– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Vecteurs et translations

1re année secondaire · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum nabdaw le chapitre numéro 4 : vecteurs et translations. El kelma vecteur jeya mel latin, w ma3neha « transporter ». Bech nchoufou kifech nwasfou déplacement b vecteur, w kifech nzall9ou figure kemla bla ma tetbaddel : hedhi hiya la translation. Yalla nabdaw.

عسلامة ! ليوم نبداو le chapitre numéro 4 : vecteurs et translations . الكلمة vecteur جاية من الـ latin ، و معناها transporter . باش نشوفو كيفاش نوصفو déplacement بـ vecteur ، و كيفاش نزلّقو figure كاملة بلا ما تتبدّل : هذي هي la translation . يالله نبداو.

Bonjour ! Aujourd'hui on commence le chapitre numéro 4 : vecteurs et translations. Le mot vecteur vient du latin, et veut dire « transporter ». On va voir comment décrire un déplacement par un vecteur, et comment faire glisser une figure entière sans la changer : c'est la translation. Allons-y.

Un **vecteur**, c'est un déplacement : une direction, un sens, une longueur. Le mot vient du latin « vehere », transporter.

Ce chapitre en fait deux choses. D'abord un **outil de démonstration** : une égalité de vecteurs, c'est un parallélogramme ou un milieu écrit en une ligne. Ensuite une transformation, la **translation**, qui fait glisser toute une figure du même vecteur — sans la tourner, sans la déformer. Tout ce qu'elle touche garde ses longueurs, ses angles et son aire.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Reconnaître deux bipoints qui représentent le même vecteur, par les milieux ou par un parallélogramme

  > Reconnaître deux bipoints qui représentent le même vecteur, par les milieux ou par un parallélogramme.

> *Reconnaître deux bipoints qui représentent le même vecteur, par les milieux ou par un parallélogramme.*

- Travailler une égalité de vecteurs : échanger les moyens, reconnaître le milieu d'un segment

  > Travailler une égalité de vecteurs : échanger les moyens, reconnaître le milieu d'un segment.
  > *Travailler une égalité de vecteurs : échanger les moyens, reconnaître le milieu d'un segment.*

- Construire l'image d'un point par une translation, au compas ou dans un repère

  > Construire l'image d'un point par une translation, au compas ou dans un repère.
  > *Construire l'image d'un point par une translation, au compas ou dans un repère.*

- Construire l'image d'une droite, d'un segment, d'un cercle et d'un polygone

  > Construire l'image d'une droite, d'un segment, d'un cercle et d'un polygone.
  > *Construire l'image d'une droite, d'un segment, d'un cercle et d'un polygone.*

- Utiliser ce qu'une translation conserve : les distances, les angles, les aires et le parallélisme

  > Utiliser ce qu'une translation conserve : les distances, les angles, les aires et le parallélisme.
  > *Utiliser ce qu'une translation conserve : les distances, les angles, les aires et le parallélisme.*

- Démontrer une égalité de vecteurs, un milieu ou un parallélogramme

  > Démontrer une égalité de vecteurs, un milieu ou un parallélogramme.
  > *Démontrer une égalité de vecteurs, un milieu ou un parallélogramme.*

---

1. ACTIVITÉ

Deux segments, un même milieu

CE QU'IL DIT

Chouf el figure : le segment AD w le segment BC 3andhom le même milieu I, w le segment AF w le segment BE 3andhom le même milieu J. Donc ABDC parallélogramme, w ABFE parallélogramme zeda. Ach bech nel9aw ? CDFE parallélogramme, w ses diagonales 3andhom le même milieu. El trois couples ya3mlou nafs el déplacement : hedha houwa le vecteur.

شوف الـ figure : le segment A D و le segment B C عندهم le même milieu I ، و le segment A F و le segment B E عندهم le même milieu J . donc A B D C parallélogramme و A B F E parallélogramme زادة . آش باش نلقاو ؟ C D F E parallélogramme و ses diagonales عندهم le même milieu . الـ trois couples يعملو نفس الـ déplacement : هذا هو le vecteur .

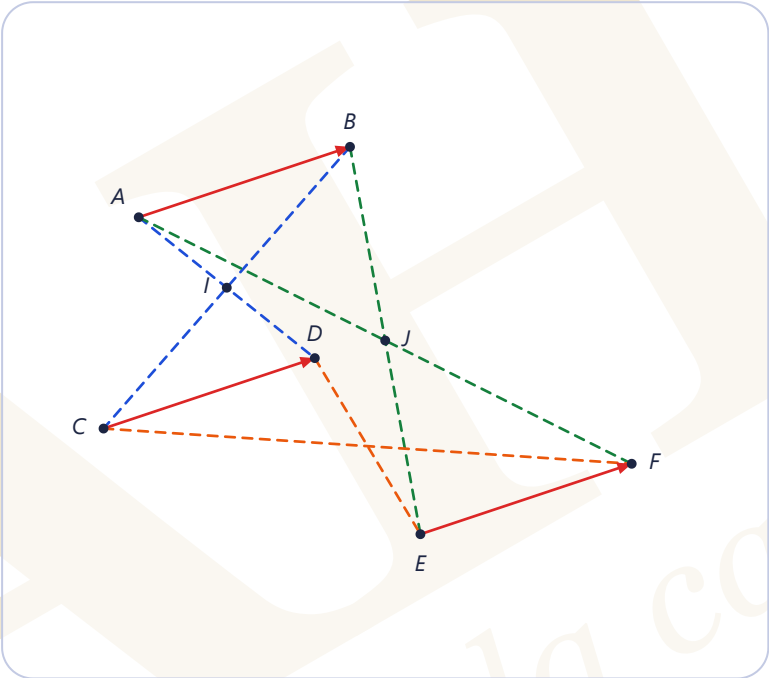
Regarde la figure : les segments AD et BC ont le même milieu I, et les segments AF et BE ont le même milieu J. Donc ABDC est un parallélogramme, et ABFE aussi. Qu'est-ce qu'on trouve ? CDFE est un parallélogramme, et ses diagonales ont le même milieu. Les trois couples font le même déplacement : c'est ça, le vecteur.

Dans la figure, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu I, et les segments $[AF]$ et $[BE]$ ont le même milieu J.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Et celle du quadrilatère $ABFE$?

2. Compare les longueurs CD et EF, la position des droites (CD) et (EF), et le sens de C vers D et de E vers F.
3. Déduis-en que $CDFE$ est un parallélogramme, puis que les segments $[CF]$ et $[DE]$ ont le même milieu.

Les couples de points (A, B), (C, D) et (E, F) décrivent **le même déplacement** : on va de A à B comme on va de C à D, ou de E à F. C'est ce déplacement commun qu'on va appeler un **vecteur**.



Les trois couples (A, B), (C, D) et (E, F) font le même déplacement.

Six points : A et B en haut, C et D au milieu à gauche, E et F en bas à droite. Les segments [AD] et [BC], en pointillés bleus, se coupent en leur milieu commun I. Les segments [AF] et [BE], en pointillés verts, se coupent en leur milieu commun J. Les segments [CF] et [DE], en pointillés orange, se coupent eux aussi en leur milieu. Pour finir, trois flèches rouges vont de A vers B, de C vers D et de E vers F : elles sont parallèles, de même sens et de même longueur.

2. DÉFINITION

Le vecteur

CE QU'IL DIT

Hedha ta3rif le vecteur. Le vecteur AB égale le vecteur CD ki le segment AD w le segment BC 3andhom le même milieu. Kifech tetfakkarha ? A w D houma les extrêmes, B w C houma les moyens. W redd belek mel tartib : A houwa l'origine, B houwa l'extrémité, w le vecteur BA mouch le vecteur AB.

هذا تعريف le vecteur AB égale le vecteur CD كي le segment AD و le segment BC عندهم les extrêmes ، A و D هوما les moyens و C هوما . même milieu كيفاش تتفكّرها ؟ . و ردّ بالك من الترتيب : A هو l'origine ، B هو l'extrémité ، و le vecteur BA موش le vecteur AB .

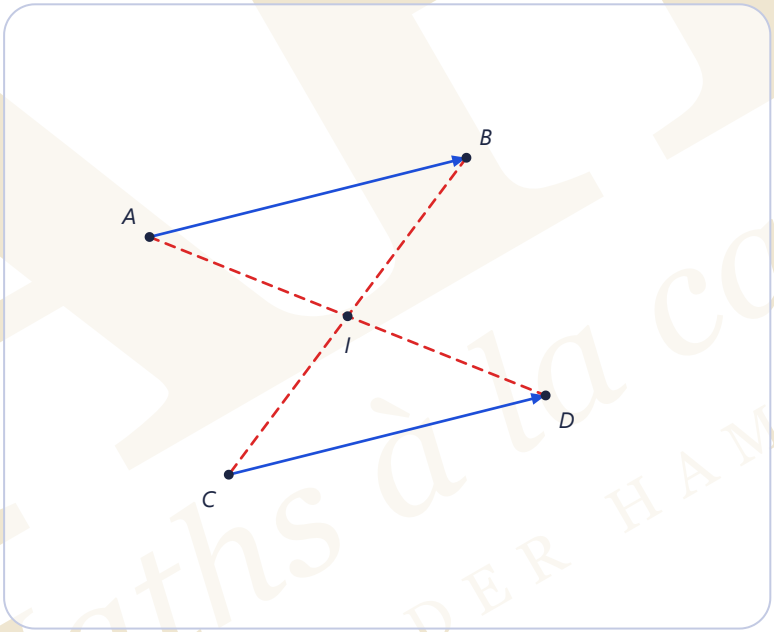
Voici la définition du vecteur. Le vecteur AB égale le vecteur CD quand les segments AD et BC ont le même milieu. Comment s'en souvenir ? A et D sont les extrêmes, B et C sont les moyens. Et attention à l'ordre : A est l'origine, B est l'extrémité, et le vecteur BA n'est pas le vecteur AB.

Soient A, B, C et D quatre points du plan. On dit que les bipoints (A, B) et (C, D) **représentent le même vecteur** lorsque les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. On écrit alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Pour s'en souvenir, on lit l'égalité de gauche à droite : A et D sont les **extrêmes**, B et C les **moyens**. Le segment des extrêmes $[AD]$ et le segment des moyens $[BC]$ ont le même milieu.

Dans le vecteur $\overrightarrow{AB}$, A est l'**origine** et B l'**extrémité** : l'ordre des lettres compte : dès que $A \neq B$, $\overrightarrow{BA}$ n'est pas le même vecteur que $\overrightarrow{AB}$.

Les bipoints (A, A), (B, B), … représentent tous un même vecteur, le **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$.



Les extrêmes [AD] et les moyens [BC] ont le même milieu : les vecteurs AB et CD sont égaux.

Deux flèches bleues parallèles et de même longueur : l'une va de A vers B, en haut, l'autre de C vers D, plus bas, dans le même sens. En pointillés rouges, les segments [AD] et [BC] se croisent en leur milieu commun I.

EXTRÊMES ET MOYENS

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont le même milieu}$$

EXEMPLE TRAITÉ

$EFGH$ est un parallélogramme de centre O. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{HG}$.

Extrêmes et moyens — Dans l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$, les extrêmes sont E et G, les moyens sont F et H.

$[EG]$ et $[FH]$

Les diagonales — $[EG]$ et $[FH]$ sont les diagonales du parallélogramme : elles ont le même milieu, le centre O.

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ car $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ car $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.. Si $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, $ABCD$ est un parallélogramme : c'est le vecteur $\overrightarrow{DC}$ qui est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$, et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ va dans le sens contraire. On croise toujours les extrêmes A et D, puis les moyens B et C.

---

3. ACTIVITÉ

Même direction, même sens, même longueur

CE QU'IL DIT

Tawa chouf el flèches. Awel 7aja : chkoun fihom parallèles ? Ba3d : chkoun fihom mechyin fi nafs el sens ? W fel e5er : chkoun 3andhom nafs el longueur ? Ki yetjamm3ou el trois : même direction, même sens, même longueur, 3andek le même vecteur. W ken wa7da barka tetbaddel, le vecteur yetbaddel.

توّا شوف الـ flèches . أوّل حاجة : شكون فيهم parallèles ؟ بعد : شكون فيهم ماشين في نفس الـ sens ؟ و في الآخر : شكون عندهم نفس الـ longueur ؟ كي يتجمّعو الـ même longueur ، même sens ، même direction : trois ، عندك le même vecteur . و كان وحدة برك تتبدّل ، le vecteur يتبدّل .

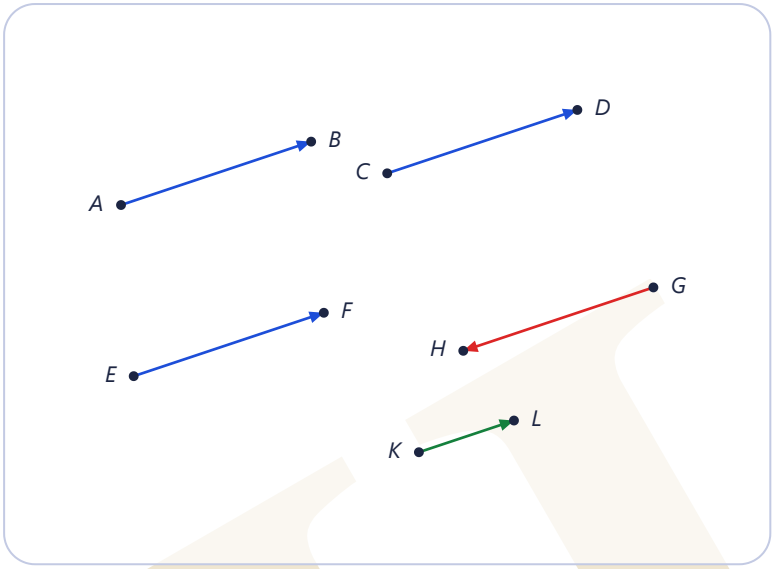
Maintenant, regarde les flèches. D'abord : lesquelles sont parallèles ? Ensuite : lesquelles vont dans le même sens ? Et enfin : lesquelles ont la même longueur ? Quand les trois sont réunies — même direction, même sens, même longueur —, tu as le même vecteur. Et si une seule change, le vecteur change.

Sur la figure, cinq flèches.

1. Lesquelles sont portées par des droites parallèles ? On dit qu'elles ont la même **direction**.
2. Parmi elles, lesquelles vont dans le même **sens** ?
3. Parmi celles-là, lesquelles ont la même **longueur** ?
4. Vérifie la définition sur deux flèches bleues : les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont-ils le même milieu ?

Deux bipoints représentent le même vecteur quand ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. Si une seule de ces trois choses change, le vecteur change. Ici, seules les flèches bleues représentent un même vecteur :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$$



Même direction, même sens, même longueur : seules les trois flèches bleues représentent le même vecteur.

Cinq flèches. Trois flèches bleues, de A vers B, de C vers D et de E vers F, sont parallèles, montent légèrement vers la droite et ont la même longueur. Une flèche rouge, de G vers H, est parallèle aux bleues et de même longueur, mais elle va dans l'autre sens, vers la gauche. Une flèche verte, de K vers L, est parallèle aux bleues et va dans leur sens, mais elle est deux fois plus courte.

4. ACTIVITÉ

Les milieux d'un triangle

CE QU'IL DIT

Tba3ni : B prime w A prime houma les milieux du segment AC w du segment BC. Donc la droite B prime A prime parallèle à la droite AB, w B prime A prime égale la moitié de AB. W C prime houwa le milieu de AB. Donc le vecteur B prime A prime égale le vecteur AC prime, w égale le vecteur C prime B : même direction, même sens, même longueur.

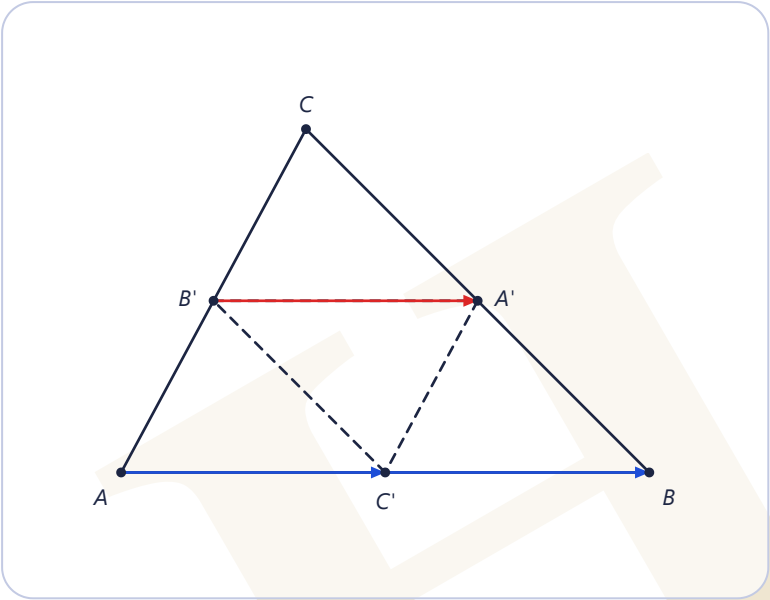
تبّعني : B prime و A prime هوما les milieux du segment A C و B prime A prime parallèle à la droite A B ، و B prime A prime égale la moitié de A B . و C prime هو le milieu de A B . donc la droite B prime A prime égale le vecteur A C prime ، donc le vecteur B prime A prime égale le vecteur C prime B : même direction ، même sens ، même longueur .

Suis-moi : B prime et A prime sont les milieux des segments AC et BC. Donc la droite B prime A prime est parallèle à la droite AB, et B prime A prime égale la moitié de AB. Et C prime est le milieu de AB. Donc le vecteur B prime A prime égale le vecteur AC prime, et aussi le vecteur C prime B : même direction, même sens, même longueur.

ABC est un triangle, et A', B', C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Nomme tous les vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{B'A'}$. Justifie.
2. Nomme tous les vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{BA'}$. Justifie.

Le théorème des milieux, vu au collège, donne à la fois la direction et la longueur : il ne reste qu'à regarder le sens.



En vecteurs : B'A' = AC' = C'B.

Un triangle ABC, avec A en bas à gauche, B en bas à droite et C en haut. C' est le milieu de [AB], B' celui de [AC] et A' celui de [BC] ; les segments qui joignent ces trois milieux sont en pointillés. Une flèche rouge va de B' vers A', horizontale, vers la droite. Deux flèches bleues, posées sur le côté [AB], vont de A vers C' puis de C' vers B : elles ont la même direction, le même sens et la même longueur que la flèche rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le triangle ABC de l'activité, quels vecteurs de la figure sont égaux au vecteur $\overrightarrow{B'A'}$? Et au vecteur $\overrightarrow{BA'}$?

Le théorème des milieux — B' et A' sont les milieux de $[AC]$ et de $[BC]$: la droite $(B'A')$ est parallèle à (AB), et $B'A'$ vaut la moitié de AB, c'est-à-dire AC' et $C'B$.

$$B'A' = AC' = C'B = \frac{1}{2}\,AB$$

Le sens — De B' vers A', on va dans le même sens que de A vers B. Même direction, même sens, même longueur : les vecteurs $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{C'B}$ sont égaux.

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{C'B}$$

Même travail pour le vecteur BA' — A' est le milieu de $[BC]$, et $(C'B')$ est parallèle à (BC) avec $C'B' = \frac{1}{2}\,BC$. De B vers A', de A' vers C et de C' vers B', on va dans le même sens : les vecteurs $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{A'C}$ et $\overrightarrow{C'B'}$ sont égaux.

$$\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{C'B'}$$

5. PROPRIÉTÉ

Égalité vectorielle et parallélogramme

CE QU'IL DIT

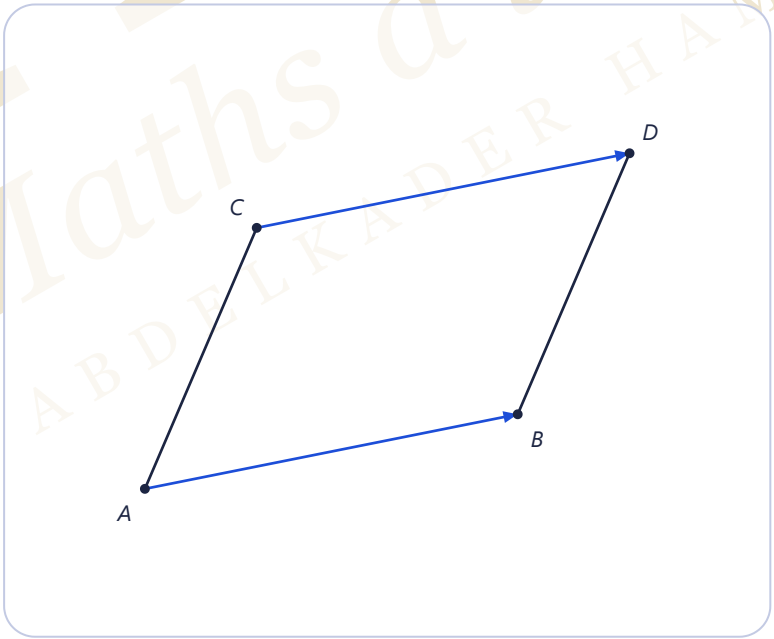
Hedhi el 9a3da elli bech nesta3mlouha barcha. Ken le vecteur AB égale le vecteur CD, nejmou nbaddlou blayes les moyens : le vecteur AC égale le vecteur BD. W ken A, B, C mouch alignés, ABDC parallélogramme. Redd belek mel tartib : ABDC, mouch ABCD. W zeda, AB égale CD, w la droite AB parallèle à la droite CD.

هذي القاعدة اللي باش نستعملوها برشا . كان le vecteur A B égale le vecteur C D ، نجمو نبدّلو بلايص les moyens : le vecteur A C égale le vecteur B D . و كان C ، B ، A موش parallélogramme A B D C ، alignés . ردّ
بالك من الترتيب : A B D C ، موش A B C D . و زادة ، A B égale C D ، و la droite A B parallèle à la droite C D .

Voici la règle qu'on va utiliser le plus. Si le vecteur AB égale le vecteur CD, on peut échanger les moyens : le vecteur AC égale le vecteur BD. Et si A, B, C ne sont pas alignés, ABDC est un parallélogramme. Attention à l'ordre : ABDC, pas ABCD. Et en plus, AB égale CD, et la droite AB est parallèle à la droite CD.

Soient quatre points A, B, C et D.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **équivaut à** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$: on peut **échanger les moyens**.
- Si A, B et C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **équivaut à** : $ABDC$ est un parallélogramme. Attention à l'ordre des sommets : origine et extrémité du premier vecteur, puis extrémité et origine du second.
- Si les quatre points sont distincts et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $AB = CD$ et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- Si A, B et C sont alignés et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $AB = CD$ et les quatre points A, B, C, D sont alignés : le parallélogramme est « aplati ».



On lit A, B, puis D, C : le parallélogramme s'appelle ABDC.

Un parallélogramme ABDC : A en bas à gauche, B en bas à droite, D en haut à droite, C en haut à gauche. Les côtés [AB] et [CD] portent deux flèches bleues, de A vers B et de C vers D, parallèles, de même sens et de même longueur. Les côtés [AC] et [BD] ferment le parallélogramme.

ON ÉCHANGE LES MOYENS

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

A, B, C NON ALIGNÉS

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

DÉMONSTRATION

Par définition, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ signifie que $[AD]$ et $[CB]$ ont le même milieu. C'est la même phrase : $[BC]$ et $[CB]$ sont le même segment.

Si A, B et C ne sont pas alignés, $[AD]$ et $[BC]$ sont les diagonales du quadrilatère $ABDC$. Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme, et réciproquement.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ est un parallélogramme. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Le motif — La propriété dit : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$ exactement quand $ABDC$ est un parallélogramme. On lit les sommets dans l'ordre : origine du premier vecteur, son extrémité, extrémité du second, son origine.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ parallélogramme}$$

Ici — Pour l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$, ce même ordre donne le quadrilatère $ADCB$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff ADCB \text{ parallélogramme}$$

Conclusion — $ADCB$, c'est le parallélogramme $ABCD$ parcouru dans l'autre sens. L'égalité est donc vraie.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme. — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc $ABDC$ est un parallélogramme.. Dans un parallélogramme $ABCD$, les côtés $[AB]$ et $[CD]$ se parcourent en sens contraires : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{DC}$. Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ était égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$, le quadrilatère $ABCD$ serait croisé.

À ne pas faire : $AB = CD$ et (AB) parallèle à (CD), donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. — Il faut aussi le même sens ; sinon, c'est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.. La longueur et la direction ne disent rien du sens. Une égalité de vecteurs donne une égalité de longueurs et un parallélisme, mais la réciproque est fausse.

6. PROPRIÉTÉ

Le milieu, et un point bien déterminé

CE QU'IL DIT

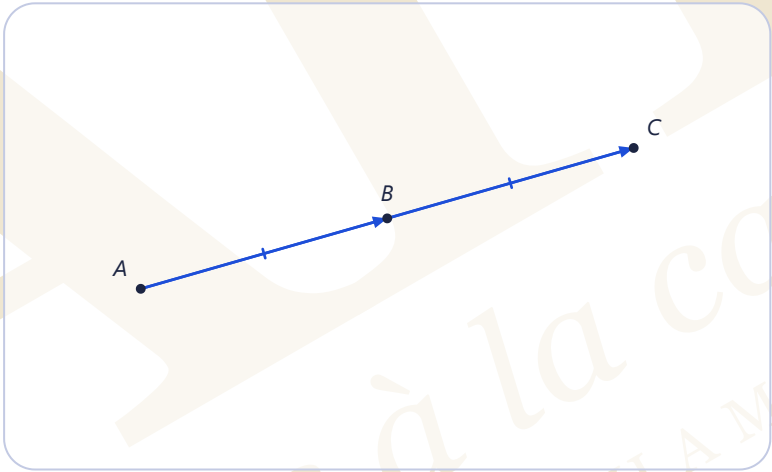
Le vecteur AB égale le vecteur BC : el 7rouf ytle9aw fi B, w ma3neha B houwa le milieu du segment AC. Ama redd belek : AB égale BC wa7dha ma tekfich, khater B ynajjem ykoun barra la droite AC. W zeda : le vecteur AM égale le vecteur AB, ma3neha M houwa B. Vecteur w origine ya3tiwek un seul point.

أمّا ردّ . le milieu du segment A C هو B و معناها ، B الحروف يتلاقاو في : le vecteur A B égale le vecteur B C
le vecteur A M égale le : و زادة . la droite A C ينجّم يكون برّا B خاطر ، تكفيش ما وحدها A B égale B C : بالك
. un seul point يعطيوك origine و B . vecteur هو M معناها ، vecteur A B

Le vecteur AB égale le vecteur BC : les lettres se rejoignent en B, et cela veut dire que B est le milieu du segment AC. Mais attention : AB égale BC, tout seul, ne suffit pas, car B peut être en dehors de la droite AC. Et aussi : le vecteur AM égale le vecteur AB veut dire que M est B. Un vecteur et une origine donnent un seul point.

Soient trois points distincts A, B et C : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **équivaut à** B est le milieu du segment $[AC]$.

Soient deux points A et B : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ **équivaut à** $M = B$. Une origine et un vecteur déterminent **un seul** point.



Trois points alignés A, B et C, avec B entre les deux. Deux flèches bleues de même longueur se suivent : l'une va de A vers B, l'autre de B vers C. Les deux moitiés [AB] et [BC] portent la même marque d'égalité : B est le milieu de [AC].

LE MILIEU

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \iff B \text{ est le milieu de } [AC]$$

UN SEUL POINT

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \iff M = B$$

DÉMONSTRATION

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ signifie que les segments $[AC]$ et $[BB]$ ont le même milieu. Le « segment » $[BB]$ se réduit au point B, qui est son propre milieu : B est donc le milieu de $[AC]$. Et réciproquement.

De même, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ signifie que $[AB]$ et $[MA]$ ont le même milieu. Deux segments qui ont l'extrémité A en commun et le même milieu ont aussi la même autre extrémité : $M = B$.

EXEMPLE TRAITÉ

I est le milieu du segment $[EF]$. Écrire deux égalités de vecteurs qui le disent.

En enchaînant — De E à I, puis de I à F : même direction, même sens, même longueur. Les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont égaux : les lettres s'enchaînent en I.

$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$

Dans l'autre sens — En partant de F et en allant vers E, les lettres s'enchaînent encore en I : les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{IE}$ sont égaux.

$\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IE}$

À ne pas faire : I est le milieu de $[EF]$, donc $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FI}$. — I est le milieu de $[EF]$, donc $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$.. Les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{FI}$ ont la même longueur, mais des sens contraires : ils vont tous les deux vers I, l'un de chaque côté. Pour le milieu, les lettres s'enchaînent.

À ne pas faire : $AB = BC$, donc B est le milieu de $[AC]$. — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, donc B est le milieu de $[AC]$.. L'égalité des longueurs place seulement B sur la médiatrice de $[AC]$: il faudrait en plus que A, B et C soient alignés. L'égalité des vecteurs dit les deux à la fois.

---

7. ACTIVITÉ

Faire glisser une équerre

CE QU'IL DIT

Tawa na3mlou 7aja b yeddina : nzall9ou équerre 3la règle, bla ma ndawrouha. A ywalli B, C ywalli C prime, D ywalli D prime. Koll point yet7arrek b nafs el vecteur, le vecteur AB. W les distances ? Ma tetbaddelch : CD égale C prime D prime. Hedha el glissement 3andou esm : une translation.

. D prime يولّي C prime ، D يولّي B ، C يولّي A . بلا ما ندوّروها ، règle على équerre نزلّقو : توّا نعملو حاجة بيدّينا
C D égale C prime D prime : ما تتبدّلش ؟ les distances و . vecteur ، le vecteur A B الـ بنفس يتحرّك point كلّ
. une translation : عندو اسم glissement هذا الـ .

Maintenant, faisons quelque chose avec nos mains : on fait glisser une équerre le long d'une règle, sans la tourner. A devient B, C devient C prime, D devient D prime. Chaque point bouge du même vecteur, le vecteur AB. Et les distances ? Elles ne changent pas : CD égale C prime D prime. Ce glissement a un nom : une translation.

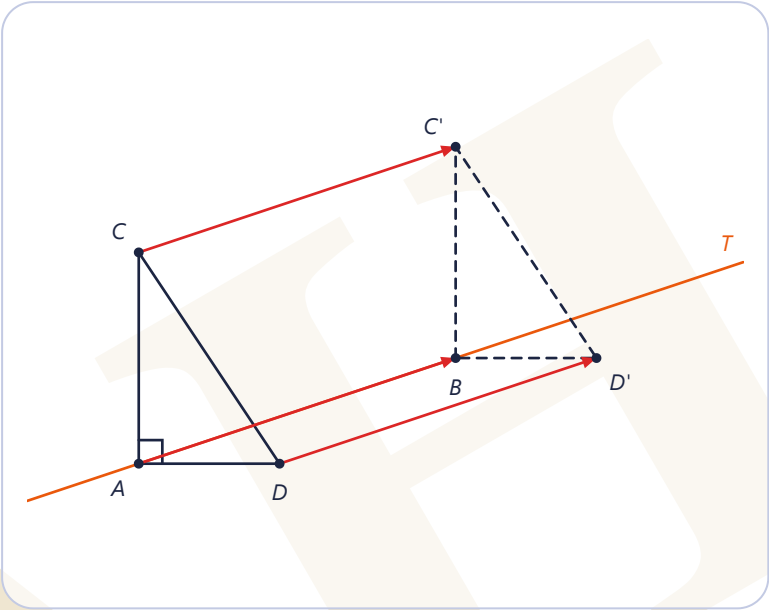
On fait glisser une équerre le long d'une règle T, sans la tourner, de la position ACD à la position $BC'D'$: le sommet A vient en B, le sommet C en C', le sommet D en D'.

1. Nomme des vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Que peut-on dire des distances CD et $C'D'$? Et de AC et BC' ?
3. Un point M de l'équerre vient en M'. Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$?

Tous les points de l'équerre se sont déplacés **du même vecteur**, et aucune distance n'a changé :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{MM'}$$

Ce glissement s'appelle une **translation**.



Chaque point de l'équerre a glissé du même vecteur.

Une équerre ACD, avec l'angle droit en A : le côté [AC] monte à la verticale, le côté [AD] part à l'horizontale vers la droite. Une règle, la droite T en orange, passe par A et monte doucement vers la droite. Plus loin sur la règle, la même équerre en pointillés, en BC'D', après glissement : B est sur la droite T, C' au-dessus de B, D' à droite de B. Trois flèches rouges parallèles et de même longueur vont de A vers B, de C vers C' et de D vers D'.

8. DÉFINITION

Image d'un point par une translation

CE QU'IL DIT

L'image de M par la translation de vecteur AB, houwa le point M prime elli ykoun le vecteur MM prime égale le vecteur AB. Un seul point. Lezmek tetfakker deux cas : l'image de A hiya B, w l'image de B hiya le symétrique de A par rapport à B. W bel compas : ABM prime M parallélogramme, donc MM prime égale AB, w BM prime égale AM.

l'image de M par la translation de vecteur A B ، هو le point M prime اللي يكون le vecteur M M prime égale le vecteur A B . un seul point لازمك تتفكّر deux cas : l'image de A هي B ، و l'image de B هي le symétrique de A par rapport à B . و بالـ donc M M prime ، parallélogramme M A B compas : égale A B ، و M A égale B M prime .

L'image de M par la translation de vecteur AB, c'est le point M prime tel que le vecteur MM prime égale le vecteur AB. Un seul point. Retiens deux cas : l'image de A est B, et l'image de B est le symétrique de A par rapport à B. Et au compas : ABM prime M est un parallélogramme, donc MM prime égale AB, et BM prime égale AM.

Soient A et B deux points distincts et M un point du plan. L'**image** du point M par la **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est le point M' tel que

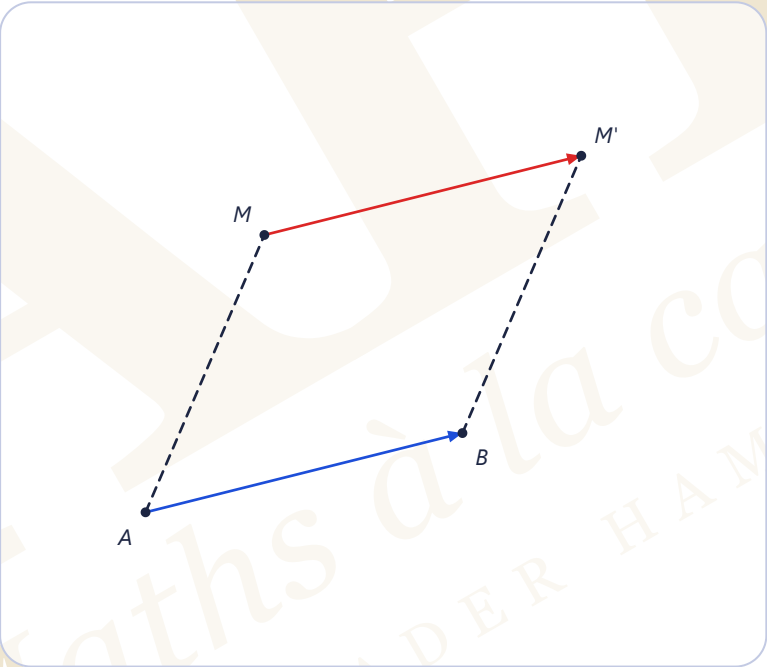
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

Ce point existe et il est **unique**.

Deux cas à connaître par cœur :

- l'image de A est B ;
- l'image de B est le point B' **symétrique de A par rapport à B** : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$ signifie que B est le milieu de $[AB']$.

Au compas, quand M n'est pas sur la droite (AB) : $ABM'M$ est un parallélogramme, donc M' est à la distance AB de M et à la distance AM de B.



M' est l'image de M : ABM'M est un parallélogramme.

Deux points A et B en bas, reliés par une flèche bleue de A vers B. Au-dessus, un point M et son image M' : une flèche rouge va de M vers M', parallèle à la bleue, de même sens et de même longueur. Les segments [AM] et [BM'], en pointillés, ferment le parallélogramme ABM'M.

DÉFINITION

$$M' \text{ image de } M \iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

IMAGE DE B

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} \iff B \text{ est le milieu de } [AB']$$

DÉMONSTRATION

Si M n'est pas sur (AB), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ équivaut à : $ABM'M$ est un parallélogramme. Trois sommets A, B, M étant donnés, le quatrième existe et il est unique.

Si M est sur (AB), M' est le point tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont le même milieu : c'est le symétrique de A par rapport au milieu de $[BM]$, unique lui aussi.

EXEMPLE TRAITÉ

M n'est pas sur la droite (AB). Construire au compas l'image M' de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Premier arc — On trace l'arc de centre M et de rayon AB : M' est dessus, car $MM' = AB$.
$MM' = AB$

Second arc — On trace l'arc de centre B et de rayon AM : M' est dessus, car $BM' = AM$.
$BM' = AM$

Le bon point — Les deux arcs se coupent en deux points. On garde celui pour lequel (MM') est parallèle à (AB), dans le même sens que de A vers B : $ABM'M$ est alors un parallélogramme.
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

À ne pas faire : L'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est A. — C'est le point B' tel que B soit le milieu de $[AB']$.. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ pousse chaque point dans le sens de A vers B : elle envoie A sur B, et B encore plus loin, d'une longueur AB. Revenir en A, c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

À ne pas faire : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, donc $ABMM'$ est un parallélogramme. — $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, donc $ABM'M$ est un parallélogramme.. Même lecture que pour l'égalité vectorielle : origine et extrémité du premier vecteur, puis extrémité et origine du second. Dans l'ordre $ABMM'$, le quadrilatère serait croisé.

9. PROPRIÉTÉ

La translation conserve les distances

CE QU'IL DIT

Tba3ni : le vecteur MM prime égale le vecteur AB, w le vecteur NN prime zeda. Donc le vecteur MM prime égale le vecteur NN prime. Nbaddlou blayes les moyens : le vecteur MN égale le vecteur M prime N prime. W deux vecteurs égaux 3andhom nafs el longueur : M prime N prime égale MN. La translation ma tbaddelch les distances.

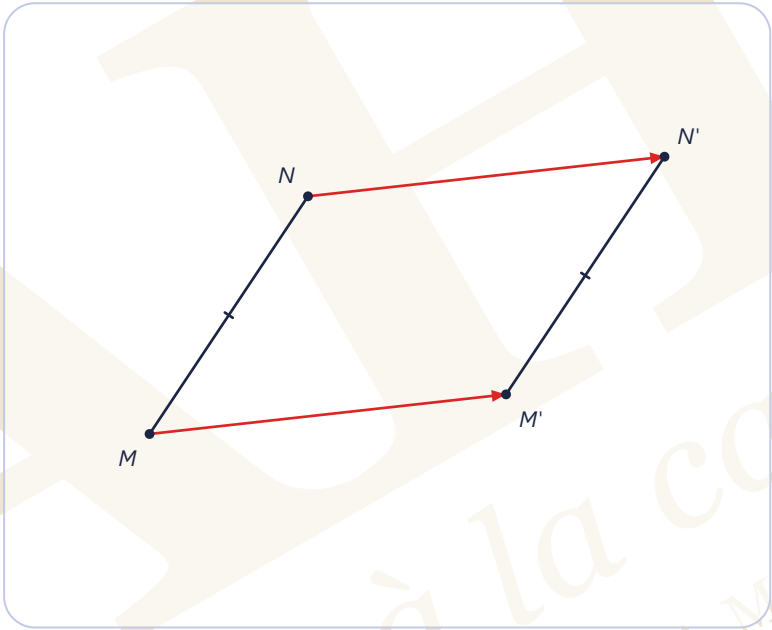
تبّعني : le vecteur M M prime égale le vecteur A B ، و le vecteur N N prime زادة . donc le vecteur M M
les moyens : le vecteur M N égale le vecteur M prime N نبدّلو بلايص . prime égale le vecteur N N prime
ما longueur : M prime N prime égale M N . la translation الـ عندهم نفس deux vecteurs égaux و . prime
. les distances تبدّلش

Suis-moi : le vecteur MM prime égale le vecteur AB, et le vecteur NN prime aussi. Donc le vecteur MM prime égale le vecteur NN prime. On échange les moyens : le vecteur MN égale le vecteur M prime N prime. Et deux vecteurs égaux ont la même longueur : M prime N prime égale MN. La translation conserve les distances.

Soient M et N deux points, et M', N' leurs images par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Alors

$$M'N' = MN$$

On dit que la translation **conserve les distances**. Mieux : elle transforme le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en un vecteur égal, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.



Un segment [MN] qui monte vers la droite. Deux flèches rouges parallèles et de même longueur vont de M vers M' et de N vers N'. Le segment [M'N'] est parallèle à [MN], et les deux segments portent la même marque d'égalité : M'N' = MN.

ON ÉCHANGE LES MOYENS

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \iff \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$$

CONSERVATION DES DISTANCES

$$M'N' = MN$$

DÉMONSTRATION

Par définition, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.

On échange les moyens : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. Deux vecteurs égaux ont la même longueur, donc $MN = M'N'$.

EXEMPLE TRAITÉ

Le triangle MNP a pour côtés $MN = 5$ cm, $NP = 7$ cm et $MP = 6$ cm. Une translation envoie M, N, P en M', N', P'. Quel est le périmètre du triangle $M'N'P'$?

Côté par côté — La translation conserve chaque distance : les côtés du triangle image sont ceux du triangle de départ.

$M'N' = 5 \quad ; \quad N'P' = 7 \quad ; \quad M'P' = 6$

Le périmètre — On additionne les trois côtés.

$M'N' + N'P' + M'P' = 5 + 7 + 6 = 18 \text{ cm}$

$$M'N' + N'P' + M'P' = 5 + 7 + 6 = 18 \text{ cm}$$

À ne pas faire : La figure grandit de la longueur du vecteur : $M'N' = MN + AB$. — $M'N' = MN$. Tous les points glissent du même vecteur, donc leurs écarts ne changent pas. La longueur AB est le chemin parcouru par chaque point, pas un allongement de la figure.

---

10. PROPRIÉTÉ

Image d'une droite, image d'un segment

CE QU'IL DIT

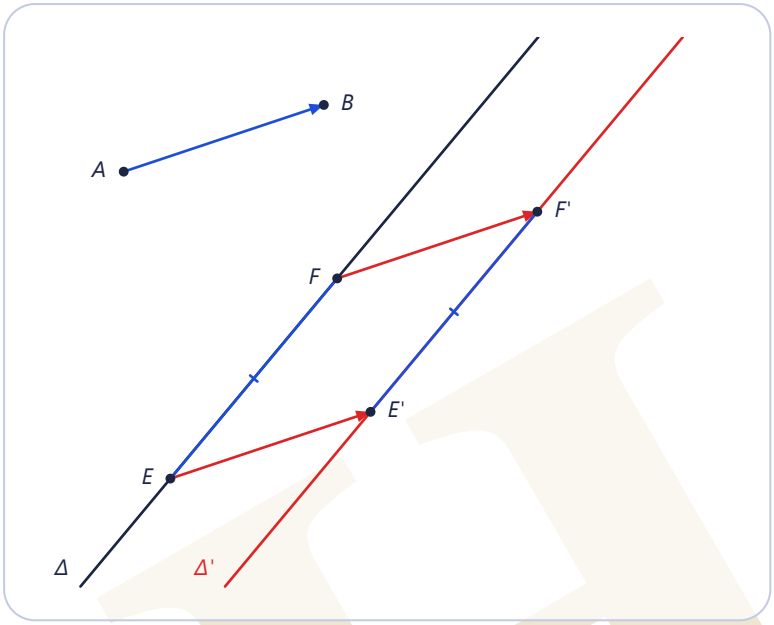
L'image d'une droite, droite parallèle. Kifech nersmouha ? Nekhdhou un point E 3al droite, nebnou l'image mte3ou E prime, w nersmou la parallèle elli tet3adda b E prime. Hakka w barra. W l'image du segment EF, houwa le segment E prime F prime, b nafs el longueur. Ama redd belek : ken el droite parallèle lel vecteur, l'image mte3ha hiya b rou7ha.

l'image نبنيو ، droite الـ على un point E ناخذو ؟ كيفاش نرسموها . l'image d'une droite ، droite parallèle متاعو E prime ، و نرسمو la parallèle اللي تتعدّى بـ E prime . هكّا و برّا . و E F l'image du segment ، هو le vecteur ، l'image لـ droite parallèle كان الـ : أمّا ردّ بالك . longueur بنفس الـ ، segment E prime F prime متاعها هي بروحها .

L'image d'une droite est une droite parallèle. Comment la tracer ? On prend un point E de la droite, on construit son image E prime, et on trace la parallèle qui passe par E prime. C'est tout. Et l'image du segment EF, c'est le segment E prime F prime, de même longueur. Mais attention : si la droite est parallèle au vecteur, son image est elle-même.

- L'image d'une **droite** Δ par une translation est une droite Δ' **parallèle** à Δ. Pour la tracer, il suffit de construire l'image E' d'un seul point E de Δ, puis la parallèle à Δ qui passe par E'.
- L'image d'un **segment** $[EF]$ est le segment $[E'F']$ qui joint les images de ses extrémités. Il lui est **isométrique** : $E'F' = EF$.

Cas particulier : si Δ est parallèle à (AB), chacun de ses points reste sur Δ, et son image est Δ elle-même. Ainsi l'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est (AB).



L'image d'une droite est une droite parallèle ; l'image d'un segment, un segment de même longueur.

Une droite Δ passe par deux points E et F, en montant vers la droite. En haut à gauche, une flèche bleue va de A vers B. Deux flèches rouges, égales à la bleue, vont de E vers E' et de F vers F'. La droite Δ' passe par E' et F' : elle est parallèle à Δ. Les segments [EF] et [E'F'] portent la même marque d'égalité.

IMAGE D'UNE DROITE

$$\Delta' \parallel \Delta$$

IMAGE D'UN SEGMENT

$$E'F' = EF$$

DÉMONSTRATION

Soit M un point de Δ, distinct de E, et M' son image. On a $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{MM'}$; en échangeant les moyens, $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{E'M'}$. La droite $(E'M')$ est donc parallèle à (EM), c'est-à-dire à Δ, et elle passe par E' : c'est Δ'. Ainsi M' est sur Δ'.

Réciproquement, pour un point N' de Δ', le point N tel que $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AB}$ est sur Δ, par le même raisonnement : Δ' est exactement l'image de Δ.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ est un parallélogramme. Quelle est l'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$?

Un point de la droite — La translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ envoie le point A de (AB) sur D.

$A \longmapsto D$

La parallèle — L'image de (AB) est donc la parallèle à (AB) qui passe par D.

Qui est-elle ? — Dans le parallélogramme $ABCD$, la droite (DC) est parallèle à (AB) et passe par D : c'est elle.

$(AB) \longmapsto (DC)$

$$(AB) \longmapsto (DC)$$

À ne pas faire : L'image de (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ est (DC). — C'est (AB) elle-même, car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.. Un vecteur parallèle à la droite la fait glisser sur elle-même : chaque point de (AB) reste sur (AB). Pour une droite, « parallèle » comprend aussi « confondue ».

---

11. PROPRIÉTÉ

Image d'un cercle, image d'un polygone

CE QU'IL DIT

Fel cercle, nzall9ou le centre barka : l'image du cercle, cercle de même rayon, w le centre mte3ou l'image du centre. W fel polygone : l'image mte3ou superposable m3ah, nafs l'aire, nafs le périmètre, w les angles homologues égaux. Ama redd belek : ken el figure daret walla t9allbet, ma hiyech translation, 7atta ken superposable.

في الـ cercle ، نزلّقو le centre برك : cercle de même rayon ، l'image du cercle ، و le centre متاعو l'image du polygone superposable معاه ، نفس l'aire ، نفس le périmètre ، و les angles homologues égaux . أمّا ردّ بالك : كان الـ figure دارت ولّا تقلّبت ، ما هيش translation ، حتّى كان superposable .

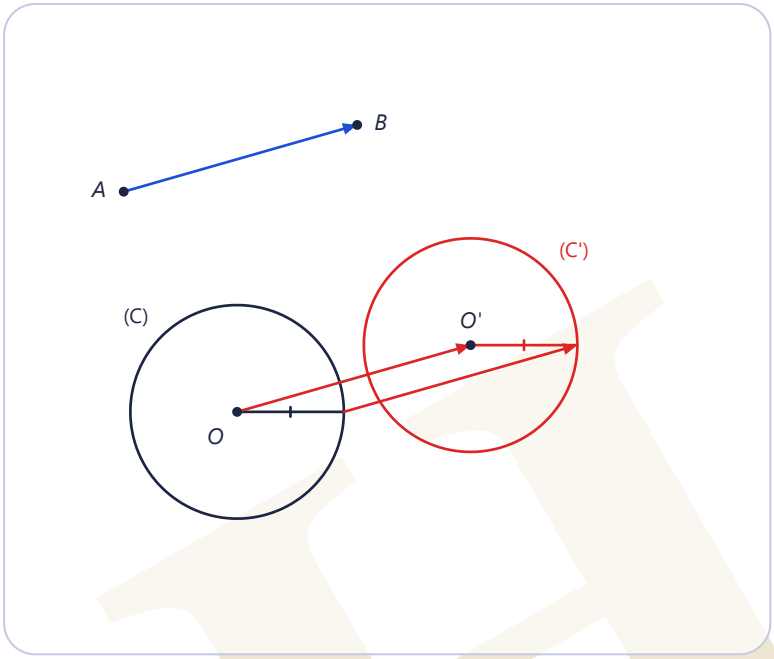
Pour le cercle, on fait glisser le centre seulement : l'image du cercle est un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre. Et pour le polygone : son image lui est superposable — même aire, même périmètre, et angles homologues égaux. Mais attention : si la figure a tourné ou s'est retournée, ce n'est pas une translation, même si elle est superposable.

On admet que :

- l'image d'un **cercle** de centre O et de rayon r par une translation est le cercle de **même rayon** r dont le centre est l'image O' de O ;
- un **polygone** et son image par une translation sont **superposables** : ils ont la même aire, le même périmètre, et leurs angles homologues sont égaux.

Pour reconnaître qu'une figure F' est l'image d'une figure F par une translation, il ne suffit pas qu'elles soient superposables : il faut que tous les points aient glissé **du même vecteur**, sans tourner ni se retourner.

Maths à la carte ABDELHADER HAMMAMI



En haut à gauche, une flèche bleue va de A vers B. En bas à gauche, un cercle (C) de centre O, dont un rayon horizontal est marqué d'un trait. Deux flèches rouges, égales à la bleue, déplacent le centre O en O' et l'extrémité de ce rayon. Le cercle (C'), de centre O', a un rayon marqué du même trait : il a le même rayon que (C).

IMAGE D'UN CERCLE

$$O \longmapsto O' \quad ; \quad r' = r$$

EXEMPLE TRAITÉ

A et B sont deux points tels que $AB = 6$ cm, et (C) est le cercle de diamètre $[AB]$. Décris l'image (C') de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le centre — Le centre de (C) est le milieu O de $[AB]$. Son image est le point O' tel que le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$$

Le rayon — Le rayon ne change pas : c'est la moitié du diamètre.

$$r = \frac{AB}{2} = 3 \text{ cm}$$

Un point de contrôle — A est sur (C) et son image est B : le cercle (C') passe par B. Les deux cercles se touchent en B.

$$O'B = 3 \text{ cm}$$

$$(C') : \text{ centre } O', \text{ rayon } 3 \text{ cm}$$

À ne pas faire : F et F' sont superposables, donc F' est l'image de F par une translation. — Il faut en plus que tous les sommets aient glissé du même vecteur : $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{RR'}$.. Une figure qu'on a tournée ou retournée reste superposable, mais aucune translation ne la produit : une translation fait seulement glisser.

12. APPLICATION

Translation dans un repère

CE QU'IL DIT

Fel repère, le vecteur AA prime ya3ni : 3 unités lel imin, w 2 unités lel fou9. Bech nel9aw l'image mte3 ay point, na3mlou nafs el déplacement : nzidou 3 lel abscisse w 2 lel ordonnée. B ywalli B prime de coordonnées 2 et 4, C ywalli C prime de coordonnées 3 et moins 2, w A prime ywalli D de coordonnées 8 et 5.

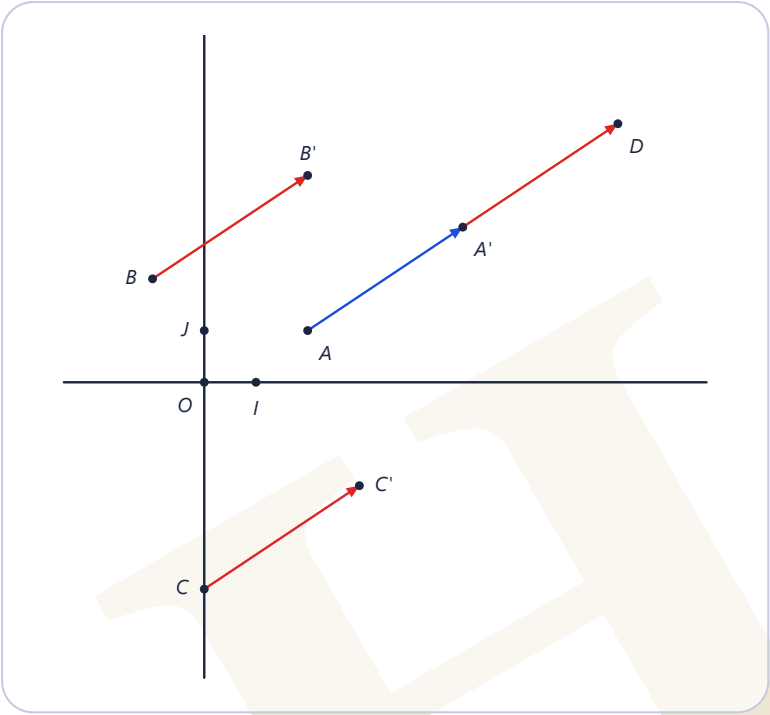
في الـ repère ، le vecteur A A prime يعني : 3 unités لليمين ، و 2 unités للفوق . باش نلقاو l'image متاع أيّ point ، نعملو نفس الـ déplacement : نزيدو 3 للـ abscisse و 2 للـ ordonnée . B يولّي B prime de coordonnées 2 et 4 ، C يولّي C prime de coordonnées 3 et moins 2 ، و A prime يولّي D de coordonnées 8 et 5 .

Dans le repère, le vecteur AA prime veut dire : 3 unités vers la droite, et 2 unités vers le haut. Pour trouver l'image de n'importe quel point, on fait le même déplacement : on ajoute 3 à l'abscisse et 2 à l'ordonnée. B devient B prime de coordonnées 2 et 4, C devient C prime de coordonnées 3 et moins 2, et A prime devient D de coordonnées 8 et 5.

Dans un repère (O, I, J), on place $A(2\,;1)$, $B(-1\,;2)$, $C(0\,;-4)$ et $A'(5\,;3)$. On cherche les images B', C' et D de B, C et A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Sur le quadrillage, aller de A à A', c'est avancer de 3 unités vers la droite et monter de 2 unités. Puisque $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$, on fait **le même déplacement** en partant de B : on ajoute 3 à l'abscisse et 2 à l'ordonnée. De même pour C et pour A'.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Le même déplacement, depuis chaque point.

Un repère (O, I, J) : l'axe des abscisses horizontal, l'axe des ordonnées vertical. Une flèche bleue va de A(2 ; 1) à A'(5 ; 3) : trois unités vers la droite, deux vers le haut. Trois flèches rouges font le même déplacement : de B(−1 ; 2) à B'(2 ; 4), de C(0 ; −4), sur l'axe des ordonnées, à C'(3 ; −2), et de A'(5 ; 3) à D(8 ; 5).

MÊME DÉPLACEMENT

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{AA'}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Calculer les coordonnées des points B', C' et D.

Le déplacement — De A à A', l'abscisse passe de 2 à 5 : elle gagne 3. L'ordonnée passe de 1 à 3 : elle gagne 2.

$5 - 2 = 3 \quad ; \quad 3 - 1 = 2$

Image de B — On fait le même déplacement à partir de B, d'abscisse -1 et d'ordonnée 2.

$B'(-1+3\,;2+2) = B'(2\,;4)$

Image de C — Même geste à partir de C, d'abscisse 0 et d'ordonnée -4.

$C'(0+3\,;-4+2) = C'(3\,;-2)$

Image de A' — Et à partir de A' lui-même : il avance encore du même déplacement, et arrive en D.

$D(5+3\,;3+2) = D(8\,;5)$

Vérification — On refait le chemin à l'envers, de B' vers B : l'abscisse passe de 2 à -1, elle perd 3 ; l'ordonnée passe de 4 à 2, elle perd 2. C'est bien le chemin de A à A', parcouru dans l'autre sens.

$$B'(2\,;4) \quad ; \quad C'(3\,;-2) \quad ; \quad D(8\,;5)$$

À ne pas faire : $B'(-1-3\,;2-2) = B'(-4\,;0)$ — $B'(-1+3\,;2+2) = B'(2\,;4)$. Soustraire, c'est faire le déplacement de A' vers A : on obtient l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{A'A}$. Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ se lit de A vers A'.

13. MÉTHODE

Démontrer une égalité de vecteurs

CE QU'IL DIT

Bech tthabbet égalité de vecteurs, chouf chnowa 3tak l'énoncé. Ken 3tak des milieux, arja3 lel ta3rif : les extrêmes w les moyens. Ken 3tak parallélogramme, a9ra les sommets bel tartib. W ken 3tak translation, ekteb le vecteur MM prime égale le vecteur AB. W bel 3aks : égalité de vecteurs ta3tik b-blech égalité de longueurs w parallélisme.

les : ارجع للتعريف ، des milieux كان عطاك . l'énoncé شنوّة عطاك ، شوف égalité de vecteurs باش تثبّت ، translation كان عطاك . و les moyens و extrêmes ، parallélogramme كان عطاك . les sommets اقرا ، بالترتيب égalité de vecteurs : تعطيك ببلاش égalité de . و بالعكس le vecteur M M prime égale le vecteur A B اكتب . parallélisme و longueurs

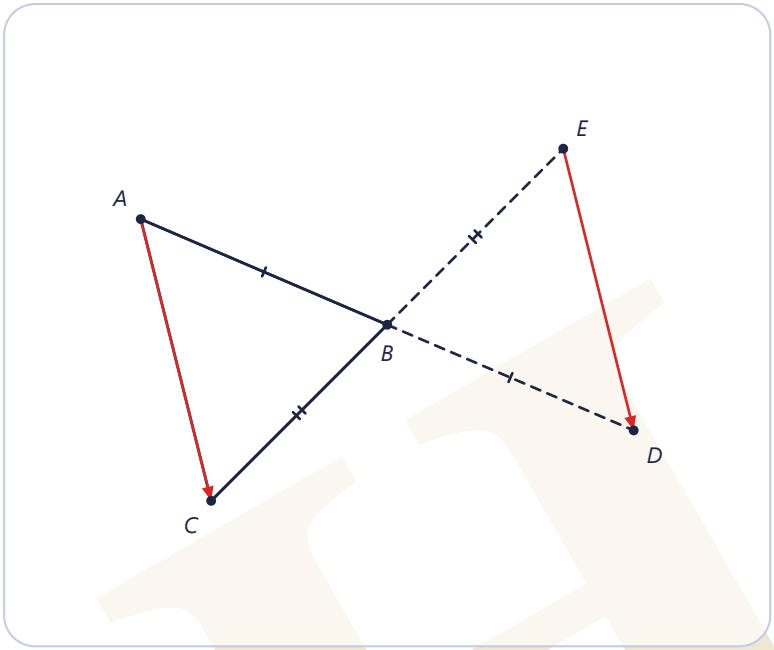
Pour démontrer une égalité de vecteurs, regarde ce que te donne l'énoncé. S'il te donne des milieux, reviens à la définition : les extrêmes et les moyens. S'il te donne un parallélogramme, lis ses sommets dans l'ordre. Et s'il te donne une translation, écris : le vecteur MM prime égale le vecteur AB. Et dans l'autre sens, une égalité de vecteurs te donne gratuitement une égalité de longueurs et un parallélisme.

Trois outils, selon ce que donne l'énoncé :

1. **Des milieux ?** Reviens à la définition : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dès que le segment des extrêmes $[AD]$ et celui des moyens $[BC]$ ont le même milieu.
2. **Un parallélogramme ?** Lis ses sommets dans l'ordre : $ABDC$ parallélogramme donne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
3. **Une translation ?** Traduis « M' est l'image de M » par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, puis échange les moyens si besoin.

Dans l'autre sens, une égalité de vecteurs donne **gratuitement** une égalité de longueurs et un parallélisme — ou un milieu, quand les lettres s'enchaînent.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Un triangle ABC : A en haut à gauche, B au centre, C en bas à gauche. Le côté [AB] est prolongé au-delà de B jusqu'à D, avec BD = AB ; le côté [CB] est prolongé au-delà de B jusqu'à E, avec BE = CB. Les marques d'égalité le montrent : B est le milieu de [AD] et de [CE]. Deux flèches rouges, de A vers C et de E vers D, sont parallèles, de même sens et de même longueur.

EXEMPLE TRAITÉ

ABC est un triangle. D est le symétrique de A par rapport à B, et E le symétrique de C par rapport à B. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{ED}$.

Ce qu'on sait — D est le symétrique de A par rapport à B : B est le milieu de $[AD]$. De même, B est le milieu de $[CE]$.

La définition — Dans l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$, les extrêmes forment $[AD]$ et les moyens $[CE]$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED} \iff [AD] \text{ et } [CE] \text{ ont le même milieu}$$

Conclusion — Ces deux segments ont le même milieu B : l'égalité est démontrée. Au passage, $ACDE$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$$

À ne pas faire : B est le milieu de $[AD]$ et de $[CE]$, donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$. — B est le milieu de $[AD]$ et de $[CE]$, donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$.. Avec le vecteur $\overrightarrow{DE}$, les extrêmes seraient $[AE]$ et les moyens $[CD]$, qui n'ont aucune raison d'avoir le même milieu. On vérifie les extrêmes et les moyens avant d'écrire l'égalité.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à : $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

   > Le vecteur AB égale le vecteur CD, ki le segment AD w le segment BC 3andhom le même milieu.
   > *Le vecteur AB égale le vecteur CD quand les segments AD et BC ont le même milieu.*

2. On peut échanger les moyens : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; si A, B, C ne sont pas alignés, à $ABDC$ parallélogramme.

   > Nejmou nbaddlou blayes les moyens : le vecteur AC égale le vecteur BD. W ken A, B, C mouch alignés, ABDC parallélogramme.
   > *On peut échanger les moyens : le vecteur AC égale le vecteur BD. Et si A, B, C ne sont pas alignés, ABDC est un parallélogramme.*

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à : B est le milieu de $[AC]$.

   > Le vecteur AB égale le vecteur BC, ma3neha B milieu du segment AC.
   > *Le vecteur AB égale le vecteur BC signifie que B est le milieu du segment AC.*

4. M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ quand $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

   > M prime l'image de M par la translation de vecteur AB, ki le vecteur MM prime égale le vecteur AB.
   > *M prime est l'image de M par la translation de vecteur AB quand le vecteur MM prime égale le vecteur AB.*

5. L'image de A est B ; l'image de B est le symétrique de A par rapport à B.

   > L'image de A hiya B, w l'image de B hiya le symétrique de A par rapport à B.
   > *L'image de A est B, et l'image de B est le symétrique de A par rapport à B.*

6. Une translation conserve les distances, les angles et les aires : une figure et son image sont superposables.

   > La translation ma tbaddelch les distances, les angles w les aires : el figure w l'image mte3ha superposables.
   > *Une translation conserve les distances, les angles et les aires : une figure et son image sont superposables.*

7. Image d'une droite : une droite parallèle. D'un segment : un segment de même longueur. D'un cercle : un cercle de même rayon, centré sur l'image du centre.

   > L'image d'une droite, droite parallèle ; l'image d'un segment, segment de même longueur ; w l'image d'un cercle, cercle de même rayon, w le centre mte3ou l'image du centre.
   > *L'image d'une droite est une droite parallèle ; celle d'un segment, un segment de même longueur ; celle d'un cercle, un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna vecteurs et translations. Tfakker : le vecteur, les extrêmes w les moyens ; w la translation, koll point yet7arrek b nafs le vecteur, w el figure ma tetbaddelch. Yalla nemchiw lel exercices.

هكّا كمّلنا vecteurs et translations . تفكّر : les extrêmes ، le vecteur و les moyens ؛ و la translation ، كلّ point يتحرّك بنفس le vecteur ، و الـ figure ما تتبدّلش . يالله نمشيو للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé vecteurs et translations. Retiens : pour le vecteur, les extrêmes et les moyens ; pour la translation, chaque point bouge du même vecteur, et la figure ne change pas. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · LE VECTEUR

c'est quoi un vecteur | chnowa vecteur | définition d'un vecteur | vecteur ya3ni chnowa | un vecteur c'est un déplacement ? | vecteur définition simple

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont le même milieu}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le vecteur houwa déplacement : nemchiw men A l B kif ma nemchiw men C l D. Les bipoints (A, B) w (C, D) yrepresentiw nafs le vecteur ki $[AD]$ w $[BC]$ 3andhom nafs le milieu. W nektbou $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

يـ D . les bipoints A ، B w C ، D لـ C كيف ما نمشيو من B لـ A نمشيو من : déplacement هو le vecteur vecteur A B égale نكتبو le milieu . w عندهم نفس segments A D w B C الـ كي le vecteur نفس représenter . vecteur C D

Un vecteur, c'est un déplacement : on va de A à B comme on va de C à D. Les bipoints A, B et C, D représentent le même vecteur lorsque les segments A D et B C ont le même milieu. On écrit alors vecteur A B égale vecteur C D.

QUESTION 2 · LE VECTEUR

c'est quoi les extrêmes et les moyens | extrêmes w moyens chnowa | AB = CD quels segments croiser pour le milieu | comment retenir quels segments croiser | les moyens et les extrêmes dans une égalité de vecteurs | AD et BC ou AC et BD

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff [AD] \text{ et } [BC] \text{ même milieu}$$

CE QU'IL RÉPOND

N9raw $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ mel chmel lel imin : A w D les extrêmes, B w C les moyens. Le segment des extrêmes $[AD]$ w le segment des moyens $[BC]$ 3andhom nafs le milieu. Mouch $[AC]$ w $[BD]$: hedhika ta3ti $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

نقراو vecteur A B égale vecteur C D من الشمال لليمين : le . B w C les moyens ، A w D les extrêmes
هاذيكا : A C w B D موش . le milieu عندهم نفس segment des extrêmes A D w le segment des moyens B C
. vecteur A B égale vecteur D C تعطي

On lit vecteur A B égale vecteur C D de gauche à droite : A et D sont les extrêmes, B et C les moyens. Le segment des extrêmes A D et celui des moyens B C ont le même milieu. Pas A C et B D : cela donnerait vecteur A B égale vecteur D C.

QUESTION 3 · MÊME DIRECTION, MÊME SENS, MÊME LONGUEUR

direction, sens et longueur c'est quoi | quelle est la différence entre direction et sens | deux vecteurs égaux ont la même direction et le même sens ? | direction w sens chnowa el far9 | même direction même sens même longueur | sens d'un vecteur

CE QU'IL RÉPOND

La direction hiya la droite, walla les droites parallèles elli ta7mel el flèche. Le sens houwa men win l win nemchiw 3liha. Zouz vecteurs égaux 3andhom nafs la direction, nafs le sens w nafs la longueur. Ken wa7da tetbaddel, le vecteur yetbaddel.

هو من وين لوين نمشيو flèche . le sens اللي تحمل الـ les droites parallèles ولّا ، la droite هي la direction
le ، كان وحدة تتبدّل . la longueur نفس le sens w ، نفس la direction عندهم نفس vecteurs égaux زوز عليها .
يتبدّل vecteur

La direction, c'est la droite, ou les droites parallèles, qui porte la flèche. Le sens, c'est dans quel sens on la parcourt. Deux vecteurs égaux ont la même direction, le même sens et la même longueur. Si une seule de ces trois choses change, le vecteur change.

QUESTION 4 · LE VECTEUR

le vecteur AB et le vecteur BA c'est pareil ? | AB w BA nafs le vecteur ? | l'ordre des lettres dans un vecteur compte ? | origine et extrémité d'un vecteur | c'est quoi l'origine d'un vecteur | vecteur BA c'est quoi

CE QU'IL RÉPOND

Fi $\overrightarrow{AB}$, A l'origine w B l'extrémité. L'ordre yefre9 : ki $A \neq B$, $\overrightarrow{BA}$ mouch nafs $\overrightarrow{AB}$, nafs la direction w la longueur ama le sens bel 3aks.

موش نفس A différent de B ، vecteur B A يفرق : كي vecteur A B ، A l'origine w B l'extrémité . l'ordre في
. بالعكس le sens أما la direction w la longueur نفس ، vecteur A B

Dans le vecteur A B, A est l'origine et B l'extrémité. L'ordre compte : dès que A est différent de B, le vecteur B A n'est pas le vecteur A B ; même direction, même longueur, mais sens contraire.

QUESTION 5 · LE VECTEUR

c'est quoi le vecteur nul | vecteur nul chnowa | le vecteur AA c'est quoi | vecteur zéro | vecteur nul définition | AA vecteur nul ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les bipoints (A, A), (B, B) w ghirhom yreprésentiw el koll nafs le vecteur : le vecteur nul, nektbouh $\overrightarrow{0}$. Déplacement ma y7arrek chay.

les bipoints A ، A w B ، B w غيرهم يـ représenter الكل نفس le vecteur : le vecteur nul ، نكتبوه . vecteur zéro
. ما يحرّك شي déplacement

Les bipoints A, A et B, B, et tous les autres de ce type, représentent un même vecteur : le vecteur nul, noté vecteur zéro. C'est un déplacement qui ne bouge rien.

QUESTION 6 · ÉGALITÉ VECTORIELLE ET PARALLÉLOGRAMME

AB = CD donne ABDC ou ABCD parallélogramme | 3lech ABDC w mouch ABCD | l'ordre des sommets du parallélogramme avec les vecteurs | vecteur AB égale vecteur CD quel parallélogramme | ABCD parallélogramme donc AB = DC ? | dans un parallélogramme ABCD le vecteur AB égale quoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ parallélogramme}$$

CE QU'IL RÉPOND

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, w A, B, C mouch alignés, ya3ni ABDC parallélogramme : origine w extrémité mte3 le premier, men ba3d extrémité w origine mte3 le deuxième. Fi parallélogramme ABCD, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, mouch $\overrightarrow{CD}$.

A B D C parallélogramme : origine w يعني ، alignés موش vecteur A B égale vecteur C D ، w A ، B ، C
parallélogramme A B C D ، في . le deuxième متاع extrémité w origine بعد من ، le premier متاع extrémité
. C D موش ، vecteur A B égale vecteur D C

Vecteur A B égale vecteur C D, avec A, B, C non alignés, équivaut à : A B D C est un parallélogramme. On lit l'origine et l'extrémité du premier vecteur, puis l'extrémité et l'origine du second. Dans un parallélogramme A B C D, c'est vecteur A B égale vecteur D C, pas C D.

QUESTION 7 · ÉGALITÉ VECTORIELLE ET PARALLÉLOGRAMME

on peut échanger les moyens ? | AB = CD donc AC = BD ? | échanger les moyens c'est quoi | permuter B et C dans l'égalité de vecteurs | AB = CD w AC = BD kifkif ? | échange des moyens pourquoi ça marche

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ey : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ w $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ nafs el 7aja. El zouz y9oulou elli $[AD]$ w $[BC]$ 3andhom nafs le milieu.

إيه : vecteur A B égale vecteur C D ، w vecteur A C égale vecteur B D ، نفس الحاجة . الزوز يقولو اللي A D w B C عندهم نفس le milieu .

Oui : vecteur A B égale vecteur C D et vecteur A C égale vecteur B D disent la même chose. Les deux signifient que A D et B C ont le même milieu.

QUESTION 8 · ÉGALITÉ VECTORIELLE ET PARALLÉLOGRAMME

même longueur et parallèles donc vecteurs égaux ? | AB = CD même longueur et parallèles ça suffit ? | nafs el longueur w parallèles ykaffi ? | longueurs égales et droites parallèles vecteur égal ? | même longueur suffit pour des vecteurs égaux | longueurs égales et parallèles donc vecteurs égaux ?

CE QU'IL RÉPOND

Le, ma ykaffich : lezem zeda nafs le sens. Zouz segments b nafs la longueur w parallèles ynajjmou yemchiw koll wa7ed b3aks le5or. Mathalan fi parallélogramme ABCD, $\overrightarrow{AB}$ w $\overrightarrow{CD}$ b3aks ba3dhom.

لا ، ما يكفيش : لازم زادة نفس le sens . زوز segments بنفس la longueur w parallèles ينجّمو يمشيو كل واحد بعكس الآخر . مثلا في parallélogramme A B C D ، vecteur A B w vecteur C D بعكس بعضهم .

Non, il faut aussi le même sens. Deux segments de même longueur et parallèles peuvent être parcourus en sens contraires. Par exemple, dans un parallélogramme A B C D, les vecteurs A B et C D vont en sens contraires.

QUESTION 9 · ÉGALITÉ VECTORIELLE ET PARALLÉLOGRAMME

et si A, B et C sont alignés | vecteurs égaux avec des points alignés | parallélogramme aplati c'est quoi | A B C alignés AB = CD | points alignés vecteurs égaux parallélogramme ? | aplati ya3ni chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Ken A, B w C alignés w $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc $AB = CD$ w les quatre points alignés. N9oulou parallélogramme aplati.

. A ، B w C alignés w vecteur A B égale vecteur C D ، donc A B égale C D w les quatre points alignés كان نقولو parallélogramme aplati .

Si A, B et C sont alignés et que vecteur A B égale vecteur C D, alors A B égale C D et les quatre points sont alignés. On parle de parallélogramme aplati.

QUESTION 10 · LE MILIEU, ET UN POINT BIEN DÉTERMINÉ

comment écrire que I est le milieu avec des vecteurs | B milieu de AC ya3ni AB = BC ? | I milieu : EI = IF ou EI = FI | milieu et égalité de vecteurs | kifech nekteb milieu b les vecteurs | I milieu de EF quelle égalité de vecteurs

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \iff B \text{ milieu de } [AC]$$

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$$

CE QU'IL RÉPOND

B milieu de $[AC]$ ya3ni $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$: les lettres yetsalslou fi B. Pour I milieu de $[EF]$: $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$, mouch $\overrightarrow{FI}$, 5ater $\overrightarrow{EI}$ w $\overrightarrow{FI}$ b3aks ba3dhom.

B . pour I milieu de E F : يتسلسلو في vecteur A B égale vecteur B C : les lettres يعني B milieu de A C بعكس بعضهم . E I w F I ، خاطر F I ، موش vecteur E I égale vecteur I F

B est le milieu de A C équivaut à vecteur A B égale vecteur B C : les lettres s'enchaînent en B. Pour I milieu de E F : vecteur E I égale vecteur I F, et non F I, car E I et F I vont en sens contraires.

QUESTION 11 · LE MILIEU, ET UN POINT BIEN DÉTERMINÉ

AB = BC en longueur donc B est le milieu ? | longueurs égales ya3ni milieu ? | distance AB égale distance BC donc milieu | pourquoi les longueurs ne suffisent pas pour le milieu | AB = BC longueurs milieu wala le | égalité des distances et milieu

CE QU'IL RÉPOND

Le : $AB = BC$ fi les longueurs y7ott B 3la la médiatrice mte3 $[AC]$ bark, mouch lezem 3la le segment. Bech B ykoun le milieu, lezem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

. le segment على لازم موش ، برك A C متاع la médiatrice على B يحط les longueurs في A B égale B C : لا vecteur A B égale vecteur B C لازم ، le milieu يكون B باش .

Non : l'égalité des longueurs A B égale B C place seulement B sur la médiatrice de A C, pas forcément sur le segment. Pour que B soit le milieu, il faut vecteur A B égale vecteur B C.

QUESTION 12 · LE MILIEU, ET UN POINT BIEN DÉTERMINÉ

AM = AB donc M = B ? | une origine et un vecteur donnent un seul point ?

---

vecteur AM égale vecteur AB alors M égale B | point unique avec un vecteur | pourquoi M = B | un seul point M

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \iff M = B$$

CE QU'IL RÉPOND

Ey : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ ya3ni $M = B$. Origine w vecteur y7addou point wa7ed bark.

إيه : vecteur A M égale vecteur A B يعني M هو origine w vecteur . B يحدّدو point واحد برك .

Oui : vecteur A M égale vecteur A B équivaut à M égale B. Une origine et un vecteur déterminent un seul point.

QUESTION 13 · IMAGE D'UN POINT PAR UNE TRANSLATION

c'est quoi une translation | chnowa translation | translation définition | translation ya3ni chnowa | une translation c'est un glissement ? | que veut dire translation de vecteur AB

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ tzallaq koll point b nafs le vecteur, bla ma tdawwer. L'image mte3 M houwa M' elli $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Kif équerre nzall9ouha 3la règle.

اللي M prime هو M متاع l'image . بلا ما تدوّر ، le vecteur بنفس point كل تزلّق la translation de vecteur A B vecteur M M prime égale vecteur A B . كيف équerre نزلّقوها على règle .

La translation de vecteur A B fait glisser chaque point du même vecteur, sans rien faire tourner. L'image de M est le point M prime tel que vecteur M M prime égale vecteur A B. Comme une équerre qu'on fait glisser le long d'une règle.

QUESTION 14 · IMAGE D'UN POINT PAR UNE TRANSLATION

comment construire l'image d'un point par une translation | kifech nebni l'image mta3 M | construire M' au compas | image d'un point au compas comment | kifech nrasem l'image par translation | construction de l'image d'un point

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$MM' = AB \quad ; \quad BM' = AM$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken M mouch 3la (AB) : $ABM'M$ parallélogramme. Nrasmou arc de centre M w de rayon AB, w arc de centre B w de rayon AM. Yet9at3ou fi M' : nekhdhou elli fih (MM') parallèle l (AB) w fi nafs le

sens.

arc de centre M w de rayon A B نرسمو . la droite A B : A B M prime M parallélogramme كان M موش على
A B w لـ M M prime parallèle فيه ناخذو اللي : M prime يتقاطعو في . ، w arc de centre B w de rayon A M
في نفس le sens .

Si M n'est pas sur la droite A B, A B M prime M est un parallélogramme. On trace l'arc de centre M et de rayon A B, puis l'arc de centre B et de rayon A M. Ils se coupent en M prime : on garde le point pour lequel M M prime est parallèle à A B, dans le même sens.

QUESTION 15 · IMAGE D'UN POINT PAR UNE TRANSLATION

l'image de B par la translation de vecteur AB | image de B c'est A ? | translation de vecteur AB, B va où | image mta3 B b translation de vecteur AB | B' symétrique de A par rapport à B pourquoi | l'image de A par la translation de vecteur AB

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} \iff B \text{ milieu de } [AB']$$

CE QU'IL RÉPOND

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ tdezz koll point men jihet A l B. L'image mte3 A hiya B. W l'image mte3 B mouch A : hiya B', le symétrique de A par rapport à B, ya3ni B milieu de $[AB']$.

: A موش B متاع B . w l'image هي A متاع B . l'image لـ A من جيهة point كل تدرّ la translation de vecteur A B
. B milieu de A B prime يعني ، B prime ، le symétrique de A par rapport à B هي

La translation de vecteur A B pousse chaque point dans le sens de A vers B. L'image de A est B. Et l'image de B n'est pas A : c'est le point B prime, symétrique de A par rapport à B, c'est-à-dire que B est le milieu de A B prime.

QUESTION 16 · LA TRANSLATION CONSERVE LES DISTANCES

la translation conserve les distances ? | pourquoi M'N' égale MN, la distance | est-ce que la translation change les longueurs | translation w les distances | conservation des distances | la figure grandit avec la translation ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} \quad ; \quad M'N' = MN$$

CE QU'IL RÉPOND

Ey, la translation tconservi les distances : $M'N' = MN$. El points el koll yetzall9ou b nafs le vecteur, donc el écarts binethom ma yetbaddlouch. W zeda $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

le الكل يتزلّقو بنفس الـ points . conserver les distances : M prime N prime égale M N تـ la translation ، إيه
. vecteur M prime N prime égale vecteur M N زادة w . بيناتهم ما يتبدّلوش écarts الـ vecteur ، donc

Oui, la translation conserve les distances : M prime N prime égale M N. Tous les points glissent du même vecteur, donc leurs écarts ne changent pas. De plus, vecteur M prime N prime égale vecteur M N.

QUESTION 17 · IMAGE D'UNE DROITE, IMAGE D'UN SEGMENT

l'image d'une droite par une translation | image mta3 droite b translation | comment tracer l'image d'une droite | l'image d'une droite est parallèle ? | image de la droite (AB) par la translation de vecteur AB | translation d'une droite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$\Delta' \parallel \Delta$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mte3 droite hiya droite parallèle liha. Ykaffi nabniw l'image mte3 point wa7ed menha, w nrasmou la parallèle elli tet3adda 3lih. W ken la droite parallèle l le vecteur, l'image hiya nafsha : l'image mte3 (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ hiya (AB).

l'image متاع droite هي droite parallèle ليها droite parallèle l'image متاع point واحد منها ، نرسمو w . يكفي نبنيو la parallèle اللي تتعدّى عليه . w كان la droite parallèle لـ l'image ، le vecteur هي نفسها : l'image متاع A B par la translation de vecteur A B هي A B .

L'image d'une droite est une droite parallèle. Il suffit de construire l'image d'un seul de ses points, puis de tracer la parallèle qui passe par cette image. Si la droite est parallèle au vecteur, son image est elle-même : l'image de la droite A B par la translation de vecteur A B est la droite A B.

QUESTION 18 · IMAGE D'UNE DROITE, IMAGE D'UN SEGMENT

l'image d'un segment par une translation | image mta3 segment | segment image isométrique ? | comment trouver l'image du segment EF | translation d'un segment | l'image d'un segment a la même longueur ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$E'F' = EF$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mte3 le segment $[EF]$ hiya le segment $[E'F']$ elli yorbot les images mte3 les extrémités. Isométrique lih : $E'F' = EF$.

l'image متاع E F هي le segment E prime F prime اللي يربط les images متاع les extrémités . ليه isométrique : E prime F prime égale E F .

L'image du segment E F est le segment E prime F prime, qui joint les images de ses extrémités. Il lui est isométrique : E prime F prime égale E F.

QUESTION 19 · IMAGE D'UN CERCLE, IMAGE D'UN POLYGONE

l'image d'un cercle par une translation | image mta3 cercle | le rayon change avec la translation ? | translation d'un cercle centre et rayon | comment trouver l'image d'un cercle | cercle image même rayon ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$O \longmapsto O' \quad ; \quad r' = r$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mte3 cercle de centre O w de rayon r hiya cercle b nafs le rayon r, w le centre mte3ou O', l'image mte3 O.

l'image متاع cercle de centre O w de rayon r هي cercle بنفس le centre w ، le rayon r متاعو ، O prime l'image متاع O .

L'image d'un cercle de centre O et de rayon r est le cercle de même rayon r, dont le centre est O prime, l'image de O.

QUESTION 20 · IMAGE D'UN CERCLE, IMAGE D'UN POLYGONE

deux figures superposables c'est une translation ? | superposable donc translation ? | figure tournée c'est une translation ? | comment reconnaître une translation | figure retournée translation wala le | reconnaître qu'une figure est l'image par translation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{RR'}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ma ykaffich ykounou superposables : lezem el points el koll yetzall9ou b nafs le vecteur, bla ma tdawwer wala tan9aleb. Figure dawwarneha walla 9lebneha to93od superposable, ama 7atta translation ma ta3tiha.

ما يكفيش يكونو superposables : لازم الـ points الكل يتزلّقو بنفس le vecteur ، بلا ما تدوّر ولا تنقلب figure . دوّرناها ولّا قلبناها تقعد superposable ، أما حتّى translation ما تعطيها .

Il ne suffit pas qu'elles soient superposables : tous les points doivent avoir glissé du même vecteur, sans tourner ni se retourner. Une figure tournée ou retournée reste superposable, mais aucune translation ne la produit.

QUESTION 21 · IMAGE D'UN CERCLE, IMAGE D'UN POLYGONE

l'image d'un polygone par une translation | l'aire change avec la translation ? | translation d'un triangle les angles | périmètre de l'image d'un triangle | image mta3 triangle b translation | la translation conserve les angles ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$5 + 7 + 6 = 18 \text{ cm}$$

CE QU'IL RÉPOND

Polygone w l'image mte3ou superposables : nafs l'aire, nafs le périmètre, w les angles homologues égaux. Mathalan triangle adhla3ou 5, 7 w 6 cm : l'image 3andha nafs el adhla3, w le périmètre $5 + 7 + 6 = 18$ cm.

le périmètre ، w les angles homologues نفس ، l'aire نفس : superposables متاعو polygone w l'image
. w le périmètre 18 cm ، عندها نفس الأضلاع w 6 cm : l'image 7 ، أضلاعو 5 triangle مثلا . égaux

Un polygone et son image sont superposables : même aire, même périmètre, et angles homologues égaux. Par exemple, un triangle de côtés 5, 7 et 6 cm a une image de mêmes côtés, donc de périmètre 18 cm.

QUESTION 22 · TRANSLATION DANS UN REPÈRE

translation dans un repère comment calculer les coordonnées | kifech na7seb les coordonnées de l'image | coordonnées de l'image par translation | translation avec abscisse et ordonnée | on ajoute ou on soustrait pour la translation | image d'un point dans un repère

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$B'(-1+3\,;2+2) = B'(2\,;4)$$

CE QU'IL RÉPOND

Nchoufou 9addech yerba7 l'abscisse w l'ordonnée men A l A' w na3mlou nafs el déplacement mel point. $A(2\,;1)$ l $A'(5\,;3)$: $+3$ w $+2$. Donc $B(-1\,;2)$ yemchi l $B'(2\,;4)$. Ken nna99sou, na3mlou el déplacement bel 3aks.

point . A من الـ déplacement نعملو نفس الـ A prime ، w لـ A من l'abscisse w l'ordonnée نشوفو قدّاش يربح
A prime de coordonnées 5 w 3 : plus 3 w plus 2 . donc B de coordonnées لـ de coordonnées 2 w 1
. بالعكس déplacement نعملو الـ ، كان ننقّصو . B prime de coordonnées 2 w 4 يمشي لـ moins 1 w 2

On regarde ce que gagnent l'abscisse et l'ordonnée de A à A prime, et on fait le même déplacement à partir du point. De A de coordonnées 2 et 1 à A prime de coordonnées 5 et 3 : plus 3 et plus 2. Donc B de coordonnées moins 1 et 2 va en B prime de coordonnées 2 et 4. Soustraire ferait le déplacement dans l'autre sens.

QUESTION 23 · DÉMONTRER UNE ÉGALITÉ DE VECTEURS

comment démontrer une égalité de vecteurs | kifech nwarri elli zouz vecteurs égaux | montrer que deux vecteurs sont égaux | prouver AC = ED | démontrer vecteur égal méthode | kifech nthabbet égalité de vecteurs

CE QU'IL RÉPOND

7asb l'énoncé. Fih milieux : nerj3ou l la définition, les extrêmes w les moyens 3andhom nafs le milieu. Fih parallélogramme : n9raw les sommets bet-tartib. Fih translation : image mte3 M ya3ni $\overrightarrow{MM'}$ égale le vecteur, w nbaddlou les moyens ken lezem.

فيه . le milieu عندهم نفس la définition ، les extrêmes w les moyens لـ نرجعو : milieux فيه . l'énoncé حسب
vecteur M M prime يعني M متاع translation : image فيه . بالترتيب les sommets نقراو : parallélogramme

. كان لازم les moyens نبدّلو égale le vecteur ، w

Selon l'énoncé. Des milieux : on revient à la définition, les extrêmes et les moyens ont le même milieu. Un parallélogramme : on lit ses sommets dans l'ordre. Une translation : M prime image de M se traduit par vecteur M M prime égale le vecteur de la translation, puis on échange les moyens si besoin.

QUESTION 24 · LE VECTEUR

quelle est la différence entre un vecteur et un segment | vecteur w segment chnowa el far9 | vecteur AB et segment AB c'est pareil ? | segment ou vecteur | vecteur kif segment ? | différence vecteur segment

CE QU'IL RÉPOND

Le segment $[AB]$ houwa $[BA]$ nafsou : ma 3andouch sens. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ 3andou direction, sens w longueur, w $\overrightarrow{BA}$ mouch houwa. W zouz vecteurs égaux ynajjmou ykounou fi blayes mekhtalfin : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

direction ، sens w longueur ، w عندو sens . le vecteur A B ما عندوش : نفسو B A هو le segment A B
. A B w C D : ينجّمو يكونو في بلايص مختلفين vecteurs égaux زوز w . موش هو vecteur B A

Le segment A B est le même que le segment B A : il n'a pas de sens. Le vecteur A B a une direction, un sens et une longueur, et le vecteur B A n'est pas lui. Et deux vecteurs égaux peuvent être à des endroits différents : vecteur A B égale vecteur C D.

QUESTION 25 · LE VECTEUR

c'est quoi un bipoint | bipoint chnowa | bipoint et vecteur différence | le bipoint (A, B) c'est quoi | bipoint ya3ni chnowa | définition d'un bipoint

CE QU'IL RÉPOND

Le bipoint (A, B) houwa couple de points fi tartib : A 9bal w B ba3d. Barcha bipoints ynajjmou yreprésentiw nafs le vecteur : (A, B) w (C, D) yreprésentiw nafs le vecteur ki $[AD]$ w $[BC]$ 3andhom nafs le milieu.

le نفس représenter يـ ينجّمو bipoints برشا . بعد w B قبْلْ A : في ترتيب couple de points هو le bipoint A ، B
. le milieu نفس عندهم A D w B C كي le vecteur نفس représenter يـ vecteur : A ، B w C ، D

Le bipoint A, B est un couple de points pris dans un ordre : A d'abord, B ensuite. Plusieurs bipoints peuvent représenter le même vecteur : A, B et C, D représentent le même vecteur quand A D et B C ont le même milieu.

QUESTION 26 · MÊME DIRECTION, MÊME SENS, MÊME LONGUEUR

comment savoir si deux vecteurs sont égaux | kifech na3ref zouz vecteurs égaux

---

reconnaître des vecteurs égaux sur une figure | vecteurs égaux kifech na3refhom | comment savoir si AB = CD | reconnaître deux flèches qui représentent le même vecteur

CE QU'IL RÉPOND

Nchoufou thletha 7ajet : nafs la direction, nafs le sens w nafs la longueur. Ken wa7da tan9es, mouch nafs le vecteur. W bel définition : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ki $[AD]$ w $[BC]$ 3andhom nafs le milieu.

نشوفو ثلاثة حاجات : نفس la direction ، نفس le sens w نفس la longueur . كان وحدة تنقص ، موش نفس le vecteur . w بالـ vecteur C D égale vecteur A B définition : كي A D w B C عندهم نفس le milieu .

On regarde trois choses : même direction, même sens et même longueur. S'il en manque une, ce n'est pas le même vecteur. Et par la définition : vecteur A B égale vecteur C D quand A D et B C ont le même milieu.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **L'image de B**

A et B sont deux points tels que $AB = 3{,}5$ cm. Le point B' est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Calculer la longueur AB'.

Donner la longueur AB' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de B, c'est le point B' tel que le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Que dit cette égalité sur la position de B par rapport à A et B' ?
2. Écris l'égalité à l'envers : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BB'}$. Les lettres s'enchaînent en B : B est le milieu du segment $[AB']$.

CORRECTION

La définition — B' est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. En vecteurs :

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$$

Le milieu — Donc B est le milieu du segment $[AB']$: B' est le symétrique de A par rapport à B, et le segment $[AB']$ mesure deux fois AB.

$$AB' = 2 \times AB$$

$$AB' = 2 \times 3{,}5 = 7 \text{ cm}$$

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ pousse A jusqu'en B, et B encore d'une longueur AB plus loin, dans le même sens. B' est à $3{,}5$ cm de B, donc à 7 cm de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3.5 / 3,5` → Tu as donné BB', la longueur du déplacement : chaque point glisse de $AB = 3{,}5$ cm. Mais la question porte sur AB' : il faut compter aussi le chemin de A à B.

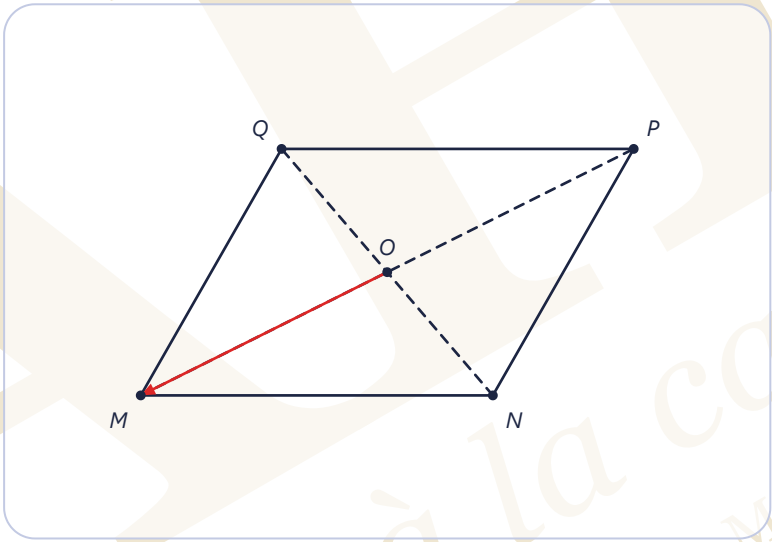
`0` → Tu as pris A pour l'image de B. C'est l'inverse : la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ envoie A sur B, et B plus loin encore, dans le même sens.

EXERCICE 2 · BASE

Le centre du parallélogramme

$MNPQ$ est un parallélogramme de centre O.

Parmi les vecteurs qui joignent deux des cinq points M, N, P, Q et O, un seul est égal au vecteur $\overrightarrow{OM}$ sans être le vecteur $\overrightarrow{OM}$ lui-même. Lequel ?



Un parallélogramme MNPQ : M en bas à gauche, N en bas à droite, P en haut à droite, Q en haut à gauche. Ses diagonales [MP] et [NQ], en pointillés, se coupent en son centre O. Une flèche rouge va de O vers M.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : PO — aussi acceptées : P O · vecteur PO · vec PO · vect PO · OM=PO · OM = PO · PO=OM · PO = OM · vecteur OM = vecteur PO · le vecteur PO

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre d'un parallélogramme est le milieu de ses diagonales. Parmi les diagonales, laquelle passe par M ?
2. O est le milieu de $[MP]$: le vecteur $\overrightarrow{MO}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{OP}$, les lettres s'enchaînent en O. Change maintenant le sens des deux vecteurs.

CORRECTION

Le milieu — Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu : O est le milieu de $[MP]$. Les lettres s'enchaînent en O ; en vecteurs :

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP}$$

Le sens — Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ va de O vers M. En changeant le sens des deux vecteurs, l'égalité reste vraie : le vecteur cherché part de P et arrive en O. En vecteurs :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PO}$$

Vérification par la définition : pour l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{PO}$, les extrêmes forment le « segment » $[OO]$, réduit au point O, et les moyens le segment $[MP]$; ils ont bien le même milieu, O. Écrire le vecteur $\overrightarrow{OP}$, c'est prendre la bonne longueur dans le mauvais sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`OP` / `O P` / `vecteur OP` / `MO` / `M O` / `vecteur MO` → Ce vecteur a la bonne direction et la bonne longueur, mais pas le bon sens : il va à l'opposé du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le vecteur cherché doit aller, comme le vecteur $\overrightarrow{OM}$, en direction de M.

`PM` / `P M` / `vecteur PM` / `MP` / `M P` / `vecteur MP` → Ce vecteur est deux fois trop long : M et P sont les deux bouts de la diagonale, et O est au milieu. Il faut un vecteur de longueur OM, la moitié.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Glisser dans un repère

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(1\,;3)$, $B(3\,;-1)$ et $M(-1\,;2)$.

Déterminer les coordonnées du point M', image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Écrire le couple de coordonnées de M', par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(1;-2)` — aussi acceptées : (1,-2) · M'(1;-2) · M'(1,-2) · M' = (1;-2) · 1;-2 · x=1;y=-2 · x=1 et y=-2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M' est l'image de M : le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Pour aller de M à M', on fait exactement le même déplacement que pour aller de A à B.
2. Lis ce déplacement sur les coordonnées : de combien change l'abscisse de A à B ? Et l'ordonnée ?
   $x_B - x_A \quad ; \quad y_B - y_A$
3. De A à B, l'abscisse gagne 2 et l'ordonnée perd 4. Fais le même déplacement à partir de $M(-1\,;2)$.

CORRECTION

Le déplacement — De $A(1\,;3)$ à $B(3\,;-1)$, on lit ce que gagnent l'abscisse et l'ordonnée.

$$3 - 1 = 2 \quad ; \quad -1 - 3 = -4$$

Le même, depuis M — Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: on ajoute 2 à l'abscisse de M et -4 à son ordonnée.

$$x_{M'} = -1 + 2 = 1 \quad ; \quad y_{M'} = 2 + (-4) = -2$$

$$M'(1\,;-2)$$

Vérification : on refait le chemin à l'envers, de M' vers M. L'abscisse passe de 1 à -1, elle perd 2 ; l'ordonnée passe de -2 à 2, elle gagne 4. C'est bien le chemin de A à B, parcouru dans l'autre sens : c'est juste.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-3;6) / (-3,6) / M'(-3;6) / M'(-3,6) / -3;6` → Tu as fait le déplacement à l'envers, de B vers A : c'est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$. De A à B, l'abscisse **gagne** 2 et l'ordonnée **perd** 4.

`(2;-4) / (2,-4) / M'(2;-4) / M'(2,-4) / 2;-4` → Tu as donné le déplacement lui-même : $+2$ en abscisse, -4 en ordonnée. Il faut maintenant l'appliquer au point M, en partant de ses coordonnées.

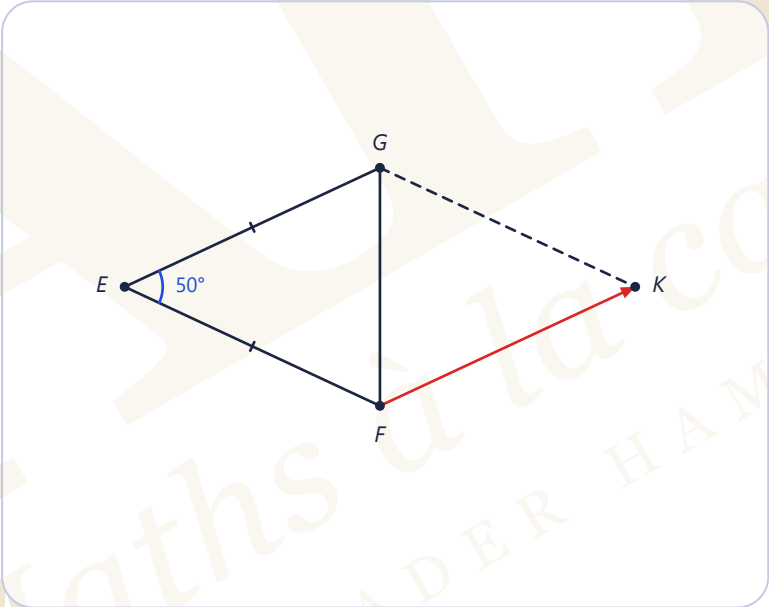
`(2;1) / (2,1) / M'(2;1) / M'(2,1) / 2;1` → Tu as ajouté les coordonnées de B à celles de M. Ce qui compte, c'est le chemin de A à B : on ajoute $3 - 1 = 2$ à l'abscisse et $-1 - 3 = -4$ à l'ordonnée.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

La nature de EGKF

EFG est un triangle isocèle en E, avec $\widehat{FEG} = 50°$. Le point K est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

Quelle est la nature précise du quadrilatère $EGKF$?



Un triangle EFG isocèle en E : E à gauche, G en haut à droite, F en bas à droite ; les côtés [EG] et [EF] portent la même marque, et l'angle en E est marqué 50 degrés. Une flèche rouge part de F vers la droite et monte jusqu'au point K, parallèle à [EG], de même sens et de même longueur. Le segment [GK], en pointillés, ferme le quadrilatère EGKF.

Donner sa nature la plus précise, en un mot.

Réponse attendue : `losange` — aussi acceptées : un losange · c'est un losange · EGKF est un losange · le quadrilatère EGKF est un losange · lozange · un lozange · EGKF losange · losange EGKF

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis l'énoncé en vecteurs : « K image de F » veut dire que le vecteur $\overrightarrow{FK}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{EG}$. Que dit cette égalité sur le quadrilatère $EGKF$?
2. Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{FK}$, et E, G, F ne sont pas alignés : $EGKF$ est un parallélogramme. Regarde maintenant deux de ses côtés consécutifs.

3. Le triangle est isocèle en E : compare EG et EF. Et l'angle en E, est-il droit ?

CORRECTION

Un parallélogramme — K est l'image de F, donc le vecteur $\overrightarrow{FK}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{EG}$. Comme E, G et F ne sont pas alignés, $EGKF$ est un parallélogramme. En vecteurs :

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FK}$$

Deux côtés consécutifs — Le triangle EFG est isocèle en E : les côtés consécutifs $[EG]$ et $[EF]$ du parallélogramme sont égaux.

$$EG = EF$$

Pas d'angle droit — Son angle en E mesure $50°$: ce n'est ni un rectangle ni un carré.

$$\widehat{FEG} = 50°$$

$$EGKF \text{ est un losange}$$

Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux est un losange. La translation a fabriqué le parallélogramme ; c'est le triangle isocèle qui en a fait un losange.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallélogramme / un parallélogramme / c'est un parallélogramme / EGKF parallélogramme / EGKF est un parallélogramme` → C'est vrai, mais pas assez précis. $EGKF$ est bien un parallélogramme, et deux de ses côtés consécutifs, $[EG]$ et $[EF]$, sont égaux puisque le triangle est isocèle en E. Quel parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux ?

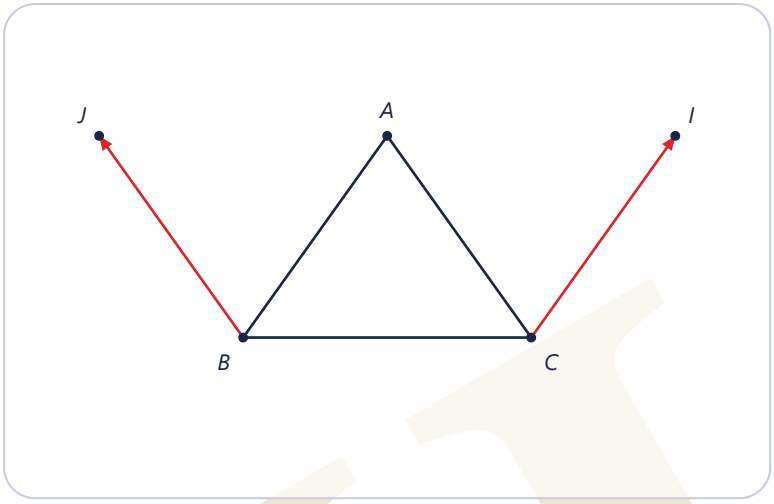
`carré / un carré / rectangle / un rectangle` → Pour un rectangle ou un carré, il faudrait un angle droit. Or l'angle en E du quadrilatère, $\widehat{FEG}$, mesure $50°$.

EXERCICE 5 · RAISONNEMENT **Deux images, un milieu**

ABC est un triangle tel que $BC = 7$ cm. Le point I est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, et le point J est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Calculer la longueur IJ.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAM



Un triangle ABC : A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. Une flèche rouge part de C et monte vers la droite jusqu'à I : elle est parallèle à [BA], de même sens et de même longueur que le vecteur BA. Une autre flèche rouge part de B et monte vers la gauche jusqu'à J : elle est parallèle à [CA], de même sens et de même longueur que le vecteur CA.

Donner la longueur IJ en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis chaque image en égalité de vecteurs : le vecteur $\overrightarrow{CI}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$, et le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ au vecteur $\overrightarrow{CA}$.
2. Échange les moyens dans chacune. La première donne : le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{IA}$. La seconde donne : le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{JA}$.
3. Compare les vecteurs $\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{AI}$: que représente A pour le segment $[IJ]$?

CORRECTION

Première image — I est l'image de C : le vecteur $\overrightarrow{CI}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$. En échangeant les moyens, en vecteurs :

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IA}$$

Seconde image — J est l'image de B : le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CA}$. En échangeant les moyens, en vecteurs :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{JA}$$

Le milieu — La première égalité, lue dans l'autre sens, donne : le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BC}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont égaux : les lettres s'enchaînent, A est le milieu de $[IJ]$. En vecteurs :

$$\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AI}$$

La longueur — Chacune des deux moitiés mesure BC.

$$IJ = 2 \times BC = 2 \times 7 = 14 \text{ cm}$$

Deux translations, une par sommet, et A se retrouve au milieu de $[IJ]$. La longueur n'est qu'un prolongement : $AI = AJ = BC = 7$ cm, donc $IJ = 14$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → 7 cm, c'est AI seulement — ou AJ. Le point A est le **milieu** de $[IJ]$: le segment entier mesure deux fois BC.

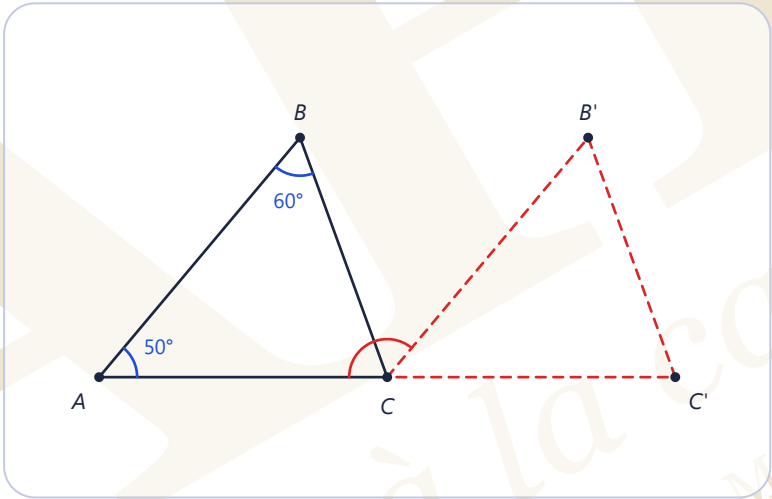
`3.5 / 3,5` → Tu as divisé par deux au lieu de multiplier. Chacune des deux moitiés, $[AI]$ et $[AJ]$, mesure déjà $BC = 7$ cm.

EXERCICE 6 · RAISONNEMENT

Un angle qui a glissé

ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC} = 50°$ et $\widehat{ABC} = 60°$. Le triangle $CB'C'$ est l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$: l'image de A est C, celle de B est B' et celle de C est C'.

Calculer l'angle $\widehat{ACB'}$.



Un triangle ABC posé sur sa base [AC] : A à gauche, C à droite, B au-dessus ; l'angle en A est marqué 50 degrés et l'angle en B, 60 degrés. À droite, en pointillés rouges, le triangle image CB'C' : la base [AC] a glissé en [CC'], dans son prolongement, et B est venu en B', à la même hauteur que B. L'angle cherché, ACB', au sommet C, entre la demi-droite [CA) et le segment [CB'], est marqué d'un arc rouge : le côté [CB] du triangle de départ passe à l'intérieur de cet angle.

Donner la mesure de $\widehat{ACB'}$ en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `130`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve les angles. Quel angle du triangle image a son sommet en C ? De quel angle du triangle ABC est-il l'image ?
2. En C, le triangle image a l'angle $\widehat{B'CC'}$, image de l'angle en A. Où est le point C' par rapport à A et C ?
3. A, C et C' sont alignés, car le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$. Donc $\widehat{ACB'}$ et $\widehat{B'CC'}$ sont deux angles supplémentaires.
   $\widehat{ACB'} + \widehat{B'CC'} = 180°$

CORRECTION

Les angles homologues — La translation envoie A sur C, B sur B' et C sur C'. L'angle en A du triangle ABC a pour image l'angle en C du triangle $CB'C'$, et une translation conserve les angles.

$\widehat{B'CC'} = \widehat{BAC} = 50°$

Un alignement — C' est l'image de C : le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$. Les lettres s'enchaînent : C est le milieu de $[AC']$, et les points A, C, C' sont alignés.

Deux angles supplémentaires — $\widehat{ACB'}$ et $\widehat{B'CC'}$ sont deux angles adjacents, et leurs côtés $[CA)$ et $[CC')$ sont deux demi-droites opposées.

$\widehat{ACB'} = 180° - 50°$

$\widehat{ACB'} = 130°$

L'angle $\widehat{ABC} = 60°$ ne sert pas : le sommet C du triangle image est l'image de A, et c'est l'angle en A qui y est recopié. Avant de recopier un angle, repère toujours qui va sur qui.

PIÈGES ANTICIPÉS

`50` → Tu as donné $\widehat{B'CC'}$, l'angle du triangle image en C. L'angle demandé, $\widehat{ACB'}$, est de l'autre côté de $[CB']$: c'est son supplémentaire.

`110` → Tu as pris le supplémentaire de l'angle $\widehat{ACB} = 70°$ du triangle de départ : $180 - 70 = 110$. Mais le sommet C du triangle image est l'image de A, pas de C : son angle est l'image de l'angle $\widehat{BAC} = 50°$.

`70` → Tu as donné l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle de départ. L'angle demandé, $\widehat{ACB'}$, a pour côtés $[CA)$ et $[CB')$: il va jusqu'à $[CB')$, plus loin que $[CB]$, qui passe entre les deux.

`120` → Tu as calculé $180 - 60$ avec l'angle en B. Mais l'angle en B a pour image l'angle en B' ; en C, c'est l'image de l'angle en A qu'on retrouve.

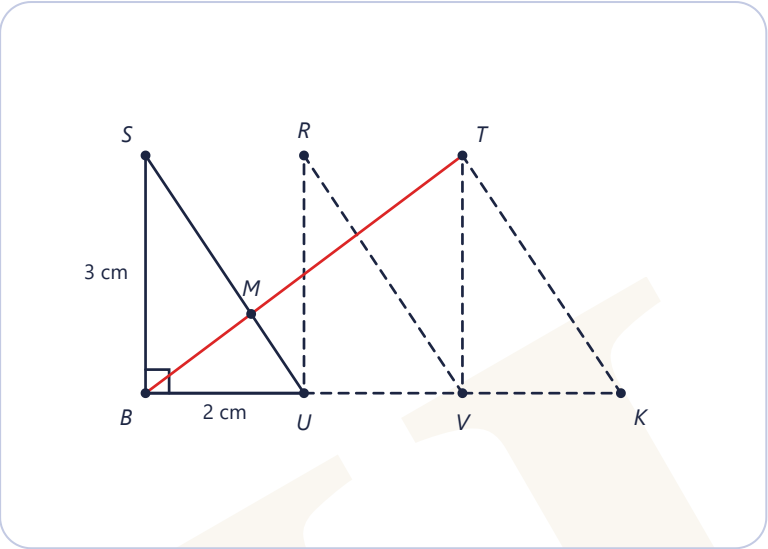
EXERCICE 7 · DEFI

Deux glissements le long de [BU]

BUS est un triangle rectangle en B tel que $BU = 2$ cm et $BS = 3$ cm. La translation de vecteur $\overrightarrow{BU}$ envoie le triangle BUS sur le triangle UVR : B va en U, U en V et S en R. La même translation envoie ensuite le triangle UVR sur le triangle VKT : U va en V, V en K et R en T. La droite (BT) coupe la droite (US) au point M.

Calculer la longueur BM.

Maths à la carte ABDELKADER HAMM



Un triangle BUS rectangle en B : B en bas à gauche, U à 2 cm à droite de B, S à 3 cm au-dessus de B. En pointillés, deux copies du triangle glissent vers la droite le long de la base, de 2 cm à chaque fois : d'abord UVR, puis VKT. Les points B, U, V et K sont alignés sur la base, les points S, R et T sur une parallèle au-dessus. Le segment rouge [BT] coupe le côté [US] au point M.

Donner la valeur exacte de BM en cm, sous forme de fraction irréductible, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 5/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Suis le segment $[BS]$: il glisse une première fois en $[UR]$, puis en $[VT]$. Une translation conserve les longueurs et les angles. Que valent BV et VT, et quel angle fait $[VT]$ avec la base ?
2. Le triangle BVT est rectangle en V, avec $BV = 4$ cm et $VT = 3$ cm : calcule BT par le théorème de Pythagore.
   $BT^2 = BV^2 + VT^2$
3. $[KT]$ est l'image de $[US]$ par deux translations successives : les droites (US) et (KT) sont parallèles. Applique le théorème de Thalès dans le triangle BKT.
   $\dfrac{BM}{BT} = \dfrac{BU}{BK}$

CORRECTION

Les images — Chaque translation avance de 2 cm le long de la base : V est à 4 cm de B, et K à 6 cm. Le segment $[BS]$ glisse en $[UR]$, puis en $[VT]$: il garde sa longueur, et reste perpendiculaire à la base.

$$BV = 4 \quad ; \quad BK = 6 \quad ; \quad VT = 3$$

Pythagore — Le triangle BVT est rectangle en V.

$$BT^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad \text{donc} \quad BT = 5$$

Thalès — $[KT]$ est l'image de $[US]$: les droites (US) et (KT) sont parallèles. Dans le triangle BKT, U est sur $[BK]$ et M sur $[BT]$.

$$\frac{BM}{BT} = \frac{BU}{BK} = \frac{2}{6}$$

Le calcul —

$$BM = 5 \times \frac{2}{6} = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

La translation a tout préparé : un angle droit conservé pour Pythagore, deux droites parallèles pour Thalès. Avec le même rapport, on trouverait aussi que UM est le tiers de US. Or US mesure $\sqrt{13}$ cm, par Pythagore dans le triangle BUS : UM est donc le tiers de $\sqrt{13}$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/2 / 2.5 / 2,5` → Tu as pris $BV = 4$ au lieu de $BK = 6$. La parallèle à (US) qui passe par T est la droite (KT) : le rapport de Thalès est $\dfrac{BU}{BK} = \dfrac{2}{6}$.

`5` → 5 cm, c'est BT, la longueur de tout le segment de B à T. Le point M n'est qu'au tiers de ce segment.

`10/3` → Tu as calculé MT, la partie qui reste : $5 - \dfrac{5}{3}$. La question demande BM, du côté de B.

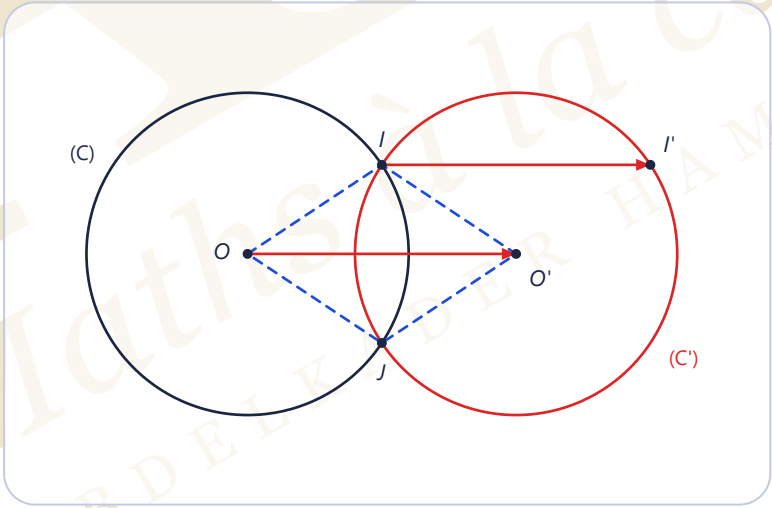
`sqrt(13)/3 / √13/3` → Tu as calculé UM, l'autre longueur de la figure : le tiers de US. La question demande BM, sur la droite (BT).

EXERCICE 8 · DEFI

Deux cercles et un diamètre

(C) est le cercle de centre O et de rayon 3 cm, et O' est un point tel que $OO' = 5$ cm. (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Les cercles (C) et (C') se coupent en I et J, et I' est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Calculer la longueur JI'.



Deux cercles de même rayon : (C), de centre O, à gauche, et (C'), de centre O', à droite, image de (C) par la translation de vecteur OO', dessinée par une flèche rouge de O vers O'. Les cercles se coupent en I, en haut, et en J, en bas. Le quadrilatère OIO'J est tracé en pointillés bleus. Une flèche rouge, égale à OO', va de I vers I', sur le cercle (C').

Donner la longueur JI' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (C') a le même rayon que (C) et pour centre O'. Compare les quatre longueurs OI, OJ, $O'I$ et $O'J$: quelle est la nature du quadrilatère $OIO'J$?
2. $OIO'J$ a ses quatre côtés égaux : c'est un parallélogramme particulier, et le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{JO'}$. La translation donne : le vecteur $\overrightarrow{II'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Échange les moyens dans cette égalité.
3. Tu obtiens : le vecteur $\overrightarrow{JO'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{O'I'}$. Que représente O' pour le segment $[JI']$?

CORRECTION

Un losange — I et J sont sur les deux cercles, qui ont le même rayon : $OI = OJ = O'I = O'J = 3$ cm. Le quadrilatère $OIO'J$ est un losange, donc un parallélogramme. En vecteurs :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{JO'}$$

La translation — I' est l'image de I : le vecteur $\overrightarrow{II'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{OO'}$. En échangeant les moyens, le vecteur $\overrightarrow{IO}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{I'O'}$; dans l'autre sens, en vecteurs :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{O'I'}$$

Le milieu — Les deux égalités donnent : le vecteur $\overrightarrow{JO'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{O'I'}$. Les lettres s'enchaînent, O' est le milieu de $[JI']$: le segment $[JI']$ est un diamètre de (C'). En vecteurs :

$$\overrightarrow{JO'} = \overrightarrow{O'I'}$$

$$JI' = 2 \times O'J = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$$

La donnée $OO' = 5$ cm ne sert qu'à garantir que les cercles se coupent, puisque $5 < 3 + 3$. Tout le reste est lecture de vecteurs : un losange, une translation, un milieu. Et comme I' est l'image d'un point de (C), il est bien sur (C').

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 cm, c'est OO', et aussi II' : la longueur du glissement. Mais $[JI']$ n'est pas le segment $[II']$: il part de J.

`3` → 3 cm, c'est le rayon, donc JO' seulement. O' est le **milieu** de $[JI']$: le segment entier est un diamètre.

`sqrt(11) / √11` → Tu as calculé IJ, la corde commune aux deux cercles. La question porte sur JI', qui va de J jusqu'à l'image de I.

EXERCICE 9 · BASE **Le segment des extrêmes**

E, F, G et H sont quatre points tels que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

D'après la définition, deux segments ont alors le même milieu : le segment des extrêmes et le segment des moyens. Quel est le segment des extrêmes ?

Écrire le segment entre crochets, par exemple $[MN]$.

Réponse attendue : [EH] — aussi acceptées : [HE] · segment [EH] · le segment [EH] · segment [HE] · le segment [HE] · EH · HE · segment EH · le segment EH · segment HE · le segment HE

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lis l'égalité $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ de gauche à droite, lettre par lettre : E, F, G, H.
2. Les extrêmes sont la première et la dernière lettre ; les moyens, les deux lettres du milieu.

CORRECTION

Lire les quatre lettres — De gauche à droite, l'égalité s'écrit avec les lettres E, F, G, H. En vecteurs : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$

Extrêmes et moyens — La première et la dernière lettre, E et H, sont les extrêmes ; F et G sont les moyens.

$$\text{segment des extrêmes : } [EH] \quad ; \quad \text{segment des moyens : } [FG]$$

L'égalité $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ dit que $[EH]$ et $[FG]$ ont le même milieu. Retiens la lecture : extrêmes dehors, moyens dedans.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[FG] / [GF] / segment [FG] / le segment [FG] / segment [GF] / le segment [GF] / FG / GF` → $[FG]$, c'est le segment des **moyens** : les deux lettres du milieu. Les extrêmes sont la première et la dernière lettre de l'égalité.

`[EG] / [GE] / segment [EG] / le segment [EG] / segment [GE] / le segment [GE] / EG / GE / [FH] / [HF] / segment [FH] / le segment [FH] / segment [HF] / le segment [HF] / FH / HF` → Ce segment mélange une lettre de chaque vecteur, prises à la même place. Les extrêmes sont la **première** lettre du premier vecteur et la **dernière** du second.

EXERCICE 10 · BASE

La lettre qui manque

Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu I.

On veut écrire l'égalité de vecteurs que donne la définition, sous la forme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C\ldots}$. Quel point manque ?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : `D` — aussi acceptées : point D · le point D · c'est D · c'est le point D · AB=CD · AB = CD

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, le segment des extrêmes est $[AD]$ et celui des moyens est $[BC]$.
2. Ici, A est la première lettre et B, C les moyens. Quelle lettre doit fermer l'égalité pour que les extrêmes forment le segment $[AD]$?

CORRECTION

Les moyens — Dans l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C\ldots}$, les moyens sont B et C : leur segment est $[BC]$.

Les extrêmes — Les extrêmes doivent former l'autre segment, $[AD]$: la dernière lettre est D. En vecteurs : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Même milieu pour $[AD]$ et $[BC]$ donne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: on place les deux segments, l'un dehors, l'autre dedans.

PIÈGES ANTICIPÉS

`I / point I / le point I / c'est I / c'est le point I` → I est le milieu commun : il ne fait pas partie de l'égalité. Les quatre lettres de l'égalité sont les extrémités des deux segments.

`A / point A / le point A / c'est A / c'est le point A / B / point B / le point B / c'est B / c'est le point B` → Cette lettre est déjà utilisée. Les moyens sont B et C ; les extrêmes doivent former le segment $[AD]$.

EXERCICE 11 · PRATIQUE

Sur une droite graduée

Sur une droite graduée, les points A, B et C ont pour abscisses respectives 1, 4 et 6.

Déterminer l'abscisse du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Donner l'abscisse de D.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par définition, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ veut dire que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
2. Le milieu de $[BC]$ a pour abscisse $\dfrac{4+6}{2}$. Le milieu de $[AD]$ doit avoir la même.
3. Autre lecture : de A à B, on avance de 3. On doit avancer d'autant de C à D.

CORRECTION

Le milieu de [BC] —

$$\frac{4+6}{2} = 5$$

Le milieu de [AD] — Il est aussi le point d'abscisse 5 : il est à 4 de A, donc D est encore à 4 plus loin.

$$\frac{1+x_D}{2} = 5$$

$$x_D = 10 - 1 = 9$$

Vérification par le déplacement : de A à B, on avance de $4-1=3$; de C à D, de $9-6=3$. Même longueur, même sens : c'est le même vecteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Tu as reculé de 3 à partir de C : c'est le point D tel que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ doit aller dans le **même sens** que $\overrightarrow{AB}$.

`10` → Tu as ajouté l'abscisse de B à celle de C. Ce qui compte, c'est le déplacement de A à B : $4-1=3$.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Même longueur, même vecteur ?

A, B et C sont trois points distincts tels que $AB = AC$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils égaux ? Répondre par oui ou par non.

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non ils ne sont pas égaux · ils ne sont pas égaux · pas égaux · non, pas égaux · non, ils ne sont pas égaux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux vecteurs égaux ont la même direction, le même sens **et** la même longueur. Une seule de ces trois conditions est donnée ici.
2. Les deux vecteurs partent du même point A. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, où serait le point C ?

CORRECTION

Une même origine — Une origine et un vecteur déterminent un seul point : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, alors $C = B$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \iff C = B$$

Les points sont distincts — Or B et C sont distincts : les deux vecteurs ne sont pas égaux.

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$$

L'égalité des longueurs ne suffit pas : ici, B et C sont sur un même cercle de centre A, mais dans deux directions différentes. Un vecteur, c'est une longueur, une direction **et** un sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / ils sont égaux / égaux / oui ils sont égaux` → Même longueur ne veut pas dire même vecteur. Il faut aussi la même direction et le même sens ; avec la même origine A, il faudrait même que C soit le point B.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

Dans l'autre sens

Sur une droite graduée, les points A, B et C ont pour abscisses respectives -2, 3 et 5.

Déterminer l'abscisse du point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Donner l'abscisse de D.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Attention à l'ordre des lettres : le vecteur $\overrightarrow{BA}$ va de B vers A. De combien avance-t-on, ou recule-t-on, de B à A ?
2. De B à A, l'abscisse passe de 3 à -2 : elle perd 5. Fais le même déplacement à partir de C.

CORRECTION

Le déplacement de B à A —

$$-2 - 3 = -5$$

Le même, depuis C — Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$: on recule de 5 à partir de C.

$x_D = 5 - 5 = 0$

Vérification par la définition : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ veut dire que $[CA]$ et $[DB]$ ont le même milieu. Leurs milieux ont pour abscisses $\dfrac{5-2}{2} = 1{,}5$ et $\dfrac{0+3}{2} = 1{,}5$: c'est juste.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Tu as avancé de 5 : c'est le déplacement de A vers B. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ va de B vers A : on **recule** de 5.

`-5` → -5, c'est le déplacement lui-même. Il faut l'appliquer au point C, d'abscisse 5.

EXERCICE 14 · PRATIQUE

Les milieux comptent

ABC est un triangle. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Parmi les vecteurs qui joignent deux des six points A, B, C, I, J, K, combien sont égaux au vecteur $\overrightarrow{JI}$? On compte $\overrightarrow{JI}$ lui-même.

Donner le nombre de vecteurs.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. J et I sont les milieux de $[AC]$ et $[BC]$. Le théorème des milieux donne la direction et la longueur de $[JI]$: lesquelles ?
2. (JI) est parallèle à (AB) et $JI = \dfrac{AB}{2}$. Cherche sur $[AB]$ des vecteurs de longueur $\dfrac{AB}{2}$, puis regarde leur sens.
3. De J vers I, on va du côté $[AC]$ vers le côté $[BC]$: dans le même sens que de A vers B.

CORRECTION

Le théorème des milieux — Dans le triangle ABC, J et I sont les milieux de $[AC]$ et $[BC]$.

$(JI) \parallel (AB) \quad ; \quad JI = \dfrac{AB}{2} = AK = KB$

Le sens — Le vecteur $\overrightarrow{JI}$ va dans le même sens que $\overrightarrow{AB}$. Sur $[AB]$, les vecteurs de longueur $\dfrac{AB}{2}$ dans ce sens sont $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{KB}$.

$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$

Trois vecteurs en tout. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KA}$ et $\overrightarrow{BK}$ ont la bonne direction et la bonne longueur, mais le sens contraire : ils ne comptent pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu as oublié de compter $\overrightarrow{JI}$ lui-même, ou l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{KB}$.

6 → Tu as compté aussi les vecteurs de sens contraire : $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{BK}$. Un vecteur égal doit aller dans le **même sens**.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Un vecteur qui part de I

ABC est un triangle. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Nommer le vecteur d'origine I, joignant deux points de la figure, qui est égal au vecteur $\overrightarrow{CJ}$.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : `IK` — aussi acceptées : I K · vecteur IK · le vecteur IK · vect IK · vec IK · CJ=IK · CJ = IK

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{CJ}$ est porté par (AC), et sa longueur est $\dfrac{AC}{2}$. Quel segment de la figure, partant de I, est parallèle à (AC) ?
2. I et K sont les milieux de $[BC]$ et $[AB]$: le théorème des milieux donne $(IK) \parallel (AC)$ et $IK = \dfrac{AC}{2}$. Reste à vérifier le sens.

CORRECTION

Le théorème des milieux — Dans le triangle ABC, I et K sont les milieux de $[BC]$ et $[AB]$.

$$(IK) \parallel (AC) \quad ; \quad IK = \frac{AC}{2} = CJ$$

Le sens — De I vers K, on va du côté de C vers le côté de A : dans le même sens que de C vers J. En vecteurs :

$$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IK}$$

Vérification par la définition : $CJKI$ est un parallélogramme, car ses côtés $[CJ]$ et $[IK]$ sont parallèles et de même longueur. On lit ses sommets dans l'ordre : $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IK}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`KI / K I / vecteur KI / le vecteur KI / vect KI / vec KI` → Ce vecteur a la bonne direction et la bonne longueur, mais il va du côté de A vers le côté de C : le sens contraire de $\overrightarrow{CJ}$.

`IJ / I J / vecteur IJ / le vecteur IJ / vect IJ / vec IJ / IA / I A / vecteur IA / le vecteur IA / vect IA / vec IA / IB / I B / vecteur IB / le vecteur IB / vect IB / vec IB / IC / I C / vecteur IC / le vecteur IC / vect IC / vec IC` → Ce vecteur n'est pas parallèle à (AC). Le vecteur cherché part de I et suit la direction de (AC).

EXERCICE 16 · RAISONNEMENT

Dans l'hexagone

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O : les six triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont équilatéraux.

Parmi les vecteurs qui joignent deux des sept points A, B, C, D, E, F, O, combien sont égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$? On compte $\overrightarrow{AB}$ lui-même.

Donner le nombre de vecteurs.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche les côtés de la figure parallèles à (AB) et de même longueur : ils sont sur la droite (FC) et sur le côté opposé $[ED]$.
2. $ABOF$ et $ABCO$ sont des losanges, donc des parallélogrammes : lis leurs sommets dans l'ordre. Et $[ED]$?
3. Pour chaque segment trouvé, vérifie le sens : il doit aller comme de A vers B.

CORRECTION

Deux losanges — $ABOF$ a ses quatre côtés égaux au côté de l'hexagone : c'est un losange, donc un parallélogramme. De même pour $ABCO$. En vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$$

Le côté opposé — $ABDE$ est un parallélogramme : ses diagonales $[AD]$ et $[BE]$ ont le même milieu O.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$$

Le compte — Les autres segments parallèles à (AB), comme $[FC]$, sont deux fois trop longs.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$$

Quatre vecteurs. Pour compter des vecteurs égaux, on cherche d'abord la direction, puis la longueur, et on finit toujours par le sens : $\overrightarrow{DE}$ ou $\overrightarrow{CO}$ ne comptent pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → Tu as compté aussi les vecteurs de sens contraire, comme $\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{DE}$. Un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$ doit aller dans le même sens.

3 → Il en manque un. As-tu pensé au côté opposé $[ED]$? $ABDE$ est un parallélogramme.

EXERCICE 17 · RAISONNEMENT

Partir de C dans l'hexagone

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O : les six triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont équilatéraux.

Nommer le vecteur d'origine C, joignant deux des sept points de la figure, qui est égal au vecteur $\overrightarrow{OF}$.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : CO — aussi acceptées : C O · vecteur CO · le vecteur CO · vect CO · vec CO · OF=CO · OF = CO

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points C, O et F sont alignés : $[CF]$ est une grande diagonale de l'hexagone. Où est O sur ce segment ?
2. O est le milieu de $[CF]$: les lettres s'enchaînent en O. Écris l'égalité qui en découle, avec un vecteur qui part de C.

CORRECTION

Le milieu — O est le centre de l'hexagone, donc le milieu de la grande diagonale $[CF]$. Les lettres s'enchaînent en O ; en vecteurs :

$$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OF}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OF}$ se reproduit à partir de C en allant de C jusqu'au centre O. Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ a la même longueur, mais il va dans le sens contraire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`OC / O C / vecteur OC / le vecteur OC / vect OC / vec OC` → Ce vecteur a la bonne longueur et la bonne direction, mais il part de O et va dans le sens contraire. On demande un vecteur d'**origine** C, qui aille vers F comme $\overrightarrow{OF}$.

`CF / C F / vecteur CF / le vecteur CF / vect CF / vec CF` → $\overrightarrow{CF}$ est deux fois trop long : O est le **milieu** de $[CF]$.

EXERCICE 18 · DEFI **Le carré et ses milieux**

$MNPQ$ est un carré de centre O. R, S, T et U sont les milieux respectifs des côtés $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ et $[QM]$.

Parmi les vecteurs qui joignent deux des neuf points M, N, P, Q, R, S, T, U, O, combien sont égaux au vecteur $\overrightarrow{RO}$? On compte $\overrightarrow{RO}$ lui-même.

Donner le nombre de vecteurs.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les neuf points forment un quadrillage de 2 carreaux sur 2 : trois rangées de trois points, parallèles à (MQ). Le vecteur $\overrightarrow{RO}$ avance d'un demi-côté, du côté $[MN]$ vers le côté $[QP]$.
2. Cherche, dans chaque rangée, les bipoints qui avancent d'un cran dans ce sens : M vers U, puis U vers Q. Fais de même dans la rangée du milieu et dans celle de $[NP]$.

CORRECTION

Le quadrillage — Les rangées parallèles à (MQ) sont M, U, Q, puis R, O, T au milieu, et N, S, P. Les droites (MN), (US) et (QP) sont parallèles et régulièrement espacées.

Un cran dans le même sens — Dans chaque rangée, il y a deux bipoints qui avancent d'un cran de $[MN]$ vers $[QP]$: ce sont des côtés de petits carrés, parallèles à (MQ), de même longueur et de même sens que $\overrightarrow{RO}$.

$$\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{MU} = \overrightarrow{UQ} = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{SP}$$

$3 \times 2 = 6$

Six vecteurs. Chaque égalité se justifie par un parallélogramme : par exemple $MROU$ est un carré, donc $\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{MU}$. Les vecteurs de sens contraire, comme $\overrightarrow{OR}$ ou $\overrightarrow{UM}$, ne comptent pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Tu n'as regardé qu'une rangée. Les trois rangées M, U, Q, R, O, T et N, S, P donnent chacune deux vecteurs égaux.

12 → Tu as compté aussi les vecteurs de sens contraire, comme $\overrightarrow{OR}$: ils vont de $[QP]$ vers $[MN]$.

EXERCICE 19 · DEFI

Les nœuds du quadrillage

Sur un quadrillage, on considère les 12 nœuds d'un rectangle de 3 carreaux de long sur 2 carreaux de haut : 4 colonnes de 3 nœuds. A est un nœud, et B est le nœud situé un carreau à droite et un carreau au-dessus de A.

Combien de bipoints (P, Q), formés de deux de ces 12 nœuds, représentent le vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Donner le nombre de bipoints.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un bipoint (P, Q) représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ quand, pour aller de P à Q, on fait le même déplacement : un carreau à droite, un carreau vers le haut.
2. Compte les nœuds P d'où l'on peut faire ce déplacement sans sortir du rectangle : P ne doit être ni dans la colonne de droite, ni dans la ligne du haut.

CORRECTION

Le déplacement — Le bipoint (P, Q) représente $\overrightarrow{AB}$ lorsque Q est un carreau à droite et un carreau au-dessus de P.

Les origines possibles — P doit être dans l'une des 3 premières colonnes et dans l'une des 2 lignes du bas.

$3 \times 2 = 6$

Six bipoints, et un seul vecteur : c'est tout l'intérêt de la notion. Le bipoint (Q, P), qui fait le chemin inverse, représente un autre vecteur, $\overrightarrow{BA}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → Tu as compté aussi les bipoints qui font le chemin inverse, ou l'autre diagonale. Seuls comptent ceux qui vont un carreau à droite **et** un carreau vers le haut.

8 / 9 → Le nœud P ne peut pas être dans la colonne de droite, ni dans la ligne du haut : Q sortirait du rectangle.

EXERCICE 20 · BASE

Nommer le parallélogramme

R, S, T et U sont quatre points tels que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$, et R, S, T ne sont pas alignés.

Nommer le parallélogramme formé par ces quatre points, en écrivant ses sommets dans l'ordre et en commençant par R.

Écrire les quatre sommets dans l'ordre, par exemple $MNPQ$.

Réponse attendue : RSUT — aussi acceptées : RTUS · SUTR · SRTU · UTRS · USRT · TRSU · TUSR

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La propriété du cours : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ parallélogramme. Attention à l'ordre des deux dernières lettres.
2. On écrit l'origine et l'extrémité du premier vecteur, puis l'extrémité et l'origine du second.

CORRECTION

La propriété — R, S et T ne sont pas alignés, donc $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$ équivaut à : $RSUT$ est un parallélogramme.

L'ordre des sommets — Origine R et extrémité S du premier vecteur, puis extrémité U et origine T du second.

$RSUT$

Vérification : dans $RSUT$, les côtés opposés $[RS]$ et $[UT]$ sont parallèles et égaux, et les diagonales $[RU]$ et $[ST]$ ont le même milieu : ce sont bien les extrêmes et les moyens.

PIÈGES ANTICIPÉS

RSTU / RUTS / STUR / SRUT / TURS / TSRU / URST / UTSR → $RSTU$ est un quadrilatère croisé : dans cet ordre, les côtés $[ST]$ et $[UR]$ se coupent. On écrit l'origine et l'extrémité du premier vecteur, puis l'**extrémité** et l'origine du second : R, S, U, T.

EXERCICE 21 · BASE **Échanger les moyens**

A, B, C et D sont quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

En échangeant les moyens, on obtient une autre égalité de la forme $\overrightarrow{AC} = \ldots$ Compléter par le vecteur qui convient.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : BD — aussi acceptées : B D · vecteur BD · le vecteur BD · vect BD · vec BD · AC=BD · AC = BD

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, les moyens sont les deux lettres du milieu : B et C.
2. Échanger les moyens, c'est mettre C à la place de B, et B à la place de C ; les extrêmes A et D ne bougent pas.

CORRECTION

Les moyens — Dans $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, les moyens sont B et C.

L'échange — On les échange ; A et D restent aux extrémités. En vecteurs :
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Les deux égalités disent la même chose : $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Échanger les moyens ne change ni le segment des extrêmes, ni celui des moyens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`DB / D B / vecteur DB / le vecteur DB / vect DB / vec DB` → Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ va dans le mauvais sens. Après l'échange, D reste la **dernière** lettre de l'égalité.

`CD / C D / vecteur CD / le vecteur CD / vect CD / vec CD` → Ce vecteur ne vient pas de l'échange des moyens. On remplace B par C et C par B : il reste $\overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 22 · BASE

Dans le parallélogramme EFGH

$EFGH$ est un parallélogramme.

Nommer le vecteur d'origine H, joignant deux sommets du parallélogramme, qui est égal au vecteur $\overrightarrow{EF}$.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : `HG` — aussi acceptées : H G · vecteur HG · le vecteur HG · vect HG · vec HG · EF=HG · EF = HG

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le côté opposé à $[EF]$ dans le parallélogramme $EFGH$ est $[HG]$: il est parallèle à $[EF]$ et de même longueur.
2. Reste le sens : de E vers F, on va comme de H vers … ?

CORRECTION

Lire les sommets — $EFGH$ est un parallélogramme. Avec la propriété du cours, $ABDC$ parallélogramme donne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; ici $A = E$, $B = F$, $D = G$, $C = H$. En vecteurs :
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$

Dans un parallélogramme $EFGH$, deux côtés opposés lus « dans le même sens » donnent des vecteurs égaux : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, et aussi $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`GH / G H / vecteur GH / le vecteur GH / vect GH / vec GH` → Le vecteur $\overrightarrow{GH}$ a la bonne longueur et la bonne direction, mais il va dans le sens contraire. Et il part de G, pas de H.

`HE / H E / vecteur HE / le vecteur HE / vect HE / vec HE` → Ce côté n'est pas parallèle à $[EF]$. Le côté opposé à $[EF]$, c'est $[HG]$.

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Quatre points alignés

A, B et C sont trois points d'une droite, avec $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, et B entre A et C. Le point D est tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Calculer la longueur AD.

Donner la longueur AD en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A, B et C sont alignés : d'après le cours, D est sur la même droite, et $CD = AB$. Reste à savoir de quel côté de C.
2. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ va dans le même sens que $\overrightarrow{AB}$: de A vers C. D est donc au-delà de C.

CORRECTION

Un parallélogramme aplati — A, B, C sont alignés et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: les quatre points sont alignés et $CD = AB = 3$ cm.

Le sens — $\overrightarrow{CD}$ va dans le même sens que $\overrightarrow{AB}$: D est après C, du côté opposé à A.

$$AD = AB + BC + CD$$

$$AD = 3 + 5 + 3 = 11 \text{ cm}$$

Avec trois points alignés, le parallélogramme $ABDC$ est « aplati » : tout se joue sur une droite, et le sens du vecteur dit de quel côté placer D.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Tu as placé D entre B et C, à 3 cm de C en revenant vers A : c'est le vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le sens contraire de $\overrightarrow{AB}$.

8 → 8 cm, c'est AC. Il faut encore ajouter $CD = AB = 3$ cm.

EXERCICE 24 · PRATIQUE

Un angle droit en A

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $AC = 5$ cm. Le point D est tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Quelle est la nature précise du quadrilatère $ABDC$?

Donner sa nature la plus précise, en un mot.

Réponse attendue : `rectangle` — aussi acceptées : un rectangle · c'est un rectangle · ABDC est un rectangle · ABDC rectangle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A, B et C ne sont pas alignés : que dit le cours de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ sur le quadrilatère $ABDC$?

2. $ABDC$ est un parallélogramme. Regarde son angle en A, puis compare deux côtés consécutifs.

CORRECTION

Un parallélogramme — A, B, C ne sont pas alignés, et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: $ABDC$ est un parallélogramme.

Un angle droit — Son angle en A, $\widehat{BAC}$, est droit : c'est un rectangle.

$\widehat{BAC} = 90°$

Pas un carré — Ses côtés consécutifs $[AB]$ et $[AC]$ ne sont pas égaux.

$AB = 3 \neq 5 = AC$

Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle. Pour qu'il soit un carré, il faudrait en plus deux côtés consécutifs égaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallélogramme / un parallélogramme / c'est un parallélogramme / ABDC est un parallélogramme / ABDC parallélogramme` → C'est vrai, mais pas assez précis : $ABDC$ a un angle droit en A.

`carré / un carré / c'est un carré / ABDC est un carré / ABDC carré` → Pour un carré, il faudrait aussi $AB = AC$. Or $AB = 3$ cm et $AC = 5$ cm.

EXERCICE 25 · PRATIQUE

Le bon quadrilatère

M, N, P et Q sont quatre points tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, et M, N, P ne sont pas alignés.

Lequel de ces quadrilatères est un parallélogramme : $MNPQ$, $MNQP$ ou $MQNP$?

Écrire le nom du quadrilatère, par exemple $ABCD$.

Réponse attendue : `MNQP` — aussi acceptées : MPQN · NQPM · NMPQ · QPMN · QNMP · PMNQ · PQNM

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Rappel : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ parallélogramme. Remplace A, B, C, D par M, N, P, Q.
2. Vérifie avec les diagonales : dans le bon quadrilatère, elles sont le segment des extrêmes $[MQ]$ et celui des moyens $[NP]$.

CORRECTION

La propriété — $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ et M, N, P non alignés : origine et extrémité du premier vecteur, puis extrémité et origine du second.

$MNQP$ est un parallélogramme

Vérification — Les diagonales de $MNQP$ sont $[MQ]$ et $[NP]$: ce sont les segments des extrêmes et des moyens, qui ont le même milieu.

L'ordre des sommets d'un parallélogramme compte : dans $MNPQ$, les côtés $[NP]$ et $[QM]$ se croisent. Lis toujours les sommets dans l'ordre du tour.

PIÈGES ANTICIPÉS

`MNPQ / MQPN / NPQM / NMQP / PQMN / PNMQ / QMNP / QPNM` → Dans $MNPQ$, les diagonales seraient $[MP]$ et $[NQ]$; or ce sont $[MQ]$ et $[NP]$ qui ont le même milieu. $MNPQ$ est croisé.

MQNP / MPNQ / QNPM / QMPN / NPMQ / NQMP / PMQN / PNQM → Dans $MQNP$, les diagonales seraient $[MN]$ et $[QP]$. Or l'égalité dit que les diagonales sont $[MQ]$ et $[NP]$.

EXERCICE 26 · PRATIQUE

Une longueur par les moyens

A, B, C et D sont quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, avec $AB = 4$ cm et $AC = 6$ cm.

Calculer la longueur BD.

Donner la longueur BD en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne $CD = AB$. Ce n'est pas CD qu'on cherche : quelle autre égalité de vecteurs peut-on écrire ?
2. Échange les moyens : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Que dit cette égalité sur les longueurs ?

CORRECTION

Échanger les moyens — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Les longueurs — Deux vecteurs égaux ont la même longueur.

$BD = AC = 6$ cm

Une égalité de vecteurs en cache une autre : en échangeant les moyens, on obtient gratuitement une deuxième égalité de longueurs. Dans le parallélogramme $ABDC$, $[AC]$ et $[BD]$ sont les deux autres côtés.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 cm, c'est CD, qui est égal à AB. Pour BD, il faut échanger les moyens : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 27 · RAISONNEMENT

Le parallélogramme aplati

A, B, C et D sont quatre points d'une même droite, placés dans cet ordre, tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On sait que $AB = 2$ cm et $AD = 9$ cm.

Calculer la longueur BC.

Donner la longueur BC en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne une longueur : laquelle ?
2. Les points sont dans l'ordre A, B, C, D : le segment $[AD]$ est fait de trois morceaux.

$$AD = AB + BC + CD$$

CORRECTION

Une longueur — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne $CD = AB = 2$ cm.

Le découpage — Les points sont dans l'ordre A, B, C, D.

$$AD = AB + BC + CD$$

$$BC = 9 - 2 - 2 = 5 \text{ cm}$$

Vérification par la définition : sur une droite graduée, A, B, C, D ont pour abscisses 0, 2, 7, 9. Les milieux de $[AD]$ et de $[BC]$ sont tous les deux à l'abscisse $4{,}5$: c'est juste.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7 cm, c'est AC, ou BD : tu n'as enlevé qu'un seul morceau. $[AB]$ et $[CD]$ mesurent tous les deux 2 cm.

EXERCICE 28 · RAISONNEMENT

Six points, trois égalités

M, N, P, Q, R et S sont six points tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{QS}$.

Nommer le vecteur d'origine P, joignant deux de ces six points, qui est égal au vecteur $\overrightarrow{MR}$.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : PS — aussi acceptées : P S · vecteur PS · le vecteur PS · vect PS · vec PS · MR=PS · MR = PS

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Échange les moyens dans chacune des deux égalités données.
2. Tu obtiens $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$ et $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{RS}$. Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{RS}$?
3. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{RS}$. Échange encore les moyens.

CORRECTION

Première égalité — $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$; en échangeant les moyens :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$$

Seconde égalité — $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{QS}$; en échangeant les moyens :

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{RS}$$

Les relier — Les deux résultats ont $\overrightarrow{NQ}$ en commun, donc :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{RS}$$

Encore les moyens —

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PS}$$

Trois échanges de moyens, et un vecteur commun pour faire le pont. C'est la technique de base pour démontrer une égalité de vecteurs sans figure.

PIÈGES ANTICIPÉS

`SP / S P / vecteur SP / le vecteur SP / vect SP / vec SP` → Le vecteur $\overrightarrow{SP}$ part de S et va dans le sens contraire. Le dernier échange de moyens donne $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PS}$: P en premier.

EXERCICE 29 · DEFI

Un parallélogramme en cache un autre

$ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales mesurent $AC = 8$ cm et $BD = 6$ cm. Le point E est le symétrique de A par rapport à B.

Calculer la longueur CE.

Donner la longueur CE en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B est le milieu de $[AE]$: écris l'égalité de vecteurs correspondante. Dans le parallélogramme $ABCD$, quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AB}$?
2. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$: quel parallélogramme en déduis-tu ?
3. $BECD$ est un parallélogramme. Le segment $[CE]$ en est un côté : quel côté lui est opposé ?

CORRECTION

Le milieu — B est le milieu de $[AE]$: les lettres s'enchaînent en B.

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$$

Le parallélogramme — $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ainsi $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$, et B, E, D ne sont pas alignés : $BECD$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$$

Côtés opposés — Dans $BECD$, le côté $[EC]$ est opposé au côté $[DB]$.

$$CE = BD = 6 \text{ cm}$$

La donnée $AC = 8$ cm ne sert pas. La diagonale $[BD]$ de $ABCD$ est devenue un côté du nouveau parallélogramme $BECD$: chercher le bon parallélogramme, c'est souvent toute la difficulté.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → 8 cm, c'est AC. Le segment $[CE]$ est le côté opposé à $[BD]$ dans le parallélogramme $BECD$.

`3 / 4` → Tu as pris une demi-diagonale. $[CE]$ est un côté du parallélogramme $BECD$, égal à toute la diagonale $[BD]$.

EXERCICE 30 · DEFI

Deux parallélogrammes autour de G

EFG est un triangle rectangle en E tel que $EF = 6$ cm et $EG = 8$ cm. On construit les points P et Q tels que $EFGP$ et $FEGQ$ soient des parallélogrammes.

Calculer l'aire du triangle FPQ, en cm².

Donner l'aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 48

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis chaque parallélogramme par une égalité de vecteurs : $EFGP$ donne $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{PG}$, et $FEGQ$ donne $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{QG}$.
2. De la seconde, en changeant le sens des deux vecteurs : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GQ}$. Compare $\overrightarrow{PG}$ et $\overrightarrow{GQ}$: que représente G pour $[PQ]$?
3. $[PQ]$ mesure $2 \times EF$ et il est parallèle à (EF). La hauteur issue de F du triangle FPQ est la distance de F à la droite (PQ) : compare-la à EG.

CORRECTION

Les deux égalités — $EFGP$ et $FEGQ$ sont des parallélogrammes. En vecteurs :

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{EF} \quad ; \quad \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{EF}$$

Le milieu — Donc $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{GQ}$: G est le milieu de $[PQ]$, et (PQ) est parallèle à (EF).

$$PQ = 2 \times EF = 12 \text{ cm}$$

La hauteur — (PQ) passe par G et est parallèle à (EF), qui est perpendiculaire à (EG). La distance de F à (PQ) est donc égale à $EG = 8$ cm.

L'aire —

$$\mathcal{A}_{FPQ} = \frac{12 \times 8}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

Le triangle FPQ a une aire double de celle de EFG, qui vaut 24 cm² : même hauteur, base double. Les égalités de vecteurs ont donné à la fois un milieu, une longueur et un parallélisme.

PIÈGES ANTICIPÉS

24 → 24 cm², c'est l'aire du triangle EFG. La base $[PQ]$ du triangle FPQ mesure $2 \times EF$, pour la même hauteur EG.

96 → Tu as oublié de diviser par 2 : l'aire d'un triangle, c'est base fois hauteur divisé par 2.

EXERCICE 31 · BASE **Les lettres qui s'enchaînent**

A, B et C sont trois points distincts tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, et $AC = 10$ cm.

Calculer la longueur AB.

Donner la longueur AB en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, la lettre B termine le premier vecteur et commence le second : les lettres s'enchaînent.
2. D'après le cours, cela veut dire que B est le milieu de $[AC]$.

CORRECTION

Le milieu — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à : B est le milieu du segment $[AC]$.

$$AB = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Quand les lettres s'enchaînent, la lettre commune est un milieu. C'est la façon la plus rapide d'écrire « B est le milieu de $[AC]$ » en vecteurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 cm, c'est AC, le segment entier. B en est le milieu.

`20` → B est le milieu de $[AC]$: AB est la **moitié** de AC.

EXERCICE 32 · BASE

Le milieu en vecteurs

I est le milieu du segment $[EF]$.

Nommer le vecteur d'origine I, joignant deux des points E, F, I, qui est égal au vecteur $\overrightarrow{EI}$.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : `IF` — aussi acceptées : I F · vecteur IF · le vecteur IF · vect IF · vec IF · EI=IF · EI = IF

INDICES, DANS L'ORDRE

1. I est le milieu de $[EF]$: les lettres doivent s'enchaîner en I.
2. De E à I, on avance vers F : à partir de I, on continue dans le même sens.

CORRECTION

Le milieu — I est le milieu de $[EF]$; les lettres s'enchaînent en I. En vecteurs :

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$$

« I milieu de $[EF]$ » s'écrit $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IF}$. Le vecteur $\overrightarrow{IE}$ a la bonne longueur mais va dans l'autre sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`IE / I E / vecteur IE / le vecteur IE / vect IE / vec IE` → Le vecteur $\overrightarrow{IE}$ revient vers E : il va dans le sens contraire de $\overrightarrow{EI}$.

`EF / E F / vecteur EF / le vecteur EF / vect EF / vec EF` → Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est deux fois trop long, et ne part pas de I.

EXERCICE 33 · BASE

Un seul point possible

$ABCD$ est un parallélogramme, et M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC}$.

Quel point de la figure est M ?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : B — aussi acceptées : point B · le point B · c'est B · c'est le point B · M=B · M = B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le parallélogramme $ABCD$, quel vecteur d'origine A est égal à $\overrightarrow{DC}$?
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Or une origine et un vecteur déterminent un seul point.

CORRECTION

Le parallélogramme — $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$$

Un seul point — $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ équivaut à $M = B$.

$$M = B$$

Une origine et un vecteur déterminent un seul point : dès qu'on a trouvé un point qui convient, c'est lui.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C / point C / le point C / c'est C / c'est le point C` → Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est une diagonale, il n'est pas égal à $\overrightarrow{DC}$. Cherche le côté opposé à $[DC]$.

`D / point D / le point D / c'est D / c'est le point D` → $\overrightarrow{AD}$ n'est pas parallèle à (DC). Le côté opposé à $[DC]$ dans $ABCD$, c'est $[AB]$.

EXERCICE 34 · PRATIQUE

Le symétrique sur la droite graduée

Sur une droite graduée, A a pour abscisse -1 et B a pour abscisse 5. Le point M est tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$.

Déterminer l'abscisse du point M.

Donner l'abscisse de M.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les lettres s'enchaînent en B : que représente B pour le segment $[AM]$?
2. B est le milieu de $[AM]$. De A à B, on avance de 6 : de B à M aussi.

CORRECTION

Le milieu — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$: B est le milieu de $[AM]$.

$$\frac{-1 + x_M}{2} = 5$$

$$x_M = 10 + 1 = 11$$

M est le symétrique de A par rapport à B. Vérification : de A à B, on avance de $5-(-1)=6$, et de B à M, de $11-5=6$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2, c'est l'abscisse du milieu de $[AB]$. Ici c'est B qui est le milieu, du segment $[AM]$.

-7 → Tu as placé M du côté de A. Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ doit aller dans le même sens que $\overrightarrow{AB}$, de A vers B.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

Deux moitiés

M, A et N sont trois points distincts tels que $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AN}$, et $MN=9$ cm.

Calculer la longueur AN.

Donner la longueur AN en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 9/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les lettres s'enchaînent en A : que représente A pour le segment $[MN]$?

CORRECTION

Le milieu — $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AN}$ équivaut à : A est le milieu de $[MN]$.

$$AN=\frac{MN}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5\text{ cm}$$

L'égalité $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AN}$ se lit « A milieu de $[MN]$ ». Le segment $[MN]$ est coupé en deux moitiés égales, $[MA]$ et $[AN]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → 9 cm, c'est MN, le segment entier. A en est le milieu.

18 → A est le milieu de $[MN]$: AN est la moitié de MN, pas le double.

EXERCICE 36 · PRATIQUE

Le symétrique de A par rapport à I

ABC est un triangle tel que $AB=5$ cm et $AC=7$ cm. I est le milieu de $[BC]$, et D est le point tel que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ID}$.

Calculer la longueur BD.

Donner la longueur BD en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ID}$: I est le milieu de $[AD]$. Il est aussi le milieu de $[BC]$.

2. Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. Lequel, ici ? Écris ses sommets dans l'ordre.

CORRECTION

Deux milieux — I est le milieu de $[AD]$, car $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$, et le milieu de $[BC]$.

Le parallélogramme — Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ de $ABDC$ ont le même milieu : $ABDC$ est un parallélogramme. En vecteurs :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

$$BD = AC = 7 \text{ cm}$$

Le segment des extrêmes $[AD]$ et celui des moyens $[BC]$ ont le même milieu : c'est la définition de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Le côté $[BD]$ est opposé à $[AC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 cm, c'est AB, égal à CD. Dans le parallélogramme $ABDC$, le côté opposé à $[BD]$ est $[AC]$.

EXERCICE 37 · RAISONNEMENT

Trois pas égaux

A, B, C et D sont quatre points distincts tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$. On sait que $AC = 10$ cm.

Calculer la longueur AD.

Donner la longueur AD en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La première égalité dit que B est le milieu de $[AC]$: que vaut AB ?
2. La seconde dit que C est le milieu de $[BD]$. Les quatre points sont alignés, régulièrement espacés.

CORRECTION

Premier milieu — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$: B est le milieu de $[AC]$.

$$AB = BC = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Second milieu — $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$: C est le milieu de $[BD]$, et $CD = BC = 5$ cm. Les points A, B, C, D sont alignés, dans cet ordre.

$$AD = 5 + 5 + 5 = 15 \text{ cm}$$

Trois vecteurs égaux mis bout à bout : trois pas de 5 cm dans la même direction et le même sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 cm, c'est AC : deux pas seulement. Il faut ajouter le troisième, $[CD]$.

`20` → Tu as pris 10 cm pour un pas. Mais AC fait déjà deux pas : chaque pas mesure 5 cm.

EXERCICE 38 · RAISONNEMENT

Au centre du parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O, et M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$.

Quel point de la figure est M ?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : 0 — aussi acceptées : point O · le point O · c'est O · c'est le point O · M=O · M = O

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O est le milieu de la diagonale $[AC]$: écris l'égalité de vecteurs où les lettres s'enchaînent en O.
2. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. Compare avec $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$.

CORRECTION

Le milieu — Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu : O est le milieu de $[AC]$.

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$$

Un seul point — Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO}$, ce qui équivaut à $M = O$.

$$M = O$$

À partir de A, le vecteur $\overrightarrow{OC}$ mène à mi-chemin de C : au centre O. Deux propriétés du cours en deux lignes : le milieu, puis l'unicité du point.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C` / `point C` / `le point C` / `c'est C` / `c'est le point C` → $\overrightarrow{AC}$ est deux fois trop long : O est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{OC}$ ne fait que la moitié du chemin de A à C.

EXERCICE 39 · RAISONNEMENT

Le quatrième sommet

ABC est un triangle tel que $AC = 6$ cm, $BC = 8$ cm et $AB = 10$ cm. I est le milieu de $[AB]$, et D est le point tel que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{ID}$.

Calculer la longueur AD.

Donner la longueur AD en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. I est le milieu de $[CD]$ et de $[AB]$. Quel quadrilatère a pour diagonales $[CD]$ et $[AB]$?
2. $ACBD$ est un parallélogramme : écris ses sommets dans l'ordre, et cherche le côté opposé à $[AD]$.

CORRECTION

Deux milieux — $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{ID}$: I est le milieu de $[CD]$. Il est aussi le milieu de $[AB]$.

Le parallélogramme — Les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ de $ACBD$ ont le même milieu : $ACBD$ est un parallélogramme. En vecteurs :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

$AD = CB = 8$ cm

Comme $6^2 + 8^2 = 10^2$, le triangle est rectangle en C et $ACBD$ est même un rectangle. Mais pour AD, le parallélogramme suffit : côtés opposés égaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 cm, c'est AC, égal à BD. Dans le parallélogramme $ACBD$, le côté opposé à $[AD]$ est $[CB]$.

5 → 5 cm, c'est AI, la moitié de la diagonale $[AB]$. $[AD]$ est un côté du parallélogramme $ACBD$.

EXERCICE 40 · DEFI

Deux symétriques et un milieu

$ABCD$ est un parallélogramme dont la diagonale $[BD]$ mesure 7 cm. E est le point tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$, et F le point tel que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD}$.

On peut montrer que C est le milieu de $[EF]$. Calculer la longueur EF.

Donner la longueur EF en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Combine avec $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$: quel parallélogramme obtiens-tu avec B, E, C, D ?
2. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$: $BECD$ est un parallélogramme, et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DB}$. Fais de même avec F.
3. Tu dois trouver $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DB}$. Compare $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{CE}$.

CORRECTION

Côté de E — $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $BECD$ est un parallélogramme. En vecteurs :

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CE}$

Côté de F — $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: $DFCB$ est un parallélogramme. En vecteurs :

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DB}$

Le milieu — Donc $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CE}$: les lettres s'enchaînent, C est le milieu de $[EF]$, et chaque moitié mesure BD.

$EF = 2 \times BD = 2 \times 7 = 14$ cm

Deux parallélogrammes auxiliaires, $BECD$ et $DFCB$, ont chacun recopié la diagonale $[BD]$: une fois de C vers E, une fois de F vers C. Bout à bout, elles forment $[EF]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7 cm, c'est CE, ou CF : une moitié seulement. C est le milieu de $[EF]$.

`3.5 / 3,5` → Chaque moitié de $[EF]$ est égale à toute la diagonale $[BD]$, pas à sa moitié.

EXERCICE 41 · BASE

Glisser D

$ABCD$ est un parallélogramme.

Quelle est l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : C — aussi acceptées : point C · le point C · c'est C · c'est le point C · image de D = C · D'=C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de D est le point D' tel que $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB}$. Cherche dans le parallélogramme un vecteur d'origine D égal à $\overrightarrow{AB}$.
2. Dans $ABCD$, le côté opposé à $[AB]$ est $[DC]$.

CORRECTION

Le parallélogramme — $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

L'image — Le point C vérifie la définition de l'image de D, et ce point est unique.

$D \longmapsto C$

Pour trouver une image dans une figure, on cherche un vecteur égal au vecteur de la translation qui part du point de départ : ici $\overrightarrow{DC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`B / point B / le point B / c'est B / c'est le point B` → B est l'image de A, pas de D. À partir de D, il faut faire le même déplacement que de A à B.

`A / point A / le point A / c'est A / c'est le point A` → Le vecteur $\overrightarrow{DA}$ n'est pas parallèle à (AB). Fais glisser D parallèlement à (AB), dans le sens de A vers B.

EXERCICE 42 · BASE

Le vecteur de la translation

Une translation envoie le point E sur le point F.

Quel est le vecteur de cette translation ? L'écrire avec les points E et F.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : EF — aussi acceptées : E F · vecteur EF · le vecteur EF · vect EF · vec EF · vec(EF)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Ici, le point de départ est E et son image est F.

CORRECTION

La définition — F est l'image de E : le vecteur de la translation est égal au vecteur qui va de E à son image F.

$\overrightarrow{EF}$

Le vecteur d'une translation va toujours d'un point vers son image. Avec le vecteur $\overrightarrow{FE}$, c'est F qui aurait pour image E.

PIÈGES ANTICIPÉS

`FE / F E / vecteur FE / le vecteur FE / vect FE / vec FE` → Le vecteur $\overrightarrow{FE}$ va de l'image vers le point de départ : c'est la translation qui ramène F sur E.

EXERCICE 43 · BASE **Translation sur une droite graduée**

Sur une droite graduée, A, B et M ont pour abscisses respectives 2, 5 et -1.

Déterminer l'abscisse de l'image M' du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Donner l'abscisse de M'.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De A à B, de combien avance-t-on ?
2. On avance de $5 - 2 = 3$. Fais le même déplacement à partir de M.

CORRECTION

Le déplacement —

$5 - 2 = 3$

Le même, depuis M — $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$: on avance de 3 à partir de M.

$x_{M'} = -1 + 3 = 2$

L'image M' tombe sur le point d'abscisse 2, qui est justement A : la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ envoie M sur A, parce que de M à A on avance aussi de 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4` → Tu as reculé de 3 : c'est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

`4` → Tu as ajouté l'abscisse de B. Ce qui compte, c'est le déplacement de A à B : $5 - 2 = 3$.

EXERCICE 44 · PRATIQUE **Du centre au sommet**

$EFGH$ est un parallélogramme de centre O.

Quelle est l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{GO}$?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : E — aussi acceptées : point E · le point E · c'est E · c'est le point E · image de O = E · O'=E

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de O est le point O' tel que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{GO}$. Les lettres s'enchaînent en O.
2. O est donc le milieu de $[GO']$. Or O est déjà le milieu d'une diagonale qui part de G.

CORRECTION

Le milieu — Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu : O est le milieu de $[GE]$.

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{GO}$

L'image — Le point E vérifie la définition de l'image de O ; ce point est unique.

$O \longmapsto E$

C'est un cas du cours : par la translation de vecteur $\overrightarrow{GO}$, l'image de O est le symétrique de G par rapport à O, c'est-à-dire E.

PIÈGES ANTICIPÉS

`G / point G / le point G / c'est G / c'est le point G` → G est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OG}$, le sens contraire. Le vecteur $\overrightarrow{GO}$ pousse O vers E.

`O / point O / le point O / c'est O / c'est le point O` → O est l'image de G. L'image de O est un cran plus loin, dans le même sens.

EXERCICE 45 · PRATIQUE

Dans le losange

$MNPQ$ est un losange de centre O.

Quelle est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OP}$?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : O — aussi acceptées : point O · le point O · c'est O · c'est le point O · image de M = O · M'=O

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre O est le milieu de la diagonale $[MP]$: écris l'égalité de vecteurs où les lettres s'enchaînent en O.
2. $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP}$. Compare avec la définition : l'image M' de M vérifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OP}$.

CORRECTION

Le milieu — Les diagonales du losange ont le même milieu O : O est le milieu de $[MP]$.

$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP}$

L'image — Le point O vérifie la définition de l'image de M.

$M \longmapsto O$

Le losange ne sert ici que comme parallélogramme : seul compte le fait que O soit le milieu de $[MP]$. La translation de vecteur $\overrightarrow{OP}$ fait avancer chaque point d'une demi-diagonale.

PIÈGES ANTICIPÉS

`P / point P / le point P / c'est P / c'est le point P` → $\overrightarrow{MP}$ est deux fois trop long. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ ne fait que la moitié du chemin de M à P.

`N / point N / le point N / c'est N / c'est le point N / Q / point Q / le point Q / c'est Q / c'est le point Q` → Ce point n'est pas dans la direction de (MP). La translation de vecteur $\overrightarrow{OP}$ fait glisser M le long de la diagonale (MP).

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Vrai ou faux : B image de C

$ABCD$ est un parallélogramme. On affirme : « B est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ ».

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Répondre par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · fausse · elle est fausse · l'affirmation est fausse

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis l'affirmation par la définition : elle dirait que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$.
2. Dans le parallélogramme $ABCD$, quel vecteur d'origine B est égal à $\overrightarrow{AD}$? Compare son sens avec celui de $\overrightarrow{CB}$.

CORRECTION

La traduction — « B est l'image de C » voudrait dire :

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$

Le parallélogramme — Or $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB}$ vont en sens contraires, et $B \neq C$: ils ne sont pas égaux. L'affirmation est fausse.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{CB}$

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$, c'est B qui a pour image C. Pour envoyer C sur B, il faut la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / c'est vrai / vraie / elle est vraie` → C'est l'inverse : la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ envoie B sur C, car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. L'image de C est plus loin encore, dans le même sens.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Le vecteur qui part de F

$EFGH$ est un parallélogramme. On cherche le vecteur de la translation qui envoie G sur H.

Écrire ce vecteur avec deux sommets du parallélogramme, en le faisant partir du sommet F.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : FE — aussi acceptées : F E · vecteur FE · le vecteur FE · vect FE · vec FE · GH=FE · GH = FE

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La translation qui envoie G sur H a pour vecteur $\overrightarrow{GH}$. Quel côté du parallélogramme est opposé à $[GH]$?
2. Lis les sommets de $EFGH$ dans l'ordre : le côté $[GH]$ est opposé au côté $[EF]$. Reste à choisir le sens.

CORRECTION

Le vecteur — La translation qui envoie G sur H est la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$.

Le parallélogramme — $EFGH$ est un parallélogramme : ses côtés opposés $[FE]$ et $[GH]$ sont parallèles, de même longueur et, lus de F vers E et de G vers H, de même sens. En vecteurs :

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$$

Vérification par la définition : pour $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$, les extrêmes forment $[FH]$ et les moyens $[EG]$, les deux diagonales du parallélogramme $EFGH$: elles ont bien le même milieu.

PIÈGES ANTICIPÉS

`EF / E F / vecteur EF / le vecteur EF / vect EF / vec EF` → $\overrightarrow{EF}$ va dans le sens contraire, et ne part pas de F. De G vers H, on va comme de F vers E.

`GH / G H / vecteur GH / le vecteur GH / vect GH / vec GH` → C'est bien le vecteur de la translation, mais on demande de l'écrire en partant de F : quel côté du parallélogramme lui est égal ?

`FH / F H / vecteur FH / le vecteur FH / vect FH / vec FH` → $\overrightarrow{FH}$ est une diagonale du parallélogramme. Le vecteur cherché est égal au **côté** $\overrightarrow{GH}$.

`FG / F G / vecteur FG / le vecteur FG / vect FG / vec FG` → Le côté $[FG]$ n'est pas parallèle à $[GH]$: il le coupe en G. Le côté opposé à $[GH]$, c'est $[EF]$.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

Au compas

A, B et M sont trois points non alignés tels que $AB = 5$ cm, $AM = 4$ cm et $BM = 6$ cm. M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Calculer la longueur BM'.

Donner la longueur BM' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ et M n'est pas sur (AB) : quel parallélogramme obtiens-tu ? Écris ses sommets dans l'ordre.
2. $ABM'M$ est un parallélogramme : quel côté est opposé à $[BM']$?

CORRECTION

Le parallélogramme — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$, et A, B, M ne sont pas alignés : $ABM'M$ est un parallélogramme.

Côtés opposés — Le côté $[BM']$ est opposé au côté $[MA]$.

$BM' = AM = 4$ cm

C'est la construction au compas du cours : M' est à la distance AB de M et à la distance AM de B. La longueur $BM = 6$ cm est une diagonale, elle ne sert pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → 5 cm, c'est MM' : la longueur du déplacement. BM' est l'autre côté du parallélogramme $ABM'M$.

6 → 6 cm, c'est BM, une diagonale du parallélogramme. $[BM']$ en est un côté, opposé à $[AM]$.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Aller et retour

ABC est un triangle. D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, puis E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

Quel point de la figure est E ?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : point A · le point A · c'est A · c'est le point A · E=A · E = A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis les deux images : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$. Que dit la première égalité, lue dans l'autre sens ?
2. En changeant le sens des deux vecteurs : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$. Compare avec $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$.

CORRECTION

Première image — D est l'image de A : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. En changeant le sens des deux vecteurs : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

Seconde image — E est l'image de D : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$. Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}$.

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} \iff E = A$

La translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ défait ce qu'a fait celle de vecteur $\overrightarrow{BC}$: on revient au point de départ. A est l'**antécédent** de D.

PIÈGES ANTICIPÉS

`D / point D / le point D / c'est D / c'est le point D` → D est le point de départ de la seconde translation, pas son image : le vecteur $\overrightarrow{CB}$ n'est pas nul.

`B / point B / le point B / c'est B / c'est le point B / C / point C / le point C / c'est C / c'est le point C` → Écris les égalités : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$. Une origine et un vecteur ne donnent qu'un seul point.

EXERCICE 50 · RAISONNEMENT

L'angle du losange

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. D est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Calculer l'angle $\widehat{ABD}$.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `120`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, et A, C, B ne sont pas alignés : quel parallélogramme obtiens-tu ? Écris ses sommets dans l'ordre.
2. $ACDB$ est un parallélogramme, et même un losange. Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires.

CORRECTION

Le parallélogramme — $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$: $ACDB$ est un parallélogramme. Ses côtés consécutifs $[AC]$ et $[AB]$ sont égaux : c'est un losange.

Angles consécutifs — Les angles en A et en B du parallélogramme sont consécutifs, donc supplémentaires.

$$\widehat{ABD} = 180° - \widehat{CAB}$$

$$\widehat{ABD} = 180° - 60° = 120°$$

Le côté 4 cm ne sert pas : seul l'angle de $60°$ du triangle équilatéral compte. Le losange $ACDB$ est formé de deux triangles équilatéraux, ABC et BCD.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → $60°$, c'est l'angle $\widehat{CAB}$, en A. L'angle en B du losange $ACDB$ lui est supplémentaire.

`180` → $\widehat{ABD}$ n'est pas un angle plat : A, B et D ne sont pas alignés.

EXERCICE 51 · DEFI

Trois translations, un grand triangle

ABC est un triangle de périmètre 12 cm. D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$, et F l'image de C par la translation de vecteur

$\overrightarrow{AB}$.

Calculer le périmètre du triangle DEF.

Donner le périmètre en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque image donne un parallélogramme : $ABCD$, $BCAE$ et $CABF$. Traduis-les en égalités de vecteurs.
2. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$. Que représente A pour $[ED]$? Et B, C pour les deux autres côtés ?
3. A, B, C sont les milieux des côtés de DEF. Utilise le théorème des milieux, ou compte directement : $ED = 2 \times BC$.

CORRECTION

Le milieu de [ED] — D image de A : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. E image de B : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$, soit en échangeant les moyens $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EA}$. Donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AD}$:

A milieu de $[ED]$; $ED = 2 \times BC$

Les deux autres — De même, B est le milieu de $[FE]$ et C celui de $[DF]$.

$FE = 2 \times CA$; $DF = 2 \times AB$

Le périmètre —

$\mathcal{P}_{DEF} = 2 \times (AB + BC + CA) = 2 \times 12 = 24$ cm

ABC est le triangle des milieux de DEF : le grand triangle a des côtés deux fois plus longs. Trois translations, une par sommet, ont reconstruit le triangle dont ABC est le triangle des milieux.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → Une translation conserve les longueurs, mais DEF n'est pas l'image de ABC par une seule translation. A est le **milieu** de $[ED]$: chaque côté de DEF est double.

6 → DEF est plus grand que ABC, pas plus petit : A, B, C sont les milieux de ses côtés.

EXERCICE 52 · BASE

Une distance conservée

M et N sont deux points tels que $MN = 6{,}2$ cm. M' et N' sont leurs images par une translation.

Calculer la longueur $M'N'$.

Donner la longueur $M'N'$ en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 6.2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que fait une translation aux distances ?

CORRECTION

La propriété — Une translation conserve les distances.

$M'N' = MN = 6{,}2 \text{ cm}$

Le vecteur de la translation n'est même pas donné : il ne change rien au résultat. Une translation fait glisser la figure sans la déformer.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12.4 / 12,4` → La translation ne double rien : elle fait glisser M et N du même vecteur, sans changer la distance entre eux.

EXERCICE 53 · BASE

La longueur du glissement

A et B sont deux points tels que $AB = 5$ cm. M est un point quelconque, et M' son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Calculer la longueur MM'.

Donner la longueur MM' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la définition de l'image : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Deux vecteurs égaux ont la même longueur.

CORRECTION

La définition —

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Les longueurs —

$MM' = AB = 5 \text{ cm}$

Tous les points glissent de la même longueur, celle du vecteur de la translation : où que soit M, il est à 5 cm de son image.

EXERCICE 54 · PRATIQUE

Le même glissement pour tous

Une translation envoie le point M sur M' et le point N sur N'. On sait que $MM' = 4$ cm et $MN = 7$ cm.

Calculer la longueur NN'.

Donner la longueur NN' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation fait glisser tous les points du même vecteur : compare $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$.

CORRECTION

Un même vecteur — M' et N' sont les images de M et N par la même translation : tous les points glissent du même vecteur.

$\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MM'}$

$NN' = MM' = 4 \text{ cm}$

La donnée $MN = 7$ cm ne sert pas ici : elle donnerait $M'N'$, la distance entre les deux images.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7 cm, c'est MN, et donc aussi $M'N'$. La question porte sur NN', le chemin parcouru par N : le même que celui de M.

EXERCICE 55 · PRATIQUE

Le parallélogramme du glissement

M et N sont deux points tels que $MN = 5$ cm. Une translation, dont le vecteur n'est pas parallèle à (MN), envoie M sur M' et N sur N', avec $MM' = 3$ cm.

Calculer le périmètre du quadrilatère $MNN'M'$.

Donner le périmètre en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$: quelle est la nature de $MNN'M'$?
2. Dans le parallélogramme $MNN'M'$, que valent $N'M'$ et NN' ?

CORRECTION

Un parallélogramme — $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$, et M, N, M' ne sont pas alignés : $MNN'M'$ est un parallélogramme.

Ses côtés — La translation conserve les distances, et tous les points glissent de la même longueur.

$M'N' = MN = 5 \quad ; \quad NN' = MM' = 3$

$\mathcal{P} = 2 \times (5 + 3) = 16 \text{ cm}$

Un segment et son image, quand le glissement n'est pas dans sa direction, forment toujours un parallélogramme : deux côtés égaux au segment, deux côtés égaux au vecteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → 8 cm, c'est la moitié du périmètre : il y a quatre côtés, deux de 5 cm et deux de 3 cm.

EXERCICE 56 · PRATIQUE

Les images de A et de C

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, l'image de A est B, et l'image de C est un point C'.

Calculer la longueur BC'.

Donner la longueur BC' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B et C' sont les images de A et de C. Que dit la conservation des distances ?
2. $BC' = AC$. Calcule la diagonale AC du rectangle avec le théorème de Pythagore.

CORRECTION

La conservation — B et C' sont les images de A et C par la même translation.

$$BC' = AC$$

Pythagore — Le triangle ABC est rectangle en B.

$$AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad \text{donc} \quad AC = 10$$

$$BC' = 10 \text{ cm}$$

On ne calcule pas BC' dans la nouvelle figure : on cherche de quel segment $[BC']$ est l'image. Ici, c'est la diagonale $[AC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 / 8 → $[BC']$ est l'image de la diagonale $[AC]$, pas d'un côté du rectangle : B est l'image de A, et C' celle de C.

14 → Une diagonale ne se calcule pas en ajoutant les côtés : utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Deux images sur une droite graduée

Sur une droite graduée, les points M et N ont pour abscisses -2 et 5. Une translation envoie M sur le point d'abscisse 3.

Déterminer l'abscisse de l'image N' du point N.

Donner l'abscisse de N'.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De M à son image, de combien avance-t-on ? Tous les points avancent d'autant.
2. Contrôle avec la conservation des distances : $M'N'$ doit valoir $MN = 7$.

CORRECTION

Le déplacement —

$$3 - (-2) = 5$$

L'image de N — N avance aussi de 5.

$$x_{N'} = 5 + 5 = 10$$

Vérification par la conservation des distances : $M'N' = 10 - 3 = 7$, et $MN = 5 - (-2) = 7$. C'est juste.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → 7, c'est la distance MN, conservée par la translation. On demande l'abscisse du point N'.

`0` → Tu as reculé de 5 : de M à son image, on **avance** de $3-(-2)=5$.

EXERCICE 58 · RAISONNEMENT

Un rectangle par glissement

M et N sont deux points tels que $MN=5$ cm. Une translation envoie M sur M' et N sur N', avec $MM'=12$ cm et (MM') perpendiculaire à (MN).

Calculer la longueur MN'.

Donner la longueur MN' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $MNN'M'$ est un parallélogramme. Avec l'angle droit en M, que devient-il ?
2. $[MN']$ est une diagonale du rectangle $MNN'M'$. Que vaut NN', et quel est l'angle en N ?

CORRECTION

Un rectangle — $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$: $MNN'M'$ est un parallélogramme. Il a un angle droit en M : c'est un rectangle.

Le triangle — Le triangle MNN' est rectangle en N, avec $NN'=MM'=12$ cm.

$$MN'^2=MN^2+NN'^2=25+144=169$$

$$MN'=13\text{ cm}$$

La translation a fourni la figure, la conservation des distances a donné $NN'=12$ cm, et le théorème de Pythagore a fini le travail.

PIÈGES ANTICIPÉS

`17` → Une diagonale ne s'obtient pas en ajoutant les côtés : utilise le théorème de Pythagore dans le triangle MNN'.

`12` → 12 cm, c'est NN', le glissement de N. $[MN']$ va de M à l'image de N : c'est une diagonale du rectangle.

EXERCICE 59 · RAISONNEMENT

Un triangle par glissement

ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm. A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Quelle est la nature précise du triangle ACA' ?

Donner sa nature la plus précise.

Réponse attendue : `équilatéral` — aussi acceptées : equilateral · triangle équilatéral · un triangle équilatéral · c'est un triangle équilatéral · il est équilatéral · ACA' est équilatéral

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, l'image de B est C et celle de A est A'. Que dit la conservation des distances sur CA' ?
2. $CA' = BA$. Et AA', la longueur du glissement de A ?

CORRECTION

Côté [CA'] — C et A' sont les images de B et A : la translation conserve les distances.

$$CA' = BA = 6$$

Côté [AA'] — $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$, donc :

$$AA' = BC = 6$$

Les trois côtés —

$$AC = CA' = AA' = 6 \text{ cm}$$

Le triangle ACA' a ses trois côtés égaux : il est équilatéral. Chaque côté vient d'une propriété différente : un côté de départ, une distance conservée, une longueur de glissement.

PIÈGES ANTICIPÉS

`isocèle / triangle isocèle / un triangle isocèle / c'est un triangle isocèle / il est isocèle` → C'est vrai, mais pas assez précis : calcule aussi AA', la longueur du glissement de A.

`rectangle / triangle rectangle / un triangle rectangle` → Le triangle ACA' n'a pas d'angle droit : calcule ses trois côtés.

EXERCICE 60 · RAISONNEMENT

Le carré qui glisse en diagonale

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. B' est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Calculer la longueur DB'.

Donner la longueur DB' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par cette translation, l'image de A est C et celle de B est B' : que peux-tu dire de $\overrightarrow{CB'}$?
2. $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Que représente C pour le segment $[DB']$?

CORRECTION

L'image d'un segment — C et B' sont les images de A et B : la translation transforme $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur égal.

$$\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{AB}$$

Le carré — Dans le carré $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB'}$: C est le milieu de $[DB']$.

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB'}$

$DB' = 2 \times DC = 8$ cm

On attendait une diagonale, $4\sqrt{2}$ cm, à cause du vecteur $\overrightarrow{AC}$. Mais le glissement en diagonale de B l'amène dans le prolongement de $[DC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(2) / 4√2 / sqrt(32)` → $4\sqrt{2}$ cm, c'est AC, ou BB' : la longueur du glissement. $[DB']$ est un autre segment : C en est le milieu.

`4` → 4 cm, c'est CB' seulement. C est le **milieu** de $[DB']$.

EXERCICE 61 · DEFI

Un point dans le prolongement

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $AD = 6$ cm. E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Calculer la longueur BE.

Donner la longueur BE en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par cette translation, A a pour image C, et D a pour image E. Quel vecteur d'origine C est égal à $\overrightarrow{AD}$?
2. $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$. Dans le rectangle, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Que dire alors des points B, C, E ?

CORRECTION

L'image de [AD] — C et E sont les images de A et D : la translation transforme $\overrightarrow{AD}$ en un vecteur égal.

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$

Le rectangle — Dans le rectangle $ABCD$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$: C est le milieu de $[BE]$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$

$BE = 2 \times BC = 2 \times 6 = 12$ cm

La diagonale $AC = 10$ cm est la longueur du glissement DE, mais elle ne sert pas pour BE. Pour placer une image, on suit le segment dont elle provient : ici $[AD]$ glisse en $[CE]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 cm, c'est AC, donc aussi DE : la longueur du glissement. $[BE]$ est formé de $[BC]$ et de $[CE]$, bout à bout.

`6` → 6 cm, c'est BC, ou CE : une moitié seulement. C est le milieu de $[BE]$.

EXERCICE 62 · BASE

L'image d'un côté

$MNPQ$ est un parallélogramme.

Quelle est l'image de la droite (NP) par la translation de vecteur $\overrightarrow{NM}$?

Écrire la droite par deux de ses points, par exemple (MN).

Réponse attendue : `(MQ)` — aussi acceptées : (QM) · MQ · QM · droite (MQ) · la droite (MQ) · droite (QM) · la droite (QM) · droite MQ · la droite MQ · droite QM · la droite QM

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image d'une droite est une droite parallèle. Il suffit de trouver l'image d'un seul de ses points : quelle est l'image de N ?
2. L'image de N est M. Quelle droite passe par M et est parallèle à (NP) ?

CORRECTION

L'image de N — Par la translation de vecteur $\overrightarrow{NM}$, l'image de N est M.

La parallèle — L'image de (NP) est la parallèle à (NP) qui passe par M. Dans le parallélogramme, c'est (MQ).

$(NP) \longmapsto (MQ)$

On peut vérifier avec P : son image est le point P' tel que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$, c'est-à-dire Q. La droite image passe bien par M et par Q.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(NP) / (PN) / NP / PN / droite (NP) / la droite (NP) / droite (PN) / la droite (PN)` → (NP) ne reste à sa place que si le vecteur lui est parallèle. Ici, $\overrightarrow{NM}$ ne l'est pas : la droite glisse jusqu'en M.

`(MN) / (NM) / MN / NM / droite (MN) / la droite (MN) / droite (NM) / la droite (NM) / (PQ) / (QP) / PQ / QP / droite (PQ) / la droite (PQ) / droite (QP) / la droite (QP)` → L'image d'une droite lui est **parallèle**. Or (MN) et (PQ) coupent (NP).

EXERCICE 63 · BASE

Un segment isométrique

E et F sont deux points tels que $EF = 4{,}5$ cm. L'image du segment $[EF]$ par une translation est le segment $[E'F']$.

Calculer la longueur $E'F'$.

Donner la longueur $E'F'$ en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `9/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est isométrique.

CORRECTION

La propriété — L'image du segment $[EF]$ est un segment isométrique.

$E'F' = EF = 4{,}5$ cm

« Isométrique » veut dire « de même longueur ». Une translation ne raccourcit ni n'allonge aucun segment.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → La translation fait glisser le segment sans l'allonger : il garde sa longueur.

EXERCICE 64 · PRATIQUE

Glisser le long de soi-même

$RSTU$ est un parallélogramme.

Quelle est l'image de la droite (ST) par la translation de vecteur $\overrightarrow{UR}$?

Écrire la droite par deux de ses points, par exemple (MN).

Réponse attendue : `(ST)` — aussi acceptées : (TS) · ST · TS · droite (ST) · la droite (ST) · droite (TS) · la droite (TS) · elle-même · la droite (ST) elle-même · (ST) elle-même · elle même · (ST) elle même · la droite (ST) elle même · droite ST · la droite ST · droite TS · la droite TS

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le parallélogramme $RSTU$, quel vecteur d'origine T est égal à $\overrightarrow{UR}$? Compare sa direction avec celle de la droite à transformer.
2. Quelle est l'image de T ? Sur quelle droite se trouve-t-elle ?

CORRECTION

Le vecteur — $RSTU$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{UR} = \overrightarrow{TS}$.

L'image de T — L'image de T par la translation de vecteur $\overrightarrow{TS}$ est S, qui est sur (ST).

La droite — L'image de (ST) est la parallèle à (ST) passant par S : c'est (ST) elle-même.

$(ST) \longmapsto (ST)$

Quand le vecteur d'une translation est parallèle à une droite, chaque point de la droite glisse sur elle : la droite est sa propre image. Elle n'est pas fixe point par point pour autant.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(RU) / (UR) / RU / UR / droite (RU) / la droite (RU) / droite (UR) / la droite (UR)` → (RU) est l'image de (ST) par la translation de vecteur $\overrightarrow{TU}$, par exemple. Ici, le vecteur $\overrightarrow{UR}$ est parallèle à (ST) : les points de (ST) glissent sur elle.

EXERCICE 65 · PRATIQUE

Vrai ou faux : le segment du trapèze

$EFGH$ est un trapèze de bases $[EF]$ et $[GH]$, avec $EF = 7$ cm et $GH = 4$ cm. On affirme : « l'image du segment $[EF]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$ est le segment $[HG]$ ».

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Répondre par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · fausse · elle est fausse · l'affirmation est fausse

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve les longueurs : combien mesure l'image du segment $[EF]$?
2. L'image de $[EF]$ mesure 7 cm. Et le segment $[HG]$?

CORRECTION

La longueur de l'image — L'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est isométrique : l'image de $[EF]$ mesure 7 cm.

$$\text{longueur de l'image} = EF = 7 \text{ cm}$$

La comparaison — Or $HG = 4$ cm : $[HG]$ n'est pas l'image de $[EF]$. L'affirmation est fausse.

$$7 \neq 4$$

Pourtant, l'image de la **droite** (EF) est bien la droite (HG) : c'est la parallèle à (EF) passant par H, image de E. L'image du segment est sur cette droite, mais elle part de H et mesure 7 cm : elle dépasse G.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / c'est vrai / vraie / elle est vraie` → C'est vrai pour la **droite** (EF) : son image est bien (HG). Mais un segment garde sa longueur : l'image de $[EF]$ mesure 7 cm, et $HG = 4$ cm.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

L'image d'un milieu

ABC est un triangle et I est le milieu de $[AB]$. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, l'image de A est C, l'image de B est B' et l'image de I est I'.

Que représente le point I' pour le segment $[CB']$?

Répondre en un mot ou deux.

Réponse attendue : `milieu` — aussi acceptées : le milieu · son milieu · c'est le milieu · c'est son milieu · milieu de CB' · milieu de B'C · milieu du segment CB' · milieu du segment B'C · I' est le milieu de CB' · I' est le milieu de B'C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image du segment $[AB]$ est le segment $[CB']$. Où se trouve l'image d'un point du segment $[AB]$?
2. La translation conserve les distances : compare CI' avec AI, et $I'B'$ avec IB.

CORRECTION

Image du segment — L'image de $[AB]$ est $[CB']$: comme I est sur $[AB]$, son image I' est sur $[CB']$.

Les distances — La translation conserve les distances.

$$CI' = AI \quad ; \quad I'B' = IB$$

Le milieu — Comme $AI = IB$, on obtient $CI' = I'B'$: I' est le milieu de $[CB']$.

$$CI' = I'B'$$

Une translation conserve les milieux : l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image. C'est une conséquence directe de la conservation des distances.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Une droite qui ne bouge pas

ABC est un triangle, et (d) est la droite qui passe par A et qui est parallèle à (BC).

Quelle est l'image de la droite (d) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$?

Écrire le nom de la droite, par exemple (MN) ou (d).

Réponse attendue : `(d)` — aussi acceptées : d · la droite (d) · droite (d) · (d) elle-même · elle-même · la droite (d) elle-même · elle même · (d) elle même · la droite (d) elle même

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a la direction de la droite (BC). Or la droite à transformer passe par A et elle est parallèle à (BC).
2. L'image A' de A vérifie $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$: la droite (AA') est parallèle à (BC). Sur quelle droite est A' ?

CORRECTION

L'image de A — L'image A' de A vérifie $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$: (AA') est parallèle à (BC) et passe par A. C'est (d), donc A' est sur (d).

La droite image — L'image de (d) est la parallèle à (d) passant par A' : c'est (d) elle-même.

$(d) \longmapsto (d)$

Une droite parallèle au vecteur de la translation est sa propre image : ses points glissent sur elle. Par la même translation, (BC) aussi est sa propre image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(BC) / (CB) / BC / CB / droite (BC) / la droite (BC) / droite (CB) / la droite (CB)` → (BC) est aussi sa propre image, mais ce n'est pas l'image de (d) : une translation transforme une droite en une droite **parallèle**, qui passe par l'image de A.

EXERCICE 68 · RAISONNEMENT

Deux droites qui se croisent

ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm et $BC = 7$ cm. (d) est la droite qui passe par A et qui est parallèle à (BC). L'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ coupe (d) en un point E.

Calculer le périmètre du quadrilatère $ABCE$.

Donner le périmètre en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de (AB) passe par l'image de B, c'est-à-dire C, et elle est parallèle à (AB).
2. Le quadrilatère $ABCE$ a ses côtés opposés parallèles : $(AB) \parallel (CE)$ et $(BC) \parallel (EA)$. Quelle est sa nature ?

CORRECTION

La droite image — Par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, l'image de B est C : l'image de (AB) est la parallèle à (AB) passant par C.

Un parallélogramme — E est sur cette droite et sur (d) : $(CE) \parallel (AB)$ et $(AE) \parallel (BC)$. $ABCE$ a ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme.

$$CE = AB = 5 \quad ; \quad EA = BC = 7$$

$$\mathcal{P}_{ABCE} = 2 \times (5 + 7) = 24 \text{ cm}$$

Le point E est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCE$: c'est aussi l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 cm, c'est la moitié du périmètre : le parallélogramme a deux côtés de 5 cm et deux côtés de 7 cm.

EXERCICE 69 · DEFI

Le losange de deux triangles

ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm. L'image du segment $[BC]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est le segment $[AD]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du quadrilatère $BADC$, en cm².

Donner l'aire exacte en cm², sans écrire l'unité, par exemple $5\sqrt{2}$.

Réponse attendue : `18*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de B est A, celle de C est D : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Quel parallélogramme obtiens-tu ? Il a deux côtés consécutifs égaux.
2. $BADC$ est un losange, coupé par sa diagonale $[AC]$ en deux triangles équilatéraux de côté 6 cm. Calcule la hauteur d'un triangle équilatéral par le théorème de Pythagore.
3. La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 6 cm coupe le côté opposé en son milieu.
   $h^2 = 6^2 - 3^2$

CORRECTION

Le losange — $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et B, A, C ne sont pas alignés : $BADC$ est un parallélogramme. Ses côtés consécutifs $[BA]$ et $[BC]$ sont égaux : c'est un losange.

Deux triangles — Le losange est formé des triangles ABC et ACD, de côtés $AC = CD = DA = 6$ cm : deux triangles équilatéraux.

La hauteur — Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A tombe au milieu de $[BC]$.

$$h^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \quad \text{donc} \quad h = 3\sqrt{3}$$

L'aire —

$$\mathcal{A}_{BADC} = 2 \times \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Autre méthode : un parallélogramme a pour aire base fois hauteur, ici $BC \times h = 6 \times 3\sqrt{3}$. La translation a fabriqué le losange, et le théorème de Pythagore a donné la hauteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(3)` / `9√3` → $9\sqrt{3}$ cm², c'est l'aire d'un seul triangle équilatéral. Le losange $BADC$ en contient deux.

`36` → 6×6, ce serait l'aire d'un carré. Le losange n'a pas d'angle droit : il faut sa hauteur, $3\sqrt{3}$ cm.

`31.18` / `31.2` / `31.17` / `31` → $31{,}18$ est une valeur approchée : $18\sqrt{3} \approx 31{,}18$. On demande la valeur exacte : garde la racine carrée.

EXERCICE 70 · RAISONNEMENT

Deux parallèles se coupent en D

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. On trace l'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, et l'image de la droite (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ces deux droites se coupent en D.

Quelle est la nature précise du quadrilatère $ABDC$?

Donner sa nature la plus précise, en un mot.

Réponse attendue : `carré` — aussi acceptées : un carré · c'est un carré · ABDC est un carré · ABDC carré

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La première droite passe par C, image de A, et elle est parallèle à (AB). La seconde passe par B et elle est parallèle à (AC).
2. $ABDC$ a ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme. Regarde son angle en A et deux côtés consécutifs.

CORRECTION

Les deux droites — L'image de (AB) est la parallèle à (AB) passant par C ; l'image de (AC) est la parallèle à (AC) passant par B.

Un parallélogramme — $ABDC$ a ses côtés opposés parallèles : $(CD) \parallel (AB)$ et $(BD) \parallel (AC)$. C'est un parallélogramme.

Un carré — Il a un angle droit en A et deux côtés consécutifs égaux, $AB = AC$: c'est un carré.

$$\widehat{BAC} = 90^\circ \quad ; \quad AB = AC$$

Un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux est à la fois un rectangle et un losange : un carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallélogramme` / `un parallélogramme` / `c'est un parallélogramme` / `ABDC est un parallélogramme` / `ABDC parallélogramme` / `rectangle` / `un rectangle` / `c'est un rectangle` / `ABDC est un rectangle` /

`ABDC rectangle / losange / un losange / c'est un losange / ABDC est un losange / ABDC losange` → C'est vrai, mais pas assez précis : $ABDC$ a un angle droit en A **et** deux côtés consécutifs égaux.

EXERCICE 71 · DEFI

Translation et Thalès

ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm. M est le point du segment $[BC]$ tel que $BM = 4$ cm. L'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BM}$ coupe la droite (AC) en N.

Calculer la longueur MN.

Donner la longueur MN en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `18/5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de (AB) passe par l'image de B, c'est-à-dire M, et elle est parallèle à (AB).
2. Dans le triangle CAB, M est sur $[CB]$, N sur $[CA]$, et $(MN) \parallel (AB)$: applique le théorème de Thalès.
$$\frac{CM}{CB} = \frac{MN}{BA}$$

CORRECTION

La droite image — L'image de B est M : l'image de (AB) est la parallèle à (AB) passant par M. Elle coupe (AC) en N, donc $(MN) \parallel (AB)$.

Thalès — Dans le triangle CAB, avec $CM = 10 - 4 = 6$ cm :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{6}{10}$$

$$MN = 6 \times \frac{6}{10} = 3{,}6 \text{ cm}$$

La translation a fourni la parallèle, Thalès a donné la longueur. Attention au rapport : on compare CM à CB, depuis le sommet C commun aux deux triangles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2.4 / 2,4 / 12/5` → Tu as utilisé le rapport $\frac{BM}{BC} = \frac{4}{10}$. Dans le théorème de Thalès, les longueurs se comptent depuis le sommet commun C : $\frac{CM}{CB} = \frac{6}{10}$.

`6` → Une translation conserve les longueurs, mais $[MN]$ n'est pas l'image de $[AB]$: N n'est pas l'image de A. Utilise le théorème de Thalès.

EXERCICE 72 · BASE

Le rayon du cercle image

(C) est le cercle de centre O et de rayon $2{,}5$ cm. A et B sont deux points tels que $AB = 7$ cm, et (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Calculer le rayon de (C').

Donner le rayon en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `5/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cours : l'image d'un cercle par une translation est un cercle de même …, dont le centre est l'image du centre.

CORRECTION

La propriété — L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon.

$r' = r = 2{,}5 \text{ cm}$

La longueur $AB = 7$ cm dit seulement de combien le centre a glissé : $OO' = 7$ cm. Le rayon, lui, ne change pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → 7 cm, c'est la longueur du glissement OO'. Le cercle glisse sans changer de taille.

`9.5` / `9,5` → On n'ajoute rien au rayon : le cercle glisse de 7 cm sans grossir.

EXERCICE 73 · BASE

Le périmètre de l'image

$EFGH$ est un rectangle tel que $EF = 5$ cm et $FG = 3$ cm. Le quadrilatère $E'F'G'H'$ est son image par une translation.

Calculer le périmètre de $E'F'G'H'$.

Donner le périmètre en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `16`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un polygone et son image par une translation sont superposables : ils ont le même périmètre.
2. Calcule donc le périmètre du rectangle $EFGH$.

CORRECTION

Superposables — $E'F'G'H'$ est superposable à $EFGH$: même périmètre.

$\mathcal{P} = 2 \times (5 + 3) = 16 \text{ cm}$

On calcule le périmètre sur la figure de départ, où l'on connaît les longueurs : l'image a exactement le même.

PIÈGES ANTICIPÉS

`15` → 15, c'est l'aire du rectangle, en cm². On demande son périmètre : la somme des quatre côtés.

`8` → 8 cm, c'est la moitié du périmètre : il y a quatre côtés, deux de 5 cm et deux de 3 cm.

EXERCICE 74 · BASE

Le nouveau centre

(C) est un cercle de centre O, et A est un point de (C). (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Quel point de la figure est le centre de (C') ?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : point A · le point A · c'est A · c'est le point A · centre = A · O'=A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre du cercle image est l'image du centre O.
2. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, quelle est l'image de O ?

CORRECTION

L'image du centre — Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, l'image de O est A.

Le cercle image — (C') est le cercle de centre A et de même rayon que (C).

$O \longmapsto A$

Comme OA est le rayon, le cercle (C') passe par O : chacun des deux cercles passe par le centre de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`O / point O / le point O / c'est O / c'est le point O` → O est le centre de (C). Le cercle a glissé : son nouveau centre est l'image de O.

EXERCICE 75 · PRATIQUE

Deux cercles qui se touchent

(C) est le cercle de diamètre $[EF]$, avec $EF = 5$ cm. (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$. Les deux cercles ont un seul point commun.

Lequel ?

Écrire le nom du point, par exemple K.

Réponse attendue : F — aussi acceptées : point F · le point F · c'est F · c'est le point F · point commun = F · le point commun est F

INDICES, DANS L'ORDRE

1. E est sur (C). Quelle est son image, et sur quel cercle est-elle ?
2. L'image de E est F, qui est donc sur (C'). Est-il aussi sur (C) ?

CORRECTION

L'image de E — E est un point de (C) ; son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ est F. Donc F est sur (C').

Sur les deux — F est une extrémité du diamètre $[EF]$: il est aussi sur (C).

$F \in (C) \quad ; \quad F \in (C')$

Le centre K de (C), milieu de $[EF]$, a glissé de 5 cm : la distance des centres vaut $2{,}5 + 2{,}5$, la somme des rayons. Les cercles se touchent en un seul point, F.

PIÈGES ANTICIPÉS

`E / point E / le point E / c'est E / c'est le point E` → E est sur (C), mais pas sur (C') : c'est son image, F, qui est sur (C').

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Les angles homologues

ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC} = 40°$ et $\widehat{ABC} = 75°$. Le triangle $A'B'C'$ est son image par une translation : A a pour image A', B a pour image B' et C a pour image C'.

Calculer l'angle $\widehat{A'C'B'}$.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `65`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve les angles : $\widehat{A'C'B'}$ est l'image de quel angle du triangle ABC ?
2. C'est l'angle en C. Calcule-le avec la somme des angles d'un triangle.

CORRECTION

L'angle en C — La somme des angles du triangle ABC vaut $180°$.

$\widehat{ACB} = 180° - 40° - 75° = 65°$

Angles homologues — Le triangle $A'B'C'$ est superposable à ABC : ses angles homologues sont égaux.

$\widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB} = 65°$

Les angles homologues se lisent avec les lettres : l'angle en C' de l'image est l'angle en C du triangle de départ.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40 / 75` → C'est un angle donné, mais pas en C. L'angle $\widehat{A'C'B'}$ a pour sommet C' : il est égal à l'angle en C, qu'il faut calculer.

EXERCICE 77 · PRATIQUE

L'aire du disque image

(C) est un cercle de rayon 3 cm, et (C') est son image par une translation.

Calculer l'aire du disque délimité par (C'), en cm², en valeur exacte.

Donner l'aire exacte en cm², en fonction de π, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `9*pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quel est le rayon de (C') ?
2. L'aire d'un disque de rayon r est $\pi \times r^2$.

CORRECTION

Le rayon — L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon : (C') a pour rayon 3 cm.

L'aire —

$$\mathcal{A} = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

Les deux disques sont superposables : même rayon, même aire. La translation ne fait que déplacer le disque.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*pi / 6pi / 6π` → 6π, c'est la longueur du cercle, $2\pi r$. L'aire du disque est πr^2.

`3*pi / 3pi / 3π` → Il faut élever le rayon au carré : $\pi \times 3^2$.

`28.27 / 28.3 / 28.26 / 28` → $28{,}27$ est une valeur approchée : $9\pi \approx 28{,}27$. On demande la valeur exacte : garde π dans le résultat.

EXERCICE 78 · RAISONNEMENT

Un rectangle et son image

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ cm et $BC = 4$ cm. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, il a pour image le rectangle $BB'C'C$: A va en B, B en B', C en C' et D en C.

Calculer l'aire du rectangle $AB'C'D$.

Donner l'aire en cm², sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 48

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B' est l'image de B : que représente B pour le segment $[AB']$?
2. Le grand rectangle est fait du rectangle $ABCD$ et de son image, qui ont la même aire.

CORRECTION

Une longueur — $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$: B est le milieu de $[AB']$.

$$AB' = 2 \times 6 = 12$$

L'aire — La largeur reste $BC = 4$ cm.

$$\mathcal{A}_{AB'C'D} = 12 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$$

Vérification : le rectangle $ABCD$ et son image $BB'C'C$ ont la même aire, 24 cm², et ils sont côte à côte sans se chevaucher : $24 + 24 = 48$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`24` → 24 cm², c'est l'aire de $ABCD$, ou de son image $BB'C'C$. Le rectangle $AB'C'D$ est formé des deux.

EXERCICE 79 · RAISONNEMENT

Passer par le centre

(C) est le cercle de centre O et de rayon 4 cm. O' est un point du plan, et (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Quelle doit être la longueur OO' pour que le cercle (C') passe par le point O ?

Donner la longueur OO' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quels sont le centre et le rayon de (C') ?
2. (C') a pour centre O' et pour rayon 4 cm. Un point est sur ce cercle quand il est à 4 cm de O'.

CORRECTION

Le cercle image — L'image de O est O' : (C') est le cercle de centre O' et de rayon 4 cm.

La condition — O est sur (C') quand sa distance au centre O' est égale au rayon.

$$O \in (C') \iff OO' = 4 \text{ cm}$$

Autrement dit : (C') passe par O exactement quand O' est sur (C). Les deux cercles passent alors chacun par le centre de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → Avec $OO' = 8$ cm, les deux cercles se touchent au milieu de $[OO']$; O serait à 8 cm de O', plus loin que le rayon.

2 → Il faut que O soit à la distance d'un **rayon** de O', soit 4 cm.

EXERCICE 80 · DEFI

Un angle entre deux triangles

ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC} = 70°$ et $\widehat{ABC} = 50°$. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, le triangle ABC a pour image le triangle $A'CC'$: A va en A', B en C et C en C'.

Calculer l'angle $\widehat{ACA'}$.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 70

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B, C et C' sont alignés, car $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC}$. En C, trois angles se partagent l'angle plat : lesquels ?
2. $\widehat{ACB}$, $\widehat{ACA'}$ et $\widehat{A'CC'}$. Le dernier est l'image d'un angle du triangle ABC : lequel ?
3. C est l'image de B : $\widehat{A'CC'} = \widehat{ABC}$.

CORRECTION

L'angle en C —

$$\widehat{ACB} = 180° - 70° - 50° = 60°$$

L'angle homologue — C est l'image de B, A' celle de A et C' celle de C : la translation conserve les angles.

$\widehat{A'CC'} = \widehat{ABC} = 50°$

L'angle plat — B, C, C' sont alignés, et $[CA)$, $[CA')$ sont du même côté de cette droite.

$\widehat{ACA'} = 180° - 60° - 50° = 70°$

On retrouve l'angle en A : c'est normal, car (CA') est parallèle à (BA), et les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACA'}$ sont alternes-internes. Deux méthodes, un même résultat.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → $60°$, c'est $\widehat{ACB}$, l'angle en C du triangle de départ. L'angle cherché est entre $[CA)$ et $[CA')$.

`50` → $50°$, c'est $\widehat{A'CC'}$, l'angle en C du triangle image. L'angle cherché est entre les deux triangles.

EXERCICE 81 · DEFI

Le cercle des trois images

EFG est un triangle rectangle en E tel que $EF = 6$ cm et $EG = 8$ cm. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$, les points E, F et G ont pour images F, F' et G'.

Les points F, F' et G' sont sur un même cercle. Calculer son rayon.

Donner le rayon en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. F, F', G' sont les images de E, F, G. Sur quel cercle sont E, F et G ?
2. Le triangle EFG est rectangle en E : son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse $[FG]$. Et son image par la translation ?

CORRECTION

Le cercle de départ — EFG est rectangle en E : E, F, G sont sur le cercle de diamètre $[FG]$.

$FG^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \quad \text{donc} \quad FG = 10$

Son image — L'image de ce cercle est un cercle de même rayon, qui passe par les images F, F', G'.

$r = \dfrac{FG}{2} = 5 \text{ cm}$

Le centre de ce cercle est l'image du milieu de $[FG]$. Le triangle $FF'G'$ est superposable à EFG : son cercle circonscrit l'est aussi.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 cm, c'est FG, le **diamètre** du cercle circonscrit. Le rayon en est la moitié.

`6 / 8` → C'est un côté du triangle. Le cercle qui passe par les trois sommets d'un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

EXERCICE 82 · BASE

Le même déplacement

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(0\,;2)$, $B(3\,;3)$ et $M(-2\,;5)$.

Déterminer les coordonnées du point M', image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Écrire le couple de coordonnées de M', par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(1;6)` — aussi acceptées : (1,6) · M'(1;6) · M'(1,6) · M' = (1;6) · 1;6 · x=1;y=6 · x=1 et y=6 · x=1, y=6 · x = 1 et y = 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De A à B, de combien change l'abscisse ? Et l'ordonnée ?
2. L'abscisse gagne 3 et l'ordonnée gagne 1. Fais le même déplacement à partir de M.

CORRECTION

Le déplacement —

$3 - 0 = 3 \quad ; \quad 3 - 2 = 1$

Le même, depuis M —

$x_{M'} = -2 + 3 = 1 \quad ; \quad y_{M'} = 5 + 1 = 6$

$M'(1\,;6)$

Dans un repère, une translation ajoute toujours le même nombre aux abscisses et le même nombre aux ordonnées : ceux qu'on lit en allant de A à B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-5;4) / (-5,4) / M'(-5;4) / M'(-5,4) / M' = (-5;4) / -5;4 / x=-5;y=4 / x=-5 et y=4` → Tu as fait le déplacement de B vers A. De A à B, l'abscisse **gagne** 3 et l'ordonnée **gagne** 1.

`(3;1) / (3,1) / M'(3;1) / M'(3,1) / M' = (3;1) / 3;1 / x=3;y=1 / x=3 et y=1` → Tu as donné le déplacement lui-même. Il faut l'appliquer au point $M(-2\,;5)$.

`(1;8) / (1,8) / M'(1;8) / M'(1,8) / M' = (1;8) / 1;8 / x=1;y=8 / x=1 et y=8` → Tu as ajouté les coordonnées de B. Ce qui compte, c'est le chemin de A à B : $+3$ et $+1$.

EXERCICE 83 · BASE

Un point et son image

Dans un repère (O, I, J), une translation envoie le point $A(1\,;2)$ sur le point $A'(4\,;-1)$.

Déterminer les coordonnées de l'image B' du point $B(0\,;5)$ par cette translation.

Écrire le couple de coordonnées de B', par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(3;2)` — aussi acceptées : (3,2) · B'(3;2) · B'(3,2) · B' = (3;2) · 3;2 · x=3;y=2 · x=3 et y=2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur de cette translation est $\overrightarrow{AA'}$. Lis le déplacement de A à A'.
2. L'abscisse gagne 3, l'ordonnée perd 3.

CORRECTION

Le déplacement —

$4 - 1 = 3 \quad ; \quad -1 - 2 = -3$

Le même, depuis B —

$x_{B'} = 0 + 3 = 3 \quad ; \quad y_{B'} = 5 - 3 = 2$

$B'(3\,;2)$

Vérification : de B' vers B, l'abscisse perd 3 et l'ordonnée gagne 3 : c'est bien le chemin de A' vers A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-3;8)` / `(-3,8)` / `B'(-3;8)` / `B'(-3,8)` / `B' = (-3;8)` / `-3;8` / `x=-3;y=8` / `x=-3 et y=8` → Tu as fait le déplacement de A' vers A. La translation envoie A sur A' : l'abscisse gagne 3 et l'ordonnée perd 3.

`(3;-3)` / `(3,-3)` / `B'(3;-3)` / `B'(3,-3)` / `B' = (3;-3)` / `3;-3` / `x=3;y=-3` / `x=3 et y=-3` → Tu as donné le déplacement lui-même. Il faut l'appliquer au point $B(0\,;5)$.

EXERCICE 84 · BASE

Un glissement vertical

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(3\,;-2)$, $B(3\,;4)$ et $C(-2\,;1)$.

Déterminer les coordonnées du point C', image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Écrire le couple de coordonnées de C', par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(-2;7)` — aussi acceptées : (-2,7) · C'(-2;7) · C'(-2,7) · C' = (-2;7) · -2;7 · x=-2;y=7 · x=-2 et y=7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A et B ont la même abscisse : de A à B, on ne fait que monter. De combien ?

CORRECTION

Le déplacement —

$3 - 3 = 0 \quad ; \quad 4 - (-2) = 6$

Le même, depuis C —

$x_{C'} = -2 + 0 = -2 \quad ; \quad y_{C'} = 1 + 6 = 7$

$C'(-2\,;7)$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est vertical : chaque point monte de 6 unités sans changer d'abscisse.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;-5)` / `(-2,-5)` / `C'(-2;-5)` / `C'(-2,-5)` / `C' = (-2;-5)` / `-2;-5` / `x=-2;y=-5` / `x=-2 et y=-5` → Tu as fait descendre C. De A à B, l'ordonnée passe de -2 à 4 : elle **gagne** 6.

`(-2;5)` / `(-2,5)` / `C'(-2;5)` / `C'(-2,5)` / `C' = (-2;5)` / `-2;5` / `x=-2;y=5` / `x=-2 et y=5` → Tu as ajouté l'ordonnée de B. Le déplacement vertical est $4 - (-2) = 6$.

EXERCICE 85 · PRATIQUE

Retrouver l'antécédent

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(1\,;1)$ et $B(3\,;-2)$. Le point $M'(4\,;1)$ est l'image d'un point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Déterminer les coordonnées du point M.

Écrire le couple de coordonnées de M, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(2;4)` — aussi acceptées : (2,4) · M(2;4) · M(2,4) · M = (2;4) · 2;4 · x=2;y=4 · x=2 et y=4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On connaît l'arrivée M', pas le départ M. Le déplacement de M à M' est celui de A à B : lis-le.
2. De A à B : $+2$ en abscisse, -3 en ordonnée. Pour revenir de M' à M, fais le chemin inverse.

CORRECTION

Le déplacement —

$3-1=2 \quad ; \quad -2-1=-3$

Le chemin inverse — De M à M', l'abscisse gagne 2 et l'ordonnée perd 3. Donc de M' à M, l'abscisse perd 2 et l'ordonnée gagne 3.

$x_M = 4-2=2 \quad ; \quad y_M = 1+3=4$

$M(2\,;4)$

Vérification : de $M(2\,;4)$, on ajoute 2 et -3, et on arrive en $(4\,;1)$, c'est-à-dire en M'. M est l'**antécédent** de M'.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(6;-2)` / `(6,-2)` / `M(6;-2)` / `M(6,-2)` / `M = (6;-2)` / `6;-2` / `x=6;y=-2` / `x=6 et y=-2` → Tu as calculé l'image de M', pas son antécédent : il faut faire le chemin à l'envers, de M' vers M.

EXERCICE 86 · PRATIQUE

Le quatrième sommet dans un repère

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;3)$ et $C(4\,;-1)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Écrire le couple de coordonnées de D, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(0;-2)` — aussi acceptées : (0,-2) · D(0;-2) · D(0,-2) · D = (0;-2) · 0;-2 · x=0;y=-2 · x=0 et y=-2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lis les sommets de $ABCD$ dans l'ordre : quel vecteur d'origine A est égal à $\overrightarrow{BC}$?
2. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

CORRECTION

L'égalité — $ABCD$ est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Le déplacement — De B à C :

$4 - 3 = 1 \quad ; \quad -1 - 3 = -4$

Depuis A —

$x_D = -1 + 1 = 0 \quad ; \quad y_D = 2 - 4 = -2$

$D(0\,;-2)$

Vérification : de A à B, on fait $+4$ et $+1$; de $D(0\,;-2)$ à $C(4\,;-1)$ aussi. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: c'est juste.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(8;0) / (8,0) / D(8;0) / D(8,0) / D = (8;0) / 8;0 / x=8;y=0 / x=8 et y=0` → Tu as construit le parallélogramme $ABDC$: D est alors l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Pour $ABCD$, D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

`(-2;6) / (-2,6) / D(-2;6) / D(-2,6) / D = (-2;6) / -2;6 / x=-2;y=6 / x=-2 et y=6` → Ce point fait de $ADBC$ un parallélogramme. Pour $ABCD$, les sommets se suivent dans l'ordre, et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 87 · PRATIQUE

Glisser deux fois du même pas

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(-1\,;3)$ et $A'(1\,;4)$. Le point D est l'image de A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Déterminer les coordonnées du point D.

Écrire le couple de coordonnées de D, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(3;5)` — aussi acceptées : (3,5) · D(3;5) · D(3,5) · D = (3;5) · 3;5 · x=3;y=5 · x=3 et y=5 · x=3, y=5 · x = 3 et y = 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De A à A', de combien changent l'abscisse et l'ordonnée ?
2. On refait ce même déplacement, mais à partir de A' cette fois.

CORRECTION

Le déplacement —

$1 - (-1) = 2 \quad ; \quad 4 - 3 = 1$

Depuis A' —

$x_D = 1 + 2 = 3 \quad ; \quad y_D = 4 + 1 = 5$

$D(3\,;5)$

C'est le cas du cours : l'image de A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est le symétrique de A par rapport à A'. Ici, A' est bien le milieu de $[AD]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;1) / (2,1) / D(2;1) / D(2,1) / D = (2;1) / 2;1 / x=2;y=1 / x=2 et y=1` → Tu as donné le déplacement lui-même. Il faut l'appliquer au point $A'(1\,;4)$.

`(0;7) / (0,7) / D(0;7) / D(0,7) / D = (0;7) / 0;7 / x=0;y=7 / x=0 et y=7` → Tu as ajouté les coordonnées de A et de A'. Le déplacement est la **différence** : $+2$ en abscisse, $+1$ en ordonnée.

`(1;4) / (1,4) / D(1;4) / D(1,4) / D = (1;4) / 1;4 / x=1;y=4 / x=1 et y=4` → $(1\,;4)$, c'est A', l'image de A. On demande l'image de A' : un pas de plus.

EXERCICE 88 · PRATIQUE

L'image de B par la translation de vecteur AB

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(1\,;-1)$ et $B(3\,;2)$.

Déterminer les coordonnées du point B', image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Écrire le couple de coordonnées de B', par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(5;5)` — aussi acceptées : (5,5) · B'(5;5) · B'(5,5) · B' = (5;5) · 5;5 · x=5;y=5 · x=5 et y=5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'après le cours, B' est le symétrique de A par rapport à B. On peut aussi lire le déplacement de A à B.

CORRECTION

Le déplacement —

$3-1=2 \quad ; \quad 2-(-1)=3$

Depuis B —

$x_{B'}=3+2=5 \quad ; \quad y_{B'}=2+3=5$

$B'(5\,;5)$

Vérification : B est le milieu de $[AB']$, car $\dfrac{1+5}{2}=3$ et $\dfrac{-1+5}{2}=2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(1;-1) / (1,-1) / B'(1;-1) / B'(1,-1) / B' = (1;-1) / 1;-1 / x=1;y=-1 / x=1 et y=-1` → $(1\,;-1)$, c'est A : l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$. Il faut avancer dans le sens de A vers B.

`(4;1) / (4,1) / B'(4;1) / B'(4,1) / B' = (4;1) / 4;1 / x=4;y=1 / x=4 et y=1` → Tu as ajouté les coordonnées de A et de B. Le déplacement est $+2$ en abscisse et $+3$ en ordonnée.

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

Trouver l'ordonnée

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(1\,;2)$ et $B(4\,;3)$. Le point $M(2\,;y)$ a pour image le point $M'(5\,;-1)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Déterminer le réel y.

Donner la valeur de y.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lis le déplacement de A à B. Vérifie qu'il est cohérent avec les abscisses de M et M'.
2. L'ordonnée gagne 1 de A à B. Donc l'ordonnée de M' vaut $y + 1$.

$$y + 1 = -1$$

CORRECTION

Le déplacement —

$$4 - 1 = 3 \quad ; \quad 3 - 2 = 1$$

Les abscisses — L'abscisse de M gagne 3 : $2 + 3 = 5$, c'est bien celle de M'.

Les ordonnées —

$$y + 1 = -1 \quad \text{donc} \quad y = -2$$

L'image d'un point se traduit par deux égalités, une pour chaque coordonnée. Ici l'abscisse servait de contrôle, l'ordonnée donnait l'inconnue.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Tu as retranché 1 au lieu de l'ajouter. De M à M', l'ordonnée **gagne** 1 : $y + 1 = -1$.

`-1` → -1, c'est l'ordonnée de M'. Celle de M est plus petite d'une unité.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Deux translations, un sommet connu

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(1\,;1)$, $B(4\,;2)$ et $C(2\,;5)$. D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Déterminer les coordonnées du point E.

Écrire le couple de coordonnées de E, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(4;2)` — aussi acceptées : (4,2) · E(4;2) · E(4,2) · E = (4;2) · 4;2 · x=4;y=2 · x=4 et y=2 · B · E = B · le point B · E(4;2) = B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord D : de A à B, on fait $+3$ et $+1$.
2. $D(5\,;6)$. De C à A, de combien changent l'abscisse et l'ordonnée ?
3. Observe le résultat : ce point a déjà un nom dans l'énoncé.

CORRECTION

Le point D —

$$x_D = 2 + 3 = 5 \quad ; \quad y_D = 5 + 1 = 6$$

Le déplacement de C à A —

$$1 - 2 = -1 \quad ; \quad 1 - 5 = -4$$

Le point E —

$$x_E = 5 - 1 = 4 \quad ; \quad y_E = 6 - 4 = 2$$

$E(4\,;2) = B$

On retombe sur B, et sans hasard : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ fait de $ABDC$ un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$. L'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$ est B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5;6) / (5,6) / E(5;6) / E(5,6) / E = (5;6) / 5;6 / x=5;y=6 / x=5 et y=6` → $(5\,;6)$, c'est D. Il reste à lui appliquer la seconde translation, de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

`(6;10) / (6,10) / E(6;10) / E(6,10) / E = (6;10) / 6;10 / x=6;y=10 / x=6 et y=10` → Tu as appliqué le déplacement de A vers C. Le vecteur $\overrightarrow{CA}$ va de C vers A : -1 en abscisse et -4 en ordonnée.

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

Le centre du cercle image

Dans un repère (O, I, J), (C) est le cercle de centre $K(1\,;-2)$ et de rayon 3. Une translation envoie le point $A(0\,;1)$ sur le point $B(2\,;4)$, et le cercle (C) sur un cercle (C').

Déterminer les coordonnées du centre K' de (C').

Écrire le couple de coordonnées de K', par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(3;1)` — aussi acceptées : (3,1) · K'(3;1) · K'(3,1) · K' = (3;1) · 3;1 · x=3;y=1 · x=3 et y=1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre du cercle image est l'image du centre K.
2. De A à B : $+2$ en abscisse et $+3$ en ordonnée. Applique ce déplacement à K.

CORRECTION

Le centre — L'image d'un cercle est un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre : K' est l'image de K.

Le déplacement —

$2 - 0 = 2 \quad ; \quad 4 - 1 = 3$

Depuis K —

$x_{K'} = 1 + 2 = 3 \quad ; \quad y_{K'} = -2 + 3 = 1$

$K'(3\,;1)$

Le rayon 3 ne sert pas au calcul : (C') est le cercle de centre $K'(3\,;1)$ et de même rayon 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1;-5) / (-1,-5) / K'(-1;-5) / K'(-1,-5) / K' = (-1;-5) / -1;-5 / x=-1;y=-5 / x=-1 et y=-5` → Tu as fait le déplacement de B vers A. La translation envoie A sur B : $+2$ et $+3$.

`(2;3) / (2,3) / K'(2;3) / K'(2,3) / K' = (2;3) / 2;3 / x=2;y=3 / x=2 et y=3` → Tu as donné le déplacement lui-même. Il faut l'appliquer au centre $K(1\,;-2)$.

EXERCICE 92 · DEFI

Atterrir sur l'axe des abscisses

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(1\,;2)$ et $B(3\,;-1)$. Pour un réel m, on considère le point $M(m\,;2m)$.

Déterminer le réel m pour lequel l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est sur l'axe des abscisses.

Donner la valeur exacte de m, en fraction irréductible ou en écriture décimale.

Réponse attendue : `3/2` — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les coordonnées de l'image M' en fonction de m : de A à B, on fait $+2$ et -3.
2. $M'(m+2\,;2m-3)$. Un point est sur l'axe des abscisses quand son ordonnée est nulle.

$$2m-3=0$$

CORRECTION

Le déplacement —

$$3-1=2 \quad ; \quad -1-2=-3$$

L'image —

$$M'(m+2\,;2m-3)$$

L'axe des abscisses — M' est sur l'axe des abscisses quand son ordonnée est nulle.

$$2m-3=0 \quad \text{donc} \quad m=\frac{3}{2}$$

Vérification : pour $m=\frac{3}{2}$, $M\left(\frac{3}{2}\,;3\right)$, et son image est $M'\left(\frac{7}{2}\,;0\right)$, sur l'axe des abscisses. Une condition sur l'image devient une équation sur m.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3/2 / -1.5` → Tu as écrit l'ordonnée de l'image avec $+3$: de A à B, l'ordonnée **perd** 3, donc l'image a pour ordonnée $2m-3$.

`-2` → Tu as annulé l'abscisse de l'image : ce serait l'axe des ordonnées. Sur l'axe des abscisses, c'est l'**ordonnée** qui est nulle.

EXERCICE 93 · BASE

Des milieux, une égalité

E, F, G et H sont quatre points tels que les segments $[EH]$ et $[FG]$ ont le même milieu.

Nommer le vecteur d'origine G qui est égal au vecteur $\overrightarrow{EF}$.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : `GH` — aussi acceptées : G H · vecteur GH · le vecteur GH · vect GH · vec GH · EF=GH · EF = GH

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C'est la définition : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dès que le segment des extrêmes $[AD]$ et celui des moyens $[BC]$ ont le même milieu.
2. Ici, l'égalité commence par $\overrightarrow{EF}$ et le vecteur cherché commence par G : les moyens sont F et G. Quelle lettre ferme l'égalité ?

CORRECTION

La définition — $[EH]$ et $[FG]$ ont le même milieu. Le segment des extrêmes est $[EH]$, celui des moyens $[FG]$. En vecteurs :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$$

Des milieux dans l'énoncé ? On revient à la définition. C'est le premier des trois outils de la méthode.

PIÈGES ANTICIPÉS

`HG / H G / vecteur HG / le vecteur HG / vect HG / vec HG` → Le vecteur $\overrightarrow{HG}$ va dans le sens contraire et part de H. Avec les extrêmes E, H et les moyens F, G, l'égalité est $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

EXERCICE 94 · BASE **Une translation, puis les moyens**

U, V et W sont trois points, et X est l'image de W par la translation de vecteur $\overrightarrow{UV}$.

En échangeant les moyens dans l'égalité $\overrightarrow{WX} = \overrightarrow{UV}$, on obtient $\overrightarrow{WU} = \ldots$ Compléter par le vecteur qui convient.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : XV — aussi acceptées : X V · vecteur XV · le vecteur XV · vect XV · vec XV · WU=XV · WU = XV

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans $\overrightarrow{WX} = \overrightarrow{UV}$, les moyens sont les deux lettres du milieu : X et U.
2. On les échange ; W et V restent aux extrémités.

CORRECTION

La translation — X est l'image de W :

$$\overrightarrow{WX} = \overrightarrow{UV}$$

L'échange — Les moyens X et U changent de place :

$$\overrightarrow{WU} = \overrightarrow{XV}$$

C'est le troisième outil de la méthode : traduire l'image par une égalité, puis échanger les moyens. Ici, on lit aussi que V est l'image de X par la translation de vecteur $\overrightarrow{WU}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`VX / V X / vecteur VX / le vecteur VX / vect VX / vec VX` → Le vecteur $\overrightarrow{VX}$ va dans le mauvais sens : après l'échange, V reste la **dernière** lettre.

EXERCICE 95 · PRATIQUE

Deux symétriques par rapport à B

ABC est un triangle. D est le symétrique de A par rapport à B, et E le symétrique de C par rapport à B.

Nommer le vecteur d'origine E, joignant deux des points de la figure, qui est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : ED — aussi acceptées : E D · vecteur ED · le vecteur ED · vect ED · vec ED · AC=ED · AC = ED

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B est le milieu de $[AD]$ et le milieu de $[CE]$. Quel quadrilatère a pour diagonales $[AD]$ et $[CE]$?
2. $ACDE$ est un parallélogramme. Lis ses sommets dans l'ordre pour écrire l'égalité.

CORRECTION

Les milieux — B est le milieu de $[AD]$ et de $[CE]$: le quadrilatère $ACDE$, dont ce sont les diagonales, est un parallélogramme.

L'égalité — Dans le parallélogramme $ACDE$, le côté $[AC]$ est opposé au côté $[DE]$, lu de E vers D. En vecteurs :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$$

Vérification par la définition : pour $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$, les extrêmes forment $[AD]$ et les moyens $[CE]$. Ils ont bien le même milieu, B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`DE` / `D E` / `vecteur DE` / `le vecteur DE` / `vect DE` / `vec DE` → Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a la bonne longueur et la bonne direction, mais il va dans le sens contraire, et part de D.

EXERCICE 96 · PRATIQUE

Quatre symétriques

M, N, P et Q sont quatre points distincts. R et S sont les symétriques respectifs de M et de N par rapport à P ; U et V sont les symétriques respectifs de M et de N par rapport à Q.

Nommer le vecteur d'origine S, joignant deux des points R, S, U, V, qui est égal au vecteur $\overrightarrow{VU}$.

Écrire le vecteur par ses deux lettres, dans l'ordre : par exemple MN.

Réponse attendue : SR — aussi acceptées : S R · vecteur SR · le vecteur SR · vect SR · vec SR · VU=SR · VU = SR

INDICES, DANS L'ORDRE

1. P est le milieu de $[MR]$ et de $[NS]$: quelle égalité de vecteurs, commençant par $\overrightarrow{MN}$, donne la définition ?

2. De même avec Q, milieu de $[MU]$ et de $[NV]$. Les deux égalités ont $\overrightarrow{MN}$ en commun.

CORRECTION

Le centre P — P est le milieu de $[MR]$ et de $[NS]$: ce sont le segment des extrêmes et celui des moyens de l'égalité

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SR}$$

Le centre Q — Q est le milieu de $[MU]$ et de $[NV]$: de même,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{VU}$$

Le pont —

$$\overrightarrow{VU} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SR}$$

Les deux symétries recopient le même vecteur $\overrightarrow{MN}$, retourné : $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{VU}$, donc $SRUV$ est un parallélogramme lorsque S, R, U ne sont pas alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`RS / R S / vecteur RS / le vecteur RS / vect RS / vec RS` → Le vecteur $\overrightarrow{RS}$ part de R et va dans le sens contraire : il est égal à $\overrightarrow{NM}$, pas à $\overrightarrow{MN}$.

`SU / S U / vecteur SU / le vecteur SU / vect SU / vec SU / SV / S V / vecteur SV / le vecteur SV / vect SV / vec SV` → Ce vecteur ne vient d'aucune des deux égalités. $\overrightarrow{VU}$ est égal à $\overrightarrow{MN}$: cherche, à partir de S, un autre vecteur égal à $\overrightarrow{MN}$.

EXERCICE 97 · RAISONNEMENT

La hauteur qui a glissé

RST est un triangle, et H est le pied de la hauteur issue de R, avec $RH = 4$ cm, $SH = 3$ cm et $HT = 5$ cm. Le triangle $TS'T'$ est l'image de RST par la translation de vecteur $\overrightarrow{RT}$, et H' est l'image de H.

Calculer la longueur TH'.

Donner la longueur TH' en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{RT}$, quelle est l'image de R ?
2. T et H' sont les images de R et de H. Que dit la conservation des distances ?

CORRECTION

Les images — Par la translation de vecteur $\overrightarrow{RT}$, l'image de R est T, et celle de H est H'.

La conservation — La translation conserve les distances :

$$TH' = RH = 4 \text{ cm}$$

On peut aller plus loin : la translation conserve les angles, donc (TH') est perpendiculaire à $(S'T')$, et H' est le pied de la hauteur issue de T du triangle $TS'T'$. Les longueurs SH et HT ne servaient pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → 5 cm, c'est HT. Mais $[TH']$ n'est pas $[TH]$: T est l'image de R et H' celle de H, donc $[TH']$ est l'image de $[RH]$.

3 → 3 cm, c'est SH. $[TH']$ est l'image du segment $[RH]$: T est l'image de R.

EXERCICE 98 · PRATIQUE

L'image d'un milieu de côté

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 7$ cm, et I est le milieu de $[AB]$. E est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Calculer la longueur DE.

Donner la longueur DE en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 7/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$, quelle est l'image de A ?
2. L'image de A est D, celle de I est E. Que dit la conservation des distances sur DE ?

CORRECTION

L'image de A — Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$, l'image de A est D, et celle de I est E.

La conservation — La translation conserve les distances :

$$DE = AI = \frac{AB}{2}$$

$$DE = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

On peut aller plus loin : l'image de B est C, car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; E est donc sur $[DC]$, avec $DE = EC = 3{,}5$ cm : c'est le milieu de $[DC]$. Une translation transforme le milieu d'un segment en le milieu du segment image.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7 cm, c'est DC tout entier, l'image de $[AB]$. E est l'image du milieu I : il est à mi-chemin.

14 → La translation ne double aucune longueur : DE est égal à AI, la moitié de AB.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

Deux translations opposées

A, B et C sont trois points non alignés, avec $AB = 4{,}5$ cm. D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et E l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Calculer la longueur DE.

Donner la longueur DE en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les deux égalités : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$. Change le sens des deux vecteurs dans la seconde.
2. $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: les lettres s'enchaînent en C.

CORRECTION

Les deux images —

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$

Le sens — En changeant le sens des deux vecteurs dans la seconde égalité :

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Le milieu — C est le milieu de $[ED]$, et chaque moitié mesure AB.

$DE = 2 \times 4{,}5 = 9$ cm

Deux translations de vecteurs opposés envoient C à égale distance de part et d'autre de lui-même : C est le milieu de $[DE]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4.5 / 4,5` → $4{,}5$ cm, c'est CD, ou CE : une moitié. C est le milieu de $[DE]$.

`0` → D et E ne sont pas confondus : les deux translations ont des vecteurs opposés, elles envoient C de part et d'autre de lui-même.

EXERCICE 100 · DEFI

L'angle inscrit dans le cercle image

(C) est le cercle de centre K et de rayon 4 cm, et K' un point tel que $KK' = 6$ cm. (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{KK'}$. Les cercles se coupent en E et F, et E' est l'image de E. Enfin, P est un point de (C) et P' son image, avec P' distinct de F et de E'.

Calculer l'angle $\widehat{FP'E'}$.

Donner la mesure en degrés, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $KEK'F$ est un losange. Utilise-le avec la translation pour montrer que K' est le milieu de $[FE']$.
2. $[FE']$ est donc un diamètre de (C'). Sur quel cercle est le point P' ?
3. Un triangle est inscrit dans un cercle, et l'un de ses côtés est un diamètre : que sais-tu de l'angle opposé à ce côté ?

CORRECTION

Un losange — $KE = KF = K'E = K'F = 4$ cm : $KEK'F$ est un losange, donc $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{FK'}$.

Le diamètre — K' et E' sont les images de K et E : la translation transforme $\overrightarrow{KE}$ en un vecteur égal, $\overrightarrow{K'E'}$. Donc $\overrightarrow{FK'} = \overrightarrow{K'E'}$: K' est le milieu de $[FE']$, qui est un diamètre de (C').

L'angle — P est sur (C), donc son image P' est sur (C'). Le triangle $FE'P'$ est inscrit dans (C') et son côté $[FE']$ est un diamètre.

$\widehat{FP'E'} = 90°$

L'angle $\widehat{FP'E'}$ est droit quelle que soit la position de P sur (C) : la translation a transporté P sur le cercle dont $[FE']$ est un diamètre. Les longueurs 4 cm et 6 cm ne servent qu'à faire exister les deux points communs E et F.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → Le triangle $FE'P'$ n'a aucune raison d'être équilatéral. Regarde plutôt le segment $[FE']$: c'est un diamètre de (C'), et P' est sur ce cercle.

EXERCICE 101 · DEFI

Une parallèle par translation

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 6$ cm et $AD = 4{,}5$ cm. E est le point du segment $[AB]$ tel que $AE = 2$ cm, et F est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. La droite (BD) coupe le segment $[EF]$ en M.

Calculer la longueur EM.

Donner la longueur EM en cm, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$: comment sont les droites (EF) et (AD) ?
2. Dans le triangle BAD, E est sur $[BA]$, M sur $[BD]$, et $(EM) \parallel (AD)$: applique le théorème de Thalès.
$$\frac{EM}{AD} = \frac{BE}{BA}$$

CORRECTION

Une parallèle — F est l'image de E : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$, donc $(EF) \parallel (AD)$.

Thalès — Dans le triangle BAD, avec $BE = 6 - 2 = 4$ cm :

$$\frac{EM}{AD} = \frac{BE}{BA} = \frac{4}{6}$$

$$EM = 4{,}5 \times \frac{4}{6} = 3 \text{ cm}$$

Comme $EF = AD = 4{,}5$ cm, il reste $MF = 1{,}5$ cm. La translation donne le parallélisme ; le théorème de Thalès, compté depuis le sommet B, donne la longueur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1.5 / 1,5` → Tu as utilisé le rapport $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{6}$, et trouvé MF. Dans le triangle BAD, les longueurs se comptent depuis le sommet B : $\frac{BE}{BA} = \frac{4}{6}$.

4.5 / 4,5 → $4{,}5$ cm, c'est EF tout entier, égal à AD. Le point M coupe ce segment.

AH
Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI