– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Barycentre

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro six : barycentre. Bech nabdew b tige w zouz masses, w nchoufou win yji le point d'équilibre. Men ghadi n3arrfou le barycentre de deux points pondérés, w nchoufou win yji 3la la droite, w kifech nrasmouh. Ba3d net3addew l le barycentre de trois points, w le barycentre partiel. W nkammlou b des problèmes : alignement, droites concourantes w ensembles de points.

عسلامة ! الـ chapitre numéro six : barycentre . باش نبداو بـ tige w زوز masses ، w نشوفو وين يجي le point d'équilibre . من غادي نعرّفو le barycentre de deux points pondérés ، w نشوفو وين يجي على la droite ، w كيفاش نرسموه . بعد نتعدّاو لـ le barycentre partiel . w نكمّلو بـ le barycentre de trois points ، w des problèmes : alignement ، droites concourantes w ensembles de points .

Bonjour ! Le chapitre numéro six : barycentre. Nous commencerons par une tige et deux masses, et nous verrons où se place le point d'équilibre. De là, nous définirons le barycentre de deux points pondérés, nous verrons où il se trouve sur la droite, et comment le construire. Puis nous passerons au barycentre de trois points, et au barycentre partiel. Et nous terminerons par des problèmes : alignement, droites concourantes et ensembles de points.

Où placer le crochet pour qu'une tige chargée de deux masses reste horizontale ? Ce **point d'équilibre** est le barycentre : un point qui « pèse » plusieurs points à la fois, chacun avec son coefficient.

On le définit d'abord pour deux points, on apprend à le placer et à le construire, puis on passe à trois points. Le barycentre devient alors un outil : il réduit des sommes de vecteurs, et il prouve des alignements, des parallélismes et des concours de droites.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Écrire la relation vectorielle qui définit un barycentre
  > Écrire la relation vectorielle qui définit le barycentre de deux ou de trois points pondérés.
  > *Écrire la relation vectorielle qui définit le barycentre de deux ou de trois points pondérés.*
- Placer et construire le barycentre de deux points
  > Placer et construire le barycentre de deux points : la formule, la méthode des parallèles et la méthode du parallélogramme.
  > *Placer et construire le barycentre de deux points : la formule, la méthode des parallèles et la méthode du parallélogramme.*
- Réduire une somme $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ à l'aide du barycentre
  > Réduire une somme de vecteurs, comme alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B, à l'aide du barycentre.
  > *Réduire une somme de vecteurs, comme alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B, à l'aide du barycentre.*
- Utiliser le barycentre partiel
  > Utiliser le barycentre partiel pour construire un barycentre de trois points.
  > *Utiliser le barycentre partiel pour construire un barycentre de trois points.*
- Résoudre des problèmes d'alignement, de concours et d'ensembles de points
  > Résoudre des problèmes d'alignement, de concours et d'ensembles de points.
  > *Résoudre des problèmes d'alignement, de concours et d'ensembles de points.*

---

1. ACTIVITÉ

Rappels : milieu et moyenne

CE QU'IL DIT

Bech nabdew, nrajj3ou 7ajtin. I le milieu de BC, ma3neha le vecteur IB plus le vecteur IC égale le vecteur nul. W l ay point M, le vecteur MB plus le vecteur MC égale deux fois le vecteur MI. Tawa la moyenne : telmidh 5dha treize fi le devoir de contrôle, coefficient un, w dix fi le devoir de synthèse, coefficient deux. La moyenne mte3ou : treize plus deux fois dix, le tout sur trois, ya3ni onze. Chouf : onze a9reb l dix, 5ater dix 3andou coefficient akbar. W 3la droite graduée, A fi treize, B fi dix w G fi onze : le vecteur GA plus deux fois le vecteur GB égale le vecteur nul. El fekra hedhi, hiya le barycentre.

le vecteur I B plus le vecteur I C égale le vecteur nul . معناها ، I le milieu de B C . باش نبداو ، نراجعو حاجتين
تلميذ : la moyenne توّا . point M ، le vecteur M B plus le vecteur M C égale deux fois le vecteur M I لأيّ w
le devoir de synthèse ، coefficient deux . la في le devoir de contrôle ، coefficient un ، w dix في treize خذا
dix خاطر ، dix لـ أقرب onze : شوف . onze يعني ، treize plus deux fois dix ، le tout sur trois : متاعو moyenne
onze : le vecteur G A plus في dix w G في treize ، B في droite graduée ، A على w . أكبر coefficient عندو
. le barycentre هي ، هاذي الفكرة . deux fois le vecteur G B égale le vecteur nul

Pour commencer, révisons deux choses. I est le milieu de B C, cela signifie que le vecteur I B plus le vecteur I C égale le vecteur nul. Et pour tout point M, le vecteur M B plus le vecteur M C égale deux fois le vecteur

M I. Maintenant la moyenne : un élève a eu treize au devoir de contrôle, coefficient un, et dix au devoir de synthèse, coefficient deux. Sa moyenne : treize plus deux fois dix, le tout sur trois, c'est-à-dire onze. Regarde : onze est plus proche de dix, car dix a le plus grand coefficient. Et sur une droite graduée, avec A en treize, B en dix et G en onze : le vecteur G A plus deux fois le vecteur G B égale le vecteur nul. Cette idée, c'est le barycentre.

Le milieu. I est le milieu du segment $[BC]$ si, et seulement si, $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Alors, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$.

Une moyenne avec coefficients. Un élève a obtenu 13 au devoir de contrôle (coefficient 1) et 10 au devoir de synthèse (coefficient 2). Sa moyenne trimestrielle est $\dfrac{1\times 13+2\times 10}{1+2}=11$.

Sur une droite munie d'un repère $(O,\vec{i})$, plaçons les points A, B et G d'abscisses 13, 10 et 11. Alors $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right)$, et $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$: la moyenne est plus proche de la note qui « pèse » le plus. C'est cette idée que le chapitre généralise.



G (11) est deux fois plus près de B (10), de coefficient 2, que de A (13), de coefficient 1.

Une droite graduée. On y voit le point B d'abscisse 10, le point G d'abscisse 11 et le point A d'abscisse 13. G est entre B et A, deux fois plus près de B que de A : la distance de G à B vaut 1, celle de G à A vaut 2.

$$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \iff I \text{ est le milieu de } [BC]$$

LA MOYENNE, ÉCRITE AVEC DES VECTEURS

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle, I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AI]$. Montrer que $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$, puis que, pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MJ}$.

Le milieu I — I est le milieu de $[BC]$: la somme des vecteurs $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{JC}$ vaut deux fois le vecteur $\overrightarrow{JI}$. $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JI}$

Le milieu J — J est le milieu de $[AI]$: la somme des vecteurs $\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{JI}$ est nulle.

$$2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=2\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JI}\right)=\vec{0}$$

Pour tout point M — On passe par J dans chacun des vecteurs, avec la relation de Chasles : il reste quatre fois le vecteur $\overrightarrow{MJ}$, plus la somme précédente, qui est nulle.

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MJ}$$

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MJ}$$

À ne pas faire : Moyenne de 13 (coefficient 1) et 10 (coefficient 2) : $\dfrac{13+10}{2}=11{,}5$ — $\dfrac{1\times13+2\times10}{1+2}=11$. Chaque note compte autant de fois que son coefficient : on divise par la somme des coefficients, pas par le nombre de notes.

---

2. ACTIVITÉ

Le point d'équilibre

CE QU'IL DIT

Nabdew b tajriba. 3andna tige AB, m3all9a men point G. Fi A n3all9ou masse m un, w fi B n3all9ou masse m deux. El tige tab9a horizontale, ya3ni en équilibre, ki m un fois GA égale m deux fois GB. Nsammiw G le point d'équilibre. Mathalan m un égale un w m deux égale deux : GA égale deux fois GB, donc G a9reb l B, 5ater B fiha el masse el ath9el. W bel vecteurs : le vecteur GA plus deux fois le vecteur GB égale le vecteur nul. W ken ezzouz masses kif kif, G houwa le milieu de AB.

نبداو بتجربة . عندنا tige A B ، معلّقة من point G . في A نعلّقو w ، في B نعلّقو masse m un ، في B نعلّقو masse m deux . الـ G le point نسمّيو . m un fois G A égale m deux fois G B ، كي en équilibre ، يعني horizontale تبقى tige d'équilibre . مثلا G donc ، B أقرب لـ m un égale un w m deux égale deux : G A égale deux fois G B ، خاطر vecteurs : le vecteur G A plus deux fois le vecteur G B égale le vecteur nul . بالـ w . الأثقل masse الـ فيها B le milieu de A B هو G ، كيف كيف masses الزوز كان w .

Commençons par une expérience. On a une tige A B, suspendue par un point G. En A on accroche une masse m un, et en B une masse m deux. La tige reste horizontale, c'est-à-dire en équilibre, quand m un fois G A égale m deux fois G B. On appelle G le point d'équilibre. Par exemple m un égale un et m deux égale deux : G A égale deux fois G B, donc G est plus proche de B, car B porte la masse la plus lourde. Et avec les vecteurs : le vecteur G A plus deux fois le vecteur G B égale le vecteur nul. Et si les deux masses sont égales, G est le milieu de A B.

Une tige $[AB]$, rigide et homogène, est suspendue en un point G par un anneau dans lequel elle peut coulisser. À ses extrémités A et B, on accroche deux masses m_1 et m_2, exprimées en kilogrammes.

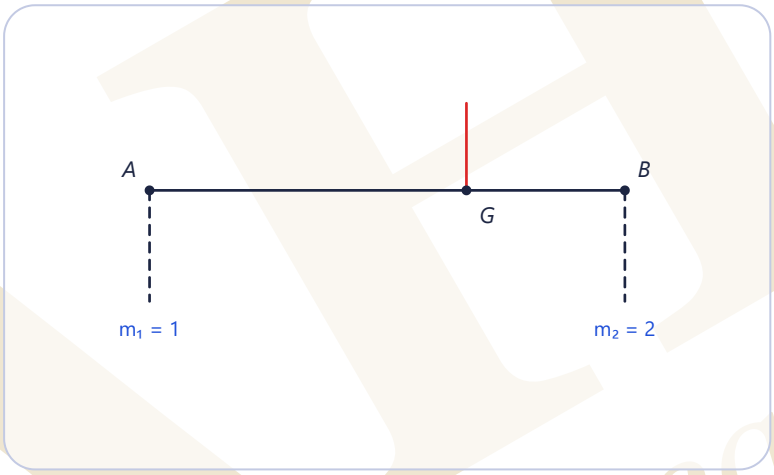
D'après le principe d'Archimède, le système est **en équilibre** (la tige est horizontale) lorsque

$$m_1 \times GA = m_2 \times GB.$$

On dit que G est le **point d'équilibre** des points A et B affectés respectivement des masses m_1 et m_2.

- Avec $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$: $GA = 2\,GB$. Le point G est sur $[AB]$, aux deux tiers à partir de A, et $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
- Avec $m_1 = 10$ et $m_2 = 20$: la position est la même, car $10\overrightarrow{GA} + 20\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
- Avec $m_1 = m_2 = 5$: $GA = GB$, le point G est le milieu de $[AB]$.

Le point d'équilibre est toujours plus près de la masse la plus lourde.



m_1 = 1 et m_2 = 2 : GA = 2 GB.

Une tige horizontale d'extrémités A, à gauche, et B, à droite, suspendue par un crochet au point G. Une masse m1 égale à 1 pend sous A, une masse m2 égale à 2 pend sous B. Le point G est aux deux tiers de la tige à partir de A : il est deux fois plus près de B que de A.

L'ÉQUILIBRE DE LA TIGE

$$m_1 \times GA = m_2 \times GB$$

LA MÊME CHOSE, AVEC DES VECTEURS

$$m_1\overrightarrow{GA} + m_2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

On accroche une masse de 3 kilogrammes en A et une masse de 1 kilogramme en B. Placer le point d'équilibre G, puis traduire l'équilibre par une relation vectorielle.

L'équilibre — Trois fois la distance GA égale une fois la distance GB.

$3\,GA = GB$

La position — La tige est partagée en quatre parts égales : une du côté de A, trois du côté de B.

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

La relation vectorielle — Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens contraires : multipliés par les masses, ils se compensent.

$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

À ne pas faire : Le point d'équilibre est plus près de la masse la plus légère — Le point d'équilibre est plus près de la masse la plus lourde. Dans l'égalité $m_1 \times GA = m_2 \times GB$, la plus grande masse est multipliée par la plus petite distance.

---

3. DÉFINITION

Barycentre de deux points

CE QU'IL DIT

Tawa el définition. 3andna zouz points A w B, w zouz réels alpha w bêta, w ech-chart : alpha plus bêta différent de zéro. El point G elli y7a99e9 alpha fois le vecteur GA plus bêta fois le vecteur GB égale le vecteur nul, nsammiweh le barycentre des points pondérés A, alpha w B, bêta. Alpha w bêta houma les coefficients. W G hedha mawjoud w wa7id : le vecteur AG égale bêta sur (alpha plus bêta), fois le vecteur AB. Rodd belek : ki nabdew men A, el coefficient elli fou9 houwa mta3 B.

توّا الـ définition . عندنا زوز points A w B ، w زوز réels alpha w bêta ، الشرط : alpha plus bêta différent de zéro . الـ point G اللي يحقّق alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B égale le vecteur nul ، نسمّيوه alpha w bêta . bêta ، alpha w B ، alpha w bêta هوما le barycentre des points pondérés A ، les coefficients . w G هذا موجود w وحيد : le vecteur A B ، fois le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta . ردّ بالك : كي نبداو من A ، الـ coefficient اللي فوق هو متاع B .

Voici la définition. On a deux points A et B, et deux réels alpha et bêta, avec une condition : alpha plus bêta différent de zéro. Le point G qui vérifie alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B égale le vecteur nul s'appelle le barycentre des points pondérés A, alpha et B, bêta. Alpha et bêta sont les coefficients. Et ce point G existe et il est unique : le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur A B. Attention : quand on part de A, le coefficient du numérateur est celui de B.

Soient A et B deux points distincts du plan et soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le point G qui vérifie la relation $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est appelé le **barycentre des points pondérés** (A, α) et (B, β).

On dit aussi que G est le barycentre des points A et B **affectés des coefficients** α et β.

Ce point existe et il est unique : c'est le point défini par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.



G, barycentre de (A, 2) et (B, −1) : A est le milieu de [GB].

Une droite avec trois points, de gauche à droite : G, A et B. Le point A est le milieu du segment [GB] : le vecteur AG est l'opposé du vecteur AB. G est le barycentre de (A, 2) et (B, moins 1).

LA DÉFINITION

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \qquad (\alpha + \beta \neq 0)$$

POUR PLACER G

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

DÉMONSTRATION

Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. Alors $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = -\beta\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Réciproquement, si un point G' vérifie $\alpha\overrightarrow{G'A} + \beta\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$, le même calcul donne $(\alpha+\beta)\overrightarrow{G'A} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AG'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$: les points G' et G sont confondus.

EXEMPLE TRAITÉ

G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et -1. Écrire une relation vectorielle qui définit G, puis construire ce point.

La relation — On multiplie le vecteur $\overrightarrow{GA}$ par le coefficient de A, le vecteur $\overrightarrow{GB}$ par celui de B, et la somme est le vecteur nul.

$$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Le vecteur AG — On applique la formule : le coefficient de B, divisé par la somme des coefficients, qui vaut 1.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{2 + (-1)} \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$$

Construire — Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$: G est le symétrique de B par rapport à A.

A est le milieu de $[BG]$

A est le milieu de $[BG]$

À ne pas faire : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ — $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. En partant de A, c'est le coefficient de l'autre point, B, qui est au numérateur.

À ne pas faire : Le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -3)$ est le milieu de $[AB]$ — Les points pondérés $(A, 3)$ et $(B, -3)$ n'ont pas de barycentre. La somme des coefficients est nulle : le vecteur $3\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}$ est égal à $3\overrightarrow{BA}$, qui n'est jamais le vecteur nul.

---

4. REMARQUE

Où se trouve le barycentre ?

CE QU'IL DIT

Win yji le barycentre ? G dima 3la la droite AB, 5ater le vecteur AG égale bêta sur (alpha plus bêta), fois le vecteur AB. W najmou nabdew men B zeda : le vecteur BG égale alpha sur (alpha plus bêta), fois le vecteur BA. Tawa, G bin A w B walla barra ? Ken alpha w bêta 3andhom nafs le signe, G 3la le segment AB. Ken les signes bel 3aks, G barra mel segment, fi jihet el point elli 3andou akbar coefficient en valeur absolue. W ken el coefficients kif kif, G houwa le milieu de AB.

وين يجي le barycentre ؟ G ديما على la droite A B ، خاطر le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse
نجّمو نبداو من B زادة : le vecteur B G égale alpha sur la parenthèse alpha plus bêta ، fois le vecteur A B . w
عندهم نفس alpha w bêta كان ؟ ولّا برّا A w B بين G ، توّا . alpha plus bêta ، fois le vecteur B A le signe ، G
برّا مال segment ، في جيهة الـ point اللي عندو أكبر بالعكس les signes كان . le segment A B على
. le milieu de A B هو G ، كيف كيف coefficients كان الـ coefficient en valeur absolue . w

Où se trouve le barycentre ? G est toujours sur la droite A B, car le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur A B. Et on peut aussi partir de B : le vecteur B G égale alpha sur la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur B A. Maintenant, G est-il entre A et B ou à l'extérieur ? Si alpha et bêta ont le même signe, G est sur le segment A B. Si les signes sont contraires, G est hors du segment, du côté du point qui a le plus grand coefficient en valeur absolue. Et si les coefficients sont égaux, G est le milieu de A B.

Le barycentre G des points pondérés (A, α) et (B, β) est le point défini par l'une des relations suivantes :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}.$$

- Le barycentre G des points pondérés (A, α) et (B, β) appartient à la droite (AB).
- $G \in [AB]$ si, et seulement si, α et β sont de même signe.
- Le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 1)$ est le milieu du segment $[AB]$.



M : (A, 2), (B, 1). N : (A, 3), (B, −1). P : (A, −1), (B, 2).

Une droite avec cinq points, de gauche à droite : N, A, M, B et P. Le point M est entre A et B, au tiers à partir de A. Le point N est à gauche de A, à une distance égale à la moitié de AB. Le point P est à droite de B, avec AP égal à deux fois AB.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$$

$$G \in [AB] \iff \alpha \text{ et } \beta \text{ sont de même signe}$$

DÉMONSTRATION

Posons $k = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, de sorte que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$ et $1-k = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Le point G est sur le segment $[AB]$ si, et seulement si, $0 \leq k \leq 1$, c'est-à-dire $k(1-k) \geq 0$. Or $k(1-k) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$ a le signe du produit $\alpha\beta$: $G \in [AB]$ exactement quand α et β ont le même signe.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points distincts. Construire le point M, barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et 1, le point N, barycentre des points A et B affectés des coefficients 3 et -1, et le point P, barycentre des points A et B affectés des coefficients -1 et 2.

Le point M — Les coefficients sont de même signe : M est sur le segment, au tiers à partir de A.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2+1} \times \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Le point N — Les coefficients sont de signes contraires : N est hors du segment, du côté de A.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{-1}{3-1} \times \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Le point P — Ici encore les signes sont contraires : P est hors du segment, du côté de B.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{-1+2} \times \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{-1+2} \times \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$$

À ne pas faire : Avec un coefficient négatif, le barycentre n'existe pas — Il existe dès que $\alpha+\beta \neq 0$; il est seulement hors du segment $[AB]$. Seule la somme des coefficients doit être non nulle. Un coefficient négatif

envoie le barycentre à l'extérieur du segment, du côté du point dont le coefficient est le plus grand en valeur absolue.

5. PROPRIÉTÉ

Multiplier les coefficients

CE QU'IL DIT

Propriété tsahhel el 7seb. G le barycentre de A, alpha w B, bêta. Ken nedherbou ezzouz coefficients fi nafs el réel k, mouch nul, G yab9a houwa houwa : G le barycentre de A, k alpha w B, k bêta. 3lech ? 5ater k yo5rej facteur, w k fois le vecteur nul égale le vecteur nul. Mathalan dix w vingt, nbassatouhom un w deux. W ken 3andna des fractions, nedherbou fi le dénominateur commun w nerte7ou. Ama rodd belek : nedherbou, ma nzidouch.

propriété تسهّل الحساب . G le barycentre de A ، alpha w B ، bêta كان نضربو الزوز في نفس الـ coefficients
réel k ، موش G ، nul يبقى هو هو : G le barycentre de A ، k alpha w B ، k bêta علاش ؟ خاطر k يخرج facteur
w k fois le vecteur nul égale le vecteur nul . ، dix w vingt مثلا . w نبسّطوهم ، un w deux كان عندنا des
fractions ، نضربو في le dénominateur commun w نرتاحو . أمّا ردّ بالك : نضربو ، ما نزيدوش .

Une propriété qui facilite les calculs. G est le barycentre de A, alpha et B, bêta. Si on multiplie les deux coefficients par un même réel k non nul, G reste le même : G est le barycentre de A, k alpha et B, k bêta. Pourquoi ? Parce que k se met en facteur, et k fois le vecteur nul égale le vecteur nul. Par exemple dix et vingt se simplifient en un et deux. Et s'il y a des fractions, on multiplie par le dénominateur commun et on est tranquille. Mais attention : on multiplie, on n'ajoute pas.

Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et soit G le barycentre de (A, α) et (B, β).

Pour tout réel non nul k, G est le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$.

Autrement dit, on ne change pas le barycentre en **multipliant** (ou en divisant) tous les coefficients par un même réel non nul. C'est ce qui permet de chasser les fractions, ou de remplacer $(A, 10)$ et $(B, 20)$ par $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

$$G \text{ barycentre de } (A, \alpha), (B, \beta) \iff G \text{ barycentre de } (A, k\alpha), (B, k\beta) \quad (k \neq 0)$$

DÉMONSTRATION

$k\alpha + k\beta = k(\alpha + \beta) \neq 0$, et $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = k\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient M et N deux points distincts. Situer le barycentre O des points M et N affectés des coefficients $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Chasser les fractions — On multiplie les deux coefficients par 6 : le barycentre ne change pas.

O est le barycentre de $(M, 4)$ et $(N, 3)$

Situer O — On applique la formule avec des coefficients entiers : le coefficient de N sur la somme.

$$\overrightarrow{MO} = \frac{3}{4+3} \times \overrightarrow{MN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{MO} = \frac{3}{4+3} \times \overrightarrow{MN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{MN}$$

À ne pas faire : $(A,1)$, $(B,2)$ et $(A,2)$, $(B,3)$ ont le même barycentre — $(A,1)$, $(B,2)$ et $(A,2)$, $(B,4)$ ont le même barycentre. On peut multiplier les coefficients par un même réel non nul, pas leur ajouter un même nombre : avec 1 et 2 le barycentre est aux deux tiers du segment, avec 2 et 3 il est aux trois cinquièmes.

---

6. PROPRIÉTÉ

Réduire une somme

CE QU'IL DIT

Hedhi ahamm propriété fel chapitre. G le barycentre de A, alpha w B, bêta. L ay point M : alpha fois le vecteur MA plus bêta fois le vecteur MB égale (alpha plus bêta) fois le vecteur MG. Ya3ni zouz vecteurs ywalliw vecteur wa7ed. 3lech ? Nda55lou G b la relation de Chasles, w alpha fois le vecteur GA plus bêta fois le vecteur GB yti7, 5ater houwa le vecteur nul. Mathalan G le barycentre de A, deux w B, un : deux fois le vecteur MA plus le vecteur MB égale trois fois le vecteur MG.

هاذي أهمّ propriété في الـ bêta ، alpha w B ، G le barycentre de A . chapitre . لأيّ point M : alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B égale la parenthèse alpha plus bêta ، fois le vecteur M G . يعني زوز vecteurs يولّيو vecteur واحد . علاش ؟ ندخّلو G بـ la relation de Chasles ، w alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B يطيح ، خاطر هو le vecteur nul . مثلا : un ، deux w B ، G le barycentre de A . deux fois le vecteur M A plus le vecteur M B égale trois fois le vecteur M G

Voici la propriété la plus importante du chapitre. G est le barycentre de A, alpha et B, bêta. Pour tout point M : alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B égale la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur M G. Autrement dit, deux vecteurs deviennent un seul vecteur. Pourquoi ? On introduit G par la relation de Chasles, et alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B disparaît, car c'est le vecteur nul. Par exemple si G est le barycentre de A, deux et B, un : deux fois le vecteur M A plus le vecteur M B égale trois fois le vecteur M G.

Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et soit G le barycentre de (A,α) et (B,β).

Pour tout point M du plan, on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}.$$

Cette égalité **réduit** une somme de deux vecteurs à un seul vecteur. En prenant $M = A$, on retrouve $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

POUR TOUT POINT M

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

DÉMONSTRATION

Par la relation de Chasles, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et 1, G' le barycentre des points C et D affectés des coefficients 5 et -2, et I le milieu de $[GG']$. Montrer que, pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MI}$.

Avec le point G — G est le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$: la somme des coefficients est 3.

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$$

Avec le second point — G' est le barycentre des points C et D affectés des coefficients 5 et -2 : ici aussi la somme des coefficients vaut 3.

$$5\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG'}$$

Avec le milieu I — I est le milieu de $[GG']$: la somme des vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MG'}$ vaut deux fois le vecteur $\overrightarrow{MI}$.

$$3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{MG'}=3\times 2\overrightarrow{MI}=6\overrightarrow{MI}$$

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MI}$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=0\times\overrightarrow{MG}=\vec{0}$ — $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$. Quand la somme des coefficients est nulle, il n'y a pas de barycentre : la somme ne se réduit pas avec un point G, elle est égale à un vecteur constant, qui ne dépend pas de M.

7. APPLICATION

Des droites parallèles

CE QU'IL DIT

Tatbi9 : kifech nthabtou elli zouz droites parallèles. 3andna triangle ABC. M y7a99e9 le vecteur MA plus trois fois le vecteur MB égale le vecteur nul, ya3ni M le barycentre de A, un w B, trois : le vecteur AM égale trois quarts du vecteur AB. W N kif kif m3a C : le vecteur AN égale trois quarts du vecteur AC. N7esbou le vecteur MN : houwa le vecteur AN moins le vecteur AM, ya3ni trois quarts du vecteur BC. Ezzouz vecteurs colinéaires, donc la droite MN parallèle à la droite BC.

تطبيق : كيفاش نثبتو اللي زوز droites parallèles عندنا . M triangle A B C يحقّق le vecteur M A plus trois fois M le barycentre de A ، un w B ، trois : le vecteur A M égale يعني ، le vecteur M B égale le vecteur nul . C : le vecteur A N égale trois quarts du vecteur A C مع كيف كيف trois quarts du vecteur A B . w N

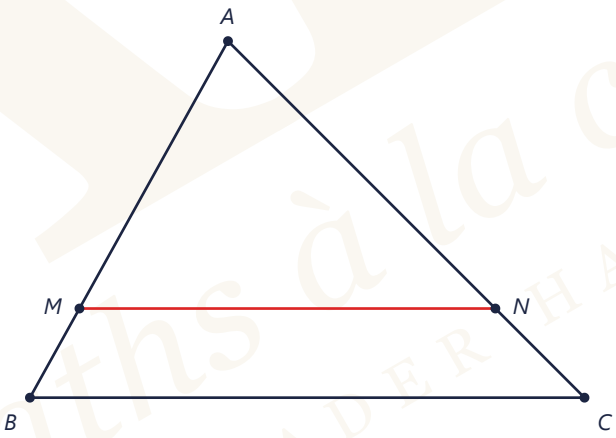
نحسبو M N هو : le vecteur A N moins le vecteur A M ، يعني le vecteur B C trois quarts du vecteur . الزوز
. vecteurs colinéaires ، donc la droite M N parallèle à la droite B C

Une application : comment prouver que deux droites sont parallèles. On a un triangle A B C. M vérifie le vecteur M A plus trois fois le vecteur M B égale le vecteur nul, donc M est le barycentre de A, un et B, trois : le vecteur A M égale trois quarts du vecteur A B. Et N de même avec C : le vecteur A N égale trois quarts du vecteur A C. Calculons le vecteur M N : c'est le vecteur A N moins le vecteur A M, c'est-à-dire trois quarts du vecteur B C. Les deux vecteurs sont colinéaires, donc la droite M N est parallèle à la droite B C.

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

M est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 3)$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. De même, N est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 3)$, donc $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$: les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**.



AM = ¾ AB et AN = ¾ AC : (MN) est parallèle à (BC).

Un triangle ABC, de sommet A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. Le point M est sur le côté [AB], aux trois quarts à partir de A ; le point N est sur le côté [AC], aux trois quarts à partir de A. Le segment [MN], en rouge, est parallèle au côté [BC].

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A, B et C trois points non alignés. Montrer que le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ ne dépend pas du point M. On désigne par A' le barycentre des points B et C affectés des coefficients 2 et -3, par B' celui des points A et C affectés des coefficients 1 et -3, et par C' celui

des points A et B affectés des coefficients 1 et 2. En déduire que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

Un vecteur constant — La somme des coefficients, $1+2-3$, est nulle. On passe par A dans chaque vecteur : les termes qui contiennent M disparaissent.

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

Le premier barycentre — On choisit pour M le point A', barycentre des points B et C affectés des coefficients 2 et -3 : les deux derniers termes s'annulent.

$$\vec{u} = \overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{A'B} - 3\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A}$$

Les deux autres — De la même façon, avec B' puis avec C', deux termes s'annulent à chaque fois.

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{B'B} \quad ; \quad \vec{u} = -3\overrightarrow{C'C}$$

Conclure — Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont tous colinéaires au vecteur $\vec{u}$: les trois droites sont parallèles.

$$\overrightarrow{A'A} = 2\overrightarrow{B'B} = -3\overrightarrow{C'C}$$

$$\overrightarrow{A'A} = 2\overrightarrow{B'B} = -3\overrightarrow{C'C}$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ — $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. M est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 3)$: en partant de A, c'est le coefficient de B, c'est-à-dire 3, qui est au numérateur.

8. MÉTHODE

Méthode des parallèles

CE QU'IL DIT

Kifech nrasmou le barycentre blech ma n7esbou ? 3andna la méthode des parallèles. Na5dhou A, trois w B, quatre. Nrasmou droite tet3adda men A, w droite o5ra tet3adda men B, parallèle liha. Na5tarou vecteur i 3al direction mte3hom. 3al droite mta3 A, n7ottou A prime, elli le vecteur AA prime égale quatre i : quatre houwa el coefficient mta3 B. W 3al droite mta3 B, n7ottou B prime, elli le vecteur BB prime égale moins trois i : nbaddlou le signe. La droite A prime B prime t9oss la droite AB fi G. Ya3ni na3ksou les coefficients, w wa7ed menhom nbaddloulou le signe.

. A ، trois w B ، quatre ناخذو . la méthode des parallèles عندنا ؟ بلاش ما نحسبو le barycentre كيفاش نرسمو
direction على الـ vecteur i نختارو . ليها B ، parallèle من أخرى تتعدّى A ، w droite من تتعدّى droite نرسمو
هو الـ le vecteur A A prime égale quatre i : quatre اللي ، A prime نحطّو ، A متاع droite على الـ . متاعهم
: le vecteur B B prime égale moins trois i اللي ، B prime نحطّو ، B متاع droite على الـ B . w متاع coefficient
واحد les coefficients ، w نعكسو يعني . G في la droite A B تقصّ le signe . la droite A prime B prime نبدّلو
. le signe منهم نبدّلولو

Comment construire le barycentre sans calcul ? Voici la méthode des parallèles. Prenons A, trois et B, quatre. On trace une droite passant par A, et une autre droite passant par B, parallèle à la première. On choisit un vecteur i qui donne leur direction. Sur la droite de A, on place A prime tel que le vecteur A A prime égale quatre i : quatre est le coefficient de B. Et sur la droite de B, on place B prime tel que le

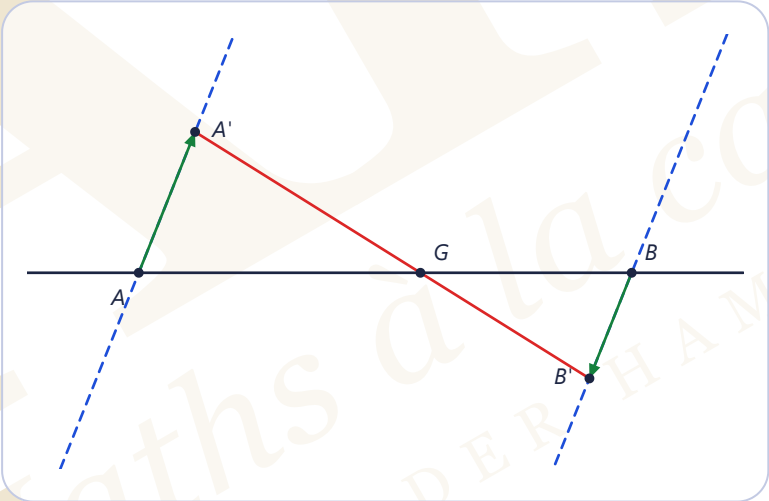
vecteur B B prime égale moins trois i : on change le signe. La droite A prime B prime coupe la droite A B en G. Autrement dit, on croise les coefficients, et on change le signe de l'un d'eux.

Pour construire le barycentre G des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 4)$:

1. on trace une droite D_A passant par A et ne contenant pas B, puis la droite D_B passant par B et parallèle à D_A ;
2. on choisit un vecteur directeur $\vec{i}$ de ces droites, et on place A' sur D_A et B' sur D_B tels que $\overrightarrow{AA'} = 4\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = -3\vec{i}$;
3. G est le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

En effet, $3\overrightarrow{GA'} + 4\overrightarrow{GB'} = 3\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{AA'} + 4\overrightarrow{BB'} = \vec{0} + 12\vec{i} - 12\vec{i} = \vec{0}$: G est aussi le barycentre de $(A', 3)$ et $(B', 4)$. Il est donc sur la droite $(A'B')$, comme il est sur la droite (AB).

En général, pour (A, α) et (B, β), on prend $\overrightarrow{AA'} = \beta\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = -\alpha\vec{i}$: on croise les coefficients, et on change le signe de l'un.



(A, 3) et (B, 4) : AA' = 4i, BB' = −3i, et G est l'intersection de (AB) et (A'B').

Deux points A, à gauche, et B, à droite, sur une droite horizontale. Par A et par B passent deux droites parallèles, penchées. Sur la première, le point A' est au-dessus de A, à quatre unités ; sur la seconde, le point B' est en dessous de B, à trois unités. Le segment [A'B'], en rouge, coupe la droite (AB) au point G, situé aux quatre septièmes de [AB] à partir de A.

$$\overrightarrow{AA'} = \beta\vec{i} \quad ; \quad \overrightarrow{BB'} = -\alpha\vec{i} \quad ; \quad G = (AB) \cap (A'B')$$

EXEMPLE TRAITÉ

Construire, par la méthode des parallèles, le barycentre G des points A et B affectés des coefficients 3 et -2.

Les deux parallèles — On trace une droite passant par A et ne contenant pas B, puis sa parallèle passant par B, et on choisit un vecteur directeur $\vec{i}$.

Deux points repères — On croise les coefficients : celui de B sert à partir de A, l'opposé de celui de A sert à partir de B.

$\overrightarrow{AA'} = -2\vec{i}$; $\overrightarrow{BB'} = -3\vec{i}$

Le point G — Les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en G. On vérifie avec la formule : G est hors du segment, du côté de A.

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{-2}{3-2} \times \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{3-2} \times \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$$

À ne pas faire : Pour $(A, 3)$ et $(B, 4)$: $\overrightarrow{AA'} = 3\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = 4\vec{i}$ — $\overrightarrow{AA'} = 4\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = -3\vec{i}$. On croise les coefficients et on change un signe : sinon la droite $(A'B')$ ne coupe pas la droite (AB) au barycentre.

9. MÉTHODE

Méthode du parallélogramme

CE QU'IL DIT

Tari9a o5ra : la méthode du parallélogramme. Na5dhou A, deux w B, trois. Na5tarou point M, mouch 3la la droite AB. N7ottou A prime, elli le vecteur MA prime égale deux fois le vecteur MA, w B prime, elli le vecteur MB prime égale trois fois le vecteur MB. Nkammlou le parallélogramme M, A prime, M prime, B prime. La diagonale : le vecteur MM prime égale deux fois le vecteur MA plus trois fois le vecteur MB, w hedha ysewi cinq fois le vecteur MG. Donc M, G w M prime alignés : G houwa l'intersection mta3 la droite MM prime w la droite AB.

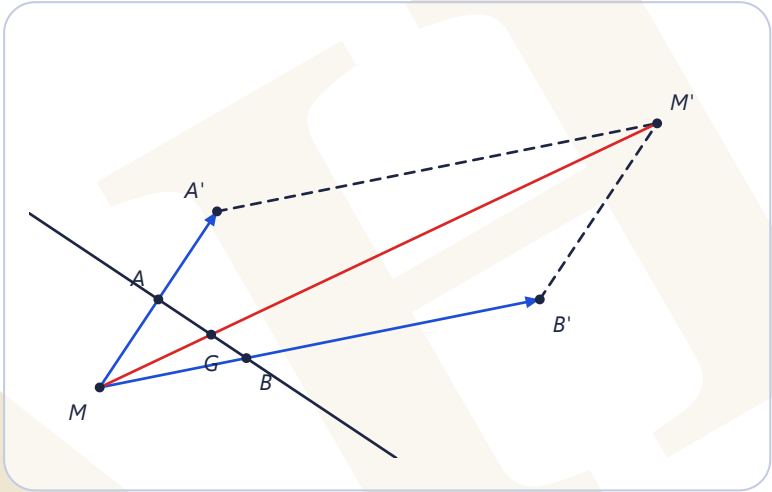
طريقة أخرى : la méthode du parallélogramme . ناخذو trois ، deux w B ، A . نختارو point M ، موش على la droite A B . نحطّو A prime ، اللي w B prime ، deux fois le vecteur M A ، le vecteur M A prime égale اللي le . نكمّلو B ، M prime ، A prime ، le parallélogramme M . vecteur M B prime égale trois fois le vecteur M B prime . la diagonale : le vecteur M M prime égale deux fois le vecteur M A plus trois fois le vecteur M B la droite متاع l'intersection هو cinq fois le vecteur M G . donc M ، G w M prime alignés : G هذا يساوي ، w . M M prime w la droite A B

Une autre méthode : la méthode du parallélogramme. Prenons A, deux et B, trois. On choisit un point M qui n'est pas sur la droite A B. On place A prime tel que le vecteur M A prime égale deux fois le vecteur M A, et B prime tel que le vecteur M B prime égale trois fois le vecteur M B. On complète le parallélogramme M, A prime, M prime, B prime. La diagonale : le vecteur M M prime égale deux fois le vecteur M A plus trois fois le vecteur M B, et cela vaut cinq fois le vecteur M G. Donc M, G et M prime sont alignés : G est l'intersection de la droite M M prime et de la droite A B.

Pour construire le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$:

1. on choisit un point M n'appartenant pas à la droite (AB) ;
2. on construit les points A' et B' tels que $\overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB'} = 3\overrightarrow{MB}$;
3. on construit le point M' tel que $MA'M'B'$ soit un parallélogramme ;
4. G est le point d'intersection des droites (MM') et (AB).

En effet, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$: les points M, G et M' sont alignés, donc $G \in (MM')$. Et G est sur la droite (AB).



(A, 2) et (B, 3) : MM' = 5 MG, et G est l'intersection de (MM') et (AB).

Un point M en bas à gauche, hors de la droite (AB). Le point A' est sur la demi-droite [MA), deux fois plus loin de M que A ; le point B' est sur la demi-droite [MB), trois fois plus loin de M que B. Le point M' complète le parallélogramme MA'M'B'. La diagonale [MM'], en rouge, coupe la droite (AB) au point G.

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Construire, par la méthode du parallélogramme, le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

Un point hors de la droite — On choisit un point M hors de la droite (AB), puis on construit A' tel que le vecteur $\overrightarrow{MA'}$ soit le double du vecteur $\overrightarrow{MA}$. Le coefficient de B est 1 : on garde le point B.

$\overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MA}$

Le parallélogramme — On construit M' tel que $MA'M'B$ soit un parallélogramme : sa diagonale donne la somme des deux vecteurs.

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$

Le point G — G est l'intersection des droites (MM') et (AB) ; il est au tiers du segment $[MM']$ à partir de M.

$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MM'}$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MM'}$$

À ne pas faire : G est le centre du parallélogramme $MA'M'B'$ — G est le point où la diagonale (MM') coupe la droite (AB). Le centre du parallélogramme est le milieu de la diagonale. Le barycentre, lui, partage cette diagonale selon la somme des coefficients : il n'est au milieu que si cette somme vaut 2.

---

10. MÉTHODE

Montrer un alignement

CE QU'IL DIT

Kifech nthabtou elli trois points alignés ? El fekra sehla : le barycentre de deux points dima 3la la droite mte3hom. Donc yekfi nektbou point menhom, barycentre mta3 ezzouz lo5rin. Mithel : I le barycentre de A, un w B, deux, w J le barycentre de C, un w D, moins deux. W K y7a99e9 : trois fois le vecteur KA plus six fois le vecteur KB moins le vecteur KC plus deux fois le vecteur KD égale le vecteur nul. Nlemmou les termes mta3 A w B m3a b3adhhom, w les termes mta3 C w D m3a b3adhhom, w nbassatou koll groupe b le barycentre mte3ou.

كيفاش نثبتو اللي trois points alignés ؟ الفكرة ساهلة : le barycentre de deux points ديما على la droite
متاعهم . donc يكفي نكتبو point منهم ، barycentre متاع الزوز الأخرين . مثال : ، I le barycentre de A ، un w B
. w K ، moins deux ، un w D ، le barycentre de C ، w J ، deux يحقّق : trois fois le vecteur K A plus six fois le
متاع les termes نلمّو . vecteur K B moins le vecteur K C plus deux fois le vecteur K D égale le vecteur nul
. متاعو le barycentre بـ groupe كل نبسّطو w ، مع بعضهم C w D متاع w les termes ، مع بعضهم A w B

Comment prouver que trois points sont alignés ? L'idée est simple : le barycentre de deux points est toujours sur leur droite. Il suffit donc d'écrire l'un des points comme barycentre des deux autres. Un exemple : I est le barycentre de A, un et B, deux, et J est le barycentre de C, un et D, moins deux. Et K vérifie : trois fois le vecteur K A plus six fois le vecteur K B moins le vecteur K C plus deux fois le vecteur K D égale le vecteur nul. On regroupe les termes en A et B, puis les termes en C et D, et on réduit chaque groupe avec son barycentre.

Le barycentre de deux points est **sur la droite** qui les joint. Pour montrer que trois points I, J et K sont alignés, il suffit donc d'écrire l'un comme barycentre des deux autres.

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan, I le barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$, J le barycentre de $(C,1)$ et $(D,-2)$, et K le point tel que

$$3\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KD} = \vec{0}.$$

On regroupe les termes deux par deux, on réduit chaque groupe avec son barycentre, et on obtient une relation entre $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KJ}$: les points I, J et K sont alignés.

$$9\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

I est le barycentre des points A et B affectés des coefficients 1 et 2, J est le barycentre des points C et D affectés des coefficients 1 et -2, et K est le point tel que $3\overrightarrow{KA}+6\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}=\vec{0}$. Montrer que les points I, J et K sont alignés.

Le premier groupe — On met 3 en facteur, puis on réduit avec I : la somme des coefficients 1 et 2 vaut 3.

$$3\overrightarrow{KA}+6\overrightarrow{KB}=3\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}\right)=9\overrightarrow{KI}$$

Le second groupe — On met -1 en facteur, puis on réduit avec J : la somme des coefficients 1 et -2 vaut -1.

$$-\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}=-\left(\overrightarrow{KC}-2\overrightarrow{KD}\right)=\overrightarrow{KJ}$$

Conclure — K est le barycentre de $(I,9)$ et $(J,1)$: il est sur la droite (IJ).

$$9\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{KJ}=\vec{0}$$

$$9\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{KJ}=\vec{0}$$

À ne pas faire : $-\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}=-\overrightarrow{KJ}$ — $-\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{KJ}$. La somme des coefficients 1 et -2 vaut -1 : le vecteur $\overrightarrow{KC}-2\overrightarrow{KD}$ est égal à $-\overrightarrow{KJ}$, et le signe moins placé devant redonne $\overrightarrow{KJ}$.

11. MÉTHODE

Ensemble de points

CE QU'IL DIT

Tawa nlawjou 3la ensemble de points. 3andna rectangle ABCD, AB égale six w BC égale deux. G le barycentre de A, deux w B, un, w G prime le barycentre de C, cinq w D, moins deux. Nlawjou 3la les points M elli la norme de la somme : deux fois le vecteur MA plus le vecteur MB, égale la norme de la différence : cinq fois le vecteur MC moins deux fois le vecteur MD. Nbassatou : la somme mta3 A w B twalli trois fois le vecteur MG, w mta3 C w D twalli trois fois le vecteur MG prime. Donc trois MG égale trois MG prime, ya3ni MG égale MG prime : M 3la la médiatrice du segment GG prime. W ken nal9aw MG égale nombre r, yatla3 cercle de centre G w de rayon r.

rectangle A B C D ، A B égale six w B C égale deux . G le عندنا . ensemble de points على تولّا نلوّجو les على نلوّجو . barycentre de A ، deux w B ، un ، w G prime le barycentre de C ، cinq w D ، moins deux la norme de la somme : deux fois le vecteur M A plus le vecteur M B ، égale la norme de اللي points M A w B متاع la somme : نبسّطو . la différence : cinq fois le vecteur M C moins deux fois le vecteur M D trois fois le vecteur M G prime . donc trois M G égale تولّي C w D متاع trois fois le vecteur M G ، w تولّي كان نلقاو la médiatrice du segment G G prime . w على M G égale M G prime : M يعني ، trois M G prime . cercle de centre G w de rayon r يطلع ، M G égale nombre r

Cherchons maintenant un ensemble de points. On a un rectangle A B C D, avec A B égale six et B C égale deux. G est le barycentre de A, deux et B, un, et G prime le barycentre de C, cinq et D, moins deux. On

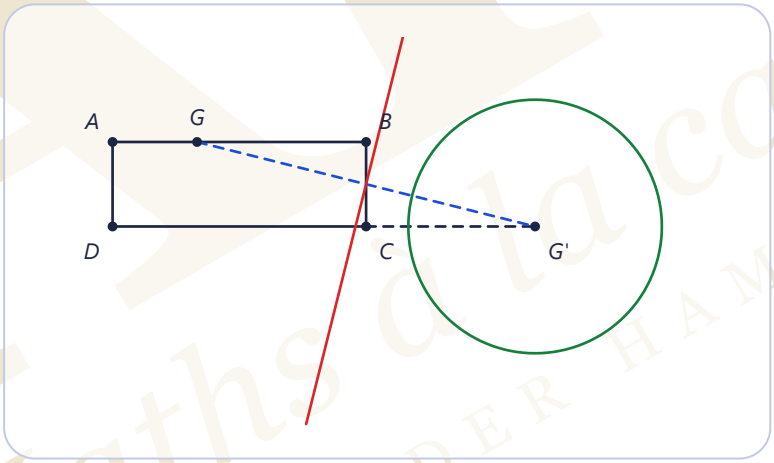
cherche les points M tels que la norme de la somme : deux fois le vecteur M A plus le vecteur M B, égale la norme de la différence : cinq fois le vecteur M C moins deux fois le vecteur M D. On réduit : la somme en A et B devient trois fois le vecteur M G, et celle en C et D trois fois le vecteur M G prime. Donc trois M G égale trois M G prime, c'est-à-dire M G égale M G prime : M est sur la médiatrice du segment G G prime. Et si l'on trouve M G égale un nombre r, on obtient le cercle de centre G et de rayon r.

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $BC = 2$. On note G le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$, et G' le barycentre de $(C, 5)$ et $(D, -2)$: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$, donc $AG = 2$ et $CG' = 4$.

Pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$ et $5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG'}$.

L'ensemble des points M tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right\|$ est donc l'ensemble des points tels que $3MG = 3MG'$, c'est-à-dire $MG = MG'$: c'est la **médiatrice** du segment $[GG']$.

La méthode : réduire chaque somme avec un barycentre, passer aux normes, puis reconnaître une médiatrice ($MG = MG'$) ou un cercle ($MG = r$).



En rouge, la médiatrice de [GG'] ; en vert, le cercle de centre G' et de rayon 3.

Un rectangle ABCD, avec A en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite et D en bas à gauche ; AB vaut 6 et BC vaut 2. Le point G est sur le côté [AB], à la distance 2 de A. Le point G' est sur la droite (DC), au-delà de C, à la distance 4 de C. La médiatrice du segment [GG'] est tracée en rouge ; le cercle de centre G' et de rayon 3 est tracé en vert.

$$MG = MG' \iff M \text{ est sur la médiatrice de } [GG']$$

$$MG = r \iff M \text{ est sur le cercle de centre } G \text{ et de rayon } r$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le rectangle $ABCD$ précédent, G' est le barycentre des points C et D affectés des coefficients 5 et -2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur

$5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ soit égale à 9.

Réduire — G' est le barycentre des points C et D affectés des coefficients 5 et -2, et la somme des coefficients vaut 3.

$$5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG'}$$

Passer aux distances — La norme du vecteur $3\overrightarrow{MG'}$ est trois fois la distance MG'.

$$3MG' = 9 \iff MG' = 3$$

Reconnaître — Les points situés à la distance 3 du point G' forment un cercle.

le cercle de centre G' et de rayon 3

> le cercle de centre G' et de rayon 3

À ne pas faire : $\left\|5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right\| = 9$ donne le cercle de centre G' et de rayon 9 — C'est le cercle de centre G' et de rayon 3. La norme vaut trois fois la distance MG', pas la distance MG' : on divise par la somme des coefficients avant de lire le rayon.

À ne pas faire : $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = 2MA + MB$ — $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 3MG$. La norme d'une somme n'est pas la somme des normes : on réduit d'abord la somme à un seul vecteur, puis on prend sa norme.

---

12. ACTIVITÉ

De deux à trois points

CE QU'IL DIT

9bal ma n3arrfou le barycentre de trois points, nchoufou mithelin. Telmidh 3andou trois moyennes : douze virgule soixante-quinze, coefficient un, douze virgule vingt-cinq, coefficient deux, w onze virgule cinquante, coefficient deux. La moyenne annuelle : nedherbou koll moyenne fel coefficient mte3ha, njam3ou, w le tout sur cinq : douze virgule zéro cinq. W fel triangle : M le barycentre de B, deux w C, un, w G le barycentre de M, trois w A, deux. Ki nbassatou, nal9aw relation fiha eth-thletha sommets : deux fois le vecteur GA plus deux fois le vecteur GB plus le vecteur GC égale le vecteur nul.

قُبَلْ ما نعرّفو le barycentre de trois points ، نشوفو مثالين . تلميذ عندو trois moyennes : douze virgule soixante-quinze ، coefficient un ، douze virgule vingt-cinq ، coefficient deux ، w onze virgule cinquante ، coefficient deux . la moyenne annuelle : نضربو كل moyenne في الـ coefficient متاعها ، نجمعو ، w le tout sur cinq : douze virgule zéro cinq . w في الـ triangle : M le barycentre de B ، deux w C ، un ، w G le barycentre de M ، trois w A ، deux . A plus deux fois le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul كي نبسّطو ، نلقاو relation فيها الثلاثة sommets : deux fois le vecteur G

Avant de définir le barycentre de trois points, voyons deux exemples. Un élève a trois moyennes : douze virgule soixante-quinze, coefficient un, douze virgule vingt-cinq, coefficient deux, et onze virgule cinquante, coefficient deux. La moyenne annuelle : on multiplie chaque moyenne par son coefficient, on additionne, et le tout sur cinq : douze virgule zéro cinq. Et dans le triangle : M est le barycentre de B, deux et C, un, et G est le barycentre de M, trois et A, deux. En réduisant, on trouve une relation qui contient les

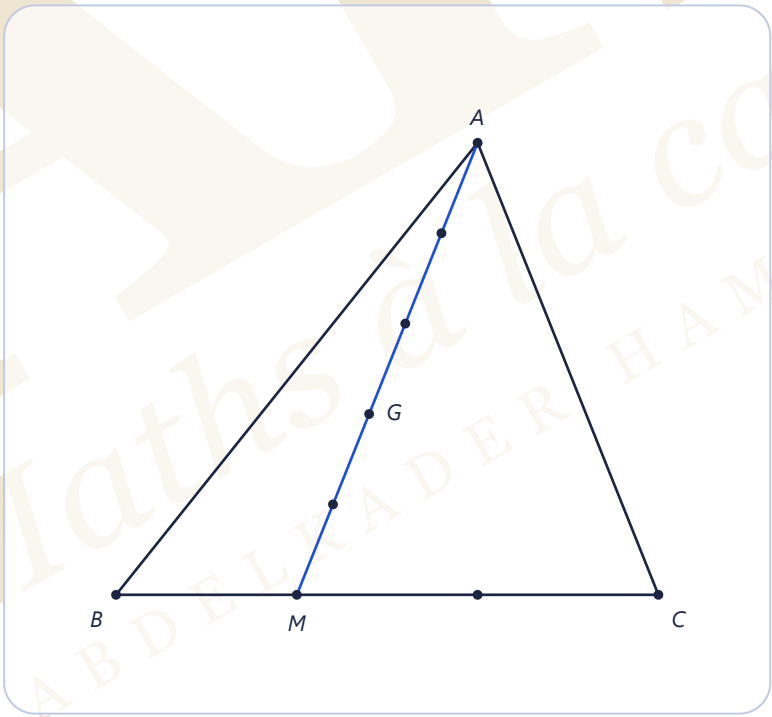
trois sommets : deux fois le vecteur G A plus deux fois le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul.

Une moyenne de trois notes. Les moyennes trimestrielles d'un élève sont $12{,}75$ au premier trimestre (coefficient 1), $12{,}25$ au deuxième (coefficient 2) et $11{,}50$ au troisième (coefficient 2). Sa moyenne annuelle est

$$m = \frac{1 \times 12{,}75 + 2 \times 12{,}25 + 2 \times 11{,}50}{1 + 2 + 2} = \frac{60{,}25}{5} = 12{,}05.$$

Sur une droite graduée $(O, \vec{i})$, si A, B, C et G ont pour abscisses $12{,}75$, $12{,}25$, $11{,}50$ et m, alors $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}\right)$.

Dans un triangle. Sur la figure, M est le point de $[BC]$ tel que $BM = \frac{1}{3}BC$, et G est le point de $[AM]$ tel que $AG = \frac{3}{5}AM$. Alors M est le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, 1)$, et G est le barycentre de $(M, 3)$ et $(A, 2)$. On en tire une relation entre G et les **trois** sommets : $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



BM = ⅓ BC et AG = ⅗ AM.

Un triangle ABC, de sommet A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. Le côté [BC] est partagé en trois parts égales ; le point M est le premier point de partage à partir de B. Le segment [AM], en bleu, est partagé en cinq parts égales ; le point G est le troisième point de partage à partir de A.

LA MOYENNE DE TROIS NOTES

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}\right)$$

DANS LE TRIANGLE

$$2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Sur la figure, M est le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, 1)$, et G est le barycentre de $(M, 3)$ et $(A, 2)$. Montrer que $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Réduire avec M — On applique la réduction au point G : la somme des coefficients 2 et 1 vaut 3.

$$2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GM}$$

Utiliser G — G est le barycentre de $(M, 3)$ et $(A, 2)$: on écrit sa définition.

$$3\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GA} = \vec{0}$$

Conclure — On remplace trois fois le vecteur $\overrightarrow{GM}$ par la somme trouvée à la première étape.

$$2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

À ne pas faire : $AG = \frac{3}{5}AM$, donc G est le barycentre de $(A, 3)$ et $(M, 2)$ — G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(M, 3)$. Avec des coefficients positifs, le point le plus proche du barycentre porte le plus grand coefficient : ici G est plus près de M, c'est donc M qui reçoit 3.

13. DÉFINITION

Barycentre de trois points

CE QU'IL DIT

Tawa el définition fi trois points. 3andna A, B w C, w trois réels alpha, bêta w gamma, w ech-chart : alpha plus bêta plus gamma différent de zéro. El point G elli y7a99e9 alpha fois le vecteur GA plus bêta fois le vecteur GB plus gamma fois le vecteur GC égale le vecteur nul, houwa le barycentre des points pondérés A, alpha, B, bêta w C, gamma. W ken eth-thletha coefficients kif kif, nsammiweh l'isobarycentre. Bech n7ottou G : le vecteur AG égale bêta sur la somme, fois le vecteur AB, plus gamma sur la somme, fois le vecteur AC.

تونسي : توّا الـ définition في trois points . عندنا w trois réels alpha ، bêta w gamma ، w الشرط : alpha ، B w C ، A point G الـ . اللي يحقّق alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B plus gamma fois le vecteur G C égale le vecteur nul ، هو le barycentre des points pondérés plus bêta plus gamma différent de zéro . باش نحطّو l'isobarycentre ، نسمّيوه كيف كيف ، كان الثلاثة coefficients A ، alpha ، B ، bêta w C ، gamma . w G : le vecteur A G égale bêta sur la somme ، fois le vecteur A B ، plus gamma sur la somme ، fois le vecteur A C .

Voici la définition pour trois points. On a A, B et C, et trois réels alpha, bêta et gamma, avec une condition : alpha plus bêta plus gamma différent de zéro. Le point G qui vérifie alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B plus gamma fois le vecteur G C égale le vecteur nul est le barycentre des points

pondérés A, alpha, B, bêta et C, gamma. Et si les trois coefficients sont égaux, on l'appelle l'isobarycentre. Pour placer G : le vecteur A G égale bêta sur la somme, fois le vecteur A B, plus gamma sur la somme, fois le vecteur A C.

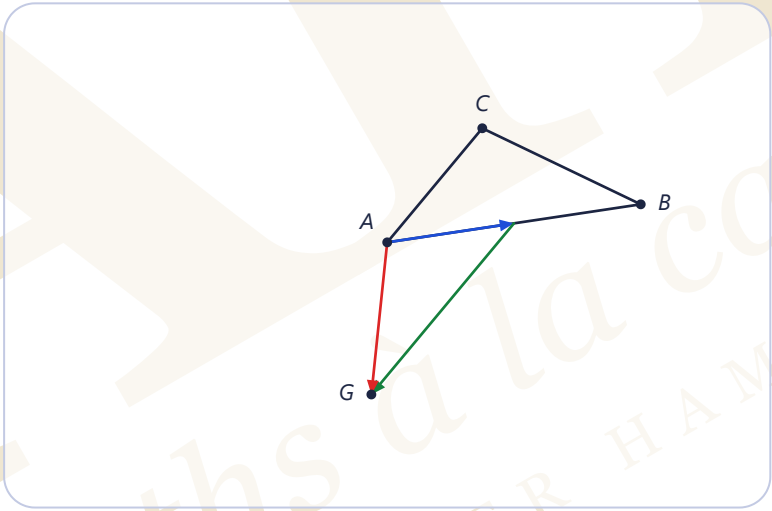
Soient A, B et C trois points du plan et α, β, γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Le point G du plan qui vérifie $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ est appelé le **barycentre des points pondérés** (A,α), (B,β) et (C,γ).

On dit aussi que G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients α, β et γ.

Si $\alpha=\beta=\gamma$, G est appelé l'**isobarycentre** des points A, B et C.

Ce point existe et il est unique : c'est le point défini par $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.



(A, 4), (B, 1), (C, −3) : AG = ½ AB − ⅜ AC.

Un triangle ABC. À partir de A, une flèche bleue avance de la moitié du vecteur AB ; de son extrémité part une flèche verte, de sens contraire au vecteur AC et une fois et demie plus longue. Elle aboutit au point G, situé sous le triangle : G est le barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, moins 3).

LA DÉFINITION

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0} \qquad (\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$$

POUR PLACER G

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

DÉMONSTRATION

Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$. Par la relation de Chasles, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Réciproquement, si un point G'

vérifie $\alpha\overrightarrow{G'A} + \beta\overrightarrow{G'B} + \gamma\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$, le même calcul donne $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG'} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AG}$: les points G' et G sont confondus.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A, B et C trois points non alignés. Construire le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients 4, 1 et -3.

La somme — La somme des coefficients, $4 + 1 - 3$, vaut 2 : elle n'est pas nulle, le barycentre existe.

$$4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Le vecteur AG — On divise le coefficient de B, puis celui de C, par la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

Construire — À partir de A, on avance de la moitié du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis on recule d'une fois et demie le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

À ne pas faire : Les points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, -3)$ ont un barycentre — Ces trois points pondérés n'ont pas de barycentre. La somme des coefficients, $1 + 2 - 3$, est nulle : la définition exige une somme non nulle.

À ne pas faire : Pour $(A, 4)$, $(B, 1)$ et $(C, -3)$: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ — $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Chaque coefficient se divise par la somme des trois coefficients, qui vaut ici 2.

14. PROPRIÉTÉ

Propriétés pour trois points

CE QU'IL DIT

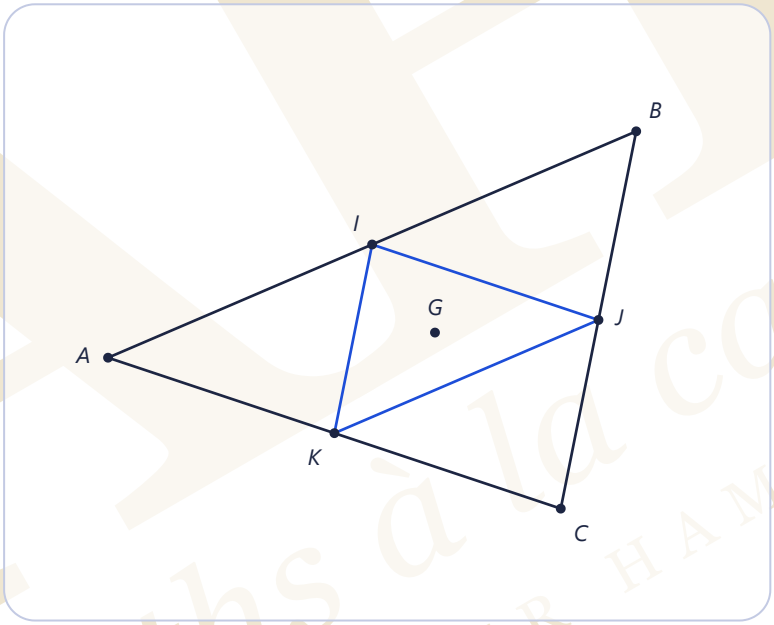
Les propriétés mta3 deux points tab9a sa7i7a fi trois points. L ay point M : alpha fois le vecteur MA plus bêta fois le vecteur MB plus gamma fois le vecteur MC égale (alpha plus bêta plus gamma) fois le vecteur MG. W ken nedherbou eth-thletha coefficients fi nafs el réel k, mouch nul, le barycentre ma yetbaddelch. W 7aja mohemma : l'isobarycentre de trois points, mouch alignés, houwa le centre de gravité du triangle ABC. Donc l ay point M : le vecteur MA plus le vecteur MB plus le vecteur MC égale trois fois le vecteur MG.

les propriétés متاع deux points تبقى صحيحة في trois points . لأيّ A plus le vecteur M point : alpha fois le vecteur M B plus gamma fois le vecteur M C égale la parenthèse alpha plus bêta plus gamma ، fois le vecteur M G . w كان نضربو الثلاثة coefficients في نفس الـ réel k ، موش ، le barycentre nul ، ما يتبدّلش . w حاجة مهمّة : l'isobarycentre de trois points ، alignés موش ، هو le centre de gravité du triangle A B C . donc لأيّ trois fois égale M C plus le vecteur M B plus le vecteur M A plus le vecteur M point : le vecteur M G .

Les propriétés vues pour deux points restent vraies pour trois points. Pour tout point M : alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B plus gamma fois le vecteur M C égale la parenthèse alpha plus bêta plus gamma, fois le vecteur M G. Et si on multiplie les trois coefficients par un même réel k non nul, le barycentre ne change pas. Et un point important : l'isobarycentre de trois points non alignés est le centre de gravité du triangle A B C. Donc pour tout point M : le vecteur M A plus le vecteur M B plus le vecteur M C égale trois fois le vecteur M G.

Soit G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

- Pour tout point M du plan : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$.
- Pour tout réel non nul k, le barycentre de $(A, k\alpha)$, $(B, k\beta)$ et $(C, k\gamma)$ est encore G.
- L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le **centre de gravité** du triangle ABC.



Les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité G.

Un triangle ABC et, à l'intérieur, le triangle IJK formé par les milieux des côtés : I milieu de [AB], J milieu de [BC] et K milieu de [AC]. Le point G, centre de gravité du triangle ABC, est aussi à l'intérieur du petit triangle IJK.

POUR TOUT POINT M

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$$

G CENTRE DE GRAVITÉ DE ABC

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

DÉMONSTRATION

Par la relation de Chasles, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$. Pour l'isobarycentre, la définition s'écrit $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$: c'est l'égalité qui caractérise le centre de gravité du triangle ABC.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. Montrer que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

Trois milieux — Pour tout point M, chaque milieu donne une égalité : par exemple, I est le milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI} \quad ; \quad \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ} \quad ; \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MK}$$

Additionner — On ajoute les trois égalités membre à membre, puis on divise par 2.

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MK}$$

Au centre de gravité — On prend pour M le centre de gravité G du triangle ABC : le membre de gauche est le vecteur nul.

$$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$$

Conclure — G est l'isobarycentre de I, J et K : c'est le centre de gravité du triangle IJK.

$$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$ — $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$. Le vecteur $\overrightarrow{MG}$ est multiplié par la somme des coefficients, ici $1+1+1$.

15. APPLICATION

Même centre de gravité

CE QU'IL DIT

Tatbi9 3la le centre de gravité. 3andna zouz triangles : ABC, le centre de gravité mte3ou G, w A prime B prime C prime, le centre de gravité mte3ou G prime. Nal9aw : le vecteur AA prime plus le vecteur BB prime plus le vecteur CC prime égale trois fois le vecteur GG prime. 3lech ? Fi koll vecteur, net3addew b G w b G prime, w el sommes mta3 les centres de gravité yti7ou. En-natija : ezzouz triangles 3andhom nafs le centre de gravité, ki la somme hedhi égale le vecteur nul.

تطبيق على le centre de gravité . عندنا زوز triangles : A B C ، le centre de gravité متاعو G ، w A prime B prime C prime ، le centre de gravité متاعو G prime . نلقاو : le vecteur A A prime plus le vecteur B B prime plus le vecteur C C prime égale trois fois le vecteur G G prime . علاش ؟ في كل vecteur ، نتعدّاو بـ G w بـ G prime le centre de نفس عندهم triangles الزوز : النتيجة . يطيحو les centres de gravité متاع sommes الـ prime ، w gravité ، كي la somme هاذي égale le vecteur nul .

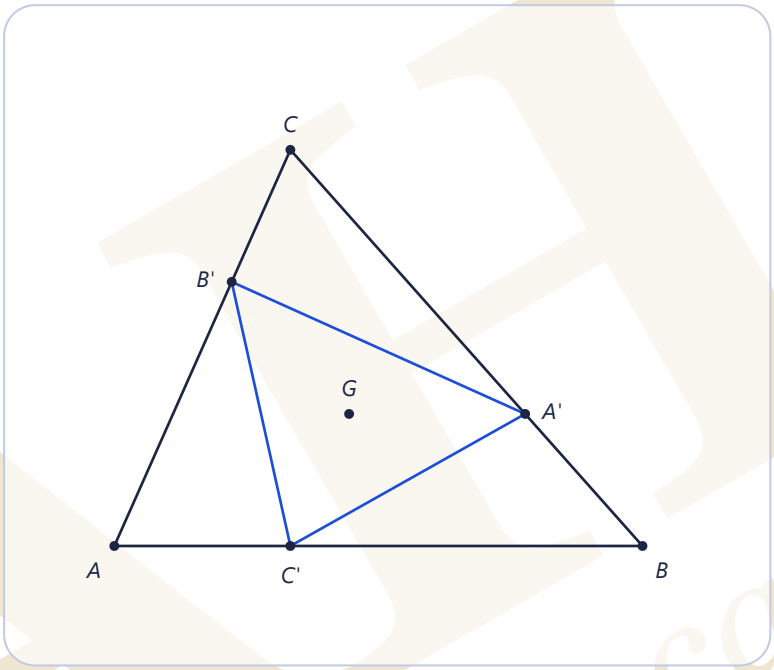
Une application au centre de gravité. On a deux triangles : A B C, de centre de gravité G, et A prime B prime C prime, de centre de gravité G prime. On trouve : le vecteur A A prime plus le vecteur B B prime plus le vecteur C C prime égale trois fois le vecteur G G prime. Pourquoi ? Dans chaque vecteur, on passe par G et par G prime, et les sommes liées aux centres de gravité s'annulent. Conclusion : les deux triangles ont le même centre de gravité quand cette somme égale le vecteur nul.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles de centres de gravité respectifs G et G'. Alors

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

En effet, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$, et de même pour les deux autres vecteurs. En ajoutant, $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$: il reste $3\overrightarrow{GG'}$.

Condition nécessaire et suffisante. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.



Ici k = ⅓ : les triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité.

Un triangle ABC, avec A en bas à gauche, B en bas à droite et C en haut. Sur chaque côté, un point au tiers : A' sur [BC] à partir de B, B' sur [CA] à partir de C, C' sur [AB] à partir de A. Le triangle A'B'C', en bleu, est inscrit dans le triangle ABC, et les deux triangles ont le même centre de gravité G.

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

$$G = G' \iff \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle et k un réel. On définit les points A', B' et C' par $\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB}$. Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont-ils le même centre de gravité ?

Trois vecteurs — On passe par B dans le vecteur $\overrightarrow{AA'}$, par C dans le vecteur $\overrightarrow{BB'}$, et par A dans le vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} \quad ; \quad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{AB}$$

La somme — On regroupe : la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ est le vecteur nul.

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (1+k)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \vec{0}$$

Conclure — La somme est nulle, donc le vecteur $\overrightarrow{GG'}$ est nul : oui, les deux triangles ont le même centre de gravité, quel que soit le réel k.

$3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

16. THÉORÈME

Barycentre partiel

CE QU'IL DIT

Le barycentre partiel. Nabdew bel moyennes : ken n7esbou la moyenne mta3 zouz notes, w na3tiwha la somme mta3 les coefficients mte3hom, nal9aw nafs la moyenne générale. Fel barycentre nafs echay. G le barycentre de A, alpha, B, bêta w C, gamma, w bêta plus gamma différent de zéro. G prime le barycentre de B, bêta w C, gamma. El théorème y9oul : G houwa le barycentre de A, alpha w G prime, bêta plus gamma. Ya3ni n3awdhou zouz points b le barycentre mte3hom, w na3tiweh la somme mta3 les coefficients. Hakka trois points ywalliw deux points, w nrasmou G bes-sehel.

le barycentre partiel . نبداو بالـ moyennes : كان نحسبو la moyenne متاع زوز notes ، w la somme نعطيوها
la moyenne générale نلقاو نفس متاعهم ، les coefficients متاع . la moyenne générale نلقاو نفس متاعهم ، les coefficients متاع
G le . نفس الشيء barycentre الـ في . la moyenne générale نلقاو نفس متاعهم ، les coefficients متاع
barycentre de A ، alpha ، B ، bêta w C ، gamma ، w bêta plus gamma différent de zéro . G prime le
le barycentre de A ، alpha w G prime ، هو G : يقول théorème الـ . barycentre de B ، bêta w C ، gamma
les متاع la somme نعطيوه w ، متاعهم le barycentre بـ points زوز نعوّضو . يعني bêta plus gamma
. بالساهل G نرسمو deux points ، w يولّيو trois points هكّا . coefficients

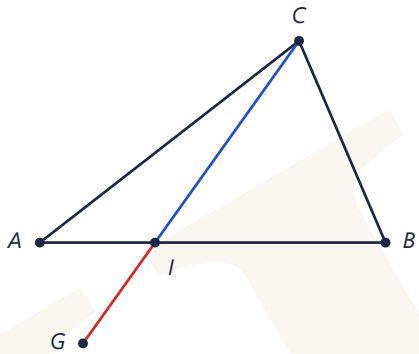
Le barycentre partiel. Commençons par les moyennes : si on calcule la moyenne de deux notes, et qu'on lui donne la somme de leurs coefficients, on retrouve la même moyenne générale. Pour le barycentre, c'est pareil. G est le barycentre de A, alpha, B, bêta et C, gamma, avec bêta plus gamma différent de zéro. G prime est le barycentre de B, bêta et C, gamma. Le théorème dit : G est le barycentre de A, alpha et G prime, bêta plus gamma. Autrement dit, on remplace deux points par leur barycentre, et on lui donne la somme des coefficients. Ainsi trois points deviennent deux points, et on construit G facilement.

Avec des moyennes. Reprenons les trois moyennes $12{,}75$ (coefficient 1), $12{,}25$ (coefficient 2) et $11{,}50$ (coefficient 2). La moyenne m_2 des deux dernières est $\dfrac{2\times 12{,}25 + 2\times 11{,}50}{4} = 11{,}875$.
On retrouve la moyenne annuelle en affectant m_2 du coefficient $2+2=4$:
$\dfrac{1\times 12{,}75 + 4\times 11{,}875}{5} = 12{,}05$.

Théorème. Si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) et si $\beta+\gamma \neq 0$, alors G est aussi le barycentre de (A,α) et $(G',\beta+\gamma)$, où G' est le barycentre de (B,β) et (C,γ).

On peut donc **remplacer deux points par leur barycentre**, à condition de l'affecter de la **somme** de leurs coefficients. L'une au moins des trois sommes $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ et $\alpha+\gamma$ est non nulle : un

regroupement est toujours possible.



(A, 2), (B, 1), (C, −1) : on regroupe A et B en I, puis G est le barycentre de (I, 3) et (C, −1).

Un triangle ABC, avec A à gauche, B à droite et C en haut. Le point I est sur le côté [AB], au tiers à partir de A. La droite (CI) est tracée en bleu. Le point G est sur cette droite, de l'autre côté de I par rapport à C, à une distance de I égale à la moitié de IC.

G' BARYCENTRE DE (B, B) ET (C, Γ)

$$\alpha\overrightarrow{GA} + (\beta+\gamma)\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$$

DÉMONSTRATION

Pour tout point M, $\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\beta+\gamma)\overrightarrow{MG'}$. Avec $M = G$: $\vec{0} = \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GA} + (\beta+\gamma)\overrightarrow{GG'}$, et $\alpha + (\beta+\gamma) \neq 0$. Enfin, $(\alpha+\beta) + (\beta+\gamma) + (\alpha+\gamma) = 2(\alpha+\beta+\gamma) \neq 0$: les trois sommes ne peuvent pas être toutes nulles.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 2, 1 et -1, et soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et 1. Montrer que G est le barycentre des points I et C affectés des coefficients 3 et -1, puis construire I et G.

Regrouper A et B — On remplace A et B par leur barycentre I, affecté de la somme $2+1$.
G est le barycentre de $(I, 3)$ et $(C, -1)$

Construire I — I est sur le segment $[AB]$, au tiers à partir de A.
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Construire G — On applique la formule aux points I et C : la somme des coefficients est 2.
$\overrightarrow{IG} = \frac{-1}{3-1} \times \overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

$$\overrightarrow{IG} = \frac{-1}{3-1} \times \overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$$

À ne pas faire : G est le barycentre de $(I, 1)$ et $(C, -1)$ — G est le barycentre de $(I, 3)$ et $(C, -1)$. Le barycentre partiel remplace deux points : il porte la somme de leurs deux coefficients, ici $2 + 1$.

17. EXEMPLE

Lire une figure

CE QU'IL DIT

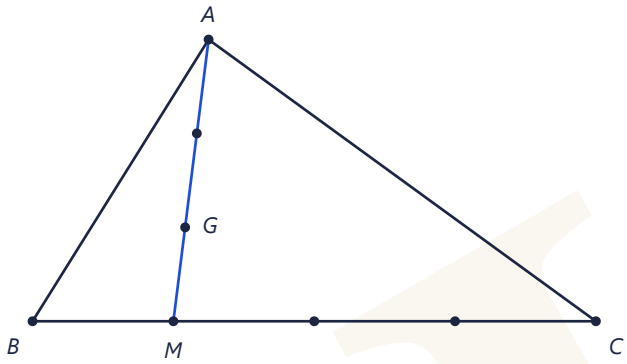
Mithel : kifech na9raw le barycentre men figure. 3andna triangle ABC. M 3la BC, w BM houwa le quart de BC. G 3la AM, w AG houwa deux tiers de AM. Nabdew b M : houwa a9reb l B, donc B ye5ou akbar coefficient : M le barycentre de B, trois w C, un. Men ba3d G : a9reb l M, donc G le barycentre de A, un w M, deux. Tawa M lezmou yhezz la somme trois plus un, ya3ni quatre. Nedherbou fi deux : A, deux w M, quatre. En-natija : G le barycentre de A, deux, B, trois w C, un.

مثال : كيفاش نقراو le barycentre من figure . عندنا M على triangle A B C ، w B M هو B C . le quart de B C
على G A G ، w A M هو A M . deux tiers de A M نبداو بـ M : هو أقرب لـ B ، donc B ياخذ أكبر M le coefficient :
M توّا . M ، donc G le barycentre de A ، un w M ، deux أقرب لـ G : من بعد . barycentre de B ، trois w C ، un
لازمو يهزّ la somme trois plus un ، يعني quatre نضربو في quatre . deux : A ، deux w M ، النتيجة G le :
. barycentre de A ، deux ، B ، trois w C ، un

Un exemple : comment lire un barycentre sur une figure. On a un triangle A B C. M est sur B C, et B M est le quart de B C. G est sur A M, et A G vaut deux tiers de A M. Commençons par M : il est plus proche de B, donc B reçoit le plus grand coefficient : M est le barycentre de B, trois et C, un. Ensuite G : il est plus proche de M, donc G est le barycentre de A, un et M, deux. Maintenant M doit porter la somme trois plus un, c'est-à-dire quatre. On multiplie par deux : A, deux et M, quatre. Conclusion : G est le barycentre de A, deux, B, trois et C, un.

Sur la figure, ABC est un triangle, M est le point de $[BC]$ tel que $BM = \frac{1}{4}BC$, et G est le point de $[AM]$ tel que $AG = \frac{2}{3}AM$. On veut écrire G comme barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

- M est le barycentre de $(B, 3)$ et $(C, 1)$: il est plus près de B, qui reçoit le plus grand coefficient.
- G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(M, 2)$, ou encore, en multipliant par 2, de $(A, 2)$ et $(M, 4)$.
- M porte alors la somme $3 + 1 = 4$ des coefficients de B et de C : G est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 1)$.



BM = ¼ BC et AG = ⅔ AM.

Un triangle ABC, de sommet A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. Le côté [BC] est partagé en quatre parts égales ; le point M est le premier point de partage à partir de B. Le segment [AM] est partagé en trois parts égales ; le point G est le deuxième point de partage à partir de A.

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec les données de la figure, M est le barycentre de $(B, 3)$ et $(C, 1)$, et G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(M, 4)$. Vérifier que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Réduire avec M — M est le barycentre de $(B, 3)$ et $(C, 1)$: on réduit au point G, la somme des coefficients vaut 4.

$$3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM}$$

Utiliser G — G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(M, 4)$: on écrit sa définition.

$$2\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GM} = \vec{0}$$

Conclure — On remplace quatre fois le vecteur $\overrightarrow{GM}$ par la somme trouvée à la première étape.

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

À ne pas faire : $BM = \frac{1}{4}BC$, donc M est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 3)$ — M est le barycentre de $(B, 3)$ et $(C, 1)$. En partant de B, le numérateur 1 est le coefficient de C, et B reçoit le reste, $4 - 1$.

18. APPLICATION

Des droites concourantes

CE QU'IL DIT

Mas2la : kifech nthabtou elli trois droites concourantes ? Nlawjou 3la point wa7ed, mawjoud 3la eth-thletha. W el point hedha ykoun barycentre, nlemmouh b akther men tari9a. 3andna triangle ABC, w A prime, B prime w C prime les milieux mta3 les côtés. D 3la AB, elli le vecteur AD égale un tiers du vecteur AB. W E le barycentre de A, deux, B, un w C, un. Ki nlemmou B w C, nal9aw E 3la la droite AA prime. Ki nlemmou A w B, nal9aw E 3la la droite CD. W E houwa zeda le milieu de B prime C prime. Donc eth-thletha droites yetle9aw fi E.

مسألة : كيفاش نثبتو اللي trois droites concourantes ؟ نلوّجو على point واحد ، موجود على الثلاثة . point الـ w هذا يكون barycentre ، نلمّوه بأكثر من طريقة . عندنا triangle A B C ، w A prime ، B prime w C prime les milieux متاع D . les côtés على A B ، اللي le barycentre E w . le vecteur A D égale un tiers du vecteur A B كي نلمّو un ، C w un ، B ، deux ، A de . كي نلمّو B w C ، نلقاو E على la droite A A prime . كي نلمّو A w B ، نلقاو E على la droite C D . w E هو زادة donc . le milieu de B prime C prime الثلاثة droites يتلاقاو في E .

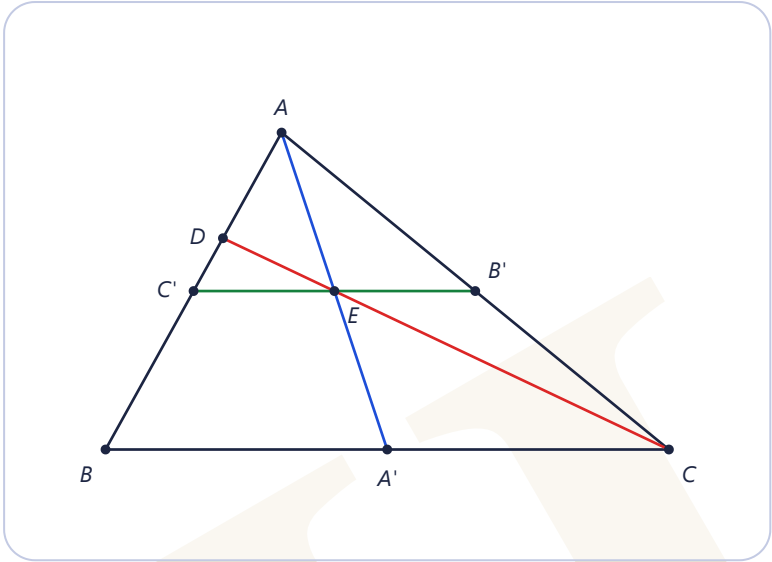
Un problème : comment prouver que trois droites sont concourantes ? On cherche un seul point, situé sur les trois. Et ce point sera un barycentre, que l'on regroupe de plusieurs façons. On a un triangle A B C, et A prime, B prime et C prime les milieux des côtés. D est sur A B, tel que le vecteur A D égale un tiers du vecteur A B. Et E est le barycentre de A, deux, B, un et C, un. En regroupant B et C, on trouve E sur la droite A A prime. En regroupant A et B, on trouve E sur la droite C D. Et E est aussi le milieu de B prime C prime. Donc les trois droites se rencontrent en E.

Pour montrer que trois droites sont **concourantes**, on cherche un point qui appartient aux trois : un barycentre bien choisi, que l'on regroupe de plusieurs façons.

Soit ABC un triangle. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, et par D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Soit E le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

En regroupant B et C, puis A et B, on montre que E est sur la droite (AA') et sur la droite (CD) ; il est aussi le milieu de $[B'C']$. Les droites (AA'), $(B'C')$ et (CD) sont donc concourantes en E.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



(AA'), (B'C') et (CD) se coupent en E, barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, 1).

Un triangle ABC, de sommet A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. A' est le milieu de [BC], B' le milieu de [CA] et C' le milieu de [AB]. Le point D est sur [AB], au tiers à partir de A. Trois droites sont tracées : (AA') en bleu, (B'C') en vert et (CD) en rouge. Elles se coupent toutes les trois au point E, milieu de [AA'].

$$2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le triangle ABC, A', B' et C' sont les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, D est le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et E est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$. Montrer que les droites (AA'), $(B'C')$ et (CD) sont concourantes.

Regrouper B et C — A' est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$: il porte la somme 2. Donc E est le barycentre de $(A, 2)$ et $(A', 2)$: c'est le milieu de $[AA']$.

$$2\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EA'} = \vec{0}$$

Regrouper A et B — D est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$: il porte la somme 3. Donc E est le barycentre de $(D, 3)$ et $(C, 1)$, à coefficients de même signe : il est sur le segment $[CD]$.

$$3\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$$

La troisième droite — On partage en deux le terme qui contient A : les milieux B' et C' apparaissent, et E est le milieu de $[B'C']$.

$$\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}\right) + \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}\right) = 2\overrightarrow{EB'} + 2\overrightarrow{EC'} = \vec{0}$$

Conclure — Le point E appartient aux trois droites : elles sont concourantes en E.

$$\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}\right) + \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}\right) = 2\overrightarrow{EB'} + 2\overrightarrow{EC'} = \vec{0}$$

À ne pas faire : Trois droites qui se coupent deux à deux sont concourantes — Trois droites sont concourantes quand un même point appartient aux trois. Trois droites qui se coupent deux à deux peuvent

former un triangle : il faut trouver un seul point commun aux trois.

19. APPLICATION

Trois points alignés

CE QU'IL DIT

Mas2la o5ra 3la l'alignement. Fi triangle ABC, A prime, B prime w C prime les milieux mta3 les côtés. Q le milieu de B prime C, w P le symétrique de C prime par rapport à B. Nabdew nektbou P w Q ka barycentres. Le vecteur AP égale trois demis du vecteur AB, donc P le barycentre de A, moins un w B, trois. W le vecteur AQ égale trois quarts du vecteur AC, donc Q le barycentre de A, un w C, trois. Men ba3d nbassatou fel point A prime, w nal9aw : le vecteur A prime P plus deux fois le vecteur A prime Q égale le vecteur nul. Donc A prime, P w Q alignés.

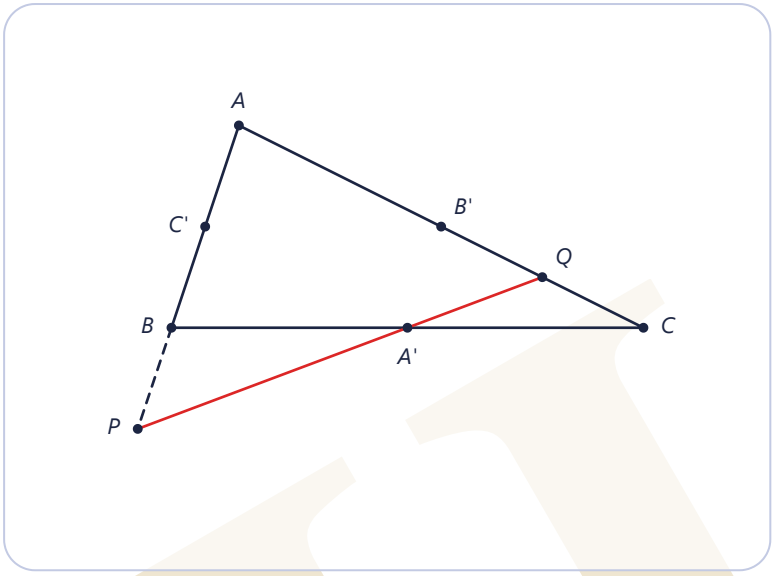
les côtés . متاع triangle A B C ، A prime ، B prime w C prime les milieux في . l'alignement مسألة أخرى على barycentres ك P w Q نبداو نكتبو . Q le milieu de B prime C ، w P le symétrique de C prime par rapport à B . le vecteur A P égale trois demis du vecteur A B ، donc P le barycentre de A ، moins un w B ، trois . w le من بعد نبسّطو . vecteur A Q égale trois quarts du vecteur A C ، donc Q le barycentre de A ، un w C ، trois le vecteur A prime P plus deux fois le vecteur A prime Q égale le vecteur : نلقاو point A prime ، w الـ في . nul . donc A prime ، P w Q alignés

Un autre problème, sur l'alignement. Dans un triangle A B C, A prime, B prime et C prime sont les milieux des côtés. Q est le milieu de B prime C, et P est le symétrique de C prime par rapport à B. On commence par écrire P et Q comme barycentres. Le vecteur A P égale trois demis du vecteur A B, donc P est le barycentre de A, moins un et B, trois. Et le vecteur A Q égale trois quarts du vecteur A C, donc Q est le barycentre de A, un et C, trois. Ensuite on réduit au point A prime, et on trouve : le vecteur A prime P plus deux fois le vecteur A prime Q égale le vecteur nul. Donc A prime, P et Q sont alignés.

Dans un triangle ABC, A', B' et C' sont les milieux des côtés opposés à A, B et C ; Q est le milieu de $[B'C]$ et P est le symétrique de C' par rapport à B.

- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$: P est le barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 3)$.
- $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$: Q est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 3)$.

On en déduit que $\overrightarrow{A'P} + 2\overrightarrow{A'Q} = \vec{0}$: les points A', P et Q sont alignés.



P, A' et Q sont alignés.

Un triangle ABC, avec A en haut à gauche, B en dessous à gauche et C à droite. A' est le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. Le point Q est le milieu de [B'C]. Le point P est sur la droite (AB), au-delà de B, symétrique de C' par rapport à B. Une droite rouge passe par P, A' et Q.

$$\overrightarrow{A'P} + 2\overrightarrow{A'Q} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec ces notations, P est le barycentre des points A et B affectés des coefficients -1 et 3, et Q est le barycentre des points A et C affectés des coefficients 1 et 3. Calculer $\overrightarrow{A'P} + 2\overrightarrow{A'Q}$ et en déduire que les points A', P et Q sont alignés.

Réduire avec P — P est le barycentre des points A et B affectés des coefficients -1 et 3 : on réduit au point A', la somme des coefficients vaut 2.

$$-\overrightarrow{A'A} + 3\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'P}$$

Réduire avec Q — Q est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 3)$: la somme des coefficients vaut 4.

$$\overrightarrow{A'A} + 3\overrightarrow{A'C} = 4\overrightarrow{A'Q}$$

Additionner — On ajoute les deux égalités : les vecteurs $\overrightarrow{A'A}$ disparaissent, et A' est le milieu de $[BC]$.

$$2\overrightarrow{A'P} + 4\overrightarrow{A'Q} = 3\left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}\right) = \vec{0}$$

Conclure — On divise par 2 : A' est le barycentre de $(P, 1)$ et $(Q, 2)$, donc les trois points sont alignés.

$$\overrightarrow{A'P} + 2\overrightarrow{A'Q} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{A'P} + 2\overrightarrow{A'Q} = \vec{0}$$

20. APPLICATION

Deux cercles

CE QU'IL DIT

Narj3ou lel ensembles de points, el marra hedhi fi triangle équilatéral ABC, le côté mte3ou a, w G le centre de gravité. L ay point M, la norme de la somme des vecteurs MA, MB w MC, hiya trois fois MG. Ken la norme hedhi égale a racine de trois, nal9aw MG égale a racine de trois sur trois : hedhi bedhabt la distance GA. Donc M 3la le cercle circonscrit, elli yet3adda men A, B w C. W ken la norme égale a racine de trois sur deux, nal9aw MG égale a racine de trois sur six : hedha le cercle inscrit, elli ymess eth-thletha côtés.

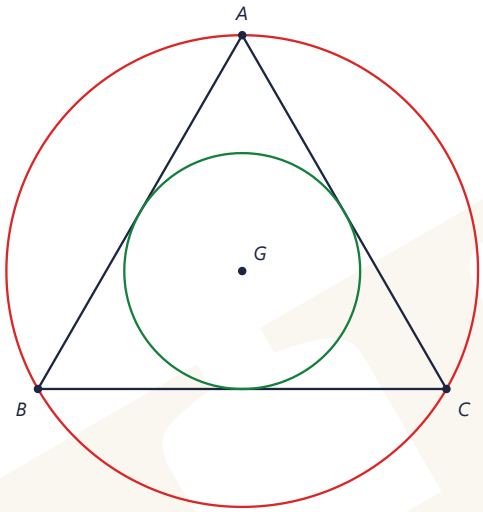
نرجعو للـ ensembles de points ، المرّة هاذي في le côté ، triangle équilatéral A B C متاعو le centre G w ، a
لأيّ M C w M B ، M A de la somme des vecteurs la norme ، point M ، هي M G trois fois . de gravité كان
la norme هاذي égale a racine de trois ، نلقاو égale a racine de trois sur trois : M G هاذي بالضبط
distance G A . donc M على le cercle circonscrit ، اللي يتعدّى من w . C B w A ، كان la norme égale a racine
de trois sur deux ، نلقاو de trois sur six : M G égale a racine de trois sur six هذا le cercle inscrit ، اللي يمسّ الثلاثة . côtés

Revenons aux ensembles de points, cette fois dans un triangle équilatéral A B C de côté a, avec G son centre de gravité. Pour tout point M, la norme de la somme des vecteurs M A, M B et M C vaut trois fois M G. Si cette norme égale a racine de trois, on trouve M G égale a racine de trois sur trois : c'est exactement la distance G A. Donc M est sur le cercle circonscrit, qui passe par A, B et C. Et si la norme égale a racine de trois sur deux, on trouve M G égale a racine de trois sur six : c'est le cercle inscrit, qui touche les trois côtés.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et G son centre de gravité. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$: la norme de cette somme vaut $3MG$.

Dans un triangle équilatéral, les médianes sont aussi les hauteurs, les médiatrices et les bissectrices. La hauteur mesure $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, donc $GA=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, et la distance de G à chaque côté est $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

- $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=a\sqrt{3}$ équivaut à $MG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$: c'est le cercle de centre G passant par A, B et C, le **cercle circonscrit** au triangle.
- $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $MG=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$: c'est le cercle de centre G tangent aux trois côtés, le **cercle inscrit** dans le triangle.



En rouge, MG = a√3⁄3 ; en vert, MG = a√3⁄6.

Un triangle équilatéral ABC, de sommet A en haut, avec son centre de gravité G. Un grand cercle de centre G, en rouge, passe par les trois sommets : c'est le cercle circonscrit. Un petit cercle de centre G, en vert, touche les trois côtés : c'est le cercle inscrit.

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 3MG$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et A' le milieu de $[BC]$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ soit égale à la norme du vecteur $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

La première somme — G est l'isobarycentre de A, B et C : la somme se réduit à trois fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

La seconde somme — La somme des coefficients, $2-1-1$, est nulle : le vecteur est constant. On passe par A dans les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$.

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = -\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) = -2\overrightarrow{AA'}$$

Passer aux distances — On écrit que les deux normes sont égales.

$$3MG = 2AA' \iff MG = \frac{2}{3}AA'$$

Reconnaître — Or la distance GA vaut les deux tiers de la médiane AA' : l'ensemble cherché est le cercle de centre G qui passe par A.

le cercle de centre G passant par A

le cercle de centre G passant par A

À ne pas faire : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a\sqrt{3}$ donne $MG = a\sqrt{3} — 3MG = a\sqrt{3}$, donc $MG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. La norme de la somme vaut trois fois la distance MG : on divise par 3 avant de conclure.

---

21. APPLICATION

Cercle inscrit

CE QU'IL DIT

E5er tatbi9 : le centre du cercle inscrit. Fi triangle ABC, nsammiw a la longueur BC, b la longueur AC w c la longueur AB. La bissectrice de l'angle A t9oss le côté BC fi M. Nrasmou men B droite parallèle à la droite AC, t9oss la droite AM fi A prime. Bel angles alternes-internes, le triangle ABA prime isocèle en B, donc BA prime égale c. W b Thalès : MB sur MC égale c sur b. Ma3neha M le barycentre de B, b w C, c. Tawa G le barycentre de A, a, B, b w C, c : bel barycentre partiel, G 3la la bissectrice AM. W nafs echay m3a les bissectrices lo5rin. Donc G houwa le centre du cercle inscrit.

آخر تطبيق : le centre du cercle inscrit . في triangle A B C ، نسمّيو petit a la longueur B C ، petit b la longueur A C w petit c la longueur A B . la bissectrice de l'angle A تقصّ le côté B C في M . نرسمو من B droite parallèle à la droite A C ، تقصّ la droite A M في A prime . بالـ angles alternes-internes ، le triangle A B A prime isocèle en B ، donc B A prime égale petit c . w بـ Thalès : M B sur M C égale petit c sur petit b . Hadi tعني M le barycentre de B w C ، affectés des longueurs petit b w petit c معناها G le barycentre de A ، w C ، affectés des longueurs petit a ، petit b w petit c : بالـ G ، partiel barycentre على la bissectrice A M . نفس الشيء مع les bissectrices الأخرين donc G هو le centre du cercle inscrit .

Dernière application : le centre du cercle inscrit. Dans un triangle A B C, on note petit a la longueur B C, petit b la longueur A C et petit c la longueur A B. La bissectrice de l'angle A coupe le côté B C en M. On trace par B une droite parallèle à la droite A C, qui coupe la droite A M en A prime. Avec les angles alternes-internes, le triangle A B A prime est isocèle en B, donc B A prime égale petit c. Et avec Thalès : M B sur M C égale petit c sur petit b. Cela signifie que M est le barycentre de B et C, affectés des longueurs petit b et petit c. Maintenant, G est le barycentre de A, B et C, affectés des longueurs petit a, petit b et petit c : par le barycentre partiel, G est sur la bissectrice A M. Et il en est de même pour les autres bissectrices. Donc G est le centre du cercle inscrit.

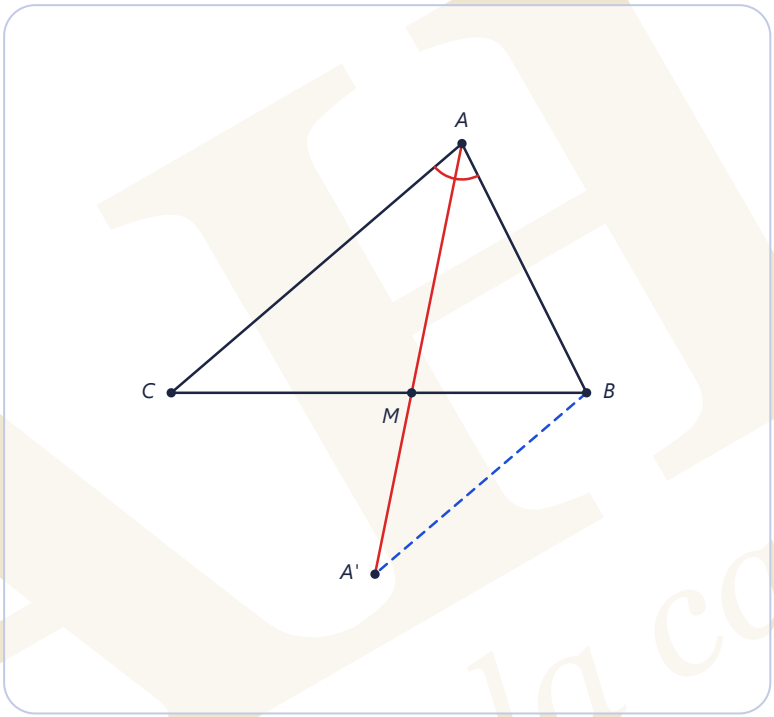
Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté $[BC]$ en M, et la parallèle à la droite (AC) menée par B coupe la droite (AM) en A'.

1. Les angles $\widehat{BA'A}$ et $\widehat{A'AC}$ sont alternes-internes, donc égaux ; et $\widehat{A'AC} = \widehat{BAA'}$ car (AM) est la bissectrice. Le triangle ABA' est donc **isocèle en B** : $BA' = BA = c$.

2. Comme (BA') est parallèle à (AC), le théorème de Thalès donne $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{BA'}{AC} = \dfrac{c}{b}$. Donc $b \times MB = c \times MC$ avec M entre B et C : M est le barycentre de (B, b) et (C, c).

3. Soit G le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c). Par le barycentre partiel, G est le barycentre de (A, a) et $(M, b + c)$: G appartient à la bissectrice (AM).

Le même raisonnement vaut pour les deux autres bissectrices : G est le point de concours des trois bissectrices, c'est-à-dire **le centre du cercle inscrit** dans le triangle ABC.



(BA') est parallèle à (AC) : le triangle ABA' est isocèle en B.

Un triangle ABC, avec C en bas à gauche, B en bas à droite et A en haut. La bissectrice de l'angle en A coupe le côté [CB] au point M ; les deux angles qu'elle forme en A portent le même arc. Une droite passant par B, parallèle à (AC), coupe la droite (AM) au point A', situé sous le côté [CB].

M PIED DE LA BISSECTRICE ISSUE DE A

$$\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$$

G CENTRE DU CERCLE INSCRIT

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un triangle ABC, on donne $BC = 6$, $AC = 5$ et $AB = 4$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en M. Calculer MB et MC, puis écrire le centre G du cercle inscrit comme barycentre de A et de M.

Le point M — M est le barycentre de $(B, 5)$ et $(C, 4)$: le sommet B reçoit la longueur AC, le sommet C reçoit la longueur AB.

$\overrightarrow{BM} = \frac{4}{9}\overrightarrow{BC}$

Les longueurs — On multiplie la longueur BC par quatre neuvièmes, puis par cinq neuvièmes.

$MB = \frac{4}{9} \times 6 = \frac{8}{3} \quad ; \quad MC = \frac{5}{9} \times 6 = \frac{10}{3}$

Le centre G — G est le barycentre de $(A, 6)$, $(B, 5)$ et $(C, 4)$; on regroupe B et C en M, qui porte la somme $5 + 4$.

G est le barycentre de $(A, 6)$ et $(M, 9)$

> G est le barycentre de $(A, 6)$ et $(M, 9)$

À ne pas faire : Le pied M de la bissectrice issue de A est le barycentre de (B, c) et (C, b) — M est le barycentre de (B, b) et (C, c). Chaque sommet reçoit la longueur du côté qui lui est opposé : B reçoit $b = AC$ et C reçoit $c = AB$, car $b \times MB = c \times MC$.

---

22. REMARQUE

Archimède

CE QU'IL DIT

Kelma 3al culture. Archimède touled fi Syracuse, 7aweli deux cent quatre-vingt-sept avant Jésus-Christ. Ken inventeur kbir, ma3rouf fel 3alem el younani el koll : des leviers, des pompes à eau w des machines de guerre. W ya7kiw elli esta3mel des miroirs, bech ylemm les rayons du soleil 3la les navires mta3 er-rouman, w ya7re9hom. W el tige en équilibre elli bdina biha el chapitre, hiya levier : m un fois GA égale m deux fois GB. Le barycentre houwa el point d'équilibre hedha, maktoub bel géométrie.

deux cent quatre-vingt-sept avant Jésus-Christ حوالي ، Syracuse في تولد culture . Archimède كلمة على الـ
des leviers ، des pompes à eau w des machines de : الكل اليوناني العالم في معروف ، كبير inventeur كان .
w ، متاع الرومان les navires على les rayons du soleil باش يلمّ ، des miroirs guerre يحكيو اللي استعمل . w
levier : m un fois G A égale m deux fois G B . هي ، chapitre الـ tige en équilibre اللي بدينا بيها الـ w يحرقهم .
géométrie مكتوب بالـ ، هذا point d'équilibre هو الـ le barycentre .

Un mot de culture. Archimède est né à Syracuse, vers deux cent quatre-vingt-sept avant Jésus-Christ. C'était un grand inventeur, connu dans tout le monde grec : des leviers, des pompes à eau et des machines de guerre. Et l'on raconte qu'il utilisa des miroirs pour concentrer les rayons du soleil sur les navires romains, et les incendier. Et la tige en équilibre par laquelle nous avons commencé le chapitre est un levier : m un fois G A égale m deux fois G B. Le barycentre, c'est ce point d'équilibre, écrit en géométrie.

Archimède, né à Syracuse vers 287 avant J.-C., était un inventeur génial et populaire, réputé dans tout le monde grec pour la construction de mécaniques subtiles et précises : leviers, pompes à eau, machines de guerre… On raconte qu'il utilisa les propriétés des miroirs paraboliques pour faire converger les rayons du soleil sur les navires romains qui assiégeaient Syracuse, et mettre le feu à la flotte. Ses travaux sur le calcul des aires et des volumes constituent l'apogée de la géométrie alexandrine.

La tige en équilibre du début du chapitre est un levier : $m_1 \times GA = m_2 \times GB$. Le barycentre est la version géométrique de ce point d'équilibre.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. G est le barycentre de (A, α) et (B, β), avec $\alpha + \beta \neq 0$, signifie $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, ou encore $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.

   > G le barycentre de A, alpha w B, bêta, ki alpha plus bêta mouch zéro, ma3neha alpha fois le vecteur GA plus bêta fois le vecteur GB égale le vecteur nul. W le vecteur AG égale bêta sur (alpha plus bêta), fois le vecteur AB.
   > *G est le barycentre de A, alpha et B, bêta, avec alpha plus bêta non nul, cela signifie que alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B égale le vecteur nul. Et le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur A B.*

2. $G \in (AB)$; $G \in [AB]$ si, et seulement si, α et β sont de même signe. Le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$ est le milieu de $[AB]$.

   > G dima 3la la droite AB. W G 3la le segment AB, ki alpha w bêta 3andhom nafs le signe. W ki el coefficients kif kif, G houwa le milieu de AB.
   > *G est toujours sur la droite A B. Et G est sur le segment A B quand alpha et bêta ont le même signe. Et quand les coefficients sont égaux, G est le milieu de A B.*

3. On ne change pas le barycentre en multipliant tous les coefficients par un même réel non nul k.

   > Ki todhrob les coefficients el koll fi nafs el réel k, mouch nul, le barycentre ma yetbaddelch.
   > *Quand on multiplie tous les coefficients par un même réel k non nul, le barycentre ne change pas.*

4. Pour tout point M du plan : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$.

   > L ay point M : alpha fois le vecteur MA plus bêta fois le vecteur MB égale (alpha plus bêta) fois le vecteur MG.
   > *Pour tout point M : alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B égale la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur M G.*

5. G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ), avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, signifie $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

   > Fi trois points, nafs echay : alpha plus bêta plus gamma mouch zéro, w alpha fois le vecteur GA plus bêta fois le vecteur GB plus gamma fois le vecteur GC égale le vecteur nul.

> *Avec trois points, c'est pareil : alpha plus bêta plus gamma est non nul, et alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B plus gamma fois le vecteur G C égale le vecteur nul.*

6. Pour tout point M du plan : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$.

   > W l ay point M : alpha fois le vecteur MA plus bêta fois le vecteur MB plus gamma fois le vecteur MC égale (alpha plus bêta plus gamma) fois le vecteur MG.
   > *Et pour tout point M : alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B plus gamma fois le vecteur M C égale la parenthèse alpha plus bêta plus gamma, fois le vecteur M G.*

7. L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

   > L'isobarycentre de trois points, mouch alignés, houwa le centre de gravité du triangle ABC.
   > *L'isobarycentre de trois points non alignés est le centre de gravité du triangle A B C.*

8. Barycentre partiel : si $\beta + \gamma \neq 0$, G est aussi le barycentre de (A, α) et $(G', \beta + \gamma)$, où G' est le barycentre de (B, β) et (C, γ).

   > Le barycentre partiel : n3awdhou B w C b le barycentre mte3hom G prime, w na3tiweh la somme bêta plus gamma. G ywalli le barycentre de A, alpha w G prime, bêta plus gamma.
   > *Le barycentre partiel : on remplace B et C par leur barycentre G prime, et on lui donne la somme bêta plus gamma. G devient le barycentre de A, alpha et G prime, bêta plus gamma.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : le barycentre mawjoud ken la somme des coefficients mouch zéro ; G dima 3la la droite AB, w a9reb lel point elli 3andou akbar coefficient en valeur absolue ; w bech tbassat somme de vecteurs, 3awwedhha b vecteur wa7ed fih G. W fi trois points, le barycentre partiel yrajj3ek l deux points. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : le barycentre موجود كان la somme des coefficients موش zéro ؛ G ديما على la droite A B ، w أقرب للـ point اللي عندو أكبر coefficient en valeur absolue ؛ w باش تبسّط somme de vecteurs ، عوّضها بـ vecteur واحد فيه G . w في le barycentre partiel ، trois points يرجّعك لـ deux points . يالله للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : le barycentre existe quand la somme des coefficients n'est pas nulle ; G est toujours sur la droite A B, et plus proche du point qui a le plus grand coefficient en valeur absolue ; et pour simplifier une somme de vecteurs, remplace-la par un seul vecteur qui contient G. Et avec trois points, le barycentre partiel te ramène à deux points. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · BARYCENTRE DE DEUX POINTS

c'est quoi le barycentre | chnowa le barycentre | barycentre ma3neha chnowa | définition du barycentre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \qquad (\alpha + \beta \neq 0)$$

CE QU'IL RÉPOND

Le barycentre des points pondérés (A, α) w (B, β) houwa el point G elli y7a99e9 $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Ech-chart : $\alpha + \beta \neq 0$. T5ayylou kif le point d'équilibre mta3 tige, fiha masse fi koll taraf : ki el coefficients positifs, G yji a9reb lel point elli 3andou akbar coefficient.

le barycentre des points pondérés A ، alpha w B ، bêta هو الـ point G ، اللي يحقّق alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B égale le vecteur nul . الشرط : alpha plus bêta différent de zéro . تخيّلو كيف point G ، فيها masse في كل طرف : كي الـ coefficients positifs ، يجي أقرب للـ tige متاع le point d'équilibre اللي عندو أكبر coefficient .

Le barycentre des points pondérés A, alpha et B, bêta est le point G qui vérifie alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B égale le vecteur nul. La condition : alpha plus bêta différent de zéro. Imagine-le comme le point d'équilibre d'une tige qui porte une masse à chaque bout : quand les coefficients sont positifs, G est plus proche du point qui a le plus grand coefficient.

QUESTION 2 · BARYCENTRE DE DEUX POINTS

3lech lazem la somme des coefficients mouch zero | pourquoi la somme des coefficients doit être non nulle | ken la somme des coefficients nulle chnowa ysir | somme des coefficients égale zéro

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha + \beta \neq 0$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater ken la somme zéro, ma fammech barycentre. Chouf : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$, ki nda55lou A, ywalli $(\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB}$. Ken $\alpha + \beta = 0$, yab9a $\beta\overrightarrow{AB}$ berk, w hedha mouch le vecteur nul, ki bêta mouch zéro : ma famma 7atta point G ysla7. W fel formule, na9smou 3la $\alpha + \beta$: sur zéro ma yjich.

خاطر كان la somme zéro ، ما فمّاش barycentre . شوف : alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B ، كي ندخّلو A ، يولّي A B plus bêta fois le vecteur G A ، fois le vecteur la parenthèse alpha plus bêta . كان alpha plus bêta égale zéro ، يبقى bêta fois le vecteur A B ، برك w ، هذا موش le vecteur nul ، كي bêta موش zéro : ما فمّا حتّى point G يصلح . في الـ formule ، نقسمو على zéro : sur alpha plus bêta ما يجيش .

Parce que si la somme est nulle, il n'y a pas de barycentre. Regarde : alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B, quand on introduit A, devient la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur G A, plus bêta fois le vecteur A B. Si alpha plus bêta égale zéro, il ne reste que bêta fois le vecteur A B, qui n'est pas le vecteur nul dès que bêta n'est pas nul : aucun point G ne convient. Et dans la formule, on divise par alpha plus bêta : diviser par zéro est impossible.

QUESTION 3 · LE POINT D'ÉQUILIBRE

c'est quoi le point d'équilibre | la tige wa9tech tkoun en équilibre | relation entre les masses et les distances | point d'equilibre chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$m_1 \times GA = m_2 \times GB$$

CE QU'IL RÉPOND

El tige AB m3all9a men G, w fiha masse m_1 fi A w masse m_2 fi B. Tkoun en équilibre ki $m_1 \times GA = m_2 \times GB$. Ya3ni el masse eth-th9ila tkoun 9riba men G, w el 5fifa b3ida. W bel vecteurs : $m_1\overrightarrow{GA} + m_2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. G houwa le barycentre de (A, m_1) w (B, m_2).

tige A B الـ معلّقة من G ، w فيها masse m un في masse m deux في A w masse m un en équilibre كي تكون . B m un fois G A égale m deux fois G B . يعني الـ masse الثقيلة تكون قريبة من G ، w الخفيفة بعيدة . m un بالـ w vecteurs : le barycentre de A ، m un هو fois le vecteur G A plus m deux fois le vecteur G B égale le vecteur nul . G . w B ، m deux

La tige A B est suspendue en G, avec une masse m un en A et une masse m deux en B. Elle est en équilibre quand m un fois G A égale m deux fois G B. Autrement dit, la masse lourde est près de G, et la masse légère est loin. Et avec les vecteurs : m un fois le vecteur G A plus m deux fois le vecteur G B égale le vecteur nul. G est le barycentre de A, m un et B, m deux.

QUESTION 4 · BARYCENTRE DE DEUX POINTS

kifech nal9a le vecteur AG | formule de AG en fonction de AB | comment exprimer AG avec AB | AG = beta sur alpha plus beta AB 3lech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

G le barycentre de (A, α) w (B, β) : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$. Rodd belek : ki nabdew men A, el coefficient elli fou9 houwa mta3 B. W ken tabda men B : $\overrightarrow{BG} = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}$. Mathalan $(A, 2)$ w $(B, 1)$: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

G le barycentre de A ، alpha w B ، bêta : le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta ، fois le vecteur A B . ردّ بالك : كي نبداو من A ، الـ coefficient اللي فوق هو متاع B . w كان تبدا من B : le vecteur A ، deux w B ، un : le vecteur مثلا . B G égale alpha sur la parenthèse alpha plus bêta ، fois le vecteur B A . A G égale un tiers du vecteur A B

Si G est le barycentre de A, alpha et B, bêta : le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur A B. Attention : quand on part de A, le coefficient du numérateur est celui de B. Et si tu pars

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

de B : le vecteur B G égale alpha sur la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur B A. Par exemple pour A, deux et B, un : le vecteur A G égale un tiers du vecteur A B.

QUESTION 5 · BARYCENTRE DE DEUX POINTS

c'est quoi un point pondéré | point pondéré chnowa ma3neha | les points pondérés chnouma | A virgule alpha ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

(A, α)

CE QU'IL RÉPOND

Point pondéré, houwa point m3ah réel, nektbouh bin parenthèses : (A, α). El réel α nsammiweh le coefficient, walla le poids mta3 el point. Kif el note w el coefficient mte3ha fi la moyenne. W el coefficient ynajjem ykoun négatif, el mohemm la somme des coefficients ma tkounch zéro.

point pondéré ، هو point معاه réel ، نكتبوه بين A ، alpha : parenthèses . الـ réel alpha نسمّيوه le coefficient ، ولّا le poids متاع الـ point . كيف الـ note w متاعها في coefficient الـ la moyenne . w ينجّم يكون coefficient الـ la somme des coefficients المهمّ ، négatif ما تكونش zéro .

Un point pondéré, c'est un point accompagné d'un réel, que l'on écrit entre parenthèses : A, alpha. Le réel alpha s'appelle le coefficient, ou le poids du point. Comme une note et son coefficient dans une moyenne. Et le coefficient peut être négatif ; l'essentiel est que la somme des coefficients ne soit pas nulle.

QUESTION 6 · OÙ SE TROUVE LE BARYCENTRE ?

3lech le barycentre dima 3la la droite AB | le barycentre est-il toujours sur la droite AB | G appartient à la droite AB pourquoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$G \in (AB)$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, dima. 5ater $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$: ezzouz vecteurs colinéaires, donc A, G w B alignés. Hedhaka 3lech nesta3mlou le barycentre bech nthabtou l'alignement : ken point houwa barycentre mta3 zouz points, eth-thletha 3la nafs la droite.

إيه ، ديما . خاطر le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta ، fois le vecteur A B : الزوز vecteurs colinéaires ، donc A ، G w B alignés . هذاكا علاش نستعملو le barycentre باش نثبتو l'alignement : كان point هو barycentre متاع زوز points ، الثلاثة على نفس la droite .

Oui, toujours. Car le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur A B : les deux vecteurs sont colinéaires, donc A, G et B sont alignés. C'est pour cela qu'on utilise le barycentre pour prouver un alignement : si un point est barycentre de deux points, les trois sont sur la même droite.

QUESTION 7 · OÙ SE TROUVE LE BARYCENTRE ?

wa9tech le barycentre ykoun 3la le segment AB | quand le barycentre est-il sur le segment | G fi wost le segment walla barra | barycentre à l intérieur du segment

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$G \in [AB] \iff \alpha \text{ et } \beta \text{ de même signe}$$

CE QU'IL RÉPOND

G 3la le segment $[AB]$, ki α w β 3andhom nafs le signe : ezzouz positifs walla ezzouz négatifs. Ken les signes bel 3aks, G yab9a 3la la droite (AB), ama barra mel segment. Mathalan $(A, 2)$ w $(B, 1)$: G bin A w B. W $(A, 3)$ w $(B, -1)$: G barra, fi jihet A.

G على le segment A B ، كي alpha w bêta عندهم نفس positifs الزوز : le signe الزوز ولّا négatifs . les كان
signes بالعكس ، G يبقى على la droite A B ، أمّا برّا مالـ segment . مثلا G : un ، deux w B ، A بين ، w A . A w B
. A في جيهة برّا ، trois w B ، moins un : G

G est sur le segment A B quand alpha et bêta ont le même signe : tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs. Si les signes sont contraires, G reste sur la droite A B, mais hors du segment. Par exemple pour A, deux et B, un : G est entre A et B. Et pour A, trois et B, moins un : G est à l'extérieur, du côté de A.

QUESTION 8 · OÙ SE TROUVE LE BARYCENTRE ?

coefficient négatif win yji le barycentre | kifech na3mel ki el coefficient négatif | est-ce qu un coefficient peut être négatif | barycentre avec coefficient negatif

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(A, 2),\ (B, -1) : \quad \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

El coefficient ynajjem ykoun négatif, w el formule tab9a hiya hiya. El far9 : G yo5rej barra mel segment. Mathalan $(A, 2)$ w $(B, -1)$: la somme 1, w $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$. Ya3ni G fel jiha lo5ra mta3 A. El 9a3da : G dima fi jihet el point elli 3andou akbar coefficient en valeur absolue.

الـ coefficient ينجّم يكون ، w négatif الـ formule تبقى هي هي . الفرق : G يخرج برّا مالـ segment . مثلا deux ، A
متاع A . القاعدة : G ديما في جيهة الـ point اللي عندو أكبر coefficient en valeur absolue .
في الجيهة الأخرى G . يعني w B ، moins un : la somme un ، w le vecteur A G égale moins le vecteur A B

Un coefficient peut être négatif, et la formule reste la même. La différence : G sort du segment. Par exemple pour A, deux et B, moins un : la somme vaut un, et le vecteur A G égale moins le vecteur A B. G est donc de l'autre côté de A. La règle : G est toujours du côté du point qui a le plus grand coefficient en valeur absolue.

QUESTION 9 · OÙ SE TROUVE LE BARYCENTRE ?

est-ce que le milieu est un barycentre | le milieu barycentre mta3 chnowa | milieu w barycentre chnowa el 3ala9a

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih. Le milieu de $[AB]$ houwa le barycentre de $(A, 1)$ w $(B, 1)$: ezzouz coefficients kif kif. W ynajjem ykoun $(A, 3)$ w $(B, 3)$, walla ay coefficient, el mohemm ykounou égaux w mouch nuls. 5ater $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, hiya bedhabt el définition mta3 le milieu.

إيه . le milieu de A B هو un ، un w B ، le barycentre de A : الزوز coefficients كيف كيف . w ينجّم يكون A ، le vecteur I A plus le vecteur I B خاطر . nuls موش égaux w المهمّ يكونو ، coefficient ولّا أيّ ، trois w B ، trois هي بالضبط الـ définition متاع le milieu . égale le vecteur nul

Oui. Le milieu de A B est le barycentre de A, un et B, un : les deux coefficients sont égaux. Et cela peut être A, trois et B, trois, ou n'importe quel coefficient, pourvu qu'ils soient égaux et non nuls. Car le vecteur I A plus le vecteur I B égale le vecteur nul, c'est exactement la définition du milieu.

QUESTION 10 · BARYCENTRE DE TROIS POINTS

c'est quoi l'isobarycentre | isobarycentre chnowa | isobarycentre ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'isobarycentre, houwa le barycentre ki el coefficients el koll kif kif. Fi deux points, l'isobarycentre de A w B houwa le milieu de $[AB]$. W fi trois points mouch alignés, l'isobarycentre de A, B w C houwa le centre de gravité du triangle ABC : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

deux points ، l'isobarycentre de A في . كيف كيف الكل coefficients الـ كي le barycentre هو ، l'isobarycentre le centre de هو alignés ، l'isobarycentre de A ، B w C موش trois points في le milieu de A B . w هو w B . gravité du triangle A B C : le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul

L'isobarycentre, c'est le barycentre quand tous les coefficients sont égaux. Pour deux points, l'isobarycentre de A et B est le milieu de A B. Et pour trois points non alignés, l'isobarycentre de A, B et C est le centre de gravité du triangle A B C : le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul.

QUESTION 11 · MULTIPLIER LES COEFFICIENTS

najjem nedhreb les coefficients fi nafs el nombre | est-ce qu on peut multiplier les coefficients par un même réel | simplifier les coefficients du barycentre | les coefficients fihom des fractions kifech na3mel

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(A, \alpha),\ (B, \beta) \longrightarrow (A, k\alpha),\ (B, k\beta)$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, tnajjem. Ki todhrob les coefficients el koll fi nafs el réel k, mouch nul, le barycentre ma yetbaddelch. Mathalan $(A, 10)$ w $(B, 20)$, houwa nafsou $(A, 1)$ w $(B, 2)$. W ken 3andek des fractions, kif $\dfrac{2}{3}$ w $\dfrac{1}{2}$, odhrob fi 6 : ywalliw 4 w 3. Ama ma tzidch nafs el nombre lel coefficients : hedha ybaddel le barycentre.

إيه ، تنجّم . كي تضرب les coefficients الكل في نفس الـ réel k ، موش le barycentre ، nul ما يتبدّلش . مثلا ، A اضرب ، deux tiers w un demi كيف ، des fractions كان عندك A ، un w B ، deux . w هو نفسو ، dix w B ، vingt في : six يولّيو quatre w trois . أمّا ما تزيدش نفس الـ nombre لـ coefficients : هذا يبدّل le barycentre .

Oui, tu peux. Quand on multiplie tous les coefficients par un même réel k non nul, le barycentre ne change pas. Par exemple A, dix et B, vingt, c'est la même chose que A, un et B, deux. Et si tu as des fractions, comme deux tiers et un demi, multiplie par six : elles deviennent quatre et trois. Mais n'ajoute pas un même nombre aux coefficients : cela change le barycentre.

QUESTION 12 · RÉDUIRE UNE SOMME

kifech nréduire alpha MA plus beta MB | comment réduire une somme de vecteurs | réduction de la somme 2MA + MB | réduire la somme vectorielle bel barycentre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$
$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nesta3mlou la propriété : l ay point M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$, w G le barycentre de (A, α) w (B, β). Mathalan $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$: G le barycentre de $(A, 2)$ w $(B, 1)$, w la somme twalli $3\overrightarrow{MG}$. Ama lezem la somme des coefficients ma tkounch zéro.

نستعملو la propriété : لأيّ point M ، alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B égale la parenthèse alpha plus bêta ، fois le vecteur M G ، w G le barycentre de A ، alpha w B ، bêta مثلا deux . trois تولّي fois le vecteur M A plus le vecteur M B : G le barycentre de A ، deux w B ، un ، w la somme أمّا لازم fois le vecteur M G . ما تكونش la somme des coefficients zéro .

On utilise la propriété : pour tout point M, alpha fois le vecteur M A plus bêta fois le vecteur M B égale la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur M G, où G est le barycentre de A, alpha et B, bêta. Par exemple deux fois le vecteur M A plus le vecteur M B : G est le barycentre de A, deux et B, un, et la somme devient trois fois le vecteur M G. Mais il faut que la somme des coefficients ne soit pas nulle.

QUESTION 13 · RÉDUIRE UNE SOMME

3lech le vecteur MA moins MB ne dépend pas de M | vecteur constant indépendant de M | pourquoi ce vecteur ne dépend pas du point M | wa9tech la somme tkoun vecteur constant

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki la somme des coefficients égale zéro, ma fammech barycentre, w el vecteur ywalli constant : ma yetbaddelch ki M yet7arrek. Mathalan $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$: houwa $\overrightarrow{BA}$, w ma fihech M. Bech tthabbetha, da55el A b la relation de Chasles fi koll vecteur : les termes elli fihom M yti7ou, 5ater el coefficients mte3hom yetjam3ou zéro.

كي la somme des coefficients égale zéro ، ما فمّاش M ، w barycentre الـ vecteur يولّي constant : ما يتبدّلش كي M يتحرّك . مثلا le vecteur M A moins le vecteur M B : هو w ، le vecteur B A ما فيهش M . باش تثبتها ، ادخّل A بـ la relation de Chasles في كل les termes : vecteur اللي فيهم M يطيحو ، خاطر الـ coefficients متاعهم يتجمعو zéro .

Quand la somme des coefficients égale zéro, il n'y a pas de barycentre, et le vecteur devient constant : il ne change pas quand M se déplace. Par exemple le vecteur M A moins le vecteur M B : c'est le vecteur B A, et il ne contient pas M. Pour le prouver, introduis A par la relation de Chasles dans chaque vecteur : les termes qui contiennent M disparaissent, car la somme de leurs coefficients est nulle.

QUESTION 14 · MÉTHODE DES PARALLÈLES

c'est quoi la méthode des parallèles | la méthode des parallèles kifech | tari9a mta3 les parallèles | methode des paralleles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AA'} = \beta\vec{i} \quad ; \quad \overrightarrow{BB'} = -\alpha\vec{i}$$

CE QU'IL RÉPOND

La méthode des parallèles tarsem le barycentre de (A, α) w (B, β). Nrasmou droite men A, w droite parallèle liha men B, w na5dhou vecteur $\vec{i}$ 3al direction mte3hom. N7ottou A' elli $\overrightarrow{AA'} = \beta\vec{i}$, w B' elli $\overrightarrow{BB'} = -\alpha\vec{i}$. La droite $(A'B')$ t9oss la droite (AB) fi G. Ya3ni na3ksou les coefficients, w wa7ed nbaddloulou le signe.

la méthode des parallèles ترسم . le barycentre de A ، alpha w B ، bêta نرسمو droite من droite A ، w ناخذو B ، w parallèle ليها من vecteur i على الـ direction متاعهم . A prime نحطّو ، A prime اللي le vecteur A A prime تقصّ le vecteur B B prime égale moins alpha i . la droite A prime B prime اللي ، égale bêta i ، w B prime في la droite A B G . يعني نعكسو w ، les coefficients واحد نبدّلولو le signe .

La méthode des parallèles construit le barycentre de A, alpha et B, bêta. On trace une droite passant par A, et une droite parallèle passant par B, et on prend un vecteur i qui donne leur direction. On place A prime tel que le vecteur A A prime égale bêta i, et B prime tel que le vecteur B B prime égale moins alpha i. La droite A prime B prime coupe la droite A B en G. Autrement dit, on croise les coefficients, et on change le signe de l'un.

QUESTION 15 · MÉTHODE DU PARALLÉLOGRAMME

c'est quoi la méthode du parallélogramme | la méthode du parallélogramme kifech | kifech nesta3mel le parallélogramme | methode du parallelogramme

---

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

CE QU'IL RÉPOND

Na5dhou point M, mouch 3la la droite (AB). N7ottou A' elli $\overrightarrow{MA'} = \alpha\overrightarrow{MA}$, w B' elli $\overrightarrow{MB'} = \beta\overrightarrow{MB}$. Nkammlou le parallélogramme $MA'M'B'$. La diagonale (MM') t9oss la droite (AB) fi G, 5ater $\overrightarrow{MM'} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$.

ناخذو point M ، موش على la droite A B . نحطّو A prime ، اللي le vecteur M A prime égale alpha fois le vecteur M A ، w B prime vecteur M B ، اللي le vecteur M B prime égale bêta fois le vecteur M B . نكمّلو le parallélogramme M ، A prime ، M prime ، B prime . la diagonale M M prime تقصّ la droite A B في G ، le vecteur M M prime égale la parenthèse alpha plus bêta ، fois le vecteur M G خاطر .

On prend un point M qui n'est pas sur la droite A B. On place A prime tel que le vecteur M A prime égale alpha fois le vecteur M A, et B prime tel que le vecteur M B prime égale bêta fois le vecteur M B. On complète le parallélogramme M, A prime, M prime, B prime. La diagonale M M prime coupe la droite A B en G, car le vecteur M M prime égale la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur M G.

QUESTION 16 · MONTRER UN ALIGNEMENT

kifech nthabbet elli des points alignés bel barycentre | comment montrer que des points sont alignés | alignement avec le barycentre | points alignés kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$9\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

El fekra : le barycentre de deux points dima 3la la droite mte3hom. Donc yekfi tekteb point menhom, barycentre mta3 ezzouz lo5rin. Mathalan ken tal9a $9\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$, K houwa le barycentre de $(I, 9)$ w $(J, 1)$, donc I, J w K alignés. Bech tousel l hedha, lemm les vecteurs ethnin ethnin, w bassat koll groupe b le barycentre mte3ou.

الفكرة : le barycentre de deux points ديما على la droite متاعهم . donc يكفي تكتب point منهم ، barycentre متاع الزوز الأخرين . مثلا كان تلقى K ، le vecteur nul égale le vecteur K J plus le vecteur K I fois neuf هو . باش توصل لهذا ، لمّ les vecteurs اثنين اثنين ، w بسّط K ، J w K alignés ، donc I ، un ، neuf w J ، barycentre de I . كل groupe بـ le barycentre متاعو .

L'idée : le barycentre de deux points est toujours sur leur droite. Il suffit donc d'écrire l'un des points comme barycentre des deux autres. Par exemple si tu trouves neuf fois le vecteur K I plus le vecteur K J égale le vecteur nul, K est le barycentre de I, neuf et J, un, donc I, J et K sont alignés. Pour y arriver, regroupe les vecteurs deux par deux, et réduis chaque groupe avec son barycentre.

QUESTION 17 · DES DROITES PARALLÈLES

comment montrer que deux droites sont parallèles | kifech nthabbet droites parallèles bel barycentre

---

droites parallèles w barycentre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nthabtou elli el vecteurs directeurs colinéaires. Mathalan M le barycentre de $(A, 1)$ w $(B, 3)$, w N le barycentre de $(A, 1)$ w $(C, 3)$: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, w $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Natr7ou : $\overrightarrow{MN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Ezzouz colinéaires, donc (MN) parallèle à (BC).

نثبتو اللي الـ vecteurs directeurs colinéaires . مثلا N le barycentre de A ، un w B ، trois ، w M le barycentre de A ، un w C ، trois : le vecteur A M égale trois quarts du vecteur A B ، w le vecteur A N égale trois quarts du vecteur A C . نطرحو : le vecteur M N égale trois quarts du vecteur B C ، donc الزوز colinéaires . le vecteur M N parallèle à la droite B C

On montre que les vecteurs directeurs sont colinéaires. Par exemple M est le barycentre de A, un et B, trois, et N le barycentre de A, un et C, trois : le vecteur A M égale trois quarts du vecteur A B, et le vecteur A N égale trois quarts du vecteur A C. On soustrait : le vecteur M N égale trois quarts du vecteur B C. Ils sont colinéaires, donc la droite M N est parallèle à la droite B C.

QUESTION 18 · DES DROITES CONCOURANTES

kifech nthabbet trois droites concourantes | comment montrer que des droites sont concourantes | droites concourantes bel barycentre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nlawjou 3la point wa7ed, mawjoud 3la eth-thletha droites. Na5dhou barycentre mta3 trois points, w nlemmouh b le barycentre partiel b akther men tari9a. Koll marra nlemmou zouz points, nal9aw el barycentre 3la droite. Mathalan E le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ w $(C, 1)$: ki nlemmou B w C, E 3la (AA') ; ki nlemmou A w B, E 3la (CD).

نلوّجو على point واحد ، موجود على الثلاثة droites . ناخذو barycentre متاع w نلمّوه بـ le trois points ، بأكثر من طريقة barycentre partiel . كل مرّة نلمّو زوز points ، نلقاو الـ barycentre على droite . مثلا E le barycentre de A ، deux ، B ، un w C ، un : كي نلمّو E ، w B ؛ كي نلمّو E : la droite A A prime على B w C . la droite C D على

On cherche un seul point situé sur les trois droites. On prend un barycentre de trois points, et on le regroupe avec le barycentre partiel de plusieurs façons. Chaque fois qu'on regroupe deux points, on trouve le barycentre sur une droite. Par exemple E est le barycentre de A, deux, B, un et C, un : en regroupant B et C, E est sur la droite A A prime ; en regroupant A et B, E est sur la droite C D.

QUESTION 19 · ENSEMBLE DE POINTS

kifech nal9a l'ensemble des points M | comment déterminer un ensemble de points | l'ensemble des points M tels que la norme | ensemble de points bel barycentre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$MG = MG' \longrightarrow \text{médiatrice de } [GG']$$
$$MG = r \longrightarrow \text{cercle de centre } G$$

CE QU'IL RÉPOND

Thletha mra7el. Awwel 7aja, bassat koll somme de vecteurs b barycentre : twalli nombre fois $\overrightarrow{MG}$. Men ba3d, 3addi lel normes : la norme twalli nombre fois la distance MG. W fel e5er, a9ra en-natija : ken tal9a $MG = MG'$, hiya la médiatrice du segment $[GG']$; ken tal9a $MG = r$, houwa le cercle de centre G w de rayon r.

ثلاثة مراحل . أوّل حاجة ، بسّط كل somme de vecteurs بـ barycentre : تولّي nombre fois le vecteur M G من . بعد ، عدّي للـ normes : la norme تولّي nombre fois la distance M G . w في الآخر ، اقرا النتيجة : كان تلقى M G le cercle هو ، M G égale nombre r كان تلقى ؛ la médiatrice du segment G G prime هي ، égale M G prime . de centre G w de rayon r

Trois étapes. D'abord, réduis chaque somme de vecteurs avec un barycentre : elle devient un nombre fois le vecteur M G. Ensuite, passe aux normes : la norme devient un nombre fois la distance M G. Et enfin, lis le résultat : si tu trouves M G égale M G prime, c'est la médiatrice du segment G G prime ; si tu trouves M G égale un nombre r, c'est le cercle de centre G et de rayon r.

QUESTION 20 · ENSEMBLE DE POINTS

kifech nal9a le rayon du cercle | comment trouver le rayon | le rayon 3lech ndivisiw 3la la somme des coefficients

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$3MG' = 9 \iff MG' = 3$$

CE QU'IL RÉPOND

Le rayon houwa la distance MG, mouch la norme elli fel énoncé. Mathalan $\left\|5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right\| = 9$. Nbassatou : $3\overrightarrow{MG'}$. Donc $3MG' = 9$, w $MG' = 3$. Le rayon 3, mouch 9. Dima na9smou 3la la somme des coefficients.

la norme de la différence : cinq fois مثلا . énoncé الـ في اللي la norme موش ، la distance M G هو le rayon trois fois le vecteur M G prime . : نبسّطو . le vecteur M C moins deux fois le vecteur M D ، égale neuf ديما نقسمو على . neuf موش ، donc trois M G prime égale neuf ، w M G prime égale trois . le rayon trois . la somme des coefficients

Le rayon, c'est la distance M G, pas la norme donnée dans l'énoncé. Par exemple la norme de la différence : cinq fois le vecteur M C moins deux fois le vecteur M D, égale neuf. On réduit : trois fois le vecteur M G prime. Donc trois M G prime égale neuf, et M G prime égale trois. Le rayon est trois, pas neuf. On divise toujours par la somme des coefficients.

QUESTION 21 · BARYCENTRE DE TROIS POINTS

le barycentre de trois points kifech | barycentre de 3 points | kifech nal9a le barycentre de trois points | définition barycentre trois points

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nafs el définition, b terme zeyed. G le barycentre de (A, α), (B, β) w (C, γ), ki $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, w $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Bech t7ottou : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$.

نفس الـ définition ، بـ terme زايد . gamma ، C w bêta ، B ، alpha ، A le barycentre de G ، كي alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B plus gamma fois le vecteur G C égale le vecteur nul ، w la somme alpha plus bêta plus gamma différent de zéro . باش تحطّو : la le vecteur A G égale bêta sur la somme ، fois le vecteur A B ، plus gamma sur la somme ، fois le vecteur A C .

C'est la même définition, avec un terme de plus. G est le barycentre de A, alpha, B, bêta et C, gamma quand alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B plus gamma fois le vecteur G C égale le vecteur nul, avec la somme alpha plus bêta plus gamma différente de zéro. Pour le placer : le vecteur A G égale bêta sur la somme, fois le vecteur A B, plus gamma sur la somme, fois le vecteur A C.

QUESTION 22 · PROPRIÉTÉS POUR TROIS POINTS

le centre de gravité barycentre mta3 chnowa | est-ce que le centre de gravité est un barycentre | centre de gravité w barycentre chnowa el 3ala9a

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih. Le centre de gravité du triangle ABC houwa le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$ w $(C, 1)$. El coefficients el koll kif kif : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. W l ay point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

إيه . le barycentre de A ، un ، B ، un w C ، un هو le centre de gravité du triangle A B C . coefficients الـ الكل كيف كيف : w . point M لأيّ le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul : le vecteur M A plus le vecteur M B plus le vecteur M C égale trois fois le vecteur M G .

Oui. Le centre de gravité du triangle A B C est le barycentre de A, un, B, un et C, un. Tous les coefficients sont égaux : le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul. Et pour tout point M : le vecteur M A plus le vecteur M B plus le vecteur M C égale trois fois le vecteur M G.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

QUESTION 23 · BARYCENTRE PARTIEL

c'est quoi le barycentre partiel | le barycentre partiel kifech nesta3mlou | théorème du barycentre partiel | barycentre partiel chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

G barycentre de (A, α) et $(G', \beta + \gamma)$

CE QU'IL RÉPOND

Le barycentre partiel y5allik t3awwedh zouz points b le barycentre mte3hom. G le barycentre de (A, α), (B, β) w (C, γ), w $\beta + \gamma \neq 0$. G' le barycentre de (B, β) w (C, γ). Wa9tha G houwa le barycentre de (A, α) w $(G', \beta + \gamma)$. Rodd belek : G' ye5ou la somme mta3 ezzouz coefficients, mouch 1.

G le barycentre de A ، alpha ، B ، . متاعهم le barycentre بـ points زوز تعوّض يخلّيك le barycentre partiel bêta w C ، gamma ، w bêta plus gamma différent de zéro . G prime le barycentre de B ، bêta w C ، la ياخذ G prime : ردّ بالك . le barycentre de A ، alpha w G prime ، bêta plus gamma هو G وقتها . gamma somme متاع الزوز coefficients ، موش un .

Le barycentre partiel te permet de remplacer deux points par leur barycentre. G est le barycentre de A, alpha, B, bêta et C, gamma, avec bêta plus gamma différent de zéro. G prime est le barycentre de B, bêta et C, gamma. Alors G est le barycentre de A, alpha et G prime, bêta plus gamma. Attention : G prime reçoit la somme des deux coefficients, pas un.

QUESTION 24 · LIRE UNE FIGURE

kifech nal9a les coefficients mel figure | comment trouver les coefficients à partir de la figure | lire les coefficients sur la figure

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \longrightarrow (A, 1),\ (M, 2)$$

CE QU'IL RÉPOND

Chouf win yji el point 3la le segment. Ken $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, le numérateur 2 houwa el coefficient mta3 M, w A ye5ou el be9i : $3 - 2$, ya3ni 1. Donc G le barycentre de $(A, 1)$ w $(M, 2)$. El 9a3da, ki el coefficients positifs : el point el a9reb lel barycentre ye5ou akbar coefficient. W ken M houwa bidou barycentre, lezmou yhezz la somme mta3 les coefficients mte3ou.

le vecteur A G égale deux tiers du vecteur A M ، le كان . le segment على point الـ شوف وين يجي M ، w A متاع coefficient هو الـ numérateur deux ياخذ الباقي : trois moins deux ، يعني donc G le un . barycentre de A ، un w M ، deux ياخذ barycentre للـ الأقرب point الـ : coefficients positifs الـ كي ، القاعدة . les coefficients متاع la somme يهزّ لازمو ، barycentre هو بيدو M كان coefficient . w أكبر متاعو .

Regarde où se trouve le point sur le segment. Si le vecteur A G égale deux tiers du vecteur A M, le numérateur deux est le coefficient de M, et A reçoit le reste : trois moins deux, c'est-à-dire un. Donc G est le barycentre de A, un et M, deux. La règle, quand les coefficients sont positifs : le point le plus proche du

barycentre reçoit le plus grand coefficient. Et si M est lui-même un barycentre, il doit porter la somme de ses coefficients.

QUESTION 25 · DE DEUX À TROIS POINTS

le barycentre kif la moyenne ? | chnowa el 3ala9a bin la moyenne w le barycentre | moyenne avec coefficients et barycentre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{1 \times 13 + 2 \times 10}{1 + 2} = 11$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, nafs el fekra. Fi la moyenne, koll note tetdhreb fel coefficient mte3ha, w na9smou 3la la somme des coefficients. Fel barycentre, les notes ywalliw points, w la moyenne hiya l'abscisse mta3 G 3la droite graduée. Mathalan 13, coefficient 1, w 10, coefficient 2 : la moyenne 11, w G fi 11 houwa le barycentre de $(A, 1)$ w $(B, 2)$.

إيه ، نفس الفكرة . في la moyenne ، كل note تتضرب في الـ coefficient متاعها ، w نقسمو على la somme des coefficients . في الـ les notes ، barycentre يولّيو la moyenne ، w points هي l'abscisse متاع G على droite . مثلا G ، w graduée onze هو في treize ، coefficient un ، w dix ، coefficient deux : la moyenne onze ، w deux un ، B w A de barycentre .

Oui, c'est la même idée. Dans une moyenne, chaque note est multipliée par son coefficient, et on divise par la somme des coefficients. Pour le barycentre, les notes deviennent des points, et la moyenne est l'abscisse de G sur une droite graduée. Par exemple treize, coefficient un, et dix, coefficient deux : la moyenne est onze, et G, placé en onze, est le barycentre de A, un et B, deux.

QUESTION 26 · CERCLE INSCRIT

le centre du cercle inscrit barycentre mta3 chnowa | cercle inscrit w barycentre | la bissectrice w le barycentre chnowa el 3ala9a

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi triangle ABC, nsammiw a la longueur BC, b la longueur AC w c la longueur AB. Le centre du cercle inscrit houwa le barycentre de (A, a), (B, b) w (C, c) : koll sommet ye5ou la longueur mta3 le côté el m9abel lih. W la bissectrice de l'angle A t9oss $[BC]$ fi M, elli houwa le barycentre de (B, b) w (C, c), 5ater $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$.

في triangle A B C ، نسمّيو le ، petit a la longueur B C ، petit b la longueur A C w petit c la longueur A B . هو centre du cercle inscrit : le barycentre de A ، B w C ، affectés des longueurs petit a ، petit b w petit c . كل sommet ياخذ la longueur متاع le côté المقابل ليه . la bissectrice de l'angle A w تقصّ B C في M ، اللي

M B sur M C égale petit c sur خاطر ، le barycentre de B w C ، affectés des longueurs petit b w petit c هو . petit b

Dans un triangle A B C, on note petit a la longueur B C, petit b la longueur A C et petit c la longueur A B. Le centre du cercle inscrit est le barycentre de A, B et C, affectés des longueurs petit a, petit b et petit c : chaque sommet reçoit la longueur du côté qui lui est opposé. Et la bissectrice de l'angle A coupe B C en M, qui est le barycentre de B et C, affectés des longueurs petit b et petit c, car M B sur M C égale petit c sur petit b.

QUESTION 27 · MÊME CENTRE DE GRAVITÉ

wa9tech deux triangles 3andhom nafs le centre de gravité | deux triangles de même centre de gravité | triangles avec le même centre de gravité condition

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

CE QU'IL RÉPOND

ABC w A'B'C', zouz triangles, les centres de gravité mte3hom G w G'. Dima : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Donc 3andhom nafs le centre de gravité, ki la somme hedhi égale le vecteur nul. W hedha chart nécessaire w suffisant.

le : ديما . G w G prime متاعهم triangles ، les centres de gravité زوز ، A B C w A prime B prime C prime vecteur A A prime plus le vecteur B B prime plus le vecteur C C prime égale trois fois le vecteur G G prime . donc عندهم نفس le centre de gravité ، كي la somme هاذي . w égale le vecteur nul هذا شرط . nécessaire w suffisant

Soient A B C et A prime B prime C prime deux triangles, de centres de gravité G et G prime. On a toujours : le vecteur A A prime plus le vecteur B B prime plus le vecteur C C prime égale trois fois le vecteur G G prime. Ils ont donc le même centre de gravité quand cette somme égale le vecteur nul. Et c'est une condition nécessaire et suffisante.

QUESTION 28 · BARYCENTRE DE DEUX POINTS

ken nbaddel les coefficients bin A w B | échanger les coefficients change le barycentre ? | inverser les coefficients de A et B

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(A,2),\ (B,1) : \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$(A,1),\ (B,2) : \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, yetbaddel. Koll coefficient marbout bel point mte3ou. $(A, 2)$ w $(B, 1)$: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, G a9reb l A. W $(A, 1)$ w $(B, 2)$: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}

{3}\overrightarrow{AB}$, G a9reb l B. Ezzouz points hedhom symétriques par rapport au milieu de $[AB]$. Ken el coefficients égaux berk, ma yetbaddel chay.

A ، deux w B ، un : le vecteur A G égale un tiers du . متاعو point بالـ مربوط coefficient كل . يتبدّل ، إيه
أقرب لـ A . w A ، un w B ، deux : le vecteur A G égale deux tiers du vecteur A B ، G أقرب لـ vecteur A B ، G
برك ، ما يتبدّل coefficients égaux كان الـ . symétriques par rapport au milieu de A B هاذم points الزوز . B
شي .

Oui, il change. Chaque coefficient est attaché à son point. Pour A, deux et B, un : le vecteur A G égale un tiers du vecteur A B, G est plus proche de A. Et pour A, un et B, deux : le vecteur A G égale deux tiers du vecteur A B, G est plus proche de B. Ces deux points sont symétriques par rapport au milieu de A B. C'est seulement quand les coefficients sont égaux que rien ne change.

QUESTION 29 · BARYCENTRE DE DEUX POINTS

est-ce que le barycentre est unique | le barycentre wa7ed berk walla akther | unicité du barycentre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, wa7id. Ken G w G' ezzouz y7a99ou $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, ezzouz y7a99ou nafs el formule : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$. W men point A, famma point wa7ed ya3ti vecteur m3ayyen. Donc G' houwa G.

alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B égale le الزوز يحقّقو G w G prime كان . وحيد ، إيه
formule : le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta ، الزوز يحقّقو نفس الـ ، vecteur nul
. G هو donc G prime . معيّن vecteur واحد يعطي point فمّا ، point A من fois le vecteur A B . w

Oui, il est unique. Si G et G prime vérifient tous les deux alpha fois le vecteur G A plus bêta fois le vecteur G B égale le vecteur nul, ils vérifient la même formule : le vecteur A G égale bêta sur la parenthèse alpha plus bêta, fois le vecteur A B. Et à partir du point A, un seul point donne un vecteur fixé. Donc G prime est G.

QUESTION 30 · ARCHIMÈDE

chkoun Archimède | qui est Archimède | Archimède 3lech fel chapitre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$m_1 \times GA = m_2 \times GB$$

CE QU'IL RÉPOND

Archimède 3alem younani, touled fi Syracuse 7aweli 287 avant Jésus-Christ. Ma3rouf bel leviers w bel machines mte3ou, w bel 7sebet mte3ou 3la les aires w les volumes. W le principe mta3 le levier, $m_1 \times GA = m_2 \times GB$, houwa elli ya3tina le barycentre : le point d'équilibre mta3 zouz masses.

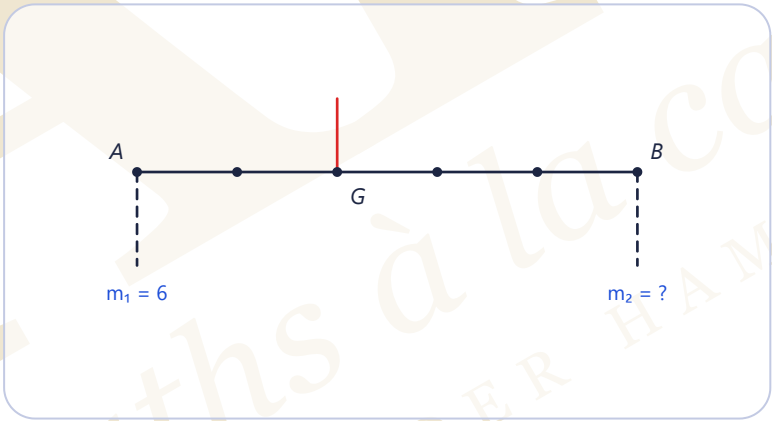
معروف . deux cent quatre-vingt-sept avant Jésus-Christ حوالي Syracuse عالم يوناني ، تولد في Archimède
le متاع les aires w les volumes . w le principe بالحسابات متاعو على w ، متاعو machines بالـ leviers w بالـ
le barycentre : le point d'équilibre هو اللي يعطينا ، levier ، m un fois G A égale m deux fois G B متاع زوز
. masses

Archimède est un savant grec, né à Syracuse vers deux cent quatre-vingt-sept avant Jésus-Christ. Il est célèbre pour ses leviers et ses machines, et pour ses calculs d'aires et de volumes. Et le principe du levier, m un fois G A égale m deux fois G B, est ce qui nous donne le barycentre : le point d'équilibre de deux masses.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **La tige en équilibre**

Une tige $[AB]$ est partagée en cinq parties égales. Elle est suspendue au point G, situé au deuxième trait à partir de A. On accroche en A une masse $m_1 = 6$ kilogrammes. Quelle masse m_2, en kilogrammes, faut-il accrocher en B pour que la tige soit en équilibre ?



GA = 2 parts, GB = 3 parts.

Une tige horizontale d'extrémités A, à gauche, et B, à droite, partagée en cinq parties égales par quatre traits. Elle est suspendue par un crochet au point G, qui est le deuxième trait à partir de A. Une masse m1 de 6 kilogrammes pend sous A ; une masse m2 inconnue pend sous B.

Donne la valeur de m_2, en kilogrammes.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. À l'équilibre, $m_1 \times GA = m_2 \times GB$.
2. Compte les parts : la distance GA mesure deux parts, la distance GB en mesure trois.
3. L'égalité devient $6 \times 2 = m_2 \times 3$.

CORRECTION

L'équilibre — La masse multipliée par la distance est la même des deux côtés du point G.

$m_1 \times GA = m_2 \times GB$

Les distances — En comptant les parts, la distance GA vaut deux parts et la distance GB vaut trois parts.

$6 \times 2 = m_2 \times 3$

La masse — On divise par trois.

$m_2 = \dfrac{12}{3} = 4$

Il faut accrocher 4 kilogrammes en B : la masse la plus légère est du côté le plus long.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → Tu as échangé les distances : GA vaut deux parts et GB trois parts, donc $6 \times 2 = m_2 \times 3$.

6 → Avec deux masses égales, le point d'équilibre serait au milieu de la tige. Ici G est plus près de A.

EXERCICE 2 · BASE

Une moyenne avec coefficients

Un élève a obtenu 13 au devoir de contrôle, de coefficient 1, et 10 au devoir de synthèse, de coefficient 2. Calculer sa moyenne trimestrielle.

Donne la moyenne.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque note est multipliée par son coefficient.
2. On divise le total par la somme des coefficients, $1 + 2$.

CORRECTION

Le calcul — On multiplie chaque note par son coefficient, et on divise par la somme des coefficients.

$$\frac{1 \times 13 + 2 \times 10}{1 + 2} = \frac{33}{3} = 11$$

La moyenne est 11 : elle est plus proche de 10, la note qui a le plus grand coefficient.

PIÈGES ANTICIPÉS

11.5 / 23/2 → Tu as fait la moyenne sans les coefficients. Le devoir de synthèse compte double : on divise $13 + 2 \times 10$ par 3.

12 → Tu as donné le coefficient 2 à la note 13. C'est le devoir de synthèse, noté 10, qui compte double.

EXERCICE 3 · BASE

Un coefficient négatif

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et -1. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : -1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour le barycentre de (A, α) et (B, β) : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta} \times \overrightarrow{AB}$.
2. Ici la somme des coefficients vaut $2 + (-1)$.

CORRECTION

La formule — En partant de A, le coefficient de B est au numérateur, et la somme des coefficients au dénominateur.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{2 + (-1)} \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$$

$k = -1$: G est le symétrique de B par rapport à A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu as mis au numérateur le coefficient de A. En partant de A, c'est celui de B.

`1` → Le coefficient de B est négatif : le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 4 · BASE

Placer un barycentre

Soient J et K deux points distincts et I le barycentre des points pondérés $(J, 1)$ et $(K, 3)$. Déterminer le réel t tel que $\overrightarrow{JI} = t\overrightarrow{JK}$.

Donne le réel t.

Réponse attendue : `3/4` — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En partant de J, c'est le coefficient de K qui est au numérateur.
2. Le dénominateur est la somme des coefficients, $1 + 3$.

CORRECTION

La formule — Le coefficient de K, divisé par la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{JI} = \frac{3}{1 + 3} \times \overrightarrow{JK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{JK}$$

$t = \dfrac{3}{4}$: I est sur le segment $[JK]$, plus près de K, qui a le plus grand coefficient.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/4 / 0.25` → Tu as mis au numérateur le coefficient de J. En partant de J, c'est celui de K, c'est-à-dire 3.

`3` → Il reste à diviser le coefficient de K par la somme des coefficients, $1 + 3$.

EXERCICE 5 · BASE

Une somme négative

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 3 et -4. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme des coefficients vaut $3 - 4$: elle est négative, mais non nulle.
2. Divise le coefficient de B par cette somme, en faisant attention aux signes.

CORRECTION

La somme — La somme des coefficients est négative, mais elle n'est pas nulle : le barycentre existe.

$$3 + (-4) = -1$$

La formule — Le coefficient de B, divisé par la somme : moins par moins donne plus.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-4}{-1} \times \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}$$

$k = 4$: G est hors du segment $[AB]$, du côté de B, dont le coefficient est le plus grand en valeur absolue.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4` → Il reste à diviser par la somme des coefficients, $3 - 4$, qui vaut -1 : le signe change.

`-3` → Tu as mis au numérateur le coefficient de A. En partant de A, c'est celui de B.

`4/7` → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $3 + (-4)$, et non $3 + 4$.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Hors du segment

Soient A et B deux points distincts et N le barycentre des points A et B affectés des coefficients 3 et -1. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `-1/2` — aussi acceptées : -0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme des coefficients vaut $3 - 1$.
2. Le numérateur est le coefficient de B, avec son signe.

CORRECTION

La formule — Le coefficient de B est négatif, la somme est positive.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{-1}{3-1} \times \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$k = -\frac{1}{2}$: N est hors du segment $[AB]$, du côté de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2 / 1.5` → Tu as mis au numérateur le coefficient de A. En partant de A, c'est celui de B.

`1/2 / 0.5` → Le coefficient de B est négatif : N est du côté opposé à B par rapport à A.

`-1` → Il reste à diviser le coefficient de B par la somme des coefficients, $3 - 1$.

EXERCICE 7 · BASE

Sur le segment ou non ?

Soient A et B deux points distincts et P le barycentre des points A et B affectés des coefficients -1 et 2. Le point P appartient-il au segment $[AB]$?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non il n'appartient pas au segment · non il est hors du segment · non, il n'appartient pas au segment · non, il est hors du segment · non il n'appartient pas · non, il n'appartient pas · non p n'appartient pas au segment · non, p n'appartient pas au segment · non p n'appartient pas a [ab] · non, p n'appartient pas a [ab] · non, il n'appartient pas a [ab] · non il n'appartient pas a [ab] · non, il est hors de [ab] · non il est hors de [ab]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde le signe des deux coefficients.
2. Le barycentre est sur le segment si, et seulement si, les coefficients sont de même signe.

CORRECTION

Les signes — Les coefficients sont de signes contraires : le barycentre est hors du segment.

$-1 < 0 \quad ; \quad 2 > 0$

Vérifier — Avec la formule, le point P est au-delà de B.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{-1+2} \times \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$$

Non : P est sur la droite (AB), mais hors du segment $[AB]$.

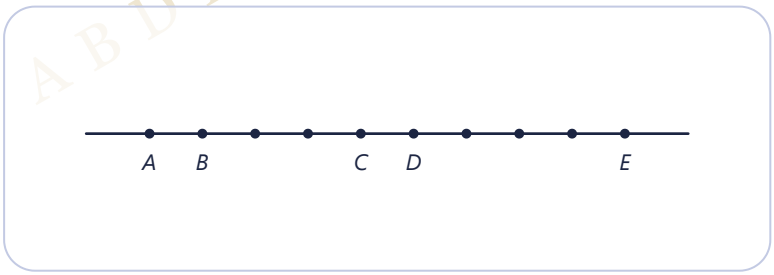
PIÈGES ANTICIPÉS

`oui` → Les coefficients -1 et 2 sont de signes contraires : le barycentre est hors du segment.

EXERCICE 8 · PRATIQUE

Lire un coefficient sur une droite graduée

Sur une droite munie du repère $(A, \overrightarrow{AB})$, les points A, B, C, D et E ont pour abscisses respectives 0, 1, 4, 5 et 9. Le point B est le barycentre des points pondérés (A, k) et $(C, 1)$. Déterminer le réel k.



Repère (A, AB) : A(0), B(1), C(4), D(5), E(9).

Une droite graduée régulièrement. On y lit, de gauche à droite, le point A à l'abscisse 0, le point B à l'abscisse 1, le point C à l'abscisse 4, le point D à l'abscisse 5 et le point E à l'abscisse 9.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la définition : $k\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
2. Sur la droite, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

La définition — B est le barycentre de (A, k) et $(C, 1)$.

$$k\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Avec les abscisses — De B à A on recule d'une unité, de B à C on avance de trois unités.

$$-k + 3 = 0$$

Le coefficient — On isole le réel cherché.

$$k = 3$$

$k = 3$: B est trois fois plus près de A que de C, donc A pèse trois fois plus.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → Avec des coefficients positifs, le point le plus proche du barycentre porte le plus grand coefficient : B est près de A, donc le coefficient de A dépasse 1.

-3 → B est entre A et C : les deux coefficients sont de même signe.

EXERCICE 9 · PRATIQUE

Des coefficients fractionnaires

Soient M et N deux points distincts et O le barycentre des points M et N affectés des coefficients $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{MO} = k\overrightarrow{MN}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 3/7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie les deux coefficients par 6 pour chasser les fractions : le barycentre ne change pas.
2. O est alors le barycentre de $(M, 4)$ et $(N, 3)$.

CORRECTION

Chasser les fractions — On multiplie les deux coefficients par 6.

$$O \text{ est le barycentre de } (M, 4) \text{ et } (N, 3)$$

La formule — En partant de M, le coefficient de N sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{MO} = \frac{3}{4+3} \times \overrightarrow{MN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{MN}$$

$k = \frac{3}{7}$: multiplier tous les coefficients par un même réel non nul ne change pas le barycentre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/7` → Tu as mis au numérateur le coefficient de M. En partant de M, c'est celui de N.

`1/2` / `0.5` → Il faut diviser le coefficient de N par la somme des deux coefficients, qui ne vaut pas 1 ici.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

Le centre du parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et M un point quelconque du plan. Le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ est égal à $k\overrightarrow{MO}$. Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O est le milieu de $[AC]$ et aussi le milieu de $[BD]$.
2. Regroupe les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MC}$, puis les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MD}$.

CORRECTION

Une diagonale — O est le milieu de $[AC]$.

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$$

L'autre diagonale — O est aussi le milieu de $[BD]$.

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$$

La somme — On ajoute les deux égalités.

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$$

$k=4$: le centre d'un parallélogramme réduit la somme des quatre vecteurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → $2\overrightarrow{MO}$ est la somme pour une seule diagonale. Il y a deux diagonales, donc deux fois $2\overrightarrow{MO}$.

`1` → Chaque milieu donne deux fois le vecteur $\overrightarrow{MO}$: on ne divise pas par le nombre de points.

EXERCICE 11 · PRATIQUE

Réduire avec deux barycentres

Soit G le barycentre de $(A,3)$ et $(B,1)$, G' le barycentre de $(C,1)$ et $(D,3)$, et I le milieu de $[GG']$. Pour tout point M du plan, le vecteur $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}$ est égal à $k\overrightarrow{MI}$. Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis d'abord $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ avec le point G, puis $\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}$ avec le point G'.

2. I est le milieu de $[GG']$: $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG'} = 2\overrightarrow{MI}$.

CORRECTION

Avec le point G — La somme des coefficients 3 et 1 vaut 4.

$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$

Avec le second point — Ici aussi la somme des coefficients vaut 4.

$\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG'}$

Avec le milieu — I est le milieu de $[GG']$.

$4\overrightarrow{MG} + 4\overrightarrow{MG'} = 4 \times 2\overrightarrow{MI} = 8\overrightarrow{MI}$

$k = 8$: on réduit chaque groupe avec son barycentre, puis les deux barycentres avec leur milieu.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $4\overrightarrow{MG} + 4\overrightarrow{MG'}$ vaut quatre fois la somme des deux vecteurs, et cette somme vaut $2\overrightarrow{MI}$.

2 → N'oublie pas les sommes de coefficients : chaque groupe donne quatre fois un vecteur.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Deux droites parallèles

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$: exprime le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Fais de même pour N avec le vecteur $\overrightarrow{AC}$, puis écris $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$.

CORRECTION

Le point M — M est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Le point N — N est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 2)$.

$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Le vecteur MN — On soustrait, puis on met le coefficient en facteur.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$k = \frac{2}{3}$: les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → En partant de A, c'est le coefficient de l'autre point, 2, qui est au numérateur.

2 → Il faut diviser par la somme des coefficients, $1 + 2$.

EXERCICE 13 · RAISONNEMENT

Un vecteur qui ne dépend pas de M

Soient A, B et C trois points du plan. Pour tout point M, le vecteur $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ ne dépend pas de M : il s'écrit $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Déterminer le réel x.

Donne le réel x.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme des coefficients, $3 - 2 - 1$, est nulle : il n'y a pas de barycentre, le vecteur est constant.
2. Passe par A : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$.

CORRECTION

Passer par A — On remplace les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ avec la relation de Chasles.

$$3\overrightarrow{MA} - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Simplifier — Les termes qui contiennent M s'annulent, car $3 - 2 - 1$ vaut zéro.

$$-2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$x = -2$ et $y = -1$: quand la somme des coefficients est nulle, la somme vectorielle est un vecteur constant.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Le vecteur $\overrightarrow{MB}$ est précédé du coefficient -2 : on obtient $-2\overrightarrow{AB}$.

3 → Les termes en $\overrightarrow{MA}$ s'annulent : il ne reste que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, avec les coefficients de B et de C.

EXERCICE 14 · RAISONNEMENT

Trois points alignés

Soient A, B, C et D quatre points distincts, I le barycentre des points A et B affectés des coefficients 1 et 3, et J le barycentre des points C et D affectés des coefficients 2 et -1. Le point K vérifie $2\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KD} = \vec{0}$. On en tire une relation $x\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$, qui prouve que I, J et K sont alignés. Déterminer le réel x.

Donne le réel x.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe $2\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KB}$: mets 2 en facteur, puis réduis avec I.

2. $2\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KD}$ se réduit avec J : la somme des coefficients 2 et -1 vaut 1.

CORRECTION

Le premier groupe — On met 2 en facteur ; la somme des coefficients 1 et 3 vaut 4.

$$2\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KB} = 2\left(\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB}\right) = 8\overrightarrow{KI}$$

Le second groupe — La somme des coefficients 2 et -1 vaut 1.

$$2\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KJ}$$

Conclure — K est le barycentre de $(I, 8)$ et $(J, 1)$.

$$8\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$$

$x = 8$: K est un barycentre de I et J, donc les trois points sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB}$ vaut $4\overrightarrow{KI}$, mais le groupe est $2\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KB}$: il reste le facteur 2.

2 → $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB}$ ne vaut pas $\overrightarrow{KI}$: il faut multiplier par la somme des coefficients, $1 + 3$.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Dans un rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 8$ et $BC = 3$, et soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$. Calculer la distance AG.

Donne la distance AG.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime d'abord le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est égal aux trois quarts du vecteur $\overrightarrow{AB}$: la distance AG vaut donc les trois quarts de la longueur AB.

CORRECTION

Le vecteur AG — En partant de A, le coefficient de B sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{1+3} \times \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

La distance — Pour la distance AG, on prend les trois quarts de la longueur AB.

$$AG = \frac{3}{4} \times 8 = 6$$

$AG = 6$: G est sur le côté $[AB]$, plus près de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est la distance BG. En partant de A, c'est le coefficient de B qui est au numérateur.

`3/4 / 0.75` → C'est le rapport ; il reste à le multiplier par la longueur AB.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Le rayon du cercle

Soit $ABCD$ un rectangle et G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$. L'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ soit égale à 12 est un cercle de centre G. Calculer son rayon.

Donne le rayon du cercle.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis d'abord la somme : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ est un multiple du vecteur $\overrightarrow{MG}$.
2. La norme de la somme vaut quatre fois la distance MG.

CORRECTION

Réduire — G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 3)$: la somme des coefficients vaut 4.

$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$$

Passer aux distances — La norme de la somme est quatre fois la distance MG.

$$4MG = 12$$

Le rayon — On divise par quatre.

$$MG = 3$$

Le rayon est 3 : on divise la norme par la somme des coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 est la norme de la somme, qui vaut quatre fois la distance MG : il reste à diviser par 4.

4 → 4 est la somme des coefficients ; le rayon est 12 divisé par 4.

EXERCICE 17 · RAISONNEMENT

Reconnaître un ensemble de points

Soit $ABCD$ un rectangle, G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 3)$, et G' le barycentre de $(C, 3)$ et $(D, 1)$. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ soit égale à la norme du vecteur $3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$?

Réponds par un mot : cercle, médiatrice, droite…

Réponse attendue : `mediatrice` — aussi acceptées : la mediatrice · la mediatrice de gg' · mediatrice de gg' · la mediatrice du segment gg' · mediatrice du segment gg' · une mediatrice

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis chaque somme avec son barycentre : chacune vaut quatre fois un vecteur.
2. Tu obtiens $MG = MG'$: quels sont les points à égale distance de deux points donnés ?

CORRECTION

Réduire — Les deux sommes de coefficients valent 4.

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$; $3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG'}$

Passer aux distances — On égale les deux normes et on divise par quatre.

$4MG = 4MG' \iff MG = MG'$

Reconnaître — Les points à égale distance de G et de G' forment la médiatrice du segment $[GG']$.

C'est la médiatrice du segment $[GG']$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`cercle / un cercle / le cercle` → Un cercle correspond à une distance constante. Ici on obtient $MG = MG'$: les points à égale distance de deux points.

`droite / une droite / la droite` → Oui, c'est une droite, mais laquelle ? Les points à égale distance de G et de G' forment la médiatrice du segment $[GG']$.

EXERCICE 18 · BASE

Une moyenne de trois notes

Un élève a obtenu 14 avec le coefficient 1, 11 avec le coefficient 2 et 12 avec le coefficient 3. Calculer sa moyenne.

Donne la moyenne.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie chaque note par son coefficient et additionne.
2. Divise par la somme des coefficients, $1 + 2 + 3$.

CORRECTION

Le total — Chaque note est multipliée par son coefficient.

$1 \times 14 + 2 \times 11 + 3 \times 12 = 72$

La moyenne — On divise par la somme des coefficients.

$\dfrac{72}{6} = 12$

La moyenne est 12 : c'est l'abscisse du barycentre des trois notes, affectées de leurs coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

`37/3` → Tu as fait la moyenne sans les coefficients : chaque note compte autant de fois que son coefficient.

`24` → On divise par la somme des coefficients, 6, et non par le nombre de notes.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Placer un barycentre de trois points

Soient A, B et C trois points non alignés et G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients -1, 2 et 3. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ s'écrit $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Déterminer le réel y.

Donne le réel y.

Réponse attendue : 3/4 — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord la somme des trois coefficients.
2. Le réel y est le coefficient de C, divisé par cette somme.

CORRECTION

La somme — La somme des trois coefficients n'est pas nulle : le barycentre existe.

$-1+2+3=4$

Le vecteur AG — On divise le coefficient de B, puis celui de C, par la somme.

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$y=\frac{3}{4}$, et $x=\frac{1}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

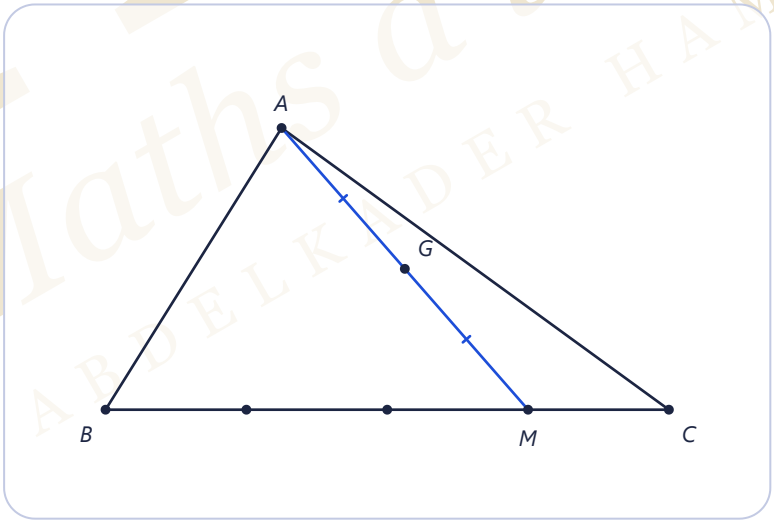
`3` → Il reste à diviser le coefficient de C par la somme des trois coefficients.

`1/2 / 0.5` → C'est le réel x, devant le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On demande y, devant le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 20 · PRATIQUE

Lire un barycentre sur une figure

Sur la figure, M est le point du segment $[BC]$ tel que $BM=\frac{3}{4}BC$, et G est le milieu du segment $[AM]$. Le point G est le barycentre des points pondérés (A,x), $(B,1)$ et $(C,3)$. Déterminer le réel x.



BM = ¾ BC, et G est le milieu de [AM].

Un triangle ABC, de sommet A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. Le côté [BC] est partagé en quatre parts égales ; le point M est le troisième point de partage à partir de B. Le point G est le milieu du segment [AM].

Donne le réel x.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 3)$: si on regroupe B et C, quel coefficient porte M ?
2. G est le milieu de $[AM]$: les points A et M doivent porter le même coefficient.

CORRECTION

Le point M — M est plus près de C : c'est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 3)$, et il porte la somme de ces coefficients.

$$1 + 3 = 4$$

Le milieu — G est le milieu de $[AM]$: A et M ont le même coefficient.

$$x = 4$$

$x = 4$: G est le barycentre de $(A, 4)$, $(B, 1)$ et $(C, 3)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → M porte la somme $1 + 3$. Pour que G soit le milieu de $[AM]$, le point A doit porter le même coefficient que M.

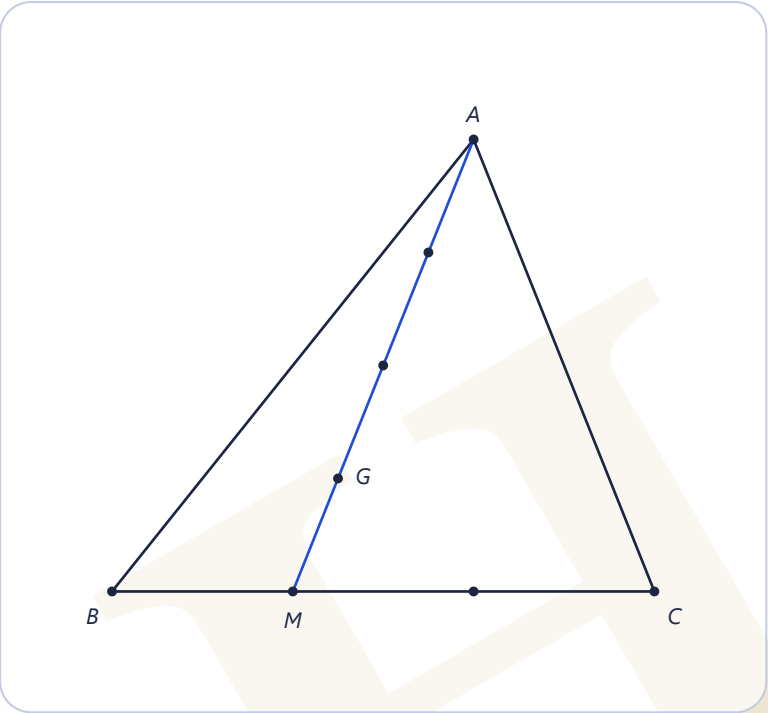
2 → Le milieu correspond à deux coefficients égaux : celui de A doit être égal à celui de M, c'est-à-dire à $1 + 3$.

EXERCICE 21 · PRATIQUE

Une autre figure à lire

Sur la figure, M est le point du segment $[BC]$ tel que $BM = \frac{1}{3}BC$, et G est le point du segment $[AM]$ tel que $AG = \frac{3}{4}AM$. Le point G est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, (B, x) et $(C, 1)$. Déterminer le réel x.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



BM = ⅓ BC et AG = ¾ AM.

Un triangle ABC, de sommet A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. Le côté [BC] est partagé en trois parts égales ; le point M est le premier point de partage à partir de B. Le segment [AM] est partagé en quatre parts égales ; le point G est le troisième point de partage à partir de A.

Donne le réel x.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est plus près de B : il est le barycentre de (B, x) et $(C, 1)$ avec $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{x+1} \times \overrightarrow{BC}$.
2. Vérifie ensuite avec G : A porte 1 et M porte la somme $x + 1$.

CORRECTION

Le point M — En partant de B, le coefficient de C sur la somme doit donner un tiers.

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

Le coefficient — La somme des deux coefficients vaut trois.

$$x = 2$$

Vérifier avec G — M porte alors 3 et A porte 1 : le point G est bien aux trois quarts de $[AM]$ à partir de A.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{1+3} \times \overrightarrow{AM}$$

$x = 2$: G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 1)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2 / 0.5` → M est plus près de B : c'est B qui porte le plus grand coefficient.

`3` → 3 est le coefficient que porte M, la somme de ceux de B et de C. On demande celui de B.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

Regrouper deux points

Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 1)$, et soit I le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{IG} = k\overrightarrow{IC}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `1/4` — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace A et B par leur barycentre I : quel coefficient porte-t-il ?
2. G est le barycentre de $(I, 3)$ et $(C, 1)$: applique la formule en partant de I.

CORRECTION

Le barycentre partiel — I remplace A et B : il porte la somme de leurs coefficients, $1 + 2$.

G est le barycentre de $(I, 3)$ et $(C, 1)$

La formule — En partant de I, le coefficient de C sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3+1} \times \overrightarrow{IC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IC}$$

$k = \frac{1}{4}$: G est sur le segment $[IC]$, plus près de I, qui porte le plus grand coefficient.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` / `0.5` → I ne porte pas le coefficient 1 : il remplace A et B, donc il porte $1 + 2$.

`3/4` / `0.75` → En partant de I, c'est le coefficient de C qui est au numérateur.

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Dans un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme, L le milieu du segment $[BC]$ et G le milieu du segment $[AL]$. Le point G est le barycentre des points pondérés (A, x), $(B, 1)$ et $(C, 1)$. Déterminer le réel x.

Donne le réel x.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$: regroupés, ces deux points donnent à L la somme de leurs coefficients.
2. G est le milieu de $[AL]$: les points A et L portent le même coefficient.

CORRECTION

Le milieu L — L est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$: il porte la somme des deux coefficients.

$1 + 1 = 2$

Le milieu G — G est le milieu de $[AL]$: A porte le même coefficient que L.

$x = 2$

$x = 2$: G est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Avec trois coefficients égaux, G serait le centre de gravité du triangle ABC, aux deux tiers de $[AL]$. Ici G est le milieu de $[AL]$.

EXERCICE 24 · RAISONNEMENT

Un point sur une droite

Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$, et soit I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{CG} = k\overrightarrow{CI}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 3/4 — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$: I est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$.
2. Regroupe A et B : G est le barycentre de $(I, 3)$ et $(C, 1)$. Applique la formule en partant de C.

CORRECTION

Le point I — En partant de A, le coefficient de B sur la somme vaut un tiers : I est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2+1} \times \overrightarrow{AB}$$

Regrouper — I remplace A et B avec le coefficient $2 + 1$.

G est le barycentre de $(I, 3)$ et $(C, 1)$

La formule — En partant de C, le coefficient de I sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{CG} = \frac{3}{3+1} \times \overrightarrow{CI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CI}$$

$k = \frac{3}{4}$: les points C, G et I sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/4 / 0.25 → $\frac{1}{4}$ est le réel tel que $\overrightarrow{IG}$ soit un multiple de $\overrightarrow{IC}$. En partant de C, c'est le coefficient de I qui est au numérateur.

1/2 / 0.5 → I ne porte pas le coefficient 1 : il remplace A et B, donc il porte $2 + 1$.

EXERCICE 25 · PRATIQUE

Écrire un point comme barycentre

Soit $[AB]$ un segment, I son milieu et P le symétrique de I par rapport à A. Le point P est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et (B, x). Déterminer le réel x.

Donne le réel x.

Réponse attendue : -1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime d'abord le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AI}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est l'opposé de la moitié du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Compare avec la formule du barycentre : le coefficient de B, divisé par la somme des deux coefficients.

CORRECTION

Le vecteur AP — P est le symétrique de I par rapport à A, et I est le milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

La formule — On égale avec le coefficient donné par la formule du barycentre.

$$\frac{x}{3+x} = -\frac{1}{2}$$

Résoudre — On fait le produit en croix.

$$2x = -3 - x \iff x = -1$$

$x = -1$: P est hors du segment, du côté de A, donc les coefficients sont de signes contraires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → P est hors du segment $[AB]$: les deux coefficients sont de signes contraires.

`-1/2 / -0.5` → $-\frac{1}{2}$ est le réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$. Il faut encore résoudre $\frac{x}{3+x} = -\frac{1}{2}$.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

Alignement dans un quadrilatère

Soit $ABCD$ un quadrilatère, I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$. Soit K le barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$, L le barycentre de $(C,1)$ et $(D,2)$, et M le milieu de $[KL]$. On montre que $\overrightarrow{MI} + k\overrightarrow{MJ} = \vec{0}$, donc que les points I, J et M sont alignés. Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis au point M : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{ML}$.
2. M est le milieu de $[KL]$: $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML} = \vec{0}$. Regroupe ensuite A avec C, et B avec D.

CORRECTION

Réduire — K et L sont des barycentres dont la somme des coefficients vaut 3.

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MK} \quad ; \quad \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{ML}$$

Le milieu M — M est le milieu de $[KL]$: en ajoutant, le second membre est nul.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 2\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) = \vec{0}$$

Les milieux I et J — I est le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

$2\overrightarrow{MI} + 4\overrightarrow{MJ} = \vec{0}$

Simplifier — On divise par deux.

$\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ} = \vec{0}$

$k = 2$: M est le barycentre de $(I, 1)$ et $(J, 2)$, donc I, J et M sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → Tu as $2\overrightarrow{MI} + 4\overrightarrow{MJ} = \vec{0}$: divise par 2 pour que le coefficient de $\overrightarrow{MI}$ soit 1.

`1/2 / 0.5` → Les points B et D portent le coefficient 2 : c'est J, leur milieu, qui pèse le plus.

EXERCICE 27 · RAISONNEMENT

Un cercle dans un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6 et G son centre de gravité. L'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit égale à $6\sqrt{3}$ est un cercle de centre G. Calculer son rayon.

Donne la valeur exacte du rayon.

Réponse attendue : `2*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. G est l'isobarycentre de A, B et C : la somme des trois vecteurs vaut trois fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.
2. La norme de la somme vaut trois fois la distance MG.

CORRECTION

Réduire — G est l'isobarycentre des trois sommets.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Passer aux distances — La norme de la somme est trois fois la distance MG.

$3MG = 6\sqrt{3}$

Le rayon — On divise par trois.

$MG = 2\sqrt{3}$

Le rayon est $2\sqrt{3}$: c'est la distance GA, le cercle est le cercle circonscrit au triangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(3)` → C'est la norme de la somme, qui vaut trois fois la distance MG : il reste à diviser par 3.

`sqrt(3)` → C'est le rayon du cercle inscrit. Ici, la norme divisée par 3 donne le double.

EXERCICE 28 · RAISONNEMENT

Le pied d'une bissectrice

Dans un triangle ABC, on donne $BC = 7$, $AC = 6$ et $AB = 8$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté $[BC]$ en M. Calculer la longueur MB.

Donne la longueur MB.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est le barycentre de B et C, chacun affecté de la longueur du côté opposé : B avec la longueur AC, C avec la longueur AB.
2. M est le barycentre de $(B, 6)$ et $(C, 8)$, ou encore de $(B, 3)$ et $(C, 4)$: exprime le vecteur $\overrightarrow{BM}$.

CORRECTION

Le barycentre — Chaque sommet reçoit la longueur du côté opposé : B reçoit AC, C reçoit AB.

$$M \text{ est le barycentre de } (B, 6) \text{ et } (C, 8)$$

Le vecteur BM — En partant de B, le coefficient de C sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{BM} = \frac{8}{6+8} \times \overrightarrow{BC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$$

La longueur — Pour la distance MB, on prend les quatre septièmes de la longueur BC.

$$MB = \frac{4}{7} \times 7 = 4$$

$MB = 4$ et $MC = 3$: le rapport $\dfrac{MB}{MC}$ est bien égal à $\dfrac{AB}{AC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est la longueur MC. Le point M est plus loin de B, car le côté AB est plus long que le côté AC.

`7/2 / 3.5` → M n'est pas le milieu de $[BC]$: la bissectrice n'est pas la médiane, sauf si $AB = AC$.

EXERCICE 29 · PRATIQUE

D'une égalité vectorielle à un barycentre

Soient A, B et C trois points et G le point tel que $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$. Le point G est le barycentre des points pondérés (A, x), $(B, 2)$ et $(C, 1)$. Déterminer le réel x.

Donne le réel x.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais apparaître le point G dans chaque vecteur : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}$.
2. N'oublie pas que $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{GA}$, puis rassemble tous les termes dans un seul membre.

CORRECTION

Passer par G — On écrit chaque vecteur à partir du point G.

$$2\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}\right) = -\overrightarrow{GA}$$

Rassembler — On regroupe les trois termes qui contiennent le vecteur $\overrightarrow{GA}$.

$$-2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$x = -2$: la somme des coefficients vaut 1, et on retrouve bien $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Chaque vecteur qui part de A apporte un terme en $-\overrightarrow{GA}$: le coefficient de A est négatif.

-3 → Le second membre $\overrightarrow{AG}$ vaut $-\overrightarrow{GA}$: en le ramenant à gauche, il ajoute $+\overrightarrow{GA}$.

EXERCICE 30 · DEFI

Une somme minimale

Soit M un point intérieur à un triangle ABC. Les droites (MA), (MB) et (MC) coupent $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ en A', B' et C'. On note a, b et c les aires des triangles MBC, MAC et MAB, et on admet que M est le barycentre des sommets A, B et C, chacun affecté de l'aire du triangle opposé : A avec l'aire a, B avec l'aire b, C avec l'aire c. Quelle est la plus petite valeur possible de la somme $S = \dfrac{MA}{MA'} + \dfrac{MB}{MB'} + \dfrac{MC}{MC'}$?

Donne la valeur minimale de S.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe B et C : le point A' porte la somme des aires $b + c$, et le sommet A porte l'aire a. Donc $\dfrac{MA}{MA'} = \dfrac{b+c}{a}$.
2. Regroupe ensuite S en sommes du type $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$.
3. Un réel x strictement positif, ajouté à son inverse, donne au moins 2 ; il y a égalité quand x vaut 1.

CORRECTION

Trois rapports — En regroupant B et C, le point A' porte la somme des aires $b + c$ et le sommet A porte l'aire a ; de même pour les deux autres sommets.

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{b+c}{a} \quad ; \quad \frac{MB}{MB'} = \frac{a+c}{b} \quad ; \quad \frac{MC}{MC'} = \frac{a+b}{c}$$

Regrouper — On sépare chaque fraction en deux, puis on associe chaque quotient à son inverse.

$$S = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

Minorer — Un réel strictement positif ajouté à son inverse donne au moins deux, car le carré de leur différence est positif.

$$S \geq 2 + 2 + 2$$

La valeur minimale est 6, atteinte quand $a = b = c$: M est alors le centre de gravité du triangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Chaque parenthèse vaut au moins 2, et il y en a trois.

2 → 2 est le minimum d'une seule parenthèse : la somme S en contient trois.

EXERCICE 31 · RAISONNEMENT

La nature du triangle

Soit ABC un triangle et O un point tel que la somme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soit le vecteur nul, et que les distances OA, OB et OC soient égales. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Réponds par un mot : isocèle, rectangle, équilatéral…

> **Réponse attendue :** `equilateral` — aussi acceptées : triangle equilateral · un triangle equilateral · il est equilateral · abc est equilateral · abc est un triangle equilateral · le triangle abc est equilateral · le triangle est equilateral · triangle abc equilateral

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La première condition dit que O est le centre de gravité du triangle ; la seconde, que O est le centre du cercle circonscrit.
2. La médiane issue de A passe par O et par le milieu de $[BC]$; or O est aussi sur la médiatrice de $[BC]$.

CORRECTION

Deux rôles pour O — O est l'isobarycentre des sommets, donc le centre de gravité ; et il est à égale distance des trois sommets, donc c'est le centre du cercle circonscrit.

Une médiane — La médiane issue de A passe par O et par le milieu de $[BC]$, deux points de la médiatrice de $[BC]$: cette médiane est la médiatrice de $[BC]$.

$$AB = AC$$

Les autres côtés — Le même raisonnement, avec la médiane issue de B, donne une seconde égalité.

$$BA = BC$$

Le triangle ABC est équilatéral : son centre de gravité est aussi le centre de son cercle circonscrit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`isocele / triangle isocele / un triangle isocele` → Il est isocèle en A, mais aussi en B et en C : le raisonnement vaut pour les trois médianes.

`rectangle / triangle rectangle / un triangle rectangle` → Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse : ce n'est pas le centre de gravité.

EXERCICE 32 · DEFI

Situer le centre du cercle inscrit

Dans un triangle ABC, on donne $BC = 7$, $AC = 6$ et $AB = 8$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté $[BC]$ en M, et D est le centre du cercle inscrit dans le triangle. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AM}$.

Donne le réel k.

> **Réponse attendue :** `2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre du cercle inscrit est le barycentre des trois sommets, chacun affecté de la longueur du côté opposé : A avec la longueur BC, B avec la longueur AC, C avec la longueur AB.
2. D est le barycentre de $(A, 7)$, $(B, 6)$ et $(C, 8)$. Regroupe B et C : leur barycentre est M, avec le coefficient $6 + 8$.

CORRECTION

Le barycentre — Chaque sommet reçoit la longueur du côté opposé.

D est le barycentre de $(A, 7), (B, 6)$ et $(C, 8)$

Regrouper B et C — Le barycentre de $(B, 6)$ et $(C, 8)$ est le pied M de la bissectrice ; il porte la somme des deux coefficients.

D est le barycentre de $(A, 7)$ et $(M, 14)$

La formule — En partant de A, le coefficient de M sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AD} = \frac{14}{7+14} \times \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$k = \frac{2}{3}$: le centre du cercle inscrit est sur la bissectrice (AM), aux deux tiers à partir de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → En partant de A, c'est le coefficient de M, c'est-à-dire 14, qui est au numérateur.

1/8 → M ne porte pas le coefficient 1 : il remplace B et C, donc il porte $6 + 8$.

EXERCICE 33 · PRATIQUE

Retrouver le milieu du troisième côté

Soit ABC un triangle, M son centre de gravité, I le milieu du segment $[AM]$ et K le symétrique de I par rapport à M. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AM}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 3/2 — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris le vecteur $\overrightarrow{AK}$ avec la relation de Chasles, en passant par M : c'est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MK}$.
2. K est le symétrique de I par rapport à M : le vecteur $\overrightarrow{MK}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{IM}$, la moitié du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

CORRECTION

La symétrie — M est le milieu de $[IK]$, et I est le milieu de $[AM]$.

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$$

Le vecteur AK — On ajoute avec la relation de Chasles.

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$$

$k = \frac{3}{2}$: comme le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane, K est le milieu du côté $[BC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → K n'est pas le symétrique de A par rapport à M, mais celui de I : on ajoute seulement la moitié du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

`1/2` / `0.5` → $\frac{1}{2}$ correspond au vecteur $\overrightarrow{MK}$ seul : il faut ajouter le vecteur $\overrightarrow{AM}$.

EXERCICE 34 · RAISONNEMENT

Sécantes ou parallèles ?

Soient A, B et C trois points non alignés et G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 1, 2 et -2. La droite (AG) coupe-t-elle la droite (BC) ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles sont paralleles · non paralleles · non, elles sont paralleles · non, paralleles · non elle ne la coupe pas · non, elle ne la coupe pas · non, elles sont strictement paralleles · non elles sont strictement paralleles · non, les droites sont paralleles · non les droites sont paralleles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Peut-on regrouper B et C ? Regarde la somme de leurs coefficients.
2. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: la somme des trois coefficients vaut 1.

CORRECTION

Pas de barycentre partiel — La somme des coefficients de B et de C est nulle : ces deux points n'ont pas de barycentre.

$$2 + (-2) = 0$$

Le vecteur AG — La somme des trois coefficients vaut 1.

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$$

Conclure — Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$, et A n'est pas sur la droite (BC) : les deux droites sont strictement parallèles.

Non : la droite (AG) est parallèle à la droite (BC). Elle ne la couperait que si la somme des coefficients de B et de C n'était pas nulle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui` → Si la droite (AG) coupait la droite (BC), le point d'intersection serait le barycentre de B et C. Or la somme de leurs coefficients est nulle.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

Le coefficient de l'examen

Dans un module, la note de travaux pratiques a le coefficient 1 et la note d'examen un coefficient c. Une élève obtient 17 en travaux pratiques et 11 à l'examen, et sa moyenne dans le module vaut $12{,}5$. Déterminer le coefficient c.

Donne le coefficient c.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La moyenne s'écrit $\dfrac{1 \times 17 + c \times 11}{1 + c}$.
2. Égale-la à $12{,}5$, puis multiplie les deux membres par $1 + c$.

CORRECTION

L'équation — La moyenne pondérée doit valoir $12{,}5$.

$$\frac{17 + 11c}{1 + c} = 12{,}5$$

La résoudre — On multiplie par $1 + c$, puis on regroupe les termes en c.

$$17 + 11c = 12{,}5 + 12{,}5c \iff 4{,}5 = 1{,}5c \iff c = 3$$

$c = 3$: l'examen compte triple. La moyenne $12{,}5$, plus proche de 11 que de 17, le laissait prévoir.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → Tu as donné le coefficient c à la note de travaux pratiques. C'est l'examen, noté 11, qui a le coefficient c : $\dfrac{17 + 11c}{1 + c} = 12{,}5$.

34/3 → On divise par la somme des coefficients, $1 + c$, et non par c seul.

EXERCICE 36 · BASE

Le milieu, dans l'autre sens

Soit $[PQ]$ un segment de milieu I et M un point quelconque du plan. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = k\overrightarrow{IM}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le milieu I réduit la somme : $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MI}$.
2. Compare le vecteur $\overrightarrow{MI}$ et le vecteur $\overrightarrow{IM}$: ils sont opposés.

CORRECTION

Le milieu — I est le milieu de $[PQ]$.

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MI}$$

Changer de sens — Le vecteur $\overrightarrow{MI}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{IM}$.

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{IM}$$

$k = -2$: attention à l'ordre des lettres, le vecteur $\overrightarrow{IM}$ part de I.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $2\overrightarrow{MI}$ est juste, mais l'énoncé demande le vecteur $\overrightarrow{IM}$, qui est l'opposé de $\overrightarrow{MI}$.

EXERCICE 37 · PRATIQUE

La note qu'il faut viser

Au premier trimestre, le devoir de contrôle a le coefficient 1 et le devoir de synthèse le coefficient 2. Un élève a obtenu 8 au devoir de contrôle. Déterminer la note x qu'il doit obtenir au devoir de synthèse pour avoir une moyenne égale à 12.

Donne la note x.

Réponse attendue : `14`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la moyenne avec les coefficients : $\dfrac{1 \times 8 + 2x}{3}$.
2. Résous l'équation obtenue en égalant cette moyenne à 12.

CORRECTION

L'équation — La moyenne pondérée doit valoir 12.

$$\frac{8 + 2x}{1 + 2} = 12$$

La résoudre — On multiplie par 3, puis on isole x.

$$8 + 2x = 36 \iff x = 14$$

Il lui faut 14 : le devoir de synthèse compte double, il rattrape vite une mauvaise note.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → Tu as fait la moyenne sans les coefficients. Le devoir de synthèse compte double : $\dfrac{8 + 2x}{3} = 12$.

`20` → Tu as donné le coefficient 2 au devoir de contrôle. C'est le devoir de synthèse qui compte double.

EXERCICE 38 · BASE

Où accrocher la tige ?

Une tige $[AB]$ de longueur 90 cm porte une masse de 2 kilogrammes en A et une masse de 7 kilogrammes en B. Calculer la distance GA, en cm, du point d'équilibre G au point A.

Donne la distance GA, en cm.

Réponse attendue : `70`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. À l'équilibre, $2 \times GA = 7 \times GB$, et $GA + GB = 90$.
2. Le point d'équilibre est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 7)$: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{7}{2+7}\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

Le barycentre — G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 7)$: il est sur le segment $[AB]$.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{7}{2+7}\overrightarrow{AB} = \frac{7}{9}\overrightarrow{AB}$$

La distance — On multiplie la longueur de la tige par sept neuvièmes.

$$GA = \frac{7}{9} \times 90 = 70$$

$GA = 70$ cm : le crochet est du côté de la masse la plus lourde, à 20 cm de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20` → 20 cm, c'est la distance GB. Le point d'équilibre est plus près de la masse la plus lourde, accrochée en B.

`45` → Le milieu ne convient que pour deux masses égales. Ici la masse en B est plus lourde.

EXERCICE 39 · PRATIQUE

La masse qui équilibre

Une tige $[AB]$ de longueur $1{,}2$ m est suspendue en un point G situé à 30 cm de A. On accroche en A une masse de 9 kilogrammes. Quelle masse m, en kilogrammes, faut-il accrocher en B pour que la tige soit en équilibre ?

Donne la masse m, en kilogrammes.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Convertis la longueur de la tige en centimètres, puis calcule la distance GB.
2. À l'équilibre, $9 \times GA = m \times GB$.

CORRECTION

Les distances — La tige mesure 120 cm.

$GA = 30 \quad ; \quad GB = 120 - 30 = 90$

L'équilibre — La masse multipliée par la distance est la même des deux côtés.

$9 \times 30 = m \times 90$

La masse — On divise par 90.

$$m = \frac{270}{90} = 3$$

Il faut 3 kilogrammes en B : le côté le plus long porte la masse la plus légère.

PIÈGES ANTICIPÉS

`27` → Tu as échangé les distances : $GA = 30$ cm et $GB = 90$ cm, donc $9 \times 30 = m \times 90$.

`9/4 / 2.25` → Tu as pris la longueur de la tige pour GB. La distance GB va de G à B : $120 - 30 = 90$ cm.

EXERCICE 40 · RAISONNEMENT

La balançoire à bascule

Une planche de 5 m repose sur un pivot. Sami, qui pèse 36 kilogrammes, s'assoit à une extrémité, et Rim, qui pèse 24 kilogrammes, à l'autre. Calculer la distance, en m, entre Sami et le pivot pour que la planche soit en équilibre (on néglige la masse de la planche).

Donne la distance, en m.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le pivot est le point d'équilibre G des deux extrémités, affectées des masses 36 et 24.
2. Simplifie les coefficients : $(36, 24)$ donne le même barycentre que $(3, 2)$.
3. En partant de Sami, c'est le coefficient de Rim qui est au numérateur.

CORRECTION

Le barycentre — On note S et R les places de Sami et de Rim. Le pivot G est le barycentre de $(S, 36)$ et $(R, 24)$, ou de $(S, 3)$ et $(R, 2)$.

$$\overrightarrow{SG} = \frac{2}{3+2}\overrightarrow{SR}$$

La distance — On multiplie la longueur de la planche par deux cinquièmes.

$$SG = \frac{2}{5} \times 5 = 2$$

Le pivot est à 2 m de Sami : l'enfant le plus lourd est le plus près du pivot.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 m, c'est la distance entre Rim et le pivot. Le plus lourd des deux, Sami, est le plus près du pivot.

`5/2` / `2.5` → Le milieu de la planche ne convient que si les deux enfants ont la même masse.

EXERCICE 41 · BASE

Une somme de coefficients égale à deux

Soient E et F deux points distincts et G le barycentre des points pondérés $(E, 5)$ et $(F, -3)$.

Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{EG} = k\overrightarrow{EF}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `-3/2` — aussi acceptées : -1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En partant de E, c'est le coefficient de F qui est au numérateur.
2. Le dénominateur est la somme des coefficients, $5 + (-3)$.

CORRECTION

La somme — La somme des coefficients n'est pas nulle : le barycentre existe.

$$5 + (-3) = 2$$

La formule — Le coefficient de F, divisé par la somme.

$$\overrightarrow{EG} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$$

$k = -\frac{3}{2}$: G est hors du segment $[EF]$, du côté de E, qui a le plus grand coefficient en valeur absolue.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/2` / `2.5` → Tu as mis au numérateur le coefficient de E. En partant de E, c'est celui de F.

`3/2 / 1.5` → Le coefficient de F est négatif : le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{EF}$.

`-3/8 / -0.375` → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $5 + (-3) = 2$, et non $5 + 3$.

`-3` → Il reste à diviser le coefficient de F par la somme des coefficients, 2.

EXERCICE 42 · BASE

Reconnaître un coefficient

Soient A et B deux points distincts et G le point tel que $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{GB}$. Le point G est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et (B, x). Déterminer le réel x.

Donne le réel x.

Réponse attendue : `-4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ramène tout dans un membre : $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
2. Compare avec la définition : $1 \times \overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

CORRECTION

Un seul membre — On fait passer le vecteur $4\overrightarrow{GB}$ dans le premier membre.

$\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

La définition — On lit les coefficients devant $\overrightarrow{GA}$ et devant $\overrightarrow{GB}$.

$x = -4$

$x = -4$: G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -4)$. On écrit toujours la relation sous la forme « somme égale au vecteur nul ».

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → La relation est $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{GB}$: en ramenant tout dans un membre, on obtient $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, avec un coefficient négatif.

EXERCICE 43 · BASE

En partant de l'autre point

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points pondérés $(A, 5)$ et $(B, 1)$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{BA}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `5/6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En partant de B, c'est le coefficient de l'autre point, A, qui est au numérateur.
2. Le dénominateur est toujours la somme des coefficients.

CORRECTION

La formule — On part de B : le coefficient de A, divisé par la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{BG} = \frac{5}{5+1}\overrightarrow{BA} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BA}$$

$k = \frac{5}{6}$: G est sur le segment, tout près de A, qui a le plus grand coefficient.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/6 → Tu as mis au numérateur le coefficient de B. En partant de B, c'est celui de A.

5 → Il reste à diviser le coefficient de A par la somme des coefficients, $5+1$.

EXERCICE 44 · PRATIQUE

Une distance sur le segment

Soient A et B deux points tels que $AB = 18$ et G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 7)$. Calculer la distance GB.

Donne la distance GB.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En partant de B, on a $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{2+7}\overrightarrow{BA}$.
2. Multiplie la longueur AB par ce coefficient.

CORRECTION

La formule — On part de B : le coefficient de A sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{9}\overrightarrow{BA}$$

La distance — On passe aux longueurs.

$$GB = \frac{2}{9} \times 18 = 4$$

$GB = 4$: le barycentre est plus près de B, qui porte le plus grand coefficient.

PIÈGES ANTICIPÉS

14 → 14, c'est la distance GA. Le barycentre est plus près du point de plus grand coefficient, ici B.

9 → Le milieu ne convient que pour deux coefficients égaux.

EXERCICE 45 · BASE

Deux coefficients négatifs

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points A et B affectés des coefficients -2 et -5. Le point G appartient-il au segment $[AB]$?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui il appartient au segment · oui il est sur le segment · oui il est entre a et b · oui G appartient au segment · oui G est sur le segment · oui il appartient a ab · oui G

appartient a ab · oui il appartient au segment ab · oui il est sur le segment ab · oui G est sur le segment ab · oui G est entre a et b · oui G est sur ab · oui il est sur ab · oui G appartient au segment ab

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde le signe des deux coefficients.
2. Le barycentre est sur le segment si, et seulement si, les coefficients sont de même signe.

CORRECTION

Les signes — Les deux coefficients sont négatifs : ils sont de même signe.

$-2 < 0 \quad ; \quad -5 < 0$

Vérifier — Avec la formule, la somme des coefficients vaut -7.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-5}{-7}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$$

Oui : deux coefficients négatifs sont de même signe, et G est sur le segment $[AB]$. On peut d'ailleurs les multiplier par -1.

PIÈGES ANTICIPÉS

non → Les coefficients -2 et -5 sont tous les deux négatifs, donc de même signe : le barycentre est sur le segment.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Le point le plus proche

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points pondérés $(A, -1)$ et $(B, 4)$. Lequel des deux points A et B est le plus proche de G ?

Réponds par le nom du point.

Réponse attendue : B — aussi acceptées : le point B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$.
2. Situe G : au-delà de B, ou entre A et B ?

CORRECTION

La formule — La somme des coefficients vaut 3.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{4}{-1+4}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$$

Les distances — G est au-delà de B, à un tiers de AB de lui.

$$GB = \frac{1}{3}AB \quad ; \quad GA = \frac{4}{3}AB$$

G est plus proche de B, le point dont le coefficient est le plus grand en valeur absolue.

PIÈGES ANTICIPÉS

A → Le coefficient de B est le plus grand en valeur absolue : c'est vers B que le barycentre est attiré.

EXERCICE 47 · RAISONNEMENT

Un barycentre symétrique

Soient A et B deux points distincts et m un réel, $m \neq -2$. Déterminer m pour que le barycentre des points pondérés (A, m) et $(B, 2)$ soit le symétrique de B par rapport à A.

Donne le réel m.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le symétrique G de B par rapport à A vérifie $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$.
2. La formule donne $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{m+2}\overrightarrow{AB}$: égale les deux coefficients.

CORRECTION

Le symétrique — A est le milieu de $[BG]$.

$$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$$

La formule — Le coefficient de B sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{m+2}\overrightarrow{AB}$$

L'équation — On égale les deux coefficients.

$$\frac{2}{m+2} = -1 \iff m+2 = -2 \iff m = -4$$

$m = -4$: on vérifie que $(A, -4)$ et $(B, 2)$ donnent $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{-2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1` → Avec $m = -1$, on obtient $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$: c'est le symétrique de A par rapport à B, pas celui de B par rapport à A.

`0` → Avec $m = 0$, le barycentre est B lui-même. Le symétrique de B par rapport à A vérifie $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 48 · PRATIQUE

Placer au quart

Soient A et B deux points distincts et b un réel, $b \neq -3$. Déterminer b pour que le barycentre G des points pondérés $(A, 3)$ et (B, b) vérifie $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel b.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule donne $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{3+b}\overrightarrow{AB}$.

2. Résous l'équation $\dfrac{b}{3+b} = \dfrac{1}{4}$.

CORRECTION

La formule — Le coefficient de B sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{3+b}\overrightarrow{AB}$$

L'équation — On fait le produit en croix.

$4b = 3 + b \iff b = 1$

$b = 1$: G est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$, au quart du segment à partir de A, le point le plus lourd.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → Tu as mis au numérateur le coefficient de A. En partant de A, c'est celui de B : $\dfrac{b}{3+b} = \dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 49 · BASE Chasser deux fractions

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points pondérés $\left(A, \dfrac{1}{5}\right)$ et $\left(B, \dfrac{2}{3}\right)$.

Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `10/13`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie les deux coefficients par 15 : le barycentre ne change pas.
2. G est alors le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 10)$.

CORRECTION

Chasser les fractions — On multiplie les deux coefficients par 15.

G est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 10)$

La formule — Le coefficient de B sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{10}{3+10}\overrightarrow{AB} = \frac{10}{13}\overrightarrow{AB}$$

$k = \dfrac{10}{13}$: multiplier tous les coefficients par un même réel non nul ne change pas le barycentre.

PIÈGES ANTICIPÉS

3/13 → Tu as mis au numérateur le coefficient de A. En partant de A, c'est celui de B.

2/3 → Il faut diviser le coefficient de B par la somme des deux coefficients, qui ne vaut pas 1 ici.

EXERCICE 50 · PRATIQUE Les coefficients les plus simples

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points pondérés $(A, -6)$ et $(B, 15)$. Le point G est aussi le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et (B, b). Déterminer le réel b.

Donne le réel b.

Réponse attendue : -5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On passe de -6 à 2 en multipliant par un même réel non nul : lequel ?
2. Multiplie aussi le coefficient de B par ce réel.

CORRECTION

Le facteur — On passe du coefficient -6 au coefficient 2 en multipliant par $-\frac{1}{3}$.

$$-6 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 2$$

L'autre coefficient — On multiplie le coefficient de B par le même réel.

$$b = 15 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -5$$

$b = -5$: on peut multiplier tous les coefficients par un même réel non nul, même négatif.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Le facteur qui transforme -6 en 2 est négatif : il change aussi le signe du coefficient de B.

23 → On ne peut pas ajouter un même nombre aux coefficients : on les multiplie tous par un même réel non nul.

EXERCICE 51 · RAISONNEMENT

Un paramètre en facteur

Soient A et B deux points distincts, m un réel différent de -1, et G le barycentre des points pondérés $(A, m+1)$ et $(B, 2m+2)$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Factorise le coefficient de B : $2m+2 = 2(m+1)$.
2. Divise les deux coefficients par $m+1$, qui n'est pas nul.

CORRECTION

Factoriser — Les deux coefficients sont des multiples de $m+1$.

$$2m+2 = 2(m+1)$$

Simplifier — Comme $m+1 \neq 0$, on divise les deux coefficients par $m+1$.

$$G \text{ est le barycentre de } (A, 1) \text{ et } (B, 2)$$

La formule — Le coefficient de B sur la somme.

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$k = \frac{2}{3}$: le barycentre ne dépend pas de m. Avant de calculer, on cherche un facteur commun aux coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → Tu as mis au numérateur le coefficient de A. En partant de A, c'est celui de B.

2 → Il faut diviser le coefficient de B par la somme des coefficients, $3(m+1)$.

EXERCICE 52 · BASE

Réduire une différence

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points pondérés $(A, 4)$ et $(B, -1)$. Pour tout point M du plan, $4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MG}$. Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La réduction s'écrit $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.
2. Ici $\alpha = 4$ et $\beta = -1$.

CORRECTION

La réduction — Le réel cherché est la somme des coefficients.

$4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = (4-1)\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$

$k = 3$: la somme pondérée de deux vecteurs se réduit à la somme des coefficients fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $4 + (-1) = 3$.

4 → Le réel cherché est la somme des deux coefficients, pas celui de A.

EXERCICE 53 · PRATIQUE

Une norme à calculer

Soient E et F deux points distincts et G le barycentre des points pondérés $(E, 7)$ et $(F, -2)$. Soit M un point tel que $MG = 3$. Calculer la norme du vecteur $7\overrightarrow{ME} - 2\overrightarrow{MF}$.

Donne la norme.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis la somme avec le point G.
2. La norme du vecteur $5\overrightarrow{MG}$ est $5MG$.

CORRECTION

Réduire — La somme des coefficients vaut $7 - 2 = 5$.

$$7\overrightarrow{ME} - 2\overrightarrow{MF} = 5\overrightarrow{MG}$$

La norme — On multiplie la distance MG par 5.

$$\left\| 5\overrightarrow{MG} \right\| = 5 \times 3 = 15$$

La norme vaut 15 : réduire la somme ramène le calcul à une seule distance, MG.

PIÈGES ANTICIPÉS

27 → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $7 + (-2) = 5$, et non 9.

3 → 3 est la distance MG. La somme vaut cinq fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.

EXERCICE 54 · RAISONNEMENT

Le point défini par une égalité

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre des points pondérés $(A, 5)$ et $(B, -2)$. Le point M vérifie $5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{AB}$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{GM} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis le premier membre avec le point G : la somme des coefficients vaut 3.
2. Tu obtiens $3\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{AB}$; attention au sens du vecteur demandé.

CORRECTION

Réduire — G est le barycentre de $(A, 5)$ et $(B, -2)$.

$$5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$$

L'égalité — On remplace dans l'égalité de l'énoncé.

$$3\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{AB}$$

Changer de sens — Le vecteur $\overrightarrow{GM}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{MG}$.

$$\overrightarrow{GM} = -2\overrightarrow{AB}$$

$k = -2$: en réduisant d'abord, on transforme une égalité à deux vecteurs inconnus en une seule position de M.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $2\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{MG}$. Le vecteur demandé, $\overrightarrow{GM}$, est son opposé.

-6 / 6 → La somme des coefficients vaut 3 : $3\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{AB}$, il faut diviser par 3.

-6/7 → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $5 + (-2) = 3$, et non 7.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 55 · PRATIQUE

Un vecteur constant dans un triangle

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Pour tout point M du plan, le vecteur $3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 6\overrightarrow{MA}$ est égal à $k\overrightarrow{IA}$. Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : -6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le milieu I réduit la somme $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
2. Il reste $6\overrightarrow{MI} - 6\overrightarrow{MA}$: utilise la relation de Chasles, puis regarde le sens du vecteur obtenu.

CORRECTION

Le milieu — I est le milieu de $[BC]$.

$$3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MI}$$

Chasles — On met 6 en facteur et on applique la relation de Chasles.

$$6\overrightarrow{MI} - 6\overrightarrow{MA} = 6\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI}\right) = 6\overrightarrow{AI}$$

Changer de sens — Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{IA}$.

$$6\overrightarrow{AI} = -6\overrightarrow{IA}$$

$k = -6$: la somme des coefficients $3 + 3 - 6$ est nulle, donc le vecteur ne dépend pas de M.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → $6\overrightarrow{MI} - 6\overrightarrow{MA} = 6\overrightarrow{AI}$: ce vecteur va de A vers I, il est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{IA}$.

EXERCICE 56 · DEFI

Une droite parallèle à un côté

Soit ABC un triangle et m un réel. On note G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, (B, m) et $(C, 2m - 1)$, lorsqu'il existe. Déterminer m pour que le barycentre existe et que la droite (AG) soit parallèle à la droite (BC).

Donne le réel m.

Réponse attendue : 1/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. La droite (AG) est parallèle à (BC) lorsque $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire lorsque les coefficients de B et de C sont opposés.
3. N'oublie pas de vérifier que la somme des trois coefficients n'est pas nulle.

CORRECTION

Le vecteur AG — La somme des coefficients vaut $3m$; elle doit être non nulle.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{m}{3m}\overrightarrow{AB} + \frac{2m-1}{3m}\overrightarrow{AC}$$

La condition — $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ lorsque les deux coefficients sont opposés.

$$m + (2m-1) = 0 \iff m = \frac{1}{3}$$

Vérifier — La somme des coefficients vaut $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 1 \neq 0$, et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$

$m = \frac{1}{3}$: la droite (AG) est parallèle à (BC) quand les coefficients de B et de C ont une somme nulle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Avec $m = 0$, la somme des coefficients vaut 0 : le barycentre n'existe pas.

`1` → Avec $m = 1$, les coefficients de B et de C sont égaux : (AG) passe alors par le milieu de $[BC]$, elle n'est pas parallèle à (BC).

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Rendre un vecteur constant

Soient A, B et C trois points du plan. Déterminer le réel c pour que le vecteur $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ ne dépende pas du point M.

Donne le réel c.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Passe par A dans les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$.
2. Le vecteur ne dépend pas de M lorsque le coefficient de $\overrightarrow{MA}$ obtenu est nul.

CORRECTION

Passer par A — On écrit $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$.

$$3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (3 - 1 + c)\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

La condition — Le vecteur ne dépend plus de M lorsque la somme des coefficients est nulle.

$$2 + c = 0 \iff c = -2$$

$c = -2$: une somme pondérée de vecteurs ne dépend pas de M exactement quand la somme des coefficients est nulle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Avec $c = 2$, la somme des coefficients vaut 4 : le vecteur vaut $4\overrightarrow{MG}$ et dépend de M.

`-3` → Le coefficient de $\overrightarrow{MB}$ compte aussi : $3 - 1 + c = 0$.

EXERCICE 58 · DEFI

Le vecteur constant et un barycentre

Soient A, B et C trois points non alignés, $\vec{u}$ le vecteur $4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$, qui ne dépend pas de M, et C' le barycentre des points pondérés $(A, 4)$ et $(B, -1)$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{C'C} = k\vec{u}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `-1/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Comme $\vec{u}$ ne dépend pas de M, calcule-le en choisissant $M = C'$.
2. C' est le barycentre de $(A, 4)$ et $(B, -1)$: $4\overrightarrow{C'A} - \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$.

CORRECTION

Choisir M — Le vecteur ne dépend pas de M : on prend $M = C'$.

$$\vec{u} = 4\overrightarrow{C'A} - \overrightarrow{C'B} - 3\overrightarrow{C'C}$$

Le barycentre — Par définition de C', les deux premiers termes ont une somme nulle.

$$\vec{u} = -3\overrightarrow{C'C}$$

Conclure — On divise par -3.

$$\overrightarrow{C'C} = -\frac{1}{3}\vec{u}$$

$k = -\dfrac{1}{3}$: la droite (CC') est dirigée par $\vec{u}$. Pour un vecteur constant, on choisit le point M qui annule le plus de termes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → $\vec{u} = -3\overrightarrow{C'C}$: le coefficient est négatif.

`-3` → -3 est le réel tel que $\vec{u} = -3\overrightarrow{C'C}$. On demande l'inverse : $\overrightarrow{C'C}$ en fonction de $\vec{u}$.

`-0.33 / -0.333 / -0.3` → On attend la valeur exacte : $-\dfrac{1}{3}$, sans arrondir.

EXERCICE 59 · BASE

Les deux points repères

Pour construire par la méthode des parallèles le barycentre G des points pondérés $(A, 5)$ et $(B, 2)$, on trace par A et par B deux droites parallèles de vecteur directeur $\vec{i}$, et on y place les points A' et B' tels que $\overrightarrow{AA'} = 2\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = b\vec{i}$, de sorte que les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en G. Déterminer le réel b.

Donne le réel b.

Réponse attendue : `-5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On croise les coefficients : celui de B sert à partir de A.
2. À partir de B, on prend l'opposé du coefficient de A.

CORRECTION

Croiser — Le coefficient de B donne $\overrightarrow{AA'}$; l'opposé du coefficient de A donne $\overrightarrow{BB'}$.

$\overrightarrow{AA'} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{BB'} = -5\vec{i}$

Vérifier — Alors $5\overrightarrow{GA'} + 2\overrightarrow{GB'} = 5\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 10\vec{i} - 10\vec{i}$.

$5\overrightarrow{GA'} + 2\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$

$b = -5$: G est l'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Avec $\overrightarrow{BB'} = 5\vec{i}$, les deux vecteurs ne se compensent pas : il faut l'opposé du coefficient de A.

-2 / 2 → On croise les coefficients : à partir de B, c'est le coefficient de A, avec le signe moins.

EXERCICE 60 · PRATIQUE

Retrouver les coefficients

Soient A et B deux points distincts. Par A et par B, on trace deux droites parallèles de vecteur directeur $\vec{i}$, et on place les points A' et B' tels que $\overrightarrow{AA'} = 3\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = 4\vec{i}$. Les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en G, barycentre des points pondérés (A, a) et $(B, 3)$. Déterminer le réel a.

Donne le réel a.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans la méthode des parallèles, pour (A, a) et $(B, 3)$, on place $\overrightarrow{AA'} = 3\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = -a\vec{i}$.
2. Lis a sur le vecteur $\overrightarrow{BB'}$.

CORRECTION

La méthode — Pour (A, a) et $(B, 3)$, on place $\overrightarrow{AA'} = 3\vec{i}$, ce qui est bien le cas, et $\overrightarrow{BB'} = -a\vec{i}$.

$-a = 4$

Le coefficient — On en déduit a.

$a = -4$

Vérifier — La somme des coefficients vaut -1 ; G est hors du segment.

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{-1}\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AB}$

$a = -4$: les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont de même sens, donc les coefficients sont de signes contraires et G est hors du segment.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Dans la méthode, $\overrightarrow{BB'} = -a\vec{i}$: a est l'opposé de 4.

EXERCICE 61 · RAISONNEMENT

Où les droites se coupent

Soient A et B deux points distincts. Par A et par B, on trace deux droites parallèles de vecteur directeur $\vec{i}$, et on place les points A' et B' tels que $\overrightarrow{AA'} = 2\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = -6\vec{i}$. Les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en G. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `1/4` — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Retrouve les coefficients : $\overrightarrow{AA'} = \beta\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = -\alpha\vec{i}$.
2. G est le barycentre de $(A, 6)$ et $(B, 2)$.

CORRECTION

Les coefficients — On lit $\beta = 2$ et $-\alpha = -6$.

G est le barycentre de $(A, 6)$ et $(B, 2)$

La formule — Le coefficient de B sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{6+2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$k = \dfrac{1}{4}$: les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont de sens contraires, les coefficients sont de même signe, et G est sur le segment.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/4` / `0.75` → G est le barycentre de $(A, 6)$ et $(B, 2)$: il est plus près de A, qui porte le plus grand coefficient.

`1/3` → $\dfrac{2}{6}$ est le rapport des coefficients. Il faut diviser par leur somme, $6 + 2$.

EXERCICE 62 · BASE

La diagonale du parallélogramme

Soient A et B deux points distincts, G le barycentre des points pondérés $(A, 4)$ et $(B, 1)$, et M un point hors de la droite (AB). On construit A' tel que $\overrightarrow{MA'} = 4\overrightarrow{MA}$, puis M' tel que $MA'M'B$ soit un parallélogramme. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MG}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le parallélogramme $MA'M'B$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}$.
2. Réduis $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ avec le point G.

CORRECTION

La diagonale — La règle du parallélogramme donne la somme des deux vecteurs.

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$

Réduire — La somme des coefficients vaut 5.

$\overrightarrow{MM'} = 5\overrightarrow{MG}$

$k = 5$: G est sur la droite (MM'), au cinquième du segment $[MM']$ à partir de M.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → Le réel cherché est la somme des coefficients, $4 + 1$.

EXERCICE 63 · PRATIQUE

Placer G sur la diagonale

Soient A et B deux points distincts, G le barycentre des points pondérés $(A, 7)$ et $(B, -4)$, et M un point hors de la droite (AB). On construit A' et B' tels que $\overrightarrow{MA'} = 7\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB'} = -4\overrightarrow{MB}$, puis M' tel que $MA'M'B'$ soit un parallélogramme. Déterminer le réel t tel que $\overrightarrow{MG} = t\overrightarrow{MM'}$.

Donne le réel t.

Réponse attendue : `1/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'}$, puis réduis avec G.
2. Tu obtiens $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$: exprime ensuite $\overrightarrow{MG}$.

CORRECTION

La diagonale — La règle du parallélogramme, puis la réduction : la somme des coefficients vaut 3.

$\overrightarrow{MM'} = 7\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$

Le vecteur MG — On divise par 3.

$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MM'}$

$t = \frac{1}{3}$: G est l'intersection des droites (MM') et (AB), au tiers de $[MM']$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$; on demande le vecteur $\overrightarrow{MG}$ en fonction de $\overrightarrow{MM'}$, il faut diviser par 3.

`1/11` → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $7 + (-4) = 3$.

`0.33 / 0.333 / 0.3` → On attend la valeur exacte : $\frac{1}{3}$, sans arrondir.

EXERCICE 64 · RAISONNEMENT

Une longueur sur la diagonale

Soient A et B deux points distincts, G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -5)$, et M un point hors de la droite (AB). On construit A' et B' tels que $\overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB'} = -5\overrightarrow{MB}$, puis M' tel que $MA'M'B'$ soit un parallélogramme. On mesure $MM' = 12$ cm. Calculer la distance MG, en cm.

Donne la distance MG, en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre que $\overrightarrow{MM'} = -3\overrightarrow{MG}$.
2. Une distance est positive : $MM' = 3MG$.

CORRECTION

La diagonale — La règle du parallélogramme, puis la réduction : la somme des coefficients vaut $2 - 5 = -3$.

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MG}$$

Les longueurs — La norme de $-3\overrightarrow{MG}$ est $3MG$.

$$MM' = 3MG \iff MG = \frac{12}{3} = 4$$

$MG = 4$ cm : G est sur la droite (MM'), mais du côté opposé à M' par rapport à M, car le coefficient -3 est négatif.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → Une distance est toujours positive : la norme de $-3\overrightarrow{MG}$ est $3MG$.

12/7 → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $2 + (-5) = -3$.

EXERCICE 65 · RAISONNEMENT

Placer K sur la droite (IJ)

Soient A, B, C et D quatre points distincts, I le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 4)$, et J le barycentre de $(C, 3)$ et $(D, -1)$. Le point K vérifie $\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KD} = \vec{0}$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IJ}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 2/7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KB}$ avec I et $3\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KD}$ avec J.
2. Tu obtiens $5\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$: K est le barycentre de $(I, 5)$ et $(J, 2)$.

CORRECTION

Avec le point I — La somme des coefficients 1 et 4 vaut 5.

$\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KB} = 5\overrightarrow{KI}$

Avec le point J — La somme des coefficients 3 et -1 vaut 2.

$3\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{KJ}$

Le barycentre K — $5\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$: K est le barycentre de $(I, 5)$ et $(J, 2)$.

$\overrightarrow{IK} = \dfrac{2}{5+2}\overrightarrow{IJ} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{IJ}$

$k = \dfrac{2}{7}$: K est sur la droite (IJ), donc I, J et K sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/7` → En partant de I, c'est le coefficient de J, 2, qui est au numérateur.

`2/5 / 0.4` → Il faut diviser le coefficient de J par la somme des coefficients, $5 + 2$.

EXERCICE 66 · DEFI

Le milieu de deux barycentres

Soient A, B, C et D quatre points distincts, I le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 2)$, J le barycentre de $(C, 1)$ et $(D, 3)$, et K le milieu de $[IJ]$. Le point K vérifie $12\overrightarrow{KA} + 8\overrightarrow{KB} + 5\overrightarrow{KC} + d\overrightarrow{KD} = \vec{0}$. Déterminer le réel d.

Donne le réel d.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis : $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = 5\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = 4\overrightarrow{KJ}$.
2. K est le milieu de $[IJ]$: $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$. Il faut donc le même coefficient devant $\overrightarrow{KI}$ et devant $\overrightarrow{KJ}$.
3. Multiplie la première égalité par 4 et la seconde par 5.

CORRECTION

Réduire — On réduit chaque paire avec son barycentre.

$3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = 5\overrightarrow{KI}$; $\overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = 4\overrightarrow{KJ}$

Le même coefficient — On multiplie la première égalité par 4 et la seconde par 5 : les deux donnent 20.

$12\overrightarrow{KA} + 8\overrightarrow{KB} = 20\overrightarrow{KI}$; $5\overrightarrow{KC} + 15\overrightarrow{KD} = 20\overrightarrow{KJ}$

Le milieu — On ajoute : $20\left(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ}\right) = \vec{0}$ car K est le milieu de $[IJ]$.

$12\overrightarrow{KA} + 8\overrightarrow{KB} + 5\overrightarrow{KC} + 15\overrightarrow{KD} = \vec{0}$

$d = 15$: pour réunir deux barycentres en leur milieu, on rend égales les sommes de leurs coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Tu as gardé le coefficient de D dans J. Il faut multiplier les coefficients de C et de D par 5, pour que J porte 20 comme I.

`12` → On multiplie les coefficients de C et de D par 5 (le coefficient de C devient 5), pas par 4.

EXERCICE 67 · DEFI

Une sécante dans un triangle

Soit ABC un triangle, P le symétrique de B par rapport à A et Q le milieu de $[BC]$. La droite (PQ) coupe la droite (AC) en R. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 1/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris P comme barycentre de $(A, 2)$ et $(B, -1)$, et Q comme barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$.
2. Pour tout point M, ajoute $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MQ}$: le point B disparaît.
3. Le barycentre R de $(A, 2)$ et $(C, 1)$ est alors aussi le barycentre de $(P, 1)$ et $(Q, 2)$.

CORRECTION

Le point P — A est le milieu de $[BP]$, donc $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB}$.

P est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, -1)$

Additionner — Pour tout point M, on ajoute les deux réductions.

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MQ}$$

Le point commun — Soit R' le barycentre de $(A, 2)$ et $(C, 1)$. Avec $M = R'$, le premier membre est nul : R' est le barycentre de $(P, 1)$ et $(Q, 2)$, donc il est sur (PQ) et sur (AC) : c'est R.

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$k = \frac{1}{3}$: en choisissant des coefficients qui font disparaître un point, on trouve un barycentre commun à deux droites.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/3` → R est le barycentre de $(A, 2)$ et $(C, 1)$: il est plus près de A. En partant de A, le numérateur est le coefficient de C.

`1/2` / `0.5` → R n'est pas le milieu de $[AC]$: écris P et Q comme barycentres et fais disparaître le point B.

EXERCICE 68 · PRATIQUE

Un rayon donné par un vecteur constant

Soient A et B deux points tels que $AB = 10$, et G le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 2)$. L'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ soit égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ est un cercle de centre G. Soit r le rayon de ce cercle. Calculer r.

Donne le rayon r.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ avec le point G.
2. Le vecteur $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de M : il est égal à $\overrightarrow{BA}$.

CORRECTION

Réduire — La somme des coefficients vaut 5.

$$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$$

Le vecteur constant — Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}$.

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$$

Les normes — On égale les normes.

$$5MG=AB=10 \iff MG=2$$

Le rayon vaut 2 : une somme de coefficients nulle donne un vecteur constant, et la norme de ce vecteur est une longueur connue.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 est la norme de $5\overrightarrow{MG}$. Le rayon est la distance MG : il faut diviser par 5.

`4` → 4 est la distance AG. Le rayon se lit sur l'égalité $5MG=10$.

EXERCICE 69 · DEFI

Une médiatrice qui coupe la droite (AB)

Soient A et B deux points tels que $AB=9$. L'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ soit égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ est une droite, qui coupe la droite (AB) en un point K. Calculer la distance AK.

Donne la distance AK.

Réponse attendue : `9/2` — aussi acceptées : `4.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Introduis G, barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$, et H, barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$.
2. L'égalité devient $3MG=3MH$: c'est la médiatrice de $[GH]$.
3. Calcule AG et AH, puis la position du milieu de $[GH]$.

CORRECTION

Réduire — Les deux sommes de coefficients valent 3.

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG} \quad ; \quad \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MH}$$

L'ensemble — $3MG=3MH \iff MG=MH$: l'ensemble est la médiatrice de $[GH]$, perpendiculaire à (AB) au milieu K de $[GH]$.

$$MG=MH$$

Les positions — $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, donc $AG=3$ et $AH=6$.

$$AK=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}$$

$AK = \dfrac{9}{2}$: la droite est la médiatrice de $[GH]$, qui est aussi celle de $[AB]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est la distance AG. La droite est la médiatrice de $[GH]$: elle coupe (AB) au milieu de $[GH]$.

6 → 6 est la distance AH. Il faut le milieu de $[GH]$.

EXERCICE 70 · PRATIQUE

Un point de l'ensemble ?

Soient A et B deux points tels que $AB = 8$, et G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ soit égale à 24. Le point A appartient-il à $\mathcal{E}$?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui il appartient a e · oui a appartient a e · oui il est sur le cercle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon 6, puisque la norme vaut $4MG$.
2. Calcule la distance AG et compare-la au rayon.

CORRECTION

L'ensemble — La somme des coefficients vaut 4.

$$\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 4MG = 24 \iff MG = 6$$

La distance AG — $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

$$AG = \frac{3}{4} \times 8 = 6$$

Oui : $AG = 6$, le rayon du cercle. On peut aussi remplacer M par A : $\left\|3\overrightarrow{AB}\right\| = 24$.

PIÈGES ANTICIPÉS

non → Calcule AG : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, donc $AG = 6$, qui est exactement le rayon.

EXERCICE 71 · DEFI

Le cercle d'un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 8$, et G son centre de gravité. L'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un cercle de centre G. Soit r le rayon de ce cercle. Calculer la valeur exacte de r.

Donne la valeur exacte du rayon.

Réponse attendue : `10/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de gravité réduit la somme des trois vecteurs : $3\overrightarrow{MG}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ ne dépend pas de M : c'est $\overrightarrow{CB}$.
3. Calcule BC avec le théorème de Pythagore.

CORRECTION

La première somme — G est l'isobarycentre de A, B et C.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

Le vecteur constant — La relation de Chasles donne $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$, et le théorème de Pythagore donne BC.

$$BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Le rayon — On égale les normes.

$$3MG = 10 \iff MG = \frac{10}{3}$$

Le rayon vaut $\frac{10}{3}$. Ce cercle passe d'ailleurs par A : $GA = \frac{2}{3}$ de la médiane, qui vaut 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 est la norme de $3\overrightarrow{MG}$. Le rayon est la distance MG : il faut diviser par 3.

`3.33 / 3.3 / 3.333` → On demande la valeur exacte : $\frac{10}{3}$, sans arrondir.

EXERCICE 72 · BASE

Trois points sur une droite graduée

Sur une droite graduée, les points A, B et C ont pour abscisses 2, 5 et 11. Le point G est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 3)$. Calculer l'abscisse x_G du point G.

Donne l'abscisse x_G.

Réponse attendue : `15/2` — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse du barycentre est la moyenne des abscisses, pondérée par les coefficients.
2. Divise par la somme des coefficients, $1 + 2 + 3$.

CORRECTION

La moyenne pondérée — On multiplie chaque abscisse par son coefficient et on divise par la somme des coefficients.

$$x_G = \frac{2 + 10 + 33}{6} = \frac{45}{6} = 7{,}5$$

L'abscisse de G est $7{,}5$: sur une droite graduée, un barycentre se calcule comme une moyenne avec coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Tu as fait la moyenne sans les coefficients. Chaque abscisse est multipliée par son coefficient.

45 → Il reste à diviser par la somme des coefficients, 6.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

Trois masses sur une règle

Une règle, graduée en centimètres et de masse négligeable, porte trois masses : 2 kilogrammes à la graduation 0, 1 kilogramme à la graduation 3 et 3 kilogrammes à la graduation 8. À quelle graduation faut-il la suspendre pour qu'elle reste en équilibre ?

Donne la graduation du point d'équilibre, en cm.

Réponse attendue : `9/2` — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point d'équilibre est le barycentre des trois points, affectés des masses.
2. Son abscisse est la moyenne des graduations, pondérée par les masses.

CORRECTION

Le barycentre — On pondère chaque graduation par sa masse.

$$x_G = \frac{2 \times 0 + 1 \times 3 + 3 \times 8}{2 + 1 + 3}$$

Le calcul — On divise par la masse totale, 6 kilogrammes.

$$x_G = \frac{27}{6} = 4{,}5$$

Il faut la suspendre à la graduation $4{,}5$: le point d'équilibre est attiré vers la masse la plus lourde.

PIÈGES ANTICIPÉS

`11/3` → Tu as fait la moyenne des graduations sans les masses. Chaque graduation est multipliée par sa masse.

27 → Il reste à diviser par la somme des masses, 6.

EXERCICE 74 · BASE

Le coefficient de AB

Soient A, B et C trois points non alignés et G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, 3)$. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ s'écrit $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Déterminer le réel x.

Donne le réel x.

Réponse attendue : `-1/4` — aussi acceptées : -0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On a $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.
2. La somme des trois coefficients vaut $2 - 1 + 3$.

CORRECTION

La somme — La somme des coefficients n'est pas nulle.

$2 + (-1) + 3 = 4$

La formule — Le coefficient de B sur la somme des coefficients.

$\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$x = -\frac{1}{4}$: le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ est celui de B, divisé par la somme des trois coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/4 / 0.25` → Le coefficient de B est négatif : x l'est aussi.

`-1/2 / -0.5` → On divise par la somme des trois coefficients, y compris celui de A : $2 - 1 + 3 = 4$.

`3/4 / 0.75` → $\frac{3}{4}$ est le coefficient de $\overrightarrow{AC}$. Le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ vient de celui de B.

EXERCICE 75 · BASE

Le barycentre existe-t-il ?

Soient A, B et C trois points non alignés. Existe-t-il un barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, -5)$?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non il n'existe pas · non, il n'existe pas · non la somme est nulle · non, la somme est nulle · non la somme des coefficients est nulle · non, la somme des coefficients est nulle · non il n'y a pas de barycentre · non, il n'y a pas de barycentre · non le barycentre n'existe pas · non, le barycentre n'existe pas · non pas de barycentre · non, pas de barycentre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le barycentre de trois points pondérés existe lorsque la somme des coefficients n'est pas nulle.
2. Calcule $2 + 3 + (-5)$.

CORRECTION

La somme — La somme des coefficients est nulle.

$2 + 3 + (-5) = 0$

Conclure — Le vecteur $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$ ne dépend alors pas de M : aucun point ne l'annule, puisque A, B et C ne sont pas alignés.

pas de barycentre

Non : avec une somme de coefficients nulle, il n'y a pas de barycentre. On vérifie toujours cette somme d'abord.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui` → La somme des coefficients, $2 + 3 - 5$, est nulle : le barycentre n'existe pas.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Un barycentre qui n'existe pas

Soient A, B et C trois points non alignés et m un réel. Déterminer la valeur de m pour laquelle les points pondérés (A, m), $(B, 2)$ et $(C, -5)$ n'ont pas de barycentre.

Donne le réel m.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le barycentre n'existe pas lorsque la somme des coefficients est nulle.
2. Résous $m + 2 - 5 = 0$.

CORRECTION

La condition — La somme des coefficients doit être nulle.

$$m + 2 + (-5) = 0 \iff m = 3$$

$m = 3$: pour toute autre valeur de m, le barycentre existe.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → Vérifie : $-3 + 2 - 5 = -6$, qui n'est pas nul. Il faut $m + 2 - 5 = 0$.

-7 → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $m + 2 + (-5)$, et non $m + 2 + 5$.

EXERCICE 77 · PRATIQUE

D'une décomposition à un barycentre

Soient A, B et C trois points non alignés et G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Le point G est le barycentre des points pondérés (A, a), $(B, 3)$ et $(C, 2)$. Déterminer le réel a.

Donne le réel a.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour le barycentre de (A, a), $(B, 3)$ et $(C, 2)$: $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{a+5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{a+5}\overrightarrow{AC}$.
2. Égale le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ à $\frac{1}{2}$, puis vérifie celui de $\overrightarrow{AC}$.

CORRECTION

La formule — La somme des coefficients vaut $a + 5$.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{a+5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{a+5}\overrightarrow{AC}$$

Le coefficient de AB — On égale à $\frac{1}{2}$.

$$\frac{3}{a+5} = \frac{1}{2} \iff a + 5 = 6 \iff a = 1$$

Vérifier — Le coefficient de $\overrightarrow{AC}$ vaut alors $\frac{2}{6}$.

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$a = 1$: G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 3)$ et $(C, 2)$. On identifie les coefficients de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est la somme des trois coefficients, $a + 5$. Le coefficient de A vaut $6 - 5$.

0 → Avec $a = 0$, la somme vaut 5 et le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ serait $\frac{3}{5}$, pas $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 78 · RAISONNEMENT

Les coordonnées d'un barycentre

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(1; 2)$, $B(4; -1)$ et $C(-2; 5)$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, -1)$. Calculer l'abscisse x_G du point G.

Donne l'abscisse x_G.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis la somme au point O : $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OG}$.
2. L'abscisse de G est donc $\dfrac{2x_A + 3x_B - x_C}{4}$.

CORRECTION

Réduire au point O — La somme des coefficients vaut $2 + 3 - 1 = 4$.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$$

L'abscisse — On remplace par les abscisses.

$$x_G = \frac{2 \times 1 + 3 \times 4 - (-2)}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$x_G = 4$: les coordonnées d'un barycentre sont les moyennes des coordonnées, pondérées par les coefficients. De même, $y_G = \dfrac{2 \times 2 + 3 \times (-1) - 5}{4} = -1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

16 → Il reste à diviser par la somme des coefficients, 4.

3 → Le coefficient de C est -1 : on retranche $x_C = -2$, c'est-à-dire qu'on ajoute 2.

8/3 → On divise par la somme des coefficients avec leurs signes, $2 + 3 - 1 = 4$, et non 6.

EXERCICE 79 · BASE

Réduire une somme de trois vecteurs

Soient A, B et C trois points et G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -3)$ et $(C, 5)$. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MG}$. Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La réduction s'écrit $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.
2. Ajoute les coefficients avec leurs signes.

CORRECTION

La réduction — Le réel cherché est la somme des coefficients.

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = (1-3+5)\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$

$k = 3$: comme pour deux points, on réduit avec la somme des coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → On ajoute les coefficients avec leurs signes : $1 - 3 + 5 = 3$.

EXERCICE 80 · BASE

Le centre de gravité

Soit ABC un triangle de centre de gravité G. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = k\overrightarrow{GC}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : -1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de gravité est l'isobarycentre : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
2. Fais passer le vecteur $\overrightarrow{GC}$ dans l'autre membre.

CORRECTION

L'isobarycentre — G est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Isoler — On retranche le vecteur $\overrightarrow{GC}$.

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}$

$k = -1$: la somme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{GC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → En faisant passer $\overrightarrow{GC}$ dans l'autre membre, on change son signe : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}$.

2 / -2 → $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$ avec I milieu de $[AB]$; mais en fonction de $\overrightarrow{GC}$, c'est $-\overrightarrow{GC}$.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Une norme pour trois points

Soient A, B et C trois points, G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,3)$, et M un point tel que $MG = 2$. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.

Donne la norme.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis la somme avec le point G.
2. La norme du vecteur $6\overrightarrow{MG}$ est $6MG$.

CORRECTION

Réduire — La somme des coefficients vaut 6.

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$$

La norme — On multiplie la distance MG par 6.

$$6 \times 2 = 12$$

La norme vaut 12 : réduire la somme ramène tout à la distance MG.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 est la distance MG. La somme vaut six fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.

`6` → Le barycentre n'est pas l'isobarycentre : la somme des coefficients vaut $1 + 2 + 3 = 6$, pas 3.

EXERCICE 82 · DEFI

Le centre de gravité d'un quadrilatère

Soit $ABCD$ un quadrilatère, G l'isobarycentre des points A, B, C et D (c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$), et G_1 le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{DG} = k\overrightarrow{DG_1}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `3/4` — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe A, B et C : leur isobarycentre G_1 porte la somme $1 + 1 + 1$.
2. G est alors le barycentre de $(G_1, 3)$ et $(D, 1)$.

CORRECTION

Regrouper — Au point G, les trois premiers vecteurs se réduisent avec G_1.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_1}$$

Deux points — La relation devient $3\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$: G est le barycentre de $(G_1, 3)$ et $(D, 1)$.

$$\overrightarrow{DG} = \frac{3}{3+1}\overrightarrow{DG_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG_1}$$

$k = \dfrac{3}{4}$: le centre de gravité du quadrilatère est sur le segment $[DG_1]$, aux trois quarts à partir de D.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/4 / 0.25` → En partant de D, c'est le coefficient de G_1, 3, qui est au numérateur.

2/3 → $\frac{2}{3}$ vaut pour un triangle. Ici G_1 porte trois points, et D un seul.

EXERCICE 83 · BASE

La relation des deux triangles

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles de centres de gravité respectifs G et G'. On sait que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{GG'}$. Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Décompose chaque vecteur avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$.
2. Ajoute les trois égalités : que valent $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}$?

CORRECTION

Chasles — On passe par G et par G' dans chacun des trois vecteurs.

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$

Additionner — Les deux sommes de trois vecteurs sont nulles, puisque G et G' sont des centres de gravité. Il reste trois fois le vecteur $\overrightarrow{GG'}$.

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

$k = 3$: deux triangles ont le même centre de gravité si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Chacun des trois vecteurs fournit un vecteur $\overrightarrow{GG'}$: il y en a trois.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

Trois symétriques

Soit ABC un triangle. On note A' le symétrique de A par rapport à B, B' le symétrique de B par rapport à C et C' le symétrique de C par rapport à A. Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont-ils le même centre de gravité ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui ils ont le meme centre de gravite · oui le meme centre de gravite · oui ils ont le meme · oui le meme · oui c'est le meme

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux triangles ont le même centre de gravité si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.
2. B est le milieu de $[AA']$: $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

Les trois vecteurs — Chaque symétrique double un vecteur côté.

$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CA}$

La somme — La relation de Chasles fait le tour du triangle.

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \vec{0}$

Oui : la somme des trois vecteurs est nulle, donc $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ et $G = G'$.

PIÈGES ANTICIPÉS

non → Calcule $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$: c'est $2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$, qui est le vecteur nul.

EXERCICE 85 · DEFI

Deux centres de gravité dans un parallélogramme

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et D le point tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. On note G et G' les centres de gravité des triangles ABC et DCB. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{GG'} = k\overrightarrow{AI}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Associe les sommets deux par deux : A avec D, B avec C, C avec B, et utilise $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
2. La somme devient $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$.
3. $ABDC$ est un parallélogramme : sa diagonale $[AD]$ passe par I, et $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$.

CORRECTION

La relation — On associe A à D, B à C et C à B.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{GG'}$

Simplifier — Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont opposés.

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GG'}$

Le parallélogramme — $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$: $ABDC$ est un parallélogramme, de centre I.

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI} \implies \overrightarrow{GG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$k = \frac{2}{3}$: la relation $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ marche pour n'importe quel ordre des sommets, pourvu qu'on associe chaque sommet à un sommet de l'autre triangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est le double du vecteur $\overrightarrow{AI}$: I est le milieu de la diagonale $[AD]$.

2 → $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$, mais $\overrightarrow{AD}$ vaut trois fois $\overrightarrow{GG'}$: il faut diviser par 3.

Maths à la carte — ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 86 · BASE

Regrouper deux points

Soient A, B et C trois points, G le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$, et I le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 2)$. Le point G est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et (I, k). Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quand on remplace deux points par leur barycentre, celui-ci reçoit la somme de leurs coefficients.
2. Ici, I remplace $(B, 1)$ et $(C, 2)$.

CORRECTION

Le barycentre partiel — I porte la somme des coefficients de B et de C.

$k = 1 + 2 = 3$

$k = 3$: G est le barycentre de $(A, 3)$ et $(I, 3)$, c'est-à-dire le milieu de $[AI]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → I remplace les deux points B et C : il porte la somme de leurs coefficients.

1 → I remplace les deux points B et C : il porte la somme $1 + 2$.

EXERCICE 87 · PRATIQUE

Un coefficient négatif à regrouper

Soient A, B et C trois points non alignés, G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, -4)$, et I le milieu de $[AB]$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{IG} = k\overrightarrow{IC}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace $(A, 1)$ et $(B, 1)$ par leur milieu I, affecté du coefficient 2.
2. G est alors le barycentre de $(I, 2)$ et $(C, -4)$.

CORRECTION

Regrouper A et B — Le milieu I porte la somme $1 + 1$.

G est le barycentre de $(I, 2)$ et $(C, -4)$

La formule — Le coefficient de C sur la somme des coefficients, -2.

$$\overrightarrow{IG} = \frac{-4}{2-4}\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IC}$$

$k = 2$: C est le milieu de $[IG]$. Le barycentre partiel ramène trois points à deux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → Le coefficient de C et la somme sont tous les deux négatifs : leur quotient est positif.

`-4` → Il faut diviser le coefficient de C par la somme des coefficients, $2 - 4 = -2$.

EXERCICE 88 · PRATIQUE

Une moyenne en deux temps

Un élève passe trois devoirs. Les deux premiers, de coefficient 1 chacun, ont pour moyenne 13. Le troisième, de coefficient 3, est noté 7. Calculer sa moyenne générale.

Donne la moyenne.

Réponse attendue : `47/5` — aussi acceptées : 9.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux premiers devoirs peuvent être remplacés par leur moyenne, affectée de la somme de leurs coefficients.
2. La moyenne 13 reçoit donc le coefficient $1 + 1 = 2$.

CORRECTION

Regrouper — Les deux premiers devoirs comptent comme une note 13 de coefficient 2.

$$\frac{2 \times 13 + 3 \times 7}{2 + 3}$$

Le calcul — On divise par la somme des coefficients.

$$\frac{26 + 21}{5} = \frac{47}{5} = 9{,}4$$

La moyenne est $9{,}4$: c'est le barycentre partiel, appliqué à des notes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`17/2 / 8.5` → La moyenne 13 remplace deux devoirs : elle porte la somme de leurs coefficients, 2, et non 1.

`10` → Tu as fait la moyenne sans les coefficients. Le troisième devoir compte triple.

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

Sur la médiane

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 3)$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `3/4` — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B et C ont le même coefficient : leur barycentre est le milieu I.
2. I porte la somme $3 + 3$: G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(I, 6)$.

CORRECTION

Regrouper B et C — Le milieu I porte la somme des coefficients de B et de C.

G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(I, 6)$

La formule — Le coefficient de I sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{6}{2+6}\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$$

$k = \frac{3}{4}$: G est sur la médiane issue de A, aux trois quarts à partir de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/4 / 0.25` → En partant de A, c'est le coefficient de I, 6, qui est au numérateur.

`3/5 / 0.6` → I remplace deux points : il porte $3 + 3 = 6$, pas 3.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Une figure partagée en cinq

Soit ABC un triangle. Le côté $[BC]$ est partagé en cinq parts égales, et M est le deuxième point de partage à partir de B, de sorte que $BM = \frac{2}{5}BC$. Le point G est le point du segment $[AM]$ tel que $AG = \frac{1}{3}AM$. Le point G est le barycentre des points pondérés (A, a), $(B, 3)$ et $(C, 2)$. Déterminer le réel a.

Donne le réel a.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est le barycentre de $(B, 3)$ et $(C, 2)$: il porte la somme 5.
2. $AG = \frac{1}{3}AM$: G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(M, 1)$.
3. Multiplie ces coefficients pour que M porte 5.

CORRECTION

Le point M — $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$: M est plus près de B, qui reçoit le plus grand coefficient.

M est le barycentre de $(B, 3)$ et $(C, 2)$

Le point G — $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$: G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(M, 1)$, ou encore, en multipliant par 5, de $(A, 10)$ et $(M, 5)$.

G est le barycentre de $(A, 10)$ et $(M, 5)$

Conclure — M porte la somme $3 + 2 = 5$ des coefficients de B et de C.

$a = 10$

$a = 10$: on lit chaque partage comme un barycentre de deux points, puis on accorde les coefficients du point commun M.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(M, 1)$, mais M doit porter $3 + 2 = 5$: il faut tout multiplier par 5.

`5/2` / `2.5` → G est plus près de A que de M : c'est A qui reçoit le plus grand coefficient.

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

Où la droite (AG) coupe le côté

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 5)$. La droite (AG) coupe le côté $[BC]$ en M. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `5/7`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le barycentre M' de $(B, 2)$ et $(C, 5)$ est sur (BC).
2. G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(M', 7)$: M' est aussi sur (AG), donc $M' = M$.

CORRECTION

Regrouper B et C — Soit M' le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, 5)$; G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(M', 7)$.

$M' \in (BC) \quad ; \quad M' \in (AG)$

Le point M — Les droites (AG) et (BC) se coupent en un seul point : $M' = M$.

$\overrightarrow{BM} = \dfrac{5}{2+5}\overrightarrow{BC} = \dfrac{5}{7}\overrightarrow{BC}$

$k = \dfrac{5}{7}$: la droite (AG) coupe (BC) au barycentre de B et C, affectés de leurs coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/7` → En partant de B, c'est le coefficient de C, 5, qui est au numérateur.

`5/8` / `0.625` → Le point M est le barycentre de B et de C seulement : on divise par $2 + 5$.

EXERCICE 92 · RAISONNEMENT

Un point hors du côté

Soit ABC un triangle, M le point de la droite (BC) tel que C soit le milieu de $[BM]$, et G le milieu de $[AM]$. Le point G est le barycentre des points pondérés (A, a), $(B, -1)$ et $(C, 2)$. Déterminer le réel a.

Donne le réel a.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$: écris M comme barycentre de $(B, -1)$ et $(C, 2)$.
2. M porte la somme $-1 + 2 = 1$, et G est le milieu de $[AM]$.

CORRECTION

Le point M — $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} = \dfrac{2}{-1+2}\overrightarrow{BC}$.

M est le barycentre de $(B, -1)$ et $(C, 2)$

Le point G — G est le milieu de $[AM]$, et M porte $-1 + 2 = 1$.

G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(M, 1)$

Conclure — On remplace $(M, 1)$ par $(B, -1)$ et $(C, 2)$.

$a = 1$

$a = 1$: un point hors du segment se lit avec un coefficient négatif, et le barycentre partiel fait le reste.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → G est le milieu de $[AM]$: A et M ont le même coefficient, et M porte $-1 + 2 = 1$.

`-1` → M porte la somme $-1 + 2 = 1$: A reçoit le même coefficient, positif.

EXERCICE 93 · RAISONNEMENT

Trois droites et un point commun

Soit ABC un triangle, I le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 3)$, J le barycentre de $(A, 2)$ et $(C, 3)$, et K le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$. Les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G, barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 3)$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : `2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe B et C : I porte la somme $1 + 3$.
2. G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(I, 4)$.

CORRECTION

Regrouper B et C — I porte la somme des coefficients de B et de C.

G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(I, 4)$

La formule — Le coefficient de I sur la somme des coefficients.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{4}{2+4}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

$k = \dfrac{2}{3}$: en regroupant de trois façons, on voit que G est sur chacune des trois droites.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → En partant de A, c'est le coefficient de I, 4, qui est au numérateur.

`1/2 / 0.5` → Tu as pris le seul coefficient de C. Le point I remplace B et C : il porte la somme $1 + 3 = 4$.

EXERCICE 94 · DEFI

Deux céviennes, une troisième

Soit ABC un triangle, P le point de $[AB]$ tel que $AP = \frac{1}{4}AB$ et Q le point de $[AC]$ tel que $AQ = \frac{2}{3}AC$. Les droites (BQ) et (CP) se coupent en G, et la droite (AG) coupe $[BC]$ en R. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BR} = k\overrightarrow{BC}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 6/7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris P comme barycentre de $(A,3)$ et $(B,1)$, et Q comme barycentre de $(A,1)$ et $(C,2)$.
2. Multiplie les coefficients de Q pour que A porte 3 dans les deux : $(A,3)$ et $(C,6)$.
3. Le barycentre de $(A,3)$, $(B,1)$ et $(C,6)$ est sur (CP) et sur (BQ) : c'est G.

CORRECTION

Les points P et Q — On lit les partages, et on accorde le coefficient de A.

$P : (A,3),(B,1) \quad ; \quad Q : (A,3),(C,6)$

Le point G — Le barycentre G' de $(A,3)$, $(B,1)$ et $(C,6)$ est celui de $(P,4)$ et $(C,6)$, et celui de $(Q,9)$ et $(B,1)$: il est sur (CP) et sur (BQ).

$G' = G$

Le point R — En regroupant B et C, G est sur la droite qui joint A au barycentre de $(B,1)$ et $(C,6)$: c'est R.

$\overrightarrow{BR} = \frac{6}{1+6}\overrightarrow{BC} = \frac{6}{7}\overrightarrow{BC}$

$k = \frac{6}{7}$: on choisit des coefficients qui conviennent aux deux droites données, puis on regroupe autrement.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/7 → En partant de B, c'est le coefficient de C, 6, qui est au numérateur.

2/3 → Avant de regrouper, il faut le même coefficient pour A dans P et dans Q : multiplie les coefficients de Q par 3.

EXERCICE 95 · DEFI **Faire passer une droite par G**

Soit ABC un triangle, I le barycentre de $(B,1)$ et $(C,2)$, et m un réel, $m \neq -5$. On note G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, (B,m) et $(C,4)$. Déterminer m pour que G appartienne à la droite (AI).

Donne le réel m.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe B et C : la droite (AG) coupe (BC) au barycentre de (B,m) et $(C,4)$.
2. Ce point doit être I : les coefficients $(m,4)$ doivent être proportionnels à $(1,2)$.

CORRECTION

Regrouper B et C — Si $m \neq -4$, G est le barycentre de A et du barycentre J de (B, m) et $(C, 4)$: la droite (AG) coupe (BC) en J.

$$G \in (AI) \iff J = I$$

Proportionnalité — $J = I$ lorsque $(m, 4)$ est proportionnel à $(1, 2)$.

$$\frac{m}{1} = \frac{4}{2} \iff m = 2$$

Vérifier — La somme des coefficients vaut $1 + 2 + 4 = 7 \neq 0$.

$G : (A, 1), (B, 2), (C, 4)$

$m = 2$: avec $(B, 2)$ et $(C, 4)$, qui donnent le même barycentre que $(B, 1)$ et $(C, 2)$, le point G est sur la droite (AI).

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → Avec $m = 8$, le barycentre de $(B, 8)$ et $(C, 4)$ est plus près de B. Or I est plus près de C : il faut $(m, 4)$ proportionnel à $(1, 2)$.

1 → Il ne suffit pas de recopier le coefficient de B dans I : C porte 4, il faut $(m, 4)$ proportionnel à $(1, 2)$.

EXERCICE 96 · DEFI

Trois points alignés dans un triangle

Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, P le point tel que B soit le milieu de $[AP]$, et Q le point de $[AC]$ tel que $AQ = \frac{2}{3}AC$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{A'P} = k\overrightarrow{A'Q}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris P comme barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -2)$, et Q comme barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 2)$.
2. Réduis au point A' : $\overrightarrow{A'A} - 2\overrightarrow{A'B} = -\overrightarrow{A'P}$ et $\overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'Q}$.
3. Retranche les deux égalités : $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

CORRECTION

Le point P — $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} = \frac{-2}{1-2}\overrightarrow{AB}$.

P est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -2)$

Réduire au point A' — La somme des coefficients vaut -1 pour P et 3 pour Q.

$$\overrightarrow{A'A} - 2\overrightarrow{A'B} = -\overrightarrow{A'P} \quad ; \quad \overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'Q}$$

Retrancher — On retranche la première égalité de la seconde ; A' est le milieu de $[BC]$, donc $2\overrightarrow{A'C} + 2\overrightarrow{A'B} = \vec{0}$.

$$3\overrightarrow{A'Q} + \overrightarrow{A'P} = \vec{0} \iff \overrightarrow{A'P} = -3\overrightarrow{A'Q}$$

$k = -3$: les vecteurs $\overrightarrow{A'P}$ et $\overrightarrow{A'Q}$ sont colinéaires, donc A', P et Q sont alignés, avec A' entre P et Q.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $3\overrightarrow{A'Q} + \overrightarrow{A'P} = \vec{0}$: les deux vecteurs sont de sens contraires, le coefficient est négatif.

-1/3 → $-\dfrac{1}{3}$ donne $\overrightarrow{A'Q}$ en fonction de $\overrightarrow{A'P}$. On demande le contraire.

EXERCICE 97 · PRATIQUE

Écrire un point comme barycentre

Soient A et B deux points distincts et P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB}$. Le point P est le barycentre des points pondérés (A, a) et $(B, 5)$. Déterminer le réel a.

Donne le réel a.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule donne $\overrightarrow{AP} = \dfrac{5}{a+5}\overrightarrow{AB}$.
2. Résous $\dfrac{5}{a+5} = \dfrac{5}{2}$.

CORRECTION

La formule — Le coefficient de B sur la somme des coefficients.

$$\frac{5}{a+5} = \frac{5}{2}$$

Résoudre — Les numérateurs sont égaux, donc les dénominateurs aussi.

$a + 5 = 2 \iff a = -3$

$a = -3$: P est hors du segment, au-delà de B, donc les coefficients sont de signes contraires.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Avec $a = 3$, $\overrightarrow{AP} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}$: P serait sur le segment. Il est au-delà de B.

2 → 2 est la somme des coefficients, $a + 5$. Il reste à retrancher 5.

EXERCICE 98 · PRATIQUE

La distance au centre de gravité

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 9 et G son centre de gravité. Calculer la valeur exacte de la distance GA.

Donne la valeur exacte de GA.

Réponse attendue : `3*sqrt(3)` — aussi acceptées : sqrt(27)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane, qui est aussi la hauteur, à partir du sommet.

CORRECTION

La hauteur — La médiane issue de A est aussi une hauteur.

$$AA' = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Les deux tiers — Le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane à partir du sommet.

$$GA = \frac{2}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$GA = 3\sqrt{3}$: dans un triangle équilatéral, le centre de gravité est aussi le centre du cercle circonscrit, de rayon $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(3)/2` → C'est la hauteur entière. Le centre de gravité est aux deux tiers de la hauteur à partir du sommet.

`3*sqrt(3)/2` → C'est la distance de G au côté $[BC]$, le tiers de la hauteur. À partir du sommet, c'est les deux tiers.

`5.2 / 5.19 / 5.196` → On demande la valeur exacte : $3\sqrt{3}$, sans arrondir.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

Un sommet dans le cercle ?

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 12 et G son centre de gravité. L'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit égale à 18 est un cercle de centre G. Le sommet A est-il à l'intérieur de ce cercle ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non il est a l'exterieur · non, il est a l'exterieur · non a est a l'exterieur · non, a est a l'exterieur · non il est dehors · non, il est dehors

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La norme vaut $3MG$: calcule le rayon du cercle.
2. Calcule GA, les deux tiers de la hauteur, et compare au rayon.

CORRECTION

Le rayon — G est l'isobarycentre : la somme vaut $3\overrightarrow{MG}$.

$$3MG = 18 \iff MG = 6$$

La distance GA — La hauteur mesure $6\sqrt{3}$; on en prend les deux tiers.

$$GA = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Comparer — On compare les carrés : $48 > 36$.

$$4\sqrt{3} > 6$$

Non : $GA = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$ dépasse le rayon 6, donc A est à l'extérieur du cercle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui` → Compare $GA = 4\sqrt{3}$ au rayon 6 : $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$ dépasse 36.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT

Une corde du cercle

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6 et G son centre de gravité. L'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit égale à $3\sqrt{7}$ est un cercle de centre G, qui coupe le côté $[BC]$ en deux points P et Q. Calculer la longueur PQ.

Donne la longueur PQ.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La norme vaut $3MG$: calcule le rayon du cercle.
2. Le milieu I de $[BC]$ est le pied de la hauteur issue de A, et GI est le tiers de cette hauteur.
3. Dans le triangle GIP, rectangle en I, applique le théorème de Pythagore.

CORRECTION

Le rayon — G est l'isobarycentre : la somme vaut $3\overrightarrow{MG}$.

$3MG = 3\sqrt{7} \iff MG = \sqrt{7}$

La distance GI — La hauteur mesure $\dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, et G est au tiers de la hauteur à partir de I.

$GI = \dfrac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

Pythagore — Le triangle GIP est rectangle en I, et $GP = \sqrt{7}$ est un rayon.

$IP = \sqrt{7 - 3} = 2$

La corde — La droite (GI) est perpendiculaire à la corde $[PQ]$: elle passe par son milieu, I.

$PQ = 2 \times 2 = 4$

$PQ = 4$: la réduction donne le rayon, et la position de G sur la hauteur donne sa distance au côté.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(7)` → $\sqrt{7}$ est le rayon du cercle. La corde $[PQ]$ se calcule avec la distance de G au côté $[BC]$ et le théorème de Pythagore.

`2` → 2 est la moitié de la corde : $IP = IQ = 2$, où I est le milieu de $[BC]$.

EXERCICE 101 · PRATIQUE

Retrouver un côté par la bissectrice

Dans un triangle ABC, on donne $AB = 6$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté $[BC]$ en M, avec $MB = 4$ et $MC = 6$. Calculer la longueur AC.

Donne la longueur AC.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le pied de la bissectrice vérifie $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$: M est le barycentre de (B, AC) et (C, AB).
2. Remplace les longueurs connues, puis fais le produit en croix.

CORRECTION

La bissectrice — Le pied de la bissectrice partage $[BC]$ dans le rapport des côtés adjacents.

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

Remplacer — On remplace les trois longueurs connues.

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{AC}$$

Le produit en croix — On isole AC.

$$AC = \frac{6 \times 6}{4} = 9$$

$AC = 9$: M, barycentre de $(B, 9)$ et $(C, 6)$, est plus près de B, car AC est plus grand que AB.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Tu as inversé le rapport : $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$, donc $AC = AB \times \frac{MC}{MB}$.

EXERCICE 102 · DEFI

Le centre du cercle inscrit et un côté

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$, et D le centre du cercle inscrit dans le triangle. La droite (CD) coupe le côté $[AB]$ en P. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel k.

Réponse attendue : 4/9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D est le barycentre de (A, BC), (B, AC) et (C, AB), soit $(A, 5)$, $(B, 4)$ et $(C, 3)$.
2. Regroupe A et B : leur barycentre est sur la droite (AB) et sur la droite (CD).

CORRECTION

Le centre du cercle inscrit — Chaque sommet reçoit la longueur du côté opposé.

$$D \text{ est le barycentre de } (A, 5), (B, 4) \text{ et } (C, 3)$$

Regrouper A et B — Soit P' le barycentre de $(A, 5)$ et $(B, 4)$: D est le barycentre de $(P', 9)$ et $(C, 3)$, donc P' est sur (CD) et sur (AB), et $P' = P$.

$$D \text{ est le barycentre de } (P, 9) \text{ et } (C, 3)$$

La formule — Le coefficient de B sur la somme des coefficients de A et de B.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{4}{5+4}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$$

$k = \dfrac{4}{9}$: (CP) est la bissectrice issue de C, et on retrouve $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{4}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/9` → En partant de A, c'est le coefficient de B, 4, qui est au numérateur.

`1/3` → Le point P est le barycentre de A et de B seulement : on divise par $5 + 4$, sans le coefficient de C.

`0.44 / 0.444 / 0.4` → On attend la valeur exacte : $\dfrac{4}{9}$, sans arrondir.

EXERCICE 103 · DEFI

Les coordonnées du centre du cercle inscrit

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(0;0)$, $B(14;0)$ et $C(5;12)$. Calculer l'abscisse x_D du centre D du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Donne l'abscisse x_D.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les longueurs des trois côtés : BC, AC et AB.
2. D est le barycentre de (A, BC), (B, AC) et (C, AB).
3. Son abscisse est la moyenne des abscisses, pondérée par ces longueurs.

CORRECTION

Les côtés — On calcule les distances dans le repère orthonormé.

$BC = \sqrt{81 + 144} = 15 \quad ; \quad AC = \sqrt{25 + 144} = 13 \quad ; \quad AB = 14$

Le barycentre — D est le barycentre de $(A, 15)$, $(B, 13)$ et $(C, 14)$; la somme vaut 42.

$$x_D = \frac{15 \times 0 + 13 \times 14 + 14 \times 5}{42}$$

Le calcul — On effectue.

$$x_D = \frac{182 + 70}{42} = \frac{252}{42} = 6$$

$x_D = 6$; de même $y_D = \dfrac{14 \times 12}{42} = 4$, qui est le rayon du cercle inscrit, tangent à l'axe des abscisses.

PIÈGES ANTICIPÉS

`19/3` → $\dfrac{19}{3}$ est l'abscisse du centre de gravité. Le centre du cercle inscrit est un barycentre pondéré par les côtés opposés.

`271/42` → Chaque sommet reçoit la longueur du côté **opposé** : A reçoit $BC = 15$, B reçoit $AC = 13$ et C reçoit $AB = 14$.
