réciproque ne s'applique pas.

Conclusion — La droite (MN'), où N' est le point de $[AC]$ tel que $AN' = 3$ cm, est parallèle à (BC) ; N est le symétrique de N' par rapport à A, donc (MN) ne l'est pas.

(MN) et (BC) ne sont pas parallèles

La réciproque a **deux** conditions : des rapports égaux, et des points placés dans le même ordre. Ici la seconde manque.

PIÈGES ANTICIPÉS

oui / parallèles / parallèle / oui parallèles / oui, parallèles / elles sont parallèles / oui elles sont parallèles / oui, elles sont parallèles / les droites sont parallèles / oui ils sont parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, les droites sont parallèles / oui les droites sont parallèles / oui (MN) et (BC) sont parallèles / oui, (MN) et (BC) sont parallèles / (MN) et (BC) sont parallèles / oui (MN)//(BC) / oui, (MN)//(BC) / (MN)//(BC) / (BC)//(MN) / oui (MN) est parallèle à (BC) / oui, (MN) est parallèle à (BC) / (MN) est parallèle à (BC) → Les rapports sont bien égaux, mais regarde l'ordre des points : M est entre A et B, alors que A est entre N et C. La réciproque exige que les points soient dans le même ordre.

EXERCICE 64 · PRATIQUE

Avec les morceaux

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, N, C. On donne $AM = 4$ cm, $MB = 2$ cm, $AN = 6$ cm et $NC = 3$ cm.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : parallèles · parallèle · oui parallèles · oui elles sont parallèles · elles sont parallèles · les droites sont parallèles · oui les droites sont parallèles · oui mn et bc sont parallèles · mn et bc sont parallèles · oui bc et mn sont parallèles · bc et mn sont parallèles · oui mn est parallèle à bc · mn est parallèle à bc · oui bc est parallèle à mn · bc est parallèle à mn · (MN)//(BC) · (BC)//(MN) · oui (MN)//(BC) · oui (BC)//(MN) · oui, parallèles · oui parallèle · oui, parallèle · oui, elles sont parallèles · elles sont parallèle · oui elles sont parallèle · oui, elles sont parallèle · sont parallèles · oui sont parallèles · oui, sont parallèles · ils sont parallèles · oui ils sont parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, les droites sont parallèles · les deux droites sont parallèles · oui les deux droites sont parallèles · oui, les deux droites sont parallèles · oui elles le sont · oui, elles le sont · (MN) et (BC) sont parallèles · oui (MN) et (BC) sont parallèles · oui, (MN) et (BC) sont parallèles · (BC) et (MN) sont parallèles · oui (BC) et (MN) sont parallèles · oui, (BC) et (MN) sont parallèles · les droites (MN) et (BC) sont parallèles · oui les droites (MN) et (BC) sont parallèles · oui, les droites (MN) et (BC) sont parallèles · oui, MN et BC sont parallèles · (MN) est parallèle à (BC) · oui (MN) est parallèle à (BC) · oui, (MN) est parallèle à (BC) · (BC) est parallèle à (MN) · oui (BC) est parallèle à (MN) · oui, (BC) est parallèle à (MN) · oui, MN est parallèle à BC · oui, (MN)//(BC) · oui, (BC)//(MN) · (MN)∥(BC) · oui (MN)∥(BC) · oui, (MN)∥(BC) · (BC)∥(MN) · oui (BC)∥(MN) · oui, (BC)∥(MN)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord les côtés entiers AB et AC.
2. Compare $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.

CORRECTION

Les côtés entiers —

$$AB = 4 + 2 = 6 \quad ; \quad AC = 6 + 3 = 9$$

Les rapports —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{AN}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

La réciproque — Les rapports sont égaux et $M \in [AB]$, $N \in [AC]$:

$$(MN) \parallel (BC)$$

On compare chaque longueur depuis A au côté entier ; les morceaux MB et NC servent seulement à le calculer.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / pas parallèles / non parallèles / ne sont pas parallèles / elles ne sont pas parallèles / non elles ne sont pas parallèles / non, elles ne sont pas parallèles / sécantes / elles sont sécantes / non ils ne sont pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / non les droites ne sont pas parallèles / non, les droites ne sont pas parallèles / les droites ne sont pas parallèles / non, pas parallèles / non pas parallèles / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non, sécantes / non elles sont sécantes / non, elles sont sécantes / les droites sont sécantes / elles se coupent / non elles se coupent / non, elles se coupent / non (MN) et (BC) ne sont pas parallèles / non, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles / (MN) et (BC) ne sont pas parallèles / (MN) n'est pas parallèle à (BC) / non (MN) n'est pas parallèle à (BC) / non, (MN) n'est pas parallèle à (BC) / non (MN) et (BC) sont sécantes / non, (MN) et (BC) sont sécantes / (MN) et (BC) sont sécantes` → Avec les côtés entiers $AB = 6$ et $AC = 9$, les rapports $\dfrac{4}{6}$ et $\dfrac{6}{9}$ valent tous deux $\dfrac{2}{3}$.

EXERCICE 65 · PRATIQUE

Presque égaux

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. On donne $AM = 2{,}4$ cm, $AB = 3{,}6$ cm, $AN = 3{,}1$ cm et $AC = 4{,}7$ cm.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas parallèles · pas parallèle · non parallèles · non parallèle · non pas parallèles · non, pas parallèles · ne sont pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · non elles ne sont pas parallèles · non, elles ne sont pas parallèles · les droites ne sont pas parallèles · non les droites ne sont pas parallèles · non, les droites ne sont pas parallèles · non elles ne le sont pas · non, elles ne le sont pas · sécantes · sécante · elles sont sécantes · les droites sont sécantes · non sécantes · non, sécantes · non elles sont sécantes · non, elles sont sécantes · non les droites sont sécantes · non, les droites sont sécantes · elles se coupent · non elles se coupent · non, elles se coupent · non ils ne sont pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · non (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · non, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non, (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) et (BC) sont sécantes · non, (MN) et (BC) sont sécantes · (MN) et (BC) sont sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Des valeurs arrondies ne prouvent rien. Compare les rapports exactement, par les produits en croix.
2. Calcule $AM \times AC$ et $AN \times AB$.

CORRECTION

Les produits en croix —

$AM \times AC = 2{,}4 \times 4{,}7 = 11{,}28 \quad ; \quad AN \times AB = 3{,}1 \times 3{,}6 = 11{,}16$

Conclusion — Les produits sont différents, donc $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$.

(MN) et (BC) ne sont pas parallèles

$\dfrac{2{,}4}{3{,}6} \approx 0{,}667$ et $\dfrac{3{,}1}{4{,}7} \approx 0{,}660$: très proches, mais pas égaux. Les produits en croix tranchent sans arrondi.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / parallèles / parallèle / oui parallèles / oui, parallèles / elles sont parallèles / oui elles sont parallèles / oui, elles sont parallèles / les droites sont parallèles / oui ils sont parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, les droites sont parallèles / oui les droites sont parallèles / oui (MN) et (BC) sont parallèles / oui, (MN) et (BC) sont parallèles / (MN) et (BC) sont parallèles / oui (MN)//(BC) / oui, (MN)//(BC) / (MN)//(BC) / (BC)//(MN) / oui (MN) est parallèle à (BC) / oui, (MN) est parallèle à (BC) / (MN) est parallèle à (BC)` → Arrondis à $0{,}7$, les deux rapports se confondent. Mais $2{,}4 \times 4{,}7 = 11{,}28$ et $3{,}1 \times 3{,}6 = 11{,}16$: ils ne sont pas égaux.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

L'escabeau

Un escabeau a la forme d'un triangle ABC : A est le sommet, B et C les pieds posés au sol, avec $AB = AC = 2{,}5$ m. Une barre $[MN]$ relie $M \in [AB]$ à $N \in [AC]$, avec $AM = 1{,}5$ m et $AN = 1{,}4$ m.

La barre (MN) est-elle parallèle au sol (BC) ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas parallèles · pas parallèle · non parallèles · non parallèle · non pas parallèles · non, pas parallèles · ne sont pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · non elles ne sont pas parallèles · non, elles ne sont pas parallèles · les droites ne sont pas parallèles · non les droites ne sont pas parallèles · non, les droites ne sont pas parallèles · non elles ne le sont pas · non, elles ne le sont pas · sécantes · sécante · elles sont sécantes · les droites sont sécantes · non sécantes · non, sécantes · non elles sont sécantes · non, elles sont sécantes · non les droites sont sécantes · non, les droites sont sécantes · elles se coupent · non elles se coupent · non, elles se coupent · non ils ne sont pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · non (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · non, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non, (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) et (BC) sont sécantes · non, (MN) et (BC) sont sécantes · (MN) et (BC) sont sécantes · non elle n'est pas parallèle · non, elle n'est pas parallèle · elle n'est pas parallèle · non elle n'est pas parallèle au sol · non, elle n'est pas parallèle au sol · elle n'est pas parallèle au sol · non la barre n'est pas parallèle au sol · non, la barre n'est pas parallèle au sol · la barre n'est pas parallèle au sol · non elle penche · non, elle penche · elle penche

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare les rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.
2. Les deux montants ont la même longueur : il faudrait $AM = AN$.

CORRECTION

Les rapports —

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6 \quad ; \quad \frac{AN}{AC} = \frac{1{,}4}{2{,}5} = 0{,}56$$

Conclusion — Les rapports sont différents : si (MN) était parallèle à (BC), le théorème de Thalès les rendrait égaux.

(MN) et (BC) ne sont pas parallèles

La barre penche : pour qu'elle soit parallèle au sol, il faudrait la fixer à $1{,}5$ m du sommet sur les deux montants.

PIÈGES ANTICIPÉS

oui / parallèles / parallèle / oui parallèles / oui, parallèles / elles sont parallèles / oui elles sont parallèles / oui, elles sont parallèles / les droites sont parallèles / oui ils sont parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, les droites sont parallèles / oui les droites sont parallèles / oui (MN) et (BC) sont parallèles / oui, (MN) et (BC) sont parallèles / (MN) et (BC) sont parallèles / oui (MN)//(BC) / oui, (MN)//(BC) / (MN)//(BC) / (BC)//(MN) / oui (MN) est parallèle à (BC) / oui, (MN) est parallèle à (BC) / (MN) est parallèle à (BC) / oui elle est parallèle / oui, elle est parallèle / elle est parallèle / oui elle est parallèle au sol / oui, elle est parallèle au sol / oui la barre est parallèle au sol / oui, la barre est parallèle au sol

Maths à la carte — BDELKADER HAMMAMI

`/ la barre est parallèle au sol` → $\frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$ mais $\frac{1{,}4}{2{,}5} = 0{,}56$: les rapports diffèrent, la barre n'est pas parallèle au sol.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Le reste du côté

Dans un triangle ABC, $AB = 8$ cm et $AC = 10$ cm. M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 6$ cm. On veut placer N sur $[AC]$ de sorte que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.

Calculer NC.

Donner NC en cm.

Réponse attendue : `5/2` — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'après la réciproque, il faut $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$, avec $N \in [AC]$.
2. Calcule AN, puis $NC = AC - AN$.

CORRECTION

La condition —

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Les longueurs —

$$AN = \frac{3}{4} \times 10 = 7{,}5 \quad ; \quad NC = 10 - 7{,}5 = 2{,}5 \text{ cm}$$

Avec N ainsi placé, les points sont dans le même ordre et les rapports égaux : la réciproque garantit le parallélisme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`15/2` → $7{,}5$ cm, c'est AN. On demande NC, l'autre morceau de $[AC]$.

EXERCICE 68 · PRATIQUE

Le triangle prolongé

Les points A, B, M sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, C, N. On donne $AB = 5$ cm, $BM = 3$ cm, $AC = 7$ cm et $CN = 4{,}2$ cm.

Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : parallèles · parallèle · oui parallèles · oui elles sont parallèles · elles sont parallèles · les droites sont parallèles · oui les droites sont parallèles · oui bc et mn sont parallèles · bc et mn sont parallèles · oui mn et bc sont parallèles · mn et bc sont parallèles · oui bc est parallèle à mn · bc est parallèle à mn · oui mn est parallèle à bc · mn est parallèle à bc · (BC)//(MN) · (MN)//(BC) · oui (BC)//(MN) · oui (MN)//(BC) · oui, parallèles · oui parallèle · oui, parallèle · oui, elles sont

parallèles · elles sont parallèle · oui elles sont parallèle · oui, elles sont parallèle · sont parallèles · oui sont parallèles · oui, sont parallèles · ils sont parallèles · oui ils sont parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, les droites sont parallèles · les deux droites sont parallèles · oui les deux droites sont parallèles · oui, les deux droites sont parallèles · oui elles le sont · oui, elles le sont · (BC) et (MN) sont parallèles · oui (BC) et (MN) sont parallèles · oui, (BC) et (MN) sont parallèles · (MN) et (BC) sont parallèles · oui (MN) et (BC) sont parallèles · oui, (MN) et (BC) sont parallèles · les droites (BC) et (MN) sont parallèles · oui les droites (BC) et (MN) sont parallèles · oui, les droites (BC) et (MN) sont parallèles · oui, BC et MN sont parallèles · (BC) est parallèle à (MN) · oui (BC) est parallèle à (MN) · oui, (BC) est parallèle à (MN) · (MN) est parallèle à (BC) · oui (MN) est parallèle à (BC) · oui, (MN) est parallèle à (BC) · oui, BC est parallèle à MN · oui, (BC)//(MN) · oui, (MN)//(BC) · (BC)∥(MN) · oui (BC)∥(MN) · oui, (BC)∥(MN) · (MN)∥(BC) · oui (MN)∥(BC) · oui, (MN)∥(BC)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les longueurs se lisent depuis A : calcule AM et AN.
2. Compare $\dfrac{AB}{AM}$ et $\dfrac{AC}{AN}$ par les produits en croix.

CORRECTION

Depuis A —

$AM = 5 + 3 = 8 \quad ; \quad AN = 7 + 4{,}2 = 11{,}2$

Les produits en croix —

$AB \times AN = 5 \times 11{,}2 = 56 \quad ; \quad AC \times AM = 7 \times 8 = 56$

La réciproque — $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$, et $B \in [AM]$, $C \in [AN]$: les points sont dans le même ordre.

$(BC) \parallel (MN)$

Deuxième figure de Thalès : on lit les longueurs depuis A, même quand le triangle est prolongé.

PIÈGES ANTICIPÉS

non / pas parallèles / non parallèles / ne sont pas parallèles / elles ne sont pas parallèles / non elles ne sont pas parallèles / non, elles ne sont pas parallèles / sécantes / elles sont sécantes / non ils ne sont pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / non les droites ne sont pas parallèles / non, les droites ne sont pas parallèles / les droites ne sont pas parallèles / non, pas parallèles / non pas parallèles / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non, sécantes / non elles sont sécantes / non, elles sont sécantes / les droites sont sécantes / elles se coupent / non elles se coupent / non, elles se coupent / non (BC) et (MN) ne sont pas parallèles / non, (BC) et (MN) ne sont pas parallèles / (BC) et (MN) ne sont pas parallèles / (BC) n'est pas parallèle à (MN) / non (BC) n'est pas parallèle à (MN) / non, (BC) n'est pas parallèle à (MN) / non (BC) et (MN) sont sécantes / non, (BC) et (MN) sont sécantes / (BC) et (MN) sont sécantes → Avec $AM = 8$ et $AN = 11{,}2$, les rapports $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{7}{11{,}2}$ valent tous deux $0{,}625$.

EXERCICE 69 · RAISONNEMENT

Deux cercles de même centre

Deux cercles ont le même centre I et pour rayons 4 cm et 6 cm. Une demi-droite d'origine I coupe le petit cercle en E et le grand en G ; une autre demi-droite d'origine I, non portée par la même

droite, coupe le petit cercle en F et le grand en H. On mesure $EF = 3$ cm.

Calculer GH.

Donner GH en cm.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Rien ne dit encore que (EF) et (GH) sont parallèles. Compare $\frac{IE}{IG}$ et $\frac{IF}{IH}$ avec les rayons.
2. Les deux rapports sont égaux et les points sont dans le même ordre : la réciproque donne le parallélisme. Le théorème de Thalès donne alors $\frac{EF}{GH}$.

CORRECTION

Les rayons —

$IE = IF = 4 \quad ; \quad IG = IH = 6$

La réciproque — $\frac{IE}{IG} = \frac{IF}{IH} = \frac{2}{3}$, et $E \in [IG], F \in [IH]$: les points sont dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès :

$(EF) \parallel (GH)$

Thalès — Dans le triangle IGH, $E \in [IG]$, $F \in [IH]$ et (EF) est parallèle à (GH) :

$\frac{EF}{GH} = \frac{IE}{IG}$ soit $\frac{3}{GH} = \frac{4}{6}$

Le calcul —

$GH = \frac{3 \times 6}{4} = 4{,}5 \text{ cm}$

Quelles que soient les deux demi-droites, le rapport vaut $\frac{4}{6}$ des deux côtés : (EF) et (GH) sont toujours parallèles. La réciproque d'abord, le théorème ensuite.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Tu as retourné le rapport : $[GH]$ relie deux points du grand cercle, il est plus long que EF.

5 → Tu as ajouté à EF l'écart des rayons. Ce sont les longueurs qui sont dans le même rapport, $\frac{GH}{EF} = \frac{6}{4}$, pas les écarts.

EXERCICE 70 · RAISONNEMENT **Prouver, puis calculer**

ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 7$ cm. M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 4{,}5$ cm, et N le point de $[AC]$ tel que $AN = 6$ cm.

Calculer MN.

Donner MN en cm.

Réponse attendue : 21/4 — aussi acceptées : 5.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Rien ne dit que (MN) est parallèle à (BC). Commence par le prouver.
2. $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{3}{4}$: la réciproque donne le parallélisme, et alors le théorème de Thalès donne MN.

CORRECTION

Le parallélisme — $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4{,}5}{6} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$, avec $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. D'après la réciproque, (MN) est parallèle à (BC).

Thalès —

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{4} \quad \text{donc} \quad MN = \frac{3}{4} \times 7 = 5{,}25 \text{ cm}$$

La réciproque d'abord, le théorème ensuite : on n'écrit pas $\dfrac{MN}{BC}$ tant que le parallélisme n'est pas prouvé.

PIÈGES ANTICIPÉS

28/3 → Tu as retourné le rapport : MN est plus court que BC, puisque AMN est une réduction de ABC de rapport $\dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 71 · RAISONNEMENT

La valeur qui rend parallèle

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, N, C. On donne $MB = 2$ cm, $AN = 6$ cm et $AC = 9$ cm, et on note $x = AM$, en cm.

Calculer x pour que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.

Donner x en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'après la réciproque, il faut $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, avec $AB = x + 2$.
2. Résous $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

CORRECTION

La condition —

$$\frac{x}{x+2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

L'équation —

$$3x = 2(x+2) \quad \text{donc} \quad 3x = 2x + 4$$

$$x = 4 \text{ cm}$$

Vérification : $\dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9}$, et les points sont dans le même ordre. La réciproque garantit alors le parallélisme.

PIÈGES ANTICIPÉS

4/3 → Tu as écrit $\frac{x}{2} = \frac{6}{9}$: un morceau à gauche, un côté entier à droite. Compare AM au côté entier $AB = x + 2$.

EXERCICE 72 · RAISONNEMENT

Un trapèze ?

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ d'un quadrilatère $ABCD$ se coupent en O. On donne $OA = 3$ cm, $OC = 4{,}5$ cm, $OB = 2$ cm et $OD = 3$ cm.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : parallèles · parallèle · oui parallèles · oui elles sont parallèles · elles sont parallèles · les droites sont parallèles · oui les droites sont parallèles · oui ab et cd sont parallèles · ab et cd sont parallèles · oui cd et ab sont parallèles · cd et ab sont parallèles · oui ab est parallèle à cd · ab est parallèle à cd · oui cd est parallèle à ab · cd est parallèle à ab · (AB)//(CD) · (CD)//(AB) · oui (AB)//(CD) · oui (CD)//(AB) · oui, parallèles · oui parallèle · oui, parallèle · oui, elles sont parallèles · elles sont parallèle · oui elles sont parallèle · oui, elles sont parallèle · sont parallèles · oui sont parallèles · oui, sont parallèles · ils sont parallèles · oui ils sont parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, les droites sont parallèles · les deux droites sont parallèles · oui les deux droites sont parallèles · oui, les deux droites sont parallèles · oui elles le sont · oui, elles le sont · (AB) et (CD) sont parallèles · oui (AB) et (CD) sont parallèles · oui, (AB) et (CD) sont parallèles · (CD) et (AB) sont parallèles · oui (CD) et (AB) sont parallèles · oui, (CD) et (AB) sont parallèles · les droites (AB) et (CD) sont parallèles · oui les droites (AB) et (CD) sont parallèles · oui, les droites (AB) et (CD) sont parallèles · oui, AB et CD sont parallèles · (AB) est parallèle à (CD) · oui (AB) est parallèle à (CD) · oui, (AB) est parallèle à (CD) · (CD) est parallèle à (AB) · oui (CD) est parallèle à (AB) · oui, (CD) est parallèle à (AB) · oui, AB est parallèle à CD · oui, (AB)//(CD) · oui, (CD)//(AB) · (AB)∥(CD) · oui (AB)∥(CD) · oui, (AB)∥(CD) · (CD)∥(AB) · oui (CD)∥(AB) · oui, (CD)∥(AB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales forment un papillon de centre O. Compare $\frac{OA}{OC}$ et $\frac{OB}{OD}$.
2. $O \in [AC]$ et $O \in [BD]$: A et B sont tous deux de l'autre côté de O par rapport à C et D.

CORRECTION

Les rapports —
$\frac{OA}{OC} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{3}$; $\frac{OB}{OD} = \frac{2}{3}$

La réciproque — Les rapports sont égaux et les points sont dans le même ordre (papillon de centre O) :
$(AB) \parallel (CD)$

$ABCD$ est donc un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$: c'est la réciproque de la propriété des diagonales d'un trapèze.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / pas parallèles / non parallèles / ne sont pas parallèles / elles ne sont pas parallèles / non elles ne sont pas parallèles / non, elles ne sont pas parallèles / sécantes / elles sont sécantes / non ils ne sont pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / non les droites ne sont pas parallèles / non, les droites ne sont pas parallèles /`

les droites ne sont pas parallèles / non, pas parallèles / non pas parallèles / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non, sécantes / non elles sont sécantes / non, elles sont sécantes / les droites sont sécantes / elles se coupent / non elles se coupent / non, elles se coupent / non (AB) et (CD) ne sont pas parallèles / non, (AB) et (CD) ne sont pas parallèles / (AB) et (CD) ne sont pas parallèles / (AB) n'est pas parallèle à (CD) / non (AB) n'est pas parallèle à (CD) / non, (AB) n'est pas parallèle à (CD) / non (AB) et (CD) sont sécantes / non, (AB) et (CD) sont sécantes / (AB) et (CD) sont sécantes → $\frac{3}{4{,}5}$ et $\frac{2}{3}$ sont égaux : $3 \times 3 = 4{,}5 \times 2 = 9$. Dans le papillon de centre O, la réciproque donne le parallélisme.

EXERCICE 73 · RAISONNEMENT

Moins d'un millimètre

Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. On donne $AM = 5$ cm, $AB = 7$ cm, $AN = 4$ cm et $AC = 5{,}5$ cm. Sur le dessin, (MN) et (BC) semblent parallèles.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas parallèles · pas parallèle · non parallèles · non parallèle · non pas parallèles · non, pas parallèles · ne sont pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · non elles ne sont pas parallèles · non, elles ne sont pas parallèles · les droites ne sont pas parallèles · non les droites ne sont pas parallèles · non, les droites ne sont pas parallèles · non elles ne le sont pas · non, elles ne le sont pas · sécantes · sécante · elles sont sécantes · les droites sont sécantes · non sécantes · non, sécantes · non elles sont sécantes · non, elles sont sécantes · non les droites sont sécantes · non, les droites sont sécantes · elles se coupent · non elles se coupent · non, elles se coupent · non ils ne sont pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · non (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · non, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) et (BC) ne sont pas parallèles · (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non, (MN) n'est pas parallèle à (BC) · non (MN) et (BC) sont sécantes · non, (MN) et (BC) sont sécantes · (MN) et (BC) sont sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ne te fie pas au dessin : compare les rapports exactement.
2. Produits en croix : $AM \times AC$ et $AN \times AB$.
3. Quelle longueur de AN rendrait les droites parallèles ?

CORRECTION

Les produits en croix —

$$AM \times AC = 5 \times 5{,}5 = 27{,}5 \quad ; \quad AN \times AB = 4 \times 7 = 28$$

Conclusion — Les produits sont différents, donc $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$: si les droites étaient parallèles, Thalès rendrait ces rapports égaux.

(MN) et (BC) ne sont pas parallèles

Pour que les droites soient parallèles, il faudrait $AN = \frac{5 \times 5{,}5}{7} \approx 3{,}93$ cm. Un écart invisible à l'œil, mais le calcul le voit.

PIÈGES ANTICIPÉS

oui / parallèles / parallèle / oui parallèles / oui, parallèles / elles sont parallèles / oui elles sont parallèles / oui, elles sont parallèles / les droites sont parallèles / oui ils sont parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, les droites sont parallèles / oui les droites sont parallèles / oui (MN) et (BC) sont parallèles / oui, (MN) et (BC) sont parallèles / (MN) et (BC) sont parallèles / oui (MN)//(BC) / oui, (MN)//(BC) / (MN)//(BC) / (BC)//(MN) / oui (MN) est parallèle à (BC) / oui, (MN) est parallèle à (BC) / (MN) est parallèle à (BC) → Le dessin trompe : $5 \times 5{,}5 = 27{,}5$ alors que $4 \times 7 = 28$. Les rapports ne sont pas égaux.

EXERCICE 74 · DEFI

Des tiers partout

ABC est un triangle. On place M sur $[AB]$ tel que $AM = \frac{1}{3}\,AB$, et P sur $[BC]$ tel que $BP = \frac{1}{3}\,BC$.

Les droites (MP) et (AC) sont-elles parallèles ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas parallèles · pas parallèle · non parallèles · non parallèle · non pas parallèles · non, pas parallèles · ne sont pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · non elles ne sont pas parallèles · non, elles ne sont pas parallèles · les droites ne sont pas parallèles · non les droites ne sont pas parallèles · non, les droites ne sont pas parallèles · non elles ne le sont pas · non, elles ne le sont pas · sécantes · sécante · elles sont sécantes · les droites sont sécantes · non sécantes · non, sécantes · non elles sont sécantes · non, elles sont sécantes · non les droites sont sécantes · non, les droites sont sécantes · elles se coupent · non elles se coupent · non, elles se coupent · non ils ne sont pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · non (MP) et (AC) ne sont pas parallèles · non, (MP) et (AC) ne sont pas parallèles · (MP) et (AC) ne sont pas parallèles · (MP) n'est pas parallèle à (AC) · non (MP) n'est pas parallèle à (AC) · non, (MP) n'est pas parallèle à (AC) · non (MP) et (AC) sont sécantes · non, (MP) et (AC) sont sécantes · (MP) et (AC) sont sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les droites (MP) et (AC) coupent les côtés issus de quel sommet ? C'est depuis ce sommet qu'il faut lire les rapports.
2. Le sommet commun est B : compare $\frac{BM}{BA}$ et $\frac{BP}{BC}$.

CORRECTION

Le bon sommet — $M \in [BA]$ et $P \in [BC]$: les rapports se lisent depuis B.

Les rapports —

$$\frac{BM}{BA} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{BP}{BC} = \frac{1}{3}$$

Conclusion — Les rapports sont différents : si (MP) était parallèle à (AC), Thalès dans le triangle BAC les rendrait égaux.

(MP) et (AC) ne sont pas parallèles

Les deux « tiers » ne se mesurent pas depuis le même sommet : AM part de A, BP part de B. Pour la réciproque, tout se lit depuis le sommet commun aux deux côtés coupés.

PIÈGES ANTICIPÉS

oui / parallèles / parallèle / oui parallèles / oui, parallèles / elles sont parallèles / oui elles sont parallèles / oui, elles sont parallèles / les droites sont parallèles / oui ils sont parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, les droites sont parallèles / oui les droites sont parallèles / oui (MP) et (AC) sont parallèles / oui, (MP) et (AC) sont parallèles / (MP) et (AC) sont parallèles / oui (MP)//(AC) / oui, (MP)//(AC) / (MP)//(AC) / (AC)//(MP) / oui (MP) est parallèle à (AC) / oui, (MP) est parallèle à (AC) / (MP) est parallèle à (AC) → $\frac{1}{3}$ des deux côtés, mais pas depuis le même sommet ! Les côtés coupés sont $[BA]$ et $[BC]$: depuis B, $\frac{BM}{BA} = \frac{2}{3}$ et $\frac{BP}{BC} = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 75 · DEFI **La même longueur des deux côtés**

ABC est un triangle tel que $AB = 10$ cm et $AC = 15$ cm. On place M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$ de sorte que $AM = NC$; on note x cette longueur commune, en cm.

Calculer x pour que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.

Donner x en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime AN en fonction de x.
2. La réciproque demande $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, soit $\frac{x}{10} = \frac{15 - x}{15}$.

CORRECTION

Les longueurs —

$AM = x \quad ; \quad AN = 15 - x$

La condition —

$$\frac{x}{10} = \frac{15 - x}{15}$$

L'équation —

$15x = 10(15 - x) \quad \text{donc} \quad 25x = 150$

$x = 6$ cm

Vérification : $AM = 6$, $AN = 9$, et $\frac{6}{10} = \frac{9}{15} = 0{,}6$. Les points étant dans le même ordre, la réciproque donne le parallélisme.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → 9 cm, c'est $AN = 15 - x$. On demande $x = AM = NC$.

Maths à la carte · ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 76 · BASE

La quatrième proportionnelle

On veut construire un segment de longueur d, en cm, tel que $\frac{4}{3} = \frac{6}{d}$.

Calculer d.

Donner d en cm.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais les produits en croix.
2. $4 \times d = 3 \times 6$.

CORRECTION

Produits en croix —

$4 \times d = 3 \times 6 = 18$

$d = \frac{18}{4} = 4{,}5 \text{ cm}$

La construction par Thalès place ce segment sans calcul ; le calcul permet de vérifier la construction à la règle.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → Tu as calculé $\frac{6 \times 4}{3}$. Les produits en croix de $\frac{4}{3} = \frac{6}{d}$ donnent $4 \times d = 3 \times 6$.

EXERCICE 77 · BASE

Ce que donne la construction

On trace deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine O, non portées par une même droite. Sur $[Ox)$, on place I et J tels que $OI = 3$ cm et $OJ = 5$ cm ; sur $[Oy)$, on place K tel que $OK = 4$ cm. La parallèle à (JK) passant par I coupe $[Oy)$ en D.

Calculer OD.

Donner OD en cm.

Réponse attendue : 12/5 — aussi acceptées : 2.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle OJK, $I \in [OJ]$, $D \in [OK]$ et (ID) est parallèle à (JK).
2. Thalès donne $\frac{OI}{OJ} = \frac{OD}{OK}$.

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle OJK, (ID) est parallèle à (JK) :

$\frac{OI}{OJ} = \frac{OD}{OK}$ soit $\frac{3}{5} = \frac{OD}{4}$

$$OD = \frac{3 \times 4}{5} = 2{,}4 \text{ cm}$$

La construction fabrique la longueur OD telle que $\frac{5}{3} = \frac{4}{OD}$: c'est la méthode du cours.

PIÈGES ANTICIPÉS

20/3 → D est entre O et K, donc $OD < 4$ cm. Garde le petit triangle OID au numérateur : $\frac{OI}{OJ} = \frac{OD}{OK}$.

EXERCICE 78 · BASE **Quel point relier ?**

Pour placer sur $[AB]$ le point N tel que $AN = \frac{4}{9}\,AB$, on trace une demi-droite $[Ax)$ d'origine A, non portée par (AB), et on y reporte au compas neuf fois une même longueur u à partir de A. On relie le dernier point, F, à B, puis on trace la parallèle à (FB) passant par le point E de $[AF]$ tel que $AE = n \times u$.

Calculer n.

Donner n.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La parallèle coupe $[AB]$ en N. Thalès dans le triangle AFB donne $\frac{AN}{AB} = \frac{AE}{AF}$.
2. AF compte 9 longueurs u. Combien doit en compter AE ?

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle AFB, $E \in [AF]$, $N \in [AB]$ et (EN) est parallèle à (FB) :

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{n \times u}{9 \times u} = \frac{n}{9}$$

Le bon point — On veut $\frac{AN}{AB} = \frac{4}{9}$:

$n = 4$

Le dénominateur dit combien de longueurs reporter, le numérateur par quel point mener la parallèle : ici le quatrième, compté depuis A.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Avec $n = 5$, on obtiendrait $AN = \frac{5}{9}\,AB$. Les longueurs se comptent à partir de A : AE en compte 4.

9 → $n = 9$, c'est le point F lui-même : la parallèle serait (FB) et N tomberait en B.

EXERCICE 79 · PRATIQUE

Au-delà de B

Le segment $[AB]$ mesure $4{,}8$ cm. On construit le point M de la demi-droite $[AB)$ tel que $AM = \dfrac{5}{4}\,AB$: on reporte cinq fois la même longueur sur une demi-droite $[Ax)$, on relie le quatrième point à B, et la parallèle menée par le cinquième point coupe (AB) en M.

Calculer BM.

Donner BM en cm.

Réponse attendue : 6/5 — aussi acceptées : 1.2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par $AM = \dfrac{5}{4} \times 4{,}8$.
2. M est au-delà de B : $BM = AM - AB$.

CORRECTION

La longueur AM —

$$AM = \frac{5}{4} \times 4{,}8 = 6 \text{ cm}$$

Le morceau — B est entre A et M, donc :

$$BM = AM - AB = 6 - 4{,}8 = 1{,}2 \text{ cm}$$

Une fraction plus grande que 1 place le point au-delà de B ; ici BM vaut $\dfrac{1}{4}$ de AB.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 cm, c'est AM. On demande BM, le petit morceau au-delà de B.

EXERCICE 80 · PRATIQUE

Fabriquer un quotient

Deux droites (d) et (d') se coupent en O. Sur (d), munie d'un repère (O, U) avec $OU = 1$ cm, on place les points E et F d'abscisses 3 et 4. Sur (d'), munie d'un repère (O, V) avec $OV = 1$ cm, on place le point G d'abscisse 6. La parallèle à (FG) passant par E coupe (d') en H.

Calculer OH.

Donner OH en cm.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle OFG, $E \in [OF]$, $H \in [OG]$ et (EH) est parallèle à (FG).
2. $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OH}{OG}$.

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle OFG, (EH) est parallèle à (FG) :

$$\frac{OE}{OF} = \frac{OH}{OG} \quad \text{soit} \quad \frac{3}{4} = \frac{OH}{6}$$

$$OH = \frac{3 \times 6}{4} = 4{,}5 \text{ cm}$$

En général, avec des abscisses a, b, c, cette construction donne $OH = \dfrac{ac}{b}$: on construit un produit divisé par un nombre, sans calculer.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → H est entre O et G, donc $OH < 6$. Garde $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OH}{OG}$, le petit triangle au numérateur.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

L'inconnue au numérateur

On veut construire un segment de longueur d, en cm, tel que $\dfrac{d}{3} = \dfrac{5}{2}$.

Calculer d.

Donner d en cm.

Réponse attendue : 15/2 — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie les deux membres par 3.
2. $d = \dfrac{5 \times 3}{2}$.

CORRECTION

Isoler d —

$$d = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ cm}$$

Pour la construction : $OI = 2$ et $OJ = 5$ sur $[Ox)$, $OK = 3$ sur $[Oy)$; la parallèle à (IK) par J coupe $[Oy)$ en D avec $\dfrac{OD}{OK} = \dfrac{OJ}{OI}$, soit $OD = d$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6/5 → Tu as calculé $\dfrac{2 \times 3}{5}$. Dans $\dfrac{d}{3} = \dfrac{5}{2}$, on multiplie par 3 : $d = \dfrac{5 \times 3}{2}$.

EXERCICE 82 · PRATIQUE

L'inconnue au dénominateur

On veut construire un segment de longueur d, en cm, tel que $\dfrac{2}{d} = \dfrac{5}{8}$.

Calculer d.

Donner d en cm.

Réponse attendue : 16/5 — aussi acceptées : 3.2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Produits en croix.
2. $5 \times d = 2 \times 8$.

CORRECTION

Produits en croix —

$$5 \times d = 2 \times 8 = 16$$

$$d = \frac{16}{5} = 3{,}2 \text{ cm}$$

Pour la construction : $OI = 5$ et $OJ = 8$ sur $[Ox)$, $OK = 2$ sur $[Oy)$; la parallèle à (IK) par J coupe $[Oy)$ en D, et Thalès donne $\frac{OI}{OJ} = \frac{OK}{OD}$, soit $\frac{5}{8} = \frac{2}{OD}$: $OD = d$.

PIÈGES ANTICIPÉS

20 → Tu as calculé $\frac{5 \times 8}{2}$. Les produits en croix de $\frac{2}{d} = \frac{5}{8}$ donnent $5 \times d = 2 \times 8$.

EXERCICE 83 · PRATIQUE

Les trois quarts du segment

Le segment $[AB]$ mesure 10 cm. On construit le point M de $[AB]$ tel que $AM = \frac{3}{4}\,AB$, en reportant quatre longueurs égales sur une demi-droite $[Ax)$.

Calculer MB.

Donner MB en cm.

Réponse attendue : 5/2 — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. AM prend 3 parts sur 4. Combien en reste-t-il pour MB ?
2. $MB = \frac{1}{4}\,AB$.

CORRECTION

AM —

$$AM = \frac{3}{4} \times 10 = 7{,}5 \text{ cm}$$

MB —

$$MB = 10 - 7{,}5 = 2{,}5 \text{ cm}$$

Trois parts d'un côté, une de l'autre : $\frac{MA}{MB} = 3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

15/2 → $7{,}5$ cm, c'est AM. On demande MB, la part qui reste.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

Le segment qui reste

Sur une demi-droite $[Ox)$, on place I et J tels que $OI = 4$ cm et $OJ = 7$ cm ; sur une demi-droite $[Oy)$ de même origine, non portée par la même droite, on place K tel que $OK = 3$ cm. La parallèle à (JK) passant par I coupe $[Oy)$ en D.

Calculer DK.

Donner DK en cm, en valeur exacte.

Réponse attendue : 9/7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Thalès dans le triangle OJK donne OD.
2. $\dfrac{OD}{OK} = \dfrac{OI}{OJ}$, puis $DK = OK - OD$.

CORRECTION

Thalès —

$$\frac{OD}{OK} = \frac{OI}{OJ} \quad \text{soit} \quad OD = \frac{4 \times 3}{7} = \frac{12}{7}$$

Le morceau —

$$DK = 3 - \frac{12}{7} = \frac{21 - 12}{7} = \frac{9}{7} \text{ cm}$$

On pouvait aussi lire $\dfrac{DK}{OK} = \dfrac{IJ}{OJ} = \dfrac{3}{7}$: les morceaux se partagent dans le même rapport.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12/7` → $\dfrac{12}{7}$, c'est OD. On demande $DK = OK - OD$.

`1.3 / 1.29 / 1.286` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte : $\dfrac{9}{7}$.

EXERCICE 85 · RAISONNEMENT

Un rectangle de même aire

$KLMN$ est un rectangle tel que $KL = 9$ cm et $KN = 4$ cm. On place P sur $[KL]$ tel que $KP = 6$ cm. La parallèle à (NP) passant par L coupe la demi-droite $[KN)$ en Q, et R est le point tel que $KPRQ$ est un rectangle.

Calculer KQ.

Donner KQ en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle KLQ, $P \in [KL]$, $N \in [KQ]$ et (PN) est parallèle à (LQ).

2. $\dfrac{KP}{KL} = \dfrac{KN}{KQ}$.

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle KLQ, (PN) est parallèle à (LQ) :

$$\frac{KP}{KL} = \frac{KN}{KQ} \quad \text{soit} \quad \frac{6}{9} = \frac{4}{KQ}$$

$$KQ = \frac{9 \times 4}{6} = 6 \text{ cm}$$

Les produits en croix disent $KP \times KQ = KL \times KN$: $6 \times 6 = 9 \times 4 = 36$ cm². Le rectangle $KPRQ$, ici un carré, a la même aire que $KLMN$.

PIÈGES ANTICIPÉS

8/3 → N est entre K et Q, donc $KQ > 4$ cm. Écris $\dfrac{KP}{KL} = \dfrac{KN}{KQ}$: le petit triangle KPN au numérateur.

EXERCICE 86 · RAISONNEMENT

Construire un produit

On trace deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine, non portées par une même droite. Sur $[Ox)$, on place I et A tels que $OI = 1$ cm et $OA = 3$ cm ; sur $[Oy)$, on place B tel que $OB = 2{,}5$ cm. La parallèle à (IB) passant par A coupe $[Oy)$ en P.

Calculer OP.

Donner OP en cm.

Réponse attendue : `15/2` — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle OAP, $I \in [OA]$, $B \in [OP]$ et (IB) est parallèle à (AP).
2. $\dfrac{OI}{OA} = \dfrac{OB}{OP}$, avec $OI = 1$.

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle OAP, (IB) est parallèle à (AP) :

$$\frac{OI}{OA} = \frac{OB}{OP} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{3} = \frac{2{,}5}{OP}$$

$$OP = 3 \times 2{,}5 = 7{,}5 \text{ cm}$$

Avec l'unité $OI = 1$, cette construction donne $OP = OA \times OB$: on construit un produit avec une règle et une équerre.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/6 → B est entre O et P, donc $OP > 2{,}5$ cm. Écris $\dfrac{OI}{OA} = \dfrac{OB}{OP}$, le petit triangle OIB au numérateur.

EXERCICE 87 · DEFI

Construire l'inverse

On trace deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine, non portées par une même droite. Sur $[Ox)$, on place I et A tels que $OI = 1$ cm et $OA = 4$ cm ; sur $[Oy)$, on place J tel que $OJ = 1$ cm. La parallèle à (AJ) passant par I coupe $[Oy)$ en P.

Calculer OP.

Donner OP en cm.

Réponse attendue : 1/4 — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Repère le triangle et la parallèle : (IP) est parallèle à (AJ), avec $I \in [OA]$ et $P \in [OJ]$.
2. $\dfrac{OI}{OA} = \dfrac{OP}{OJ}$.

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle OAJ, (IP) est parallèle à (AJ) :

$$\frac{OP}{OJ} = \frac{OI}{OA} \quad \text{soit} \quad OP = \frac{1 \times 1}{4}$$

$$OP = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ cm}$$

Avec deux unités, cette construction donne $OP = \dfrac{1}{OA}$: l'inverse d'une longueur se construit, lui aussi.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → P est entre O et J, donc $OP < 1$ cm. Écris $\dfrac{OP}{OJ} = \dfrac{OI}{OA}$: le petit triangle OIP au numérateur.

EXERCICE 88 · DEFI

Neuf fois plus loin

Le segment $[AB]$ mesure 12 cm. On construit, par la méthode du cours, le point M de la demi-droite $[AB)$ tel que $AM = \dfrac{9}{8}\,AB$.

Calculer le rapport $\dfrac{MA}{MB}$.

Donner ce rapport.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule AM, puis $MB = AM - AB$.
2. AM compte 9 huitièmes de AB, et MB un seul.

CORRECTION

Les longueurs —

$$AM = \frac{9}{8} \times 12 = 13{,}5 \quad ; \quad MB = 13{,}5 - 12 = 1{,}5$$

Le rapport —

$$\frac{MA}{MB} = \frac{13{,}5}{1{,}5} = 9$$

Le rapport ne dépend pas de la longueur de $[AB]$: AM vaut 9 huitièmes de AB et MB un huitième, donc $\dfrac{MA}{MB} = 9$ toujours.

PIÈGES ANTICIPÉS

9/8 → $\dfrac{9}{8}$, c'est $\dfrac{MA}{AB}$. On demande $\dfrac{MA}{MB}$: MB n'est qu'un huitième de AB.

EXERCICE 89 · BASE

Deux parts contre trois

Le segment $[AB]$ mesure 15 cm. On place sur $[AB]$ le point P tel que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{2}{3}$.

Calculer AP.

Donner AP en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. PA compte 2 parts et PB en compte 3. Combien de parts pour $[AB]$ entier ?
2. $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{2}{5}$.

CORRECTION

Les parts — $[AB]$ compte $2 + 3 = 5$ parts égales, de 3 cm chacune.

$$\frac{AP}{AB} = \frac{2}{5}$$

$$AP = \frac{2}{5} \times 15 = 6 \text{ cm}$$

Vérification : $PB = 9$ cm et $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$. Le rapport $\dfrac{2}{3}$ compare deux morceaux, pas un morceau au tout.

PIÈGES ANTICIPÉS

10 → Tu as pris $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{2}{3}$. Mais $\dfrac{2}{3}$ compare PA à PB : le segment entier compte $2 + 3 = 5$ parts.

9 → 9 cm, c'est PB, les 3 parts du côté de B. On demande AP.

EXERCICE 90 · BASE

Combien de reports ?

On veut placer sur $[AB]$ le point P tel que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{4}{7}$, par la méthode du cours : reporter la même longueur plusieurs fois sur une demi-droite $[Ax)$, relier le dernier point à B, et mener une

parallèle.

Combien de fois faut-il reporter la longueur ?

Donner ce nombre.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. PA compte 4 parts et PB en compte 7.
2. Le dernier point reporté correspond à B : il faut autant de reports que de parts dans $[AB]$.

CORRECTION

Les parts — PA compte 4 parts, PB en compte 7 : $[AB]$ en compte $4+7$.

$$4+7=11$$

La construction — On reporte 11 fois la longueur, on relie le onzième point à B, et on mène la parallèle par le quatrième point.

Pour $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{p}{q}$, on reporte $p+q$ longueurs et on mène la parallèle par le p-ième point.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → Avec 7 reports, on partagerait $[AB]$ en 7 parts. Mais 7 parts sont seulement celles de PB : il faut y ajouter les 4 parts de PA.

EXERCICE 91 · BASE **Le deuxième point sur cinq**

Le segment $[AB]$ mesure 12 cm. Sur une demi-droite $[Ax)$ d'origine A, non portée par (AB), on reporte cinq fois la même longueur à partir de A ; on note E le deuxième point et F le cinquième. La parallèle à (FB) passant par E coupe $[AB]$ en P.

Calculer AP.

Donner AP en cm.

Réponse attendue : 24/5 — aussi acceptées : 4.8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle AFB, (EP) est parallèle à (FB).
2. $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{2}{5}$.

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle AFB, $E\in[AF]$, $P\in[AB]$ et (EP) est parallèle à (FB) :

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AE}{AF}=\frac{2}{5}$$

$$AP=\frac{2}{5}\times 12=4{,}8\ \text{cm}$$

La construction partage $[AB]$ en 5 parts : P en prend 2, et $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{2}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

36/5 → $7{,}2$ cm, c'est PB, les 3 parts du côté de B. On demande AP.

EXERCICE 92 · PRATIQUE

Le morceau du côté de B

Le segment $[AB]$ mesure 18 cm. P est le point de $[AB]$ tel que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{2}{7}$.

Calculer PB.

Donner PB en cm.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Combien de parts dans $[AB]$? Et combien pour PB ?
2. $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{7}{9}$.

CORRECTION

Les parts — $[AB]$ compte $2 + 7 = 9$ parts, et PB en prend 7.

$$\frac{PB}{AB} = \frac{7}{9}$$

$$PB = \frac{7}{9} \times 18 = 14 \text{ cm}$$

Vérification : $PA = 4$ cm et $\dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 cm, c'est PA. On demande PB, les 7 parts du côté de B.

63 → Tu as multiplié AB par $\dfrac{7}{2}$: PB dépasserait AB ! Le segment entier compte $2 + 7 = 9$ parts.

EXERCICE 93 · PRATIQUE

Retrouver la proportion

Un point P de $[AB]$ vérifie $PA = 6$ cm et $PB = 9$ cm.

Calculer le rapport $\dfrac{PA}{PB}$, sous forme de fraction irréductible.

Donner ce rapport sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\frac{6}{9}$, puis simplifie.
2. 6 et 9 sont tous deux multiples de 3.

CORRECTION

Le rapport —
$$\frac{PA}{PB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
Pour construire ce point, on reporterait $2 + 3 = 5$ longueurs et on mènerait la parallèle par le deuxième point.

PIÈGES ANTICIPÉS

2/5 → $\frac{2}{5}$, c'est $\frac{PA}{AB}$. On demande $\frac{PA}{PB}$: les deux morceaux.

3/2 → Tu as calculé $\frac{PB}{PA}$. Le rapport demandé a PA au numérateur.

EXERCICE 94 · PRATIQUE

Couper en trois

Le segment $[AB]$ mesure $10{,}5$ cm. Sur une demi-droite $[Ax)$, on reporte trois fois la même longueur : E_1, E_2, E_3. On relie E_3 à B, puis les parallèles à (E_3B) passant par E_1 et E_2 coupent $[AB]$ en P_1 et P_2.

Calculer AP_2.

Donner AP_2 en cm.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle AE_3B, (E_2P_2) est parallèle à (E_3B).
2. $\frac{AP_2}{AB} = \frac{AE_2}{AE_3} = \frac{2}{3}$.

CORRECTION

Thalès — Dans le triangle AE_3B, (E_2P_2) est parallèle à (E_3B) :
$$\frac{AP_2}{AB} = \frac{AE_2}{AE_3} = \frac{2}{3}$$
$$AP_2 = \frac{2}{3} \times 10{,}5 = 7 \text{ cm}$$
Les points P_1 et P_2 partagent $[AB]$ en trois segments de $3{,}5$ cm : c'est ainsi qu'on partage un segment en parts égales sans mesurer.

PIÈGES ANTICIPÉS

7/2 → $3{,}5$ cm, c'est AP_1, le premier tiers. P_2 correspond au deuxième point, E_2 : il prend deux tiers.

EXERCICE 95 · PRATIQUE

Partager un ruban

On partage un ruban de $2{,}7$ m en deux morceaux dont les longueurs sont dans le rapport $\frac{4}{5}$.

Calculer la longueur du morceau le plus court, en mètres.

Donner cette longueur en mètres.

Réponse attendue : 6/5 — aussi acceptées : 1.2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le ruban compte $4+5$ parts égales.
2. Le plus court prend 4 parts sur 9.

CORRECTION

Les parts — $4+5=9$ parts, donc une part mesure $\frac{2{,}7}{9}=0{,}3$ m.

$4\times 0{,}3=1{,}2$ m

Vérification : l'autre morceau mesure $1{,}5$ m, et $\frac{1{,}2}{1{,}5}=\frac{4}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

54/25 → Tu as pris $\frac{4}{5}$ du ruban entier. Mais $\frac{4}{5}$ compare les deux morceaux : le ruban compte $4+5=9$ parts.

3/2 → $1{,}5$ m, c'est le morceau le plus long, 5 parts sur 9. On demande le plus court.

EXERCICE 96 · PRATIQUE

L'abscisse du point de partage

F et G sont deux points distincts. K est le point de $[FG]$ tel que $\frac{KF}{KG}=\frac{3}{2}$.

Donner l'abscisse de K dans le repère (F,G) de la droite (FG).

Donner cette abscisse.

Réponse attendue : 3/5 — aussi acceptées : 0.6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le repère (F,G), F a pour abscisse 0 et G pour abscisse 1. L'abscisse de K est $\frac{FK}{FG}$.
2. KF compte 3 parts et KG en compte 2 : combien de parts pour $[FG]$?

CORRECTION

Les parts — $[FG]$ compte $3+2=5$ parts, et FK en prend 3.

$\frac{FK}{FG}=\frac{3}{5}$

L'abscisse — K est sur $[FG]$, du côté de G par rapport à F :

$x_K = \dfrac{3}{5}$

L'abscisse dans le repère (F, G) est la fraction de $[FG]$ parcourue depuis F.

PIÈGES ANTICIPÉS

3/2 → $\dfrac{3}{2}$ compare KF à KG, pas FK à FG. Le segment $[FG]$ compte $3 + 2 = 5$ parts.

2/5 → $\dfrac{2}{5}$, c'est la part de $[FG]$ du côté de G. Dans le repère (F, G), l'abscisse se mesure depuis F.

EXERCICE 97 · RAISONNEMENT

Deux centimètres d'écart

P est un point de $[AB]$ tel que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{3}{4}$ et $PB - PA = 2$ cm.

Calculer AB.

Donner AB en cm.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. PA compte 3 parts et PB en compte 4. Combien de parts représentent les 2 cm d'écart ?
2. Une seule part vaut 2 cm. Et $[AB]$ compte 7 parts.

CORRECTION

Une part — $PB - PA$ vaut $4 - 3 = 1$ part, donc une part mesure 2 cm.

Le segment —

$AB = 7 \times 2 = 14$ cm

Vérification : $PA = 6$, $PB = 8$, $\dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ et $8 - 6 = 2$. Raisonner en parts évite toute équation.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7, c'est le nombre de parts. Chaque part mesure 2 cm.

EXERCICE 98 · RAISONNEMENT

Le partage, et puis Thalès

RST est un triangle. U est le point de $[ST]$ tel que $\dfrac{US}{UT} = \dfrac{3}{4}$, et la parallèle à (RT) passant par U coupe $[SR]$ en V.

Calculer le rapport $\dfrac{RV}{RS}$.

Donner ce rapport.

Réponse attendue : 4/7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par $\frac{SU}{ST}$: combien de parts dans $[ST]$?
2. Dans le triangle SRT, (UV) est parallèle à (RT) : Thalès depuis S donne $\frac{SV}{SR}$.
3. Puis $RV = RS - SV$.

CORRECTION

Le partage —

$$\frac{SU}{ST} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$$

Thalès depuis S — Dans le triangle SRT, $U \in [ST]$, $V \in [SR]$ et (UV) est parallèle à (RT) :

$$\frac{SV}{SR} = \frac{SU}{ST} = \frac{3}{7}$$

Le reste —

$$\frac{RV}{RS} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

Le sommet commun aux droites (ST) et (SR) est S : Thalès se lit depuis S, puis on passe au morceau RV.

PIÈGES ANTICIPÉS

3/7 → $\frac{3}{7}$, c'est $\frac{SV}{SR}$, mesuré depuis S. On demande $\frac{RV}{RS}$: l'autre morceau.

3/4 → $\frac{3}{4}$ compare les deux morceaux US et UT, pas un morceau au côté entier : $[ST]$ compte $3+4=7$ parts.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

Deux points symétriques

Le segment $[AB]$ mesure 16 cm. P est le point de $[AB]$ tel que $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{3}$, et Q le point de $[AB]$ tel que $\frac{QA}{QB} = \frac{3}{5}$.

Calculer PQ.

Donner PQ en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux partages comptent 8 parts de 2 cm. Calcule AP et AQ.
2. $AP = 10$ cm et $AQ = 6$ cm : où sont P et Q l'un par rapport à l'autre ?

CORRECTION

Les deux points —

$$AP = \frac{5}{8} \times 16 = 10 \quad ; \quad AQ = \frac{3}{8} \times 16 = 6$$

La distance — P et Q sont sur $[AB]$, à 10 cm et à 6 cm de A :

$$PQ = 10 - 6 = 4 \text{ cm}$$

P et Q sont symétriques par rapport au milieu de $[AB]$, chacun à 2 cm de lui.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 cm, c'est AP. On demande la distance entre P et Q.

`6` → 6 cm, c'est AQ. On demande la distance entre P et Q.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT

Trois morceaux

On partage un segment $[AB]$ de 15 cm en trois morceaux dont les longueurs sont proportionnelles à 2, 3 et 5.

Calculer la longueur du plus long morceau.

Donner cette longueur en cm.

Réponse attendue : `15/2` — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Combien de parts égales en tout ?
2. $2 + 3 + 5 = 10$ parts. Le plus long morceau en prend 5.

CORRECTION

Les parts — $2 + 3 + 5 = 10$ parts, donc une part mesure $1{,}5$ cm.

$$5 \times 1{,}5 = 7{,}5 \text{ cm}$$

Les morceaux mesurent 3, $4{,}5$ et $7{,}5$ cm. À la règle, on reporterait 10 longueurs et on mènerait deux parallèles, par le deuxième et le cinquième point.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 cm, c'est le plus court morceau, 2 parts. On demande le plus long, 5 parts.

`5` → Tu as partagé en trois parts égales. Les morceaux sont proportionnels à 2, 3 et 5 : il y a 10 parts.

EXERCICE 101 · DEFI

Le point hors du segment

Le segment $[AB]$ mesure 10 cm. Q est un point de la droite (AB), **hors** du segment $[AB]$, tel que $\dfrac{QA}{QB} = \dfrac{2}{3}$.

Calculer QA.

Donner QA en cm.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $QA < QB$: Q est plus près de A que de B. De quel côté du segment se trouve-t-il ?
2. Q est au-delà de A, donc $QB = QA + 10$. Pose $QA = x$.
3. Résous $\dfrac{x}{x+10} = \dfrac{2}{3}$.

CORRECTION

La position — $QA < QB$, donc Q est du côté de A : A est entre Q et B, et $QB = QA + AB$.

L'équation — On pose $QA = x$:

$$\frac{x}{x+10} = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad 3x = 2x + 20$$

$$QA = x = 20 \text{ cm}$$

Vérification : $QB = 30$ cm et $\dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$. Le même rapport $\dfrac{2}{3}$ donne un point dans le segment ($PA = 4$ cm) et un point hors du segment.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 cm, c'est le point **du segment** qui partage $[AB]$ dans le rapport $\dfrac{2}{3}$. Ici Q est hors de $[AB]$, au-delà de A : $QB = QA + 10$.

EXERCICE 102 · DEFI

Un partage dans le partage

Le segment $[AB]$ mesure 12 cm. P est le point de $[AB]$ tel que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{1}{3}$, puis R est le point de $[PB]$ tel que $\dfrac{RP}{RB} = \dfrac{1}{2}$.

Calculer AR.

Donner AR en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par AP et PB : $[AB]$ compte $1 + 3 = 4$ parts.
2. $PB = 9$ cm, partagé en $1 + 2 = 3$ parts : PR en prend une.

CORRECTION

Le premier partage —

$$AP = \frac{1}{4} \times 12 = 3 \quad ; \quad PB = 9$$

Le second partage —

$$PR = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

La somme —

$$AR = AP + PR = 3 + 3 = 6 \text{ cm}$$

$AR = 6$ cm : R est le milieu de $[AB]$. Deux partages successifs se ramènent à un seul.

PIÈGES ANTICIPÉS

15/2 → Tu as pris $PR = \frac{1}{2} \times 9$. Mais $\frac{1}{2}$ compare RP à RB : $[PB]$ compte $1 + 2 = 3$ parts.

AH
Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI