— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Calcul dans IR

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum bech nfassrou m3a b3adhna le premier chapitre : calcul dans R. Bech nrajj3ou koll ma y5oss le calcul : les ensembles de nombres, les identités remarquables, les racines, les inégalités, la valeur absolue w les valeurs approchées. Bech nekhdmou 3la des exemples, w menhom ntalla3ou les règles. Yalla, nabdew.

عسلامة ! ليوم باش نفسّرو مع بعضنا le premier chapitre : calcul dans R . باش نراجعو كل ما يخصّ le calcul : les ensembles de nombres ، les identités remarquables ، les racines ، les inégalités ، la valeur absolue w les valeurs approchées . باش نخدمو على des exemples ، w منهم نطلّعو les règles . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Aujourd'hui, on va expliquer ensemble le premier chapitre : calcul dans R. Nous allons revoir tout ce qui touche au calcul : les ensembles de nombres, les identités remarquables, les racines, les inégalités, la valeur absolue et les valeurs approchées. Nous allons travailler sur des exemples, et en tirer les règles. Allez, on commence.

Ce chapitre ouvre l'année par le **calcul** : savoir où vit un nombre, le transformer, le comparer, l'encadrer, l'approcher.

On y apprend surtout en **travaillant** : des fractions aux ordres de grandeur, chaque section part d'exemples concrets et en dégage la règle qu'ils mettent en œuvre.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Situer un nombre dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

  > Situer un nombre parmi les naturels, les relatifs, les décimaux, les rationnels et les réels.
  > *Situer un nombre parmi les naturels, les relatifs, les décimaux, les rationnels et les réels.*

- Calculer avec des fractions, des pourcentages et des identités remarquables
  > Calculer avec des fractions, des pourcentages et des identités remarquables.
  > *Calculer avec des fractions, des pourcentages et des identités remarquables.*
- Comparer et encadrer des réels, et démontrer des inégalités
  > Comparer et encadrer des réels, et démontrer des inégalités.
  > *Comparer et encadrer des réels, et démontrer des inégalités.*
- Simplifier des expressions avec radicaux, développer et factoriser
  > Simplifier des expressions avec des racines, développer et factoriser.
  > *Simplifier des expressions avec des racines, développer et factoriser.*
- Utiliser la valeur absolue, les valeurs approchées et l'ordre de grandeur
  > Utiliser la valeur absolue, les valeurs approchées et l'ordre de grandeur.
  > *Utiliser la valeur absolue, les valeurs approchées et l'ordre de grandeur.*

---

1. ACTIVITÉ

Les ensembles de nombres

CE QU'IL DIT

3andna cinq ensembles, koll wa7ed dekhel elli ba3dou : les naturels, les relatifs, les décimaux, les rationnels w les réels. Entier naturel houwa relatif, relatif houwa décimal, décimal houwa rationnel, w rationnel houwa réel. Ama el 3aks mouch dima sa7i7 : racine carrée de cinq réel, ama mouch rationnel. W 9bal ma tsanef nombre, bassatou : racine carrée de trente-six hiya six, entier naturel.

عندنا cinq ensembles ، كل واحد داخل اللي بعدو : les naturels ، les relatifs ، les décimaux ، les rationnels w les réels . entier naturel هو relatif ، relatif هو décimal ، décimal هو rationnel ، w rationnel هو réel . أما العكس موش ديما صحيح : racine carrée de cinq réel ، أما موش rationnel . w قْبَلْ ما تصنّف nombre ، بسّطو : racine carrée de trente-six هي entier naturel ، six .

Nous avons cinq ensembles, chacun contenu dans le suivant : les naturels, les relatifs, les décimaux, les rationnels et les réels. Un entier naturel est un relatif, un relatif est un décimal, un décimal est un rationnel, et un rationnel est un réel. La réciproque n'est pas toujours vraie : racine carrée de cinq est réel, mais pas rationnel. Et avant de classer un nombre, simplifie-le : racine carrée de trente-six vaut six, c'est un entier naturel.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, $\mathbb{D}$ celui des décimaux, $\mathbb{Q}$ celui des nombres rationnels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

On rappelle qu'un **décimal** s'écrit $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, et qu'un **rationnel** s'écrit $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Chaque ensemble est contenu dans le suivant.

La réciproque est fausse à chaque étage : $-23 \in \mathbb{Z}$ mais $-23 \notin \mathbb{N}$; $\frac{2}{9} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{2}{9} \notin \mathbb{D}$; et un réel comme $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ou π n'est pas rationnel. Avant de classer un nombre, on le **simplifie** : $\sqrt{36} =$

6 et $\frac{27}{3} = 9$ sont des entiers naturels.

LES INCLUSIONS

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

EXEMPLE TRAITÉ

Pour chacun des nombres $-\frac{63}{7}, \frac{5}{8}, -\frac{2}{3}$ et $\sqrt{5}$, donne le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui le contient.

> Pour chacun des nombres $-\frac{63}{7}, \frac{5}{8}, -\frac{2}{3}$ et $\sqrt{5}$, dis s'il est entier naturel, entier relatif, décimal, rationnel, ou seulement réel.
>
> Pour chacun des nombres moins 63 sur 7, 5 sur 8, moins 2 sur 3 et racine carrée de 5, dis s'il est entier .naturel, entier relatif, décimal, rationnel, ou seulement réel

Simplifier — La fraction tombe juste : un entier négatif.

$-\frac{63}{7} = -9 \in \mathbb{Z}$

Un décimal — Le dénominateur $8 = 2^3$: la division s'arrête.

$\frac{5}{8} = 0{,}625 = \frac{625}{1000} \in \mathbb{D}$

Un rationnel — Le dénominateur 3 n'est fait ni de 2 ni de 5 : l'écriture décimale ne s'arrête jamais.

$-\frac{2}{3} = -0{,}666\ldots \in \mathbb{Q}$

Un réel — 5 n'est pas un carré parfait : $\sqrt{5}$ est irrationnel.

$\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

$-\frac{63}{7} \in \mathbb{Z}$; $\frac{5}{8} \in \mathbb{D}$; $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

> $-\frac{63}{7}$ est un entier relatif. $\frac{5}{8}$ est un décimal. $-\frac{2}{3}$ est un rationnel. $\sqrt{5}$ est un réel.
>
> moins 63 sur 7 est un entier relatif. 5 sur 8 est un décimal. moins 2 sur 3 est un rationnel. racine .carrée de 5 est un réel

À ne pas faire : $\sqrt{36} \notin \mathbb{N}$ — $\sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}$. Une racine carrée n'est pas forcément irrationnelle : on la calcule avant de classer le nombre.

À ne pas faire : $\frac{2}{9} \in \mathbb{D}$ — $\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots \notin \mathbb{D}$. Un rationnel n'est décimal que si sa forme irréductible a un dénominateur fait de 2 et de 5 seulement.

2. MÉTHODE

Calculer avec des fractions : chercher la structure

CE QU'IL DIT

Ki tal9a calcul twil, ma t7sbouch terme par terme : 9alleb 3la la structure mte3ou. Produit fih des facteurs un plus un sur k : koll facteur nektbouh (k plus un) sur k, w le numérateur mta3 koll facteur

yemchi m3a le dénominateur mta3 elli ba3dou. Ma yo93ed ken le dernier numérateur w le premier dénominateur.

كي تلقى calcul طويل ، ما تحسبوش : terme par terme قلّب على la structure متاعو . فيه produit des
كل facteur نكتبوه (k plus un) sur k ، w le numérateur : facteurs un plus un sur k
كل facteur متاع يمشي مع sur k ، w le numérateur (k plus un) نكتبوه facteur كل : facteurs un plus un sur k
متاع اللي بعدو . ما يقعد كان le dénominateur le dernier numérateur w le premier dénominateur .

Face à un long calcul, ne calcule pas terme par terme : cherche sa structure. Dans un produit de facteurs un plus un sur k, chaque facteur s'écrit (k plus un) sur k, et le numérateur de chaque facteur s'en va avec le dénominateur du suivant. Il ne reste que le dernier numérateur et le premier dénominateur.

Un calcul long se fait rarement terme à terme : on cherche d'abord sa **structure**.

- Une égalité connue en donne d'autres sans calcul : de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, on tire, en divisant par 2, $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$.
- Un produit de facteurs $1+\frac{1}{k}$ se **simplifie en chaîne** : chaque numérateur s'en va avec le dénominateur du facteur suivant.
- Une fraction « étagée » se calcule de l'intérieur vers l'extérieur, en gardant les fractions irréductibles.

UN FACTEUR

$1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$

EXEMPLE TRAITÉ

Calcule le produit $P=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{9}\right)$.

Chaque facteur — On met chaque facteur sous la forme d'une seule fraction.

$P=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\ldots\times\frac{10}{9}$

La chaîne — Le 3 du haut s'en va avec le 3 du bas, le 4 avec le 4, et ainsi de suite.

$P=\frac{10}{2}$

$P=5$

$$P=5$$

À ne pas faire : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ — $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. On n'ajoute pas les dénominateurs : on réduit d'abord au même dénominateur.

3. PROPRIÉTÉ

Proportionnalité et pourcentages

CE QU'IL DIT

Tzid t pour cent ma3neha todhrob fi un plus t sur cent, w tna99es t pour cent ma3neha todhrob fi un moins t sur cent. W ki yjiw zouz augmentations wra ba3dhhom, les coefficients nodhorbouhom, ma nzidouch les pourcentages : dix pour cent w ba3d vingt pour cent ya3tiw un virgule un fois un virgule deux, ya3ni trente-deux pour cent, mouch trente.

un moins t sur في معناها تضرب t pour cent تنقص un plus t sur cent ، w في معناها تضرب t pour cent تزيد
les pourcentages : نضربوهم ، ما نزيدوش les coefficients ، ورا بعضهم augmentations زوز يجيو كي cent . w
trente-deux pour يعني ، un virgule un fois un virgule deux يعطيو dix pour cent w ba3d vingt pour cent
. trente موش ، cent

Augmenter de t pour cent, c'est multiplier par un plus t sur cent, et diminuer de t pour cent, c'est multiplier par un moins t sur cent. Quand deux augmentations se suivent, on multiplie les coefficients, on n'ajoute pas les pourcentages : dix pour cent puis vingt pour cent donnent un virgule un fois un virgule deux, soit trente-deux pour cent, pas trente.

Deux grandeurs sont **proportionnelles** quand on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre, le **coefficient de proportionnalité** : pour un ressort qui s'allonge de 9 mm quand on y suspend une masse de 15 g, l'allongement (en mm) vaut $\frac{9}{15} = 0{,}6$ fois la masse (en g).

Augmenter une quantité de $t\,\%$, c'est la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; la **diminuer** de $t\,\%$, c'est la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. Deux évolutions successives **multiplient** leurs coefficients : on n'ajoute pas les pourcentages.

Pour la T.V.A. au taux de $17\,\%$: prix T.T.C. $=$ prix H.T. $\times 1{,}17$, et donc prix H.T. $=$ prix T.T.C. $\div 1{,}17$.

COEFFICIENT MULTIPLICATEUR

$\text{augmenter de } t\,\% : \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \qquad \text{diminuer de } t\,\% : \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$

DEUX ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

$\left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_2}{100}\right)$

EXEMPLE TRAITÉ

Un article de 10 dinars subit une augmentation de $10\,\%$ puis une de $20\,\%$. Quel est le pourcentage global d'augmentation ? Et si un article augmente de $10\,\%$ puis revient à son prix initial, quel est le taux de la réduction ?

Les coefficients — Chaque augmentation multiplie le prix.

$1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$

Le prix final est $10 \times 1{,}32 = 13{,}2$ dinars : le prix est multiplié par $1{,}32$.

$1{,}32 = 1 + \frac{32}{100}$

Le retour au prix initial — On cherche le coefficient de réduction $1 - r$ qui annule l'augmentation.

$1{,}1 \times (1 - r) = 1 \iff 1 - r = \frac{10}{11} \iff r = \frac{1}{11}$

En pourcentage, $\frac{1}{11} \approx 0{,}0909$.

$r \approx 9{,}09\,\%$

augmentation globale : $32\,\%$; réduction : environ $9{,}09\,\%$

À ne pas faire : $+10\,\%$ puis $+20\,\%$ font $+30\,\%$ — $1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$: $+32\,\%$. Le second pourcentage s'applique au prix déjà augmenté : les coefficients se multiplient.

À ne pas faire : $+10\,\%$ puis $-10\,\%$ ramènent au prix initial — $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$: une baisse de $1\,\%$. La baisse porte sur un prix plus grand : elle retire plus que la hausse n'a ajouté.

---

4. PROPRIÉTÉ

Les identités remarquables

CE QU'IL DIT

Les identités remarquables tekhdem fel zouz jihat : mel isar lel imin bech tdévelopper, w mel imin lel isar bech tfactoriser. a plus b le tout au carré égale a au carré plus deux a b plus b au carré : ma tensech le double produit. W zid les cubes : a au cube moins b au cube égale (a moins b) fois (a au carré plus a b plus b au carré).

les identités remarquables تخدم في الزوز جهات : من اليسار لليمين باش تـ développer ، w من اليمين لليسار باش تـ factoriser . a plus b le tout au carré égale a au carré plus deux a b plus b au carré ما تنساش : le double produit . w زيد les cubes : a au cube moins b au cube égale (a moins b) fois (a au carré plus a b plus b au carré)

Les identités remarquables servent dans les deux sens : de gauche à droite pour développer, de droite à gauche pour factoriser. a plus b le tout au carré égale a au carré plus deux a b plus b au carré : n'oublie pas le double produit. Et il y a les cubes : a au cube moins b au cube égale (a moins b) fois (a au carré plus a b plus b au carré).

Pour tous réels a et b, les sept identités ci-dessous servent dans les deux sens : de gauche à droite pour **développer**, de droite à gauche pour **factoriser**.

Elles font aussi calculer de tête : $29^2 = (30-1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$, et $n^2 - (n-1)(n+1) = 1$ donne sans calcul $75895478^2 - 75895477 \times 75895479 = 1$; de même, $n^2 + n = (n+1)^2 - (n+1)$ généralise $7^2 + 7 = 8^2 - 8$.

Elles démontrent enfin des conjectures. Prenons, pour un entier naturel n, le nombre $x = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$: il vaut $25, 121, 361, 841$ pour $n = 1, 2, 3, 4$, qui sont tous des carrés. En posant $u = n^2 + 3n$, on a $n(n+3) = u$ et $(n+1)(n+2) = u + 2$, donc $x = u(u+2) + 1 = (u+1)^2 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Calcule $(3-\sqrt{5})^2$ et $(1-\sqrt{5})^3$, puis écris $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ sous la forme $a+b\sqrt{c}$.

Le carré — Avec $(a-b)^2$, et $(\sqrt{5})^2 = 5$.

$(3-\sqrt{5})^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$

Le cube — Avec $(a-b)^3$, et $(\sqrt{5})^3 = 5\sqrt{5}$.

$(1-\sqrt{5})^3 = 1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5} = 16 - 8\sqrt{5}$

La racine — La racine carrée d'un carré est la valeur absolue ; or $\sqrt{5} < 3$, donc $3 - \sqrt{5} > 0$.

$\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 3 - \sqrt{5}$

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}$$

À ne pas faire : $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ — $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Le double produit est la moitié du travail : avec $a = b = 1$, on aurait $4 = 2$.

À ne pas faire : $(2+a)^3 = 8 + a^3$ — $(2+a)^3 = 8 + 12a + 6a^2 + a^3$. Le cube d'une somme a quatre termes, avec les coefficients $1, 3, 3, 1$.

5. PROPRIÉTÉ

Comparer a, a² et √a

CE QU'IL DIT

Ki a bin zéro w un, a au carré asghar men a, w a asghar men racine carrée de a. El figure tbayyenha : le carré mta3 l'aire a au carré dekhel le rectangle mta3 l'aire a. W ki a akbar men un, koll chay yetbaddel : racine carrée de a asghar men a, w a asghar men a au carré.

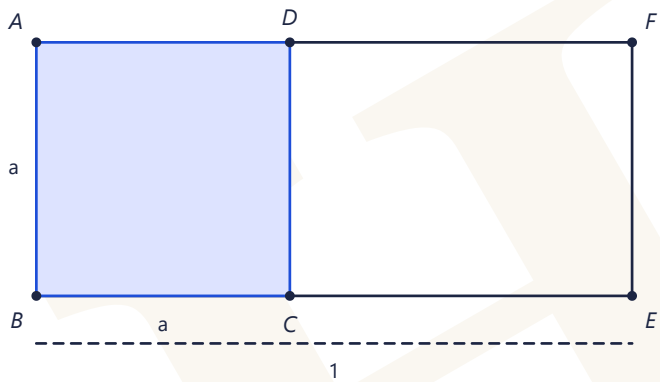
متاع le carré : تبيّنها figure الـ . racine carrée de a أصغر من a ، w a أصغر من zéro w un ، a au carré بين a كي
أصغر racine carrée de a : كل شي يتبدّل ، un أكبر من a كي l'aire a . w متاع le rectangle داخل l'aire a au carré
. a au carré أصغر من a ، w a من

Quand a est entre zéro et un, a au carré est plus petit que a, et a est plus petit que racine carrée de a. La figure le montre : le carré d'aire a au carré est à l'intérieur du rectangle d'aire a. Et quand a est plus grand que un, tout s'inverse : racine carrée de a est plus petit que a, et a plus petit que a au carré.

Sur la figure, $0 < a < 1$: le carré $ABCD$ a pour aire a^2, le rectangle $ABEF$ a pour aire $a \times 1 = a$. Le carré est une partie du rectangle, donc $a^2 < a$.

Par le calcul : $a - a^2 = a(1-a)$ est un produit de deux nombres strictement positifs quand $0 < a < 1$. Appliqué au nombre $\sqrt{a}$, lui aussi entre 0 et 1, le même résultat donne $a = (\sqrt{a})^2 < \sqrt{a}$.

Quand $a > 1$, tout s'inverse ; et pour $a = 1$, les trois nombres sont égaux.



Le carré ABCD est une partie du rectangle ABEF.

Un rectangle ABEF de largeur AB = a et de longueur BE = 1, avec 0 < a < 1.
À gauche, le carré ABCD de côté a est grisé ; C est sur [BE] et D sur [AF].
L'aire du carré vaut a au carré, celle du rectangle vaut a fois 1, c'est-à-dire a :
le carré est une partie du rectangle, donc a au carré est plus petit que a.

ENTRE 0 ET 1

$$0 < a < 1 \implies a^2 < a < \sqrt{a}$$

AU-DELÀ DE 1

$$a > 1 \implies \sqrt{a} < a < a^2$$

EXEMPLE TRAITÉ

Compare $\sqrt{2} - 1$ et $(\sqrt{2} - 1)^2$, puis $0{,}34$ et $\sqrt{0{,}34}$, puis $\sqrt{\frac{7}{3}}$ et $\frac{7}{3}$.

Situer le nombre — Comme $1 < \sqrt{2} < 2$, le nombre $\sqrt{2} - 1$ est entre 0 et 1.

$0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \implies (\sqrt{2} - 1)^2 < \sqrt{2} - 1$

$0{,}34$ est entre 0 et 1 : sa racine est plus grande que lui.

$0{,}34 < \sqrt{0{,}34}$

$\frac{7}{3} > 1$: sa racine est plus petite que lui.

$\sqrt{\frac{7}{3}} < \frac{7}{3}$

$$(\sqrt{2} - 1)^2 < \sqrt{2} - 1 \quad ; \quad 0{,}34 < \sqrt{0{,}34} \quad ; \quad \sqrt{\frac{7}{3}} < \frac{7}{3}$$

À ne pas faire : $a^2 > a$ pour tout réel $a > 0$ — $(0{,}3)^2 = 0{,}09 < 0{,}3$. Un nombre entre 0 et 1 rapetisse quand on l'élève au carré : on multiplie par un nombre plus petit que 1.

6. PROPRIÉTÉ

Comparer a et 1/a

CE QU'IL DIT

Ki a akbar men un, un sur a asghar men un, w asghar men a. El figure tbayyenha b Thalès : O B tsewi un sur a. W ki a bin zéro w un, l'inverse ywalli akbar men un. El 9a3da elli tjma3hom : zouz nombres strictement positifs, ki te5ou l'inverse, l'ordre yetbaddel.

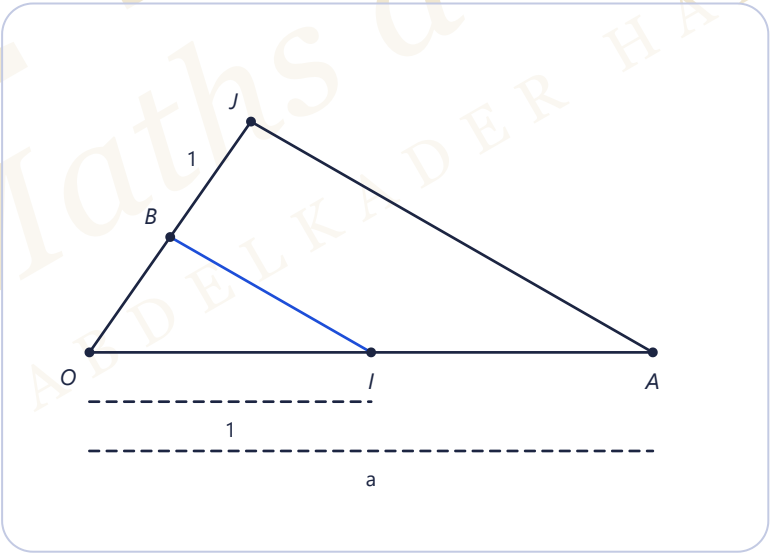
كي a أكبر من un sur a ، un أصغر من w ، un أصغر من a . الـ figure تبيّنها بـ Thalès : O B تساوي un sur a . w
كي a بين zéro w un ، l'inverse يولّي أكبر من un . القاعدة اللي تجمعهم : زوز nombres strictement positifs ، كي تاخو l'ordre ، l'inverse يتبدّل .

Quand a est plus grand que un, un sur a est plus petit que un, et donc plus petit que a. La figure le montre avec Thalès : O B égale un sur a. Et quand a est entre zéro et un, l'inverse dépasse un. La règle qui réunit tout : pour deux nombres strictement positifs, passer à l'inverse renverse l'ordre.

Sur la figure, (BI) et (AJ) sont parallèles, $OI = OJ = 1$ et $OA = a > 1$. Le théorème de Thalès dans le triangle OAJ donne $\dfrac{OB}{OJ} = \dfrac{OI}{OA}$, donc $OB = \dfrac{1}{a}$. Comme B est entre O et J, on lit $\dfrac{1}{a} < 1 < a$.

Quand $0 < a < 1$, la même construction place l'inverse au-delà de 1. Plus généralement, pour deux réels **strictement positifs**, passer à l'inverse **renverse** l'ordre.

D'où une comparaison sans calcul : un quotient de positifs est plus grand que 1 quand son numérateur dépasse son dénominateur, et plus petit sinon.



(BI) et (AJ) sont parallèles ; OI = OJ = 1 et OA = a > 1.

Deux demi-droites issues de O. Sur la demi-droite horizontale, I avec OI = 1 et A avec OA = a, où a est plus grand que 1. Sur la demi-droite oblique, J avec OJ = 1, et B tel que la droite (BI) soit parallèle à la droite (AJ). Par le théorème de Thalès, OB sur OJ égale OI sur OA, donc OB égale 1 sur a, plus petit que OJ = 1.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

$a > 1 \implies \frac{1}{a} < 1 < a \qquad 0 < a < 1 \implies a < 1 < \frac{1}{a}$

L'INVERSE RENVERSE L'ORDRE

$0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

EXEMPLE TRAITÉ

Compare sans calcul $\frac{23}{21}$ et $\frac{86}{88}$, puis $\frac{0{,}062}{0{,}07}$ et $\frac{5{,}34}{4{,}29}$.

$23 > 21$: le premier quotient dépasse 1 ; $86 < 88$: le second est sous 1.
$\frac{86}{88} < 1 < \frac{23}{21}$

$0{,}062 < 0{,}07$ et $5{,}34 > 4{,}29$: le nombre 1 les sépare encore.
$\frac{0{,}062}{0{,}07} < 1 < \frac{5{,}34}{4{,}29}$

$\frac{86}{88} < \frac{23}{21} \quad ; \quad \frac{0{,}062}{0{,}07} < \frac{5{,}34}{4{,}29}$

À ne pas faire : $2 < 3 \implies \frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ — $2 < 3 \implies \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. Pour deux nombres strictement positifs, le plus grand a le plus petit inverse.

7. MÉTHODE

Encadrer une expression

CE QU'IL DIT

Bech ta3mel encadrement, esta3mel ken el 9awa3ed elli ta3refhom : tzid nafs el nombre lel koll, l'ordre yo93ed. Todhrob fi nombre positif, yo93ed, ama fi nombre négatif, yetbaddel. W ma tatra7ch zouz encadrements, w ma ta3melch division membre à membre : t3addi bel opposé walla bel inverse.

باش تعمل encadrement ، استعمل كان القواعد اللي تعرفها : تزيد نفس الـ nombre للكل ، l'ordre يقعد . تضرب في nombre positif ، يقعد ، أما في nombre négatif ، يتبدّل . w ما تطرحش زوز encadrements ، w ما تعملش division membre à membre : تعدّي بالـ opposé ولّا بالـ inverse .

Pour encadrer, n'utilise que les règles que tu connais : ajouter le même nombre partout garde l'ordre. Multiplier par un nombre positif le garde, par un nombre négatif le renverse. Et ne soustrais jamais deux encadrements, ne les divise pas membre à membre : passe par l'opposé ou par l'inverse.

Pour encadrer une expression à partir d'un encadrement de a, on n'utilise que des opérations qui ont une règle :

- **ajouter** un même nombre à tous les membres garde le sens ;
- **multiplier** par un nombre **positif** garde le sens, par un nombre **négatif** le **renverse** ;
- deux encadrements s'**ajoutent** membre à membre ; deux encadrements de nombres **positifs** se **multiplient** membre à membre ;

- l'inverse d'un encadrement de positifs se renverse.

On ne soustrait jamais, on ne divise jamais deux encadrements membre à membre : on passe par l'opposé ou par l'inverse.

L'OPPOSÉ

$$a \leq x \leq b \implies -b \leq -x \leq -a$$

L'INVERSE

$$0 < a \leq x \leq b \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit a un réel tel que $-2 \leq a \leq 3$. Encadre $a+4$, $2a$, $-a$ et $-3a+5$.

Ajouter 4 —

$2 \leq a+4 \leq 7$

Multiplier par 2 — 2 est positif : le sens est gardé.

$-4 \leq 2a \leq 6$

L'opposé — Multiplier par -1 renverse le sens.

$-3 \leq -a \leq 2$

Multiplier par −3, puis ajouter 5 — -3 est négatif : on renverse, puis on ajoute 5 partout.

$-9 \leq -3a \leq 6 \implies -4 \leq -3a+5 \leq 11$

$2 \leq a+4 \leq 7 \quad ; \quad -4 \leq 2a \leq 6 \quad ; \quad -3 \leq -a \leq 2 \quad ; \quad -4 \leq -3a+5 \leq 11$

À ne pas faire : $-2 \leq a \leq 3 \implies 6 \leq -3a \leq -9$ — $-9 \leq -3a \leq 6$. Multiplier par un négatif renverse les inégalités : le plus petit membre devient le plus grand.

À ne pas faire : $\frac{16{,}12}{5{,}2} \leq \ell \leq \frac{16{,}96}{5{,}3}$ — $\frac{16{,}12}{5{,}3} \leq \ell \leq \frac{16{,}96}{5{,}2}$. Diviser par la longueur, c'est multiplier par son inverse, dont l'encadrement se renverse : la plus petite largeur vient de la plus grande longueur.

8. PROPRIÉTÉ

Deux carrés et un double produit

CE QU'IL DIT

x au carré plus y au carré moins deux x y égale x moins y le tout au carré, w carré dima positif walla nul. Donc deux x y inférieur ou égal à x au carré plus y au carré, l koll x w y. W menha to5rej barcha inégalités : x plus un sur x supérieur ou égal à deux, ki x strictement positif.

nul . ولّا positif ديما x au carré plus y au carré moins deux x y égale x moins y le tout au carré ، w carré

inégalités : x منها تخرج برشا x w y . w لكل ، donc deux x y inférieur ou égal à x au carré plus y au carré

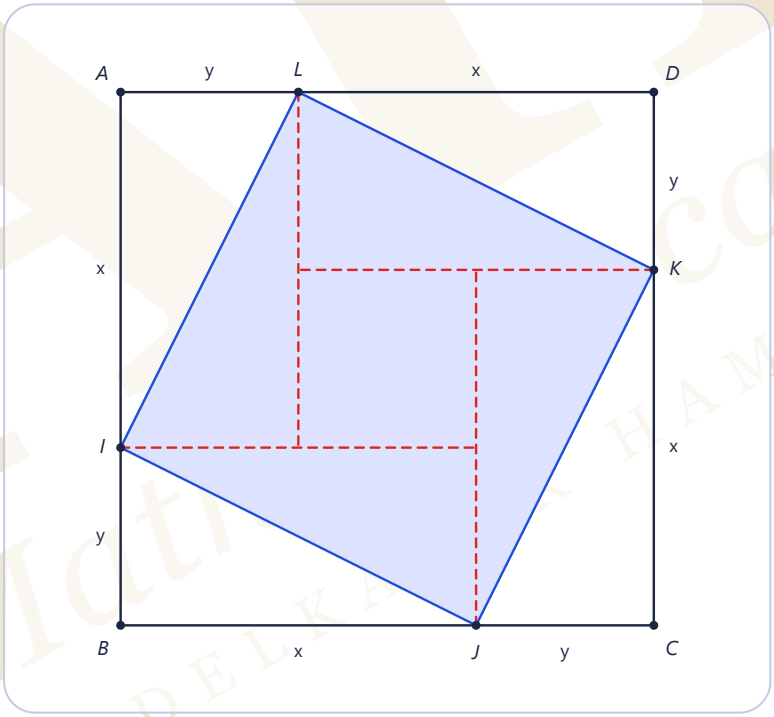
. x strictement positif كي ، plus un sur x supérieur ou égal à deux

x au carré plus y au carré moins deux x y égale x moins y le tout au carré, et un carré est toujours positif ou nul. Donc deux x y est inférieur ou égal à x au carré plus y au carré, pour tous x et y. Et beaucoup d'inégalités en découlent : x plus un sur x est supérieur ou égal à deux, quand x est strictement positif.

Sur la figure, le grand carré $ABCD$ a pour côté $x+y$. Le carré incliné $LKJI$ a pour côté $\sqrt{x^2+y^2}$, donc pour aire x^2+y^2 ; les pointillés montrent qu'il contient quatre triangles rectangles de côtés x et y, d'aire totale $2xy$, et un petit carré de côté $x-y$. D'où $2xy \leq x^2+y^2$.

Le calcul le dit pour **tous** réels : $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2 \geq 0$, avec égalité seulement si $x=y$.

Pour des réels **strictement positifs**, on en tire $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geq 2$, $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geq 4$ et $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geq 9$; et pour a, b strictement positifs, $\dfrac{1}{a+b} < \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ et $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$.



L'aire du carré incliné LKJI : $x^2 + y^2 = 2xy + (x-y)^2$.

Un grand carré ABCD de côté x + y. Sur chaque côté, un point le partage en un morceau x et un morceau y : AL = y et LD = x en haut, DK = y et KC = x à droite, CJ = y et JB = x en bas, BI = y et IA = x à gauche. Le quadrilatère LKJI, incliné et grisé, est un carré de côté racine de (x au carré plus y au carré), donc d'aire x au carré plus y au carré. Les pointillés montrent qu'il contient quatre triangles rectangles de côtés x et y, d'aire totale 2xy, et un petit carré de côté x moins y au centre.

POUR TOUS RÉELS X ET Y

$$2xy \leq x^2+y^2$$

POUR TOUT RÉEL X > 0

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

DÉMONSTRATION

$x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$, et un carré est positif ou nul. Pour $x > 0$, on applique le résultat à $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$: $2 \times \sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \leq x + \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $2 \leq x + \frac{1}{x}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Montre que $\sqrt{2003} + \sqrt{2005} < 2\sqrt{2004}$.

Comparer les carrés — Les deux membres sont positifs : il suffit de comparer leurs carrés.

$(\sqrt{2003} + \sqrt{2005})^2 = 4008 + 2\sqrt{2003 \times 2005}$

$(2\sqrt{2004})^2 = 4 \times 2004 = 4008 + 2 \times 2004$

L'identité — $2003 \times 2005 = (2004 - 1)(2004 + 1)$.

$2003 \times 2005 = 2004^2 - 1 < 2004^2$

Donc $\sqrt{2003 \times 2005} < 2004$: le premier carré est le plus petit.

$(\sqrt{2003} + \sqrt{2005})^2 < (2\sqrt{2004})^2$

$$\sqrt{2003} + \sqrt{2005} < 2\sqrt{2004}$$

À ne pas faire : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ — $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour $a, b > 0$. En élevant au carré, le membre de droite a un double produit $2\sqrt{ab}$ de plus : $\sqrt{9+16} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

9. PROPRIÉTÉ

Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

CE QU'IL DIT

Zouz nombres positifs a w b : la moyenne arithmétique hiya a plus b, le tout sur deux, w la moyenne géométrique hiya racine carrée de a b. El géométrique dima asghar walla kif kif. Fel figure, le rayon O C houwa a plus b, le tout sur deux, w C H hiya racine carrée de a b : edhdhla3 a9sar men l'hypoténuse.

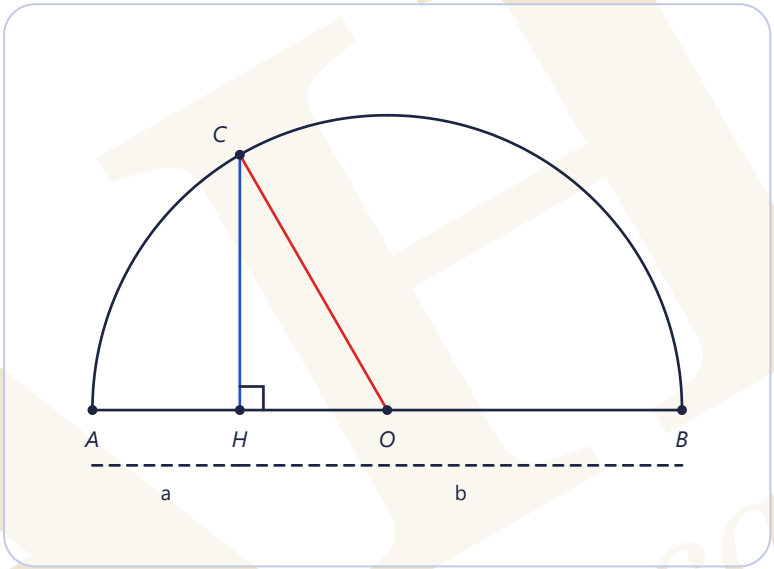
a plus b, le tout sur deux ، w la moyenne هي nombres positifs a w b : la moyenne arithmétique زوز figure ، le rayon O الـ في . ديما أصغر ولّا كيف كيف géométrique الـ . racine carrée de a b هي géométrique . l'hypoténuse الضلع أقصر من : racine carrée de a b هي a plus b, le tout sur deux ، w C H هو C

Pour deux nombres positifs a et b, la moyenne arithmétique est a plus b, le tout sur deux, et la moyenne géométrique est racine carrée de a b. La géométrique est toujours plus petite ou égale. Sur la figure, le rayon O C vaut a plus b, le tout sur deux, et C H vaut racine carrée de a b : le côté est plus court que l'hypoténuse.

Pour deux réels positifs a et b, la **moyenne arithmétique** est $\frac{a+b}{2}$ et la **moyenne géométrique** est $\sqrt{ab}$.

Sur la figure, $AH = a$ et $HB = b$, donc $AB = a + b$ et le rayon OC vaut $\dfrac{a+b}{2}$. Quand $a < b$, $OH = OA - AH = \dfrac{b-a}{2}$. Dans le triangle OHC rectangle en H, $CH^2 = OC^2 - OH^2 = \dfrac{(a+b)^2 - (b-a)^2}{4} = ab$, donc $CH = \sqrt{ab}$. Un côté de l'angle droit est plus court que l'hypoténuse : $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Par le calcul : $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$.



AH = a, HB = b : OC = (a + b)/2 et CH = √(ab).

Un demi-cercle de diamètre [AB] et de centre O. Le point H est sur [AB] avec AH = a et HB = b. La perpendiculaire à (AB) en H coupe le demi-cercle en C. Le rayon OC vaut la moitié de a + b, et la hauteur CH vaut racine de ab. Comme CH est un côté de l'angle droit du triangle OHC et OC son hypoténuse, CH est plus petit que OC.

POUR TOUS RÉELS A, B ≥ 0

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient a, b et c trois réels positifs. Montre que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Trois fois la même inégalité — Chaque somme dépasse deux fois la racine du produit.

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ca}$

Multiplier — Tous les membres sont positifs : on peut multiplier membre à membre.

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab \times bc \times ca} = 8\sqrt{(abc)^2}$

$abc \geq 0$, donc $\sqrt{(abc)^2} = abc$.

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

10. ACTIVITÉ

L'inégalité triangulaire au travail

CE QU'IL DIT

L'inégalité triangulaire t9oul elli ettri9 el moubecher houwa el a9sar : A B inférieur ou égal à A C plus C B. Fel mithel hedha, nesta3mlouha zouz marrat : marra fi le triangle A B I w marra fi le triangle M I C, w njam3ouhom. Nal9aw M B plus M C inférieur ou égal à A B plus A C.

في . A B inférieur ou égal à A C plus C B : تقول اللي الطريق المباشر هو الأقصر l'inégalité triangulaire
المثال هذا ، نستعملوها زوز مرّات : مرّة في le triangle A B I w مرّة في le triangle M I C ، w نلقاو M نجمعوهم .
. B plus M C inférieur ou égal à A B plus A C

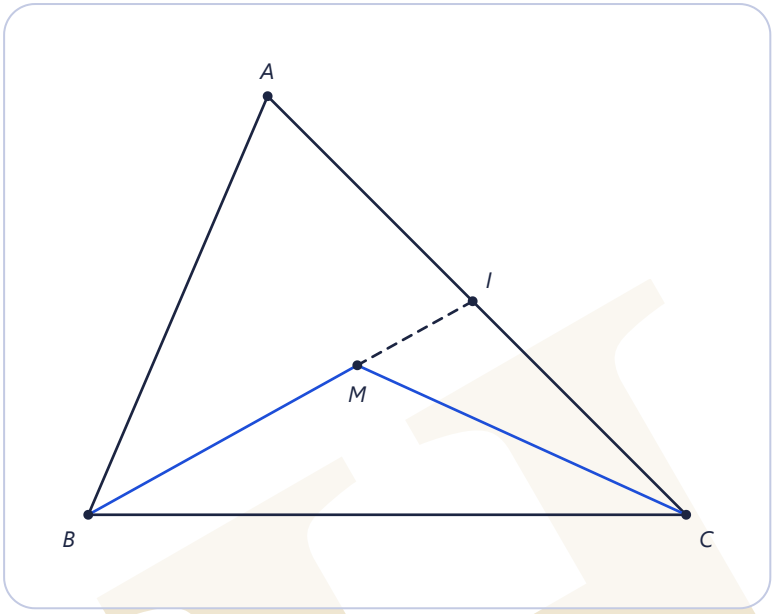
L'inégalité triangulaire dit que le chemin direct est le plus court : A B est inférieur ou égal à A C plus C B. Dans cet exemple, on l'utilise deux fois : une fois dans le triangle A B I et une fois dans le triangle M I C, puis on les ajoute. On obtient M B plus M C inférieur ou égal à A B plus A C.

L'**inégalité triangulaire** dit que, pour trois points A, B, C du plan, $AB \leq AC + CB$: le chemin direct est le plus court.

Prenons un point M à l'intérieur d'un triangle ABC et (BM) coupe (AC) en I. Deux inégalités triangulaires, ajoutées, montrent que $MB + MC \leq AB + AC$; de même $MA + MB \leq CA + CB$ et $MA + MC \leq BA + BC$.

Autre usage : dans un quadrilatère $ABCD$ de demi-périmètre p, on encadre la somme des diagonales : $p \leq AC + BD \leq 2p$. Les triangles AOB et COD, où O est l'intersection des diagonales, donnent $AC + BD \geq AB + DC$; de même, AOD et BOC donnent $AC + BD \geq AD + BC$; en ajoutant, $p \leq AC + BD$. Les triangles ABC, ADC, ABD et CBD donnent $AC + BD \leq 2p$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



M est à l'intérieur du triangle ABC ; (BM) coupe (AC) en I.

Un triangle ABC, avec un point M à l'intérieur. La droite (BM) recoupe le côté [AC] en I, entre A et C. Les segments [MB] et [MC] sont tracés.

INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

$$AB \leq AC + CB$$

EXEMPLE TRAITÉ

M est à l'intérieur du triangle ABC et I est le point d'intersection de (BM) et (AC). Montre que $MB + MC \leq AB + AC$.

Dans le triangle ABI — M est sur $[BI]$, donc $BI = BM + MI$.

$$BM + MI \leq AB + AI$$

Dans le triangle MIC —

$$MC \leq MI + IC$$

Ajouter — On ajoute membre à membre, puis on retire MI des deux côtés.

$$BM + MI + MC \leq AB + AI + MI + IC$$

I est sur $[AC]$, donc $AI + IC = AC$.

$$MB + MC \leq AB + AC$$

$$MB + MC \leq AB + AC$$

11. MÉTHODE

Les radicaux : conjugué et racines imbriquées

CE QU'IL DIT

Bech tna77i racine men le dénominateur, odhrob el fou9 w el louta fi le conjugué : racine de a moins racine de b fois racine de a plus racine de b égale a moins b. W ki tal9a des racines imbriquées, a7seb

le carré 9bal : A au carré yotla3 sehel, w ba3d A hiya racine de A au carré, ki A positif.

le conjugué : racine de a moins racine باش تنحّي من racine le dénominateur ، اضرب الفوق w اللوطة في de b fois racine de a plus racine de b égale a moins b . w le ، احسب des racines imbriquées كي تلقى A au carré : قُبْلْ carré يطلع ساهل ، w ba3d A racine de A au carré هي ، كي A positif .

Pour enlever une racine du dénominateur, multiplie le haut et le bas par le conjugué : racine de a moins racine de b, fois racine de a plus racine de b, égale a moins b. Et face à des racines imbriquées, calcule d'abord le carré : A au carré se simplifie, puis A est la racine de A au carré, quand A est positif.

Trois outils reviennent sans cesse.

- **Le conjugué.** $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$: multiplier le haut et le bas d'une fraction par le conjugué de son dénominateur fait disparaître les radicaux du dénominateur. C'est aussi pourquoi $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ est l'inverse de $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$.
- **Le carré d'abord.** Pour simplifier une somme de racines imbriquées A, on calcule A^2, puis $A=\sqrt{A^2}$ si $A\geq 0$.
- **Extraire les carrés.** $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$, $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, $\sqrt{243}=9\sqrt{3}$: écrits ainsi, ils se comparent et s'ajoutent. Si $AB=\sqrt{48}$, $AC=\sqrt{75}$ et $BC=\sqrt{243}$, alors $AB+AC=BC$: les points A, B, C sont alignés.

LE CONJUGUÉ

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$$

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit $A=\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$. Calcule A^2 et déduis-en une écriture plus simple de A.

Développer le carré — Avec $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$.

$$A^2=(9-4\sqrt{5})+(9+4\sqrt{5})+2\sqrt{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}$$

Le conjugué —

$$(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})=81-80=1$$

$$A^2=18+2=20$$

Revenir à A — A est une somme de racines, donc positif.

$$A=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$A=2\sqrt{5}$$

À ne pas faire : $\sqrt{x^2}=x$ pour tout réel x — $\sqrt{x^2}=|x|$, par exemple $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-2$. Une racine carrée est toujours positive : il faut connaître le signe de x.

À ne pas faire : $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{9+2} - \dfrac{1}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{7}$. Le conjugué donne une **différence** de deux carrés : $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 9-2$.

12. PROPRIÉTÉ

La formule de Héron

CE QU'IL DIT

La formule de Héron ta3tik l'aire mta3 triangle men les longueurs mta3 les côtés berk, blech hauteur : l'aire égale racine carrée du produit p fois (p moins a) fois (p moins b) fois (p moins c). W rodd belek : p houwa le demi-périmètre, a plus b plus c, le tout sur deux, mouch le périmètre.

hauteur : l'aire بلاش ، برك les côtés متاع les longueurs من triangle متاع l'aire تعطيك la formule de Héron
le هو p : رد بالك égale racine carrée du produit p fois (p moins a) fois (p moins b) fois (p moins c) . w
. le périmètre موش ، demi-périmètre ، a plus b plus c, le tout sur deux

La formule de Héron donne l'aire d'un triangle à partir des seules longueurs de ses côtés, sans hauteur : l'aire égale racine carrée du produit p fois (p moins a) fois (p moins b) fois (p moins c). Et attention : p est le demi-périmètre, a plus b plus c, le tout sur deux, pas le périmètre.

La formule attribuée à **Héron d'Alexandrie** (Ier siècle) donne l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle à partir des seules longueurs a, b, c de ses côtés, où p désigne le **demi-périmètre**.

Elle n'a besoin d'aucune hauteur. Quand le triangle est dans un rectangle dont on connaît les dimensions, on peut aussi retrancher à l'aire du rectangle celles des triangles rectangles des coins.

FORMULE DE HÉRON

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

DEMI-PÉRIMÈTRE

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Calcule l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 18, 24 et 30 cm, puis retrouve-la par la formule de Héron.

Un triangle rectangle — La réciproque de Pythagore : le triangle est rectangle, d'hypoténuse 30.

$18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900 = 30^2$

$\text{aire} = \frac{18\times 24}{2} = 216$

Par Héron — Le demi-périmètre vaut $p = \dfrac{18+24+30}{2} = 36$.

$\mathcal{A} = \sqrt{36 \times 18 \times 12 \times 6} = \sqrt{46656} = 216$

$$\text{aire} = 216 \text{ cm}^2$$

À ne pas faire : $p = 18 + 24 + 30 = 72$ — $p = \dfrac{18+24+30}{2} = 36$. Dans la formule, p est le **demi-périmètre** : avec le périmètre entier, $p - c$ n'a plus de sens.

13. MÉTHODE

Développer, factoriser, comparer deux expressions

CE QU'IL DIT

Développer ma3neha produit ywalli somme, w ba3d nréduire. Factoriser houwa el 3aks : nlawjou 3la facteur commun, w ken ma fammech, 3la identité remarquable. W rodd belek : zouz expressions yetsewew fi trois valeurs, ma ma3nehech elli houma égales pour tout x. Bech tethbet égalité, 7awwel expression lin toussel lel o5ra.

développer معناها produit يولّي w ba3d ، somme نـ factoriser . réduire هو العكس : نلوّجو على facteur ، w على كان ما فمّاش commun ، w identité remarquable رد بالك : زوز expressions يتساواو في trois valeurs ، ما معناهاش اللي هوما égales pour tout x . باش تثبت égalité ، حوّل expression لين توصل للأخرى .

Développer, c'est transformer un produit en somme, puis réduire. Factoriser, c'est l'inverse : on cherche un facteur commun, et s'il n'y en a pas, une identité remarquable. Et attention : deux expressions égales pour trois valeurs ne sont pas pour autant égales pour tout x. Pour prouver une égalité, transforme une expression jusqu'à obtenir l'autre.

Développer, c'est transformer un produit en somme, puis **réduire** en regroupant les termes de même degré. **Factoriser**, c'est l'inverse : on cherche un **facteur commun**, sinon une **identité remarquable**.

Un même calcul se fait souvent dans les deux sens : dans l'exemple ci-dessous, la forme factorisée de $A - B$ permet de factoriser $7x^2 + 33x - 10$, qui en est la forme développée.

Deux expressions égales pour quelques valeurs ne sont pas égales pour autant. Par exemple, $A(x) = x^3 - x|x| + 2x + 2$ et $B(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$ coïncident en -1, 0 et 1 ; mais $A(x) - B(x) = x(1 - |x|)$, qui n'est nul que pour $x \in \{-1; 0; 1\}$: en 2, $A(2) = 10$ et $B(2) = 12$. Pour prouver une égalité « pour tout réel x », on transforme l'une des expressions jusqu'à l'autre.

FACTEUR COMMUN

$$ka + kb = k(a+b)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient $A = (4x-1)^2 - (4x-1)(3x-6)$ et $B = 1 - 9x^2 + 2(x-2)(3x-1)$. Factorise A, B et $A - B$, puis déduis-en une factorisation de $7x^2 + 33x - 10$.

Factoriser A — Le facteur commun est $4x - 1$; attention au signe devant la seconde parenthèse.

$$A = (4x-1)\big[(4x-1) - (3x-6)\big] = (4x-1)(x+5)$$

Factoriser B — $1-9x^2=(1-3x)(1+3x)=-(3x-1)(3x+1)$: le facteur commun est $3x-1$.

$B=(3x-1)\big[-(3x+1)+2(x-2)\big]=(3x-1)(-x-5)=-(3x-1)(x+5)$

Factoriser A − B — Le facteur commun est maintenant $x+5$.

$A-B=(x+5)\big[(4x-1)+(3x-1)\big]=(x+5)(7x-2)$

Développer A − B — $A=4x^2+19x-5$ et $B=-3x^2-14x+5$.

$A-B=7x^2+33x-10$

$$7x^2+33x-10=(x+5)(7x-2)$$

À ne pas faire : $(4x-1)-(3x-6)=x-7$ — $(4x-1)-(3x-6)=4x-1-3x+6=x+5$. Le signe moins devant une parenthèse change le signe de **chacun** de ses termes.

À ne pas faire : $A(0)=B(0)$, $A(1)=B(1)$, $A(-1)=B(-1)$, donc $A=B$ — $A(2)=10\neq B(2)=12$. Quelques valeurs ne prouvent rien : une égalité pour tout x se démontre par le calcul.

---

14. PROPRIÉTÉ

La valeur absolue et la distance

CE QU'IL DIT

La valeur absolue mta3 x hiya x ken x positif, w moins x ken x négatif. Bech tna77iha, chouf le signe 9bal. W 3la droite graduée, valeur absolue de b moins a hiya la distance A B. Donc valeur absolue de x moins a égale r ma3neha ennou9at elli 3la distance r men a : zouz ken r strictement positif, wa7da berk ken r nul, w 7atta wa7da ken r négatif.

قُبَلْ le signe شوف ، باش تنحّيها . x négatif كان x positif ، w moins x كان x هي x متاع la valeur absolue la distance A B . donc valeur absolue de x moins هي droite graduée ، valeur absolue de b moins a على وحدة برك كان ، w ، r strictement positif كان زوز : a من distance r على اللي النقاط معناها a égale r حتّى r nul وحدة كان r négatif .

La valeur absolue de x, c'est x si x est positif, et moins x si x est négatif. Pour l'enlever, regarde d'abord le signe. Et sur une droite graduée, valeur absolue de b moins a, c'est la distance A B. Donc valeur absolue de x moins a égale r désigne les points à la distance r de a : deux si r est strictement positif, un seul si r est nul, aucun si r est négatif.

La **valeur absolue** d'un réel x est $|x|=x$ si $x\geq 0$, et $|x|=-x$ si $x\leq 0$. Pour l'enlever, on cherche donc d'abord le **signe** de ce qu'elle contient : $|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$, mais $|\sqrt{3}-2|=2-\sqrt{3}$.

Sur une droite Δ munie d'un repère (O,I), si A et B ont pour abscisses a et b, alors $AB=|b-a|$. Résoudre $|x-a|=r$, c'est chercher les points à la distance r du point d'abscisse a : il y en a deux si $r>0$, un si $r=0$, aucun si $r<0$.

Pour $r > 0$: $|x - a| < r$ décrit l'intervalle ouvert $]a - r ; a + r[$, et $|x - a| > r$ son extérieur. Enfin, $|X| = |Y|$ équivaut à $X = Y$ ou $X = -Y$.



Sur Δ, AM = |x − 2| : les points à distance 5 de A ont pour abscisses −3 et 7.

Une droite graduée Δ munie du repère (O, I). On y voit B d'abscisse moins 3, O d'abscisse 0, I d'abscisse 1, A d'abscisse 2 et M d'abscisse 7. La distance de A à B vaut 5, celle de A à M aussi : ce sont les deux points de Δ à la distance 5 de A.

DISTANCE SUR UNE DROITE GRADUÉE

$$AB = |b - a|$$

$$|x - a| = r \iff x = a - r \text{ ou } x = a + r \quad (r > 0)$$

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$$

EXEMPLE TRAITÉ

Résous $|x + 2| = 3$, puis $|2x + 1| = |3 - x|$.

Une distance — $|x + 2| = |x - (-2)|$: la distance de x à -2 vaut 3.

$x = -2 + 3 = 1 \quad$ ou $\quad x = -2 - 3 = -5$

Deux valeurs absolues égales — Les deux nombres sont égaux ou opposés.

$2x + 1 = 3 - x \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$

$2x + 1 = -(3 - x) \iff 2x + 1 = x - 3 \iff x = -4$

$$x = -5 \text{ ou } x = 1 \quad ; \quad x = -4 \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

À ne pas faire : $|\sqrt{3} - 2| = \sqrt{3} - 2$ — $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$. $\sqrt{3} < 2$: le nombre est négatif, sa valeur absolue est son opposé.

À ne pas faire : $|4x - 1| = 1 - \sqrt{2} \iff 4x - 1 = 1 - \sqrt{2}$ ou $4x - 1 = \sqrt{2} - 1$ — $1 - \sqrt{2} < 0$: pas de solution. Une valeur absolue est une distance, donc jamais négative : on regarde le signe du second membre avant tout.

15. DÉFINITION

Valeurs approchées

CE QU'IL DIT

a valeur approchée de b à dix puissance n près, ma3neha valeur absolue de b moins a inférieure ou égale à dix puissance n. Ki a asghar men b, n9oulou par défaut, w ki a akbar, par excès. W l'arrondi houwa el a9rab fihom : tchouf le chiffre elli ba3dou, ken cinq walla akther, totla3.

valeur absolue de b moins a inférieure ou égale معناها ، a valeur approchée de b à dix puissance n près هو الأقرب فيهم par excès . w l'arrondi ، أكبر a كي par défaut ، w نقولو ، b أصغر من a كي . à dix puissance n تشوف : le chiffre اللي بعدو ، كان cinq ولّا أكثر ، تطلع .

a est une valeur approchée de b à dix puissance n près quand valeur absolue de b moins a est inférieure ou égale à dix puissance n. Si a est plus petit que b, on dit par défaut, et s'il est plus grand, par excès. L'arrondi est la plus proche des deux : on regarde le chiffre suivant ; s'il vaut cinq ou plus, on monte.

On retient la définition suivante :

Soit n un entier. On dit que le nombre décimal a est une valeur approchée à 10^n près du réel b si $|b-a| \leq 10^n$. Si $a < b$, on dit que a est une valeur approchée de b à 10^n près par **défaut**. Si $a > b$, on dit que a est une valeur approchée de b à 10^n près par **excès**.

En pratique, n est négatif : 10^{-2} veut dire « au centième près ». La calculatrice affiche $\frac{75}{17} \approx 4{,}411764705$: à 10^{-2} près, $4{,}41$ par défaut, $4{,}42$ par excès, et l'**arrondi** — la plus proche des deux — est $4{,}41$. À 10^{-3} près : $4{,}411$, $4{,}412$, et l'arrondi $4{,}412$, car le chiffre suivant, 7, est au moins 5.

A VALEUR APPROCHÉE DE B À 10^n PRÈS

$$|b-a| \leq 10^n$$

EXEMPLE TRAITÉ

La calculatrice affiche $\sqrt{5} \approx 2{,}236067977$. Donne ses valeurs approchées à 10^{-2} et à 10^{-3} près, par défaut et par excès, puis ses arrondis.

À 10^{-2} près — On garde deux décimales, puis on ajoute un centième.

$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

Le chiffre suivant est 6, au moins 5 : on arrondit vers le haut.

$\text{arrondi à } 10^{-2} : 2{,}24$

À 10^{-3} près —

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

Le chiffre suivant est 0 : on arrondit vers le bas.

$\text{arrondi à } 10^{-3} : 2{,}236$

$\sqrt{5}$: 2,23 et 2,24 à 10^{-2} près ; 2,236 et 2,237 à 10^{-3} près

À ne pas faire : La valeur approchée par défaut de $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près est $2{,}24$ — Par défaut : $2{,}23$. $2{,}24$ est la valeur par excès, et aussi l'arrondi. Par défaut, on reste **en dessous** du nombre : on tronque, on n'arrondit pas.

---

16. REMARQUE

Écriture scientifique et ordre de grandeur

CE QU'IL DIT

L'écriture scientifique hiya a fois dix puissance n, w a bin un w dix, fih chiffre wa7ed non nul 9bal la virgule. W l'ordre de grandeur, narrondir a à l'unité w n5alliw nafs dix puissance n. Trente-cinq millions deux cent quinze mille, l'ordre de grandeur mte3ou quatre fois dix puissance sept.

la virgule قُبَيْلَ non nul واحد chiffre فيه ، un w dix بين a fois dix puissance n ، w a هي l'écriture scientifique dix puissance n . trente-cinq millions deux نفس نخلّيو arrondir a à l'unité w نـ ، . w l'ordre de grandeur . quatre fois dix puissance sept متاعو cent quinze mille ، l'ordre de grandeur

L'écriture scientifique, c'est a fois dix puissance n, avec a entre un et dix : un seul chiffre non nul avant la virgule. Pour l'ordre de grandeur, on arrondit a à l'unité et on garde la même puissance de dix. Trente-cinq millions deux cent quinze mille a pour ordre de grandeur quatre fois dix puissance sept.

L'**écriture scientifique** d'un nombre non nul est $a \times 10^n$, où n est un entier relatif et a un décimal tel que $1 \leq |a| < 10$: $35\,215\,000 = 3{,}5215 \times 10^7$.

Remarque. Si $a \times 10^n$ est l'écriture scientifique d'un nombre, l'ordre de grandeur de ce nombre est $b \times 10^n$, où b est l'arrondi de a à l'unité : celui de $35\,215\,000$ est 4×10^7.

L'ordre de grandeur sert à **estimer** sans calculer exactement : nombre de grains de sable du Sahara, nombre de « Tunisie » pour couvrir la Terre, temps que met la lumière du Soleil pour nous parvenir.

ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

$$a \times 10^n \quad \text{avec} \quad 1 \leq |a| < 10$$

EXEMPLE TRAITÉ

Donne l'écriture scientifique et l'ordre de grandeur de $78{,}3548$, de $-425\,462{,}12$ et de $0{,}0007845$.

La virgule recule d'un rang : exposant 1.

$78{,}3548 = 7{,}83548 \times 10^1$

L'arrondi de $7{,}83548$ à l'unité est 8.

ordre de grandeur : 8×10^1

La virgule recule de cinq rangs ; le signe reste.

$-425\,462{,}12 = -4{,}2546212 \times 10^5$

ordre de grandeur : -4×10^5

La virgule avance de quatre rangs : exposant -4.

$0{,}0007845 = 7{,}845 \times 10^{-4}$

ordre de grandeur : 8×10^{-4}

$$8 \times 10^{1} \quad ; \quad -4 \times 10^{5} \quad ; \quad 8 \times 10^{-4}$$

À ne pas faire : $78{,}3548 = 78{,}3548 \times 10^{0}$ est son écriture scientifique — $78{,}3548 = 7{,}83548 \times 10^{1}$. Dans l'écriture scientifique, le nombre a n'a qu'un seul chiffre, non nul, avant la virgule : $1 \leq |a| < 10$.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\sqrt{5}$ et π sont irrationnels.

   > Les naturels dekhel les relatifs, dekhel les décimaux, dekhel les rationnels, dekhel les réels. Racine carrée de cinq w pi irrationnels.
   > *Les naturels sont dans les relatifs, dans les décimaux, dans les rationnels, dans les réels. Racine carrée de cinq et pi sont irrationnels.*

2. Deux évolutions successives multiplient leurs coefficients : $+10\,\%$ puis $+20\,\%$ font $+32\,\%$.

   > Zouz augmentations wra ba3dhhom, les coefficients yetdharbou : dix pour cent w ba3d vingt pour cent ya3tiw trente-deux pour cent.
   > *Deux augmentations successives multiplient leurs coefficients : dix pour cent puis vingt pour cent donnent trente-deux pour cent.*

3. Sept identités remarquables, dont $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

   > Sept identités remarquables, menhom a au cube moins b au cube égale (a moins b) fois (a au carré plus a b plus b au carré).
   > *Sept identités remarquables, dont a au cube moins b au cube égale (a moins b) fois (a au carré plus a b plus b au carré).*

4. Si $0 < a < 1$: $a^2 < a < \sqrt{a}$ et $a < 1 < \dfrac{1}{a}$. Multiplier par un négatif ou passer à l'inverse renverse l'ordre.

   > Ki a bin zéro w un, a au carré asghar men a, w a asghar men racine de a. W edharb fi négatif walla l'inverse ybaddel l'ordre.
   > *Quand a est entre zéro et un, a au carré est plus petit que a, et a plus petit que racine de a. Multiplier par un négatif ou passer à l'inverse renverse l'ordre.*

5. $2xy \leq x^2 + y^2$ et $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ pour $a, b \geq 0$.

> Deux x y inférieur ou égal à x au carré plus y au carré, w a plus b, le tout sur deux, supérieur ou égal à racine de a b.
> *Deux x y est inférieur ou égal à x au carré plus y au carré, et a plus b, le tout sur deux, est supérieur ou égal à racine de a b.*

6. Le conjugué : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$; Héron : $\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
   > Le conjugué yna77i les racines mel dénominateur, w la formule de Héron ta3ti l'aire men les trois côtés.
   > *Le conjugué enlève les racines du dénominateur, et la formule de Héron donne l'aire à partir des trois côtés.*
7. $AB=|b-a|$; $|x-a|<r \iff a-r<x<a+r$.
   > La distance A B hiya valeur absolue de b moins a, w valeur absolue de x moins a inférieure à r ma3neha x bin a moins r w a plus r.
   > *La distance A B est valeur absolue de b moins a, et valeur absolue de x moins a inférieure à r signifie que x est entre a moins r et a plus r.*
8. a est une valeur approchée de b à 10^n près si $|b-a|\leq 10^n$; l'ordre de grandeur de $a\times 10^n$ est $b\times 10^n$, b arrondi de a à l'unité.
   > Valeur approchée à dix puissance n près, par défaut walla par excès, w l'ordre de grandeur narrondir a à l'unité.
   > *Valeur approchée à dix puissance n près, par défaut ou par excès ; pour l'ordre de grandeur, on arrondit a à l'unité.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna calcul dans R. Tfakker : 9bal ma te7seb, chouf la structure ; 9bal ma tna77i valeur absolue walla racine, chouf le signe ; w ki todhrob fi négatif, l'ordre yetbaddel. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا calcul dans R . تفكّر : قُبَلْ ما تحسب ، شوف la structure ؛ قُبَلْ ما تنحّي valeur absolue ولّا racine ، شوف le signe ؛ w كي تضرب في l'ordre ، négatif يتبدّل . يالله للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé calcul dans R. Retiens : avant de calculer, regarde la structure ; avant d'enlever une valeur absolue ou une racine, regarde le signe ; et quand on multiplie par un négatif, l'ordre change. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · LES ENSEMBLES DE NOMBRES

chnowa el far9 bin décimal w rationnel | différence entre un décimal et un rationnel

décimal w rationnel kifech nfar9hom | un rationnel est-il toujours décimal

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots \in \mathbb{Q}, \quad \notin \mathbb{D}$$

CE QU'IL RÉPOND

Décimal houwa nombre tektbou $\frac{a}{10^{n}}$, ya3ni l'écriture décimale mte3ou toufa. Rationnel houwa $\frac{a}{b}$, w l'écriture décimale mte3ou tnajjem ma toufech. Koll décimal rationnel, ama $\frac{2}{9}$ rationnel w mouch décimal : 0,222..., ma toufech.

a sur هو rationnel . متاعو توفى l'écriture décimale يعني ، a sur dix puissance n تكتبو nombre هو décimal
موش deux sur neuf rationnel w أما ، décimal rationnel كل . متاعو تنجّم ما توفاش b ، w l'écriture décimale
. ما توفاش ، décimal : zéro virgule deux deux deux

Un décimal s'écrit a sur dix puissance n : son écriture décimale s'arrête. Un rationnel s'écrit a sur b, et son écriture décimale peut ne pas s'arrêter. Tout décimal est rationnel, mais deux neuvièmes est rationnel sans être décimal : zéro virgule deux deux deux, sans fin.

QUESTION 2 · LES ENSEMBLES DE NOMBRES

racine de 5 rationnel walla le | est-ce que racine carrée de 36 est irrationnel | racine carrée toujours irrationnelle ? | sqrt 7 appartient à Q ?

CE QU'IL RÉPOND

Mouch dima. $\sqrt{36}$ hiya 6, entier naturel. Ama $\sqrt{5}$ walla $\sqrt{7}$, 5ater cinq w sept mouch carrés parfaits, houma irrationnels : réels ama mouch rationnels. A7seb la racine 9bal ma tsanef.

racine carrée ولّا racine carrée de cinq أما . six ، entier naturel هي racine carrée de trente-six . موش ديما
de sept ، خاطر cinq w sept موش carrés parfaits ، هوما irrationnels : réels أما موش rationnels . احسب الـ
. racine قُبَلْ ما تصنّف

Pas toujours. Racine carrée de trente-six vaut six, un entier naturel. Mais racine carrée de cinq ou de sept, comme cinq et sept ne sont pas des carrés parfaits, sont irrationnels : réels mais pas rationnels. Calcule la racine avant de classer.

QUESTION 3 · PROPORTIONNALITÉ ET POURCENTAGES

3lech augmentation 10% puis 20% mouch 30% | pourquoi deux augmentations successives on multiplie | augmentation successive kifech na7sbou | deux pourcentages successifs on additionne ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater el augmentation elli ba3dha tet7seb 3ala le prix elli zed. 10 % yodhrob le prix fi 1,1, w 20 % yodhorbou fi 1,2 : $1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$, ya3ni 32 %. Les coefficients yetdharbou, les

pourcentages ma yetzadouch.

خاطر الـ augmentation اللي بعدها تتحسب على le prix اللي زاد . dix pour cent يضرب le prix في un virgule
un virgule deux : un virgule un fois un virgule deux égale un virgule في يضربو un ، w vingt pour cent
ما يتزادوش . les pourcentages ، يتضربو trente-deux pour cent . les coefficients يعني ، trente-deux

Parce que la seconde augmentation se calcule sur le prix déjà augmenté. Dix pour cent multiplie le prix par un virgule un, et vingt pour cent par un virgule deux : un virgule un fois un virgule deux égale un virgule trente-deux, soit trente-deux pour cent. Les coefficients se multiplient, les pourcentages ne s'ajoutent pas.

QUESTION 4 · PROPORTIONNALITÉ ET POURCENTAGES

kifech nal9a le prix HT men TTC | comment trouver le prix hors taxes | prix TTC vers HT on enlève 17% ? | HT w TTC chnowa el far9

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\text{H.T.} = \frac{\text{T.T.C.}}{1{,}17}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le prix TTC houwa le prix HT × 1,17, ki la TVA 17 %. Donc bech traja3 lel HT, divisi 3ala 1,17, ma tna77ich 17 % mel TTC : la taxe tet7seb 3ala le prix HT, mouch 3ala le TTC.

باش ترجع للـ H la T V A dix-sept pour cent . donc كي ، le prix H T fois un virgule dix-sept هو le prix T T C
، le prix H T تتحسب على taxe الـ : T T C مالـ dix-sept pour cent ، ما تنحّيش ، un virgule dix-sept على تقسم ، T
. le T T C موش على

Le prix T T C est le prix H T fois un virgule dix-sept, pour une T V A de dix-sept pour cent. Pour revenir au H T, on divise donc par un virgule dix-sept ; on ne retire pas dix-sept pour cent du T T C : la taxe est calculée sur le prix H T, pas sur le T T C.

QUESTION 5 · LES IDENTITÉS REMARQUABLES

kifech ndéveloppi (a+b)^3 | développer le cube d'une somme | développement du cube de a plus b égale a cube plus b cube ? | développement cube kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

CE QU'IL RÉPOND

$(a + b)^{3} = a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3}$: quatre termes, les coefficients 1, 3, 3, 1. Mouch $a^{3} + b^{3}$: jarreb a = b = 1, tal9a 8, mouch 2.

a plus b le tout au cube égale a au cube plus trois a au carré b plus trois a b au carré plus b au cube :
a égale b جرّب : a au cube plus b au cube موش . quatre termes ، les coefficients un ، trois ، trois ، un
. deux موش ، huit تلقى ، égale un

a plus b le tout au cube égale a au cube plus trois a au carré b plus trois a b au carré plus b au cube : quatre termes, de coefficients un, trois, trois, un. Ce n'est pas a au cube plus b au cube : essaie a égale b égale un, tu trouves huit, pas deux.

QUESTION 6 · LES IDENTITÉS REMARQUABLES

kifech nfactorizi x^3 - 64 | factoriser une différence de deux cubes | a cube moins b cube factorisation | factoriser 8 + 27x^3 somme de cubes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

CE QU'IL RÉPOND

$a^{3} - b^{3} = (a - b)(a^{2} + ab + b^{2})$, w $a^{3} + b^{3} = (a + b)(a^{2} - ab + b^{2})$. $x^{3} - 64$ houwa $x^{3} - 4^{3}$: $(x - 4)(x^{2} + 4x + 16)$.

a au cube moins b au cube égale (a moins b) fois (a au carré plus a b plus b au carré) ، w a au cube plus b au cube égale (a plus b) fois (a au carré moins a b plus b au carré) . x au cube moins soixante-quatre هو x au cube moins quatre au cube : (x moins quatre) fois (x au carré plus quatre x plus seize) .

a au cube moins b au cube égale (a moins b) fois (a au carré plus a b plus b au carré), et a au cube plus b au cube égale (a plus b) fois (a au carré moins a b plus b au carré). x au cube moins soixante-quatre, c'est x au cube moins quatre au cube : (x moins quatre) fois (x au carré plus quatre x plus seize).

QUESTION 7 · COMPARER A, A² ET √A

kifech a au carré asghar men a | le carré d'un nombre peut être plus petit que lui ? | a^2 plus petit que a quand | carré plus petit 3lech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$0 < a < 1 \Longrightarrow a^2 < a$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, ki a bin 0 w 1. a^{2} houwa a × a, w todhrob a fi nombre asghar men 1, yosghar. Par exemple $0{,}3^{2} = 0{,}09$, asghar men 0,3. W ki a akbar men 1, a^{2} akbar men a.

par exemple . يصغر ، un أصغر من nombre في a تضرب a fois a ، w هو zéro w un . a au carré بين a كي ، إيه zéro virgule trois au carré égale zéro virgule zéro neuf ، أصغر من a كي zéro virgule trois . w ، un أكبر من a au carré أكبر من a .

Oui, quand a est entre zéro et un. a au carré, c'est a fois a : on multiplie a par un nombre plus petit que un, il rapetisse. Par exemple zéro virgule trois au carré égale zéro virgule zéro neuf, plus petit que zéro virgule trois. Et quand a est plus grand que un, a au carré est plus grand que a.

QUESTION 8 · COMPARER A, A² ET √A

racine de a akbar men a kifech | la racine carrée peut être plus grande que le nombre ? | racine carrée plus grande que a quand | sqrt(0,34) plus grand que 0,34 ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$0 < a < 1 \Longrightarrow a < \sqrt{a}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, ki a bin 0 w 1 : $\sqrt{a}$ akbar men a. 5ater $\sqrt{a}$ hiya zeda bin 0 w 1, w a houwa le carré mte3ha, w le carré ysaghar. $\sqrt{0{,}34}$ akbar men 0,34. W ki a akbar men 1, el 3aks.

إيه ، كي a بين zéro w un : racine carrée de a أكبر من a . خاطر racine carrée de a هي زادة بين zéro w un ، w a هو le carré متاعها ، le carré w يصغّر racine carrée de zéro virgule trente-quatre . zéro virgule أكبر من a كي أكبر من un ، العكس . trente-quatre . w

Oui, quand a est entre zéro et un : racine carrée de a est plus grand que a. Car racine carrée de a est aussi entre zéro et un, et a en est le carré, et le carré rapetisse. Racine carrée de zéro virgule trente-quatre est plus grand que zéro virgule trente-quatre. Et quand a dépasse un, c'est l'inverse.

QUESTION 9 · COMPARER A ET 1/A

3lech l'inverse ybaddel l'ordre | pourquoi 1/2 plus grand que 1/3 | inverse de deux nombres positifs ordre | un sur a akbar walla asghar men a

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$0 < a < b \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz nombres strictement positifs, el akbar 3andou l'inverse el asghar. Divisi gâteau 3ala 2 walla 3ala 3 : ettarf ki tdivisi 3ala 3 asghar, ya3ni $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. W ki a akbar men 1, $\frac{1}{a}$ asghar men 1.

زوز nombres strictement positifs ، الأكبر عندو l'inverse الأصغر . اقسم gâteau على deux ولّا على trois : الطرف كي تقسم على trois أصغر ، يعني un sur trois أصغر من un sur deux . w كي a أكبر من un ، un sur a أصغر من un .

Pour deux nombres strictement positifs, le plus grand a le plus petit inverse. Partage un gâteau en deux ou en trois : la part est plus petite en trois, donc un tiers est plus petit qu'un demi. Et quand a est plus grand que un, un sur a est plus petit que un.

QUESTION 10 · ENCADRER UNE EXPRESSION

3lech el sens yetbaddel ki nodhrob f négatif | pourquoi on change le sens de l'inégalité avec un nombre négatif | multiplier une inégalité par un négatif | encadrement fois moins 3 le sens

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$-2 \leq a \leq 3 \Longrightarrow -9 \leq -3a \leq 6$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater edharb fi nombre négatif ybaddel les positions 3la la droite : 2 < 3, ama −2 > −3. Donc ki todhrob encadrement fi nombre négatif, le sens yetbaddel, w el borne essghira twalli el kbira.

خاطر الضرب في nombre négatif يقلب les positions على la droite : deux أصغر من trois ، أما moins deux أكبر من moins trois . donc كي تضرب في le sens encadrement ، nombre négatif يتبدّل ، w الـ borne الصغيرة تولّي الكبيرة .

Parce que multiplier par un nombre négatif retourne les positions sur la droite : deux est plus petit que trois, mais moins deux est plus grand que moins trois. Donc quand on multiplie un encadrement par un nombre négatif, le sens change, et la petite borne devient la grande.

QUESTION 11 · ENCADRER UNE EXPRESSION

kifech nencadri un quotient | encadrer la largeur aire divisée par longueur | encadrement d'un quotient on divise les bornes ? | diviser deux encadrements membre à membre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{16{,}12}{5{,}3} \leq \ell \leq \frac{16{,}96}{5{,}2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ma tdivisich zouz encadrements membre à membre. Encadri l'inverse mta3 le dénominateur, w rodd belek yetbaddel le sens, w ba3d odhrob membre à membre, ki el koll positifs. La largeur el kbira tji men l'aire el kbira w la longueur essghira.

ما تقسمش زوز encadrements membre à membre ، w متاع le dénominateur ردّ بالك . encadri l'inverse اضرب membre à membre ، w ba3d يتبدّل le sens ، كي الكل la largeur positifs . الكبيرة تجي من l'aire الكبيرة w la longueur الصغيرة .

Ne divise pas deux encadrements membre à membre. Encadre l'inverse du dénominateur, en renversant le sens, puis multiplie membre à membre, quand tout est positif. La plus grande largeur vient de la plus grande aire et de la plus petite longueur.

QUESTION 12 · ENCADRER UNE EXPRESSION

najjem natra7 zouz encadrements | peut-on soustraire deux encadrements | soustraire deux inégalités membre à membre | différence de deux encadrements kifech

CE QU'IL RÉPOND

La. Zouz encadrements najjmou njam3ouhom membre à membre, ama ma natra7oumch. Bech tencadrer a − b, encadri −b 9bal : todhrob fi −1 w yetbaddel le sens, w ba3d tjma3 m3a l'encadrement mta3 a.

لا . زوز encadrements نجّمو نجمعوهم membre à membre ، أما ما نطرحوهمش . باش تـ encadrer a moins b ، قْبَلْ encadri moins b : تضرب في moins un w يتبدّل le sens ، w ba3d تجمع مع l'encadrement متاع a .

Non. Deux encadrements s'ajoutent membre à membre, mais ne se soustraient pas. Pour encadrer a moins b, encadre d'abord moins b : on multiplie par moins un et le sens change, puis on l'ajoute à l'encadrement de a.

QUESTION 13 · DEUX CARRÉS ET UN DOUBLE PRODUIT

3lech 2xy inférieur à $x^2 + y^2$ | pourquoi 2xy est plus petit que x carré plus y carré | démontrer 2xy ≤ x^2 + y^2 | 2xy w x^2+y^2 kifech nthabtou

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$$

CE QU'IL RÉPOND

$x^{2} + y^{2} - 2xy = (x - y)^{2}$, w carré dima positif walla nul. Idhan $2xy \le x^{2} + y^{2}$, w tetsewa ken ki x = y.

. nul ولّا positif ديما x au carré plus y au carré moins deux x y égale x moins y le tout au carré ، w carré

. x égale y كي تتساوى كان deux x y inférieur ou égal à x au carré plus y au carré ، w إذن

x au carré plus y au carré moins deux x y égale x moins y le tout au carré, et un carré est toujours positif ou nul. Donc deux x y est inférieur ou égal à x au carré plus y au carré, avec égalité seulement quand x égale y.

QUESTION 14 · DEUX CARRÉS ET UN DOUBLE PRODUIT

3lech x + 1/x supérieur à 2 | pourquoi x plus un sur x est plus grand que 2 | x + 1/x ≥ 2 démonstration | un nombre plus son inverse toujours plus que 2 ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki x strictement positif : $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x - 1)^{2}}{x}$. El fou9 carré, w el louta positif, donc positif. $x + \frac{1}{x} \ge 2$, w ysewi 2 ken ki x = 1.

carré ، w الفوق . x strictement positif : x plus un sur x moins deux égale (x moins un) au carré sur x كي

. x égale un كان كي deux يساوي positif ، donc positif . x plus un sur x supérieur ou égal à deux ، w اللوطة

Pour x strictement positif : x plus un sur x moins deux égale (x moins un) au carré sur x. Le numérateur est un carré, le dénominateur est positif, donc le tout est positif. x plus un sur x est supérieur ou égal à deux, avec égalité seulement pour x égale un.

QUESTION 15 · MOYENNE ARITHMÉTIQUE ET MOYENNE GÉOMÉTRIQUE

chnowa la moyenne géométrique | moyenne arithmétique et moyenne géométrique différence

moyenne géométrique ya3ni chnowa | pourquoi la moyenne géométrique est plus petite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz nombres positifs a w b : la moyenne arithmétique hiya $\frac{a + b}{2}$, w la moyenne géométrique hiya $\sqrt{ab}$. El géométrique dima asghar walla kif kif : $\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^{2}}{2}$.

زوز nombres positifs a w b : la moyenne arithmétique هي a plus b, le tout sur deux ، w la moyenne géométrique هي racine carrée de a b . الـ géométrique ديما أصغر ولّا كيف كيف : a plus b, le tout sur deux moins racine de a b égale (racine de a moins racine de b) au carré sur deux .

Pour deux nombres positifs a et b, la moyenne arithmétique est a plus b, le tout sur deux, et la moyenne géométrique est racine carrée de a b. La géométrique est toujours plus petite ou égale : a plus b, le tout sur deux moins racine de a b égale (racine de a moins racine de b) au carré sur deux.

QUESTION 16 · L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE AU TRAVAIL

chnowa l'inégalité triangulaire | c'est quoi l'inégalité triangulaire | inégalité triangulaire ya3ni chnowa | inégalité triangulaire kifech nesta3melha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AB \leq AC + CB$$

CE QU'IL RÉPOND

L thleth nou9at A, B w C : $AB \le AC + CB$. Ettri9 el moubecher houwa el a9sar. W tetsewa ken ki C 3la le segment [AB]. Nesta3mlouha barcha bech ncompariw des sommes de longueurs.

لثلاث نقاط A ، B w C : A B inférieur ou égal à A C plus C B . الطريق المباشر هو الأقصر . w تتساوى كان كي C على le segment A B . نستعملوها برشا باش ncompariw des sommes de longueurs .

Pour trois points A, B et C : A B est inférieur ou égal à A C plus C B. Le chemin direct est le plus court. Il y a égalité seulement quand C est sur le segment A B. On s'en sert beaucoup pour comparer des sommes de longueurs.

QUESTION 17 · LES RADICAUX : CONJUGUÉ ET RACINES IMBRIQUÉES

chnowa el conjugué | c'est quoi le conjugué d'une expression | conjugué de 3 + racine de 2 | le conjugué ya3ni chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

CE QU'IL RÉPOND

Le conjugué mta3 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ houwa $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: nbaddlou ken le signe elli fel wost. El faydaa mte3ou : edharb mte3hom ya3ti $a - b$, blech racine. Le conjugué de $3 + \sqrt{2}$ houwa $3 - \sqrt{2}$, w edharb ya3ti 7.

اللي le signe كان نبدّلو : racine de a moins racine de b هو racine de a plus racine de b متاع le conjugué في الوسط . الفايدة متاعو : الضرب متاعهم يعطي a moins b ، بلاش racine . le conjugué de trois plus racine de deux ، w هو trois moins racine de deux الضرب يعطي sept .

Le conjugué de racine de a plus racine de b est racine de a moins racine de b : on change seulement le signe du milieu. Son intérêt : leur produit vaut a moins b, sans racine. Le conjugué de trois plus racine de deux est trois moins racine de deux, et leur produit vaut sept.

QUESTION 18 · LES RADICAUX : CONJUGUÉ ET RACINES IMBRIQUÉES

kifech nna7i racine mel dénominateur | comment enlever une racine du dénominateur | pourquoi pas de radical au dénominateur | radical au dénominateur kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

CE QU'IL RÉPOND

Odhrob el fou9 w el louta fi nafs el 7aja. Ki le dénominateur $\sqrt{a}$, odhrob fi $\sqrt{a}$. Ki fih somme walla différence, odhrob fi le conjugué : la différence de deux carrés tna77i les racines. $\frac{1}{3 + \sqrt{2}}$ ywalli $\frac{3 - \sqrt{2}}{7}$.

اضرب الفوق w اللوطة في نفس الحاجة . كي le dénominateur racine de a ، اضرب في racine de a . كي فيه ولّا somme différence ، اضرب في le conjugué : la différence de deux carrés تنحّي (trois plus racine de deux) يولّي (trois moins racine de deux) sur sept . les racines . un sur

Multiplie le haut et le bas par la même chose. Si le dénominateur est racine de a, multiplie par racine de a. S'il contient une somme ou une différence, multiplie par le conjugué : la différence de deux carrés fait disparaître les racines. Un sur (trois plus racine de deux) devient (trois moins racine de deux) sur sept.

QUESTION 19 · DEUX CARRÉS ET UN DOUBLE PRODUIT

racine de la somme égale somme des racines ? | sqrt(a+b) = sqrt a + sqrt b vrai ? | racine d'une somme kifech | pourquoi la racine d'une somme n'est pas la somme

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{9+16} = 5 < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$$

CE QU'IL RÉPOND

La. Racine de (a plus b) mouch $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Jarreb : $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, ama $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. Pour a w b strictement positifs, $\sqrt{a + b}$ dima asghar.

racine de هي racine de (neuf plus seize) : جرّب . racine de a plus racine de b موش racine de (a plus b) . لا sept . pour a w b strictement positifs ، هي racine de neuf plus racine de seize أما ، vingt-cinq ، cinq

. ديما أصغر racine de (a plus b)

Non. Racine de (a plus b) n'est pas racine de a plus racine de b. Essaie : racine de (neuf plus seize), c'est racine de vingt-cinq, cinq, alors que racine de neuf plus racine de seize vaut sept. Pour a et b strictement positifs, racine de (a plus b) est toujours plus petite.

QUESTION 20 · LES RADICAUX : CONJUGUÉ ET RACINES IMBRIQUÉES

kifech nbassat racine dakhel racine | simplifier une racine imbriquée | racines imbriquées comment faire | racine de 9 - 4 racine de 5 kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz tor9at. Lawej 3la carré, par exemple $9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^{2}$, donc la racine hiya $\sqrt{5} - 2$, 5ater lezemha positive. Wala, ki 3andek somme de racines A : a7seb A^{2} 9bal, w ba3d $A = \sqrt{A^{2}}$.

زوز طرق . لوّج على (deux moins racine de cinq) هو carré ، par exemple neuf moins quatre racine de cinq somme de عندك كي ، ولّا . positive خاطر لازمها ، racine de cinq moins deux هي au carré ، donc la racine racines A : احسب A au carré قُبَلْ A ، w ba3d A هي racine de A au carré .

Deux méthodes. Cherche un carré : par exemple neuf moins quatre racine de cinq, c'est (deux moins racine de cinq) au carré, donc sa racine vaut racine de cinq moins deux, car elle doit être positive. Ou bien, face à une somme de racines A, calcule d'abord A au carré, puis A égale racine de A au carré.

QUESTION 21 · LA FORMULE DE HÉRON

chnowa formule de Héron | formule de Héron kifech nesta3melha | aire d'un triangle avec Héron | Héron ya3ni chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

CE QU'IL RÉPOND

La formule de Héron ta3tik l'aire mta3 triangle men les trois côtés berk : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, w p houwa le demi-périmètre. Triangle de côtés 18, 24 w 30 : p = 36, w l'aire 216.

l'aire égale racine carrée du : برك les trois côtés من triangle متاع l'aire تعطيك la formule de Héron le demi-périmètre . triangle de côtés هو produit p fois (p moins a) fois (p moins b) fois (p moins c) ، w p . dix-huit ، vingt-quatre w trente : p égale trente-six ، w l'aire deux cent seize

La formule de Héron donne l'aire d'un triangle à partir de ses trois côtés seulement : l'aire égale racine carrée du produit p fois (p moins a) fois (p moins b) fois (p moins c), où p est le demi-périmètre. Pour un triangle de côtés dix-huit, vingt-quatre et trente : p vaut trente-six, et l'aire deux cent seize.

QUESTION 22 · DÉVELOPPER, FACTORISER, COMPARER DEUX EXPRESSIONS

chnowa el far9 bin développer w factoriser | différence entre développer et factoriser | développer ou factoriser kifech na3ref | factoriser c'est le contraire de développer ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(x+5)(7x-2) = 7x^2 + 33x - 10$$

CE QU'IL RÉPOND

Développer ma3neha produit ywalli somme : todhrob w tréduire. Factoriser houwa el 3aks : somme twalli produit, b facteur commun walla b identité remarquable. Par exemple $(x + 5)(7x - 2)$, ki tdévelopper, ya3ti $7x^{2} + 33x - 10$.

développer معناها produit يولّي somme : تضرب w تـ factoriser . réduire هو العكس : somme تولّي produit ، بـ facteur commun ولّا بـ (x plus cinq) fois (sept x moins deux) . par exemple identité remarquable ، كي تـ développer ، يعطي dix moins trente-trois x carré plus sept x au .

Développer, c'est transformer un produit en somme : on multiplie, puis on réduit. Factoriser, c'est l'inverse : transformer une somme en produit, par un facteur commun ou une identité remarquable. Par exemple (x plus cinq) fois (sept x moins deux), une fois développé, donne sept x au carré plus trente-trois x moins dix.

QUESTION 23 · DÉVELOPPER, FACTORISER, COMPARER DEUX EXPRESSIONS

A(x) = B(x) pour trois valeurs donc égales pour tout x ? | égales pour quelques valeurs mais pas pour tout x | kifech nthabet égalité pour tout x | deux expressions égales pour tout réel x comment le montrer

CE QU'IL RÉPOND

La. Zouz expressions yetsewew fi quelques valeurs, ma ma3nehech égales pour tout x. Mathalan A(x) = $x^3 - x|x| + 2x + 2$ w B(x) = $(x + 1)(x^2 - x + 2)$ yetsewew fi −1, 0 w 1, ama A(2) = 10 w B(2) = 12. Bech tethbet égalité pour tout x, 7awwel expression lin toussel lel o5ra.

لا . زوز expressions يتساواو في quelques valeurs ، ما معناهاش égales pour tout x . مثلاً A de x égale x au cube moins x valeur absolue de x plus deux x plus deux ، w B de x égale (x plus un) fois (x au carré moins x plus deux) : يتساواو في un ، zéro w un ، moins أما ، douze égale deux de B w dix égale deux de A . باش تثبت égalité pour tout x ، حوّل expression لين توصل للأخرى .

Non. Deux expressions égales pour quelques valeurs ne sont pas égales pour tout x. Par exemple, A de x égale x au cube moins x valeur absolue de x plus deux x plus deux, et B de x égale (x plus un) fois (x au carré moins x plus deux) : elles coïncident en moins un, zéro et un, mais A de deux vaut dix et B de deux vaut douze. Pour prouver une égalité pour tout x, transforme une expression jusqu'à obtenir l'autre.

QUESTION 24 · LA VALEUR ABSOLUE ET LA DISTANCE

chnowa la valeur absolue | c'est quoi la valeur absolue d'un nombre | valeur absolue définition | valeur absolue ya3ni chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0, \quad |x| = -x \text{ si } x \leq 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Valeur absolue de x hiya x ken x positif, w −x ken x négatif. Ya3ni dima positive walla nulle : $|-3| = 3$. W 3la droite graduée, hiya la distance bin x w 0.

valeur absolue de x هي x كان x positif ، w moins x كان x négatif . يعني ديما positive ولّا nulle : valeur absolue de moins trois égale trois . w absolue de moins trois égale trois . w droite graduée على ، هي la distance بين zéro w x .

La valeur absolue de x, c'est x si x est positif, et moins x si x est négatif. Elle est donc toujours positive ou nulle : valeur absolue de moins trois égale trois. Sur une droite graduée, c'est la distance entre x et zéro.

QUESTION 25 · LA VALEUR ABSOLUE ET LA DISTANCE

valeur absolue w distance chnowa el 3ala9a | pourquoi la valeur absolue est une distance | distance AB avec valeur absolue | valeur absolue de x moins a distance

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AB = |b - a|$$

CE QU'IL RÉPOND

3la droite graduée, ki A 3andou l'abscisse a w B 3andou l'abscisse b, $AB = |b - a|$. Donc $|x - a| = 5$ ma3neha ennou9at elli 3la distance 5 men a : zouz, wa7ed 3al imin w wa7ed 3al isar.

valeur absolue de هي l'abscisse b ، la distance A B عندو l'abscisse a w B عندو A كي ، droite graduée على ، زوز : a من distance cinq على معناها النقاط اللي b moins a . donc valeur absolue de x moins a égale cinq واحد على اليمين w واحد على اليسار .

Sur une droite graduée, si A a pour abscisse a et B pour abscisse b, la distance A B est valeur absolue de b moins a. Donc valeur absolue de x moins a égale cinq désigne les points à la distance cinq de a : il y en a deux, un à droite et un à gauche.

QUESTION 26 · LA VALEUR ABSOLUE ET LA DISTANCE

valeur absolue égale un nombre négatif solution | valeur absolue égale 1 - racine de 2 qui est négatif kifech | est-ce qu'une valeur absolue peut être négative | valeur absolue négative possible ?

CE QU'IL RÉPOND

La, valeur absolue dima positive walla nulle, 5ater hiya distance. Donc $|4x - 1| = 1 - \sqrt{2}$ ma 3andhech 7atta solution : $1 - \sqrt{2}$ négatif. Chouf le signe mta3 le second membre 9bal ma t7ell.

لا ، valeur absolue ديما positive ولّا nulle ، خاطر هي un moins x quatre de absolue valeur donc . distance le شوف . solution : un moins racine de deux négatif حتّى ، ما عندهاش égale un moins racine de deux قُبَلْ ما تحلّ . le second membre متاع signe

Non, une valeur absolue est toujours positive ou nulle, car c'est une distance. Donc valeur absolue de quatre x moins un égale un moins racine de deux n'a aucune solution : un moins racine de deux est négatif. Regarde le signe du second membre avant de résoudre.

QUESTION 27 · VALEURS APPROCHÉES

chnowa el far9 bin par défaut w par excès | valeur approchée par défaut ou par excès | différence entre défaut et excès | par défaut ya3ni chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$$

CE QU'IL RÉPOND

Par défaut, la valeur approchée asghar men le nombre, w par excès akbar menou. $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$: à 10^{-2} près, par défaut 2,23, w par excès 2,24.

racine de cinq égale deux . أكبر منو le nombre ، w par excès أصغر من par défaut ، la valeur approchée virgule deux trois six ... ، à dix puissance moins deux près ، par défaut deux virgule vingt-trois ، w par . excès deux virgule vingt-quatre

Par défaut, la valeur approchée est plus petite que le nombre, et par excès, plus grande. Racine de cinq égale deux virgule deux trois six et la suite : à dix puissance moins deux près, deux virgule vingt-trois par défaut, et deux virgule vingt-quatre par excès.

QUESTION 28 · VALEURS APPROCHÉES

kifech na3mel l'arrondi | comment calculer un arrondi à 10^-2 | arrondi au centième comment | l'arrondi c'est quoi exactement

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{75}{17} \approx 4{,}412$$

CE QU'IL RÉPOND

L'arrondi houwa la valeur approchée el a9rab lel nombre. Tchouf le chiffre elli ba3d e5er chiffre elli t7eb t5allih : ken 5 walla akther, totla3, w ken a9al, t5alli. $\frac{75}{17} = 4{,}4117\ldots$: l'arrondi à 10^{-3} houwa 4,412.

: تحب تخلّيه اللي chiffre بعد آخر اللي le chiffre تشوف . nombre للـ الأقرب la valeur approchée هو l'arrondi soixante-quinze sur dix-sept égale quatre virgule quatre un un . تخلّي ، كان أقل w ، تطلع ، أكثر ولّا cinq كان . quatre virgule quatre cent douze هو sept ... : l'arrondi à dix puissance moins trois

L'arrondi est la valeur approchée la plus proche du nombre. On regarde le chiffre qui suit le dernier chiffre gardé : s'il vaut cinq ou plus, on monte ; sinon, on garde. Soixante-quinze sur dix-sept égale quatre virgule quatre un un sept et la suite : l'arrondi à dix puissance moins trois est quatre virgule quatre cent douze.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

QUESTION 29 · ÉCRITURE SCIENTIFIQUE ET ORDRE DE GRANDEUR

chnowa l'ordre de grandeur | c'est quoi un ordre de grandeur | ordre de grandeur kifech nal9ah | comment trouver l'ordre de grandeur d'un nombre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$3{,}5215 \times 10^{7} \longrightarrow 4 \times 10^{7}$

CE QU'IL RÉPOND

Tekteb le nombre en écriture scientifique, $a \times 10^{n}$, w ba3d tarrondir a à l'unité w t5alli nafs 10^{n}. $3{,}5215 \times 10^{7}$, l'ordre de grandeur mte3ou 4×10^{7}. Yekhdmek bech t9adder blech calcul exact.

تكتب ba3d w n ، a fois dix puissance n ، le nombre en écriture scientifique ـ تـ w arrondir a à l'unité تخلّي
نفس l'ordre de grandeur ، trois virgule cinq deux un cinq fois dix puissance sept . dix puissance n متاعو
. quatre fois dix puissance sept يخدمك باش تقدّر بلاش . calcul exact

Écris le nombre en écriture scientifique, a fois dix puissance n, puis arrondis a à l'unité en gardant la même puissance de dix. Trois virgule cinq deux un cinq fois dix puissance sept a pour ordre de grandeur quatre fois dix puissance sept. Cela sert à estimer sans calcul exact.

QUESTION 30 · ÉCRITURE SCIENTIFIQUE ET ORDRE DE GRANDEUR

chnowa l'écriture scientifique | écriture scientifique c'est quoi | kifech nekteb nombre en écriture scientifique | écriture scientifique d'un nombre plus petit que 1

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$0{,}0007845 = 7{,}845 \times 10^{-4}$

CE QU'IL RÉPOND

L'écriture scientifique hiya $a \times 10^{n}$, w a 3andou chiffre wa7ed non nul 9bal la virgule, ya3ni $1 \le |a| < 10$. $0{,}0007845 = 7{,}845 \times 10^{-4}$: la virgule temchi quatre rangs, w l'exposant négatif 5ater le nombre asghar men 1.

هي l'écriture scientifique w a ، n a fois dix puissance عندو chiffre واحد non nul la virgule قْبَلْ ، يعني بين
sept virgule huit quatre cinq fois dix تولّي ، un w dix . zéro virgule zéro zéro zéro sept huit quatre cinq
أصغر من le nombre خاطر quatre rangs ، w l'exposant négatif تمشي puissance moins quatre : la virgule
. un

L'écriture scientifique, c'est a fois dix puissance n, où a a un seul chiffre non nul avant la virgule, c'est-à-dire entre un et dix. Zéro virgule zéro zéro zéro sept huit quatre cinq devient sept virgule huit quatre cinq fois dix puissance moins quatre : la virgule avance de quatre rangs, et l'exposant est négatif car le nombre est plus petit que un.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE

Un produit qui se simplifie en chaîne

Calcule le produit $P = \left(1+\frac{1}{2}\right) \times \left(1+\frac{1}{3}\right) \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{2002}\right) \times \left(1+\frac{1}{2003}\right)$ (concours Kangourou 2003).

Réponse attendue : `1002`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris chaque facteur sous la forme d'une seule fraction.
2. Chaque facteur s'écrit :
   $1+\frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$
3. Le numérateur de chaque facteur est le dénominateur du suivant : regarde ce qui reste au bout de la chaîne.

CORRECTION

Chaque facteur —

$P = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \ldots \times \frac{2003}{2002} \times \frac{2004}{2003}$

La chaîne — Tous les nombres de 3 à 2003 apparaissent une fois en haut et une fois en bas.

$P = \frac{2004}{2}$

$P = 1002$

Il ne reste que le dernier numérateur et le premier dénominateur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2004` → Tu as gardé le dernier numérateur, 2004, mais il reste aussi le premier dénominateur, 2.

`1001 / 2003` → Recompte la chaîne : le premier facteur est $\frac{3}{2}$ et le dernier $\frac{2004}{2003}$.

EXERCICE 2 · BASE

Le ressort

L'allongement d'un ressort est proportionnel à la masse suspendue : une masse de 15 g provoque un allongement de 9 mm. Quelle masse provoque un allongement de 42 mm ?

Donne la masse en grammes, le nombre seul, sans l'unité.

Réponse attendue : `70`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le coefficient qui fait passer de la masse à l'allongement.
2. Le coefficient vaut :
   $\frac{9}{15} = 0{,}6$
3. Ici, on connaît l'allongement : on fait le chemin inverse, donc on divise.

CORRECTION

Le coefficient —

$\frac{9}{15} = 0{,}6$

Le chemin inverse — Allongement $= 0{,}6\times$ masse, donc masse $=$ allongement $\div 0{,}6$.

$m = \frac{42}{0{,}6} = 70$

On vérifie : $0{,}6 \times 70 = 42$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`25.2` → Tu as multiplié 42 par $0{,}6$: ce coefficient fait passer de la masse à l'allongement, pas l'inverse.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Deux augmentations successives

Un article est mis en vente à 10 dinars. Il subit deux augmentations successives, de $10\,\%$ puis de $20\,\%$. Quel est le pourcentage global d'augmentation ?

Donne le pourcentage, sans le signe %.

Réponse attendue : `32`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une augmentation de $t\,\%$ multiplie le prix par $1 + \frac{t}{100}$.
2. La seconde augmentation porte sur le prix déjà augmenté.
3. Multiplie les deux coefficients, puis lis le pourcentage.

CORRECTION

Les coefficients —

$1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$

Le prix passe de 10 à $13{,}2$ dinars.

$10 \times 1{,}32 = 13{,}2$

$1{,}32 = 1 + \frac{32}{100}$

Les coefficients se multiplient : on n'ajoute pas les pourcentages.

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → Tu as ajouté 10 et 20. Mais les $20\,\%$ portent sur 11 dinars, pas sur 10 : les coefficients se multiplient.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

Revenir au prix initial

Un article mis en vente subit une augmentation de $10\,\%$ puis une réduction, et il revient à son prix initial. Quel est le taux de la réduction ?

Donne le taux en pourcentage, arrondi à 0,01 près, sans le signe %.

Réponse attendue : `9.09`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle r le taux de réduction : le prix est multiplié par $1{,}1$ puis par $1 - r$.
2. Le prix final est le prix initial : le produit des deux coefficients vaut 1.
3. Résous :
$$1{,}1 \times (1 - r) = 1$$

CORRECTION

L'équation —

$$1{,}1 \times (1 - r) = 1 \iff 1 - r = \frac{1}{1{,}1} = \frac{10}{11}$$

$$r = 1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$$

En pourcentage —

$$\frac{1}{11} \approx 0{,}0909 = 9{,}09\,\%$$

La réduction est plus petite que $10\,\%$, car elle porte sur un prix plus grand.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Une baisse de $10\,\%$ ne compense pas une hausse de $10\,\%$: $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$.

`100/11` / `9.091` / `9.0909` / `9.09091` / `9.090909` → Ta valeur est juste, mais on la demande arrondie à $0{,}01$ près : $9{,}09$.

EXERCICE 5 · BASE

Retrouver le prix hors taxes

Pour un taux de T.V.A. de $17\,\%$, un article est vendu $35{,}100$ dinars T.T.C. Quel est son prix H.T. ?

Donne le prix en dinars.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le prix T.T.C. s'obtient en multipliant le prix H.T. par un coefficient.
2. Ce coefficient vaut :
$$1 + \frac{17}{100} = 1{,}17$$
3. On connaît le prix T.T.C. : on fait le chemin inverse.

CORRECTION

La relation —

$$\text{T.T.C.} = \text{H.T.} \times 1{,}17$$

Le chemin inverse —

$$\text{H.T.} = \frac{35{,}1}{1{,}17} = 30$$

On vérifie : $30 \times 1{,}17 = 35{,}1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`29.133` → Tu as retiré $17\,\%$ du prix T.T.C. Mais la T.V.A. a été calculée sur le prix H.T. : il faut diviser par $1{,}17$.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Une racine imbriquée

Écris $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$ sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers.

Réponse attendue : `5+sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche $28+10\sqrt{3}$ comme le carré d'une somme $(a+b\sqrt{3})^2$.
2. Développe le carré :
   $(a+b\sqrt{3})^2 = a^2+3b^2+2ab\sqrt{3}$
3. Il faut $2ab=10$ et $a^2+3b^2=28$: essaie $b=1$.

CORRECTION

Le carré —

$(5+\sqrt{3})^2 = 25+10\sqrt{3}+3 = 28+10\sqrt{3}$

Le signe — $5+\sqrt{3}$ est positif : c'est bien la racine carrée.

$\sqrt{28+10\sqrt{3}} = 5+\sqrt{3}$

Une racine imbriquée se simplifie quand ce qu'elle contient est le carré d'une somme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5-sqrt(3)` → $(5-\sqrt{3})^2 = 28-10\sqrt{3}$: le double produit doit être positif ici.

EXERCICE 7 · PRATIQUE

Un produit de quatre entiers consécutifs

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$. Pour $n=10$, x est le carré d'un entier naturel. Lequel ?

Donne l'entier dont x est le carré.

Réponse attendue : `131`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe les facteurs deux par deux : le premier avec le dernier, les deux du milieu ensemble.
2. Avec $u = n^2+3n$:
   $n(n+3) = u$ et $(n+1)(n+2) = u+2$
3. Alors :
   $x = u(u+2)+1 = (u+1)^2$

CORRECTION

La conjecture démontrée —

$x = (n^2+3n+1)^2$

Pour n = 10 —

$n^2+3n+1 = 100+30+1 = 131$

Vérification —

$10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 = 17161 = 131^2$

Le produit de quatre entiers consécutifs, plus 1, est toujours un carré parfait.

PIÈGES ANTICIPÉS

`17161 / 131^2 / 131² / x=131²` → C'est la valeur de x ; on demande l'entier dont x est le carré.

EXERCICE 8 · BASE

Un calcul mental

Calcule mentalement $N = (75895478)^2 - (75895477) \times (75895479)$.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle $n = 75895478$: les deux autres nombres sont $n - 1$ et $n + 1$.
2. Une identité remarquable :
   $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$
3. Remplace, puis simplifie.

CORRECTION

Nommer —

$n = 75895478$

$n^2 - (n-1)(n+1) = n^2 - (n^2 - 1)$

$n^2 - n^2 + 1 = 1$

Une lettre à la place d'un grand nombre fait apparaître l'identité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1` → Attention au signe moins devant $(n^2 - 1)$: il change le signe de -1.

EXERCICE 9 · BASE

Encadrer une expression

Soit a un réel tel que $-2 \leq a \leq 3$. Donne un encadrement de $-3a + 5$.

Écris l'intervalle auquel appartient -3a + 5, par exemple « [-1;7] ».

Réponse attendue : `[-4;11]` — aussi acceptées : [-4,11] · [-4 ; 11] · -4<=-3a+5<=11 · -4≤-3a+5≤11 · -4 ≤ -3a + 5 ≤ 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie d'abord l'encadrement de a par -3.
2. Multiplier par un nombre négatif renverse le sens des inégalités.
3. Ajoute ensuite 5 à chaque membre.

CORRECTION

Multiplier par −3 — Le sens se renverse.

$-9 \leq -3a \leq 6$

Ajouter 5 —

$-4 \leq -3a + 5 \leq 11$

Un facteur négatif renverse l'encadrement ; une addition le garde.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-9;6]` / `[-9,6]` → C'est l'encadrement de $-3a$: il reste à ajouter 5 à chaque membre.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

La largeur de la pièce

Une pièce rectangulaire a une aire comprise entre $16{,}12$ m² et $16{,}96$ m², et une longueur comprise entre $5{,}2$ m et $5{,}3$ m. Quelle est la plus grande largeur possible, arrondie par excès à $0{,}01$ près ?

Donne la largeur en mètres, le nombre seul, sans l'unité.

Réponse attendue : `3.27`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La largeur est l'aire divisée par la longueur.
2. Une largeur est grande quand l'aire est grande et la longueur petite.
3. Encadre l'inverse de la longueur :
   $\frac{1}{5{,}3} \leq \frac{1}{L} \leq \frac{1}{5{,}2}$

CORRECTION

Le quotient — On multiplie l'encadrement de l'aire par celui de l'inverse de la longueur (tout est positif).

$\frac{16{,}12}{5{,}3} \leq \ell \leq \frac{16{,}96}{5{,}2}$

La borne supérieure —

$\frac{16{,}96}{5{,}2} \approx 3{,}2615$

Par excès à $0{,}01$ près :

$\ell \leq 3{,}27$

La plus grande largeur vient de la plus grande aire et de la plus petite longueur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3.2` → Tu as divisé $16{,}96$ par $5{,}3$. Diviser par la longueur renverse son encadrement : la plus grande largeur vient de la plus **petite** longueur.

EXERCICE 11 · PRATIQUE

Pas de radical au dénominateur

Écris $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}$ sans radical au dénominateur.

Réponse attendue : `(3-sqrt(2))/7`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie le numérateur et le dénominateur par la même expression.
2. Le conjugué de $3+\sqrt{2}$ est $3-\sqrt{2}$.
3. Le dénominateur devient :
   $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2$

CORRECTION

Le conjugué —

$\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}$

Le dénominateur —

$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 9-2 = 7$

$\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$

Le conjugué transforme le dénominateur en une différence de deux carrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3-sqrt(2))/11` → C'est une **différence** de carrés : $9-2$, pas $9+2$.

EXERCICE 12 · RAISONNEMENT

Une somme de racines imbriquées

Soit $B = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$. Calcule B^2, puis donne une écriture plus simple de B.

Donne la valeur de B.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe B^2 avec $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.
2. Le produit sous la racine est un produit de conjugués :
   $(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) = 49-48$
3. Une fois B^2 connu, n'oublie pas que B est positif.

CORRECTION

Le carré —

$B^2 = (7-4\sqrt{3}) + (7+4\sqrt{3}) + 2\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}$

$B^2 = 14 + 2\sqrt{49-48} = 14+2 = 16$

Le signe — B est une somme de racines, donc $B \geq 0$.

$B = \sqrt{16} = 4$

On peut le vérifier : $7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2$, et $(2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) = 4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → C'est B^2. Il reste à revenir à B.

`-4` → B est une somme de racines carrées : il est positif.

EXERCICE 13 · DEFI

Un entier caché

Le nombre $E = 4\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{97-56\sqrt{3}}$ est-il un entier ? Calcule-le (Olympiades africaines 2004).

Donne sa valeur, le nombre seul.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche chaque nombre sous la racine comme un carré $(a-b\sqrt{3})^2$.
2. Pour le premier :
   $4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$
3. Pour le second, essaie $(7-4\sqrt{3})^2$, et vérifie le signe de $7-4\sqrt{3}$ avant de sortir la racine.

CORRECTION

La première racine — $\sqrt{3} > 1$.

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

La seconde racine —

$(7-4\sqrt{3})^2 = 49-56\sqrt{3}+48 = 97-56\sqrt{3}$

$4\sqrt{3} = \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$, donc $7-4\sqrt{3} > 0$.

$\sqrt{97-56\sqrt{3}} = 7-4\sqrt{3}$

La somme —

$4(\sqrt{3}-1)+7-4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}-4+7-4\sqrt{3} = 3$

Le nombre est l'entier 3 : les $\sqrt{3}$ s'annulent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8*sqrt(3)-11` → Tu as pris $4\sqrt{3}-7$ comme racine de $97-56\sqrt{3}$: ce nombre est négatif, il ne peut pas être une racine carrée.

EXERCICE 14 · RAISONNEMENT

Une somme qui se télescope

Calcule $S = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Rends chaque dénominateur rationnel avec le conjugué.
2. Pour tout entier $k \geq 1$:
   $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$
3. Écris les premiers termes et les derniers : qu'est-ce qui s'annule ?

CORRECTION

Chaque terme — Le dénominateur conjugué vaut $(k+1)-k=1$.

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

La somme —

$$S=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

Tout s'annule sauf le premier et le dernier.

$$S=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9$$

Le conjugué transforme chaque terme en différence, et la somme se télescope.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Il reste aussi $-\sqrt{1}$, le tout premier terme de la chaîne.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

La formule de Héron

Calcule l'aire, en cm², d'un triangle dont les côtés mesurent 14 cm, 15 cm et 27 cm.

Donne la valeur exacte de l'aire, sans l'unité.

Réponse attendue : `14*sqrt(26)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord le demi-périmètre p.
2. La formule de Héron :
   $$\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
3. Décompose le produit sous la racine pour en sortir les carrés.

CORRECTION

Le demi-périmètre —

$$p=\frac{14+15+27}{2}=28$$

La formule —

$$\mathcal{A}=\sqrt{28\times 14\times 13\times 1}=\sqrt{5096}$$

Extraire les carrés —

$$5096=2^3\times 7^2\times 13=14^2\times 26$$

$$\mathcal{A}=14\sqrt{26}$$

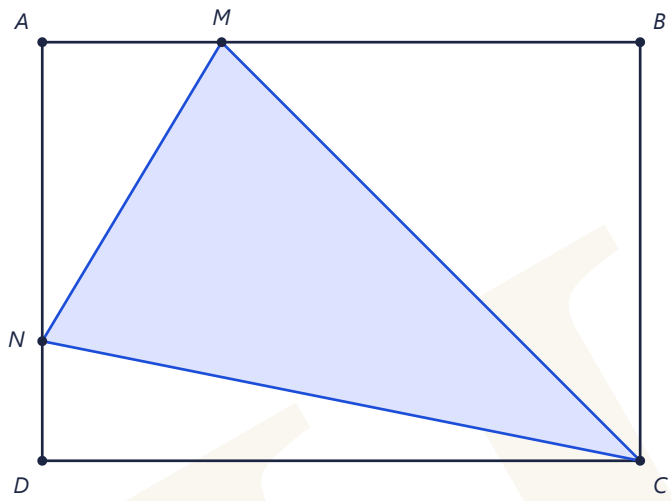
Héron n'a besoin que des trois côtés ; ici, l'aire vaut environ $71{,}39$ cm².

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Le triangle dans le rectangle

$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB=10$ et de largeur $AD=7$. $M\in[AB]$ et $N\in[AD]$ avec $AM=3$ et $AN=5$. Calcule l'aire du triangle MNC.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



AB = 10, AD = 7, AM = 3, AN = 5.

Un rectangle ABCD avec AB = 10 en haut et AD = 7 à gauche. M est sur le côté [AB] avec AM = 3, N est sur le côté [AD] avec AN = 5. Le triangle MNC est grisé.

Donne l'aire, le nombre seul, sans l'unité.

Réponse attendue : 28

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle MNC est le rectangle privé de trois triangles rectangles, dans les coins A, B et D.
2. Trouve les côtés de l'angle droit de chacun : $MB = 10 - 3$, $ND = 7 - 5$.
3. L'aire d'un triangle rectangle : $\frac{\text{côté} \times \text{côté}}{2}$

CORRECTION

Le rectangle —

$10 \times 7 = 70$

Les trois coins —

$\text{aire}(AMN) = \frac{3 \times 5}{2} = 7{,}5 \quad ; \quad \text{aire}(MBC) = \frac{7 \times 7}{2} = 24{,}5 \quad ; \quad \text{aire}(NDC) = \frac{2 \times 10}{2} = 10$

La différence —

$\text{aire}(MNC) = 70 - (7{,}5 + 24{,}5 + 10) = 70 - 42 = 28$

Ses côtés valent $MN = \sqrt{34}$, $MC = 7\sqrt{2}$ et $NC = 2\sqrt{26}$; par différence d'aires, on évite la hauteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

42 → 42 est l'aire des trois coins : il faut la retirer de celle du rectangle.

35 → Le triangle n'est pas la moitié du rectangle : calcule les trois coins.

EXERCICE 17 · PRATIQUE **Factoriser avec un facteur commun caché**

Factorise $G = 4x^2 - 1 - (2x - 1)(3x + 7)$.

Réponse attendue : `-(2x-1)*(x+6)` — aussi acceptées : (2x-1)*(-x-6) · (1-2x)*(x+6)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Factorise d'abord $4x^2 - 1$ par une identité remarquable.
2. Ainsi :
   $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$
3. Le facteur commun est $2x - 1$; attention au signe moins devant la seconde parenthèse.

CORRECTION

L'identité —

$G = (2x - 1)(2x + 1) - (2x - 1)(3x + 7)$

Le facteur commun —

$G = (2x - 1)\big[(2x + 1) - (3x + 7)\big]$

Réduire le crochet —

$G = (2x - 1)(2x + 1 - 3x - 7) = (2x - 1)(-x - 6)$

On peut aussi écrire $G = -(2x - 1)(x + 6)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2x-1)*(-x+8)` → Le moins devant $(3x + 7)$ change aussi le signe de 7 : $1 - 7 = -6$.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

Une factorisation du second degré

Factorise $7x^2 + 33x - 10$. Indication : l'un des facteurs est $x + 5$.

Réponse attendue : `(x+5)*(7x-2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le second facteur sous la forme $ax + b$.
2. Le produit des termes en x donne $7x^2$, le produit des constantes donne -10.
3. Développe ton produit pour vérifier le terme $33x$.

CORRECTION

Les termes extrêmes — $x \times 7x = 7x^2$ et $5 \times (-2) = -10$.

$7x^2 + 33x - 10 = (x + 5)(7x - 2)$

Vérification —

$(x + 5)(7x - 2) = 7x^2 - 2x + 35x - 10 = 7x^2 + 33x - 10$

On peut aussi l'obtenir autrement : avec $A = (4x - 1)^2 - (4x - 1)(3x - 6)$ et $B = 1 - 9x^2 + 2(x - 2)(3x - 1)$, on trouve en factorisant $A - B = (x + 5)(7x - 2)$, et en développant $A - B = 7x^2 + 33x - 10$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(x-5)*(7x+2)` → Développe : $(x - 5)(7x + 2) = 7x^2 - 33x - 10$. Le terme en x a le mauvais signe.

EXERCICE 19 · BASE

Enlever une valeur absolue

Écris sans le symbole de la valeur absolue : $|1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}|$.

Réponse attendue : `2*sqrt(2)-1-sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche d'abord le signe de $1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.
2. Compare $1+\sqrt{3}$ et $2\sqrt{2}$: ce sont deux positifs, compare leurs carrés.
3. Les carrés :
   $(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3} \quad ; \quad (2\sqrt{2})^2 = 8$

CORRECTION

Comparer — $2\sqrt{3} = \sqrt{12} < 4$, donc $4+2\sqrt{3} < 8$.
$1+\sqrt{3} < 2\sqrt{2}$

Le signe — Le nombre est négatif : sa valeur absolue est son opposé.
$|1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}| = -(1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}$

Avant d'enlever une valeur absolue, on établit le signe de ce qu'elle contient.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1+sqrt(3)-2*sqrt(2)` → Ce nombre est négatif ($1+\sqrt{3} \approx 2{,}73$ et $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$) : sa valeur absolue est son opposé.

EXERCICE 20 · PRATIQUE

Deux valeurs absolues égales

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+1| = |3-x|$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;5} ».

Réponse attendue : `{-4;2/3}` — aussi acceptées : {2/3;-4} · -4 et 2/3 · x = -4 ou x = 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux nombres ont la même valeur absolue quand ils sont égaux ou opposés.
2. Écris les deux équations : $2x+1 = 3-x$, et $2x+1 = -(3-x)$.
3. Résous chacune : chacune donne une solution.

CORRECTION

Égaux —
$2x+1 = 3-x \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$

Opposés —
$2x+1 = -(3-x) \iff 2x+1 = x-3 \iff x = -4$

$x = -4$ ou $x = \frac{2}{3}$

$|X| = |Y|$ équivaut à $X = Y$ ou $X = -Y$: deux cas, à ne pas oublier.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2/3}` / `2/3` → Tu n'as traité que le cas où les deux nombres sont égaux. Ils peuvent aussi être **opposés**.

EXERCICE 21 · PRATIQUE

Une inéquation avec valeur absolue

Écris l'ensemble des solutions de $|x-1|<1$ à l'aide d'un intervalle.

Écris l'intervalle, par exemple «]-1;3[».

Réponse attendue : `]0;2[` — aussi acceptées :]0,2[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $|x-1|$ est la distance entre x et 1 sur la droite graduée.
2. On cherche les réels dont la distance à 1 est strictement inférieure à 1.
3. Traduis par un double encadrement :
   $-1<x-1<1$

CORRECTION

Le double encadrement —

$$|x-1|<1 \iff -1<x-1<1$$

Ajouter 1 —

$$0<x<2$$

$$S=]0;2[$$

L'inégalité est stricte : les bornes sont exclues.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[0;2]` / `[0,2]` → L'inégalité est **stricte** : 0 et 2 sont à distance exactement 1, ils ne conviennent pas.

`]-inf;2[` → La distance à 1 doit être petite des deux côtés : x ne peut pas descendre sous 0.

EXERCICE 22 · RAISONNEMENT

Une réunion d'intervalles

Écris l'ensemble des solutions de $|3-2x|\geq\frac{1}{2}$ à l'aide d'une réunion d'intervalles.

Écris la réunion, par exemple $]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$.

Réponse attendue : `]-inf;5/4]U[7/4;+inf[` — aussi acceptées :]-∞;5/4]∪[7/4;+∞[·]-inf;1.25]U[1.75;+inf[·]-inf;5/4] u [7/4;+inf[·]-∞ ; 1,25] ∪ [1,75 ; +∞[·]-∞;1,25]∪[1,75;+∞[·]-inf;1,25]U[1,75;+inf[· x<=5/4 ou x>=7/4 · x≤5/4 ou x≥7/4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $|3-2x|=|2x-3|=2\left|x-\frac{3}{2}\right|$.
2. L'inéquation devient :
   $\left|x-\frac{3}{2}\right|\geq\frac{1}{4}$

3. Ce sont les réels dont la distance à $\frac{3}{2}$ est au moins $\frac{1}{4}$: à l'extérieur d'un intervalle.

CORRECTION

Une distance —

$|3-2x| \geq \frac{1}{2} \iff \left|x-\frac{3}{2}\right| \geq \frac{1}{4}$

Les deux côtés —

$x \leq \frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

$S=\left]-\infty;\frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Une distance « au moins » donne l'extérieur d'un intervalle, bornes comprises.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[5/4;7/4]` / `[1.25;1.75]` → C'est l'ensemble où la distance est **au plus** $\frac{1}{4}$; on veut **au moins** : l'extérieur.

EXERCICE 23 · BASE

Une valeur approchée par défaut

La calculatrice affiche $\sqrt{6} \approx 2{,}449489743$. Donne la valeur approchée v de $\sqrt{6}$ à 10^{-5} près par défaut.

Réponse attendue : `2.44948`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. 10^{-5} près : on garde cinq chiffres après la virgule.
2. Par défaut : le nombre gardé doit être **inférieur** à $\sqrt{6}$.
3. On tronque, sans regarder le chiffre suivant.

CORRECTION

Cinq décimales —

$2{,}44948 < \sqrt{6} < 2{,}44949$

La valeur par défaut est la borne de gauche.

$2{,}44948$

L'arrondi, lui, serait $2{,}44949$, car le sixième chiffre, 9, est au moins 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2.44949` → C'est l'arrondi, et aussi la valeur par excès : par défaut, on reste en dessous de $\sqrt{6}$.

EXERCICE 24 · PRATIQUE

Les grains de sable du Sahara

Le Sahara a une superficie d'environ 8 millions de km², et l'on estime à 2 milliards le nombre de grains de sable de la couche superficielle par mètre carré. Donne un ordre de grandeur du nombre de grains de sable de cette couche.

Écris-le sous la forme $b \times 10^n$, par exemple 3×10^{15}.

Réponse attendue : `2*10^22`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Convertis d'abord la superficie en m² : 1 km² $= 10^6$ m².
2. Superficie et densité :
   $8 \times 10^6 \text{ km}^2$; 2×10^9 grains par m^2
3. Multiplie, écris le résultat en écriture scientifique, puis arrondis a à l'unité.

CORRECTION

En m² —
$8 \times 10^6 \times 10^6 = 8 \times 10^{12} \text{ m}^2$

Le produit —
$8 \times 10^{12} \times 2 \times 10^9 = 16 \times 10^{21} = 1{,}6 \times 10^{22}$

L'ordre de grandeur — L'arrondi de $1{,}6$ à l'unité est 2.
2×10^{22}

Une vingtaine de milliers de milliards de milliards de grains : l'écriture scientifique rend le nombre lisible.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*10^16 / 1.6*10^16` → Tu as multiplié des km² par des grains par m² : convertis d'abord la superficie en m².

`1.6*10^22` → C'est l'estimation elle-même ; l'ordre de grandeur arrondit $1{,}6$ à l'unité.

`2.10^22 / 2.10²² / 2*10²²` → Tape la multiplication avec * et la puissance avec ^ : 2×10^{22} s'écrit 2*10^22. Le point de « 2.10 » se lit comme une virgule.

EXERCICE 25 · BASE

Simplifier avant de classer

Déterminer le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui contient le nombre $-\dfrac{91}{13}$.

Écrire la lettre de l'ensemble, par exemple « D ».

Réponse attendue : Z — aussi acceptées : $\mathbb{Z}$ · IZ

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une fraction peut « tomber juste » : effectue la division.
2. Le résultat est-il un entier ? Positif ou négatif ?

CORRECTION

Simplifier — On divise 91 par 13.
$\frac{91}{13} = 7$

Le signe — Le nombre est un entier négatif : il n'est pas dans $\mathbb{N}$.
$-\frac{91}{13} = -7 \in \mathbb{Z}$

Avant de classer un nombre, on le simplifie : une écriture fractionnaire ne fait pas un rationnel non entier.

PIÈGES ANTICIPÉS

Q / ℚ / IQ → $-\dfrac{91}{13}$ est bien dans $\mathbb{Q}$, mais ce n'est pas le plus petit ensemble : la division tombe juste.

N / ℕ / IN → -7 est négatif : il n'est pas un entier naturel.

EXERCICE 26 · BASE

Un décimal qui se cache

Déterminer le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui contient le nombre $\dfrac{21}{40}$.

Écrire la lettre de l'ensemble, par exemple « D ».

Réponse attendue : D — aussi acceptées : $\mathbb{D}$ · ID

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La fraction est-elle irréductible ? Décompose son dénominateur en facteurs premiers.
2. Un rationnel irréductible est décimal quand son dénominateur n'est fait que de 2 et de 5.

CORRECTION

Le dénominateur — La fraction est irréductible, et $40 = 2^3 \times 5$.

$\frac{21}{40} = \frac{21\times25}{1000} = \frac{525}{1000}$

La division s'arrête : c'est un décimal, non entier.

$\frac{21}{40} = 0{,}525 \in \mathbb{D}$

Un rationnel est décimal si sa forme irréductible a un dénominateur de la forme $2^a \times 5^b$.

PIÈGES ANTICIPÉS

Q / ℚ / IQ → C'est vrai, mais $\mathbb{D}$ est plus petit : $40 = 2^3 \times 5$, la division s'arrête.

N / Z / ℕ / ℤ / IN / IZ → 21 n'est pas un multiple de 40 : ce n'est pas un entier.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

Une racine qui tombe juste

Déterminer le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui contient le nombre $\sqrt{\dfrac{49}{16}}$.

Écrire la lettre de l'ensemble, par exemple « D ».

Réponse attendue : D — aussi acceptées : $\mathbb{D}$ · ID

INDICES, DANS L'ORDRE

1. 49 et 16 sont-ils des carrés parfaits ?
2. Calcule la racine, puis écris le résultat en écriture décimale.

CORRECTION

Calculer la racine — $49 = 7^2$ et $16 = 4^2$.

$\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$

Classer — Le dénominateur $4 = 2^2$: la division s'arrête.

$\frac{7}{4} = 1{,}75 \in \mathbb{D}$

Une racine carrée n'est pas forcément irrationnelle : on la calcule avant de classer le nombre.

PIÈGES ANTICIPÉS

R / $\mathbb{R}$ / IR → Une racine n'est pas toujours irrationnelle : ici 49 et 16 sont des carrés.

Q / $\mathbb{Q}$ / IQ → $\frac{7}{4}$ est rationnel, mais il est même décimal : $\frac{7}{4} = 1{,}75$.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

Combien de décimaux ?

On considère les six nombres $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{11}{30}$ et $\frac{13}{25}$. Déterminer combien d'entre eux sont des nombres décimaux.

Donner le nombre de décimaux, le nombre seul.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Rends d'abord chaque fraction irréductible.
2. Puis regarde le dénominateur : n'est-il fait que de facteurs 2 et 5 ?

CORRECTION

Rendre irréductible — Seule $\frac{9}{12}$ se simplifie.

$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Les dénominateurs — $8 = 2^3$, $20 = 2^2 \times 5$, $4 = 2^2$, $25 = 5^2$ conviennent ; 15 et 30 contiennent le facteur 3.

$\frac{3}{8}, \frac{7}{20}, \frac{3}{4}, \frac{13}{25} \in \mathbb{D}$

4

On simplifie, puis on décompose le dénominateur : les seuls facteurs permis sont 2 et 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Tu as écarté $\frac{9}{12}$ à cause du 3 de 12. Simplifie d'abord : $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

Un développement décimal qui se répète

Soit $x = 0{,}272727\ldots$, où le bloc de chiffres 27 se répète indéfiniment. En calculant $100x - x$, écrire x sous la forme d'une fraction irréductible.

Donner x sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : 3/11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplier par 100 décale la virgule de deux rangs : $100x = 27{,}2727\ldots$

2. Dans $100x - x$, les chiffres après la virgule s'en vont.
3. Il reste à simplifier la fraction obtenue par 9.

CORRECTION

Décaler la virgule —

$100x = 27{,}2727\ldots$

Soustraire — Les parties après la virgule sont les mêmes.

$100x - x = 27 \iff 99x = 27$

Simplifier —

$x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

Un nombre dont l'écriture décimale se répète est rationnel : on fait disparaître la partie qui se répète par une soustraction.

PIÈGES ANTICIPÉS

`27/100 / 0.27 / 0.2727 / 0.273` → $0{,}27$ n'est qu'une valeur approchée : les chiffres 27 se répètent sans fin. Calcule $100x - x$.

`27/9 / 3` → $100x - x = 99x$, et non $9x$: divise par 99.

EXERCICE 30 · DEFI

Des inverses décimaux

Déterminer combien d'entiers naturels n, avec $1 \leq n \leq 50$, sont tels que $\frac{1}{n}$ est un nombre décimal.

Donner le nombre d'entiers, le nombre seul.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\frac{1}{n}$ est irréductible : il est décimal exactement quand n n'a pour facteurs premiers que 2 et 5.
2. Range-les : les puissances de 2, puis 5 fois une puissance de 2, puis 25 fois une puissance de 2.
3. N'oublie pas $n = 1$: $\frac{1}{1} = 1$ est décimal.

CORRECTION

La condition — $\frac{1}{n}$ est irréductible : décimal si et seulement si $n = 2^a \times 5^b$.

$n = 2^a \times 5^b \leq 50$

Sans facteur 5 —

$1; 2; 4; 8; 16; 32$

Un facteur 5 —

$5; 10; 20; 40$

Deux facteurs 5 —

$25; 50$

$6 + 4 + 2$ entiers.

12

On traduit « décimal » par une condition sur le dénominateur, puis on dénombre méthodiquement, famille par famille.

PIÈGES ANTICIPÉS

`11` → Tu as oublié $n = 1$: $\dfrac{1}{1} = 1$ est un décimal.

`10` → Pense à $25 = 5^2$ et à $50 = 2 \times 5^2$.

EXERCICE 31 · BASE

Réduire au même dénominateur

Calculer $A = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{4}$ et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Donner A sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : `7/12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le plus petit dénominateur commun à 3, 6 et 4.
2. Écris chaque fraction avec le dénominateur 12.

CORRECTION

Même dénominateur —

$A = \frac{8}{12} - \frac{10}{12} + \frac{9}{12}$

Les numérateurs —

$A = \frac{8-10+9}{12} = \frac{7}{12}$

On réduit au même dénominateur, puis on ajoute les numérateurs : jamais les dénominateurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → On n'ajoute pas les dénominateurs : réduis d'abord au même dénominateur 12.

`-7/12` → Vérifie les signes : $8 - 10 + 9 = 7$.

EXERCICE 32 · PRATIQUE

Une fraction à étages

Calculer $C = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4}}}}$ et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Donner C sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : `30/43`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par l'étage le plus bas : $3 + \dfrac{1}{4}$.
2. Remonte étage par étage : l'inverse d'une fraction se lit en la renversant.
3. Ne t'arrête pas avant le premier trait de fraction : C est l'inverse du dernier résultat.

CORRECTION

Le dernier étage —

$3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

L'étage au-dessus —

$2 + \frac{4}{13} = \frac{30}{13}$

Encore un —

$1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}$

L'inverse —

$C = \frac{30}{43}$

Une fraction étagée se calcule de l'intérieur vers l'extérieur, en gardant à chaque étage une fraction irréductible.

PIÈGES ANTICIPÉS

`43/30` → $\dfrac{43}{30}$ est le dénominateur de C : il reste à prendre son inverse.

`13/30` → $\dfrac{13}{30}$ n'est que l'étage du milieu, $\dfrac{1}{2 + \frac{4}{13}}$: il reste à lui ajouter 1, puis à prendre l'inverse.

EXERCICE 33 · RAISONNEMENT

Deux chaînes dans un produit

Calculer le produit $P = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \dfrac{1}{20^2}\right)$ et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Donner P sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : `21/40`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque facteur est une différence de deux carrés.
   $1 - \frac{1}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
2. Écris $1 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k}$ et $1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$: tu obtiens deux produits qui se simplifient chacun en chaîne.
3. Regarde ce qui reste au début et à la fin de chacune des deux chaînes, puis multiplie.

CORRECTION

Chaque facteur —

$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$

Première chaîne —

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$

Seconde chaîne —

$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{21}{20} = \frac{21}{2}$

$P = \frac{1}{20} \times \frac{21}{2} = \frac{21}{40}$

Une identité remarquable coupe chaque facteur en deux : le produit se sépare en deux chaînes, qui se simplifient chacune.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/20 / 21/2` → Ce n'est qu'une des deux chaînes : $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$, il faut multiplier les deux résultats.

`21/20` → Recompte la seconde chaîne : $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{21}{20}$ laisse $\frac{21}{2}$.

EXERCICE 34 · RAISONNEMENT

Une somme qui se télescope

Vérifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, puis calculer $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{24 \times 25}$.

Donner S sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : 24/25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ au même dénominateur pour vérifier l'égalité.
2. Remplace chaque terme de S par une différence : $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.
3. Dans la somme, chaque fraction apparaît une fois avec $+$ et une fois avec $-$, sauf la première et la dernière.

CORRECTION

L'égalité —

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

Réécrire S —

$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{25}\right)$

Les termes s'annulent — Il ne reste que le premier et le dernier.

$S = 1 - \frac{1}{25}$

$S = \frac{24}{25}$

Écrire chaque terme comme une différence fait apparaître une structure : les termes intermédiaires s'annulent deux à deux.

PIÈGES ANTICIPÉS

25/26 → Le dernier terme est $\frac{1}{24 \times 25} = \frac{1}{24} - \frac{1}{25}$: la somme s'arrête à $\frac{1}{25}$.

1/25 → Il reste $1 - \frac{1}{25}$, pas $\frac{1}{25}$ seul.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

Une baisse puis une hausse

Le prix d'un vélo baisse de $20\,\%$ pendant les soldes, puis augmente de $20\,\%$ à la fin des soldes. Déterminer de quel pourcentage le prix final a baissé par rapport au prix de départ.

Donner le pourcentage de baisse, sans le signe %.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis chaque évolution par un coefficient multiplicateur.
2. Baisser de $20\,\%$, c'est multiplier par $0{,}8$; augmenter de $20\,\%$, par $1{,}2$.
3. Multiplie les deux coefficients et compare le résultat à 1.

CORRECTION

Les coefficients —

$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 0{,}8 \times 1{,}2$

$0{,}8 \times 1{,}2 = 0{,}96 = 1 - \frac{4}{100}$

Conclure — Le prix final vaut $96\,\%$ du prix de départ.

$\text{baisse de } 4\,\%$

Deux évolutions successives multiplient leurs coefficients : $-20\,\%$ puis $+20\,\%$ ne s'annulent pas, car la hausse porte sur un prix déjà baissé.

PIÈGES ANTICIPÉS

0 → Les pourcentages ne s'ajoutent pas : la hausse de $20\,\%$ porte sur le prix déjà baissé. Multiplie les coefficients.

96 → $0{,}96$ est le coefficient : le prix final vaut $96\,\%$ du prix de départ. La baisse est donc de $100 - 96$.

EXERCICE 36 · RAISONNEMENT

Deux hausses identiques

Le loyer d'un appartement augmente de $t\,\%$ une année, puis encore de $t\,\%$ l'année suivante. Sur les deux années, il a augmenté de $21\,\%$ en tout. Déterminer t.

Donner t, le pourcentage sans le signe %.

Réponse attendue : 10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux hausses multiplient le loyer par le même coefficient $1 + \frac{t}{100}$.
2. Le coefficient global est $1{,}21$: de quel nombre positif est-il le carré ?

CORRECTION

Le coefficient global —

$\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 = 1+\frac{21}{100} = 1{,}21$

Le carré — Le coefficient est positif et $1{,}1^2 = 1{,}21$.

$1+\frac{t}{100} = 1{,}1$

$t = 10$

Deux hausses successives de $t\,\%$ multiplient par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2$: on ne partage pas $21\,\%$ en deux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10.5` → Les pourcentages ne s'ajoutent pas : $1{,}105^2 \neq 1{,}21$. Écris le coefficient global comme un carré.

EXERCICE 37 · BASE

Un produit calculé de tête

En écrivant $53 = 50+3$ et $47 = 50-3$, calculer 53×47 à l'aide d'une identité remarquable.

Donner la valeur du produit.

Réponse attendue : `2491`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le produit est de la forme $(a+b)(a-b)$.
2. Utilise $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ avec $a=50$ et $b=3$.

CORRECTION

L'identité —

$53\times 47 = (50+3)(50-3) = 50^2-3^2$

$53\times 47 = 2500-9 = 2491$

Un produit de deux nombres symétriques autour d'un nombre rond se calcule de tête avec $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2509` → C'est une **différence** de carrés : $2500-9$, pas $2500+9$.

EXERCICE 38 · PRATIQUE

Le cube d'une différence

Développer $(2-\sqrt{3})^3$ et l'écrire sous la forme $a+b\sqrt{3}$, où a et b sont des entiers. Déterminer b.

Donner l'entier b.

Réponse attendue : `-15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ avec $a=2$ et $b=\sqrt{3}$.

---

2. $(\sqrt{3})^2 = 3$ et $(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$.
3. Regroupe les termes qui contiennent $\sqrt{3}$.

CORRECTION

L'identité —

$$(2-\sqrt{3})^3 = 8 - 3\times 4\times\sqrt{3} + 3\times 2\times 3 - 3\sqrt{3}$$

Regrouper —

$$(2-\sqrt{3})^3 = (8+18) + (-12-3)\sqrt{3}$$

$$(2-\sqrt{3})^3 = 26 - 15\sqrt{3}$$

Lire b —

$$b = -15$$

Le cube d'une différence a quatre termes, de signes alternés : $1, 3, 3, 1$ pour les coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → Les termes en $\sqrt{3}$ sont $-12\sqrt{3}$ et $-3\sqrt{3}$: b est négatif.

-13 → $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, pas $\sqrt{3}$.

`26-15*sqrt(3)` → C'est bien $(2-\sqrt{3})^3$, mais on demande seulement l'entier b.

EXERCICE 39 · RAISONNEMENT

Une somme de cubes sans connaître les nombres

Deux réels a et b vérifient $a+b=5$ et $ab=3$. En développant $(a+b)^3$, calculer a^3+b^3.

Donner la valeur de a^3+b^3.

Réponse attendue : `80`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe $(a+b)^3$ et regroupe les termes en a^2b et ab^2.
2. $3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b)$: tout s'exprime avec $a+b$ et ab.

CORRECTION

Le cube d'une somme —

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Isoler —

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

Remplacer —

$$a^3 + b^3 = 125 - 3\times 3\times 5 = 80$$

Une identité remarquable lue à l'envers exprime a^3+b^3 avec la seule somme et le seul produit.

PIÈGES ANTICIPÉS

116 → Le terme à retirer est $3ab(a+b) = 45$, pas $3ab = 9$.

125 → $(a+b)^3 \neq a^3+b^3$: il manque les termes $3a^2b + 3ab^2$.

EXERCICE 40 · BASE

Le plus grand des trois

Soit $a = 0{,}81$. Sans calculatrice, déterminer le plus grand des trois nombres a, a^2 et $\sqrt{a}$.

Donner la valeur du plus grand des trois nombres.

Réponse attendue : `0.9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Situe a par rapport à 0 et à 1.
2. Pour $0 < a < 1$: $a^2 < a < \sqrt{a}$.

CORRECTION

Situer a —

$0 < 0{,}81 < 1$

Le cours —

$a^2 < a < \sqrt{a}$

Calculer — $0{,}9^2 = 0{,}81$.

$\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$

Entre 0 et 1, la racine carrée est le plus grand des trois, le carré le plus petit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.81` → Pour $0 < a < 1$, $a < \sqrt{a}$: a n'est pas le plus grand.

`0.6561` → Élever au carré un nombre entre 0 et 1 le fait **diminuer** : $a^2 < a$.

EXERCICE 41 · BASE

Le plus petit des trois

Soit $a = \dfrac{9}{4}$. Sans calculatrice, déterminer le plus petit des trois nombres a, a^2 et $\sqrt{a}$.

Donner la valeur du plus petit des trois nombres.

Réponse attendue : `3/2` — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\dfrac{9}{4}$ est-il plus petit ou plus grand que 1 ?
2. Pour $a > 1$: $\sqrt{a} < a < a^2$.

CORRECTION

Situer a —

$\frac{9}{4} > 1$

Le cours —

$\sqrt{a} < a < a^2$

Calculer —

$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

Au-delà de 1, l'ordre s'inverse : la racine carrée est le plus petit des trois.

PIÈGES ANTICIPÉS

`81/16` → Pour $a > 1$, le carré est le plus **grand** : $a^2 > a$.

`9/4` → Pour $a > 1$, $\sqrt{a} < a$: ce n'est pas a le plus petit.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

Un nombre entre 0 et 1

Soit $u = \sqrt{5} - 2$. Justifier que $0 < u < 1$, puis déterminer le plus petit des trois nombres u, u^2 et $\sqrt{u}$, et donner sa valeur exacte.

Donner la valeur exacte du plus petit des trois nombres, sans la lettre u.

Réponse attendue : `9-4*sqrt(5)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Encadre $\sqrt{5}$ entre deux entiers consécutifs.
2. Pour $0 < u < 1$, lequel des trois est le plus petit ?
3. Pour écrire sa valeur sans parenthèses, développe le carré avec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

CORRECTION

Situer u — $4 < 5 < 9$, donc $2 < \sqrt{5} < 3$.

$0 < \sqrt{5} - 2 < 1$

Le cours —

$u^2 < u < \sqrt{u}$

Développer —

$u^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$

On situe d'abord le nombre par rapport à 1 : c'est ce qui décide de l'ordre entre u, u^2 et $\sqrt{u}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → $(\sqrt{5}-2)^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4$: n'oublie pas le double produit.

`sqrt(sqrt(5)-2)` → Pour $0 < u < 1$, $\sqrt{u}$ est le plus **grand** des trois.

`sqrt(5)-2` → Pour $0 < u < 1$, $u^2 < u$: u n'est pas le plus petit.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Quand le carré est plus petit

Déterminer l'ensemble des réels a tels que $a^2 < a$, en étudiant le signe de $a - a^2 = a(1-a)$.

Écrire l'intervalle, par exemple «]-2;5[».

Réponse attendue : `]0;1[` — aussi acceptées :]0,1[· 0<a<1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $a^2 < a$ équivaut à $a - a^2 > 0$, c'est-à-dire $a(1-a) > 0$.
2. Un produit de deux facteurs est strictement positif quand ils sont non nuls et de même signe.
3. Peuvent-ils être tous les deux négatifs ?

CORRECTION

Factoriser —

$a^2 < a \iff a(1-a) > 0$

Les signes — $a > 0$ et $1 - a > 0$ donne $0 < a < 1$; $a < 0$ et $1 - a < 0$ demanderait $a < 0$ et $a > 1$: impossible.

$0 < a < 1$

$S =]0;1[$

Pour comparer a et a^2, on étudie le signe de leur différence : $a - a^2 = a(1-a)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;1[` → Diviser par a n'est permis qu'en connaissant son signe : pour $a < 0$, $a^2 > 0 > a$.

`[0;1]` → Pour $a = 0$ ou $a = 1$, $a^2 = a$: l'inégalité est stricte, les bornes sont exclues.

`]1;+inf[` → Pour $a = 2$, $a^2 = 4 > 2$: c'est le contraire qu'on cherche.

EXERCICE 44 · RAISONNEMENT

Le plus grand écart entre a et a²

Vérifier que, pour tout réel a, $a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$. En déduire la plus grande valeur que peut prendre $a - a^2$.

Donner la plus grande valeur de $a - a^2$.

Réponse attendue : `1/4` — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2$ pour vérifier l'égalité.
2. Un carré est toujours positif ou nul : que peut-on dire de $\frac{1}{4}$ moins un carré ?
3. Pour quelle valeur de a le carré est-il nul ?

CORRECTION

Vérifier —

$\frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - a^2 + a - \frac{1}{4} = a - a^2$

Majorer — Un carré est positif ou nul.

$a - a^2 \leq \frac{1}{4}$

Atteinte — Pour $a = \frac{1}{2}$, $a - a^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4}$

Écrire une expression comme « un nombre moins un carré » donne sa plus grande valeur, atteinte quand le carré est nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → $\frac{1}{2}$ est la valeur de a pour laquelle le maximum est atteint ; on demande la valeur de $a - a^2$.

EXERCICE 45 · DEFI

Une racine proche de 1

Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $\sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1{,}01$.

Donner l'entier n.

Réponse attendue : `50`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux membres sont positifs : l'inégalité équivaut à celle de leurs carrés.
2. Calcule $1{,}01^2$ exactement.
3. Passe à l'inverse avec prudence : pour des positifs, il renverse l'ordre.

CORRECTION

Élever au carré — Pour des nombres positifs, $x < y \iff x^2 < y^2$.

$\sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1{,}01 \iff 1+\frac{1}{n} < 1{,}0201$

Isoler 1/n —

$\frac{1}{n} < 0{,}0201$

Passer à l'inverse — L'inverse renverse l'ordre.

$n > \frac{1}{0{,}0201} \approx 49{,}75$

$n = 50$

Pour des positifs, on peut élever au carré sans changer le sens, et passer à l'inverse en le renversant.

PIÈGES ANTICIPÉS

`51` → $1{,}01^2 = 1{,}0201$, pas $1{,}02$: refais le calcul.

`101` → Tu as comparé $1+\frac{1}{n}$ à $1{,}01$: il fallait élever $1{,}01$ au carré.

`49` → n doit dépasser $49{,}75$: 49 ne convient pas.

EXERCICE 46 · BASE

Encadrer un inverse

Soit x un réel tel que $2 \leq x \leq 5$. Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$.

Écrire l'intervalle auquel appartient 1/x, par exemple « [1/4;3] ».

Réponse attendue : `[1/5;1/2]` — aussi acceptées : [0.2;0.5] · [0,2;0,5] · 1/5<=1/x<=1/2 · 1/5≤1/x≤1/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les nombres de l'encadrement sont strictement positifs.
2. Passer à l'inverse renverse l'ordre.

CORRECTION

Des positifs —

$0 < 2 \leq x \leq 5$

L'inverse renverse —

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

Pour des réels strictement positifs, passer à l'inverse renverse le sens des inégalités.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[1/2;1/5]` → $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$: l'inverse renverse l'ordre, la plus petite borne est $\frac{1}{5}$.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Le plus petit de quatre quotients

On pose $p = \frac{31}{29}$, $q = \frac{29}{31}$, $r = \frac{44}{45}$ et $s = \frac{45}{44}$. Sans poser de division, déterminer le plus petit de ces quatre nombres.

Écrire la lettre du plus petit nombre, par exemple « s ».

Réponse attendue : q — aussi acceptées : le nombre q · 29/31 · q = 29/31 · q=29/31 · c'est q · le plus petit est q · q est le plus petit

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare d'abord chaque quotient à 1 : numérateur plus petit ou plus grand que le dénominateur ?
2. Il reste deux candidats plus petits que 1. Écris chacun sous la forme $1 - \ldots$
3. Compare $\frac{2}{31}$ et $\frac{1}{45}$.

CORRECTION

Comparer à 1 —

$\frac{31}{29} > 1, \quad \frac{45}{44} > 1, \quad \frac{29}{31} < 1, \quad \frac{44}{45} < 1$

L'écart à 1 —

$\frac{29}{31} = 1 - \frac{2}{31}, \quad \frac{44}{45} = 1 - \frac{1}{45}$

Comparer les écarts — $\frac{2}{31} = \frac{1}{15{,}5} > \frac{1}{45}$: on retire plus à 1.

$\frac{29}{31} < \frac{44}{45}$

Conclure — Le plus petit des quatre nombres est q.

$q = \frac{29}{31}$

Un quotient de positifs se compare d'abord à 1 ; deux quotients proches de 1 se comparent par leur écart à 1.

PIÈGES ANTICIPÉS

r / 44/45 → $\frac{44}{45} = 1 - \frac{1}{45}$ et $\frac{29}{31} = 1 - \frac{2}{31}$: lequel s'éloigne le plus de 1 ?

p / s / 31/29 / 45/44 → Ce quotient a un numérateur plus grand que son dénominateur : il dépasse 1.

EXERCICE 48 · PRATIQUE

Un quotient à encadrer

Soit x un réel tel que $4 < x < 5$. Déterminer un encadrement de $\frac{3}{x-2}$.

Écrire l'intervalle auquel appartient 3/(x - 2), par exemple «]1/2;4[».

Réponse attendue : `]1;3/2[` — aussi acceptées :]1;1.5[·]1;1,5[· 1<3/(x-2)<3/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Encadre d'abord $x - 2$.
2. $x - 2$ est strictement positif : passe à l'inverse, en renversant l'ordre.
3. Multiplie enfin par 3, qui est positif.

CORRECTION

Soustraire 2 —

$2 < x - 2 < 3$

L'inverse — Des positifs : l'ordre se renverse.

$\frac{1}{3} < \frac{1}{x-2} < \frac{1}{2}$

Multiplier par 3 —

$1 < \frac{3}{x-2} < \frac{3}{2}$

On construit l'expression étape par étape, en n'utilisant que des opérations qui ont une règle.

PIÈGES ANTICIPÉS

]3/5;3/4[→ C'est l'encadrement de $\frac{3}{x}$: commence par encadrer $x - 2$.

]3/2;1[→ L'inverse renverse l'ordre : la plus petite borne est 1.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Deux quotients très proches

On pose $A = \frac{1001}{1002}$ et $B = \frac{1002}{1003}$. Sans calculatrice, déterminer le plus grand des deux nombres.

Écrire la lettre du plus grand nombre, par exemple « A ».

Réponse attendue : B — aussi acceptées : le nombre B · 1002/1003 · B = 1002/1003 · B=1002/1003 · c'est B · le plus grand est B · B est le plus grand

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris chaque nombre sous la forme $1 - \ldots$
2. Compare $\frac{1}{1002}$ et $\frac{1}{1003}$: l'inverse renverse l'ordre.

CORRECTION

L'écart à 1 —

$\frac{1001}{1002} = 1 - \frac{1}{1002}$, $\frac{1002}{1003} = 1 - \frac{1}{1003}$

Comparer les écarts — $1002 < 1003$, donc $\frac{1}{1002} > \frac{1}{1003}$.

$1 - \frac{1}{1002} < 1 - \frac{1}{1003}$

Le plus grand des deux nombres est B.

$A < B$

Pour comparer deux quotients très proches de 1, on compare ce qui leur manque pour atteindre 1.

PIÈGES ANTICIPÉS

`A / 1001/1002` → $\frac{1001}{1002}$ s'écarte de 1 de $\frac{1}{1002}$, qui est **plus grand** que $\frac{1}{1003}$.

EXERCICE 50 · RAISONNEMENT

Un écart d'inverses

Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$.

Donner l'entier n.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ au même dénominateur.
2. Deux inverses de positifs se comparent en renversant l'ordre de leurs dénominateurs.
3. Essaie quelques valeurs de $n(n+1)$ autour de 100.

CORRECTION

Même dénominateur —

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

L'inverse renverse —

$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{100} \iff n(n+1) > 100$

Chercher n — $9 \times 10 = 90$ ne convient pas, $10 \times 11 = 110$ convient.

$n = 10$

Comparer deux inverses de positifs, c'est comparer les nombres eux-mêmes, dans l'autre sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`101` → On ne compare pas $\frac{1}{n}$ à $\frac{1}{100}$, mais $\frac{1}{n(n+1)}$.

`9` → $9 \times 10 = 90$: il faut $n(n+1) > 100$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 51 · DEFI

Les valeurs de x + 1/x

Lorsque x parcourt l'intervalle $\left[\frac{1}{3};2\right]$, déterminer la plus petite valeur m et la plus grande valeur M prises par $x+\frac{1}{x}$. On pourra factoriser $x^2-\frac{10}{3}x+1$.

Écrire l'intervalle [m;M], par exemple « [1;7/2] ».

Réponse attendue : `[2;10/3]` — aussi acceptées : [2,10/3] · 2<=x+1/x<=10/3 · 2≤x+1/x≤10/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $x>0$, le cours donne $x+\frac{1}{x}\geq 2$. Est-ce atteint sur l'intervalle ?
2. Calcule $x+\frac{1}{x}$ aux deux bornes : laquelle donne la plus grande valeur ?
3. Pour la majorer, vérifie que $x^2-\frac{10}{3}x+1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$ et étudie son signe sur l'intervalle.

CORRECTION

Le minimum — $x+\frac{1}{x}\geq 2$, avec égalité pour $x=1$, qui est dans l'intervalle.

$m=2$

Les bornes —

$\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}, \qquad 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

Le maximum — Pour $\frac{1}{3}\leq x\leq 2$, $x-\frac{1}{3}\geq 0$ et $x-3<0$; on divise par $x>0$.

$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)\leq 0 \iff x+\frac{1}{x}\leq\frac{10}{3}$

$[m;M]=\left[2;\frac{10}{3}\right]$

Le minimum vient de $x+\frac{1}{x}\geq 2$; le maximum se démontre par le signe d'un produit, et non en regardant seulement les bornes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[5/2;10/3]` → Les bornes ne donnent pas tout : pour $x=1$, $x+\frac{1}{x}=2<\frac{5}{2}$.

`[5/6;5]` → Ajouter les encadrements de x et de $\frac{1}{x}$ donne un encadrement juste, mais pas les valeurs atteintes : 5 et $\frac{5}{6}$ ne le sont jamais.

EXERCICE 52 · BASE

Ajouter deux encadrements

Soient x et y deux réels tels que $1\leq x\leq 4$ et $-3\leq y\leq -1$. Donner un encadrement de $x+y$.

Écrire l'intervalle auquel appartient x + y, par exemple « [-1;7] ».

Réponse attendue : `[-2;3]` — aussi acceptées : [-2,3] · -2<=x+y<=3 · -2≤x+y≤3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux encadrements s'ajoutent membre à membre.
2. Ajoute les deux plus petites bornes, puis les deux plus grandes.

CORRECTION

Membre à membre —

$$1 + (-3) \leq x + y \leq 4 + (-1)$$

$$-2 \leq x + y \leq 3$$

Deux encadrements s'ajoutent membre à membre : le plus petit avec le plus petit, le plus grand avec le plus grand.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[0;1]` → Tu as croisé les bornes. On ajoute les deux plus petites, $1 + (-3)$, puis les deux plus grandes, $4 + (-1)$.

EXERCICE 53 · PRATIQUE

Encadrer une différence

Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$. Donner un encadrement de $x - y$.

Écrire l'intervalle auquel appartient x - y, par exemple « [-1;7] ».

Réponse attendue : `[-1;4]` — aussi acceptées : [-1,4] · -1<=x-y<=4 · -1≤x-y≤4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On ne soustrait jamais deux encadrements membre à membre.
2. Écris $x - y = x + (-y)$ et encadre d'abord $-y$.

CORRECTION

L'opposé — Multiplier par -1 renverse le sens.

$$-3 \leq -y \leq -1$$

Ajouter —

$$2 + (-3) \leq x + (-y) \leq 5 + (-1)$$

$$-1 \leq x - y \leq 4$$

Pour une différence, on passe par l'opposé : $x - y = x + (-y)$, puis on ajoute.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[1;2]` → On ne soustrait pas membre à membre : avec $x = 2$ et $y = 3$, $x - y = -1$, en dehors de ton encadrement.

`[1;4]` → Tu as retiré 1 aux deux bornes. Or $-3 \leq -y \leq -1$: on ajoute -3 à la plus petite borne de x, et -1 à la plus grande.

EXERCICE 54 · RAISONNEMENT

Encadrer un quotient

Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 4$ et $5 \leq y \leq 8$. Donner le meilleur encadrement de $\dfrac{x}{y}$ qu'on obtient par les règles du cours.

Écrire l'intervalle auquel appartient x/y, par exemple « [1/3;2] ».

Réponse attendue : `[1/4;4/5]` — aussi acceptées : [0.25;0.8] · [0,25;0,8] · 1/4<=x/y<=4/5 · 1/4≤x/y≤4/5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On ne divise jamais deux encadrements membre à membre.
2. Écris $\dfrac{x}{y} = x \times \dfrac{1}{y}$ et encadre d'abord $\dfrac{1}{y}$.
3. Tout est positif : les encadrements se multiplient membre à membre.

CORRECTION

L'inverse — Des positifs : l'ordre se renverse.

$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$

Multiplier — Des positifs : on multiplie membre à membre.

$2 \times \frac{1}{8} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 4 \times \frac{1}{5}$

$\frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{4}{5}$

Pour un quotient de positifs, on passe par l'inverse : $\dfrac{x}{y} = x \times \dfrac{1}{y}$, puis on multiplie.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[2/5;1/2]` → On ne divise pas membre à membre : avec $x = 4$ et $y = 5$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{5}$, plus grand que $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 55 · DEFI

Un produit avec un facteur négatif

Soient x et y deux réels tels que $-2 \leq x \leq 1$ et $3 \leq y \leq 4$. Déterminer le plus petit intervalle $[m; M]$ qui contient toutes les valeurs possibles de xy.

Écrire l'intervalle [m;M], par exemple « [-5;7] ».

Réponse attendue : `[-8;4]` — aussi acceptées : [-8,4] · -8<=xy<=4 · -8≤xy≤4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La règle « on multiplie membre à membre » ne vaut que pour des nombres positifs : ici x peut être négatif.
2. Sépare les cas $0 \leq x \leq 1$ et $-2 \leq x \leq 0$.
3. Pour $x \leq 0$, écris $xy = -\big((-x)y\big)$ avec $-x$ positif.

CORRECTION

x positif — $0 \leq x \leq 1$ et $3 \leq y \leq 4$: des positifs.

$0 \leq xy \leq 4$

x négatif — $0 \leq -x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 4$, donc $0 \leq (-x)y \leq 8$.

$-8 \leq xy \leq 0$

Réunir — Les valeurs -8 (pour $x = -2, y = 4$) et 4 (pour $x = 1, y = 4$) sont atteintes.

$-8 \leq xy \leq 4$

Le produit membre à membre n'est permis qu'entre encadrements de positifs ; sinon, on se ramène à des positifs en séparant les cas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-6;4]` → Avec $x = -2$ et $y = 4$, $xy = -8$: multiplier les bornes membre à membre n'est permis que pour des positifs.

`[0;4]` → x peut être négatif : alors xy l'est aussi.

EXERCICE 56 · DEFI

Le meilleur encadrement d'un quotient

Soit x un réel tel que $2 \leq x \leq 3$. Vérifier que $\dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$, puis déterminer le plus petit intervalle $[m; M]$ qui contient toutes les valeurs de $\dfrac{x-1}{x+1}$.

Écrire l'intervalle [m;M], par exemple « [1/4;2] ».

Réponse attendue : `[1/3;1/2]` — aussi acceptées : [1/3,1/2] · 1/3<=(x-1)/(x+1)<=1/2 · 1/3≤(x-1)/(x+1)≤1/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour vérifier l'égalité, écris $1 = \dfrac{x+1}{x+1}$.
2. Dans $1 - \dfrac{2}{x+1}$, x n'apparaît plus qu'une fois : encadre $x+1$, puis son inverse.
3. Encadrer séparément le numérateur et le dénominateur donne un encadrement trop large.

CORRECTION

L'égalité —

$1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$

Encadrer x + 1 —

$3 \leq x+1 \leq 4$

L'inverse, puis × 2 —

$\frac{1}{2} \leq \frac{2}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

L'opposé, puis + 1 —

$\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{x+1} \leq \frac{1}{2}$

Les bornes sont atteintes pour $x = 2$ et $x = 3$.

$\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

Quand la variable apparaît deux fois, on transforme l'expression pour qu'elle n'apparaisse qu'une fois : l'encadrement devient le plus précis.

PIÈGES ANTICIPÉS

[1/4;2/3] → En encadrant séparément $x-1$ et $x+1$, on obtient un encadrement juste mais trop large : $\frac{1}{4}$ n'est jamais atteint. Utilise $1-\frac{2}{x+1}$.

EXERCICE 57 · BASE

Un carré déguisé

Calculer x^2+y^2-2xy pour $x=2{,}7$ et $y=-1{,}3$, en reconnaissant une identité remarquable.

Donner la valeur de l'expression.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. x^2+y^2-2xy est le carré d'une différence.
2. Calcule d'abord $x-y$, en faisant attention au signe de y.

CORRECTION

L'identité —

$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$

La différence —

$x-y=2{,}7-(-1{,}3)=4$

$(x-y)^2=16$

$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$: c'est pourquoi cette quantité n'est jamais négative.

PIÈGES ANTICIPÉS

1.96 → $x-y=2{,}7-(-1{,}3)=2{,}7+1{,}3$: le moins devant $-1{,}3$ donne un plus.

EXERCICE 58 · RAISONNEMENT

Le minimum d'une somme

Pour $x>0$, on pose $f=4x+\frac{9}{x}$. En appliquant $2XY\leq X^2+Y^2$ à $X=2\sqrt{x}$ et $Y=\frac{3}{\sqrt{x}}$, déterminer la plus petite valeur de f.

Donner la plus petite valeur, le nombre seul.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule X^2, Y^2 et XY : $\sqrt{x}$ disparaît du produit.
2. L'inégalité donne un minorant ; reste à voir s'il est atteint, quand $X=Y$.

CORRECTION

Les carrés —

$X^2=4x,\quad Y^2=\frac{9}{x},\quad XY=6$

L'inégalité —

$4x + \frac{9}{x} \geq 2 \times 6 = 12$

Atteinte — Égalité quand $X = Y$: $2\sqrt{x} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{3}{2}$.

$4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$

$X^2 + Y^2 \geq 2XY$ donne un minimum dès que le produit XY est constant ; il est atteint quand $X = Y$.

PIÈGES ANTICIPÉS

13 → 13 est la valeur pour $x = 1$, mais pour $x = \dfrac{3}{2}$ on fait mieux.

6 → L'inégalité est $X^2 + Y^2 \geq 2XY$: n'oublie pas le facteur 2.

2 → Le minimum 2 est celui de $x + \dfrac{1}{x}$; ici les coefficients 4 et 9 changent tout.

EXERCICE 59 · RAISONNEMENT

Somme fixée, inverses

Deux réels $x > 0$ et $y > 0$ vérifient $x + y = 6$. En utilisant $(x + y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geq 4$, déterminer la plus petite valeur de $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Donner la plus petite valeur.

Réponse attendue : 2/3 — aussi acceptées : 4/6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace $x + y$ par sa valeur dans l'inégalité.
2. Divise par 6, qui est positif.
3. La valeur est-elle atteinte ? Essaie $x = y$.

CORRECTION

Remplacer —

$6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$

Diviser par 6 —

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{3}$

Atteinte — Pour $x = y = 3$: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}$.

$\frac{2}{3}$

Une inégalité classique devient un minimum dès que l'on fixe l'un des facteurs ; on vérifie qu'il est atteint.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 minore le produit $(x + y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$: divise encore par $x + y = 6$.

1/3 → $\dfrac{1}{3}$ est la valeur de $\dfrac{1}{x}$ pour $x = 3$; la somme compte deux termes.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAM

`0.67` / `0.666` / `0.667` / `0.6667` / `0.7` → C'est une valeur approchée : la plus petite valeur est exactement $\frac{2}{3}$, à écrire sous forme de fraction.

EXERCICE 60 · RAISONNEMENT

Trois sommes deux à deux

Trois réels a, b, c strictement positifs vérifient $a+b+c=3$. En appliquant l'inégalité $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$ à $x=a+b$, $y=b+c$ et $z=c+a$, déterminer la plus petite valeur de $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.

Donner la plus petite valeur.

Réponse attendue : `3/2` — aussi acceptées : 1.5 · 9/6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord $x+y+z$ en fonction de $a+b+c$.
2. L'inégalité devient « un nombre connu fois la somme cherchée ≥ 9 » : divise.
3. Pour savoir si la valeur est atteinte, essaie $a=b=c$.

CORRECTION

La somme x + y + z — Chacun des nombres a, b, c apparaît dans deux des sommes.

$x+y+z=2(a+b+c)=6$

L'inégalité —

$6\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$

Diviser par 6 —

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

Atteinte — Pour $a=b=c=1$, chaque somme vaut 2 : $3 \times \frac{1}{2}$.

$\frac{3}{2}$

Une inégalité du cours s'applique à des expressions, pas seulement à des lettres : on choisit x, y, z pour que leur somme soit connue, puis on vérifie que le minorant est atteint.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Chacun des nombres a, b, c apparaît dans deux sommes : $x+y+z=2(a+b+c)=6$, pas 3.

`2/3` → On divise 9 par 6, et non 6 par 9.

`9` → 9 minore le produit : divise encore par $x+y+z=6$.

EXERCICE 61 · DEFI

Somme de carrés fixée

Deux réels $x>0$ et $y>0$ vérifient $x^2+y^2=50$. En développant $(x+y)^2$ et en utilisant $2xy \leq x^2+y^2$, déterminer la plus grande valeur possible de $x+y$.

Donner la plus grande valeur de $x + y$.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 50 + 2xy$.
2. Majore $2xy$ grâce à l'inégalité du cours.
3. $x + y$ est positif : passe à la racine carrée. Pour quels x et y y a-t-il égalité ?

CORRECTION

Développer —

$(x+y)^2 = 50 + 2xy$

Majorer 2xy —

$2xy \leq x^2 + y^2 = 50$

Conclure — $(x+y)^2 \leq 100$ et $x + y > 0$.

$x + y \leq 10$

Atteinte — Pour $x = y = 5$: $25 + 25 = 50$.

10

Pour majorer une somme, on majore son carré : $2xy \leq x^2 + y^2$, avec égalité quand $x = y$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5*sqrt(2)` → $\sqrt{50}$ serait la valeur si l'un des nombres était nul ; avec $x = y = 5$, on obtient davantage.

`25` → 25 est la plus grande valeur du produit xy ; on demande celle de la somme $x + y$.

`100` → 100 majore $(x+y)^2$: prends la racine carrée.

EXERCICE 62 · DEFI

Un minimum à faire apparaître

Pour $x > 0$, déterminer la plus petite valeur de $x + \dfrac{4}{x+1}$. On pourra écrire $x = (x+1) - 1$.

Donner la plus petite valeur, le nombre seul.

Réponse attendue : `3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $t = x + 1$: l'expression devient $t + \dfrac{4}{t} - 1$.
2. Applique $X^2 + Y^2 \geq 2XY$ à $X = \sqrt{t}$ et $Y = \dfrac{2}{\sqrt{t}}$.
3. N'oublie pas le -1, et vérifie que le minimum est atteint pour un $x > 0$.

CORRECTION

Réécrire —

$x + \frac{4}{x+1} = (x+1) + \frac{4}{x+1} - 1$

L'inégalité — Avec $t = x + 1 > 0$: $t + \dfrac{4}{t} \geq 2 \times \sqrt{t} \times \dfrac{2}{\sqrt{t}}$.

$t + \frac{4}{t} \geq 4$

Atteinte — Égalité quand $\sqrt{t} = \dfrac{2}{\sqrt{t}}$, soit $t = 2$, c'est-à-dire $x = 1 > 0$.

$1 + \frac{4}{2} = 3$

On fait apparaître une somme dont le produit des termes est constant, puis on applique l'inégalité du cours.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est le minimum de $(x + 1) + \dfrac{4}{x + 1}$: il reste à retirer 1.

1 → $x = 1$ est l'endroit où le minimum est atteint ; on demande la valeur de l'expression.

EXERCICE 63 · BASE

La moyenne géométrique

Calculer la moyenne géométrique des nombres 4 et 9.

Donner sa valeur.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La moyenne géométrique de a et b est $\sqrt{ab}$.
2. Calcule d'abord le produit.

CORRECTION

La définition —

$\sqrt{ab} = \sqrt{4 \times 9}$

$\sqrt{36} = 6$

La moyenne géométrique de deux positifs est la racine de leur produit ; elle ne dépasse jamais la moyenne arithmétique, ici $6{,}5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6.5 → $6{,}5$ est la moyenne **arithmétique** $\dfrac{4 + 9}{2}$. La moyenne géométrique est $\sqrt{ab}$.

EXERCICE 64 · PRATIQUE

L'écart entre les deux moyennes

Pour $a = 3$ et $b = 27$, calculer $\dfrac{a + b}{2} - \sqrt{ab}$, puis vérifier que le résultat est égal à $\dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$.

Donner la valeur de l'écart.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule séparément la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique.
2. Pour la vérification, simplifie $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

CORRECTION

Moyenne arithmétique —

$\frac{3+27}{2} = 15$

Moyenne géométrique —

$\sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$

L'écart —

$15 - 9 = 6$

Vérifier —

$\frac{(\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2}{2} = \frac{(-2\sqrt{3})^2}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$: l'écart est un carré divisé par 2, donc positif.

PIÈGES ANTICIPÉS

-6 → La moyenne arithmétique est la plus grande : l'écart est positif.

EXERCICE 65 · PRATIQUE

La hauteur dans le demi-cercle

Sur un demi-cercle de diamètre $[AB]$, on place H sur $[AB]$ avec $AH = 3$ cm et $HB = 12$ cm. La perpendiculaire à (AB) en H coupe le demi-cercle en C. Calculer CH.

Donner CH en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon vaut $\frac{AH + HB}{2}$ et $OH = OA - AH$.
2. Applique le théorème de Pythagore dans le triangle OHC rectangle en H.
3. Le cours le résume : CH est la moyenne géométrique de AH et HB.

CORRECTION

Le rayon —

$OC = \frac{3+12}{2} = 7{,}5$

OH —

$OH = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$

Pythagore —

$CH^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2 = 56{,}25 - 20{,}25 = 36$

$CH = 6$

Dans cette figure, $CH = \sqrt{AH \times HB}$ est la moyenne géométrique, et le rayon la moyenne arithmétique.

PIÈGES ANTICIPÉS

7.5 → $7{,}5$ cm est le rayon OC, la moyenne arithmétique. CH est plus court.

4.5 → $4{,}5$ cm est la distance OH ; il reste à appliquer Pythagore dans OHC.

EXERCICE 66 · RAISONNEMENT

Aire maximale à périmètre fixé

Un rectangle a pour périmètre 36 cm. On note x et y ses dimensions. En utilisant $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$, déterminer la plus grande aire possible de ce rectangle.

Donner l'aire en cm², le nombre seul, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 81

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le périmètre donne $x + y = 18$.
2. Élève au carré l'inégalité entre les deux moyennes : tout est positif.
3. Pour quelles dimensions y a-t-il égalité ?

CORRECTION

Le demi-périmètre —

$x + y = 18$

Les moyennes —

$\sqrt{xy} \leq \frac{18}{2} = 9$

Élever au carré — Des positifs : le sens est gardé.

$xy \leq 81$

Atteinte — Égalité quand $x = y = 9$: le carré.

81

À périmètre fixé, l'aire d'un rectangle est la plus grande pour le carré : c'est l'inégalité des moyennes.

PIÈGES ANTICIPÉS

324 → $x + y$ est le **demi**-périmètre : $x + y = 18$, pas 36.

9 → 9 majore $\sqrt{xy}$; l'aire est xy : élève au carré.

EXERCICE 67 · RAISONNEMENT

Un enclos contre un mur

Un éleveur dispose de 40 m de grillage pour fermer un enclos rectangulaire adossé à un mur : le grillage forme trois côtés, deux de longueur x et un de longueur $40 - 2x$. En appliquant l'inégalité des moyennes à $2x$ et $40 - 2x$, déterminer la plus grande aire possible de l'enclos.

Donner l'aire en m², le nombre seul, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 200

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire vaut $x(40-2x)$, et $2x+(40-2x)=40$ est constant.
2. $\sqrt{2x(40-2x)} \le \dfrac{2x+(40-2x)}{2}$: élève au carré.
3. Pense à diviser par 2 à la fin : on a encadré $2x(40-2x)$, pas l'aire.

CORRECTION

Les moyennes —

$\sqrt{2x(40-2x)} \le \frac{40}{2} = 20$

Au carré —

$2x(40-2x) \le 400$

L'aire —

$x(40-2x) \le 200$

Atteinte — Égalité quand $2x = 40-2x$, soit $x = 10$: un enclos de 10 m sur 20 m.

200

On choisit deux facteurs de somme constante, ici $2x$ et $40-2x$, pour appliquer l'inégalité des moyennes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`400` → 400 majore $2x(40-2x)$, le double de l'aire : divise par 2.

`1600/9` → Avec trois côtés égaux on n'obtient pas le maximum : l'égalité a lieu pour $2x = 40-2x$.

`100` → Un carré de 10 m de côté utiliserait 30 m de grillage seulement ; le maximum est atteint pour $x = 10$ et $40-2x = 20$.

EXERCICE 68 · DEFI

Un produit de trois sommes

Trois réels a, b, c strictement positifs vérifient $abc = 2$. En appliquant trois fois l'inégalité $u+v \ge 2\sqrt{uv}$, déterminer la plus petite valeur possible de $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Donner la plus petite valeur, le nombre seul.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, puis la même chose pour $b+c$ et $c+a$.
2. Les trois inégalités portent sur des positifs : on peut les multiplier membre à membre.
3. $\sqrt{ab}\times\sqrt{bc}\times\sqrt{ca} = \sqrt{(abc)^2} = abc$. Vérifie que l'égalité est possible.

CORRECTION

Trois inégalités —

$a+b \ge 2\sqrt{ab}, \quad b+c \ge 2\sqrt{bc}, \quad c+a \ge 2\sqrt{ca}$

Multiplier — Tout est positif.

$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8\sqrt{(abc)^2} = 8abc$

Remplacer —

$$8abc = 16$$

Atteinte — Égalité quand $a = b = c$, avec $a^3 = 2$: c'est possible.

$$16$$

Multiplier des inégalités de positifs membre à membre donne $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$; le minimum est atteint pour $a = b = c$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 / 8 → Chaque facteur apporte un 2 : $2 \times 2 \times 2 = 8$, et $8abc = 8 \times 2$.

EXERCICE 69 · BASE

Le chemin le plus long

Trois points A, B, C du plan vérifient $AB = 5$ et $BC = 8$. Déterminer la plus grande valeur possible de AC.

Donner la plus grande valeur de AC.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'inégalité triangulaire pour le chemin de A à C en passant par B.
2. L'égalité a lieu quand B est sur le segment $[AC]$.

CORRECTION

L'inégalité triangulaire —

$$AC \leq AB + BC$$

Égalité quand $B \in [AC]$.

$$AC \leq 13$$

Le chemin direct est le plus court : $AC \leq AB + BC$, avec égalité quand B est sur $[AC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $3 = 8 - 5$ est la plus **petite** valeur possible de AC (quand A est sur $[BC]$).

EXERCICE 70 · PRATIQUE

Le troisième côté

Un triangle non aplati a deux côtés de longueurs 7 cm et 11 cm. On note c la longueur de son troisième côté, en cm. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles de c.

Écrire l'intervalle, par exemple «]2;9[».

Réponse attendue : `]4;18[` — aussi acceptées :]4,18[· 4<c<18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'inégalité triangulaire pour chacun des trois côtés.
2. $11 < 7 + c$ donne une borne inférieure, $c < 7 + 11$ une borne supérieure.

3. Le triangle n'est pas aplati : les inégalités sont strictes.

CORRECTION

Borne supérieure —

$c < 7 + 11 = 18$

Borne inférieure —

$11 < 7 + c \iff c > 4$

La troisième inégalité, $7 < 11 + c$, est toujours vraie.

$4 < c < 18$

Dans un triangle non aplati, chaque côté est strictement plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[4;18]` → Pour $c = 4$ ou $c = 18$, le triangle est aplati : les bornes sont exclues.

`]0;18[` → c doit aussi vérifier $11 < 7 + c$: $c > 4$.

EXERCICE 71 · RAISONNEMENT

Des côtés entiers

Un triangle non aplati a deux côtés de longueurs 6 cm et 10 cm. Déterminer combien de valeurs entières, en cm, peut prendre la longueur de son troisième côté.

Donner le nombre de valeurs, le nombre seul.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Encadre d'abord la longueur c du troisième côté par l'inégalité triangulaire.
2. Les inégalités sont strictes : 4 et 16 sont exclus.
3. Compte les entiers de 5 à 15 : attention à ne pas en oublier un.

CORRECTION

Encadrer —

$10 - 6 < c < 10 + 6 \iff 4 < c < 16$

Les entiers —

$c \in \{5; 6; 7; \ldots; 15\}$

Compter — De 5 à 15 : $15 - 5 + 1$ entiers.

11

On encadre d'abord, puis on compte les entiers de l'intervalle : de p à q, il y en a $q - p + 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → Pour $c = 4$ ou $c = 16$, le triangle est aplati : ces deux valeurs sont exclues.

`10` → De 5 à 15, il y a $15 - 5 + 1 = 11$ entiers, pas $15 - 5$.

EXERCICE 72 · PRATIQUE

Trois points alignés

Trois points A, B, C vérifient $AB = 4{,}5$, $BC = 7{,}2$ et $AC = 2{,}7$. Déterminer lequel des trois points se trouve entre les deux autres.

Écrire la lettre du point, par exemple « B ».

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · A ∈ [BC] · A∈[BC] · A appartient à [BC] · A est entre B et C · c'est A · c'est le point A · le point A est entre B et C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare la plus grande distance à la somme des deux autres.
2. Si $BC = BA + AC$, le chemin par A est aussi court que le chemin direct : où est alors A ?

CORRECTION

La plus grande distance —

$BC = 7{,}2$

La somme des deux autres —

$BA + AC = 4{,}5 + 2{,}7 = 7{,}2$

Conclure — L'égalité dans l'inégalité triangulaire : A est sur le segment $[BC]$.

$A \in [BC]$

L'égalité $BC = BA + AC$ signifie que A est sur le segment $[BC]$: les trois points sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

B / C → Le point du milieu n'est pas une extrémité du plus grand segment : c'est $BC = 7{,}2$ qui est le plus long, donc A est entre B et C.

EXERCICE 73 · RAISONNEMENT

Un point à l'intérieur du triangle

Soit ABC un triangle avec $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 9$, et M un point à l'intérieur. On admet, comme dans le cours, que $MB + MC \leq AB + AC$, $MA + MB \leq CA + CB$ et $MA + MC \leq BA + BC$. En ajoutant ces trois inégalités, déterminer un majorant de $MA + MB + MC$.

Donner le majorant obtenu.

Réponse attendue : 23

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ajoute les trois inégalités membre à membre.
2. Combien de fois chaque longueur MA, MB, MC apparaît-elle à gauche ? Et chaque côté à droite ?

CORRECTION

Ajouter —

$2(MA + MB + MC) \leq 2(AB + BC + CA)$

Diviser par 2 —

$$MA + MB + MC \leq AB + BC + CA$$

$$MA + MB + MC \leq 6 + 9 + 8 = 23$$

Ajouter des inégalités de même sens membre à membre est permis ; chaque longueur apparaît ici deux fois de chaque côté.

PIÈGES ANTICIPÉS

46 → 46 majore $2(MA + MB + MC)$: divise par 2.

11.5 → $11{,}5$ est le demi-périmètre : c'est un **minorant** de $MA + MB + MC$, pas un majorant.

EXERCICE 74 · DEFI **Le triangle isocèle**

Un triangle isocèle a deux de ses côtés qui mesurent 4 cm et 9 cm. Déterminer son périmètre.

Donner le périmètre en cm.

Réponse attendue : 22

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux côtés sont égaux : est-ce $4, 4, 9$ ou $9, 9, 4$?
2. Vérifie l'inégalité triangulaire dans chaque cas.

CORRECTION

Premier cas — 4, 4 et 9 : le plus grand côté dépasse la somme des deux autres.

$$9 > 4 + 4 : \text{ impossible}$$

Second cas — 9, 9 et 4 : chaque côté est plus petit que la somme des deux autres.

$$9 < 9 + 4$$

Le périmètre —

$$9 + 9 + 4 = 22$$

Avant de calculer, on vérifie que le triangle existe : l'inégalité triangulaire élimine un des deux cas.

PIÈGES ANTICIPÉS

17 → Un triangle de côtés 4, 4 et 9 n'existe pas : $4 + 4 < 9$.

EXERCICE 75 · BASE **Extraire les carrés**

Écrire $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un entier. Déterminer a.

Donner l'entier a.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais apparaître un carré parfait sous chaque radical : $50 = 25 \times 2$.

2. Une fois écrits avec $\sqrt{2}$, les termes s'ajoutent comme des termes semblables.

CORRECTION

Extraire —

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Regrouper —

$(5 + 3 - 2)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$a = 6$

On extrait les carrés parfaits de chaque radical ; écrits avec le même radical, les termes s'ajoutent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(60)` → On n'ajoute pas sous le radical : $\sqrt{50} + \sqrt{18} \neq \sqrt{68}$.

`6*sqrt(2)` → C'est bien la valeur de la somme, mais on demande seulement l'entier a.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Un conjugué de deux radicaux

Écrire $\dfrac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur.

Donner l'expression obtenue.

Réponse attendue : `sqrt(7)+sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le conjugué de $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ est $\sqrt{7} + \sqrt{3}$.
2. Multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué.
3. Le dénominateur devient une différence de deux carrés.

CORRECTION

Le conjugué —

$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$

Le dénominateur —

$(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 = 4$

Simplifier —

$\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$

Le conjugué transforme le dénominateur en une différence de deux carrés : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*(sqrt(7)+sqrt(3))/5` → C'est une **différence** de carrés : $7 - 3$, pas $7 + 3$.

`(sqrt(7)+sqrt(3))/4` → Le numérateur 4 est multiplié lui aussi par le conjugué : $\dfrac{4(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4}$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Deux nombres inverses l'un de l'autre

Soient $a = \sqrt{5} + 2$ et $b = \sqrt{5} - 2$. Calculer ab, puis en déduire $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Donner la valeur exacte de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Réponse attendue : `2*sqrt(5)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. ab est un produit de conjugués.
2. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab}$.

CORRECTION

Le produit —

$ab = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$

La somme des inverses —

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = a + b$

$a + b = 2\sqrt{5}$

Deux conjugués dont le produit vaut 1 sont inverses l'un de l'autre : $\dfrac{1}{a} = b$ et $\dfrac{1}{b} = a$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(5)/9` → ab est une différence de carrés : $5 - 4 = 1$, pas $5 + 4$.

`4` → $4 = a - b$; on cherche $\dfrac{a+b}{ab}$.

EXERCICE 78 · BASE

Héron sur un triangle isocèle

Calculer, à l'aide de la formule de Héron, l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 5 cm et 6 cm.

Donner l'aire en cm², le nombre seul, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord le demi-périmètre p.
2. Remplace dans $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

CORRECTION

Le demi-périmètre —

$p = \frac{5+5+6}{2} = 8$

Les facteurs —

$p - a = 3, \quad p - b = 3, \quad p - c = 2$

La formule —

$\mathcal{A} = \sqrt{8 \times 3 \times 3 \times 2} = \sqrt{144} = 12$

On calcule le demi-périmètre, puis les trois différences $p-a, p-b, p-c$: la formule de Héron n'a besoin d'aucune hauteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`44*sqrt(10)` → Dans la formule, p est le **demi**-périmètre : $p = 8$, pas 16.

`24` → $6 \times 4 = 24$ est le double de l'aire : n'oublie pas de diviser par 2.

EXERCICE 79 · PRATIQUE

Héron sur un triangle équilatéral

Calculer, à l'aide de la formule de Héron, l'aire exacte d'un triangle équilatéral de côté 6 cm.

Donner la valeur exacte de l'aire, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `9*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le demi-périmètre vaut $p = 9$.
2. Les trois facteurs $p-a, p-b, p-c$ sont égaux.
3. Extrais le plus grand carré parfait de 243.

CORRECTION

Le demi-périmètre —

$p = \frac{3 \times 6}{2} = 9$

La formule —

$\mathcal{A} = \sqrt{9 \times 3 \times 3 \times 3} = \sqrt{243}$

Simplifier — $243 = 81 \times 3$.

$\mathcal{A} = 9\sqrt{3}$

La formule de Héron redonne l'aire du triangle équilatéral de côté a : $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`15.59 / 15.6 / 15.588 / 15.5885` → C'est une valeur approchée ; on demande la valeur exacte, avec un radical.

`18*sqrt(3)` → $18\sqrt{3}$ est le double de l'aire. Reprends le calcul : $p = 9$, et $\sqrt{9 \times 3 \times 3 \times 3} = \sqrt{243}$.

EXERCICE 80 · RAISONNEMENT

Une hauteur sans la tracer

Un triangle a des côtés de longueurs 4 cm, 13 cm et 15 cm. Calculer son aire par la formule de Héron, puis en déduire la hauteur h relative au côté de longueur 4 cm.

Donner la hauteur h en cm.

Maths à la carte KADER HAMMAMI

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le demi-périmètre vaut $p = 16$.
2. L'aire d'un triangle vaut aussi $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.
3. Isole la hauteur : $h = \dfrac{2\mathcal{A}}{\text{base}}$.

CORRECTION

Héron —

$\mathcal{A} = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = \sqrt{576} = 24$

La hauteur —

$\frac{4 \times h}{2} = 24$

$h = 12$

Héron donne l'aire sans hauteur ; l'aire donne ensuite chaque hauteur par $h = \dfrac{2\mathcal{A}}{\text{base}}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → L'aire est $\dfrac{\text{base} \times h}{2}$: $h = \dfrac{2 \times 24}{4}$.

24 → 24 cm² est l'aire ; il reste à en déduire la hauteur.

EXERCICE 81 · DEFI

La plus petite hauteur

Un triangle a des côtés de longueurs 9, 10 et 17. Déterminer la valeur exacte de la plus petite de ses trois hauteurs.

Donner la valeur exacte de la plus petite hauteur.

Réponse attendue : 72/17

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule l'aire par la formule de Héron, avec $p = 18$.
2. Chaque hauteur vaut $\dfrac{2\mathcal{A}}{\text{côté}}$.
3. La plus petite hauteur est celle relative au plus grand côté.

CORRECTION

Héron —

$\mathcal{A} = \sqrt{18 \times 9 \times 8 \times 1} = \sqrt{1296} = 36$

Les hauteurs — $h = \dfrac{72}{\text{côté}}$: la plus petite correspond au plus grand côté.

$h = \frac{2 \times 36}{17}$

$h = \frac{72}{17}$

Les hauteurs sont inversement proportionnelles aux côtés : la plus petite est relative au plus grand côté.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4.24 / 4.2 / 4.235 / 4.2353` → C'est une valeur approchée ; on demande la valeur exacte, sous forme de fraction.

`8` → 8 est la hauteur relative au côté 9 : c'est la plus **grande**. Prends le plus grand côté.

`36/17` → $h = \dfrac{2\mathcal{A}}{\text{côté}}$: n'oublie pas le facteur 2.

EXERCICE 82 · BASE

Développer un produit

Développer et réduire $A = (3x - 2)(x + 4)$.

Réponse attendue : `3x^2+10x-8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie chaque terme de la première parenthèse par chaque terme de la seconde.
2. Tu dois obtenir quatre termes, dont deux en x à regrouper.

CORRECTION

Distribuer —

$$A = 3x \times x + 3x \times 4 - 2 \times x - 2 \times 4$$

$$A = 3x^2 + 12x - 2x - 8$$

Réduire —

$$A = 3x^2 + 10x - 8$$

Pour développer un produit de deux sommes, on multiplie chaque terme de l'une par chaque terme de l'autre, puis on réduit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3x^2-8` → Il manque les produits croisés $3x \times 4$ et $-2 \times x$.

`3x^2+14x-8` → $-2 \times x = -2x$: $12x - 2x = 10x$.

EXERCICE 83 · PRATIQUE

Un carré qui cache un facteur

Factoriser $B = 4x^2 + 12x + 9 - (2x + 3)(x - 1)$.

Réponse attendue : `(2x+3)*(x+4)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Reconnais une identité remarquable dans $4x^2 + 12x + 9$.
2. $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$: le facteur commun apparaît.
3. Attention au signe moins devant la seconde parenthèse.

CORRECTION

L'identité —

$B = (2x+3)^2 - (2x+3)(x-1)$

Le facteur commun —

$B = (2x+3)\big[(2x+3) - (x-1)\big]$

Réduire le crochet —

$B = (2x+3)(2x+3-x+1) = (2x+3)(x+4)$

Une identité remarquable reconnue fait apparaître le facteur commun ; le signe moins change le signe de chaque terme de la parenthèse.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2x+3)*(x+2)` → Le moins devant $(x-1)$ change aussi le signe de -1 : $3+1=4$.

EXERCICE 84 · PRATIQUE

Une différence de deux carrés

Factoriser $C = (x+3)^2 - (2x-1)^2$.

Réponse attendue : `(4-x)*(3x+2)` — aussi acceptées : -(x-4)*(3x+2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C est de la forme $a^2 - b^2$, avec $a = x+3$ et $b = 2x-1$.
2. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: écris b entre parenthèses dans $a-b$.

CORRECTION

L'identité —

$C = \big[(x+3) - (2x-1)\big]\big[(x+3) + (2x-1)\big]$

Réduire —

$C = (x+3-2x+1)(x+3+2x-1)$

$C = (-x+4)(3x+2)$

Pour $a^2 - b^2$, on garde a et b entre parenthèses : le moins de $a-b$ porte sur tout b.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-x+2)*(3x+2)` → $(x+3) - (2x-1) = x+3-2x+1$: le moins change aussi le signe de -1.

EXERCICE 85 · PRATIQUE

Un cube qui se simplifie

Développer et réduire $D = (x-2)^3 - x(x^2-6x)$.

Réponse attendue : `12x-8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe $(x-2)^3$ avec $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
2. Développe aussi $x(x^2-6x)$, puis retire-le en changeant chaque signe.
3. Les termes en x^3 et en x^2 s'en vont.

CORRECTION

Le cube —

$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Le second terme —

$x(x^2 - 6x) = x^3 - 6x^2$

Soustraire —

$D = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 6x^2$

$D = 12x - 8$

Le cube d'une différence a quatre termes : $(x-2)^3 \neq x^3 - 8$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6x^2-8` → $(x-2)^3 \neq x^3 - 8$: il manque $-6x^2 + 12x$.

`12x+8` → $(-2)^3 = -8$: un cube garde le signe.

EXERCICE 86 · RAISONNEMENT

Deux carrés égaux

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x-1)^2 = (x+5)^2$, en factorisant $(3x-1)^2 - (x+5)^2$.

Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {-2;7} ».

Réponse attendue : `{-1;3}` — aussi acceptées : {3;-1} · -1 et 3 · x = -1 ou x = 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Passe tout dans le membre de gauche : une différence de deux carrés.
2. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
3. Ne t'arrête pas au cas $3x - 1 = x + 5$: les deux nombres peuvent aussi être opposés.

CORRECTION

Factoriser —

$(3x-1)^2 - (x+5)^2 = (3x - 1 - x - 5)(3x - 1 + x + 5)$

$(2x - 6)(4x + 4) = 0$

Produit nul —

$2x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad 4x + 4 = 0$

$S = \{-1; 3\}$

On ne « simplifie » pas les carrés : on factorise la différence, puis on applique la règle du produit nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{3} / 3` → Tu as seulement écrit $3x - 1 = x + 5$. Deux nombres ont le même carré s'ils sont égaux **ou opposés**.

`{1;3}` → $4x + 4 = 0$ donne $x = -1$.

EXERCICE 87 · DEFI

Quatre entiers consécutifs moins 24

Soit $E = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$. En posant $u = x^2 + 5x + 4$, factoriser E en un produit de trois facteurs.

Donner la factorisation complète.

Réponse attendue : `x*(x+5)*(x^2+5x+10)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe les facteurs deux par deux : $(x+1)(x+4)$ et $(x+2)(x+3)$.
2. Tu obtiens $E = u(u+2) - 24 = u^2 + 2u - 24$. Vérifie que c'est $(u+6)(u-4)$.
3. Remplace u et factorise encore le facteur qui le permet.

CORRECTION

Regrouper —

$$(x+1)(x+4) = x^2 + 5x + 4 = u, \quad (x+2)(x+3) = u + 2$$

En u —

$$E = u(u+2) - 24 = u^2 + 2u - 24 = (u+6)(u-4)$$

Revenir à x —

$$E = (x^2 + 5x + 10)(x^2 + 5x)$$

Finir —

$$E = x(x+5)(x^2 + 5x + 10)$$

Un bon regroupement fait apparaître la même expression deux fois : on la nomme, on factorise, puis on revient à x.

EXERCICE 88 · BASE

Une distance sur une droite graduée

Sur une droite graduée munie d'un repère (O, I), les points A et B ont pour abscisses $-2{,}5$ et 4. Calculer la distance AB.

Donner la distance AB.

Réponse attendue : `6.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La distance de deux points d'abscisses a et b est $|b - a|$.
2. Attention : soustraire $-2{,}5$, c'est ajouter $2{,}5$.

CORRECTION

La formule —

$$AB = |b - a| = |4 - (-2{,}5)|$$

$$AB = |6{,}5| = 6{,}5$$

Sur une droite graduée, $AB = |b - a|$: une distance est toujours positive.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1.5` → $4 - (-2{,}5) = 4 + 2{,}5$: le moins devant $-2{,}5$ donne un plus.

EXERCICE 89 · PRATIQUE

Une équation avec une valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x-3|=7$.

Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;4} ».

Réponse attendue : `{-2;5}` — aussi acceptées : {5;-2} · -2 et 5 · x = -2 ou x = 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un nombre a pour valeur absolue 7 quand il vaut 7 ou -7.
2. Écris les deux équations $2x-3=7$ et $2x-3=-7$.

CORRECTION

Deux cas —

$$2x-3=7 \quad \text{ou} \quad 2x-3=-7$$

Résoudre —

$$2x=10 \quad \text{ou} \quad 2x=-4$$

$$S=\{-2;5\}$$

$|X|=r$ avec $r>0$ équivaut à $X=r$ ou $X=-r$: deux équations, deux solutions.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{5}` / `5` → $2x-3$ peut aussi valoir -7 : il y a une seconde solution.

`{-5;5}` → $2x-3=-7$ donne $2x=-7+3=-4$.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Enlever deux valeurs absolues

Soit x un réel de l'intervalle $[-3;2]$. Écrire l'expression $|x+3|-|x-2|$ sans le symbole de la valeur absolue, sous forme réduite.

Donner l'expression réduite.

Réponse attendue : 2x+1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le signe de $x+3$ et celui de $x-2$ quand $-3\leq x\leq 2$.
2. $|X|=X$ si $X\geq 0$, et $|X|=-X$ si $X\leq 0$.
3. Ici $|x-2|=2-x$.

CORRECTION

Les signes —

$$x+3\geq 0 \quad \text{et} \quad x-2\leq 0$$

Enlever les barres —

$$|x+3|=x+3, \quad |x-2|=2-x$$

Réduire —

$(x+3)-(2-x)=2x+1$

Pour enlever une valeur absolue, on cherche d'abord le signe de ce qu'elle contient sur l'intervalle donné.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → $x-2$ est négatif sur l'intervalle : $|x-2|=2-x$, pas $x-2$.

-2x-1 → $|x+3|=x+3$ et $|x-2|=2-x$: $(x+3)-(2-x)=2x+1$.

EXERCICE 91 · DEFI

Une somme de deux distances

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-1|+|x+2|=5$. On pourra interpréter $|x-1|$ et $|x+2|$ comme des distances sur une droite graduée.

Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;4} ».

Réponse attendue : {-3;2} — aussi acceptées : {2;-3} · -3 et 2 · x = -3 ou x = 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $|x-1|$ est la distance de x à 1 ; $|x+2|$ celle de x à -2.
2. Entre -2 et 1, la somme des deux distances vaut toujours 3 : les solutions sont à l'extérieur.
3. Pour $x>1$, la somme vaut $(x-1)+(x+2)$. Et pour $x<-2$?

CORRECTION

Entre -2 et 1 — La somme des distances vaut $1-(-2)=3\neq 5$.

$-2\leq x\leq 1$: $|x-1|+|x+2|=3$

Pour x > 1 —

$(x-1)+(x+2)=5 \iff 2x+1=5 \iff x=2$

Pour x < -2 —

$(1-x)+(-x-2)=5 \iff -2x-1=5 \iff x=-3$

$S=\{-3;2\}$

Une valeur absolue $|x-a|$ est une distance : on découpe la droite selon les points a, et on enlève les barres dans chaque morceau.

PIÈGES ANTICIPÉS

{2} / 2 → De l'autre côté de -2, il y a un autre point dont la somme des distances vaut 5.

{-2;1} → En -2 et en 1, la somme des distances vaut 3, pas 5.

EXERCICE 92 · BASE

Une valeur approchée par excès

La calculatrice affiche $\frac{29}{7}\approx 4{,}142857142$. Donner la valeur approchée de $\frac{29}{7}$ à 10^{-2} près par excès.

Donner la valeur approchée par excès.

Réponse attendue : `4.15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Garde deux décimales : tu obtiens la valeur par défaut.
2. Par excès, on se place juste **au-dessus** du nombre : ajoute un centième.

CORRECTION

Par défaut —

$4{,}14 < \frac{29}{7}$

Par excès — On ajoute $0{,}01$.

$\frac{29}{7} < 4{,}15$

À 10^{-2} près, la valeur par défaut garde deux décimales ; celle par excès lui ajoute un centième.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4.14` → $4{,}14$ est plus petit que $\frac{29}{7}$: c'est la valeur par **défaut** (et aussi l'arrondi).

`4.143` / `4.2` → On demande une précision de 10^{-2} : deux décimales exactement.

EXERCICE 93 · BASE

Un arrondi au millième

La calculatrice affiche $\sqrt{11} \approx 3{,}316624790$. Donner l'arrondi de $\sqrt{11}$ à 10^{-3} près.

Donner l'arrondi.

Réponse attendue : `3.317`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Encadre $\sqrt{11}$ entre deux nombres à trois décimales consécutifs.
2. Regarde le quatrième chiffre après la virgule : est-il au moins 5 ?

CORRECTION

Encadrer —

$3{,}316 < \sqrt{11} < 3{,}317$

Le chiffre suivant — C'est 6, au moins 5 : on arrondit vers le haut.

$\sqrt{11} \approx 3{,}317$

L'arrondi est la plus proche des deux valeurs approchées : on regarde le chiffre qui suit le dernier chiffre gardé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3.316` → $3{,}316$ est la troncature, la valeur par défaut. Le chiffre suivant, 6, fait arrondir vers le haut.

`3.32` / `3.3166` → On demande l'arrondi à 10^{-3} : trois décimales exactement.

EXERCICE 94 · RAISONNEMENT

La meilleure précision

La calculatrice affiche $\sqrt{3} \approx 1{,}732050808$. Déterminer le plus petit entier relatif n tel que $1{,}73$ soit une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^n près.

Donner l'entier n.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'après la définition, il faut $|\sqrt{3} - 1{,}73| \leq 10^n$.
2. Calcule l'écart $|\sqrt{3} - 1{,}73|$ à l'aide de l'affichage.
3. Compare cet écart à $10^{-2} = 0{,}01$ puis à $10^{-3} = 0{,}001$.

CORRECTION

L'écart —

$|\sqrt{3} - 1{,}73| \approx 0{,}00205$

Comparer —

$0{,}00205 \leq 0{,}01 = 10^{-2} \quad \text{mais} \quad 0{,}00205 > 0{,}001 = 10^{-3}$

Plus n est petit, plus la précision est fine : $n = -2$ convient, pas $n = -3$.

$n = -2$

Pour savoir à quelle précision un décimal approche un réel, on compare l'écart $|b - a|$ aux puissances de 10.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → L'écart, environ $0{,}002$, dépasse $10^{-3} = 0{,}001$: $n = -3$ ne convient pas.

2 → $10^2 = 100$: une précision de 10^n avec n négatif, comme $10^{-2} = 0{,}01$.

EXERCICE 95 · PRATIQUE

Un carré proche de 1

Calculer l'écart $|(0{,}99)^2 - 0{,}98|$, et en déduire que $0{,}98$ est une valeur approchée de $(0{,}99)^2$ à 10^{-3} près.

Donner l'écart sous forme décimale.

Réponse attendue : `0.0001`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $0{,}99 = 1 - 0{,}01$ et développe $(1 - 0{,}01)^2$.
2. Compare le résultat avec $0{,}98 = 1 - 2 \times 0{,}01$.

CORRECTION

Le carré —

$(0{,}99)^2 = (1 - 10^{-2})^2 = 1 - 2 \times 10^{-2} + 10^{-4} = 0{,}9801$

L'écart —

$|0{,}9801 - 0{,}98| = 0{,}0001$

Conclure — $0{,}0001 \leq 0{,}001$.

$0{,}0001 = 10^{-4} \leq 10^{-3}$

$(1-h)^2 = 1 - 2h + h^2$: pour h petit, h^2 est négligeable et $1 - 2h$ est une bonne valeur approchée.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.001` → $(0{,}99)^2 = 0{,}9801$, pas $0{,}981$: refais le carré.

`0.0199` → On compare $(0{,}99)^2$ à $0{,}98$, pas à 1.

EXERCICE 96 · RAISONNEMENT

Une valeur approchée d'un multiple

On sait que $2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$. Déterminer la valeur approchée par défaut de $3\sqrt{7}$ à 10^{-2} près.

Donner la valeur approchée par défaut.

Réponse attendue : `7.93`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie l'encadrement de $\sqrt{7}$ par 3, qui est positif.
2. Entre quels nombres à deux décimales consécutifs se trouve l'encadrement obtenu ?

CORRECTION

Multiplier par 3 —

$7{,}935 < 3\sqrt{7} < 7{,}938$

Deux décimales — Tout l'encadrement est entre $7{,}93$ et $7{,}94$.

$7{,}93 < 3\sqrt{7} < 7{,}94$

$7{,}93$

Un encadrement assez fin donne directement les valeurs approchées : il suffit qu'il tienne entre deux décimaux consécutifs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7.94` → $7{,}94$ est plus grand que $3\sqrt{7}$: c'est la valeur par **excès**.

`7.935 / 7.9` → On demande deux décimales exactement : une valeur approchée à 10^{-2} près.

EXERCICE 97 · DEFI

Arrondir trop tôt

La calculatrice affiche $\sqrt{7} \approx 2{,}645751311$. En écrivant d'abord $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$ sans radical au dénominateur, donner son arrondi à 10^{-2} près.

Donner l'arrondi.

Réponse attendue : `1.55`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie le haut et le bas par le conjugué $\sqrt{7} + 2$.
2. Le dénominateur devient $7 - 4$. Calcule ensuite avec toutes les décimales de l'affichage.

---

3. N'arrondis qu'à la toute fin : arrondir $\sqrt{7}$ avant de diviser fausse le résultat.

CORRECTION

Le conjugué —

$\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{7-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$

Calculer —

$\frac{4{,}645751311}{3} \approx 1{,}548583$

Arrondir — Le troisième chiffre après la virgule est 8 : on arrondit vers le haut.

$1{,}55$

On ne garde la précision qu'à la fin : arrondir trop tôt, surtout avant une division par un petit nombre, change le résultat.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1.54` → $1{,}54$ vient d'un arrondi trop tôt ($\sqrt{7} \approx 2{,}65$ donne $\frac{1}{0{,}65} \approx 1{,}538$) ou d'une troncature. Garde toutes les décimales jusqu'au bout.

`1.549 / 1.5` → On demande l'arrondi à 10^{-2} : deux décimales exactement.

EXERCICE 98 · BASE

L'exposant d'une écriture scientifique

Le nombre $0{,}0003025$ s'écrit $3{,}025 \times 10^{n}$ en écriture scientifique. Déterminer l'entier n.

Donner l'entier n.

Réponse attendue : `-4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte de combien de rangs la virgule doit se déplacer pour obtenir $3{,}025$.
2. La virgule va vers la droite : l'exposant est négatif.

CORRECTION

Déplacer la virgule — De $0{,}0003025$ à $3{,}025$, la virgule avance de quatre rangs.

$0{,}0003025 = 3{,}025 \times 10^{-4}$

$n = -4$

Pour un nombre entre 0 et 1, l'exposant de l'écriture scientifique est négatif : il compte les rangs dont avance la virgule.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → $3{,}025 \times 10^{4} = 30\,250$: pour un nombre plus petit que 1, l'exposant est négatif.

`-3` → Compte les rangs dont la virgule avance jusqu'à $3{,}025$: il y en a quatre.

EXERCICE 99 · BASE

Un ordre de grandeur

Donner l'ordre de grandeur du nombre $6\,830\,000\,000$.

Écrire-le sous la forme $b \times 10^n$, par exemple 3×10^5.

Réponse attendue : `7*10^9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris d'abord le nombre en écriture scientifique $a \times 10^n$.
2. L'ordre de grandeur garde 10^n et remplace a par son arrondi à l'unité.

CORRECTION

Écriture scientifique —

$6\,830\,000\,000 = 6{,}83 \times 10^9$

Arrondir a — L'arrondi de $6{,}83$ à l'unité est 7.

7×10^9

L'ordre de grandeur d'un nombre $a \times 10^n$ est $b \times 10^n$, où b est l'arrondi de a à l'unité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*10^9` → On arrondit $6{,}83$ à l'unité : 7, pas 6.

`6.83*10^9` → C'est l'écriture scientifique ; pour l'ordre de grandeur, arrondis $6{,}83$ à l'unité.

`7*10^8 / 7*10^10` → Compte les chiffres : $6\,830\,000\,000$ a dix chiffres, donc l'exposant est 9.

EXERCICE 100 · PRATIQUE

L'ordre de grandeur d'un petit nombre

Donner l'ordre de grandeur du nombre $0{,}0000482$.

Écrire-le sous la forme $b \times 10^n$, par exemple 3×10^{-2}.

Réponse attendue : `5*10^-5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris d'abord le nombre en écriture scientifique : la virgule avance jusqu'au premier chiffre non nul.
2. Arrondis ensuite le nombre a à l'unité.

CORRECTION

Écriture scientifique — La virgule avance de cinq rangs.

$0{,}0000482 = 4{,}82 \times 10^{-5}$

Arrondir a — L'arrondi de $4{,}82$ à l'unité est 5.

5×10^{-5}

Même méthode pour un petit nombre : écriture scientifique, puis arrondi de a à l'unité ; l'exposant est négatif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*10^-5` → On arrondit $4{,}82$ à l'unité : 5, pas 4.

`5*10^-6 / 5*10^-4` → Compte les rangs : de $0{,}0000482$ à $4{,}82$, la virgule avance de cinq rangs.

`4.82*10^-5` → C'est l'écriture scientifique ; pour l'ordre de grandeur, arrondis $4{,}82$ à l'unité.

EXERCICE 101 · RAISONNEMENT

Les battements d'un cœur

Un cœur bat environ 70 fois par minute. En comptant 365 jours par an, donner un ordre de grandeur du nombre de battements d'un cœur en 80 ans.

Écrire-le sous la forme $b \times 10^n$, par exemple 3×10^5.

Réponse attendue : `3*10^9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte les minutes : une heure, une journée, une année, puis 80 ans.
2. Calcule le nombre total de battements, puis écris-le en écriture scientifique.
3. Arrondis enfin le nombre a à l'unité.

CORRECTION

Par an —

$$70 \times 60 \times 24 \times 365 = 36\,792\,000$$

En 80 ans —

$$36\,792\,000 \times 80 = 2\,943\,360\,000 \approx 2{,}94 \times 10^9$$

Arrondir —

$$3 \times 10^9$$

Pour estimer, on enchaîne les conversions, puis on ne garde que l'ordre de grandeur du résultat.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*10^7` → C'est le nombre de battements en **une** année : multiplie encore par 80.

`2*10^9` → On arrondit $2{,}94$ à l'unité : 3, pas 2.

EXERCICE 102 · DEFI

Une feuille pliée trente fois

Une feuille de papier a une épaisseur de $0{,}1$ mm. À chaque pliage en deux, l'épaisseur double. En utilisant $2^{10} = 1024$, donner un ordre de grandeur, en mètres, de l'épaisseur obtenue si l'on pouvait la plier 30 fois.

Écrire-le sous la forme $b \times 10^n$, en mètres, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `1*10^5` — aussi acceptées : 10^5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Après 30 pliages, l'épaisseur est multipliée par 2^{30}.
2. $2^{30} = (2^{10})^3 = 1024^3$, à peu près $(10^3)^3$ — mais garde l'écriture scientifique de 1024 pour bien arrondir.
3. Convertis $0{,}1$ mm en mètres : 1 mm $= 10^{-3}$ m.

CORRECTION

Le facteur —

$2^{30} = 1024^3 \approx 1{,}07 \times 10^9$

L'épaisseur initiale —

$0{,}1\ \text{mm} = 10^{-4}\ \text{m}$

Multiplier —

$1{,}07 \times 10^9 \times 10^{-4} = 1{,}07 \times 10^5$

Arrondir —

1×10^5

Doubler trente fois, c'est multiplier par 2^{30}, plus d'un milliard : une croissance qui se multiplie dépasse vite l'intuition.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*10^-3` → Chaque pliage **double** l'épaisseur : on multiplie par 2 trente fois, on n'ajoute pas 30 épaisseurs.

`1*10^8` → C'est l'épaisseur en millimètres : convertis en mètres.

`1*10^6 / 1*10^4` → Vérifie la conversion : $0{,}1$ mm $= 10^{-4}$ m.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI