– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Arithmétique

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro quatre : arithmétique. Bech nabdew b la division euclidienne : le dividende, le diviseur, le quotient w le reste. Ba3d nchoufou la divisibilité, w les critères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 8, 3, 9 w 11 : bech tal9a le reste blech ma ta3mel la division. W nkammlou b des problèmes : chiffre ma na3rfouhch, w des restes possibles.

عسلامة ! الـ chapitre numéro quatre : arithmétique . باش نبداو بـ la division euclidienne : le dividende ، le diviseur ، le quotient w le reste . بعد نشوفو 11 w 9 ، 3 ، 8 ، 25 ، 4 ، 5 ، 2 les critères de divisibilité par ، w la divisibilité : باش تلقى le reste بلاش ما تعمل la division . w نكمّلو بـ chiffre : des problèmes ما نعرفوهش ، w des restes possibles .

Bonjour ! Le chapitre numéro quatre : arithmétique. Nous commencerons par la division euclidienne : le dividende, le diviseur, le quotient et le reste. Puis nous verrons la divisibilité, et les critères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 8, 3, 9 et 11 : ils donnent le reste sans poser la division. Et nous terminerons par des problèmes : des chiffres inconnus, et les restes possibles.

Ce chapitre part d'une question simple — quel jour serons-nous dans 234 jours ? — pour poser la **division euclidienne** : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Il en tire la divisibilité, puis les **critères de divisibilité** par 2, 5, 4, 25, 8, 3, 9 et 11, qui donnent aussi le **reste** sans poser la division.

On s'en sert ensuite pour retrouver des chiffres inconnus et résoudre des problèmes, et termine par le code-barre et les nombres amiables.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Effectuer la division euclidienne d'un entier naturel par un entier naturel non nul, et reconnaître une égalité qui la traduit
  > Effectuer une division euclidienne, et reconnaître une égalité qui la traduit.
  > *Effectuer une division euclidienne, et reconnaître une égalité qui la traduit.*
- Utiliser la divisibilité d'une somme et d'une différence
  > Utiliser qu'un diviseur commun divise la somme et la différence.
  > *Utiliser qu'un diviseur commun divise la somme et la différence.*
- Appliquer les critères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 8, 3 et 9, et trouver un reste sans poser la division
  > Appliquer les critères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 8, 3 et 9, et trouver le reste sans division.
  > *Appliquer les critères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 8, 3 et 9, et trouver le reste sans division.*
- Appliquer le critère de divisibilité par 11, que d soit positif ou négatif
  > Appliquer le critère de 11, que d soit positif ou négatif.
  > *Appliquer le critère de 11, que d soit positif ou négatif.*
- Résoudre des problèmes : chiffre inconnu, restes possibles, jours de la semaine
  > Résoudre des problèmes : chiffre inconnu, restes possibles et jours de la semaine.
  > *Résoudre des problèmes : chiffre inconnu, restes possibles et jours de la semaine.*

1. ACTIVITÉ

Quel jour serons-nous ?

CE QU'IL DIT

Nabdew b so2al sghir : lyoum el thnin, chnowa ennhar ba3d 234 nhar ? La semaine fiha sab3a ayyem, donc koll sab3a ayyem nerj3ou l nafs ennhar. Ya3ni lezemna na3rfou 9addech men semaine kemla fi 234, w 9addech yfadhel. 234 égale 7 fois 33 plus 3 : 33 semaines kemlin yrajj3ouna lel thnin, w ba3d trois jours zeydin : le jeudi. W 77 égale 7 fois 11 plus zéro : nafs ennhar. Ya3ni elli yhemmna houwa le reste bark.

نبداو بسؤال صغير : اليوم الاثنين ، شنوّة النهار بعد 234 نهار ؟ la semaine فيها سبعة أيّام ، donc كل سبعة أيّام نرجعو لنفس النهار . يعني لازمنا نعرفو قدّاش من semaine كاملة في 234 ، w قدّاش يفضل . 234 semaines égale 7 fois 33 plus 3 : 33 كاملين يرجّعونا للاثنين ، w بعد trois jours زايدين : 77 égale 7 fois 11 plus zéro . w le jeudi : نفس النهار . يعني اللي يهمّنا هو le reste برك .

Commençons par une petite question : aujourd'hui c'est lundi, quel jour serons-nous dans 234 jours ? Une semaine compte sept jours, donc tous les sept jours on retombe sur le même jour. Il faut savoir combien de semaines complètes il y a dans 234, et combien de jours il reste. 234 égale 7 fois 33 plus 3 : 33 semaines complètes nous ramènent au lundi, puis trois jours de plus : jeudi. Et 77 égale 7 fois 11 plus zéro : c'est le même jour. Ce qui compte, c'est seulement le reste.

Une semaine compte 7 jours : tous les 7 jours, on retombe sur le même jour. Pour savoir quel jour nous serons après un certain nombre de jours, on cherche combien de **semaines complètes** il contient, et **ce qui reste** :

- $77 = 7 \times 11 + 0$: après 77 jours, c'est le même jour qu'aujourd'hui ;
- $155 = 7 \times 22 + 1$: un jour plus loin ;
- $234 = 7 \times 33 + 3$: trois jours plus loin.

Seul le **reste** compte : c'est l'idée de la division euclidienne.

33 SEMAINES ET 3 JOURS

$$234 = 7 \times 33 + 3$$

EXEMPLE TRAITÉ

Aujourd'hui, c'est lundi. Quel jour serons-nous après 234 jours ? Et après 123 jours ?

Semaines complètes — On écrit 234 avec des semaines de 7 jours.

$$234 = 7 \times 33 + 3$$

Le reste — 33 semaines ramènent au lundi ; il reste 3 jours : mardi, mercredi, jeudi.

$$\text{lundi} + 3 \text{ jours} = \text{jeudi}$$

Après 123 jours — $7 \times 17 = 119$, donc il reste 4 jours : mardi, mercredi, jeudi, vendredi.

$$123 = 7 \times 17 + 4$$

234 jours : jeudi ; 123 jours : vendredi

À ne pas faire : $155 \div 7 \approx 22{,}14$, donc on avance de 14 jours — $155 = 7 \times 22 + 1$: on avance d'un seul jour. Les chiffres après la virgule ne sont pas le reste : le reste est $155 - 7 \times 22 = 1$.

2. DÉFINITION

La division euclidienne

CE QU'IL DIT

Tawa el définition. a w b deux entiers naturels, w b mouch zéro. Famma couple wa7ed bark q, r men entiers naturels, elli a égale b q plus r, w r supérieur ou égal à zéro w strictement inférieur à b. a houwa le dividende, b le diviseur, q le quotient, w r le reste. Rodd belek mel condition : r lezem asghar mel diviseur. Mathalan 155 égale 17 fois 8 plus 19 : hedhi mouch division euclidienne, 5ater 19 akbar men 17 w men 8. Ama 189 égale 12 fois 15 plus 9 : 9 asghar men 12 w men 15, donc hiya division euclidienne de 189 par 12, w zeda de 189 par 15.

a égale b q plus r ، w r اللي ، entiers naturels من q ، r بزك واحد couple فمّا . zéro موش définition . a w b deux entiers naturels ، w b الـ توّا
رد بالك من الـ . le dividende ، b le diviseur ، q le quotient ، w r le reste هو supérieur ou égal à zéro w strictement inférieur à b . a
condition : r لازم أصغر من الـ diviseur . مثلا 155 égale 17 fois 8 plus 19 : هاذي موش division euclidienne ، خاطر 19 أكبر من 17 w من 8 . أما
189 égale 12 fois 15 plus 9 : 9 أصغر من 12 w من 15 ، donc هي w ، 12 par 189 de division euclidienne زادة 15 par 189 de .

Voici la définition. Soient a et b deux entiers naturels, b non nul. Il existe un unique couple q, r d'entiers naturels tel que a égale b q plus r, avec r supérieur ou égal à zéro et strictement inférieur à b. a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste. Attention à la condition : r doit être plus petit que le diviseur. Par exemple, 155 égale 17 fois 8 plus 19 n'est pas une division euclidienne, car 19 est plus grand que 17 et que 8. Mais 189 égale 12 fois 15 plus 9 : 9 est plus petit que 12 et que 15, c'est donc la division euclidienne de 189 par 12, et aussi celle de 189 par 15.

Définition. a et b désignent deux entiers naturels tels que b est différent de zéro. On admet l'existence d'un **couple unique** (q, r) d'entiers naturels tels que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver ce couple (q, r). a est le **dividende**, b est le **diviseur**, q est le **quotient** et r est le **reste**.

Attention : une égalité $a = bq + r$ ne traduit une division euclidienne que si le reste est **strictement inférieur au diviseur**.

- $73 = 20 \times 3 + 13$: $13 < 20$, c'est la division de 73 par 20 (quotient 3, reste 13) ; ce n'est pas la division par 3, car $13 \geq 3$.
- $155 = 17 \times 8 + 19$: $19 > 17$ et $19 > 8$, ce n'est pas une division euclidienne.
- $189 = 12 \times 15 + 9$: $9 < 12$ et $9 < 15$, c'est à la fois la division de 189 par 12 et celle de 189 par 15.
- $252 = 14 \times 18$: le reste est nul, par 14 comme par 18.

DIVIDENDE = DIVISEUR × QUOTIENT + RESTE

$$a = bq + r$$

LA CONDITION SUR LE RESTE

$$0 \leq r < b$$

EXEMPLE TRAITÉ

L'égalité $155 = 17 \times 8 + 19$ ne traduit pas une division euclidienne. Effectuer la division euclidienne de 155 par 17.

Le reste est trop grand — $19 \geq 17$: on peut encore retirer 17 une fois.

$19 = 17 + 2$

Réécrire —

$155 = 17 \times 8 + 17 + 2 = 17 \times 9 + 2$

Vérifier — Cette fois $0 \leq 2 < 17$.

$17 \times 9 + 2 = 153 + 2 = 155$

$$q = 9 \quad ; \quad r = 2$$

À ne pas faire : $155 = 17 \times 8 + 19$: le reste de 155 par 17 est 19 — $155 = 17 \times 9 + 2$: le reste est 2. Le reste doit vérifier $0 \leq r < b$; ici $19 \geq 17$.

À ne pas faire : $73 = 20 \times 3 + 13$ est la division de 73 par 3 — C'est la division de 73 par 20 ; par 3, on a $73 = 3 \times 24 + 1$. Le reste 13 n'est pas inférieur à 3 : il ne peut pas être le reste d'une division par 3.

3. MÉTHODE

Le quotient et le reste à la calculatrice

CE QU'IL DIT

Kifech nal9aw le quotient w le reste bel calculatrice ? Na3mlou a sur b. Le quotient q houwa la partie entière : el chiffres 9bal el virgule. W ba3d na7sbou le reste : r égale a moins b fois q. Mathalan 327 sur 54 ta3tina 6,0555. Donc q égale 6, w r égale 327 moins 54 fois 6, ya3ni 327 moins 324, égale 3. Rodd belek : el chiffres ba3d el virgule mahomch le reste.

كيفاش نلقاو le quotient w le reste بالـ calculatrice ؟ نعملو le quotient q هو a sur b . la partie entière : الـ chiffres قُبْلْ الـ virgule . w بعد
نحسبو le reste : r égale a moins b fois q تعطينا مثلا 327 sur 54 . w r égale 327 moins ، donc q égale 6 six virgule zéro cinq cinq cinq .
54 fois 6 ، يعني égale 3 327 ، moins 324 . رد بالك : الـ chiffres بعد الـ virgule ماهمش le reste .

Comment trouver le quotient et le reste avec la calculatrice ? On calcule a sur b. Le quotient q est la partie entière : les chiffres avant la virgule. Puis on calcule le reste : r égale a moins b fois q. Par exemple, 327 sur 54 donne 6,0555. Donc q égale 6, et r égale 327 moins 54 fois 6, c'est-à-dire 327 moins 324, égale 3. Attention : les chiffres après la virgule ne sont pas le reste.

Un élève a obtenu sur sa calculatrice $327 \div 54 = 6{,}055555556$. La calculatrice ne donne pas directement le reste, mais elle donne le quotient :

1. le **quotient** q est la partie entière du résultat : ici $q = 6$;
2. le **reste** se calcule ensuite : $r = a - bq$.

Ici $r = 327 - 54 \times 6 = 327 - 324 = 3$, et l'on vérifie que $0 \leq 3 < 54$.

Les chiffres après la virgule ne sont **pas** le reste : $0{,}0555\ldots$ est seulement $\frac{3}{54}$.

LE QUOTIENT

$$q = \text{partie entière de } \frac{a}{b}$$

LE RESTE

$$r = a - bq$$

EXEMPLE TRAITÉ

La calculatrice affiche $5002 \div 35 = 142{,}9142857$. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 5002 par 35.

Le quotient — On garde la partie entière.

$q = 142$

Le reste —

$r = 5002 - 35 \times 142 = 5002 - 4970 = 32$

Vérifier — $0 \leq 32 < 35$: c'est bien le reste.

$5002 = 35 \times 142 + 32$

$$q = 142 \quad ; \quad r = 32$$

À ne pas faire : $327 \div 54 = 6{,}0555\ldots$, donc le reste est 0555 — $r = 327 - 54 \times 6 = 3$. La partie décimale est le reste divisé par le diviseur, pas le reste lui-même.

À ne pas faire : On arrondit : $q = 143$, $r = 5002 - 35 \times 143 = -3$ — $q = 142$ et $r = 32$. Le quotient est la partie entière, jamais l'arrondi au-dessus : un reste ne peut pas être négatif.

---

4. ACTIVITÉ

Des flèches qui se répètent

CE QU'IL DIT

Fi el problème hedha, les entiers men zéro l mille marboutin b des flèches. Chouf el figure : men 6 l 7 l 8, nal9aw nafs ech-chakl elli men 0 l 1 l 2. El dessin yet3awed koll six nombres. Donc la flèche elli to5rej men n, ta3refha b le reste de n par 6. 527 égale 6 fois 87 plus 5 : 527 fi blasset 5, louta. Men louta, la flèche tatla3 l 528, ba3d temchi 3al imin l 529, w ba3d tahbet l 530. Hedha houwa el chemin elli yorbot 527 b 530.

في الـ problème هذا ، les entiers من zéro مربوطين بـ des flèches . شوف الـ figure : من 6 لـ 7 لـ 8 ، نلقاو نفس الشكل اللي من 0 لـ 1 لـ 2 . الـ dessin يتعاود كل six nombres . donc la flèche اللي تخرج من n ، تعرفها بـ 527 : 527 plus 5 fois 87 égale 6 . 527 le reste de n par 6 في

بلاصة 5 ، لوطة . من لوطة ، la flèche تطلع لـ 528 ، بعد تمشي على اليمين لـ 529 ، w بعد تهبط لـ 530 . هذا هو الـ chemin اللي يربط 527 بـ 530 .

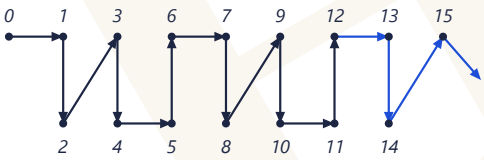
Dans ce problème, les entiers de zéro à mille sont reliés par des flèches. Regarde la figure : de 6 à 7 puis à 8, on retrouve le même dessin que de 0 à 1 puis à 2. Le dessin se répète tous les six nombres. La flèche qui part de n se connaît donc par le reste de n par 6. 527 égale 6 fois 87 plus 5 : 527 est à la place de 5, en bas. Depuis le bas, la flèche monte vers 528, puis va vers la droite jusqu'à 529, puis descend vers 530. C'est le chemin qui relie 527 à 530.

Un problème du Kangourou des Mathématiques. Les entiers naturels de 0 à 1000 ont été reliés par des flèches comme l'indique la figure. Quelle succession de flèches relie 527 à 530 ?

Le dessin se **répète tous les six nombres** : de 6 à 12, on retrouve exactement les flèches de 0 à 6. La flèche qui part d'un entier n ne dépend donc que du **reste de n dans la division par 6** :

reste de n par 6	0	1	2	3	4	5
place de n	en haut	en haut	en bas	en haut	en bas	en bas

Or $527 = 6 \times 87 + 5$: 527 est placé comme 5, en bas ; 528 comme 0, en haut ; 529 comme 1, en haut ; 530 comme 2, en bas. Le chemin de 527 à 530 est donc : **on monte, on va à droite, puis on descend**.



Les entiers reliés par des flèches ; le dessin se répète tous les six nombres.

Les entiers de 0 à 15, reliés dans l'ordre par des flèches, sur deux rangées. En haut : 0, 1, 3, 6, 7, 9, 12, 13, 15 ; en bas : 2, 4, 5, 8, 10, 11, 14. Les flèches font : de 0 à 1 vers la droite en haut, de 1 à 2 vers le bas, de 2 à 3 en diagonale vers le haut, de 3 à 4 vers le bas, de 4 à 5 vers la droite en bas, de 5 à 6 vers le haut ; puis le même dessin recommence à partir de 6, et encore à partir de 12 ; une dernière flèche part de 15 vers le bas, vers 16. Le motif se répète tous les six nombres.

527 SE PLACE COMME 5

$$527 = 6 \times 87 + 5$$

EXEMPLE TRAITÉ

Où est placé l'entier 1000 : en haut ou en bas ?

Le reste par 6 — $6 \times 166 = 996$.

$1000 = 6 \times 166 + 4$

Comparer — 1000 se place comme 4, qui est en bas.

1000 est en bas

À ne pas faire : 527 se place comme 7, son chiffre des unités — 527 se place comme 5, car $527 = 6 \times 87 + 5$. Le motif se répète tous les six nombres : c'est le reste par 6 qui compte, pas le reste par 10.

5. PROPRIÉTÉ

Divisibilité : somme et différence

CE QU'IL DIT

n divise a, ya3ni a égale k fois n, w k entier naturel. Kif kif ki n9oulou a multiple de n, walla le reste de a par n égale zéro. W hedhi propriété mohemma : ken n divise x w n divise y, alors n divise p fois x, n divise x plus y, w n divise x moins y. 3lech ? x égale k n w y égale k prime n, donc x plus y égale, k plus k prime, le tout fois n. Biha nwarriw elli 328 w 299 premiers entre eux : koll diviseur commun divise 328 moins 299, ya3ni 29. W 29 premier, w 29 ne divise pas 328 : donc le seul diviseur commun houwa 1.

هاذي le reste de a par n égale zéro . ولّا ، a multiple de n كيف كيف كي نقولو . a égale k fois n ، w k entier naturel يعني ، n divise a x égale k n w y ؟ علاش . n divise x w n divise y ، alors n divise p fois x ، n divise x plus y ، w n divise x moins y كان : مهمّة propriété diviseur كل : w 299 premiers entre eux 328 بيها نورّيو اللي . égale k prime n ، donc x plus y égale , k plus k prime , le tout fois n . 1 هو w 29 premier ، w 29 ne divise pas 328 : donc le seul diviseur commun . 29 يعني ، commun divise 328 moins 299

n divise a signifie que a égale k fois n, avec k entier naturel. C'est la même chose que dire que a est un multiple de n, ou que le reste de a par n est zéro. Et voici une propriété importante : si n divise x et n divise y, alors n divise p fois x, n divise x plus y, et n divise x moins y. Pourquoi ? x égale k n et y égale k prime n, donc x plus y égale, k plus k prime, le tout fois n. On s'en sert pour montrer que 328 et 299 sont premiers entre eux : tout diviseur commun divise 328 moins 299, c'est-à-dire 29. Or 29 est premier, et 29 ne divise pas 328 : le seul diviseur commun est donc 1.

Soient a un entier naturel et n un entier naturel non nul. **n divise a** signifie qu'il existe un entier naturel k tel que $a = kn$; on dit aussi que a est un **multiple** de n, ou que a est **divisible** par n. Cela revient à dire que **le reste de la division euclidienne de a par n est zéro**.

Propriété. Soient n, x et y trois entiers naturels tels que n divise x et n divise y. Alors :

- n divise px et n divise py, pour tout entier naturel p ;
- n divise $x + y$;
- n divise $x - y$, lorsque $x \geq y$.

On s'en sert pour montrer que deux entiers sont premiers entre eux : un diviseur commun à 118 et 225 divise leur somme $343 = 7^3$, donc c'est 1, 7, 49 ou 343 ; or 7 ne divise pas $118 = 7 \times 16 + 6$, donc ce diviseur commun est 1.

De même, si n divise $n + 15$, alors n divise $(n + 15) - n = 15$, donc n vaut 1, 3, 5 ou 15.

N DIVISE A

$$a = kn$$

LA SOMME

$$x = kn \text{ et } y = k'n \Rightarrow x + y = (k + k')n$$

DÉMONSTRATION

Comme n divise x et y, il existe deux entiers naturels k et k' tels que $x = kn$ et $y = k'n$. Alors $px = (pk)n$ et $py = (pk')n$, avec pk et pk' entiers naturels ; $x + y = (k + k')n$; et si $x \geq y$, alors $k \geq k'$ et $x - y = (k - k')n$, avec $k - k'$ entier naturel. Dans chaque cas, le nombre s'écrit comme un multiple de n.

EXEMPLE TRAITÉ

Montrer que si un entier naturel divise 328 et divise 299, alors il divise 29. En déduire que 328 et 299 sont premiers entre eux.

La différence — Un diviseur commun d divise la différence.

$328 - 299 = 29$

Les diviseurs de 29 — 29 est premier : $d = 1$ ou $d = 29$.

Écarter 29 — 29 ne divise pas 328.

$328 = 29 \times 11 + 9$

Conclure — Le seul diviseur commun est 1.

$\text{PGCD}(328, 299) = 1$

328 et 299 sont premiers entre eux

À ne pas faire : n divise $x + y$, donc n divise x et n divise y — 6 divise $2 + 4$, mais 6 ne divise ni 2 ni 4. La propriété va dans un seul sens : la réciproque est fausse.

À ne pas faire : Si n divise a, alors $\text{PPCM}(a,n) = na$ — Si n divise a, alors $\text{PPCM}(a,n) = a$ et $\text{PGCD}(a,n) = n$. a est déjà un multiple de n : le reste de a par n est zéro.

---

6. VOCABULAIRE

Rappels : PGCD, PPCM, premiers entre eux

CE QU'IL DIT

Rappel mel première année : bech na7sbou le PGCD w le PPCM, nfakkou koll nombre en produit de facteurs premiers. Le PGCD : nekhdhou les facteurs communs, koll wa7ed b a9al exposant. Le PPCM : nekhdhou les facteurs el koll, koll wa7ed b akbar exposant. Mathalan 252 égale 2 au carré fois 3 au carré fois 7, w 600 égale 2 au cube fois 3 fois 5 au carré. Le PGCD égale 2 au carré fois 3, ya3ni 12, w le PPCM égale 12600. W ki le PGCD égale 1, n9oulou elli les deux nombres premiers entre eux.

rappel من الـ première année : باش نحسبو le PPCM w le PGCD ، نفكّكو كل les nombre en produit de facteurs premiers . le PGCD ناخذو : exposant . le PPCM كل واحد بأقل ، facteurs communs égale 2 au carré fois 3 252 مثلا . exposant كل واحد بأكبر ، الكل les facteurs ناخذو : exponent . le PPCM كل واحد بأقل ، facteurs communs w le PPCM égale 12600 . w ، 12 يعني ، au carré fois 7 ، w 600 égale 2 au cube fois 3 fois 5 au carré . le PGCD égale 2 au carré fois 3 كي le PGCD égale 1 ، نقولو اللي les deux nombres premiers entre eux .

Un rappel de première année : pour calculer le PGCD et le PPCM, on décompose chaque nombre en produit de facteurs premiers. Le PGCD : on prend les facteurs communs, chacun avec le plus petit exposant. Le PPCM : on prend tous les facteurs, chacun avec le plus grand exposant. Par exemple, 252 égale 2 au carré fois 3 au carré fois 7, et 600 égale 2 au cube fois 3 fois 5 au carré. Le PGCD vaut 2 au carré fois 3, c'est-à-dire 12, et le PPCM vaut 12600. Et quand le PGCD vaut 1, on dit que les deux nombres sont premiers entre eux.

Un rappel de la première année. On **décompose** chaque entier en produit de facteurs premiers, puis :

- le **PGCD** est le produit des facteurs premiers **communs**, chacun avec son **plus petit** exposant ;
- le **PPCM** est le produit de **tous** les facteurs premiers, chacun avec son **plus grand** exposant ;
- deux entiers sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est 1.

Avec $245 = 5 \times 7^2$, $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ et $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$:

	PGCD	PPCM
245 et 252	7	$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 8820$
252 et 600	$2^2 \times 3 = 12$	$2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 12600$
245 et 600	5	$2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 = 29400$

RAPPEL DE PREMIÈRE ANNÉE

$$\text{PGCD}(a,b) \times \text{PPCM}(a,b) = ab$$

EXEMPLE TRAITÉ

Calculer $\text{PGCD}(245,252)$ et $\text{PPCM}(245,252)$, puis vérifier que leur produit vaut 245×252.

Décomposer —

$245 = 5 \times 7^2 \quad ; \quad 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

Le PGCD — Seul 7 est commun, avec le plus petit exposant 1.

$\text{PGCD}(245,252) = 7$

Le PPCM —

$\text{PPCM}(245,252) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 8820$

Vérifier —

$7 \times 8820 = 61740 = 245 \times 252$

$$\text{PGCD} = 7 \quad ; \quad \text{PPCM} = 8820$$

À ne pas faire : $\text{PGCD}(252,600) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ — $\text{PGCD}(252,600) = 2^2 \times 3 = 12$. Pour le PGCD, on ne garde que les facteurs communs, chacun avec le plus petit exposant ; l'autre produit est le PPCM.

7. PROPRIÉTÉ

Divisibilité par 2 et par 5

CE QU'IL DIT

Koll entier naturel n nektbouh n égale 10 q plus u, w u le chiffre des unités. W 10 q divisible par 2 w par 5, 5ater 10 égale 2 fois 5. Donc n w u 3andhom nafs le reste par 2 w par 5. Ya3ni : n divisible par 2 ken le chiffre des unités pair, w divisible par 5 ken le chiffre des unités zéro walla cinq. W bech tal9a le reste, ta7seb le reste mta3 u. Mathalan 69137 : u égale 7, le reste par 2 houwa 1, w le reste par 5 houwa 2, mouch 7.

égale 2 fois 5 . donc n 10 خاطر ، n égale 10 q plus u ، w u le chiffre des unités . w 10 q divisible par 2 w par 5 نكتبوه entier naturel n كل
le chiffre des unités كان le chiffre des unités pair ، w divisible par 5 كان n divisible par 2 : يعني . le reste par 2 w par 5 عندهم نفس w u
. 7 موش ، 2 هو w le reste par 5 ، 1 هو u égale 7 ، le reste par 2 : 69137 مثلا . u متاع le reste تحسب ، le reste تلقى باش cinq . w ولّا zéro

Tout entier naturel n s'écrit n égale 10 q plus u, où u est le chiffre des unités. Et 10 q est divisible par 2 et par 5, car 10 égale 2 fois 5. Donc n et u ont le même reste par 2 et par 5. Autrement dit : n est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair, et divisible par 5 si son chiffre des unités est zéro ou cinq. Pour trouver le reste, on calcule le reste de u. Par exemple, pour 69137 : u égale 7, le reste par 2 est 1, et le reste par 5 est 2, pas 7.

Les restes de la division par 10 de 8, 37, 175, 18159, 350600 et 8587325 sont 8, 7, 5, 9, 0 et 5 : c'est le **chiffre des unités**. Si u est le chiffre des unités de n, on écrit donc $n = 10q + u$, avec q entier naturel ; et comme $10 = 2 \times 5$, le terme $10q$ est divisible par 2 et par 5.

Propriété.

- Un entier est divisible par 2 (respectivement par 5) si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2 (respectivement par 5).
- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 2 (respectivement par 5) est égal au reste de la division euclidienne de son chiffre des unités par 2 (respectivement par 5).

U : LE CHIFFRE DES UNITÉS

$$n = 10q + u$$

DÉMONSTRATION

Soit r le reste de la division euclidienne de u par 5 : $u = 5q' + r$ avec $0 \leq r < 5$. Alors $n = 10q + 5q' + r = 5(2q + q') + r$, avec $0 \leq r < 5$: par unicité, r est aussi le reste de n par 5. De même, avec $u = 2q'' + r'$ et $0 \leq r' < 2$, on a $n = 2(5q + q'') + r'$. En particulier, n est divisible par 5 (ou par 2) exactement quand ce reste est nul.

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer le reste de la division euclidienne de 69137 par 2, puis par 5.

Le chiffre des unités —

$u = 7$

Par 2 —

$7 = 2 \times 3 + 1$

Par 5 —

$7 = 5 \times 1 + 2$

Vérifier —

$69137 = 5 \times 13827 + 2$

reste par 2 : 1 ; reste par 5 : 2

À ne pas faire : Le reste de 69137 par 5 est 7 — C'est 2, le reste de 7 par 5. On prend le **reste** du chiffre des unités ; 7 n'est pas un reste possible par 5.

8. PROPRIÉTÉ

Divisibilité par 4 et par 25

CE QU'IL DIT

Nafs el fekra m3a 4 w 25. 100 égale 4 fois 25, donc ki nektbou n égale 100 a plus b, w b le nombre formé par les deux derniers chiffres, 100 a divisible par 4 w par 25. Donc n w b 3andhom nafs le reste par 4 w par 25. Mathalan 27960 : les deux derniers chiffres 60, w 60 égale 4 fois 15 : 27960 divisible par 4. Ama par 25, 60 égale 25 fois 2 plus 10 : le reste 10. Rodd belek : par 4, mouch yekfi elli le chiffre des unités pair.

n égale 100 a plus b ، w b le nombre formé par les deux derniers chiffres ، كي نكتبو w 25 . 100 égale 4 fois 25 ، donc 4 نفس الفكرة مع les deux derniers chiffres 60 ، w 60 égale 4 : 27960 مثلا . le reste par 4 w par 25 عندهم نفس 100 a divisible par 4 w par 25 . donc n w b le chiffre des unités اللي يكفي ، موش par 4 : رد بالك . par 25 ، 60 égale 25 fois 2 plus 10 : le reste 10 أما . fois 15 : 27960 divisible par 4 . pair

Même idée avec 4 et 25. 100 égale 4 fois 25, donc quand on écrit n égale 100 a plus b, où b est le nombre formé par les deux derniers chiffres, 100 a est divisible par 4 et par 25. Donc n et b ont le même reste par 4 et par 25. Par exemple, pour 27960 : les deux derniers chiffres forment 60, et 60 égale 4 fois 15 : 27960 est divisible par 4. Mais par 25, 60 égale 25 fois 2 plus 10 : le reste est 10. Attention : pour 4, il ne suffit pas que le chiffre des unités soit pair.

Les restes de la division par 100 de $12, 50, 133, 984, 4500$ et 79375 sont $12, 50, 33, 84, 0$ et 75 : c'est le **nombre formé par les deux derniers chiffres**. Si $n \geq 10$ et si b est ce nombre, on écrit $n = 100a + b$, avec a entier naturel ; et comme $100 = 4 \times 25$, le terme $100a$ est divisible par 4 et par 25.

Propriété.

- Un entier est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25).
- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 4 (respectivement par 25) est égal au reste de la division euclidienne par 4 (respectivement par 25) du nombre formé par ses deux derniers chiffres.

B : LES DEUX DERNIERS CHIFFRES

$$n = 100a + b$$

DÉMONSTRATION

Si $b = 4q' + r$ avec $0 \leq r < 4$, alors $n = 100a + 4q' + r = 4(25a + q') + r$: r est aussi le reste de n par 4. Si $b = 25q'' + r'$ avec $0 \leq r' < 25$, alors $n = 25(4a + q'') + r'$: r' est le reste de n par 25.

EXEMPLE TRAITÉ

27960 et 131675 sont-ils divisibles par 4 ? par 25 ? Donner chaque fois le reste.

27960 par 4 — On regarde 60.

$60 = 4 \times 15$

27960 par 25 —

$60 = 25 \times 2 + 10$

131675 par 4 — On regarde 75.

$75 = 4 \times 18 + 3$

131675 par 25 —

$75 = 25 \times 3$

27960 : divisible par 4, reste 10 par 25 ; 131675 : reste 3 par 4, divisible par 25

À ne pas faire : 1050 est divisible par 4, car 50 est pair — $50 = 4 \times 12 + 2$: 1050 n'est pas divisible par 4. Pour 4, il faut que le nombre formé par les deux derniers chiffres soit divisible par 4 ; être pair ne suffit pas.

9. PROPRIÉTÉ

Divisibilité par 8

CE QU'IL DIT

W par 8 ? 100 mouch multiple de 8, ama 1000 égale 8 fois 125. Donc lezemna les trois derniers chiffres : n égale 1000 a plus b, w b le nombre formé par les trois derniers chiffres. n w b 3andhom nafs le reste par 8. Mathalan 2613 : nekhdhou 613, w 613 égale 8 fois 76 plus 5 : le reste 5. Rodd belek, ken te5ou zouz chiffres bark, toghlot : 234105, el 05 ya3tik 5, ama 105 égale 8 fois 13 plus 1, w le reste houwa 1.

les trois derniers chiffres : n égale 1000 a plus b ، w b le لازمنا égale 8 fois 125 . donc 1000 أما ، multiple de 8 موش 100 ؟ w par 8
w 613 égale 8 fois 76 plus 5 : le ، 613 ناخذو : 2613 مثلا . le reste par 8 عندهم نفس nombre formé par les trois derniers chiffres . n w b
. 1 هو égale 8 fois 13 plus 1 ، w le reste 105 أما ، 5 يعطيك الـ 05 ، 234105 : برك تغلط chiffres زوز تاخذ كان ، بالك رد . reste 5

Et par 8 ? 100 n'est pas un multiple de 8, mais 1000 égale 8 fois 125. Il faut donc les trois derniers chiffres : n égale 1000 a plus b, où b est le nombre formé par les trois derniers chiffres. n et b ont le même reste par 8. Par exemple, pour 2613 : on prend 613, et 613 égale 8 fois 76 plus 5 : le reste est 5. Attention, si tu prends seulement deux chiffres, tu te trompes : pour 234105, 05 donnerait 5, mais 105 égale 8 fois 13 plus 1, et le reste est 1.

Les restes de la division par 1000 de $23, 96, 249, 1672, 3502$ et 19456 sont $23, 96, 249, 672, 502$ et 456 : le **nombre formé par les trois derniers chiffres**. Leurs restes par 8 sont $7, 0, 1, 0, 6$ et 0. Si $n \geq 100$ et si b est le nombre formé par ses trois derniers chiffres, $n = 1000a + b$; et $1000 = 8 \times 125$ est divisible par 8 — alors que 100 ne l'est pas.

Propriété.

- Un entier, supérieur ou égal à 100, est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.
- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 8 est égal au reste de la division euclidienne par 8 du nombre formé par ses trois derniers chiffres.

B : LES TROIS DERNIERS CHIFFRES

$n = 1000a + b$

DÉMONSTRATION

Si $b = 8q' + r$ avec $0 \leq r < 8$, alors $n = 1000a + 8q' + r = 8(125a + q') + r$, avec $0 \leq r < 8$: r est aussi le reste de n par 8.

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer le reste de la division euclidienne de 2613 par 8.

Les trois derniers chiffres —

$b = 613$

Diviser 613 par 8 —

$613 = 8 \times 76 + 5$

Vérifier —

$2613 = 8 \times 326 + 5$

le reste de 2613 par 8 est 5

À ne pas faire : Pour 234105, on regarde 05 : le reste par 8 est 5 — On regarde $105 = 8 \times 13 + 1$: le reste est 1. Par 8, il faut les **trois** derniers chiffres : 100 n'est pas un multiple de 8.

10. PROPRIÉTÉ

Divisibilité par 3 et par 9

CE QU'IL DIT

Par 3 w par 9, nchoufou la somme des chiffres. 3lech ? Ken n 3andou arba3a chiffres a, b, c, d, n égale 1000 a plus 100 b plus 10 c plus d, ya3ni 999 a plus 99 b plus 9 c plus S, w S la somme des chiffres. W 999, 99 w 9 multiples de 9. Donc n moins S divisible par 9 w par 3, w n w S 3andhom nafs le reste. Mathalan 2851961 : la somme des chiffres 32. 32 égale 9 fois 3 plus 5 : le reste par 9 houwa 5, w par 3 houwa 2. Rodd belek : divisible par 3 mouch dima divisible par 9 : 2325, la somme 12.

، chiffres a ، b ، c ، d ، n égale 1000 a plus 100 b plus 10 c plus d عندو أربعة n كان ؟ علاش . la somme des chiffres نشوفو ، par 3 w par 9 a plus 99 b plus 9 c plus S ، w S la somme des chiffres . w 999 ، 99 w 9 multiples de 9 . donc n moins S divisible par 9 w par 999 يعني . 2 هو w par 3 ، 5 هو la somme des chiffres 32 . 32 égale 9 fois 3 plus 5 : le reste par 9 : 2851961 مثلا . le reste عندهم نفس ، 3 w n w S . divisible par 9 : 2325 ، la somme 12 موش ديما divisible par 3 : رد بالك

Pour 3 et pour 9, on regarde la somme des chiffres. Pourquoi ? Si n a quatre chiffres a, b, c, d, alors n égale 1000 a plus 100 b plus 10 c plus d, c'est-à-dire 999 a plus 99 b plus 9 c plus S, où S est la somme des chiffres. Or 999, 99 et 9 sont des multiples de 9. Donc n moins S est divisible par 9 et par 3, et n et S ont le même reste. Par exemple, pour 2851961 : la somme des chiffres vaut 32. 32 égale 9 fois 3 plus 5 : le reste par 9 est 5, et par 3 c'est 2. Attention : divisible par 3 ne veut pas toujours dire divisible par 9 : pour 2325, la somme vaut 12.

Soit n un entier naturel à quatre chiffres a, b, c et d (milliers, centaines, dizaines, unités), et $S = a + b + c + d$ la somme de ses chiffres. Alors

$$n = 1000a + 100b + 10c + d = 999a + 99b + 9c + S.$$

Comme 999, 99 et 9 sont des multiples de 9 (donc de 3), $n - S$ est divisible par 9 et par 3.

Propriété.

- Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).
- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 3 (respectivement par 9) est égal au reste de la division euclidienne de la somme de ses chiffres par 3 (respectivement par 9).

Avec aussi les critères de 2 et de 5 :

	par 2	par 3	par 5	par 9
72531 ($S = 18$)	non	oui	non	oui
923864 ($S = 32$)	oui	non	non	non
1231105 ($S = 13$)	non	non	oui	non
7843621 ($S = 31$)	non	non	non	non
813543210 ($S = 27$)	oui	oui	oui	oui

UN MULTIPLE DE 9

$$n - S = 999a + 99b + 9c$$

DÉMONSTRATION

$n - S = 999a + 99b + 9c = 9(111a + 11b + c)$ est divisible par 9, et donc par 3. Si $S = 9q + r$ avec $0 \leq r < 9$, alors $n = (n - S) + S = 9(111a + 11b + c + q) + r$: r est aussi le reste de n par 9. Le même calcul, avec $9 = 3 \times 3$, donne le résultat par 3. On l'a démontré pour quatre chiffres ; le raisonnement est le même pour un nombre quelconque de chiffres, puisque $10 - 1$, $100 - 1$, $1000 - 1$… s'écrivent tous avec des 9.

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer le reste de la division euclidienne de 2851961 par 3, puis par 9.

La somme des chiffres —

$S = 2 + 8 + 5 + 1 + 9 + 6 + 1 = 32$

Par 3 —

$32 = 3 \times 10 + 2$

Par 9 —

$32 = 9 \times 3 + 5$

reste par 3 : 2 ; reste par 9 : 5

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

À ne pas faire : 2325 est divisible par 3, donc par 9 — $S = 12$: 2325 est divisible par 3, mais pas par 9. 12 est un multiple de 3, pas de 9 ; c'est l'inverse qui est vrai : divisible par 9 entraîne divisible par 3.

À ne pas faire : Le reste de 1359 par 9 est 18, la somme de ses chiffres — $18 = 9 \times 2$: le reste est 0, et 1359 est divisible par 9. On prend le reste de la somme des chiffres, et un reste par 9 est toujours inférieur à 9.

---

11. APPLICATION

Du lait, de l'huile et du pétrole

CE QU'IL DIT

Hedha problème mezyen. El fellè7 3andou tes3a récipients, la somme mte3hom 140 litres. Ezzit h, el 7lib deux fois h, w le pétrole trois fois el 7lib, ya3ni six fois h. Donc el koll neuf fois h : el litres el m3abbyin multiple de 9. 140 égale 9 fois 15 plus 5, donc le récipient el fergh lezem le reste mte3ou par 9 houwa 5 : ma famma ken 23. Yo93ed 117, ya3ni 9 fois 13 : 13 litres zit, 26 7lib, w 78 pétrole.

هذا مزيان . الفلّاح عندو تسعة récipients ، la somme متاعهم 140 litres . الزيت h ، الحليب deux fois h ، w le pétrole trois fois
الحليب ، يعني six fois h . donc الكل neuf fois h : الـ litres المعبّيين ، donc le récipient 5 plus 15 égale 9 . 140 multiple de 9 لازم الفارغ
le reste متاعو 9 par هو 5 : ما فمّا كان 23 . يقعد 117 ، يعني 9 litres 13 : 13 fois زيت ، 26 حليب ، 78 pétrole w .

C'est un beau problème. Le paysan a neuf récipients, de contenance totale 140 litres. S'il a h litres d'huile, il a deux fois h litres de lait, et le pétrole fait trois fois le lait, soit six fois h. Au total neuf fois h : le volume rempli est un multiple de 9. 140 égale 9 fois 15 plus 5, donc le récipient vide doit avoir un reste de 5 par 9 : il n'y a que 23. Il reste 117, soit 9 fois 13 : 13 litres d'huile, 26 de lait et 78 de pétrole.

Un problème tiré de *Oh les maths*, de P. Yakov. Un paysan dispose de neuf récipients de contenances 3 ; 6 ; 10 ; 11 ; 15 ; 17 ; 23 ; 25 et 30 litres. Il revient du marché avec **deux fois plus de lait que d'huile** et **trois fois plus de pétrole que de lait**. Tous ses récipients sont pleins, sauf un qui est vide. Lequel ?

Si h est la quantité d'huile, il a $2h$ litres de lait et $6h$ litres de pétrole : en tout $9h$ litres. Le volume rempli est donc **un multiple de 9**. On retrouvera la même idée dans l'exercice des boîtes de boules, où le nombre de boules restantes doit être un multiple de 3.

HUILE, LAIT, PÉTROLE

$$h + 2h + 6h = 9h$$

EXEMPLE TRAITÉ

Trouver le récipient vide et le contenu de chaque récipient.

Le volume total —

$$3 + 6 + 10 + 11 + 15 + 17 + 23 + 25 + 30 = 140$$

Le reste par 9 — $140 - v$ doit être un multiple de 9 : le récipient vide v a le même reste que 140 par 9.

$$140 = 9 \times 15 + 5$$

Le seul possible — Les restes par 9 des contenances sont $3, 6, 1, 2, 6, 8, 5, 7, 3$: seul 23 donne 5.

$$140 - 23 = 117 = 9 \times 13$$

Les quantités — $h = 13$: 13 litres d'huile, 26 de lait, 78 de pétrole.

$$13 = 3 + 10 \quad ; \quad 26 = 11 + 15 \quad ; \quad 78 = 6 + 17 + 25 + 30$$

le récipient vide est celui de 23 litres

À ne pas faire : On essaie les récipients un par un, au hasard — Le volume rempli est $9h$: on cherche le récipient qui a le même reste que 140 par 9. Le reste par 9 désigne d'un coup le seul récipient possible.

---

12. ACTIVITÉ

Les puissances de 10 et le nombre 11

CE QU'IL DIT

Bech nefhmou le critère mta3 11, nchoufou les puissances de 10. 10 au carré moins 1 égale 99, w 99 égale 11 fois 9. W 10 au cube plus 1 égale 1001, ya3ni 11 fois 91. W hakka : 10 puissance un nombre pair, moins 1, divisible par 11 ; w 10 puissance un nombre impair, plus 1, divisible par 11. Donc ki nektbou 2765 b les puissances de 10, koll chay divisible par 11 ken el parenthèse elli fel e5er : 5 moins 6 plus 7 moins 2, égale 4. Donc 2765 w 4 3andhom nafs le reste par 11.

باش نفهمو le critère متاع 11 ، نشوفو les puissances de 10 . 10 au carré moins 1 égale 99 ، w 99 égale 11 fois 9 . w 10 au cube plus 1 égale 1001 ، يعني 11 fois 91 . W هكّا : 10 puissance un nombre pair ، moins 1 ، divisible par 11 ؛ w 10 puissance un nombre impair ، كان الـ parenthèse اللي في الآخر : 5 moins 6 plus 7 moins 2 ، égale 4 . donc 2765 w 4 عندهم نفس le reste par 11.

Pour comprendre le critère de 11, regardons les puissances de 10. 10 au carré moins 1 égale 99, et 99 égale 11 fois 9. Et 10 au cube plus 1 égale 1001, soit 11 fois 91. De même : 10 puissance un nombre pair, moins 1, est divisible par 11 ; et 10 puissance un nombre impair, plus 1, est divisible par 11. Donc quand on écrit 2765 avec les puissances de 10, tout est divisible par 11 sauf la dernière parenthèse : 5 moins 6 plus 7 moins 2, égale 4. Donc 2765 et 4 ont le même reste par 11.

On vérifie que $10^2 - 1 = 99 = 11 \times 9$ et que $10^3 + 1 = 1001 = 11 \times 91$.

- Si 11 divise $N - 1$, alors 11 divise $10^2 N - 1 = 100(N - 1) + 99$. On en déduit de proche en proche que $10^4 - 1$, $10^6 - 1$, $10^8 - 1$ et $10^{10} - 1$ sont divisibles par 11.
- Si 11 divise $N + 1$, alors 11 divise $10^2 N + 1 = 100(N + 1) - 99$. Donc $10^5 + 1$, $10^7 + 1$ et $10^9 + 1$ sont divisibles par 11.

En écrivant un entier avec ces nombres, tout est multiple de 11 sauf une parenthèse finale :

$$75429 = 7 \times (10^4 - 1) + 5 \times (10^3 + 1) + 4 \times (10^2 - 1) + 2 \times (10^1 + 1) + 9 \times (10^0 - 1) + (9 - 2 + 4 - 5 + 7).$$

75429 et $d = 9 - 2 + 4 - 5 + 7 = 13$ ont donc le même reste par 11 : $13 = 11 + 2$, le reste est 2. Les chiffres sont pris **à partir des unités**, avec des signes alternés.

EXPOSANT PAIR : MOINS 1

$$10^2 - 1 = 99 = 11 \times 9$$

EXPOSANT IMPAIR : PLUS 1

$$10^3 + 1 = 1001 = 11 \times 91$$

EXEMPLE TRAITÉ

Écrire 2765 comme on a écrit 75429, avec les nombres $10^k - 1$ et $10^k + 1$, et en déduire si 2765 est divisible par 11.

Écrire 2765 —

$$2765 = 2 \times (10^3 + 1) + 7 \times (10^2 - 1) + 6 \times (10^1 + 1) + 5 \times (10^0 - 1) + (5 - 6 + 7 - 2)$$

Vérifier —

$$2002 + 693 + 66 + 0 + 4 = 2765$$

Conclure — Les quatre premiers termes sont des multiples de 11, et $5 - 6 + 7 - 2 = 4$.

$$2765 = 11 \times 251 + 4$$

2765 n'est pas divisible par 11 ; son reste est 4

À ne pas faire : $10^3 - 1 = 999$ est divisible par 11 — $999 = 11 \times 90 + 9$; c'est $10^3 + 1 = 1001$ qui est divisible par 11. Exposant pair : $10^k - 1$; exposant impair : $10^k + 1$.

13. PROPRIÉTÉ

Divisibilité par 11

CE QU'IL DIT

Tawa le critère mta3 11. N3addou les rangs men limin l lisar : le chiffre des unités rang un. S un la somme des chiffres de rang impair, w S deux la somme des chiffres de rang pair, w d égale S un moins S deux. Ki d positif walla nul : n divisible par 11 ken d divisible par 11, w le reste de n houwa le reste de d. Mathalan 2731 : S un égale 1 plus 7, 8, w S deux égale 3 plus 2, 5. d égale 3, donc le reste de 2731 par 11 houwa 3.

le chiffre des unités rang un . S un la somme des chiffres de rang impair ، w S : من اليمين لليسار les rangs نعدّو . 11 متاع le critère توّا le critère d divisible par 11 ، كان nul : n divisible par 11 ولّا d positif كي . deux la somme des chiffres de rang pair ، w d égale S un moins S deux S un égale 1 plus 7 ، 8 ، w S deux égale 3 plus 2 ، 5 . d égale 3 ، donc le reste de 2731 par : 2731 مثلا . le reste de d هو w le reste de n 11 هو 3 .

Voici le critère de 11. On compte les rangs de droite à gauche : le chiffre des unités est de rang un. S un est la somme des chiffres de rang impair, S deux la somme des chiffres de rang pair, et d égale S un moins S deux. Si d est positif ou nul : n est divisible par 11 si et seulement si d l'est, et le reste de n est le reste de d. Par exemple, pour 2731 : S un égale 1 plus 7, soit 8, et S deux égale 3 plus 2, soit 5. d égale 3, donc le reste de 2731 par 11 est 3.

Propriété. Soit n un entier naturel. On désigne par S_1 la somme de ses chiffres de **rang impair** et par S_2 la somme de ses chiffres de **rang pair**, les rangs étant comptés **de droite à gauche** (le chiffre des unités est de rang 1). Soit $d = S_1 - S_2$.

1er cas : $d \geq 0$.

- n est divisible par 11 si et seulement si d est divisible par 11.
- Le reste de la division euclidienne de n par 11 est égal au reste de la division euclidienne de d par 11.

Exemples :

n	d	n divisible par 11
2765	$5-6+7-2=4$	non
473	$3-7+4=0$	oui
1738	$8-3+7-1=11$	oui
80916	$6-1+9-0+8=22$	oui
91827	$7-2+8-1+9=21$	non
9081919	$9-1+9-1+8-0+9=33$	oui

Et pour 743, $d = 3-4+7=6$, et le reste de 743 par 11 est bien 6 ($743 = 11\times 67+6$).

RANGS COMPTÉS DEPUIS LES UNITÉS

$$d = S_1 - S_2$$

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer le reste de la division euclidienne de 2731 par 11.

Les rangs — De droite à gauche : 1 (rang 1), 3 (rang 2), 7 (rang 3), 2 (rang 4).

Les deux sommes —

$S_1 = 1+7 = 8 \quad ; \quad S_2 = 3+2 = 5$

Le nombre d —

$d = 8-5 = 3$

Vérifier —

$2731 = 11\times 248+3$

le reste de 2731 par 11 est 3

À ne pas faire : Pour 2731, on compte de gauche à droite : $S_1 = 2+3$, $S_2 = 7+1$ — De droite à gauche : $S_1 = 1+7 = 8$ et $S_2 = 3+2 = 5$. Le chiffre des unités est toujours de rang 1 ; avec un nombre pair de chiffres, compter dans l'autre sens change le signe de d.

À ne pas faire : Pour 91827, $d = 21$: le reste par 11 est 21 — $21 = 11+10$: le reste est 10. Un reste par 11 est inférieur à 11 : on prend le reste de d.

14. PROPRIÉTÉ

Divisibilité par 11 : quand d est négatif

CE QU'IL DIT

W ki d négatif ? Nzidou 3lih le plus petit multiple de 11 elli yrajj3ou positif walla nul. Mathalan 8291 : S un égale 1 plus 2, 3, w S deux égale 9 plus 8, 17. d égale moins 14. Nzidou 22, w nal9aw 8 : le reste de 8291 par 11 houwa 8. W ki d plus 11 p ywalli zéro, n divisible par 11, kima 5071. Rodd belek : le reste 3omrou ma ykoun négatif, w ma tna77ich le signe moins bark.

S un égale 1 plus 2 ، 3 ، w S deux égale 9 : 8291 مثلا . nul ولّا positif يرجّعو اللي le plus petit multiple de 11 نزيدو عليه ؟ d négatif كي w
كيما ، zéro ، n divisible par 11 يولّي d plus 11 p كي w . 8 هو le reste de 8291 par 11 : 8 نلقاو w ، 22 نزيدو . plus 8 ، 17 . d égale moins 14
برك le signe moins ما تنحّيش négatif ، w عمرو ما يكون le reste : 5071 . رد بالك

Et si d est négatif ? On lui ajoute le plus petit multiple de 11 qui le rend positif ou nul. Par exemple, pour 8291 : S un égale 1 plus 2, soit 3, et S deux égale 9 plus 8, soit 17. d égale moins 14. On ajoute 22, et on trouve 8 : le reste de 8291 par 11 est 8. Et quand d plus 11 p vaut zéro, n est divisible par 11, comme 5071. Attention : un reste n'est jamais négatif, et on ne se contente pas d'enlever le signe moins.

2ème cas : $d < 0$. Soit p le plus petit entier naturel tel que $d + 11p$ soit positif ou nul.

- n est divisible par 11 si et seulement si $d + 11p$ est divisible par 11.
- Le reste de la division euclidienne de n par 11 est $d + 11p$.

Les multiples de 11 inférieurs à 100 sont $0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$. Pour $d = -5, -13, -22, -27$ et -93, le plus petit multiple m de 11 tel que $d + m \geq 0$ est $11, 22, 22, 33$ et 99.

n	d	m	$d + m$ = reste
8291	$1 - 9 + 2 - 8 = -14$	22	8
190	$0 - 9 + 1 = -8$	11	3
581	$1 - 8 + 5 = -2$	11	9
5071	$1 - 7 + 0 - 5 = -11$	11	0
8370	$0 - 7 + 3 - 8 = -12$	22	10
709180	$0 - 8 + 1 - 9 + 0 - 7 = -23$	33	10

5071 est donc divisible par 11 ($5071 = 11 \times 461$).

P : LE PLUS PETIT POSSIBLE

$$d < 0 : \quad r = d + 11p$$

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer le reste de la division euclidienne de 9391 par 11.

Les deux sommes — De droite à gauche : $1, 9, 3, 9$.

$S_1 = 1 + 3 = 4 \quad ; \quad S_2 = 9 + 9 = 18$

d est négatif —

$d = 4 - 18 = -14$

Ajouter 22 — $-14 + 11 < 0$, mais $-14 + 22 \geq 0$: $p = 2$.

$d + 22 = 8$

Vérifier —

$9391 = 11 \times 853 + 8$

le reste de 9391 par 11 est 8

À ne pas faire : Pour 8291, $d = -14$: le reste est 14 — On ajoute 22 : le reste est $-14 + 22 = 8$. On ne change pas le signe de d ; on lui ajoute le plus petit multiple de 11 qui le rend positif ou nul.

15. MÉTHODE

Trouver un chiffre inconnu

CE QU'IL DIT

Ki famma chiffre ma na3rfouhch, nektbou le critère bel chiffre hedha, w ba3d nesta3mlou elli chiffre dima bin 0 w 9. Mathalan 8291a divisible par 11 : S un égale a plus 9 plus 8, w S deux égale 1 plus 2, donc d égale a plus 14. a bin 0 w 9, donc d bin 14 w 23, w le seul multiple de 11 houwa 22 : a égale 8. W ki famma zouz chiffres, nabdew b le critère elli fih chiffre wa7ed.

8291a divisible par 11 : S un مثلا . w 9 0 ديما بين chiffre بعد نستعملو اللي chiffre هذا ، w بالـ le critère نكتبو ، chiffre كي فمّا ما نعرفوهش
هو w 23 ، w le seul multiple de 11 14 بين w 9 ، donc d 0 بين égale a plus 9 plus 8 ، w S deux égale 1 plus 2 ، donc d égale a plus 14 . a
a égale 8 . w : 22 كي فمّا زوز chiffres ، نبداو بـ le critère اللي فيه chiffre واحد .

Quand un chiffre est inconnu, on écrit le critère avec ce chiffre, puis on utilise qu'un chiffre est toujours entre 0 et 9. Par exemple, pour que 8291a soit divisible par 11 : S un égale a plus 9 plus 8, et S deux égale 1 plus 2, donc d égale a plus 14. a est entre 0 et 9, donc d est entre 14 et 23, et le seul multiple de 11 est 22 : a égale 8. Et quand il y a deux chiffres inconnus, on commence par le critère qui n'en fait intervenir qu'un.

Pour trouver un chiffre inconnu d'un nombre divisible par 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 ou 25 :

1. on traduit le critère en une **condition sur le chiffre inconnu** ;
2. on utilise qu'un chiffre est un entier compris entre 0 et 9 ;
3. avec deux chiffres inconnus et deux critères, on commence par le critère qui ne fait intervenir **qu'un seul** chiffre — en général celui des derniers chiffres (2, 5, 4, 25, 8).

Exemple : $n = 4a68$ divisible par 11. De droite à gauche : 8, 6, a, 4, donc $S_1 = 8 + a$, $S_2 = 6 + 4 = 10$ et $d = a - 2$. Comme $-2 \leq a - 2 \leq 7$, le seul multiple de 11 possible est 0 : $a = 2$, et $4268 = 11 \times 388$.

UN CHIFFRE

$$0 \leq a \leq 9$$

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer le chiffre a pour que le nombre $n = 8291a$ soit divisible par 11.

Les deux sommes — De droite à gauche : a, 1, 9, 2, 8.

$$S_1 = a + 9 + 8 = a + 17 \quad ; \quad S_2 = 1 + 2 = 3$$

Le nombre d —

$$d = a + 14$$

Encadrer — Comme $0 \leq a \leq 9$, d est entre 14 et 23 : le seul multiple de 11 est 22.

$$a + 14 = 22$$

Vérifier —

$$82918 = 11 \times 7538$$

$$a = 8$$

À ne pas faire : $d = a + 14$ ne peut pas valoir 0 : il n'y a pas de solution — d peut valoir 11, 22, 33… : ici $a + 14 = 22$, donc $a = 8$. « d divisible par 11 » ne veut pas dire « $d = 0$ ».

16. MÉTHODE

Raisonner sur les restes possibles

CE QU'IL DIT

Kifech nwarriw elli n fois, n au carré plus 5, divisible par 3 l koll entier n ? Ma najjmouch njarbou les nombres el koll. Ama koll entier, le reste mte3ou par 3 ya zéro, ya un, ya deux. Donc 3andna trois cas bark : n égale 3 k, n égale 3 k plus 1, w n égale 3 k plus 2. Ki n

égale 3 k, n divisible par 3. Ki n égale 3 k plus 1, n au carré plus 5 égale 3 fois, 3 k au carré plus 2 k plus 2. W ki n égale 3 k plus 2, n au carré plus 5 égale 3 fois, 3 k au carré plus 4 k plus 3. Fel trois cas, divisible par 3.

كيفاش نوريو اللي 3 divisible par , n au carré plus 5 , n fois لكل n entier ؟ ما نجّموش نجرّبو les nombres الكل . أما كل reste le ، متاعو entier
zéro يا 3 par ، يا un ، يا deux . donc عندنا trois cas برك : w n égale 3 k plus 2 ، n égale 3 k plus 1 ، n égale 3 k . كي n égale 3 k ،
n égale 3 k plus 2 ، n au carré كي n égale 3 k plus 1 ، n au carré plus 5 égale 3 fois , 3 k au carré plus 2 k plus 2 . w كي . divisible par 3
. trois cas ، divisible par 3 الـ في . plus 5 égale 3 fois , 3 k au carré plus 4 k plus 3

Comment montrer que n fois, n au carré plus 5, est divisible par 3 pour tout entier n ? On ne peut pas essayer tous les nombres. Mais le reste de n par 3 vaut zéro, un ou deux. Il n'y a donc que trois cas : n égale 3 k, n égale 3 k plus 1, et n égale 3 k plus 2. Si n égale 3 k, n est divisible par 3. Si n égale 3 k plus 1, n au carré plus 5 égale 3 fois, 3 k au carré plus 2 k plus 2. Et si n égale 3 k plus 2, n au carré plus 5 égale 3 fois, 3 k au carré plus 4 k plus 3. Dans les trois cas, c'est divisible par 3.

Pour montrer qu'une expression en n est divisible par 3 **pour tout** entier naturel n, on ne peut pas essayer tous les entiers. Mais le reste de n par 3 ne peut valoir que 0, 1 ou 2 : il suffit donc de traiter **trois cas**,

$$n = 3k, \qquad n = 3k+1, \qquad n = 3k+2 \qquad (k \text{ entier naturel}).$$

Avec 4, 5… à la place de 3, il y a autant de cas que de restes possibles.

LES TROIS RESTES PAR 3

$n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit n un entier naturel. Montrer que l'entier $A = n(n^2+5)$ est divisible par 3.

Si $n = 3k$ — Le facteur n est divisible par 3, donc A aussi.

Si $n = 3k+1$ —

$n^2+5 = 9k^2+6k+6 = 3(3k^2+2k+2)$

Si $n = 3k+2$ —

$n^2+5 = 9k^2+12k+9 = 3(3k^2+4k+3)$

Conclure — Dans les trois cas, un des facteurs de A est divisible par 3.

3 divise $n(n^2+5)$ pour tout entier naturel n

À ne pas faire : On vérifie pour $n = 1, 2$ et 3 : c'est donc vrai pour tout n — On traite les trois cas $n = 3k$, $n = 3k+1$ et $n = 3k+2$. Quelques exemples ne démontrent rien ; les trois cas, eux, couvrent tous les entiers.

17. ACTIVITÉ

Le chiffre des unités de 3 puissance n

CE QU'IL DIT

Bel tableur, n7ottou n, 3 puissance n, w le chiffre des unités b MOD de 10. Nal9aw 1, 3, 9, 7, w ba3d 1, 3, 9, 7 marra o5ra. El chiffres yet3awdou koll arba3a. Donc bech na3rfou le chiffre des unités de 3 puissance n, na7sbou le reste de n par 4. Mathalan 175 égale 4 fois 43 plus 3 : le chiffre des unités de 3 puissance 175 houwa nafsou mta3 3 au cube, 27 : ya3ni 7.

بالـ tableur ، نحطّو le chiffre des unités w ، 3 puissance n ، n بـ MOD de 10 . نلقاو 1 ، 3 ، 9 ، 7 w بعد 1 ، 3 ، 9 ، 7 مرّة أخرى . الـ chiffres
يتعاودو كل أربعة . donc باش نعرفو le chiffre des unités de 3 puissance n ، نحسبو le reste de n par 4 . مثلا 175 égale 4 fois 43 plus 3 : le
chiffre des unités de 3 puissance 175 هو نفسو متاع 3 ، 27 au cube : يعني 7 .

Avec le tableur, on affiche n, 3 puissance n, et le chiffre des unités avec MOD de 10. On lit 1, 3, 9, 7, puis de nouveau 1, 3, 9, 7. Les chiffres se répètent tous les quatre. Pour connaître le chiffre des unités de 3 puissance n, on calcule donc le reste de n par 4. Par exemple, 175 égale 4 fois 43 plus 3 : le chiffre des unités de 3 puissance 175 est le même que celui de 3 au cube, 27 : c'est 7.

Sur un tableur, la colonne A affiche $n = 0, 1, 2, \ldots$, la colonne B les puissances 3^n, et la colonne C le chiffre des unités, donné par la formule $\mathrm{MOD}(B2; 10)$: le reste de la division euclidienne par 10.

On lit $1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, \ldots$ pour $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$: on **conjecture** que les chiffres des unités se répètent tous les 4. Le chiffre des unités de 3^n est alors celui de 3^r, où r est le **reste de n par 4**. (On peut l'expliquer : $3^4 = 81$ se termine par 1, et le chiffre des unités d'un produit ne dépend que des chiffres des unités des facteurs.)

reste de n par 4	0	1	2	3
chiffre des unités de 3^n	1	3	9	7

LE MOTIF 1, 3, 9, 7

$$3^0 = 1, \quad 3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81$$

EXEMPLE TRAITÉ

Quel est le chiffre des unités de 3^{41}, de 3^{175} et de 3^{1000} ?

3 puissance 41 — Comme 3^1 : le chiffre des unités est 3.

$41 = 4 \times 10 + 1$

3 puissance 175 — Comme $3^3 = 27$: le chiffre des unités est 7.

$175 = 4 \times 43 + 3$

3 puissance 1000 — Comme $3^0 = 1$: le chiffre des unités est 1.

$1000 = 4 \times 250$

$$3 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 1$$

À ne pas faire : Le chiffre des unités de 3^{175} est celui de 3^5, car 175 se termine par 5 — $175 = 4 \times 43 + 3$: c'est celui de 3^3, soit 7. Le motif se répète tous les 4 : c'est le reste par 4 qui compte, pas le chiffre des unités de l'exposant.

18. REMARQUE

Code-barre et nombres amiables

CE QU'IL DIT

Chwaya culture : le code-barre. El code fih 13 chiffres, w le chiffre elli fel e5er houwa la clé de contrôle. Nejm3ou les chiffres de rang impair, w nzidou trois fois la somme des chiffres de rang pair : lezem le résultat ykoun divisible par 10. W les nombres amiables : 220 w 284. La somme des diviseurs propres de 220 égale 284, w la somme mta3 284 égale 220. W Thabit Ibn Qurra, mathématicien 3arbi mel neuvième siècle, 3tana formule bech nal9aw o5rin.

les chiffres de rang impair نجمعو . la clé de contrôle هو اللي في الآخر chiffres ، w le chiffre 13 فيه code الـ . culture : le code-barre شويّة divisible par 10 . w les nombres amiables : 220 w 284 . la يكون le résultat لازم : trois fois la somme des chiffres de rang pair نزيدو ، w égale 220 . w Thabit Ibn Qurra ، mathématicien 284 متاع somme des diviseurs propres de 220 égale 284 ، w la somme عربي من الـ . neuvième siècle ، عطانا formule باش نلقاو أخرين

Un peu de culture : le code-barre. Le code compte 13 chiffres, et le dernier est la clé de contrôle. On additionne les chiffres de rang impair, et on ajoute trois fois la somme des chiffres de rang pair : le résultat doit être divisible par 10. Et les nombres amiables : 220 et 284. La somme des diviseurs propres de 220 vaut 284, et celle de 284 vaut 220. Thabit Ibn Qurra, mathématicien arabe du neuvième siècle, a donné une formule pour en trouver d'autres.

Le code-barre. Le code UPC d'un produit est formé de 13 chiffres : les douze premiers désignent le pays, le fabricant et le produit, le dernier est la **clé de contrôle**. Si on ajoute les sept chiffres de rang impair du code et le triple de la somme des chiffres de rang pair, le résultat doit être **divisible par 10**.

Les nombres amiables. Deux entiers sont amiables si la somme des diviseurs propres de chacun est égale à l'autre. Ainsi 220 et 284 : $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ et $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Dès le IXe siècle, le mathématicien arabe **Thabit Ibn Qurra** (836 – 901, Bagdad) énonce : si $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = (3 \times 2^n) - 1$ et $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ sont tous trois premiers, alors $a = 2^n \times p \times q$ et $b = 2^n \times r$ sont amiables. Pour $n = 2$: $p = 5$, $q = 11$, $r = 71$, et l'on retrouve 220 et 284. Pour $n = 4$ et $n = 7$, on obtient les couples découverts par Al Farissi, $(17296, 18416)$, et par Al Yazdi, $(9363584, 9437056)$.

THABIT IBN QURRA

$a = 2^n \times p \times q \quad ; \quad b = 2^n \times r$

EXEMPLE TRAITÉ

Les douze premiers chiffres d'un code-barre sont 619220260141. Déterminer la clé de contrôle k.

Les rangs impairs — Rangs $1, 3, 5, 7, 9, 11$ et 13 : $6, 9, 2, 2, 0, 4$ et la clé k.

$6 + 9 + 2 + 2 + 0 + 4 + k = 23 + k$

Les rangs pairs — Rangs $2, 4, \ldots, 12$: $1, 2, 0, 6, 1, 1$.

$3 \times (1 + 2 + 0 + 6 + 1 + 1) = 33$

Divisible par 10 —

$23 + k + 33 = 56 + k$

La clé — k est un chiffre et $56 + k$ doit se terminer par 0.

$56 + 4 = 60$

$$k = 4$$

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$: a dividende, b diviseur, q quotient, r reste ; le couple (q, r) est unique.
   > a égale b q plus r, w r bin zéro w b, b mouch dekhel. Le couple q, r wa7ed bark.
   > *a égale b q plus r, avec r compris entre zéro et b, b exclu. Le couple q, r est unique.*
2. n divise a : $a = kn$, autrement dit le reste de a par n est nul.
   > n divise a, ya3ni a égale k fois n, ya3ni le reste de a par n zéro.
   > *n divise a signifie que a égale k fois n, c'est-à-dire que le reste de a par n est nul.*
3. Si n divise x et y, alors n divise px, $x + y$ et $x - y$ (pour $x \geq y$).
   > Ken n divise x w y, n divise p fois x, x plus y w x moins y.
   > *Si n divise x et y, alors n divise p fois x, x plus y et x moins y.*
4. Par 2 et 5 : le chiffre des unités ; par 4 et 25 : les deux derniers chiffres ; par 8 : les trois derniers.
   > Par 2 w 5, le chiffre des unités ; par 4 w 25, les deux derniers chiffres ; par 8, les trois derniers.
   > *Pour 2 et 5, le chiffre des unités ; pour 4 et 25, les deux derniers chiffres ; pour 8, les trois derniers.*
5. Par 3 et 9 : la somme des chiffres, qui a le même reste que le nombre.
   > Par 3 w 9, la somme des chiffres, 3andha nafs le reste mta3 le nombre.
   > *Pour 3 et 9, la somme des chiffres, qui a le même reste que le nombre.*
6. Par 11 : $d = S_1 - S_2$, rangs comptés depuis les unités ; si $d \geq 0$, n et d ont le même reste.
   > Par 11, d égale S un moins S deux, w les rangs men limin. Ki d positif, n w d 3andhom nafs le reste.
   > *Pour 11, d égale S un moins S deux, avec les rangs comptés depuis la droite. Si d est positif ou nul, n et d ont le même reste.*
7. Si $d < 0$: le reste est $d + 11p$, avec p le plus petit entier qui rend $d + 11p \geq 0$.
   > Ki d négatif, nzidou 3lih le plus petit multiple de 11 elli yrajj3ou positif walla nul.
   > *Si d est négatif, on lui ajoute le plus petit multiple de 11 qui le rend positif ou nul.*
8. Pour une expression en n : on distingue les restes possibles de n.
   > Bech twarri 7aja l koll n, ta3mel cas l koll reste possible.
   > *Pour démontrer une propriété pour tout n, on traite un cas par reste possible.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : le reste dima asghar men le diviseur. Par 2, 5, 4, 25, 8, nchoufou les derniers chiffres ; par 3 w 9, la somme des chiffres ; w par 11, d égale S un moins S deux, w les rangs men limin. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : le reste ديما أصغر من 8 ، 25 ، 4 ، 5 ، 2 par . le diviseur نشوفو ، les derniers chiffres ؛ la somme ، 9 w 3 par
. exercices لـلـ يالله . اليمين من w par 11 ، d égale S un moins S deux ، w les rangs ؛ des chiffres

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : le reste est toujours plus petit que le diviseur. Pour 2, 5, 4, 25 et 8, on regarde les derniers chiffres ; pour 3 et 9, la somme des chiffres ; et pour 11, d égale S un moins S deux, avec les rangs comptés depuis la droite. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · LA DIVISION EUCLIDIENNE

c'est quoi la division euclidienne | chnowa la division euclidienne | division euclidienne ma3neha chnowa | définition de la division euclidienne

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a = bq + r \quad ; \quad 0 \leq r < b$$

CE QU'IL RÉPOND

La division euclidienne de a par b, w b mouch zéro, hiya ennek tal9a zouz entiers naturels q w r, elli a égale b q plus r, w r bin zéro w b, b mouch dekhel. q houwa le quotient w r houwa le reste. Mathalan 155 égale 17 fois 9 plus 2.

zéro w b ، b بين a égale b q plus r ، w r اللي ، entiers naturels q w r زوز تلقى إنّك هي ، zéro موش la division euclidienne de a par b ، w b
. égale 17 fois 9 plus 2 155 مثلا . le reste هو le quotient w r هو q . موش داخل

La division euclidienne de a par b, avec b non nul, consiste à trouver deux entiers naturels q et r tels que a égale b q plus r, avec r compris entre zéro et b, b exclu. q est le quotient et r le reste. Par exemple, 155 égale 17 fois 9 plus 2.

QUESTION 2 · LA DIVISION EUCLIDIENNE

pourquoi le reste doit être plus petit que le diviseur | 3lech le reste lezem asghar mel diviseur | le reste peut il être plus grand que le diviseur | reste akbar mel diviseur ynajjem

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$155 = 17 \times 9 + 2$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater ken le reste akbar walla ysewi le diviseur, tnajjem tna77i menou le diviseur marra o5ra, w le quotient yzid b wa7ed. Mathalan 155 égale 17 fois 8 plus 19 : 19 fih 17, donc 155 égale 17 fois 9 plus 2. Ech-chart r asghar men b houwa elli y5alli le couple q, r wa7ed bark.

égale 17 fois 8 plus 19 155 مثلا . يزيد بواحد w le quotient ، مرّة أخرى le diviseur منو تنجّم تنحّي ، le diviseur أكبر ولّا يساوي le reste خاطر كان
19 : فيه 17 ، 2 plus 9 fois 17 égale 155 donc . الشرط r أصغر من b هو اللي يخلّي r ، le couple q واحد برك .

Parce que si le reste est supérieur ou égal au diviseur, on peut encore en retirer le diviseur une fois, et le quotient augmente de un. Par exemple, 155 égale 17 fois 8 plus 19 : 19 contient 17, donc 155 égale 17 fois 9 plus 2. C'est la condition r plus petit que b qui rend le couple q, r unique.

QUESTION 3 · LA DIVISION EUCLIDIENNE

c'est quoi le dividende | chnowa le dividende w le diviseur | dividende et diviseur différence | le dividende houwa chkoun

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$327 = 54 \times 6 + 3$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi a égale b q plus r : a houwa le dividende, el nombre elli ndiviser fih. b houwa le diviseur, elli ndiviser 3lih. q le quotient w r le reste. Mathalan fi 327 égale 54 fois 6 plus 3 : le dividende 327 w le diviseur 54.

في a égale b q plus r : a هو le dividende ، الـ nombre اللي نـ diviser فيه . b هو le diviseur ، اللي نـ diviser عليه . q le quotient w r le reste . مثلا في 327 54 le diviseur w le dividende 327 : 6 plus 3 fois 54 égale .

Dans a égale b q plus r : a est le dividende, le nombre que l'on divise. b est le diviseur, le nombre par lequel on divise. q est le quotient et r le reste. Par exemple, dans 327 égale 54 fois 6 plus 3 : le dividende est 327 et le diviseur 54.

QUESTION 4 · LA DIVISION EUCLIDIENNE

pourquoi on ne peut pas diviser par zéro | 3lech ma najjmouch ndiviser par 0 | division euclidienne par zero possible | un diviseur nul c'est permis

CE QU'IL RÉPOND

El définition t9oul b différent de zéro. Ken b égale zéro, a égale zéro fois q plus r ya3ti r égale a, w ech-chart r asghar men b ywalli r asghar men zéro : mosta7il. Donc ma fammech division euclidienne par zéro.

الـ définition تقول b différent de zéro . كان r égale a ، w يعطي b égale zéro ، a égale zéro fois q plus r الشرط r أصغر من b يولّي r أصغر . donc ما فمّاش division euclidienne par zéro . مستحيل : zéro من

La définition exige b différent de zéro. Si b était nul, a égale zéro fois q plus r donnerait r égale a, et la condition r plus petit que b deviendrait r plus petit que zéro : impossible. Il n'y a donc pas de division euclidienne par zéro.

QUESTION 5 · LA DIVISION EUCLIDIENNE

le quotient peut il être zéro | quotient nul possible | ki a asghar men b le quotient zero | quotient 0 quand le dividende est plus petit

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$3 = 20 \times 0 + 3$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih. Ki le dividende asghar men le diviseur, le quotient zéro w le reste houwa le dividende bidou. Mathalan 3 égale 20 fois 0 plus 3 : la division de 3 par 20 ta3ti quotient zéro w reste 3.

إيه . كي le dividende أصغر من le quotient zéro w le reste ، le diviseur هو le dividende بيدو . مثلا 3 3 الـ division de : égale 20 fois 0 plus 3 par 20 تعطي 3 quotient zéro w reste .

Oui. Quand le dividende est plus petit que le diviseur, le quotient est zéro et le reste est le dividende lui-même. Par exemple, 3 égale 20 fois 0 plus 3 : la division de 3 par 20 donne un quotient nul et un reste égal à 3.

QUESTION 6 · LE QUOTIENT ET LE RESTE À LA CALCULATRICE

comment trouver le reste avec la calculatrice | kifech nal9a le reste bel calculatrice | la calculatrice ne donne pas le reste | calculatrice w division euclidienne

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$r = 327 - 54 \times 6 = 3$$

CE QU'IL RÉPOND

El calculatrice ta3tik a sur b bel virgule. La partie entière hiya le quotient q. W ba3d ta7seb le reste wa7dek : r égale a moins b fois q. Mathalan 327 sur 54 ta3ti 6,05, donc q égale 6 w r égale 327 moins 324, 3.

الـ calculatrice تعطيك a sur b بالـ la partie entière . هي virgule . w le quotient q بعد تحسب le reste وحدك : r égale a moins b fois q . مثلا 327 sur 54 تعطي 3 ، 324 r égale 327 moins 6 w q égale donc ، cinq zéro virgule six .

La calculatrice donne a sur b avec une virgule. La partie entière est le quotient q. Ensuite on calcule soi-même le reste : r égale a moins b fois q. Par exemple, 327 sur 54 donne 6,05, donc q égale 6 et r égale 327 moins 324, soit 3.

QUESTION 7 · LE QUOTIENT ET LE RESTE À LA CALCULATRICE

les chiffres après la virgule c'est le reste | el chiffres ba3d el virgule houma le reste | la partie décimale est elle le reste | 0,0555 après la virgule houwa le reste

CE QU'IL RÉPOND

La. El chiffres ba3d el virgule mouch le reste. La partie décimale hiya le reste sur le diviseur : fi 327 sur 54, 0,055 hiya 3 sur 54. Le reste lezem entier naturel, ta7sbou b r égale a moins b fois q.

لا . الـ chiffres بعد الـ virgule موش الـ partie décimale . le reste هي le reste sur le diviseur : في 327 sur 54 ، zéro virgule zéro cinq cinq هي 3 le reste . sur 54 لازم entier naturel ، تحسبو بـ q fois b moins a égale r .

Non. Les chiffres après la virgule ne sont pas le reste. La partie décimale, c'est le reste divisé par le diviseur : dans 327 sur 54, 0,055 vaut 3 sur 54. Le reste est un entier naturel, qu'on calcule par r égale a moins b fois q.

QUESTION 8 · QUEL JOUR SERONS-NOUS ?

quel jour serons nous après 100 jours | kifech na3ref ennhar ba3d barcha ayyem | trouver le jour de la semaine | semaine w division euclidienne

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$100 = 7 \times 14 + 2$$

CE QU'IL RÉPOND

La semaine fiha sab3a ayyem, donc na7sbou le reste par 7. Mathalan ba3d 100 nhar : 100 égale 7 fois 14 plus 2, 14 semaines kemlin yrajj3ouna l nafs ennhar, w ba3d nharin zeydin. Ken lyoum el thnin, bech nkounou el arb3a.

la semaine فيها سبعة أيّام ، donc نحسبو le reste par 7 . مثلا بعد 100 نهار : 100 égale 7 fois 14 plus 2 ، 14 semaines كاملين يرجّعونا لنفس النهار ، w بعد نهارين زايدين . كان اليوم الاثنين ، باش نكونو الأربعاء .

Une semaine compte sept jours, donc on calcule le reste par 7. Par exemple, après 100 jours : 100 égale 7 fois 14 plus 2. 14 semaines complètes ramènent au même jour, puis deux jours de plus. Si aujourd'hui c'est lundi, nous serons mercredi.

QUESTION 9 · DES FLÈCHES QUI SE RÉPÈTENT

je ne comprends pas la figure des flèches | el flèches mta3 527 w 530 kifech | pourquoi diviser par 6 pour les flèches | la figure des fleches se repete

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$527 = 6 \times 87 + 5$$

CE QU'IL RÉPOND

El dessin yet3awed koll six nombres : men 6 l 12 nafs el flèches elli men 0 l 6. Donc koll entier, blastou hiya blasset le reste mte3ou par 6. 527 égale 6 fois 87 plus 5 : 527 kif 5, louta, w 528 kif 0, el fou9.

الـ dessin يتعاود كل six nombres : من 6 لـ 12 نفس الـ flèches اللي من 0 لـ 6 . donc كل entier ، بلاصتو هي بلاصة le reste متاعو 527 par 6 . 527 égale 6 fois 87 plus 5 : كيف 5 ، لوطة ، 528 w كيف 0 ، الفوق .

Le dessin se répète tous les six nombres : de 6 à 12, ce sont les mêmes flèches que de 0 à 6. Chaque entier est donc placé comme son reste par 6. 527 égale 6 fois 87 plus 5 : 527 est placé comme 5, en bas, et 528 comme 0, en haut.

QUESTION 10 · DIVISIBILITÉ : SOMME ET DIFFÉRENCE

le reste égal à zéro ça veut dire quoi | reste nul ya3ni chnowa | ki le reste zero | reste 0 ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$252 = 14 \times 18$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki le reste égale zéro, a égale b fois q : ya3ni b divise a, w a multiple de b, w a divisible par b. El arba3a jomal hedhouma y9oulou nafs el 7aja. Mathalan 252 égale 14 fois 18 : 14 divise 252.

كي a égale b fois q ، le reste égale zéro : يعني a divisible par b ، w a multiple de b ، b divise a . الأربعة جمل هاذوما يقولو نفس الحاجة .
مثلا 252 égale 14 fois 18 : 14 divise 252 .

Quand le reste est zéro, a égale b fois q : cela veut dire que b divise a, que a est un multiple de b, et que a est divisible par b. Ces phrases disent toutes la même chose. Par exemple, 252 égale 14 fois 18 : 14 divise 252.

QUESTION 11 · DIVISIBILITÉ : SOMME ET DIFFÉRENCE

quelle est la différence entre diviseur et multiple | far9 bin diviseur w multiple | multiple ou diviseur je confonds | a multiple de n ya3ni n diviseur de a

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$21 = 3 \times 7$$

CE QU'IL RÉPOND

Houma zouz wjouh l nafs el 7aja. Ken a égale k fois n, n9oulou n diviseur de a, w a multiple de n. En général, le diviseur houwa es-sghir, w le multiple houwa el kbir — ken 0 la, 0 multiple de koll entier. Mathalan 7 diviseur de 21, w 21 multiple de 7.

هوما زوز وجوه لنفس الحاجة . كان a égale k fois n ، نقولو le diviseur ، en général . w a multiple de n ، n diviseur de a ، هو الصغير w le multiple هو الكبير — كان 0 لا ، 0 multiple de كل entier . مثلا 7 multiple de 21 ، w 21 diviseur de 7 .

Ce sont deux façons de dire la même chose. Si a égale k fois n, on dit que n est un diviseur de a, et que a est un multiple de n. En général, le diviseur est le plus petit des deux, et le multiple le plus grand — sauf pour 0, qui est un multiple de tous les entiers. Par exemple, 7 est un diviseur de 21, et 21 est un multiple de 7.

QUESTION 12 · DIVISIBILITÉ : SOMME ET DIFFÉRENCE

si n divise x et y est ce qu'il divise la somme | n divise x plus y | n divise la différence x moins y | ydivisi x w y ydivisi el somme

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x + y = (k + k')n$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih : ken n divise x w n divise y, alors n divise x plus y, w n divise x moins y ki x akbar walla ysewi y. 5ater x égale k n w y égale k prime n. Ama rodd belek, el 3aks ghalet : 6 divise 2 plus 4, ama 6 ne divise ni 2 ni 4.

إيه : كان y n divise x moins y ، w n divise y ، alors n divise x plus y ، n divise x w كي x أكبر ولّا يساوي y . خاطر x égale k n w y égale k prime n .
أما رد بالك ، العكس غالط : 6 divise 2 plus 4 ، أما 6 ne divise ni 2 ni 4 .

Oui : si n divise x et n divise y, alors n divise x plus y, et n divise x moins y quand x est supérieur ou égal à y. En effet, x égale k n et y égale k prime n. Mais attention, la réciproque est fausse : 6 divise 2 plus 4, mais 6 ne divise ni 2 ni 4.

QUESTION 13 · RAPPELS : PGCD, PPCM, PREMIERS ENTRE EUX

c'est quoi premiers entre eux | premiers entre eux chnowa | comment montrer que deux nombres sont premiers entre eux | kifech nwarri premiers entre eux

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\mathrm{PGCD}(328, 299) = 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz entiers premiers entre eux ki le seul diviseur commun mte3hom houwa 1, ya3ni le PGCD égale 1. Bech twarriha, tnajjem ta7seb le PGCD, walla testa3mel elli diviseur commun divise la différence : 328 w 299, koll diviseur commun divise 29, w 29 ne divise pas 328.

زوز entiers premiers entre eux كي le seul diviseur commun متاعهم هو 1 ، يعني le PGCD égale 1 . باش تورّيها ، تنجّم تحسب le PGCD ، ولّا تستعمل اللي 328 w 299 diviseur commun divise la différence ، كل 328 ne divise pas 29 ، w 29 diviseur commun divise .

Deux entiers sont premiers entre eux quand leur seul diviseur commun est 1, c'est-à-dire quand leur PGCD vaut 1. Pour le montrer, on peut calculer le PGCD, ou utiliser qu'un diviseur commun divise la différence : pour 328 et 299, tout diviseur commun divise 29, et 29 ne

divise pas 328.

QUESTION 14 · RAPPELS : PGCD, PPCM, PREMIERS ENTRE EUX

comment calculer le pgcd et le ppcm | kifech na7seb pgcd w ppcm | pgcd ppcm rappel | la différence entre pgcd et ppcm

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \quad ; \quad 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

CE QU'IL RÉPOND

Nfakkou koll nombre en produit de facteurs premiers. Le PGCD : les facteurs communs bark, koll wa7ed b a9al exposant. Le PPCM : les facteurs el koll, koll wa7ed b akbar exposant. Mathalan 252 w 600 : le PGCD 12 w le PPCM 12600. W dima le PGCD fois le PPCM égale le produit des deux nombres.

نفكّكو كل nombre en produit de facteurs premiers . برك ، كل واحد بأقل exposant . le PPCM : les facteurs communs . le PGCD : les facteurs الكل ، كل واحد بأكبر exposant . مثلا 252 w 600 : le PGCD 12 w le PPCM 12600 . ديما le PGCD fois le PPCM égale le produit des deux nombres .

On décompose chaque nombre en produit de facteurs premiers. Le PGCD : seulement les facteurs communs, chacun avec le plus petit exposant. Le PPCM : tous les facteurs, chacun avec le plus grand exposant. Par exemple, pour 252 et 600 : le PGCD vaut 12 et le PPCM 12600. Et le PGCD fois le PPCM est toujours égal au produit des deux nombres.

QUESTION 15 · DIVISIBILITÉ PAR 2 ET PAR 5

critère de divisibilité par 2 | kifech na3ref nombre divisible par 5 | un nombre divisible par cinq | divisible par deux ya3ni chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$n = 10q + u$

CE QU'IL RÉPOND

Par 2 w par 5, nchoufou le chiffre des unités bark, 5ater 10 égale 2 fois 5. Divisible par 2 ken le chiffre des unités pair : 0, 2, 4, 6 walla 8. Divisible par 5 ken le chiffre des unités 0 walla 5. W le reste par 2 walla par 5 houwa le reste mta3 le chiffre des unités.

نشوفو ، par 2 w par 5 le chiffre des unités برك ، خاطر 10 divisible par 2 . كان égale 2 fois 5 ، 6 ، 4 ، 2 ، 0 : le chiffre des unités pair ولّا 8 . ولّا 5 le chiffre des unités 0 كان divisible par 5 . ولّا 5 le reste par 2 w le chiffre des unités متاع le reste هو par 5 .

Pour 2 et pour 5, on regarde seulement le chiffre des unités, car 10 égale 2 fois 5. Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair : 0, 2, 4, 6 ou 8. Il est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5. Et le reste par 2 ou par 5 est le reste du chiffre des unités.

QUESTION 16 · DIVISIBILITÉ PAR 4 ET PAR 25

critère de divisibilité par 4 | kifech na3ref nombre divisible par 25 | divisible par quatre deux derniers chiffres | divisibilité par 4 et par 25

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$n = 100a + b$

CE QU'IL RÉPOND

Par 4 w par 25, nchoufou le nombre formé par les deux derniers chiffres, 5ater 100 égale 4 fois 25. Mathalan 27960 : 60 égale 4 fois 15, donc divisible par 4. Ama par 25, 60 ya3ti le reste 10. Rodd belek : par 4, mouch yekfi elli le chiffre des unités pair.

نشوفو ، par 4 w par 25 le nombre formé par les deux derniers chiffres ، خاطر 100 égale 4 fois 25 . مثلا 27960 : 60 égale 4 fois 15 ، donc divisible par 4 . أما 60 ، 25 par يعطي le reste 10 . رد بالك : 4 par ، موش يكفي اللي le chiffre des unités pair .

Pour 4 et pour 25, on regarde le nombre formé par les deux derniers chiffres, car 100 égale 4 fois 25. Par exemple, pour 27960 : 60 égale 4 fois 15, donc il est divisible par 4. Mais par 25, 60 donne un reste de 10. Attention : pour 4, il ne suffit pas que le chiffre des unités soit pair.

QUESTION 17 · DIVISIBILITÉ PAR 8

critère de divisibilité par 8 | kifech na3ref nombre divisible par 8 | pourquoi trois derniers chiffres pour 8 | divisible par huit

---

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1000 = 8 \times 125$$

CE QU'IL RÉPOND

Par 8, nchoufou le nombre formé par les trois derniers chiffres. 5ater 100 mouch multiple de 8, ama 1000 égale 8 fois 125. Mathalan 2613 : 613 égale 8 fois 76 plus 5, donc le reste par 8 houwa 5. W el critère hedha l les entiers elli akbar walla ysewiw 100.

نشوفو le nombre formé par les trois derniers chiffres . خاطر 100 موش multiple de 8 ، أما 1000 égale 8 fois 125 . مثلا 2613 : 613 égale 8 fois 76 plus 5 ، donc le reste par 8 هو 5 . w الـ critère هذا لـ les entiers اللي أكبر ولّا يساويو 100 .

Pour 8, on regarde le nombre formé par les trois derniers chiffres. En effet, 100 n'est pas un multiple de 8, mais 1000 égale 8 fois 125. Par exemple, pour 2613 : 613 égale 8 fois 76 plus 5, donc le reste par 8 est 5. Ce critère s'applique aux entiers supérieurs ou égaux à 100.

QUESTION 18 · DIVISIBILITÉ PAR 3 ET PAR 9

critère de divisibilité par 3 | kifech na3ref nombre divisible par 9 | divisibilité par neuf somme des chiffres | un nombre divisible par trois

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$n - S = 999a + 99b + 9c$$

CE QU'IL RÉPOND

Par 3 w par 9, nejm3ou les chiffres. Un entier divisible par 3, walla par 9, ken la somme des chiffres divisible par 3, walla par 9. W le reste houwa le reste mta3 la somme. Mathalan 2851961 : la somme 32, w 32 égale 9 fois 3 plus 5, donc le reste par 9 houwa 5.

par 9 . w le reste وﻷا ، la somme des chiffres divisible par 3 كان ، par 9 وﻷا ، les chiffres . un entier divisible par 3 نجمعو ، par 3 w par 9 هو le reste متاع la somme . مثلا 2851961 : 9 par reste le donc ، 5 plus 3 fois 9 égale 32 ، w 32 la somme 5 هو .

Pour 3 et pour 9, on additionne les chiffres. Un entier est divisible par 3, ou par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 3, ou par 9. Et le reste est celui de la somme. Par exemple, pour 2851961 : la somme vaut 32, et 32 égale 9 fois 3 plus 5, donc le reste par 9 est 5.

QUESTION 19 · DIVISIBILITÉ PAR 3 ET PAR 9

multiple de 3 donc multiple de 9 | divisible par 3 w 9 kifkif | un multiple de 9 est il multiple de 3 | trois et neuf même chose

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$2 + 3 + 2 + 5 = 12$$

CE QU'IL RÉPOND

La, mouch kif kif. Divisible par 9 ya3ti divisible par 3, 5ater 9 égale 3 fois 3. Ama el 3aks ghalet : 2325, la somme des chiffres 12 : divisible par 3, ama mouch par 9.

لا ، موش كيف كيف . 9 par divisible يعطي 3 divisible par ، خاطر 9 égale 3 fois . أما العكس غالط : 2325 ، la somme des chiffres 12 : 3 divisible par ، أما موش par 9 .

Non, ce n'est pas pareil. Divisible par 9 entraîne divisible par 3, car 9 égale 3 fois 3. Mais l'inverse est faux : pour 2325, la somme des chiffres vaut 12 : il est divisible par 3, mais pas par 9.

QUESTION 20 · DIVISIBILITÉ PAR 3 ET PAR 9

le reste par 9 c'est la somme des chiffres | reste par 9 houwa la somme des chiffres | la somme des chiffres donne le reste | somme des chiffres akbar men 9 chnowa na3mel

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 + 3 + 5 + 9 = 18 = 9 \times 2$$

CE QU'IL RÉPOND

Mouch dima. Le nombre w la somme des chiffres 3andhom nafs le reste, ama ki la somme akbar men 9, lezem ta7seb le reste mte3ha hiya zeda. Mathalan 1359 : la somme 18, w 18 égale 9 fois 2 : le reste zéro, mouch 18.

موش ديما . le nombre w la somme des chiffres عندهم نفس le reste ، أما كي la somme أكبر من 9 ، لازم تحسب le reste متاعها هي زادة . مثلا 1359 : le reste zéro : 2 fois 9 égale 18 ، w 18 ، la somme 18 ، موش 18 .

Pas toujours. Le nombre et la somme de ses chiffres ont le même reste, mais quand la somme dépasse 9, il faut calculer à son tour son reste. Par exemple, pour 1359 : la somme vaut 18, et 18 égale 9 fois 2 : le reste est zéro, pas 18.

QUESTION 21 · DIVISIBILITÉ PAR 11

critère de divisibilité par 11 | kifech na3ref nombre divisible par 11 | divisible par onze comment | reste de la division par 11

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$d = S_1 - S_2$$

CE QU'IL RÉPOND

N3addou les rangs men limin : le chiffre des unités rang un. S un la somme des chiffres de rang impair, S deux la somme des chiffres de rang pair, w d égale S un moins S deux. Ki d positif walla nul, n w d 3andhom nafs le reste par 11. Ki d négatif, nzidou 3lih a9al multiple de 11 elli yrajj3ou positif walla nul. Mathalan 2731 : d égale 8 moins 5, 3.

نعدّو les rangs من اليمين : le chiffre des unités rang un . S un la somme des chiffres de rang impair ، S deux la somme des chiffres de rang pair . w d égale S un moins S deux . كي d positif ولّا w n ، nul عندهم نفس le reste par 11 . كي d négatif ، نزيدو عليه أقل multiple de 11 اللي يرجّعو positif ولّا nul . مثلا 2731 : 3 ، 5 moins 8 égale d .

On compte les rangs depuis la droite : le chiffre des unités est de rang un. S un est la somme des chiffres de rang impair, S deux celle des chiffres de rang pair, et d égale S un moins S deux. Si d est positif ou nul, n et d ont le même reste par 11. Si d est négatif, on lui ajoute le plus petit multiple de 11 qui le rend positif ou nul. Par exemple, pour 2731 : d égale 8 moins 5, soit 3.

QUESTION 22 · DIVISIBILITÉ PAR 11

les rangs on compte de droite ou de gauche | rang impair ya3ni chnowa | rang pair et rang impair | kifech na3ref el rang

CE QU'IL RÉPOND

El rangs n3addouhom men limin l lisar : le chiffre des unités rang un, les dizaines rang deux, les centaines rang trois, w hakka. Mathalan fi 2731 : 1 rang un, 3 rang deux, 7 rang trois, w 2 rang quatre. Ken t3add men lisar, tnajjem toghlot fi le signe de d.

الـ rangs نعدّوهم من اليمين لليسار : le chiffre des unités rang un ، les dizaines rang deux ، les centaines rang trois ، w هكّا . مثلا في 2731 : 1 rang quatre 2 ، w rang trois 7 ، rang deux 3 ، rang un . كان تعدّ من اليسار ، تنجّم تغلط في le signe de d .

Les rangs se comptent de droite à gauche : le chiffre des unités est de rang un, les dizaines de rang deux, les centaines de rang trois, et ainsi de suite. Par exemple, dans 2731 : 1 est de rang un, 3 de rang deux, 7 de rang trois et 2 de rang quatre. En comptant depuis la gauche, on risque de se tromper sur le signe de d.

QUESTION 23 · DIVISIBILITÉ PAR 11 : QUAND D EST NÉGATIF

si d est négatif qu'est ce qu'on fait | d négatif chnowa na3mel | S1 moins S2 négatif | le reste ne peut pas être négatif alors

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$-14 + 22 = 8$$

CE QU'IL RÉPOND

Nzidou 3la d le plus petit multiple de 11 elli yrajj3ou positif walla nul, w hedheka houwa le reste. Mathalan 8291 : d égale 3 moins 17, moins 14. Nzidou 22, nal9aw 8 : le reste 8. Rodd belek, le reste 3omrou ma ykoun négatif.

نزيدو على 11 le plus petit multiple d اللي يرجّعو positif ولّا w ، nul هذاكا هو le reste . مثلا 8291 : moins 14 ، d égale 3 moins 17 . نزيدو 22 ، نلقاو le reste 8 : 8 . رد بالك ، le reste عمرو ما يكون négatif .

On ajoute à d le plus petit multiple de 11 qui le rend positif ou nul, et c'est le reste. Par exemple, pour 8291 : d égale 3 moins 17, soit moins 14. On ajoute 22 et on trouve 8 : le reste est 8. Attention, un reste n'est jamais négatif.

QUESTION 24 · TROUVER UN CHIFFRE INCONNU

comment trouver un chiffre inconnu | kifech nal9a el chiffre elli ma na3rfouhch | chiffre manquant divisible | trouver le chiffre a pour que le nombre soit divisible

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$0 \leq a \leq 9$

CE QU'IL RÉPOND

Tekteb le critère bel chiffre elli ma ta3refouch, w ba3d testa3mel elli chiffre dima bin 0 w 9. Mathalan 73a2 divisible par 9 : 12 plus a lezem multiple de 9, w bin 12 w 21 ma famma ken 18. Ki famma zouz chiffres, abda b le critère elli fih chiffre wa7ed.

تكتب le critère بالـ chiffre اللي ما تعرفوش ، w بعد تستعمل اللي chiffre ديما بين 0 w 9 . مثلا 73a2 divisible par 9 : 12 plus a لازم multiple de
w ، 9 بين 12 w 21 ما فمّا كان 18 . كي فمّا زوز chiffres ، ابدا بـ le critère اللي فيه chiffre واحد .

On écrit le critère avec le chiffre inconnu, puis on utilise qu'un chiffre est toujours entre 0 et 9. Par exemple, pour que 73a2 soit divisible par 9 : 12 plus a doit être un multiple de 9, et entre 12 et 21 il n'y a que 18. Avec deux chiffres inconnus, on commence par le critère qui n'en fait intervenir qu'un.

QUESTION 25 · RAISONNER SUR LES RESTES POSSIBLES

comment montrer que c'est divisible par 3 pour tout n | kifech nwarri divisible par 3 l koll n | les restes possibles de n par 3 | pourquoi faire trois cas 3k 3k+1 3k+2

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$n = 3k \quad ; \quad n = 3k+1 \quad ; \quad n = 3k+2$

CE QU'IL RÉPOND

Ma tnajjemch tjarreb les entiers el koll, ama le reste de n par 3 ya zéro ya un ya deux. Donc ta3mel trois cas : n égale 3 k, 3 k plus 1, w 3 k plus 2, w fi koll cas twarri elli l'expression divisible par 3. Ki tjarreb amthla bark, ma warrit chay.

ما تنجّمش تجرّب les entiers الكل ، أما le reste de n par 3 يا zéro يا un يا deux . donc تعمل trois cas : n égale 3 k ، 3 k plus 1 ، w 3 k plus 2
w في كل cas تورّي اللي l'expression divisible par 3 . كي تجرّب أمثلة برك ، ما ورّيت شي .

On ne peut pas essayer tous les entiers, mais le reste de n par 3 vaut zéro, un ou deux. On traite donc trois cas : n égale 3 k, 3 k plus 1, et 3 k plus 2, et dans chaque cas on montre que l'expression est divisible par 3. Essayer quelques exemples ne démontre rien.

QUESTION 26 · LE CHIFFRE DES UNITÉS DE 3 PUISSANCE N

chiffre des unités de 3 puissance n | kifech nal9a le chiffre des unités mta3 puissance | le chiffre des unités d'une grande puissance | unités de 3 puissance 2006

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$2006 = 4 \times 501 + 2$

CE QU'IL RÉPOND

El chiffres des unités de 3 puissance n yet3awdou koll arba3a : 1, 3, 9, 7. Donc ta7seb le reste de l'exposant par 4. Mathalan 2006 égale 4 fois 501 plus 2 : le chiffre des unités de 3 puissance 2006 houwa mta3 3 au carré, 9.

مثلا 2006 égale 4 fois . le reste de l'exposant par 4 تحسب donc . 7 ، 9 ، 3 ، 1 : يتعاودو كل أربعة chiffres des unités de 3 puissance n الـ
. au carré ، 9 هو متاع 3 501 plus 2 : le chiffre des unités de 3 puissance 2006

Les chiffres des unités de 3 puissance n se répètent tous les quatre : 1, 3, 9, 7. On calcule donc le reste de l'exposant par 4. Par exemple, 2006 égale 4 fois 501 plus 2 : le chiffre des unités de 3 puissance 2006 est celui de 3 au carré, soit 9.

QUESTION 27 · CODE-BARRE ET NOMBRES AMIABLES

comment calculer la clé du code barre | code barre kifech yekhdem | la clé de contrôle d'un code-barre | code barres et divisibilité par 10

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$56 + k = 60$

CE QU'IL RÉPOND

El code fih 13 chiffres. Nejm3ou les chiffres de rang impair, w nzidou trois fois la somme des chiffres de rang pair, w lezem el koll ykoun divisible par 10. Mathalan 619220260141 : 23 plus k plus 33, ya3ni 56 plus k, donc la clé k égale 4.

الـ code فيه 13 chiffres . نجمعو les chiffres de rang impair ، w نزيدو trois fois la somme des chiffres de rang pair ، w لازم الكل يكون divisible par 10 . مثلا 619220260141 : 23 plus k plus 33 ، يعني 56 plus k ، donc la clé k égale 4 .

Le code compte 13 chiffres. On additionne les chiffres de rang impair, on ajoute trois fois la somme des chiffres de rang pair, et le total doit être divisible par 10. Par exemple, pour 619220260141 : 23 plus k plus 33, soit 56 plus k, donc la clé k vaut 4.

QUESTION 28 · CODE-BARRE ET NOMBRES AMIABLES

c'est quoi des nombres amiables | nombres amiables chnowa | 220 et 284 amiables pourquoi | thabit ibn qurra amiables

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz nombres amiables ki la somme des diviseurs propres mta3 koll wa7ed tsewi el e5er. 220 : 1 plus 2 plus 4, w hakka l 110, égale 284. W 284 : 1 plus 2 plus 4 plus 71 plus 142 égale 220. W Thabit Ibn Qurra, mel neuvième siècle, 3tana formule bech nal9aw azwej o5rin.

زوز nombres amiables كي la somme des diviseurs propres متاع كل واحد تساوي الآخر . 220 : 1 plus 2 plus 4 ، w هكّا لـ 110 ، égale 284 . w 284 : 1 plus 2 plus 4 plus 71 plus 142 égale 220 . w Thabit Ibn Qurra من الـ neuvième siècle ، عطانا formule باش نلقاو أزواج أخرين .

Deux nombres sont amiables quand la somme des diviseurs propres de chacun est égale à l'autre. Pour 220 : 1 plus 2 plus 4, et ainsi de suite jusqu'à 110, égale 284. Et pour 284 : 1 plus 2 plus 4 plus 71 plus 142 égale 220. Thabit Ibn Qurra, au neuvième siècle, a donné une formule pour trouver d'autres couples.

QUESTION 29 · DU LAIT, DE L'HUILE ET DU PÉTROLE

je ne comprends pas le problème du lait et du pétrole | problème el 7lib w ezzit kifech | pourquoi multiple de 9 pour les récipients | le récipient vide comment le trouver

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$140 = 9 \times 15 + 5$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken ezzit h litres, el 7lib deux fois h w le pétrole six fois h : el koll neuf fois h, multiple de 9. El récipients el koll 140 litres, w 140 égale 9 fois 15 plus 5 : donc le récipient el fergh 3andou le reste 5 par 9. Ma famma ken 23.

كان الزيت h litres ، الحليب six fois h w le pétrole deux fois h : الكل multiple de 9 ، neuf fois h . الـ récipients الكل 140 égale 140 litres ، w donc le récipient : 9 fois 15 plus 5 . الفارغ عندو le reste 5 par 9 . ما فمّا كان 23 .

Avec h litres d'huile, il y a deux fois h litres de lait et six fois h de pétrole : en tout neuf fois h, un multiple de 9. Les récipients font 140 litres en tout, et 140 égale 9 fois 15 plus 5 : le récipient vide a donc un reste de 5 par 9. Il n'y a que 23.

QUESTION 30 · LES PUISSANCES DE 10 ET LE NOMBRE 11

pourquoi 10 puissance 4 moins 1 est divisible par 11 | puissances de 10 et 11 | pourquoi 1001 divisible par 11 | les puissances de dix w 11

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$99 = 11 \times 9 \quad ; \quad 1001 = 11 \times 91$$

CE QU'IL RÉPOND

10 au carré moins 1 égale 99, ya3ni 11 fois 9, w 10 au cube plus 1 égale 1001, ya3ni 11 fois 91. W men houni : 10 puissance un nombre pair moins 1, w 10 puissance un nombre impair plus 1, el koll divisible par 11. Hedhi hiya es-sbab mta3 le critère de 11.

من هنا : 10 puissance un nombre fois 91 . w 11 يعني ، fois 9 ، w 10 au cube plus 1 égale 1001 11 يعني ، au carré moins 1 égale 99 10 . le critère de 11 متاع السبب هي هاذي . divisible par 11 الكل ، pair moins 1 ، w 10 puissance un nombre impair plus 1

10 au carré moins 1 égale 99, soit 11 fois 9, et 10 au cube plus 1 égale 1001, soit 11 fois 91. On en déduit que 10 puissance un nombre pair moins 1, et 10 puissance un nombre impair plus 1, sont tous divisibles par 11. C'est ce qui explique le critère de 11.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE Le reste à la calculatrice

Un élève a obtenu sur sa calculatrice $327 \div 54 = 6{,}055555556$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 327 par 54.

Donne seulement le reste.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quotient est la partie entière du résultat affiché.
2. Calcule $327 - 54 \times q$ avec ce quotient.

CORRECTION

Le quotient —

$q = 6$

Le reste —

$r = 327 - 54 \times 6 = 327 - 324 = 3$

$0 \leq 3 < 54$: le reste est 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.055555556` / `555555556` → Les chiffres après la virgule ne sont pas le reste : on calcule $r = a - bq$.

EXERCICE 2 · BASE Un reste trop grand

L'égalité $155 = 17 \times 8 + 19$ ne traduit pas une division euclidienne. Quel est le reste de la division euclidienne de 155 par 17 ?

Donne seulement le reste.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le reste doit être strictement inférieur à 17 : or $19 \geq 17$.
2. 19 contient encore une fois 17 : on peut le retirer une fois de plus.

CORRECTION

Retirer 17 —

$19 = 17 + 2$

Réécrire —

$155 = 17 \times 8 + 17 + 2 = 17 \times 9 + 2$

Le quotient est 9 et le reste est 2, car $0 \leq 2 < 17$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`19` → 19 est plus grand que le diviseur 17 : ce ne peut pas être le reste.

EXERCICE 3 · BASE Quel jour serons-nous ?

Aujourd'hui, c'est lundi. Quel jour de la semaine serons-nous après 123 jours ?

Écris le jour, par exemple « mardi ».

Réponse attendue : `vendredi` — aussi acceptées : le vendredi · c'est vendredi · on sera vendredi · nous serons vendredi · jem3a · el jem3a · ljem3a · nhar el jem3a · nhar jem3a · jemaa · el jemaa · نهار الجمعة · الجمعة

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une semaine compte 7 jours : cherche le reste de 123 par 7.
2. $7 \times 17 = 119$: combien de jours restent-ils après 17 semaines ?

CORRECTION

Les semaines —

$123 = 7 \times 17 + 4$

Avancer de 4 jours — 17 semaines ramènent au lundi ; puis mardi, mercredi, jeudi, vendredi.

Après 123 jours, nous serons vendredi.

PIÈGES ANTICIPÉS

`jeudi / le jeudi / khmis / el khmis / lekhmis / nhar el khmis / الخميس` → Le reste est 4 : on avance de quatre jours après lundi, pas de trois.

EXERCICE 4 · BASE **Reste par 8**

Déterminer le reste de la division euclidienne par 8 de 93765.

Donne le reste.

Réponse attendue : `5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 8, on regarde le nombre formé par les trois derniers chiffres.
2. Divise 765 par 8 : $8 \times 95 = 760$.

CORRECTION

Les trois derniers chiffres —

$b = 765$

Diviser par 8 —

$765 = 8 \times 95 + 5$

93765 et 765 ont le même reste par 8 : le reste est 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Tu as pris $65 = 8 \times 8 + 1$: par 8, il faut les **trois** derniers chiffres.

EXERCICE 5 · BASE **Reste par 25**

Déterminer le reste de la division euclidienne de 1963 par 25.

Donne le reste.

Réponse attendue : `13`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 25, on regarde le nombre formé par les deux derniers chiffres.
2. Divise 63 par 25.

CORRECTION

Les deux derniers chiffres —

$b = 63$

Diviser par 25 —

$63 = 25 \times 2 + 13$

Le reste de 1963 par 25 est 13.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Par 25, il faut les deux derniers chiffres, 63, pas seulement le chiffre des unités.

EXERCICE 6 · BASE **Reste par 9**

Déterminer le reste de la division euclidienne de 2851961 par 9.

Donne le reste.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un entier et la somme de ses chiffres ont le même reste par 9.
2. La somme des chiffres vaut 32 ; divise-la par 9.

CORRECTION

La somme des chiffres —

$S = 2 + 8 + 5 + 1 + 9 + 6 + 1 = 32$

Diviser par 9 —

$32 = 9 \times 3 + 5$

Le reste de 2851961 par 9 est 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

32 → 32 est la somme des chiffres ; le reste par 9 est inférieur à 9 : divise encore 32 par 9.

2 → 2 est le reste de 32 par 3 ; la question porte sur 9.

EXERCICE 7 · BASE **Un chiffre pour 9**

Déterminer le chiffre a pour que l'entier $\overline{7\,3\,a\,2}$ soit divisible par 9.

Donne le chiffre a.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme des chiffres $7 + 3 + a + 2$ doit être divisible par 9.
2. $12 + a$ est entre 12 et 21 : quel multiple de 9 y a-t-il dans cet intervalle ?

CORRECTION

La somme des chiffres —

$7 + 3 + a + 2 = 12 + a$

Un multiple de 9 —

$12 + a = 18$

$a = 6$, et $7362 = 9 \times 818$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 / 0 → $12 + a$ est alors divisible par 3, mais pas par 9.

7362 → Ton nombre 7362 est juste ; la question demande le chiffre a : donne $a = 6$.

EXERCICE 8 · PRATIQUE **Un reste imposé par 9**

Déterminer le chiffre x pour que le reste de la division euclidienne de l'entier $\overline{7\,x\,6\,2}$ par 9 soit égal à 2.

Donne le chiffre x.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overline{7\,x\,6\,2}$ a le même reste par 9 que la somme de ses chiffres, $15 + x$.
2. $15 + x$ est entre 15 et 24 ; quel nombre de cet intervalle a pour reste 2 par 9 ?

CORRECTION

La somme des chiffres —

$7 + x + 6 + 2 = 15 + x$

Reste 2 par 9 —

$15 + x = 9 \times 2 + 2 = 20$

$x = 5 : 7562 = 9 \times 840 + 2.$

PIÈGES ANTICIPÉS

7562 → Ton nombre 7562 est juste ; la question demande le chiffre x : donne $x = 5$.

EXERCICE 9 · PRATIQUE **Reste par 11, d négatif**

Déterminer le reste de la division euclidienne de 8291 par 11.

Donne le reste.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte les rangs de droite à gauche : $S_1 = 1 + 2$ et $S_2 = 9 + 8$.
2. $d = S_1 - S_2$ est négatif : ajoute-lui le plus petit multiple de 11 qui le rend positif ou nul.

CORRECTION

Les deux sommes —

$S_1 = 1 + 2 = 3 \quad ; \quad S_2 = 9 + 8 = 17$

d —

$d = 3 - 17 = -14$

Ajouter 22 —

$-14 + 22 = 8$

Le reste de 8291 par 11 est 8.

PIÈGES ANTICIPÉS

-14 / 14 → $d = -14$ n'est pas un reste : ajoute 22, le plus petit multiple de 11 qui le rend positif ou nul.

3 → Tu as compté les rangs de gauche à droite. Le chiffre des unités, 1, est de rang 1.

EXERCICE 10 · BASE **Reste par 11**

Déterminer le reste de la division euclidienne de 195674 par 11.

Donne le reste.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De droite à gauche, les chiffres sont $4, 7, 6, 5, 9, 1$.
2. $S_1 = 4 + 6 + 9$ et $S_2 = 7 + 5 + 1$.

CORRECTION

Les deux sommes —

$S_1 = 4 + 6 + 9 = 19 \quad ; \quad S_2 = 7 + 5 + 1 = 13$

d —

$d = 19 - 13 = 6$

$d = 6 \geq 0$ et $6 < 11$: le reste de 195674 par 11 est 6.

PIÈGES ANTICIPÉS

-6 / 5 → $d = S_1 - S_2$, avec S_1 la somme des rangs **impairs** comptés depuis les unités : $d = 19 - 13 = 6$.

EXERCICE 11 · PRATIQUE **Un chiffre pour 11**

Trouver le chiffre x pour que l'entier $\overline{4\,x\,7\,3}$ soit divisible par 11.

Donne le chiffre x.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De droite à gauche : $3, 7, x, 4$. Donc $S_1 = 3 + x$ et $S_2 = 7 + 4$.
2. $d = x - 8$ est entre -8 et 1 : quel multiple de 11 peut-il valoir ?

CORRECTION

Les deux sommes —

$S_1 = 3 + x \quad ; \quad S_2 = 7 + 4 = 11$

d —

$d = x - 8$

Divisible par 11 —

$x - 8 = 0$

$x = 8 : 4873 = 11 \times 443$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4873 → Ton nombre 4873 est juste ; la question demande le chiffre x : donne $x = 8$.

EXERCICE 12 · PRATIQUE **Un reste imposé par 11**

Déterminer le chiffre u pour que l'entier $\overline{5\,1\,3\,u}$ ait 4 comme reste de la division euclidienne par 11.

Donne le chiffre u.

Réponse attendue : 0

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De droite à gauche : $u, 3, 1, 5$. Donc $d = (u + 1) - (3 + 5) = u - 7$.
2. Si $u \geq 7$, le reste est $u - 7$, qui vaut au plus 2. Si $u < 7$, d est négatif : le reste est $d + 11$.

CORRECTION

d —

$d = (u + 1) - (3 + 5) = u - 7$

Si $u \geq 7$ — Le reste $u - 7$ vaut 0, 1 ou 2 : jamais 4.

Si $u < 7$ —

$u - 7 + 11 = u + 4 = 4$

$u = 0 : 5130 = 11 \times 466 + 4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

11 → u est un chiffre. Quand $u - 7 < 0$, le reste est $u - 7 + 11$.

5130 → Ton nombre 5130 est juste ; la question demande le chiffre u : donne $u = 0$.

EXERCICE 13 · PRATIQUE **Divisible par 2 et par 9**

Déterminer les chiffres a et b pour que le nombre $\overline{a\,1\,2\,1\,5\,b}$ soit divisible par 2 et par 9, puis donner les nombres obtenus.

Écris l'ensemble des nombres obtenus entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{912150;712152;512154;312156;112158}` — aussi acceptées : {(9,0);(7,2);(5,4);(3,6);(1,8)} · (9,0);(7,2);(5,4);(3,6);(1,8) · (a,b)=(9,0);(7,2);(5,4);(3,6);(1,8) · (9,0) ou (7,2) ou (5,4) ou (3,6) ou (1,8) · (a,b)=(9,0) ou (7,2) ou (5,4) ou (3,6) ou (1,8) · {(9;0);(7;2);(5;4);(3;6);(1;8)} · (9;0);(7;2);(5;4);(3;6);(1;8) · (a;b)=(9;0);(7;2);(5;4);(3;6);(1;8) · (9;0) ou (7;2) ou (5;4) ou (3;6) ou (1;8) · (a;b)=(9;0) ou (7;2) ou (5;4) ou (3;6) ou (1;8) · {(1,8);(3,6);(5,4);(7,2);(9,0)} · (1,8);(3,6);(5,4);(7,2);(9,0) · (a,b)=(1,8);(3,6);(5,4);(7,2);(9,0) · (1,8) ou (3,6) ou (5,4) ou (7,2) ou (9,0) · (a,b)=(1,8) ou (3,6) ou (5,4) ou (7,2) ou (9,0) · {(1;8);(3;6);(5;4);(7;2);(9;0)} · (1;8);(3;6);(5;4);(7;2);(9;0) · (a;b)=(1;8);(3;6);(5;4);(7;2);(9;0) · (1;8) ou (3;6) ou (5;4) ou (7;2) ou (9;0) · (a;b)=(1;8) ou (3;6) ou (5;4) ou (7;2) ou (9;0)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 2 : b est pair. Par 9 : $a+1+2+1+5+b = 9+a+b$ est un multiple de 9.
2. a est le premier chiffre, donc $a \neq 0$; et $a+b$ vaut 9 ou 18.

CORRECTION

Par 9 — a est le premier chiffre, donc $a \geq 1$ et $10 \leq 9+a+b \leq 27$: $9+a+b$ vaut 18 ou 27.

$a+b=9 \quad$ ou $\quad a+b=18$

Cas $a+b=18$ — Seulement $a=b=9$, mais b doit être pair : impossible.

Cas $a+b=9$, b pair —

$(a;b) = (9;0)$ ou $(7;2)$ ou $(5;4)$ ou $(3;6)$ ou $(1;8)$

Cinq nombres : 912150, 712152, 512154, 312156 et 112158.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{912150}` / `{112158}` → Il y a plusieurs couples $(a;b)$: essaie toutes les valeurs paires de b.

EXERCICE 14 · RAISONNEMENT

Divisible par 4 et par 3

Déterminer les chiffres a et b pour que l'entier $\overline{2\,a\,3\,b}$ soit divisible par 4 et par 3, puis donner les nombres obtenus.

Écris l'ensemble des nombres obtenus entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{2136;2232;2436;2532;2736;2832}` — aussi acceptées : {(2,2);(5,2);(8,2);(1,6);(4,6);(7,6)} · (2,2);(5,2);(8,2);(1,6);(4,6);(7,6) · (a,b)=(2,2);(5,2);(8,2);(1,6);(4,6);(7,6) · (2,2) ou (5,2) ou (8,2) ou (1,6) ou (4,6) ou (7,6) · (a,b)=(2,2) ou (5,2) ou (8,2) ou (1,6) ou (4,6) ou (7,6) · {(2;2);(5;2);(8;2);(1;6);(4;6);(7;6)} · (2;2);(5;2);(8;2);(1;6);(4;6);(7;6) · (a;b)=(2;2);(5;2);(8;2);(1;6);(4;6);(7;6) · (2;2) ou (5;2) ou (8;2) ou (1;6) ou (4;6) ou (7;6) · (a;b)=(2;2) ou (5;2) ou (8;2) ou (1;6) ou (4;6) ou (7;6) · {(1,6);(2,2);(4,6);(5,2);(7,6);(8,2)} · (1,6);(2,2);(4,6);(5,2);(7,6);(8,2) · (a,b)=(1,6);(2,2);(4,6);(5,2);(7,6);(8,2) · (1,6) ou (2,2) ou (4,6) ou (5,2) ou (7,6) ou (8,2) · (a,b)=(1,6) ou (2,2) ou (4,6) ou (5,2) ou (7,6) ou (8,2) · {(1;6);(2;2);(4;6);(5;2);(7;6);(8;2)} · (1;6);(2;2);(4;6);(5;2);(7;6);(8;2) · (a;b)=(1;6);(2;2);(4;6);(5;2);(7;6);(8;2) · (1;6) ou (2;2) ou (4;6) ou (5;2) ou (7;6) ou (8;2) · (a;b)=(1;6) ou (2;2) ou (4;6) ou (5;2) ou (7;6) ou (8;2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 4 : le nombre formé par les deux derniers chiffres, $\overline{3\,b}$, est divisible par 4. Cela ne laisse que deux valeurs de b.
2. Par 3 : $5+a+b$ est un multiple de 3. Traite chaque valeur de b.

CORRECTION

Par 4 — De 30 à 39, seuls 32 et 36 sont divisibles par 4.

$b=2 \quad$ ou $\quad b=6$

Cas $b=2$ —

$7+a$ multiple de $3 \iff a=2$ ou $a=5$ ou $a=8$

Cas $b=6$ —

$11+a$ multiple de $3 \iff a=1$ ou $a=4$ ou $a=7$

Six nombres : 2232, 2532, 2832, 2136, 2436 et 2736.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2232;2532;2832}` → $b=6$ marche aussi : $36 = 4 \times 9$.

EXERCICE 15 · RAISONNEMENT

Divisible par 8 et par 9

Trouver les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{1\,3\,x\,4\,5\,y}$ soit divisible par 8 et par 9. Donner le nombre obtenu.

Donne le nombre obtenu, écrit en entier.

Réponse attendue : 138456

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 8 : $\overline{4\,5\,y}$, entre 450 et 459, doit être un multiple de 8. Il n'y en a qu'un.
2. Par 9 : la somme des chiffres $1+3+x+4+5+y$ doit être un multiple de 9.

CORRECTION

Par 8 — 448 et 464 ne sont pas entre 450 et 459.

$456 = 8 \times 57$

y —

$y = 6$

Par 9 —

$1+3+x+4+5+6 = 19+x = 27$

$x = 8$ et $y = 6$: le nombre est 138456.

EXERCICE 16 · RAISONNEMENT

Divisible par 11 et par 25

Trouver les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{2\,8\,x\,y\,5}$ soit divisible par 11 et par 25, puis donner les nombres obtenus.

Écris l'ensemble des nombres obtenus entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : {28325;28875} — aussi acceptées : {(3,2);(8,7)} · (3,2);(8,7) · (x,y)=(3,2);(8,7) · (3,2) ou (8,7) · (x,y)=(3,2) ou (8,7) · {(3;2);(8;7)} · (3;2);(8;7) · (x;y)=(3;2);(8;7) · (3;2) ou (8;7) · (x;y)=(3;2) ou (8;7) · {(8,7);(3,2)} · (8,7);(3,2) · (x,y)=(8,7);(3,2) · (8,7) ou (3,2) · (x,y)=(8,7) ou (3,2) · {(8;7);(3;2)} · (8;7);(3;2) · (x;y)=(8;7);(3;2) · (8;7) ou (3;2) · (x;y)=(8;7) ou (3;2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 25 : $\overline{y\,5}$ vaut 25 ou 75.
2. Par 11 : de droite à gauche 5, y, x, 8, 2, donc $d = (5+x+2)-(y+8) = x-y-1$.

CORRECTION

Par 25 —

$y = 2 \quad \text{ou} \quad y = 7$

Cas $y = 2$ —

$d = x-3 = 0 \iff x = 3$

Cas $y = 7$ —

$d = x-8 = 0 \iff x = 8$

Deux nombres : $28325 = 11 \times 2575$ et $28875 = 11 \times 2625$.

PIÈGES ANTICIPÉS

{28325} / {28875} → $\overline{y\,5}$ peut valoir 25 **ou** 75 : il y a deux cas.

EXERCICE 17 · DEFI

Divisible par 9 et par 11

Trouver les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{9\,x\,2\,3\,y}$ soit divisible par 9 et par 11. Donner le nombre obtenu.

Donne le nombre obtenu, écrit en entier.

Réponse attendue : 95238

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 9 : $14+x+y$ est un multiple de 9, donc $x+y$ vaut 4 ou 13.

2. Par 11 : $d = (y+2+9) - (3+x) = y - x + 8$, multiple de 11 : donc $y - x = 3$ ou $y - x = -8$.

CORRECTION

Par 9 —

$x + y = 4 \quad \text{ou} \quad x + y = 13$

Par 11 —

$y - x = 3 \quad \text{ou} \quad y - x = -8$

Parité — $x + y$ et $y - x$ ont la même parité : cela écarte le couple $(4;3)$ et le couple $(13;-8)$. Pour $x + y = 4$ et $y - x = -8$, on trouverait $y = -2$: impossible pour un chiffre. Il reste $x + y = 13$ et $y - x = 3$.

Résoudre —

$y = 8 \quad ; \quad x = 5$

Le nombre est 95238.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

Reste égal au quotient

Quels sont les entiers naturels dont la division euclidienne par 5 donne un reste égal au quotient ?

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{0;6;12;18;24}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si le quotient et le reste valent q, alors $n = 5q + q = 6q$.
2. Le reste vérifie $0 \leq q < 5$.

CORRECTION

Écrire n —

$n = 5q + q = 6q$

La condition —

$0 \leq q \leq 4$

Les valeurs —

$n = 0 \text{ ou } 6 \text{ ou } 12 \text{ ou } 18 \text{ ou } 24$

Cinq entiers : 0, 6, 12, 18 et 24.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{6;12;18;24}` → $q = 0$ convient aussi : $0 = 5 \times 0 + 0$.

`{0;6;12;18;24;30}` → Pour 30, le « reste » serait 5 : un reste par 5 est inférieur à 5.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Quotient triple du reste

Quels sont les entiers naturels dont le quotient de la division euclidienne par 4 est égal au triple du reste ?

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{0;13;26;39}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si le reste est r, le quotient est $3r$: $n = 4 \times 3r + r$.
2. Le reste vérifie $0 \leq r < 4$.

CORRECTION

Écrire n —

$n = 12r + r = 13r$

Les valeurs —

$r = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3$

Quatre entiers : 0, 13, 26 et 39.

PIÈGES ANTICIPÉS

{13;26;39} → $r = 0$ convient aussi : $0 = 4 \times 0 + 0$, et $0 = 3 \times 0$.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

Deux divisions par le même entier

On divise 2005 et 5002 par un même entier naturel non nul n ; on obtient respectivement 10 et 32 pour restes. Trouver l'entier n.

Donne n.

Réponse attendue : 35

INDICES, DANS L'ORDRE

1. n divise $2005 - 10$ et $5002 - 32$; et un reste est inférieur au diviseur, donc $n > 32$.
2. Décompose 1995 et 4970 en produits de facteurs premiers.

CORRECTION

Deux multiples de n —

$2005 - 10 = 1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19 \quad ; \quad 5002 - 32 = 4970 = 2 \times 5 \times 7 \times 71$

Diviseurs communs — Les diviseurs communs sont ceux de 5×7 : 1, 5, 7 et 35.

n > 32 —

$n = 35$

Vérifier —

$2005 = 35 \times 57 + 10 \quad ; \quad 5002 = 35 \times 142 + 32$

$n = 35$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 / 7 → Le reste 32 doit être inférieur au diviseur : $n > 32$.

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

Reste égal au carré du quotient

Trouver tous les entiers naturels dont la division euclidienne par 29 donne un reste égal au carré du quotient.

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : {0;30;62;96;132;170}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si le quotient est q, alors $n = 29q + q^2$.
2. Le reste q^2 doit vérifier $q^2 < 29$: q vaut au plus 5.

CORRECTION

Écrire n —

$n = 29q + q^2 = q(29 + q)$

La condition — Le reste q^2 doit être inférieur au diviseur 29.

$q^2 < 29 \iff q \leq 5$

Les valeurs —

0 ; 30 ; 62 ; 96 ; 132 ; 170

Six entiers : 0, 30, 62, 96, 132 et 170.

PIÈGES ANTICIPÉS

{30;62;96;132;170} → $q = 0$ convient aussi : $0 = 29 \times 0 + 0^2$.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

Différence, quotient et reste

Déterminer les entiers naturels a et b dont la différence est 709 et tels que le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement 16 et 19. Donner a.

Donne seulement la valeur de a.

Réponse attendue : `755`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $a = 16b + 19$ et $a - b = 709$.
2. En remplaçant : $15b + 19 = 709$.

CORRECTION

Le système —

$a = 16b + 19 \quad ; \quad a = b + 709$

Trouver b —

$15b = 690 \iff b = 46$

Trouver a —

$a = 46 + 709 = 755$

$a = 755$ et $b = 46$; on vérifie $755 = 46 \times 16 + 19$ avec $19 < 46$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`46` → 46 est b, le diviseur ; on demande le dividende a.

EXERCICE 23 · RAISONNEMENT **Un quotient entier**

Trouver les entiers naturels n tels que $\dfrac{n+25}{n+4}$ soit un entier.

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{3;17}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $n + 25 = (n + 4) + 21$.
2. $n + 4$ divise $n + 4$: il doit donc diviser 21, et $n + 4 \geq 4$.

CORRECTION

Écrire autrement —

$\frac{n+25}{n+4} = 1 + \frac{21}{n+4}$

$n + 4$ divise 21 — Comme $n + 4 \geq 4$, $n + 4$ ne vaut ni 1 ni 3.

$n + 4 = 7 \quad \text{ou} \quad n + 4 = 21$

$n = 3$ ou $n = 17$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-3;-1;3;17}` / `{-1;3;17}` → n est un entier naturel : $n + 4 \geq 4$, donc $n + 4$ ne vaut ni 1 ni 3.

EXERCICE 24 · RAISONNEMENT **p − 1 divise p + 11**

Déterminer les valeurs de l'entier naturel p telles que $p - 1$ divise $p + 11$.

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{2;3;4;5;7;13}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $p + 11 = (p - 1) + 12$: si $p - 1$ divise $p + 11$, il divise 12.
2. Un diviseur est non nul : $p - 1 \geq 1$. Liste les diviseurs de 12.

CORRECTION

La différence —

$(p+11)-(p-1)=12$

Les diviseurs de 12 —

$p-1=1,2,3,4,6$ ou 12

p vaut 2, 3, 4, 5, 7 ou 13.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1;2;3;4;6;12}` → Ce sont les valeurs de $p-1$; ajoute 1 pour obtenir p.

EXERCICE 25 · RAISONNEMENT

Un dividende inférieur à 5000

Le dividende d'une division euclidienne est inférieur à 5000. Le quotient de cette division est égal à 93 et le reste à 51. Déterminer les valeurs possibles du dividende a.

Écris l'ensemble des dividendes possibles entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{4887;4980}` — aussi acceptées : a = 4887 ou a = 4980 · a = 4980 ou a = 4887 · dividende = 4887 ou 4980 · dividende = 4980 ou 4887 · le dividende est 4887 ou 4980

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le dividende s'écrit $a=93b+51$, et le reste impose $b>51$.
2. $93b+51<5000$ donne $93b<4949$.

CORRECTION

Les conditions —

$b>51 \quad ; \quad 93b<4949$

Le diviseur —

$b=52 \quad \text{ou} \quad b=53$

Le dividende —

$93\times52+51=4887 \quad ; \quad 93\times53+51=4980$

Deux possibilités : 4887 (diviseur 52) et 4980 (diviseur 53).

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4887}` → $b=53$ convient aussi : $4980<5000$.

EXERCICE 26 · PRATIQUE

Des groupes au musée

Un musée répartit les élèves d'une école en groupes, éventuellement inégaux, dont aucun ne comporte plus de vingt-quatre élèves ni moins de vingt. L'école Farhat Hached comporte 158 élèves. Combien fera-t-on de groupes ?

Donne le nombre de groupes, en chiffres seulement.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec k groupes, il faut $20k\le158\le24k$.
2. $24\times6=144$ et $20\times8=160$.

CORRECTION

Au plus 24 par groupe —

$24k\ge158 \iff k\ge7$

Au moins 20 par groupe —

$20k\le158 \iff k\le7$

Un exemple — 6 groupes de 23 élèves et 1 groupe de 20.

$158=6\times23+20$

Un autre exemple — 2 groupes de 24 et 5 groupes de 22.

$158 = 2 \times 24 + 5 \times 22$

On fera 7 groupes, par exemple 6 groupes de 23 et un groupe de 20, ou 2 groupes de 24 et 5 groupes de 22.

EXERCICE 27 · RAISONNEMENT

Le même reste, trois fois

Quel est le plus petit entier naturel qui donne pour reste 19 quand on le divise par 20, 20 quand on le divise par 21, et 34 quand on le divise par 35 ?

Donne l'entier.

Réponse attendue : 419

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans chaque cas, le reste vaut le diviseur moins 1 : regarde $n + 1$.
2. $n + 1$ est un multiple commun de 20, 21 et 35 : calcule leur PPCM.

CORRECTION

Ajouter 1 —

$n + 1 = 20(q_1 + 1) = 21(q_2 + 1) = 35(q_3 + 1)$

Le PPCM —

$\mathrm{PPCM}(20, 21, 35) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

Le plus petit —

$n + 1 = 420 \iff n = 419$

Le plus petit entier est 419 : $419 = 20 \times 20 + 19 = 21 \times 19 + 20 = 35 \times 11 + 34$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`420` → 420 est $n + 1$; il est divisible par 20, 21 et 35, son reste est 0.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

Des boîtes cubiques

Les dimensions d'une caisse parallélépipédique sont 120 cm, 200 cm et 180 cm. On veut la remplir entièrement de boîtes cubiques de même arête a (a entier, en cm). Quelle doit être l'arête a pour utiliser le minimum de boîtes ?

Donne l'arête en centimètres, sans l'unité.

Réponse attendue : 20

INDICES, DANS L'ORDRE

1. a doit diviser 120, 200 et 180.
2. Moins de boîtes veut dire des boîtes plus grandes : on cherche le plus grand diviseur commun.

CORRECTION

Décomposer —

$120 = 2^3 \times 3 \times 5 \quad ; \quad 200 = 2^3 \times 5^2 \quad ; \quad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Le PGCD —

$a = 2^2 \times 5 = 20$

Le nombre de boîtes —

$6 \times 10 \times 9 = 540$

$a = 20$ cm, avec 540 boîtes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10 / 5` → C'est un diviseur commun, mais pas le plus grand : avec $a = 20$, il faut moins de boîtes.

EXERCICE 29 · PRATIQUE

Quatre chiffres consécutifs

n est un entier naturel de quatre chiffres, divisible par 9, dont les chiffres sont consécutifs et classés par ordre croissant de gauche à droite. Trouver n.

Donne n.

Réponse attendue : 3456

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les chiffres sont k, $k+1$, $k+2$ et $k+3$, avec $k \geq 1$ et $k+3 \leq 9$.
2. Leur somme $4k+6$ doit être un multiple de 9.

CORRECTION

La somme —

$$k + (k+1) + (k+2) + (k+3) = 4k + 6$$

Les valeurs —

$$1 \leq k \leq 6 \;\Rightarrow\; 10 \leq 4k+6 \leq 30$$

Multiple de 9 —

$$4k + 6 = 18 \iff k = 3$$

$n = 3456$, dont la somme des chiffres est 18.

EXERCICE 30 · DEFI

La combinaison du coffre

La combinaison secrète d'un coffre comporte cinq chiffres différents. Le premier chiffre est pair ; la somme des deux premiers chiffres est 15 ; le troisième chiffre est la différence des deux premiers ; le premier chiffre est le produit du troisième par le quatrième ; le nombre est divisible par 9. Quelle est la combinaison ?

Donne la combinaison d'un seul bloc, sans espace ni tiret.

Réponse attendue : 69327

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Premier chiffre pair et somme 15 : seulement $(6, 9)$ ou $(8, 7)$.
2. Avec $(8, 7)$, le troisième chiffre vaut 1 et le quatrième devrait valoir 8 : deux chiffres égaux.

CORRECTION

Les deux premiers —

$$(6, 9) \quad \text{ou} \quad (8, 7)$$

Écarter (8, 7) — Le quatrième chiffre serait 8, comme le premier : refusé.

$$8 = 1 \times 8$$

Avec (6, 9) — La différence des deux premiers est 3, et le quatrième vaut 2.

$$9 - 6 = 3 \quad ; \quad 6 = 3 \times 2$$

Par 9 —

$$6 + 9 + 3 + 2 + e = 20 + e = 27 \iff e = 7$$

La combinaison est 69327 : cinq chiffres différents, de somme 27.

PIÈGES ANTICIPÉS

6-9-3-2-7 → C'est la bonne suite de chiffres ; écris-la d'un seul bloc, sans tiret : 69327.

EXERCICE 31 · PRATIQUE

Le chiffre des unités de 3 puissance 2006

Quel est le chiffre des unités de 3^{2006} ?

Donne le chiffre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les chiffres des unités de 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, … sont $1, 3, 9, 7$, puis le motif recommence.
2. Cherche le reste de 2006 par 4 : par 4, on regarde les deux derniers chiffres.

CORRECTION

Le reste par 4 —

$$2006 = 4 \times 501 + 2$$

Comme 3 au carré —

$$3^2 = 9$$

Le chiffre des unités de 3^{2006} est 9.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 / 3 → Le motif $1, 3, 9, 7$ se répète tous les 4 : c'est le reste de 2006 par 4, soit 2, qui compte.

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT

La boîte enlevée

On dispose de 8 boîtes contenant 7 ; 10 ; 13 ; 18 ; 28 ; 31 ; 46 et 62 boules, rouges et noires. On enlève une boîte ; dans les 7 boîtes restantes, le nombre de boules rouges est le double du nombre de boules noires. Quel est le nombre de boules de la boîte enlevée ?

Donne le nombre de boules de la boîte enlevée, en chiffres seulement.

Réponse attendue : 62

INDICES, DANS L'ORDRE

1. S'il reste N boules noires, il reste $2N$ rouges : en tout $3N$, un multiple de 3.
2. Le total des huit boîtes est 215 ; cherche la boîte qui a le même reste que 215 par 3.

CORRECTION

Le total —

$$7 + 10 + 13 + 18 + 28 + 31 + 46 + 62 = 215$$

Le reste par 3 —

$$215 = 3 \times 71 + 2$$

La seule boîte — Les restes par 3 sont $1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 2$: seule la boîte de 62 a le reste 2.

On a enlevé la boîte de 62 boules : il en reste $153 = 3 \times 51$.

EXERCICE 33 · RAISONNEMENT

Un diviseur commun

Soit $x = 7n + 4$ et $y = 3n - 2$, où n est un entier naturel non nul, et soit d un diviseur commun à x et y. Montrer que d divise 26, puis donner les valeurs possibles de d.

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{1;2;13;26}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime 26 en fonction de x et y : cherche une combinaison $\alpha x - \beta y$ où n disparaît.
2. $3x - 7y$ ne contient plus n.

CORRECTION

Éliminer n —

$$3x - 7y = 21n + 12 - 21n + 14 = 26$$

d divise 26 — d divise $3x$ et $7y$, donc leur différence 26.

Les diviseurs de 26 —

AH Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

$26 = 2 \times 13$

d vaut 1, 2, 13 ou 26.

EXERCICE 34 · PRATIQUE

Découper une feuille

On découpe une feuille de papier en 5 morceaux, puis l'un des morceaux est découpé en 5 morceaux, et ainsi de suite. Au bout de combien d'étapes obtient-on 61 morceaux ?

Donne le nombre d'étapes, en chiffres seulement.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Après 1 étape : 5 morceaux ; après 2 : $5 + 4$; après 3 : $5 + 4 + 4$.
2. Après k étapes : $1 + 4k$ morceaux.

CORRECTION

Le nombre de morceaux —

$1 + 4k$

Résoudre —

$1 + 4k = 61 \iff 4k = 60$

On obtient 61 morceaux au bout de 15 étapes.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → Chaque étape ajoute 4 morceaux, pas 5 : le morceau découpé disparaît.

EXERCICE 35 · BASE

Un PPCM

Calculer $\mathrm{PPCM}(252, 600)$.

Donne le PPCM.

Réponse attendue : 12600

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ et $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$.
2. On prend tous les facteurs premiers, chacun avec son plus grand exposant.

CORRECTION

Décomposer —

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \quad ; \quad 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

Le PPCM —

$2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 25 \times 7$

$\mathrm{PPCM}(252, 600) = 12600.$

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 est le PGCD. Le PPCM prend **tous** les facteurs, avec le plus grand exposant.

EXERCICE 36 · PRATIQUE

Le récipient vide

Un paysan dispose de neuf récipients de 3 ; 6 ; 10 ; 11 ; 15 ; 17 ; 23 ; 25 et 30 litres. Il revient avec deux fois plus de lait que d'huile et trois fois plus de pétrole que de lait ; tous ses récipients sont pleins sauf un. Quelle est la contenance v, en litres, du récipient vide ?

Donne la contenance en litres, en chiffres seulement, sans l'unité.

Réponse attendue : 23

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec h litres d'huile : $2h$ de lait, $6h$ de pétrole, soit $9h$ en tout.
2. Le total vaut $140 = 9 \times 15 + 5$: le récipient vide a pour reste 5 par 9.

CORRECTION

Le total —

$$140 = 9 \times 15 + 5$$

Le reste 5 par 9 — Parmi $3, 6, 10, 11, 15, 17, 23, 25, 30$, seul $23 = 9 \times 2 + 5$ a le reste 5.

Vérifier —

$$140 - 23 = 117 = 9 \times 13$$

Le récipient vide est celui de 23 litres : 13 litres d'huile ($3 + 10$), 26 de lait ($11 + 15$), 78 de pétrole ($6 + 17 + 25 + 30$).

EXERCICE 37 · DEFI

Thabit Ibn Qurra

D'après le théorème de Thabit Ibn Qurra, si $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = (3 \times 2^n) - 1$ et $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ sont premiers, alors $a = 2^n \times p \times q$ et $b = 2^n \times r$ sont amiables. Calculer a pour $n = 4$.

Donne a.

Réponse attendue : 17296

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $n = 4$: $p = 3 \times 8 - 1$ et $q = 3 \times 16 - 1$.
2. $a = 16 \times p \times q$.

CORRECTION

p et q —

$$p = 3 \times 2^3 - 1 = 23 \quad ; \quad q = 3 \times 2^4 - 1 = 47$$

a —

$$a = 2^4 \times 23 \times 47 = 16 \times 1081$$

$a = 17296$: c'est le nombre du couple découvert par Al Farissi, avec $b = 16 \times 1151 = 18416$.

EXERCICE 38 · RAISONNEMENT

Les restes d'un carré par 3

Soit n un entier naturel. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 3 ?

Écris l'ensemble des restes entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{0;1}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Distingue les trois cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$.
2. Pour $n = 3k + 2$: $n^2 = 9k^2 + 12k + 4$, et $4 = 3 + 1$.

CORRECTION

Cas $n = 3k$ — Le reste est 0.

$$n^2 = 3 \times 3k^2$$

Cas $n = 3k + 1$ — Le reste est 1.

$$n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

Cas $n = 3k + 2$ — Le reste est encore 1.

$$n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Les restes possibles sont 0 et 1 — jamais 2. Ainsi, 59873120 a pour reste 2 par 3, son carré a pour reste 1, et $59873120^2 - 1$ est divisible par 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{0;1;2}` → Essaie $n = 3k + 2$: n^2 a pour reste 1, pas 2. Le reste 2 n'arrive jamais.

EXERCICE 39 · BASE

Dans cent jours

Aujourd'hui, c'est mercredi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours ?

Écris le jour, par exemple « mardi ».

Réponse attendue : `vendredi` — aussi acceptées : le vendredi · c'est vendredi · on sera vendredi · nous serons vendredi · ce sera vendredi · jem3a · el jem3a · ljem3a · nhar el jem3a

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Seul le reste de la division de 100 par 7 compte : les semaines complètes ramènent au mercredi.
2. Écris $100 = 7 \times q + r$ avec $0 \leq r < 7$, puis avance de r jours.

CORRECTION

Semaines complètes —

$$100 = 7 \times 14 + 2$$

Avancer de deux jours — 14 semaines ramènent au mercredi ; il reste 2 jours : jeudi, vendredi.

$$\text{mercredi} + 2 \text{ jours} = \text{vendredi}$$

On divise le nombre de jours par 7 : seul le reste dit de combien de jours on avance.

PIÈGES ANTICIPÉS

`lundi / le lundi / thnin / ethnin` → Tu as reculé de deux jours : « dans 100 jours », on avance après mercredi.

EXERCICE 40 · PRATIQUE

Il y a soixante jours

Il y a 60 jours, c'était un samedi. Quel jour de la semaine sommes-nous aujourd'hui ?

Écris le jour, par exemple « mardi ».

Réponse attendue : `mercredi` — aussi acceptées : le mercredi · c'est mercredi · on est mercredi · nous sommes mercredi · aujourd'hui c'est mercredi · erb3a · larb3a · el arb3a · nhar larb3a

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Aujourd'hui, c'est le samedi d'il y a 60 jours, auquel on ajoute 60 jours.
2. Cherche le reste de la division euclidienne de 60 par 7.

CORRECTION

Le reste par 7 —

$$60 = 7 \times 8 + 4$$

Partir du samedi — On avance de 4 jours à partir du samedi : dimanche, lundi, mardi, mercredi.

$$\text{samedi} + 4 \text{ jours} = \text{mercredi}$$

On compte à partir du jour connu, dans le bon sens : de samedi vers aujourd'hui, on avance.

PIÈGES ANTICIPÉS

`mardi / le mardi / thleth / ethleth` → Tu as reculé de 4 jours à partir du samedi. Le samedi est dans le passé : pour arriver à aujourd'hui, on **avance**.

EXERCICE 41 · RAISONNEMENT

Du 1er mars au 1er juin

Le 1er mars 2026 est un dimanche. Quel jour de la semaine sera le 1er juin 2026 ?

Écris le jour, par exemple « mardi ».

Réponse attendue : `lundi` — aussi acceptées : le lundi · c'est lundi · on sera lundi · nous serons lundi · ce sera lundi · thnin · ethnin · el thnin · nhar el thnin

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte d'abord le nombre de jours qui séparent le 1er mars du 1er juin : mars, avril et mai n'ont pas tous le même nombre de jours.
2. Mars a 31 jours, avril 30, mai 31. Divise le total par 7.

CORRECTION

Le nombre de jours — Du 1er mars au 1er juin, on traverse mars, avril et mai.

$$31 + 30 + 31 = 92$$

Le reste par 7 —

$$92 = 7 \times 13 + 1$$

Avancer d'un jour —

$$\text{dimanche} + 1 \text{ jour} = \text{lundi}$$

On compte les jours exacts, mois par mois, puis on ne garde que le reste par 7.

PIÈGES ANTICIPÉS

`samedi / le samedi / sebt / essebt` → Tu as compté trois mois de 30 jours, soit 90 jours. Mars et mai ont 31 jours : il y a 92 jours.

EXERCICE 42 · DEFI

Trois ans plus tard

Le 15 août 2025 était un vendredi. Quel jour de la semaine sera le 15 août 2028 ? (Une année bissextile, comme 2028, compte 366 jours, avec un 29 février.)

Écris le jour, par exemple « mardi ».

Réponse attendue : `mardi` — aussi acceptées : le mardi · c'est mardi · on sera mardi · nous serons mardi · ce sera mardi · thleth · ethleth · el thleth · nhar el thleth

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte les jours entre les deux dates, année par année : laquelle de ces périodes contient un 29 février ?
2. Du 15 août 2027 au 15 août 2028, on traverse le 29 février 2028.
3. Une année de 365 jours fait avancer d'un jour, car $365 = 7 \times 52 + 1$.

CORRECTION

Les trois périodes — Seule la dernière contient le 29 février 2028.

$$365 + 365 + 366 = 1096$$

Le reste par 7 —

$$1096 = 7 \times 156 + 4$$

Avancer de quatre jours —

$$\text{vendredi} + 4 \text{ jours} = \text{mardi}$$

D'une année à l'autre, la même date avance d'un jour, et de deux quand on traverse un 29 février.

PIÈGES ANTICIPÉS

`lundi / le lundi / thnin / ethnin` → Tu as compté $3 \times 365 = 1095$ jours : la période de 2027 à 2028 contient le 29 février, elle compte 366 jours.

`vendredi / le vendredi / jem3a / el jem3a` → Trois années ne font pas un nombre entier de semaines : 1096 n'est pas un multiple de 7.

EXERCICE 43 · BASE

Quel est le diviseur ?

On a l'égalité $250 = 13 \times 18 + 16$. Elle traduit la division euclidienne de 250 par l'un des deux nombres 13 ou 18. Lequel ? Donner ce diviseur.

Donne seulement le diviseur.

Maths à la carte · ABDELKADER HAMMAMI

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans une division euclidienne, le reste est strictement inférieur au diviseur.
2. Compare le nombre 16 à chacun des deux nombres.

CORRECTION

Comparer le reste — Par 13, on pourrait encore retirer 13 ; par 18, non.

$$16 \geq 13 \quad ; \quad 16 < 18$$

Conclure —

$$250 = 18 \times 13 + 16 \quad \text{avec} \quad 0 \leq 16 < 18$$

Une égalité $a = bq + r$ traduit la division par b seulement si $0 \leq r < b$.

PIÈGES ANTICIPÉS

13 → Par 13, le « reste » 16 dépasse le diviseur : $250 = 13 \times 19 + 3$. C'est la division par 18.

EXERCICE 44 · PRATIQUE

Le plus grand reste possible

Dans une division euclidienne, le diviseur est 23, le quotient est 41 et le reste est le plus grand possible. Calculer le dividende.

Donne le dividende.

Réponse attendue : 965

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le reste d'une division par 23 est un entier compris entre 0 et 22.
2. Le dividende vaut $a = 23 \times 41 + r$.

CORRECTION

Le plus grand reste —

$$0 \leq r < 23 \;\Rightarrow\; r = 22$$

Le dividende —

$$a = 23 \times 41 + 22 = 943 + 22 = 965$$

Le reste d'une division par b est au plus $b - 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

966 → Un reste égal à 23 est impossible : on pourrait encore retirer 23. Le plus grand reste est 22.

943 → Le reste nul est le plus petit possible, pas le plus grand.

EXERCICE 45 · BASE

Lire la calculatrice

La calculatrice affiche $4321 \div 17 = 254{,}1764706$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 4321 par 17.

Donne seulement le reste.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quotient est la partie entière du résultat affiché.
2. Calcule ensuite $r = 4321 - 17 \times 254$.

CORRECTION

Le quotient — On garde la partie entière.

$$q = 254$$

Le reste —

$$r = 4321 - 17 \times 254 = 4321 - 4318 = 3$$

Vérifier —

$0 \leq 3 < 17$

Le quotient se lit sur la calculatrice ; le reste se calcule par $r = a - bq$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1764706 / 0.1764706` → Les chiffres après la virgule ne sont pas le reste : ils valent seulement $\frac{r}{17}$.

EXERCICE 46 · BASE **Un million divisé par 37**

La calculatrice affiche $1000000 \div 37 = 27027{,}02703$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 1000000 par 37.

Donne seulement le reste.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends pour quotient la partie entière du résultat.
2. Calcule 37×27027 et compare à 1000000.

CORRECTION

Le quotient —

$q = 27027$

Le reste —

$r = 1000000 - 37 \times 27027 = 1000000 - 999999 = 1$

Même avec un grand dividende : quotient lu, puis $r = a - bq$, avec $0 \leq r < b$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2703 / 0.02703` → Les chiffres après la virgule ne sont pas le reste : calcule $1000000 - 37 \times 27027$.

EXERCICE 47 · PRATIQUE **Un reste à trois chiffres**

La calculatrice affiche $123456 \div 789 = 156{,}4714829$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 123456 par 789.

Donne seulement le reste.

Réponse attendue : 372

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quotient est 156 ; il reste à calculer $123456 - 789 \times 156$.
2. Vérifie que le résultat est bien inférieur à 789.

CORRECTION

Le quotient —

$q = 156$

Le produit —

$789 \times 156 = 123084$

Le reste —

$r = 123456 - 123084 = 372$

Vérifier —

$0 \leq 372 < 789$

Le reste peut avoir plusieurs chiffres ; il doit seulement être inférieur au diviseur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4714829 / 0.4714829 / 471` → Les chiffres après la virgule ne donnent pas le reste : calcule $123456 - 789 \times 156$.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

Retrouver le reste sans le dividende

On a divisé un entier naturel a par 8 ; la calculatrice affiche $a \div 8 = 47{,}625$. Déterminer le reste de la division euclidienne de a par 8.

Donne seulement le reste.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quotient est 47. Que représente la partie décimale $0{,}625$?
2. La partie décimale vaut $\frac{r}{8}$: $a = 8 \times 47{,}625$.

CORRECTION

Retrouver a —

$a = 8 \times 47{,}625 = 381$

Le reste —

$r = 381 - 8 \times 47 = 381 - 376 = 5$

Autrement — La partie décimale est $\frac{r}{8}$.

$0{,}625 \times 8 = 5$

La partie décimale affichée n'est pas le reste : c'est le reste divisé par le diviseur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`625` / `0.625` → $0{,}625$ est $\frac{r}{8}$, pas le reste : multiplie par 8.

`381` → 381 est le dividende a ; on demande le reste.

EXERCICE 49 · BASE

La guirlande

Une guirlande répète toujours les mêmes cinq couleurs dans cet ordre : rouge, vert, bleu, jaune, blanc. L'ampoule n° 1 est rouge, l'ampoule n° 2 est verte, et ainsi de suite. De quelle couleur est l'ampoule n° 243 ?

Écris la couleur, par exemple « vert ».

Réponse attendue : `bleu` — aussi acceptées : bleue · la bleue · elle est bleue · l'ampoule est bleue · c'est bleu · en bleu · zar9a · azra9 · c'est la bleue

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le motif se répète toutes les 5 ampoules : seul le reste de 243 par 5 compte.
2. Les ampoules de reste 1 sont rouges, celles de reste 2 vertes…

CORRECTION

Le reste par 5 —

$243 = 5 \times 48 + 3$

Lire le motif — 48 motifs complets, puis la 3^{e} couleur du motif : bleu.

$\text{reste } 3 \;\Rightarrow\; \text{comme l'ampoule n}^{\circ}\ 3$

Un motif qui se répète tous les p objets se lit avec le reste de la division par p.

PIÈGES ANTICIPÉS

`jaune` / `jaunes` / `la jaune` / `elle est jaune` / `sfar` / `asfar` → Tu as avancé de 3 couleurs **après** le rouge. Le reste 3 désigne la 3^{e} ampoule du motif, qui est bleue.

EXERCICE 50 · PRATIQUE

Un tableau de sept colonnes

On écrit les entiers naturels dans un tableau de 7 colonnes numérotées de 1 à 7 : 0 dans la colonne 1, 1 dans la colonne 2, …, 6 dans la colonne 7, puis 7 dans la colonne 1, et ainsi de suite. Dans quelle colonne se trouve l'entier 500 ?

Donne seulement le numéro de la colonne.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les entiers d'une même colonne ont le même reste dans la division par 7.
2. 0, 7, 14… (reste 0) sont dans la colonne 1. Où sont les entiers de reste 1, de reste 2 ?

CORRECTION

Le reste par 7 —

$500 = 7 \times 71 + 3$

La règle — Le reste 0 est dans la colonne 1.

$\text{reste } r \;\Rightarrow\; \text{colonne } r+1$

Conclure —

$3 + 1 = 4$

Le reste par 7 donne la colonne, à un décalage près qu'il faut lire sur les premiers nombres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est le reste. Mais le reste 0 est dans la colonne 1 : le reste 3 est dans la colonne 4.

EXERCICE 51 · RAISONNEMENT

Le collier de perles

Un collier est formé en répétant toujours le même motif de 6 perles : 2 perles rouges, puis 3 perles blanches, puis 1 perle noire. On enfile 200 perles en commençant par le début du motif. Combien de perles blanches y a-t-il ?

Donne le nombre de perles blanches.

Réponse attendue : 99

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Combien de motifs complets y a-t-il dans 200 perles ? Divise par 6.
2. Regarde ensuite de quelle couleur sont les perles qui restent après les motifs complets.

CORRECTION

Motifs complets —

$200 = 6 \times 33 + 2$

Les blanches des motifs —

$33 \times 3 = 99$

Les 2 perles restantes — Elles commencent un nouveau motif : ce sont deux perles rouges.

$99 + 0 = 99$

On compte par motifs complets avec le quotient, puis on examine le reste à part.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100` → Tu as pris la moitié de 200. Après 33 motifs, les 2 perles restantes sont **rouges** : elles n'ajoutent aucune blanche.

`101` → Les 2 perles qui restent sont les deux premières d'un motif : elles sont rouges, pas blanches.

EXERCICE 52 · DEFI

Combien en haut ?

Dans la suite de flèches du cours, l'entier n est placé en haut lorsque son reste dans la division par 6 vaut 0, 1 ou 3, et en bas lorsqu'il vaut 2, 4 ou 5. Combien d'entiers, parmi les entiers de 0 à 1000, sont placés en haut ?

Donne le nombre d'entiers placés en haut.

Réponse attendue : 501

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Combien y a-t-il d'entiers de 0 à 1000 ? Attention, 0 compte.
2. Groupe-les par paquets de 6 consécutifs : 0 à 5, 6 à 11… Chaque paquet complet en place 3 en haut.
3. Après les paquets complets, regarde les restes des entiers qui restent.

CORRECTION

Le nombre d'entiers —

$$1000 - 0 + 1 = 1001 = 6 \times 166 + 5$$

Les paquets complets — Les entiers de 0 à 995 forment 166 paquets de 6.

$$166 \times 3 = 498$$

Les 5 derniers — Trois d'entre eux (996, 997 et 999) sont en haut.

$$996,\ 997,\ 998,\ 999,\ 1000\ :\ \text{restes } 0, 1, 2, 3, 4$$

Le total —

$$498 + 3 = 501$$

On compte les paquets complets avec le quotient, puis les entiers restants un par un, avec leur reste.

PIÈGES ANTICIPÉS

`500` → Ce n'est pas exactement la moitié : il y a 1001 entiers, et parmi les 5 derniers, trois sont en haut.

`498` → N'oublie ni l'entier 0, ni les entiers après le dernier paquet complet.

EXERCICE 53 · BASE **Par la différence**

Un entier naturel d divise 527 et 510. Montrer que d divise 17, puis déterminer $\text{PGCD}(527, 510)$.

Donne le PGCD.

Réponse attendue : 17

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un diviseur commun à deux entiers divise leur différence.
2. 17 est premier : ses seuls diviseurs sont 1 et 17. Est-ce que 17 divise 527 et 510 ?

CORRECTION

La différence — d divise $527 - 510$.

$$527 - 510 = 17$$

Les diviseurs de 17 —

$$d = 1 \text{ ou } d = 17$$

Tester 17 —

$$527 = 17 \times 31 \quad ; \quad 510 = 17 \times 30$$

Un diviseur commun divise la différence : ici, elle ne laisse que deux candidats, 1 et 17.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → 17 divise bien 527 et 510 : ils ne sont pas premiers entre eux.

EXERCICE 54 · PRATIQUE **Deux expressions premières entre elles**

Soit n un entier naturel, et d un diviseur commun à $4n + 7$ et $3n + 5$. Calculer $3(4n + 7) - 4(3n + 5)$, puis donner la seule valeur possible de d.

Donne la valeur de d.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si d divise x, il divise $3x$; s'il divise y, il divise $4y$, puis la différence.
2. Développe : les termes en n disparaissent.

CORRECTION

Développer —

$3(4n+7) - 4(3n+5) = 12n + 21 - 12n - 20 = 1$

d divise 1 — d divise $3(4n+7)$ et $4(3n+5)$, donc leur différence, qui vaut 1.

$d = 1$

Pour montrer que deux expressions sont premières entre elles, on cherche une combinaison qui fait disparaître n et vaut 1.

PIÈGES ANTICIPÉS

-1 → Le diviseur d est un entier naturel, et la combinaison $3(4n+7) - 4(3n+5)$ vaut 1, pas -1.

EXERCICE 55 · RAISONNEMENT **n + 2 divise 3n + 17**

Déterminer l'entier naturel n tel que $n+2$ divise $3n+17$.

Donne n.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $3n + 17 = 3(n+2) + \dots$
2. $n+2$ divise $3(n+2)$: il doit donc diviser ce qui reste. Quels sont les diviseurs de ce reste ?
3. N'oublie pas que $n + 2 \geq 2$.

CORRECTION

Faire apparaître n + 2 —

$3n + 17 = 3(n+2) + 11$

n + 2 divise 11 — $n+2$ divise $3n+17$ et $3(n+2)$, donc leur différence 11.

$n + 2 \in \{1\,;11\}$

Écarter 1 —

$n + 2 \geq 2 \;\Rightarrow\; n + 2 = 11 \;\Rightarrow\; n = 9$

Vérifier —

$3 \times 9 + 17 = 44 = 11 \times 4$

On écrit le dividende comme un multiple du diviseur plus un nombre fixe : le diviseur doit diviser ce nombre.

PIÈGES ANTICIPÉS

11 → 11 est la valeur de $n+2$; on demande n.

EXERCICE 56 · BASE **Un PGCD par décomposition**

Calculer $\mathrm{PGCD}(504, 540)$.

Donne le PGCD.

Réponse attendue : 36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Décompose 504 et 540 en produits de facteurs premiers.
2. Garde les facteurs communs, chacun avec son plus petit exposant.

CORRECTION

Décomposer —

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \quad ; \quad 540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

Les facteurs communs —

$2^2 \times 3^2$

Le PGCD —

$\mathrm{PGCD}(504, 540) = 4 \times 9 = 36$

PGCD : facteurs communs, plus petits exposants.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7560` → 7560 est le PPCM : pour le PGCD, on ne garde que les facteurs **communs**, avec le **plus petit** exposant.

`108` → Tu as gardé $2^2 \times 3^3$: il faut le plus petit exposant de 3, c'est-à-dire 3^2.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Deux phares

Sur la côte, un phare s'allume toutes les 18 secondes et un autre toutes les 30 secondes. Ils viennent de s'allumer en même temps. Au bout de combien de secondes s'allumeront-ils de nouveau ensemble pour la première fois ?

Donne le nombre de secondes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les instants où le premier phare s'allume sont les multiples de 18 ; pour le second, les multiples de 30.
2. On cherche le plus petit multiple commun non nul.

CORRECTION

Décomposer —

$18 = 2 \times 3^2 \quad ; \quad 30 = 2 \times 3 \times 5$

Le PPCM —

$\mathrm{PPCM}(18, 30) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

« De nouveau ensemble pour la première fois » : c'est un PPCM.

PIÈGES ANTICIPÉS

`540` → $18 \times 30 = 540$ est un multiple commun, mais pas le plus petit : 18 et 30 ont des facteurs communs.

`6` → 6 est le PGCD. On cherche un instant qui soit un multiple des deux durées : un PPCM.

EXERCICE 58 · RAISONNEMENT

Retrouver le second nombre

Deux entiers naturels a et b vérifient $\mathrm{PGCD}(a, b) = 12$ et $\mathrm{PPCM}(a, b) = 360$. Sachant que $a = 72$, déterminer b.

Donne b.

Réponse attendue : `60`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le produit du PGCD et du PPCM de deux entiers est égal au produit de ces deux entiers.
2. $72 \times b = 12 \times 360$. Vérifie ensuite ton résultat.

CORRECTION

La relation —

$a \times b = \mathrm{PGCD}(a, b) \times \mathrm{PPCM}(a, b)$

Calculer b —

$72 \times b = 4320 \;\Rightarrow\; b = 60$

Vérifier —

$72 = 2^3 \times 3^2$; $60 = 2^2 \times 3 \times 5$; $\mathrm{PGCD} = 12$; $\mathrm{PPCM} = 360$

$\mathrm{PGCD}(a, b) \times \mathrm{PPCM}(a, b) = ab$: il permet de retrouver un nombre à partir de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

30 → $\dfrac{360}{12} = 30$ ne fait pas intervenir a : c'est le produit ab qui vaut 12×360.

EXERCICE 59 · BASE

Reste par 5

Déterminer le reste de la division euclidienne de 7483129 par 5.

Donne le reste.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 5, seul le chiffre des unités compte.
2. Divise le chiffre des unités par 5.

CORRECTION

Le chiffre des unités —

$u = 9$

Diviser par 5 —

$9 = 5 \times 1 + 4$

Le reste par 5 d'un entier est celui de son chiffre des unités.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → 9 est le chiffre des unités ; le reste par 5 est inférieur à 5 : divise encore 9 par 5.

1 → 1 est le reste par 2. Par 5 : $9 = 5 \times 1 + 4$.

EXERCICE 60 · PRATIQUE

Multiples de 5 impairs

Combien d'entiers compris entre 1 et 200 (inclus) sont divisibles par 5 sans être divisibles par 2 ?

Donne le nombre d'entiers.

Réponse attendue : 20

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un entier divisible par 5 se termine par 0 ou par 5. Lequel de ces deux chiffres le rend pair ?
2. Compte les multiples de 5 de 1 à 200, puis retire ceux qui se terminent par 0.

CORRECTION

Multiples de 5 —

$200 = 5 \times 40$: 40 multiples

Ceux qui sont pairs —

chiffre des unités 0 : $10, 20, \ldots, 200$: 20 nombres

Les autres — Ce sont les entiers qui se terminent par 5.

$40 - 20 = 20$

Divisible par 5 et pas par 2 : le chiffre des unités est 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

40 → Les 40 multiples de 5 comprennent ceux qui se terminent par 0, qui sont pairs.

EXERCICE 61 · PRATIQUE

Pair, et reste 3 par 5

Déterminer le chiffre a pour que l'entier $\overline{6\,4\,a}$ soit pair et ait pour reste 3 dans la division euclidienne par 5.

Donne le chiffre a.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le reste par 5 est celui du chiffre des unités a : quels chiffres ont pour reste 3 par 5 ?
2. Parmi eux, lequel rend le nombre pair ?

CORRECTION

Le reste par 5 —

$a = 3$ ou $a = 8$

Le nombre pair —

a pair $\Rightarrow a = 8$

Vérifier —

$648 = 5 \times 129 + 3$

Les deux conditions portent sur le même chiffre des unités : on liste, puis on trie.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 643 a bien pour reste 3 par 5, mais il est impair.

EXERCICE 62 · RAISONNEMENT **Un produit sans le calculer**

Sans effectuer la multiplication, déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de $N = 1234 \times 5678 + 91$.

Donne le reste.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le chiffre des unités d'un produit ne dépend que des chiffres des unités des facteurs.
2. Trouve le chiffre des unités de 1234×5678, puis celui de N.

CORRECTION

Unités du produit —

$4 \times 8 = 32 \Rightarrow 1234 \times 5678$ se termine par 2

Unités de N —

$2 + 1 = 3 \Rightarrow N$ se termine par 3

Le reste par 5 —

$3 = 5 \times 0 + 3$

Pour un reste par 2 ou par 5, le chiffre des unités suffit — et il se calcule sans tout le produit.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Le chiffre des unités de N s'obtient avec $4 \times 8 = 32$, puis $2 + 1 = 3$: n'oublie pas d'ajouter 91.

EXERCICE 63 · BASE **Reste par 4**

Déterminer le reste de la division euclidienne de 538714 par 4.

Donne le reste.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 4, on regarde le nombre formé par les deux derniers chiffres.
2. Divise 14 par 4.

CORRECTION

Les deux derniers chiffres —

$b = 14$

Diviser par 4 —

$14 = 4 \times 3 + 2$

Le reste par 4 d'un entier est celui du nombre formé par ses deux derniers chiffres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Le chiffre des unités ne suffit pas pour 4 : 100 est divisible par 4, pas 10. Il faut regarder 14.

EXERCICE 64 · PRATIQUE

Un chiffre pour 4

Déterminer tous les chiffres b pour que l'entier $\overline{3\,5\,7\,b}$ soit divisible par 4.

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{2;6}` — aussi acceptées : b = 2 ou b = 6 · 2 ou 6 · 2 et 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overline{3\,5\,7\,b}$ est divisible par 4 si et seulement si $\overline{7\,b}$ l'est.
2. Liste les multiples de 4 compris entre 70 et 79.

CORRECTION

Le critère —

$4 \mid \overline{7\,b}$

Les multiples de 4 —

$72 = 4 \times 18 \quad ; \quad 76 = 4 \times 19$

Les chiffres —

$b \in \{2\,;6\}$

Pour 4, on cherche les multiples de 4 parmi les nombres possibles formés par les deux derniers chiffres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{0;2;4;6;8}` → Il ne suffit pas que le nombre soit pair : 70, 74 et 78 ne sont pas divisibles par 4.

EXERCICE 65 · PRATIQUE

Par 4 et par 25

Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{6\,1\,x\,y}$ soit divisible par 4 et par 25. Donner le nombre obtenu.

Donne le nombre obtenu, écrit en entier.

Réponse attendue : `6100`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux critères portent sur le même nombre $\overline{x\,y}$, formé par les deux derniers chiffres.
2. Quels nombres de deux chiffres (de 00 à 99) sont divisibles par 25 ? Lesquels le sont aussi par 4 ?

CORRECTION

Par 25 —

$\overline{x\,y} \in \{00\,;25\,;50\,;75\}$

Par 4 —

$25 = 4 \times 6 + 1\ ;\ 50 = 4 \times 12 + 2\ ;\ 75 = 4 \times 18 + 3\ ;\ 0 = 4 \times 0$

Le nombre —

$x = 0\ ;\ y = 0\ :\ 6100$

Divisible par 4 et par 25 : les deux derniers chiffres forment un multiple de 100 inférieur à 100, donc 00.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6150` → 50 est divisible par 25, mais pas par 4 : $50 = 4 \times 12 + 2$.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

Un chiffre pour 8

Déterminer tous les chiffres a pour que l'entier $\overline{4\,1\,a\,6}$ soit divisible par 8.

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{3;7}` — aussi acceptées : a = 3 ou a = 7 · 3 ou 7 · 3 et 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 8, on regarde le nombre formé par les trois derniers chiffres : $\overline{1\,a\,6}$.
2. Cherche les multiples de 8 compris entre 106 et 196 qui se terminent par 6.

CORRECTION

Le critère —

$8 \mid \overline{1\,a\,6}$

Les multiples de 8 — Les autres nombres $106, 116, 126, 146, 156, 166, 186, 196$ ne sont pas divisibles par 8.

$136 = 8 \times 17 \quad ; \quad 176 = 8 \times 22$

Les chiffres —

$a \in \{3\,;7\}$

Pour 8, il faut les **trois** derniers chiffres, même si l'inconnu est au rang des dizaines.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1;3;5;7;9}` → Tu as utilisé le critère de 4, avec $\overline{a\,6}$. Pour 8, il faut les trois derniers chiffres : $\overline{1\,a\,6}$.

EXERCICE 67 · RAISONNEMENT

Par 8 et par 5

Déterminer les chiffres a et b pour que l'entier $\overline{7\,a\,2\,b}$ soit divisible par 8 et par 5, puis donner les nombres obtenus.

Écris l'ensemble des nombres obtenus entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{7120;7320;7520;7720;7920}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le critère de 5 : il ne porte que sur b. Puis le nombre doit être pair (car divisible par 8).
2. Avec b trouvé, cherche les a pour lesquels $\overline{a\,2\,0}$ est divisible par 8.

CORRECTION

Par 5 et pair —

$b \in \{0\,;5\}$ et b pair $\Rightarrow b = 0$

Par 8 — $\overline{a\,2\,0} = 100a + 20$: il est divisible par 8 lorsque a est impair (20, 220, 420… ne le sont pas).

$8 \mid \overline{a\,2\,0} \iff \overline{a\,2\,0} \in \{120\,;320\,;520\,;720\,;920\}$

Les nombres —

$\{7120\,;7320\,;7520\,;7720\,;7920\}$

On commence par le critère qui ne porte que sur un chiffre, puis on teste les trois derniers chiffres pour 8.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{7020;7120;7220;7320;7420;7520;7620;7720;7820;7920}` → 20 est divisible par 4, mais pour 8 il faut regarder $\overline{a\,2\,0}$: $220 = 8 \times 27 + 4$ n'est pas un multiple de 8.

EXERCICE 68 · DEFI

Par 8 et par 11

Trouver les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{2\,x\,9\,y\,6}$ soit divisible par 8 et par 11. Donner le nombre obtenu.

Donne le nombre obtenu, écrit en entier.

Réponse attendue : 23936

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le critère de 8 ne fait intervenir que y : $\overline{9\,y\,6}$ doit être divisible par 8.
2. Pour 11, de droite à gauche : $S_1 = 6 + 9 + 2$ et $S_2 = y + x$.

3. Pour chaque valeur de y, encadre $d = S_1 - S_2$ et cherche un multiple de 11.

CORRECTION

Par 8 —

$8 \mid \overline{9\,y\,6} \iff \overline{9\,y\,6} \in \{936\,;976\} \iff y \in \{3\,;7\}$

Le nombre d —

$S_1 = 17\,;\ S_2 = x + y\,;\ d = 17 - x - y$

Si y = 7 — Aucun multiple de 11 : pas de solution.

$d = 10 - x \in [1\,;10]$

Si y = 3 —

$d = 14 - x \in [5\,;14] \ \Rightarrow\ d = 11 \ \Rightarrow\ x = 3$

Le nombre —

$23936 = 8 \times 2992 = 11 \times 2176$

Deux inconnues, deux critères : celui des derniers chiffres d'abord, puis 11 cas par cas, en encadrant d.

PIÈGES ANTICIPÉS

`27976` → Avec $y = 7$, $d = 10 - x$ est compris entre 1 et 10 : jamais un multiple de 11. 27976 n'est pas divisible par 11.

EXERCICE 69 · BASE

Reste par 9

Déterminer le reste de la division euclidienne de 6392418 par 9.

Donne le reste.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 9, on calcule la somme des chiffres.
2. Divise ensuite cette somme par 9.

CORRECTION

La somme des chiffres —

$S = 6 + 3 + 9 + 2 + 4 + 1 + 8 = 33$

Diviser par 9 —

$33 = 9 \times 3 + 6$

Un entier et la somme de ses chiffres ont le même reste par 9.

PIÈGES ANTICIPÉS

`33` → 33 est la somme des chiffres ; le reste par 9 est inférieur à 9 : divise 33 par 9.

`0` → 0 est le reste par 3 ($33 = 3 \times 11$). Par 9 : $33 = 9 \times 3 + 6$.

EXERCICE 70 · PRATIQUE

Un chiffre pour 3

Déterminer tous les chiffres a pour que l'entier $\overline{5\,a\,1\,4}$ soit divisible par 3.

Écris l'ensemble entre accolades, les éléments séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{2;5;8}` — aussi acceptées : a = 2 ou a = 5 ou a = 8 · 2 ou 5 ou 8 · 2, 5 et 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme des chiffres vaut $10 + a$: elle doit être un multiple de 3.
2. Comme $0 \leq a \leq 9$, la somme est comprise entre 10 et 19.

CORRECTION

La somme des chiffres —

$S = 5 + a + 1 + 4 = 10 + a$

Les multiples de 3 —

$10 \leq S \leq 19 \;\Rightarrow\; S \in \{12\,;15\,;18\}$

Les chiffres —

$a \in \{2\,;5\,;8\}$

On encadre la somme des chiffres, puis on liste les multiples de 3 possibles : il peut y avoir plusieurs solutions.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{8}` → Avec $a = 8$, le nombre est divisible par 9, donc par 3. Mais 12 et 15 sont aussi des multiples de 3 : il y a d'autres solutions.

EXERCICE 71 · RAISONNEMENT

Un nombre écrit avec des 1

L'entier N s'écrit avec 2026 chiffres, tous égaux à 1 : $N = 111\ldots1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 9.

Donne le reste.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que vaut la somme des chiffres de N ?
2. N a le même reste par 9 que la somme de ses chiffres.

CORRECTION

La somme des chiffres —

$S = 2026 \times 1 = 2026$

Diviser par 9 —

$2026 = 9 \times 225 + 1$

Le critère de 9 marche quel que soit le nombre de chiffres : on n'a jamais besoin d'écrire N.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2026` → 2026 est la somme des chiffres ; divise-la par 9 pour obtenir le reste.

`0` → 2026 n'est pas un multiple de 9 : $2+0+2+6 = 10$.

EXERCICE 72 · DEFI

Les entiers de 1 à 99 à la suite

On écrit à la suite tous les entiers de 1 à 99 : $N = 123456789101112\ldots9899$. Calculer la somme S des chiffres de N. (On en déduira que N est divisible par 9.)

Donne la somme des chiffres S.

Réponse attendue : `900`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sépare les entiers à un chiffre (1 à 9) et ceux à deux chiffres (10 à 99).
2. Pour 10 à 99 : combien de fois chaque chiffre $1, \ldots, 9$ apparaît-il comme chiffre des dizaines ? Et chaque chiffre $0, \ldots, 9$ comme chiffre des unités ?

CORRECTION

De 1 à 9 —

$1 + 2 + \cdots + 9 = 45$

Les dizaines de 10 à 99 — Chaque chiffre de 1 à 9 est chiffre des dizaines de 10 nombres.

$10 \times (1 + 2 + \cdots + 9) = 450$

Les unités de 10 à 99 — Chaque chiffre de 0 à 9 est chiffre des unités de 9 nombres (une fois par dizaine).

$9 \times (0 + 1 + \cdots + 9) = 405$

La somme —

$S = 45 + 450 + 405 = 900$

On compte les chiffres par position : $S = 900$ est un multiple de 9, donc N est divisible par 9.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4950` → 4950 est la somme des **nombres** de 1 à 99 ; on demande la somme de leurs **chiffres**.

`855` → N'oublie pas les entiers à un chiffre, de 1 à 9 : ils ajoutent 45.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

Farine et semoule

Un épicier possède sept sacs de 4 ; 5 ; 9 ; 14 ; 15 ; 18 et 22 kg. Il en remplit six, chacun entièrement de farine ou entièrement de semoule, et laisse un sac vide. Il a mis trois fois plus de farine que de semoule. Quelle est la masse m, en kg, que peut contenir le sac vide ?

Donne la masse en kg, en chiffres seulement.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si s est la masse de semoule, la farine pèse $3s$: combien pèsent les six sacs pleins ?
2. La masse totale des sacs pleins est un multiple de 4. Calcule la contenance totale des sept sacs et son reste par 4.

CORRECTION

La masse remplie — Les sacs pleins contiennent un multiple de 4.

$s + 3s = 4s$

Le total —

$4 + 5 + 9 + 14 + 15 + 18 + 22 = 87 = 4 \times 21 + 3$

Le sac vide — Restes par 4 : $0, 1, 1, 2, 3, 2, 2$. Seul 15 a pour reste 3.

$87 - m$ multiple de $4 \;\Rightarrow\; m$ a pour reste 3 par 4

Vérifier —

$s = 18 = 4 + 5 + 9 \quad ; \quad 3s = 54 = 14 + 18 + 22$

Un rapport « trois fois plus » rend le total multiple de 4 : on compare les restes par 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`18` → 18 kg est la masse de semoule. On demande la contenance du sac vide.

`9` → Avec « trois fois plus », le total est $s + 3s = 4s$: un multiple de 4, pas de 3.

EXERCICE 74 · DEFI

Eau de rose et eau de fleur d'oranger

À Nabeul, un artisan possède huit bidons de 5 ; 6 ; 9 ; 11 ; 12 ; 17 ; 24 et 32 litres. Il les remplit entièrement, chacun d'un seul produit : du sirop, de l'eau de fleur d'oranger et de l'eau de rose. Il met trois fois plus d'eau de fleur d'oranger que de sirop, et deux fois plus d'eau de rose que d'eau de fleur d'oranger. Un seul bidon reste vide. Quelle quantité de sirop, en litres, a-t-il préparée ?

Donne la quantité de sirop en litres, en chiffres seulement.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si s est la quantité de sirop, exprime les deux autres en fonction de s : le total rempli est un multiple de quel nombre ?
2. Le total rempli vaut $10s$. Calcule la contenance totale des huit bidons : quel bidon peut être vide ?
3. Une fois le bidon vide trouvé, divise le volume rempli par 10.

CORRECTION

Le volume rempli —

$s + 3s + 6s = 10s$

Le total —

$5 + 6 + 9 + 11 + 12 + 17 + 24 + 32 = 116$

Le bidon vide — Seul le bidon de 6 litres se termine par 6.

$116 - v$ multiple de $10 \;\Rightarrow\; v = 6$

Le sirop —

$10s = 110 \;\Rightarrow\; s = 11$

Vérifier —

$11\ ;\ 33 = 9 + 24\ ;\ 66 = 5 + 12 + 17 + 32$

Les rapports donnent un total multiple de 10 : le chiffre des unités désigne le bidon vide, puis la quantité de sirop.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → 6 litres est la contenance du bidon vide ; on demande la quantité de sirop.

`110` → 110 litres est le volume total rempli, soit $10s$: divise par 10.

EXERCICE 75 · BASE

Le quotient de $10^4 - 1$ par 11

On sait que $10^4 - 1$ est divisible par 11. Calculer le quotient de $10^4 - 1$ par 11.

Donne le quotient.

Réponse attendue : `909`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris d'abord $10^4 - 1$ en chiffres.
2. $99 = 11 \times 9$: que vaut 9999 comme multiple de 99 ?

CORRECTION

Écrire le nombre —

$10^4 - 1 = 9999$

Faire apparaître 99 —

$9999 = 99 \times 101 = 11 \times 9 \times 101$

Le quotient —

$9999 = 11 \times 909$

$10^4 - 1 = (10^2 - 1) \times 101$: on retrouve le multiple de 11 qu'est 99.

PIÈGES ANTICIPÉS

`909.09` → Le nombre est $10^4 - 1 = 9999$, pas 10^4.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Les nombres de la forme abba

Soient a et b deux chiffres, avec $a \neq 0$. Montrer que l'entier $\overline{a\,b\,b\,a}$ est divisible par 11 : déterminer l'expression k, en fonction de a et b, telle que $\overline{a\,b\,b\,a} = 11k$.

Donne k en fonction de a et b.

Réponse attendue : `91a+10b`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\overline{a\,b\,b\,a}$ avec les puissances de 10 : $1000a + 100b + 10b + a$.
2. Regroupe les termes en a et en b, puis vérifie que 1001 et 110 sont des multiples de 11.

CORRECTION

Développer —

$\overline{a\,b\,b\,a} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b$

Factoriser par 11 —

$1001 = 11 \times 91 \quad ; \quad 110 = 11 \times 10$

Conclure —

$\overline{a\,b\,b\,a} = 11(91a + 10b)$

Écrire un nombre avec ses chiffres et les puissances de 10 permet de montrer une divisibilité pour tous les chiffres à la fois.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1001a+110b` → $1001a + 110b$ est le nombre lui-même ; k est ce nombre divisé par 11.

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Le reste de 10^7 par 11

Sachant que $10^7 + 1$ est divisible par 11, déterminer le reste de la division euclidienne de 10^7 par 11.

Donne le reste.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $10^7 + 1 = 11k$: alors $10^7 = 11k - 1$.
2. Un reste est positif : fais apparaître $11(k-1) + \ldots$

CORRECTION

Le multiple de 11 —

$10^7 + 1 = 11k \;\Rightarrow\; 10^7 = 11k - 1$

Rendre le reste positif —

$10^7 = 11(k-1) + 11 - 1 = 11(k-1) + 10$

Vérifier —

$0 \leq 10 < 11 \quad ; \quad 10^7 = 11 \times 909090 + 10$

« 11 divise $N + 1$ » signifie que le reste de N par 11 est 10.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1` → Un reste de division euclidienne est positif ou nul : $11k - 1 = 11(k-1) + 10$.

`1` → Le reste 1 correspondrait à « 11 divise $10^7 - 1$ ». Ici c'est $10^7 + 1$ qui est multiple de 11.

EXERCICE 78 · DEFI

Le reste de 10^{2026} par 11

En utilisant la propriété « si 11 divise $N - 1$, alors 11 divise $10^2 N - 1$ », déterminer le reste de la division euclidienne de 10^{2026} par 11.

Donne le reste.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence avec $N = 10^2$: 11 divise $10^2 - 1 = 99$. La propriété donne alors $10^4 - 1$, puis…
2. De proche en proche, 11 divise $10^{2m} - 1$ pour tout entier $m \geq 1$. Est-ce que 2026 est pair ?

CORRECTION

Le départ —

$10^2 - 1 = 99 = 11 \times 9$

De proche en proche — Donc 11 divise $10^{2m} - 1$ pour tout $m \geq 1$.

$11 \mid 10^{2m} - 1 \;\Rightarrow\; 11 \mid 10^2 \times 10^{2m} - 1 = 10^{2m+2} - 1$

Avec 2026 = 2 × 1013 —

$11 \mid 10^{2026} - 1$

Le reste —

$10^{2026} = 11k + 1 \quad (0 \leq 1 < 11)$

Une puissance **paire** de 10 a pour reste 1 par 11, une puissance impaire a pour reste 10.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Le reste 10 est celui des puissances **impaires** de 10 ; 2026 est pair.

EXERCICE 79 · BASE **Reste par 11**

Déterminer le reste de la division euclidienne de 294816 par 11.

Donne le reste.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Numérote les chiffres de droite à gauche : le chiffre des unités est de rang 1.
2. Calcule S_1 (rangs impairs), S_2 (rangs pairs), puis $d = S_1 - S_2$, et divise d par 11.

CORRECTION

Les rangs — De droite à gauche : 6 (rang 1), $1, 8, 4, 9, 2$ (rang 6).

Les deux sommes —

$S_1 = 6 + 8 + 9 = 23 \quad ; \quad S_2 = 1 + 4 + 2 = 7$

Le nombre d —

$d = 23 - 7 = 16$

Diviser par 11 —

$16 = 11 \times 1 + 5$

Par 11 : rangs comptés **à partir des unités**, $d = S_1 - S_2$, puis reste de d par 11.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → Tu as compté les rangs de gauche à droite. Le rang 1 est celui du chiffre des **unités**.

`16` → 16 est le nombre d ; il dépasse 11 : divise-le encore par 11.

EXERCICE 80 · PRATIQUE **Un palindrome de six chiffres**

Vérifier avec le critère que 735537 est divisible par 11, puis calculer le quotient de 735537 par 11.

Donne le quotient.

Réponse attendue : 66867

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De droite à gauche, les chiffres de rang impair sont $7, 5, 3$ et ceux de rang pair $3, 5, 7$.
2. Pour le quotient, pose la division ou utilise la calculatrice.

CORRECTION

Les deux sommes —

$S_1 = 7 + 5 + 3 = 15 \quad ; \quad S_2 = 3 + 5 + 7 = 15$

Le nombre d — d est divisible par 11 : 735537 aussi.

$d = 0$

Le quotient —

$735537 = 11 \times 66867$

Dans un palindrome de six chiffres, $S_1 = S_2$: il est toujours divisible par 11.

EXERCICE 81 · DEFI **Le chiffre du milieu**

On considère les entiers de trois chiffres $\overline{a\,b\,c}$ ($a \neq 0$) dont le chiffre du milieu est la somme des deux autres : $b = a + c$. Montrer qu'ils sont tous divisibles par 11, puis déterminer combien il y en a.

Donne le nombre d'entiers.

Réponse attendue : 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour 11 : $S_1 = c + a$ et $S_2 = b$. Que vaut d lorsque $b = a + c$?
2. Pour compter : $b = a + c$ doit être un chiffre, donc $a + c \leq 9$. Pour $a = 1$, combien de valeurs de c ?

CORRECTION

Le critère — $d = 0$ est divisible par 11 : le nombre aussi.

$$d = (c + a) - b = 0$$

La condition —

$$1 \leq a \leq 9\ ;\ 0 \leq c \leq 9 - a$$

Compter —

$$a = 1 : 9 \text{ valeurs de } c\ ;\ a = 2 : 8\ ;\ \ldots\ ;\ a = 9 : 1$$

Le total —

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

Le critère montre la divisibilité pour tous les nombres d'un coup ; on compte ensuite en fixant le premier chiffre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`90` → $b = a + c$ doit rester un chiffre : $a + c \leq 9$. Toutes les paires (a, c) ne conviennent pas.

`36` → c peut valoir 0 : $110 = 11 \times 10$ convient, avec $b = 1 + 0$.

EXERCICE 82 · BASE

d négatif

Déterminer le reste de la division euclidienne de 6172 par 11.

Donne le reste.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De droite à gauche : $2, 7, 1, 6$. Calcule $d = S_1 - S_2$.
2. d est négatif : ajoute le plus petit multiple de 11 qui le rend positif ou nul.

CORRECTION

Les deux sommes —

$$S_1 = 2 + 1 = 3 \quad ; \quad S_2 = 7 + 6 = 13$$

Le nombre d —

$$d = 3 - 13 = -10$$

Ajouter 11 —

$$-10 + 11 = 1 \geq 0$$

Quand $d < 0$, le reste est $d + 11p$, avec p le plus petit entier qui le rend positif ou nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Tu as pris 10 au lieu de -10 : le reste est $-10 + 11 = 1$.

`-10` → Un reste est positif ou nul : ajoute 11 à $d = -10$.

EXERCICE 83 · PRATIQUE

Ajouter trois fois 11

Déterminer le reste de la division euclidienne de 90807162 par 11.

Donne le reste.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De droite à gauche : $2, 6, 1, 7, 0, 8, 0, 9$.
2. d est très négatif : combien de fois faut-il ajouter 11 pour qu'il devienne positif ou nul ?

CORRECTION

Les deux sommes —

$S_1 = 2 + 1 + 0 + 0 = 3 \quad ; \quad S_2 = 6 + 7 + 8 + 9 = 30$

Le nombre d —

$d = 3 - 30 = -27$

Le plus petit p — $p = 3$.

$-27 + 22 = -5 < 0 \quad ; \quad -27 + 33 = 6 \geq 0$

Le reste —

$d + 11p = 6$

On ajoute 11 autant de fois qu'il faut, et pas plus : le résultat est entre 0 et 10.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Tu as divisé 27 par 11 au lieu de -27 : le reste de 90807162 est $-27 + 33 = 6$.

-5 → $-27 + 22 = -5$ est encore négatif : il faut ajouter 33.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

Un chiffre pour un reste imposé

Déterminer le chiffre a pour que l'entier $\overline{9\,a\,9\,1}$ ait pour reste 5 dans la division euclidienne par 11.

Donne le chiffre a.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De droite à gauche : $1, 9, a, 9$. Exprime d en fonction de a.
2. $d = a - 17$ est négatif pour tous les chiffres a : selon a, faut-il ajouter 11 ou 22 ?

CORRECTION

Le nombre d —

$S_1 = 1 + a$; $S_2 = 9 + 9 = 18$; $d = a - 17$

Si a ≥ 6 — Il ne peut pas valoir 5.

$d + 11 = a - 6 \geq 0$: reste $a - 6 \leq 3$

Si a ≤ 5 —

$d + 11 < 0$; $d + 22 = a + 5$: $a + 5 = 5 \Rightarrow a = 0$

Vérifier —

$9091 = 11 \times 826 + 5$

Quand d dépend du chiffre inconnu, on sépare les cas selon le nombre de fois qu'il faut ajouter 11.

PIÈGES ANTICIPÉS

11 → $a - 6 = 5$ donnerait $a = 11$, qui n'est pas un chiffre : il faut l'autre cas, avec $d + 22$.

9091 → 9091 est le nombre obtenu ; on demande le chiffre a.

EXERCICE 85 · PRATIQUE

Par 5 et par 9

Déterminer les chiffres a et b pour que l'entier $\overline{4\,a\,7\,b}$ soit divisible par 5 et par 9, puis donner les nombres obtenus.

Écris l'ensemble des nombres obtenus entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{4275;4770}` — aussi acceptées : {(2,5);(7,0)} · (a,b)=(2,5) ou (7,0) · {(2;5);(7;0)} · (a;b)=(2;5) ou (7;0) · 4275 ou 4770 · 4275 et 4770

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le critère de 5 ne porte que sur b : deux cas.
2. Dans chaque cas, la somme des chiffres doit être un multiple de 9 ; encadre-la.

CORRECTION

Par 5 —

$b = 0$ ou $b = 5$

Si b = 0 —

$S = 11 + a \in [11\,;20] \;\Rightarrow\; S = 18 \;\Rightarrow\; a = 7$

Si b = 5 —

$S = 16 + a \in [16\,;25] \;\Rightarrow\; S = 18 \;\Rightarrow\; a = 2$

Les nombres —

$\{4275\,;4770\}$

Le critère qui porte sur un seul chiffre fixe les cas ; on traite chaque cas avec l'autre critère.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4770}` / `{4275}` → Il y a deux cas, $b = 0$ et $b = 5$: chacun donne un nombre.

EXERCICE 86 · DEFI

Par 3, par 4 et par 11

Trouver les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{7\,x\,y\,6}$ soit divisible par 3, par 4 et par 11. Donner le nombre obtenu.

Donne le nombre obtenu, écrit en entier.

Réponse attendue : 7656

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par 4 : $\overline{y\,6}$ doit être un multiple de 4. Quels chiffres y conviennent ?
2. Par 11 : $d = (6 + x) - (y + 7) = x - y - 1$. Encadre d : quel multiple de 11 est possible ?
3. Termine avec le critère de 3.

CORRECTION

Par 4 —

$\overline{y\,6} \in \{16\,;36\,;56\,;76\,;96\} \;\Rightarrow\; y$ impair

Par 11 —

$d = x - y - 1 \in [-10\,;8] \;\Rightarrow\; d = 0 \;\Rightarrow\; x = y + 1$

Par 3 — Pour $y = 1, 3, 5, 7$: $S = 16, 20, 24, 28$. Seul 24 est multiple de 3.

$S = 7 + (y + 1) + y + 6 = 2y + 14$

Le nombre —

$y = 5\,;\; x = 6\;:\; 7656 = 3 \times 2552 = 4 \times 1914 = 11 \times 696$

Avec trois critères, on enchaîne : celui qui ne porte que sur un chiffre, puis celui qui relie les deux, puis le dernier pour trancher.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7216` / `7436` / `7876` → Ce nombre est divisible par 4 et par 11, mais pas par 3 : vérifie la somme des chiffres.

EXERCICE 87 · BASE

Ajouter 10

Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel n par 7 est 4. Déterminer le reste de la division euclidienne de $n + 10$ par 7.

Donne le reste.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $n = 7k + 4$, avec k entier naturel.
2. Calcule $n + 10$ et fais apparaître un multiple de 7.

CORRECTION

Écrire n —

$$n = 7k + 4$$

Ajouter 10 —

$$n + 10 = 7k + 14 = 7(k + 2) + 0$$

On écrit $n = 7k + r$, puis on ramène l'expression à la forme $7 \times \ldots + r'$ avec $0 \leq r' < 7$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`14` → 14 n'est pas un reste par 7 : $14 = 7 \times 2 + 0$.

EXERCICE 88 · PRATIQUE

Les restes d'un carré par 5

Soit n un entier naturel. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 5 ?

Écris l'ensemble des restes entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{0;1;4}` — aussi acceptées : 0 ou 1 ou 4 · 0, 1 et 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le reste de n par 5 vaut 0, 1, 2, 3 ou 4 : traite les cinq cas $n = 5k + r$.
2. $(5k + r)^2 = 5(5k^2 + 2kr) + r^2$: il reste à diviser r^2 par 5.

CORRECTION

Les cinq cas —

$$(5k + r)^2 = 5(5k^2 + 2kr) + r^2$$

Les carrés des restes —

$$0^2 = 0\ ;\ 1^2 = 1\ ;\ 2^2 = 4\ ;\ 3^2 = 9\ ;\ 4^2 = 16$$

Leurs restes par 5 —

$$0\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 4\ ;\ 1$$

Les restes possibles —

$$\{0\,;1\,;4\}$$

Un carré n'a pas tous les restes possibles : par 5, jamais 2 ni 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{0;1;2;3;4}` → Ce sont les restes possibles de n, pas de n^2 : n^2 n'a jamais pour reste 2 ou 3 par 5.

`{0;1;4;9;16}` → 9 et 16 ne sont pas des restes par 5 : $9 = 5 + 4$ et $16 = 15 + 1$.

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

Quand n² + 2 est-il divisible par 3 ?

Soit n un entier naturel et r le reste de sa division euclidienne par 3. Pour quelles valeurs de r l'entier $n^2 + 2$ est-il divisible par 3 ?

Écris l'ensemble des valeurs de r entre accolades, séparées par des points-virgules.

Réponse attendue : `{1;2}` — aussi acceptées : r = 1 ou r = 2 · 1 ou 2 · 1 et 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traite les trois cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$.
2. Dans chaque cas, développe $n^2 + 2$ et regarde s'il s'écrit $3 \times \ldots$

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

CORRECTION

Si n = 3k — Reste 2 : non divisible.

$n^2 + 2 = 9k^2 + 2 = 3(3k^2) + 2$

Si n = 3k + 1 —

$n^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1)$

Si n = 3k + 2 —

$n^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 = 3(3k^2 + 4k + 2)$

Conclure —

$r \in \{1\,;2\}$

$n^2 + 2$ est divisible par 3 exactement quand n ne l'est pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1}` / `{2}` → Les deux cas $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$ donnent tous les deux un multiple de 3.

`{0}` / `{0;1;2}` → Pour $n = 3k$, $n^2 + 2 = 3(3k^2) + 2$ a pour reste 2 : ce cas ne convient pas.

EXERCICE 90 · DEFI

Un grand carré

Sans calculer le carré, déterminer le reste de la division euclidienne de $7315448^2 + 1$ par 3.

Donne le reste.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le reste de 7315448 par 3 : utilise la somme de ses chiffres.
2. Si $n = 3k + 2$, que vaut n^2 sous la forme $3 \times \ldots + \ldots$?

CORRECTION

Le reste de n par 3 —

$7 + 3 + 1 + 5 + 4 + 4 + 8 = 32 = 3 \times 10 + 2 \;\Rightarrow\; n = 3k + 2$

Le carré —

$n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

Ajouter 1 —

$n^2 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2$

Critère de 3 pour le reste de n, puis calcul sur les restes : on n'a jamais besoin du grand nombre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → 1 est le reste de n^2 ; il faut encore ajouter 1.

`0` → Le reste de n est 2, celui de n^2 est le reste de $2^2 = 4$, soit 1 ; puis on ajoute 1.

EXERCICE 91 · DEFI

Les restes d'un cube par 9

Soit n un entier naturel. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 9 ?

Écris l'ensemble des restes entre accolades, séparés par des points-virgules.

Réponse attendue : `{0;1;8}` — aussi acceptées : 0 ou 1 ou 8 · 0, 1 et 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il suffit de trois cas : $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$.
2. Développe $(3k + 1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$: tous les termes sauf un sont multiples de 9.

CORRECTION

Si n = 3k — Reste 0.

$n^3 = 27k^3 = 9 \times 3k^3$

Si n = 3k + 1 —

$n^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$

Si n = 3k + 2 —

$n^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8$

Les restes possibles —

$\{0\,;1\,;8\}$

Pour des restes par 9, trois cas suffisent ici : en développant, les termes en k sont tous multiples de 9.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{0;1;2}` → $0, 1, 2$ sont les restes de n par 3. Par 9, $(3k+2)^3$ a pour reste 8.

`{0;1;2;3;4;5;6;7;8}` → Un cube n'a que trois restes possibles par 9 : développe les trois cas.

EXERCICE 92 · BASE

Le chiffre des unités de 3^{87}

Quel est le chiffre des unités de 3^{87} ?

Donne le chiffre.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les chiffres des unités des puissances de 3 se répètent tous les 4 : $1, 3, 9, 7, 1, 3, \ldots$
2. Cherche le reste de 87 par 4.

CORRECTION

Le reste par 4 —

$87 = 4 \times 21 + 3$

Comme 3 puissance 3 — Le chiffre des unités de 3^{87} est celui de 3^3.

$3^3 = 27$

Le chiffre des unités de 3^n est celui de 3^r, où r est le reste de n par 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est le reste de 87 par 4 ; le chiffre des unités est celui de $3^3 = 27$.

EXERCICE 93 · PRATIQUE

Le chiffre des unités de 7^{2026}

Quel est le chiffre des unités de 7^{2026} ?

Donne le chiffre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les chiffres des unités de $7^0, 7^1, 7^2, 7^3, 7^4$: se répètent-ils ?
2. Le chiffre des unités d'un produit ne dépend que des chiffres des unités des facteurs.

CORRECTION

Les premières puissances —

$7^0 = 1\ ;\ 7^1 = 7\ ;\ 7^2 = 49\ ;\ 7^3 = 343\ ;\ 7^4 = 2401$

La période — 7^4 se termine par 1 : le cycle recommence tous les 4.

$1,\ 7,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7,\ \ldots$

Le reste par 4 —

$2026 = 4 \times 506 + 2$

Comme 7 puissance 2 —

$7^2 = 49$

La méthode des puissances de 3 s'applique à 7 : on cherche la période, puis le reste de l'exposant.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est le reste de 2026 par 4 ; le chiffre des unités est celui de $7^2 = 49$.

7 → Le reste 2 correspond à 7^2, pas à 7^1.

EXERCICE 94 · PRATIQUE

Le chiffre des unités de 2^{100}

Quel est le chiffre des unités de 2^{100} ?

Donne le chiffre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les chiffres des unités de 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 : $2, 4, 8, 6, 2$…
2. Le cycle commence à 2^1, pas à 2^0 : à quelle puissance du cycle correspond un exposant multiple de 4 ?

CORRECTION

Les premières puissances — Les chiffres des unités se répètent : $2, 4, 8, 6$.

$2\ ;\ 4\ ;\ 8\ ;\ 16\ ;\ 32\ ;\ 64\ ;\ \ldots$

Le reste par 4 —

$100 = 4 \times 25 + 0$

Comme 2 puissance 4 — Un nombre qui se termine par 6, élevé à une puissance, se termine par 6.

$2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$

Attention au départ du cycle : pour 2, le chiffre 1 de 2^0 ne revient jamais ; le cycle est $2, 4, 8, 6$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → $2^0 = 1$, mais 1 ne revient jamais ensuite : $2^4 = 16$, $2^8 = 256$… Un exposant multiple de 4 donne 6.

0 → 0 est le reste de 100 par 4 ; aucune puissance de 2 ne se termine par 0.

EXERCICE 95 · RAISONNEMENT

Le reste de 3^{2027} par 5

Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{2027} par 5.

Donne le reste.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le reste par 5 d'un entier ne dépend que de son chiffre des unités.
2. Trouve d'abord le chiffre des unités de 3^{2027} avec le reste de 2027 par 4.

CORRECTION

Le reste par 4 —

$2027 = 4 \times 506 + 3$

Le chiffre des unités —

comme $3^3 = 27\ :\ 7$

Le reste par 5 —

$7 = 5 \times 1 + 2$

On enchaîne deux résultats du chapitre : le chiffre des unités de 3^n, puis le critère de 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7 est le chiffre des unités ; un reste par 5 est inférieur à 5 : divise 7 par 5.

3 → 3 est le reste de l'exposant par 4, pas celui de 3^{2027} par 5.

EXERCICE 96 · DEFI

Une somme de deux puissances

Déterminer le reste de la division euclidienne de $3^{2025} + 7^{2025}$ par 10.

Donne le reste.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le reste par 10 est le chiffre des unités. Cherche celui de 3^{2025}, puis celui de 7^{2025}.
2. Les deux cycles ont une période 4 : $1, 3, 9, 7$ pour 3 et $1, 7, 9, 3$ pour 7.

CORRECTION

Le reste par 4 —

$2025 = 4 \times 506 + 1$

Les chiffres des unités —

3^{2025} : comme $3^1 \to 3$; 7^{2025} : comme $7^1 \to 7$

La somme —

$3 + 7 = 10 \Rightarrow$ la somme se termine par 0

Le chiffre des unités d'une somme est celui de la somme des chiffres des unités.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 n'est pas un reste par 10 : la somme se termine par 0.

`1` → On additionne les deux puissances, on ne les multiplie pas : $3 + 7 = 10$, qui se termine par 0.

EXERCICE 97 · BASE

Un nombre parfait

Calculer la somme des diviseurs propres de 28 (ses diviseurs autres que lui-même).

Donne la somme.

Réponse attendue : 28

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche les diviseurs de 28 par paires : 1×28, 2×14…
2. N'ajoute pas 28 lui-même.

CORRECTION

Les diviseurs —

$28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$

Les diviseurs propres —

$1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 14$

La somme —

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

28 est égal à la somme de ses diviseurs propres : on dit qu'il est **parfait**, comme s'il était « amiable avec lui-même ».

PIÈGES ANTICIPÉS

`56` → Les diviseurs propres excluent 28 lui-même : $56 - 28 = 28$.

EXERCICE 98 · PRATIQUE

La clé d'un code-barre

Les douze premiers chiffres d'un code-barre sont 619735208914. La somme des sept chiffres de rang impair (rangs comptés de gauche à droite, la clé étant le 13^{e} chiffre) et du triple de la somme des chiffres de rang pair doit être divisible par 10. Déterminer la clé de contrôle k.

Donne la clé k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les rangs impairs sont $1, 3, 5, 7, 9, 11$ et 13 (la clé) ; les rangs pairs sont $2, 4, \ldots, 12$.
2. Calcule $S_{\text{impair}} + 3S_{\text{pair}}$ en fonction de k, puis cherche le chiffre k qui donne un multiple de 10.

CORRECTION

Les rangs impairs —

$$6 + 9 + 3 + 2 + 8 + 1 + k = 29 + k$$

Les rangs pairs —

$$3 \times (1 + 7 + 5 + 0 + 9 + 4) = 3 \times 26 = 78$$

La condition —

$$107 + k \text{ divisible par } 10 \;\Rightarrow\; k = 3$$

La clé est le seul chiffre qui complète la somme pondérée jusqu'au multiple de 10 suivant.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Les chiffres de rang pair comptent **trois fois** : $29 + k + 78$, pas $29 + k + 26$.

7 → 107 se termine par 7 : il faut ajouter 3 pour atteindre 110, pas 7.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

Un chiffre effacé

Sur un code-barre de 13 chiffres, un chiffre est effacé : $619x058273146$ (la clé 6 est comprise). Avec la règle du code-barre — somme des chiffres de rang impair plus triple de la somme des chiffres de rang pair, rangs comptés de gauche à droite, divisible par 10 — déterminer le chiffre x.

Donne le chiffre x.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. x est le 4^{e} chiffre : il est de rang pair, il compte donc trois fois.
2. Exprime la somme pondérée en fonction de x, puis essaie les chiffres : $3x$ doit se terminer par un chiffre bien précis.

CORRECTION

Les rangs impairs —

$$6 + 9 + 0 + 8 + 7 + 1 + 6 = 37$$

Les rangs pairs —

$$1 + x + 5 + 2 + 3 + 4 = 15 + x$$

La somme pondérée —

$$37 + 3(15 + x) = 82 + 3x$$

La condition — $3x$ vaut au plus 27 : seul 18 se termine par 8.

$$3x \text{ se termine par } 8 \;\Rightarrow\; 3x = 18 \;\Rightarrow\; x = 6$$

Vérifier —

$$82 + 18 = 100$$

Un chiffre de rang pair compte trois fois : la condition porte sur le chiffre des unités de $3x$.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → Le 4^{e} chiffre est de rang pair : il compte trois fois. $82 + 8 = 90$ suppose qu'il ne compte qu'une fois.

EXERCICE 100 · DEFI

Thabit Ibn Qurra pour n = 3

Avec les notations du théorème de Thabit Ibn Qurra, $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \times 2^{n} - 1$ et $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$. Pour $n = 3$, calculer r et montrer qu'il n'est pas premier : donner son plus petit diviseur premier.

Donne le plus petit diviseur premier de r.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $n = 3$, $2n - 1 = 5$: calcule $9 \times 2^5 - 1$.
2. Teste les nombres premiers dans l'ordre : $2, 3, 5, 7$... avec les critères du chapitre, puis une division.

CORRECTION

Calculer r —

$r = 9 \times 2^5 - 1 = 9 \times 32 - 1 = 287$

Ni 2, ni 3, ni 5 —

287 impair ; $2 + 8 + 7 = 17$; unités 7

Essayer 7 —

$287 = 7 \times 41$

Conclure — r n'est pas premier : le théorème ne s'applique pas pour $n = 3$.

plus petit diviseur premier : 7

On teste les diviseurs premiers dans l'ordre, en s'aidant des critères : le premier qui divise est le plus petit.

PIÈGES ANTICIPÉS

287 → 287 est la valeur de r ; on demande son plus petit diviseur premier.

41 → 41 divise bien 287, mais ce n'est pas le plus petit diviseur premier.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI