– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

# Calcul vectoriel

**2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique** · Pr Abdelkader Hammami

## Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro cinq : calcul vectoriel. Bech nabdew b la somme de deux vecteurs w le produit d'un vecteur par un réel, w n7esbou bel vecteurs kif ma n7esbou bel lettres. Ba3d nchoufou les vecteurs colinéaires, la base, les composantes w le déterminant. Men ba3d el repère : la norme, la distance w les vecteurs orthogonaux. W nkammlou bel géométrie : alignement, parallélisme, centre de gravité w Thalès.

la somme de deux vecteurs w le produit باش نبداو بـ . chapitre numéro cinq : calcul vectoriel الـ ! عسلامة
les vecteurs بعد نشوفو . lettres بالـ كيف ما نحسبو vecteurs بالـ نحسبو d'un vecteur par un réel ، w
repère : la norme ، la distance w les الـ من بعد . colinéaires ، la base ، les composantes w le déterminant
. géométrie : alignement ، parallélisme ، centre de gravité w Thalès بالـ نكمّلو vecteurs orthogonaux . w

*Bonjour ! Le chapitre numéro cinq : calcul vectoriel. Nous commencerons par la somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel, et nous calculerons avec les vecteurs comme avec des lettres. Puis nous verrons les vecteurs colinéaires, la base, les composantes et le déterminant. Ensuite le repère : la norme, la distance et les vecteurs orthogonaux. Et nous terminerons par la géométrie : alignement, parallélisme, centre de gravité et Thalès.*

Ce chapitre reprend les vecteurs de la première année et en fait un **outil de calcul**. On définit la **somme** de deux vecteurs et le **produit** d'un vecteur par un réel, puis on calcule avec eux comme avec des lettres.

Deux vecteurs non colinéaires forment une **base** : chaque vecteur y a des **composantes**, et le **déterminant** $xy' - x'y$ dit si deux vecteurs sont colinéaires. Dans un repère orthonormé viennent la **norme**, la **distance** et l'**orthogonalité** ($xx' + yy' = 0$). Le chapitre se termine en traduisant la géométrie — alignement, parallélisme, milieu, centre de gravité, Thalès — en égalités vectorielles.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

*À la fin de ce chapitre, tu sauras :*

- Additionner des vecteurs : Chasles, opposé, différence
  > Additionner des vecteurs, utiliser la relation de Chasles, l'opposé et la différence.
  > *Additionner des vecteurs, utiliser la relation de Chasles, l'opposé et la différence.*
- Multiplier un vecteur par un réel
  > Multiplier un vecteur par un réel, et calculer avec ses règles.
  > *Multiplier un vecteur par un réel, et calculer avec ses règles.*
- Reconnaître des vecteurs colinéaires, par le déterminant $xy' - x'y$
  > Reconnaître des vecteurs colinéaires, par un réel ou par le déterminant x y prime moins x prime y.
  > *Reconnaître des vecteurs colinéaires, par un réel ou par le déterminant x y prime moins x prime y.*
- Utiliser une base, un repère : composantes, coordonnées
  > Travailler dans une base et un repère cartésien : composantes, coordonnées, et le vecteur A B.
  > *Travailler dans une base et un repère cartésien : composantes, coordonnées, et le vecteur A B.*
- Calculer norme et distance ; tester l'orthogonalité par $xx' + yy' = 0$
  > Calculer une norme et une distance, et reconnaître deux vecteurs orthogonaux par x x prime plus y y prime égale zéro.
  > *Calculer une norme et une distance, et reconnaître deux vecteurs orthogonaux par x x prime plus y y prime égale zéro.*
- Traduire la géométrie en égalités vectorielles
  > Traduire en vecteurs l'alignement, le parallélisme, le milieu, le centre de gravité et Thalès.
  > *Traduire en vecteurs l'alignement, le parallélisme, le milieu, le centre de gravité et Thalès.*

---

1. ACTIVITÉ

## Rappels

CE QU'IL DIT

Bech nabdew, nrajj3ou 7ajtin chefnehom fel première année. I le milieu de AB : chnowa el égalité elli t3arrfou ? Le vecteur IA plus le vecteur IB égale le vecteur nul, walla le vecteur AB égale deux fois le vecteur AI. Ama le vecteur AI plus le vecteur IB égale le vecteur AB, hedhi la relation de Chasles, sa7i7a l ay point I, donc ma t3arrfouch le milieu. W G le centre de gravité du triangle ABC, w I le milieu de BC : le vecteur GA égale moins deux fois le vecteur GI, walla le vecteur AG égale deux tiers du vecteur AI.

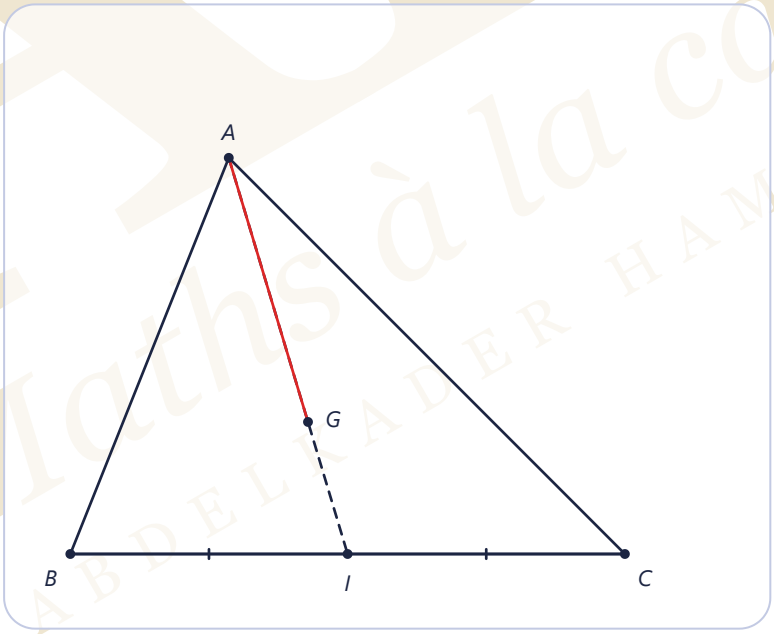
باش نبداو ، نراجعو حاجتين شفناهم في الـ première année : شنوّة الـ égalité اللي تعرّفو ؟ le milieu de A B . I le vecteur A B égale deux fois le vecteur A I ولّا ، vecteur I A plus le vecteur I B égale le vecteur nul أمّا . le vecteur A I plus le vecteur I B égale le vecteur A B ، هاذي la relation de Chasles ، صحيحة لأيّ point I le milieu . w G le centre de gravité du triangle A B C ، w I le milieu de B C : le vecteur G A ما تعرّفش donc . le vecteur A G égale deux tiers du vecteur A I ولّا ، égale moins deux fois le vecteur G I

*Pour commencer, révisons deux choses vues en première année. I est le milieu de A B : quelle égalité le caractérise ? Le vecteur I A plus le vecteur I B égale le vecteur nul, ou bien le vecteur A B égale deux fois le vecteur A I. En revanche, le vecteur A I plus le vecteur I B égale le vecteur A B, c'est la relation de Chasles, vraie pour n'importe quel point I : elle ne caractérise donc pas le milieu. Et si G est le centre de gravité du triangle A B C, et I le milieu de B C : le vecteur G A égale moins deux fois le vecteur G I, ou encore le vecteur A G égale deux tiers du vecteur A I.*

Parmi ces égalités, lesquelles **caractérisent** le milieu $I$ du segment $[AB]$ ?

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ : non, elle impose $A = B$ ;
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ : oui ;
- $AB = 2AI$ : non, c'est une égalité de **longueurs** ; $I$ peut être hors de la droite $(AB)$ ;
- $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ : oui ;
- $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$ : non, c'est la relation de Chasles, vraie pour **tout** point $I$.

Soit $ABC$ un triangle, $G$ son centre de gravité et $I$ le milieu de $[BC]$. « $G \in [AI]$ et $GA = 2GI$ », « $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$ » et « $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ » caractérisent $G$ ; « $GA = GB = GC$ » caractérise le centre du cercle circonscrit, pas $G$.




G est aux deux tiers de la médiane [AI], en partant de A.

*Un triangle ABC : A en haut à gauche, B en bas à gauche, C en bas à droite. I est le milieu du côté [BC], marqué par deux traits égaux. La médiane [AI] est tracée en pointillés, et le centre de gravité G est placé sur cette médiane, aux deux tiers de A vers I.*

I MILIEU DE [AB]

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

G CENTRE DE GRAVITÉ, I MILIEU DE [BC]

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**$A$, $B$ et $C$ sont trois points alignés, $D$ et $E$ les points tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$. Montrer que $[AD]$ et $[EC]$ ont le même milieu.**

**Le critère —** Les segments $[AD]$ et $[EC]$ ont le même milieu si et seulement si $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ : c'est le critère du parallélogramme $AEDC$.

$$[AD] \text{ et } [EC] \text{ ont le même milieu } \iff \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$$

**Chasles —** On décompose le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en passant par $A$, puis on remplace $\overrightarrow{AD}$ par $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

**Conclure —** Or $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AE}$ par définition de $E$ : les deux segments ont donc le même milieu.

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$, donc $I$ est le milieu de $[AB]$ — $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ caractérise le milieu $I$. La relation de Chasles est vraie pour n'importe quel point $I$ : elle ne dit rien du milieu.

2. DÉFINITION

## Somme de deux vecteurs

CE QU'IL DIT

Tawa n3arrfou la somme de deux vecteurs. 3andna point A, w zouz vecteurs u w v. N7ottou B w C, elli le vecteur AB égale u, w le vecteur AC égale v. Men ba3d nlawjou 3la D, elli BC w AD 3andhom nafs le milieu : ya3ni ABDC parallélogramme. Le vecteur AD, houwa elli nsammiweh u plus v. Hedhi hiya la règle du parallélogramme : le vecteur AB plus le vecteur AC égale le vecteur AD.

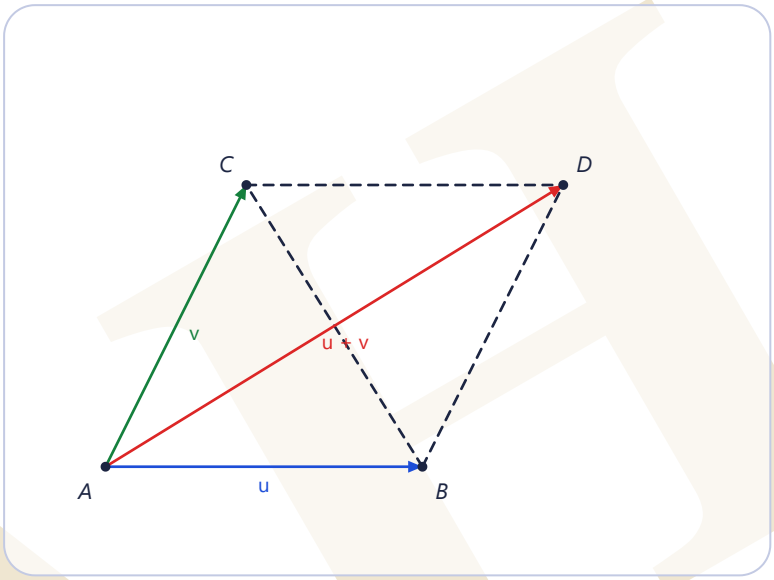
le vecteur A اللي ، B w C نحطّو . vecteurs u w v زوز point A ، w عندنا . la somme de deux vecteurs توّا نعرّفو
A B يعني : le milieu عندهم نفس B C w A D اللي ، D من بعد نلوّجو على . B égale u ، w le vecteur A C égale v
la règle du parallélogramme : هاذي هي . u plus v هو اللي نسمّيوه ، D C parallélogramme . le vecteur A D
. le vecteur A B plus le vecteur A C égale le vecteur A D

*Définissons maintenant la somme de deux vecteurs. On a un point A, et deux vecteurs u et v. On place B et C tels que le vecteur A B égale u, et le vecteur A C égale v. Puis on cherche D tel que B C et A D aient le même milieu : A B D C est donc un parallélogramme. Le vecteur A D, c'est ce qu'on appelle u plus v. C'est la règle du parallélogramme : le vecteur A B plus le vecteur A C égale le vecteur A D.*

Soit $A$ un point du plan et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On désigne par $B$ et $C$ les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Soit $D$ le point tel que $[BC]$ et $[AD]$ aient le **même milieu**.

On appelle **vecteur somme** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Il est noté $\vec{u} + \vec{v}$.

Pour un point $A$ et un vecteur $\vec{u}$ donnés, il existe **un seul** point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. Et comme $ABDC$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ : on retrouve la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.




ABDC est un parallélogramme : u + v = AD.

*Un point A en bas à gauche. Le vecteur u, égal au vecteur AB, part de A vers la droite jusqu'à B ; le vecteur v, égal au vecteur AC, part de A vers le haut et la droite jusqu'à C. Le point D complète le parallélogramme ABDC : les diagonales [BC] et [AD] se coupent en leur milieu. Le vecteur AD, en rouge, est le vecteur somme de u et v.*

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**$ABCD$ est un quadrilatère, $E$ et $F$ les points tels que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$. Montrer que $AEFC$ est un parallélogramme.**

**Le vecteur AE —** On passe par $D$ dans le vecteur $\overrightarrow{AE}$, puis on remplace $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$$

**Le vecteur CF —** De même, on passe par $D$ dans le vecteur $\overrightarrow{CF}$.

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$$

**Conclure —** Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont égaux : le quadrilatère $AEFC$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB}$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ — $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, où $ABDC$ est un parallélogramme. Deux vecteurs de même origine s'ajoutent par la diagonale du parallélogramme, celle qui part de leur origine commune.

3. PROPRIÉTÉ

## Propriétés de l'addition

CE QU'IL DIT

El addition des vecteurs 3andha nafs les règles mta3 el addition des nombres. u plus v égale v plus u : commutative. u plus la parenthèse v plus w, hiya bidha la parenthèse u plus v, plus w : associative, donc nekteb u plus v plus w blech parenthèses. W u plus le vecteur nul égale u. Hedha y5allina nrattbou les vecteurs kima n7ebbou, bech ntab9ou Chasles : l'extrémité mta3 vecteur tkoun l'origine mta3 elli ba3dou.

addition des nombres . u plus v égale v plus u : متاع الـ les règles عندها نفس addition des vecteurs الـ la parenthèse u plus v ، plus w : associative ، هي بيدها ، commutative . u plus la parenthèse v plus w les هاذا يخلّينا نرتّبو . parenthèses . w u plus le vecteur nul égale u بلاش u plus v plus w نكتبو donc l'origine تكون vecteur متاع Chasles : l'extrémité باش نطبّقو ، كيما نحبّو vecteurs متاع اللي بعدو .

*L'addition des vecteurs a les mêmes règles que l'addition des nombres. u plus v égale v plus u : elle est commutative. u plus, entre parenthèses, v plus w, c'est la même chose que, entre parenthèses, u plus v, plus w : elle est associative, donc on écrit u plus v plus w sans parenthèses. Et u plus le vecteur nul égale u. Cela permet de ranger les vecteurs comme on veut, pour appliquer Chasles : l'extrémité du premier doit être l'origine du suivant.*

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ : l'addition est **commutative** ;
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ : elle est **associative**, et l'on écrit simplement $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ ;
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ : le vecteur nul ne change rien.

Ces règles permettent de regrouper les vecteurs dans l'ordre qui arrange, en particulier pour appliquer la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$$

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Simplifier** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$.

**Réordonner —** L'addition est commutative : on met les vecteurs dans l'ordre où l'extrémité de l'un est l'origine du suivant.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

**Chasles —** On applique deux fois la relation de Chasles, de gauche à droite.

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ — $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Chasles ne s'applique que si l'extrémité du premier vecteur est l'origine du second.

---

4. DÉFINITION

## Opposé, différence

CE QU'IL DIT

u vecteur. El vecteur el wa7id elli ki nzidouh l u ya3tina le vecteur nul, nsammiweh l'opposé de u, w nektbouh moins u. W u moins v, ma3neha u plus l'opposé de v. Mithel mohemm : le vecteur AB plus le vecteur BA égale le vecteur AA, ya3ni le vecteur nul. Donc l'opposé du vecteur AB houwa le vecteur BA. W rodd belek : moins la parenthèse u plus v, twalli moins u moins v, koll signe yetbaddel.

نكتبوه l'opposé de u ، w نسمّيوه ، le vecteur nul يعطينا u لـ نزيدوه اللي الوحيد الـvecteur . u vecteur le vecteur A B plus le vecteur B A égale le : مثال مهمّ . u plus l'opposé de v معناها ، moins u . w u moins v moins la : رد بالك le vecteur B A . w هو le vecteur nul . donc l'opposé du vecteur A B يعني ، vecteur A A . يتبدّل signe كل ، moins u moins v تولّي ، parenthèse u plus v

*Soit u un vecteur. L'unique vecteur qui, ajouté à u, donne le vecteur nul s'appelle l'opposé de u, et on le note moins u. Et u moins v signifie u plus l'opposé de v. Un exemple important : le vecteur A B plus le vecteur B A égale le vecteur A A, c'est-à-dire le vecteur nul. Donc l'opposé du vecteur A B est le vecteur B A. Et attention : moins, entre parenthèses, u plus v, devient moins u moins v, chaque signe change.*

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. L'unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ s'appelle l'**opposé** de $\vec{u}$. Il est noté $-\vec{u}$. Ainsi $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.

**Notation.** La somme $\vec{u} + (-\vec{v})$ est notée $\vec{u} - \vec{v}$.

**Remarque.** Pour deux points $A$ et $B$ : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$ : on écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

De même, l'opposé de $\vec{u} + \vec{v}$ est $-\vec{u} - \vec{v}$, et $-(-\vec{u}) = \vec{u}$.

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

$$-(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Écrire sans parenthèses $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})$ et $-(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v})$.**

**Premier calcul —** L'opposé de $\vec{v} - \vec{w}$ est $-\vec{v} + \vec{w}$ : chaque signe change.

$\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

**Second calcul —** On enlève les deux parenthèses, puis $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ s'annulent.

$-(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v} + \vec{u} - \vec{v} = -\vec{v} - \vec{v}$

$\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} \quad ; \quad -\vec{v} - \vec{v}$

**À ne pas faire :** $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ — $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$. Un signe moins devant une parenthèse change le signe de chacun des vecteurs qu'elle contient.

5. DÉFINITION

## Produit par un réel

CE QU'IL DIT

Kifech nedherbou vecteur fi réel ? u vecteur mouch nul, w B elli le vecteur AB égale u. Na5dhou la droite AB bel repère A, B : A hiya zéro, w B hiya un. Alpha réel, w M le point elli l'abscisse mte3ou alpha. Alpha u, houwa le vecteur AM. Mathalan deux u : M fi l'abscisse deux. Moins deux u : M fi l'abscisse moins deux, fel jiha lo5ra. W alpha fois le vecteur nul égale le vecteur nul, w un fois u égale u.

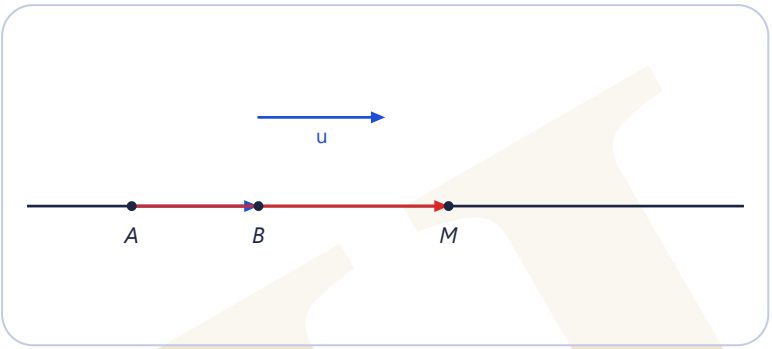
كيفاش نضربو vecteur في réel ؟ u vecteur موش nul اللي le vecteur A B égale u . ناخذو la droite A B بالـ A : B ، repère هي B w ، zéro هي M w le point ، réel alpha . un اللي l'abscisse متاعو alpha u . alpha ، deux u : M مثلا . le vecteur A M هو في deux u : M في l'abscisse deux . moins deux u : M في l'abscisse moins deux ، الجيهة الأخرى . u un fois u égale ، w alpha fois le vecteur nul égale le vecteur nul .

*Comment multiplier un vecteur par un réel ? Soit u un vecteur non nul, et B tel que le vecteur A B égale u. On munit la droite A B du repère A, B : A correspond à zéro, et B à un. Soit alpha un réel, et M le point d'abscisse alpha. Alpha u, c'est le vecteur A M. Par exemple deux u : M est à l'abscisse deux. Moins deux u : M est à l'abscisse moins deux, de l'autre côté. Et alpha fois le vecteur nul égale le vecteur nul, et un fois u égale u.*

- Soient $A$ un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et $B$ le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Soit $\alpha$ un réel et $M$ le point de $(AB)$ d'abscisse $\alpha$ dans le repère $(A, B)$. On appelle **vecteur produit** de $\vec{u}$ par $\alpha$ le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$. Il est noté $\alpha.\vec{u}$ ou $\alpha\vec{u}$.
- Le produit du vecteur nul par le réel $\alpha$ est le vecteur nul : $\alpha.\vec{0} = \vec{0}$.

**Remarque.** Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $1.\vec{u} = \vec{u}$.

Par exemple, dans le repère $(A, B)$, le point $C$ tel que $\vec{u} + \vec{u} = \overrightarrow{AC}$ a pour abscisse $2$, et le point $D$ tel que $-\vec{u} - \vec{u} = \overrightarrow{AD}$ a pour abscisse $-2$.




Ici α = 2,5 : le vecteur AM est 2,5 fois u.

*En haut, le vecteur u, une flèche horizontale vers la droite. En dessous, une droite horizontale graduée par le repère (A, B) : A est l'origine, B est à une unité à droite de A, et M est à l'abscisse 2,5, plus loin à droite. Le vecteur AM, en rouge, est le vecteur 2,5 fois u.*

$$\alpha\vec{u} = \overrightarrow{AM} \quad \text{où } M \text{ a pour abscisse } \alpha \text{ dans le repère } (A, B)$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, placer les points $M$, $N$ et $P$ d'abscisses respectives $-2$, $3$ et $\frac{1}{2}$ dans le repère $(A, B)$, et écrire les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ à l'aide de $\vec{u}$.**

**Le point M —** $M$ est du côté opposé à $B$, à deux unités de $A$ : le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est le produit de $\vec{u}$ par $-2$.

$\overrightarrow{AM} = -2\vec{u}$

**Les points N et P —** $N$ est à trois unités de $A$ du côté de $B$, et $P$ est le milieu de $[AB]$.

$\overrightarrow{AN} = 3\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{u}$

$$\overrightarrow{AM} = -2\vec{u} \quad ; \quad \overrightarrow{AN} = 3\vec{u} \quad ; \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{u}$$

**À ne pas faire :** $-2\vec{u}$ est un vecteur de longueur $-2$ fois celle de $\vec{u}$ — $-2\vec{u}$ a la direction de $\vec{u}$, le sens contraire, et une longueur double. Le signe du réel donne le sens ; une longueur n'est jamais négative.

6. PROPRIÉTÉ

## Propriétés du produit

CE QU'IL DIT

Les règles mta3 el produit par un réel : moins un fois u égale moins u. a u plus b u égale la parenthèse a plus b, fois u. a fois la parenthèse b u, égale a b fois u. W a fois la parenthèse u plus v, égale a u plus a v. Ya3ni n7esbou bel vecteurs kif ma n7esbou bel lettres fel algèbre : nfekkou les parenthèses, w njamm3ou les u m3a b3adhhom w les v m3a b3adhhom. Mathalan deux fois la parenthèse u moins trois v, moins la parenthèse cinq u moins six v : ta3ti moins trois u.

produit par un réel : moins un fois u égale moins u . a u plus b u égale la parenthèse a الـ متاع les règles plus b ، fois u . a fois la parenthèse b u ، égale a b fois u . w a fois la parenthèse u plus v ، égale a u plus les u نجمّعو les parenthèses ، w نفكّو : algèbre الـ في lettres بالـ نحسبو ما كيف vecteurs بالـ نحسبو يعني . a v deux fois la parenthèse u moins trois v ، moins la parenthèse cinq u مثلا . بعضهم مع w les v بعضهم مع moins six v : تعطي u moins trois .

*Les règles du produit par un réel : moins un fois u égale moins u. a u plus b u égale, entre parenthèses, a plus b, fois u. a fois, entre parenthèses, b u, égale a b fois u. Et a fois, entre parenthèses, u plus v, égale a u plus a v. On calcule donc avec les vecteurs comme avec des lettres en algèbre : on développe, et on regroupe les u ensemble et les v ensemble. Par exemple deux fois, entre parenthèses, u moins trois v, moins, entre parenthèses, cinq u moins six v : cela donne moins trois u.*

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ : $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tous réels $a$ et $b$ : $a.\vec{u} + b.\vec{u} = (a+b).\vec{u}$ et $a.(b.\vec{u}) = (ab).\vec{u}$.
- Pour tout réel $a$ et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ : $a.(\vec{u} + \vec{v}) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$.

On calcule donc avec les vecteurs comme avec des lettres en algèbre : on développe, on regroupe les termes en $\vec{u}$ et les termes en $\vec{v}$.

$$a\vec{u} + b\vec{u} = (a+b)\vec{u}$$

$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Simplifier $\vec{a} = 2(\vec{u} - 3\vec{v}) - (5\vec{u} - 6\vec{v})$ et $\vec{b} = 3\vec{u} + \vec{v} - \left[7\vec{u} - \frac{1}{2}(8\vec{u} + 2\vec{v})\right]$.**

**Le vecteur a —** On développe, sans oublier que le signe moins change les deux signes de la seconde parenthèse.

$\vec{a} = 2\vec{u} - 6\vec{v} - 5\vec{u} + 6\vec{v} = -3\vec{u}$

**Le crochet de b —** On commence par l'intérieur du crochet : la moitié de huit u plus deux v, c'est quatre u plus v.

$7\vec{u} - \frac{1}{2}(8\vec{u} + 2\vec{v}) = 7\vec{u} - 4\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{u} - \vec{v}$

**Le vecteur b —** On retire ce crochet : ses deux signes changent, et les termes en u s'annulent.

$\vec{b} = 3\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{v}$

$$\vec{a} = -3\vec{u} \quad ; \quad \vec{b} = 2\vec{v}$$

**À ne pas faire :** $2(\vec{u} - 3\vec{v}) = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ — $2(\vec{u} - 3\vec{v}) = 2\vec{u} - 6\vec{v}$. Le réel multiplie chacun des vecteurs de la parenthèse, pas seulement le premier.

**À ne pas faire :** $-4\left(\frac{3}{2}\vec{u}\right) = -\frac{5}{2}\vec{u}$ — $-4\left(\frac{3}{2}\vec{u}\right) = -6\vec{u}$. On multiplie les deux réels entre eux : la règle est $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$, pas $(a+b)\vec{u}$.

---

7. PROPRIÉTÉ

## Produit nul

CE QU'IL DIT

Alpha u égale le vecteur nul, waqtech ? Ken alpha égale zéro, walla u houwa le vecteur nul. Ezzouz bark. W ken alpha mouch zéro, nedherbou fi un sur alpha, w nal9aw u égale le vecteur nul. Mathalan ken u mouch nul, w la parenthèse deux x moins six, fois u, égale le vecteur nul, donc deux x moins six égale zéro, w x égale trois.

كان w . الزوز برك . le vecteur nul هو u ولّا ، alpha égale zéro كان ؟ وقتاش ، alpha u égale le vecteur nul
nul ، w la موش u كان مثلا . u égale le vecteur nul نلقاو un sur alpha ، w نضربو في ، zéro موش alpha
parenthèse deux x moins six ، fois u ، égale le vecteur nul ، donc deux x moins six égale zéro ، w x égale
. trois

*Quand alpha u est-il égal au vecteur nul ? Si alpha égale zéro, ou si u est le vecteur nul. Seulement dans ces deux cas. Et si alpha n'est pas nul, on multiplie par un sur alpha, et on trouve u égale le vecteur nul. Par exemple, si u n'est pas nul, et que, entre parenthèses, deux x moins six, fois u, égale le vecteur nul, alors deux x moins six égale zéro, et x égale trois.*

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel $\alpha$ :

$$\alpha\vec{u} = \vec{0} \iff (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}).$$

En particulier, si $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ et $\alpha \neq 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ : on multiplie les deux membres par $\frac{1}{\alpha}$.

$$\alpha\vec{u} = \vec{0} \iff (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$$

DÉMONSTRATION

Si $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, le produit est nul par définition. Réciproquement, si $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ et $\alpha \neq 0$, alors $\vec{u} = 1.\vec{u} = \left(\frac{1}{\alpha} \times \alpha\right)\vec{u} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{u}) = \frac{1}{\alpha}\vec{0} = \vec{0}$.

EXEMPLE TRAITÉ

**$\vec{u}$ est un vecteur non nul et $x$ un réel tel que $(2x-6)\vec{u} = \vec{0}$. Déterminer $x$.**

**Appliquer la propriété —** Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul : c'est donc le réel qui est nul.

$2x - 6 = 0$

**Résoudre —** On ajoute $6$ puis on divise par $2$.

$x = 3$

$$x = 3$$

**À ne pas faire :** $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, donc $\alpha = 0$ — $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, donc $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$. Le produit est aussi nul quand le vecteur est nul, quel que soit le réel.

---

8. DÉFINITION

## Vecteurs colinéaires

CE QU'IL DIT

Zouz vecteurs colinéaires, ki wa7ed menhom houwa le5er madhroub fi réel : v égale k u. Le vecteur nul colinéaire m3a el koll, 5ater le vecteur nul égale zéro fois u. W hedhi mohemma barcha : A, B w C alignés, ki le vecteur AB w le vecteur AC colinéaires. W ken le vecteur AB égale alpha fois le vecteur CD : ken alpha positif, nafs le sens ; ken alpha négatif, sens contraires.

زوز vecteurs colinéaires ، كي واحد منهم هو الآخر مضروب في réel : v égale k u . le vecteur nul colinéaire هاذي مهمّة برشا : A ، B w C alignés le vecteur nul égale zéro fois u . w الكل ، خاطر le vecteur A B w le كي ، A ، B w C alignés : le vecteur A B égale alpha fois le vecteur C D كان vecteur A C colinéaires . w le نفس ، alpha positif كان : sens contraires كان ؛ sens . alpha négatif ، sens contraires كان

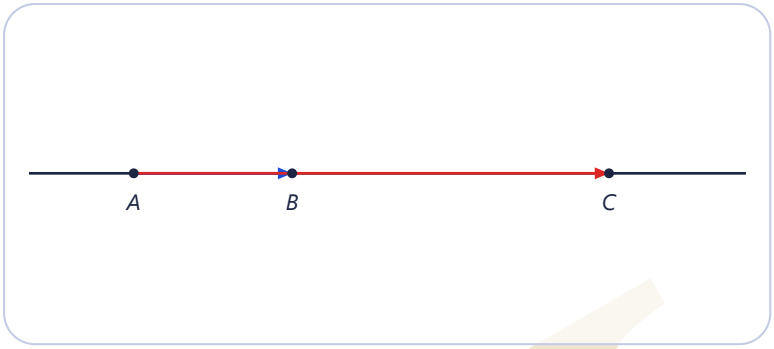
*Deux vecteurs sont colinéaires quand l'un est le produit de l'autre par un réel : v égale k u. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs, car le vecteur nul égale zéro fois u. Et ceci est très important : A, B et C sont alignés quand le vecteur A B et le vecteur A C sont colinéaires. Et si le vecteur A B égale alpha fois le vecteur C D : si alpha est positif, ils ont le même sens ; si alpha est négatif, ils sont de sens contraires.*

Deux vecteurs sont dits **colinéaires** lorsque l'un est le produit de l'autre par un réel.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, puisque $\vec{0} = 0.\vec{u}$.

Soit $A$ un point et $B$, $C$ les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires **si et seulement si** les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**Remarque.** Si $A$, $B$, $C$ et $D$ sont alignés, il existe un réel $\alpha$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$. Si $\alpha > 0$, les vecteurs sont colinéaires et **de même sens** ; si $\alpha < 0$, ils sont colinéaires et **de sens contraires**.




A, B et C alignés : le vecteur AC est 3 fois le vecteur AB.

*Une droite horizontale porte, de gauche à droite, les points A, B puis C. Le vecteur AB, en bleu, et le vecteur AC, en rouge, partent tous deux de A vers la droite : ils ont la même direction et le même sens, et AC est trois fois plus long que AB.*

COLINÉAIRES

$\vec{v} = k\vec{u}$

$A, B, C$ alignés $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

EXEMPLE TRAITÉ

**Soient $\vec{a} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 3\vec{v}$ et $\vec{b} = 3(\vec{v} - 4\vec{u}) + 6\vec{u}$. Simplifier $\vec{a}$ et $\vec{b}$, puis exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{b}$.**

**Simplifier a —** On développe puis on regroupe les termes en v : deux v moins trois v.

$\vec{a} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{v}$

**Simplifier b —** On développe puis on regroupe les termes en u : moins douze u plus six u.

$\vec{b} = 3\vec{v} - 12\vec{u} + 6\vec{u} = -6\vec{u} + 3\vec{v}$

**Comparer —** On met $-3$ en facteur dans $\vec{b}$ : on retrouve $\vec{a}$. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont donc colinéaires, et de sens contraires.

$\vec{b} = -3(2\vec{u} - \vec{v}) = -3\vec{a} \quad \text{donc} \quad \vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$

$$\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc $A$, $B$, $C$ et $D$ sont alignés — $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires : les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles. L'alignement se lit sur deux vecteurs qui ont une origine commune, comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

9. DÉFINITION

## Base et composantes

CE QU'IL DIT

Zouz vecteurs i w j mouch colinéaires, ya3mlou base. W koll vecteur u, najmou nektbouh b tari9a wa7da bark : u égale x i plus y j. Le couple x, y, houma les composantes de u dans la base i, j, w nektbouhom fi colonne : x el fou9 w y el louta. Mathalan le vecteur i 3andou les composantes un, zéro, w le vecteur j 3andou zéro, un. W zouz vecteurs égaux ki ykounou 3andhom nafs les composantes.

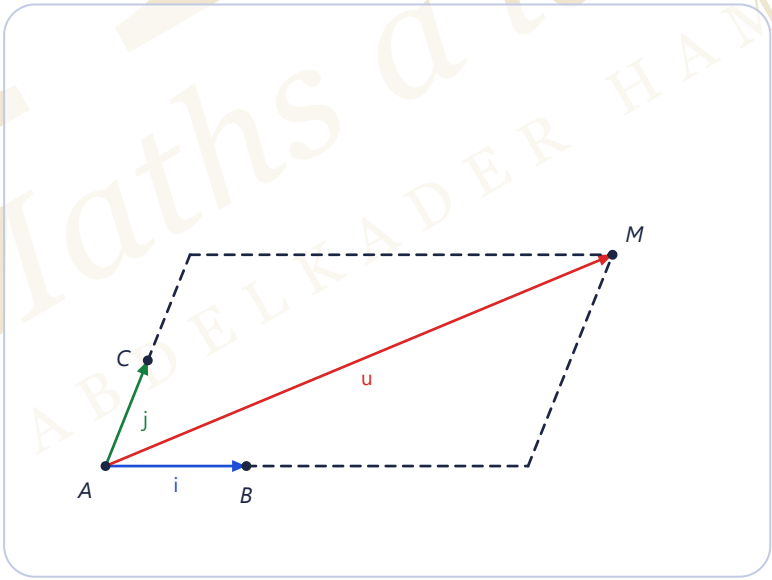
زوج i w j vecteurs موش colinéaires ، يعملو w . base كل vecteur u ، نجّمو نكتبوه بطريقة وحدة برك : u égale x
x : نكتبوهم في les composantes de u dans la base i ، j ، w هوما ، i plus y j . le couple x ، y
الفوق colonne w
اللوطة . مثلا y le vecteur i عندو le vecteur j عندو les composantes un ، zéro ، w عندو les composantes un ، zéro . w vecteurs زوج
égaux كي يكونو عندهم نفس les composantes .

*Deux vecteurs i et j non colinéaires forment une base. Et tout vecteur u peut s'écrire d'une seule manière : u égale x i plus y j. Le couple x, y, ce sont les composantes de u dans la base i, j, et on les écrit en colonne : x en haut et y en bas. Par exemple le vecteur i a pour composantes un, zéro, et le vecteur j a pour composantes zéro, un. Et deux vecteurs sont égaux quand ils ont les mêmes composantes.*

- On appelle **base** de l'ensemble des vecteurs du plan tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs **non colinéaires**.
- Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un **unique** couple $(x, y)$ de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ce couple est appelé couple de **composantes** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

**Notation.** On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ainsi, le vecteur nul a pour composantes $(0, 0)$ ; $\vec{i}$ a pour composantes $(1, 0)$ et $\vec{j}$ a pour composantes $(0, 1)$. Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les mêmes composantes : $\vec{u} = \vec{v} \iff (x = x' \text{ et } y = y')$.




Le vecteur AM se décompose en x fois i plus y fois j.

*Un point A. Le vecteur i, égal au vecteur AB, part de A vers la droite ; le vecteur j, égal au vecteur AC, part de A vers le haut en penchant à droite : i et j ne sont pas colinéaires. Le vecteur u, égal au vecteur AM, va de A à un point M en haut à droite. Des pointillés, parallèles à i et à j, montrent que le vecteur AM s'obtient en ajoutant x fois i et y fois j.*

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \iff \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, donner les composantes des vecteurs $2\vec{i} + 3\vec{j}$, $-4\vec{i}$ et $-\frac{3}{5}\vec{j}$.**

**Lire les coefficients —** Le coefficient de $\vec{i}$ est la première composante, celui de $\vec{j}$ la seconde.

$2\vec{i} + 3\vec{j}$ : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Un coefficient absent —** Quand $\vec{j}$ n'apparaît pas, sa composante est nulle ; de même pour $\vec{i}$.

$-4\vec{i}$ : $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{3}{5}\vec{j}$ : $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$$(2, 3) \quad ; \quad (-4, 0) \quad ; \quad \left(0, -\frac{3}{5}\right)$$

**À ne pas faire :** $-4\vec{i}$ a pour composantes $(-4)$ — $-4\vec{i} = -4\vec{i} + 0\vec{j}$ a pour composantes $(-4, 0)$. Un vecteur du plan a toujours deux composantes : celle qui manque vaut zéro.

10. PROPRIÉTÉ

## Calcul sur les composantes

CE QU'IL DIT

Bel composantes, el 7seb sehel. u x, y w v x prime, y prime : u plus v, les composantes mte3ou x plus x prime, w y plus y prime. W alpha u, les composantes mte3ou alpha x, w alpha y. Ya3ni njam3ou composante m3a composante, w el réel yedhreb ezzouz composantes. Mathalan u moins trois, deux w v un, quatre : deux u moins cinq v, ya3ti moins onze, moins seize.

x plus x متاعو u x ، y w v x prime ، y prime : u plus v ، les composantes . بالـ composantes ، الحساب ساهل
يعني نجمعو . alpha x ، w alpha y متاعو prime ، w y plus y prime . w alpha u ، les composantes
u moins trois ، deux w v un ، مثلا . composantes يضرب الزوز réel الـ composante ، w مع composante
. moins onze ، moins seize يعطي ، quatre : deux u moins cinq v

*Avec les composantes, le calcul est simple. Soient u de composantes x, y et v de composantes x prime, y prime : u plus v a pour composantes x plus x prime, et y plus y prime. Et alpha u a pour composantes alpha x, et alpha y. On additionne composante par composante, et le réel multiplie les deux composantes. Par exemple, avec u moins trois, deux et v un, quatre : deux u moins cinq v donne moins onze, moins seize.*

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et $\alpha$ un réel. Alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}\qquad \alpha\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$$

On additionne composante par composante, et on multiplie chaque composante par le réel.

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

$$\alpha\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**On considère les vecteurs $\vec{u}$ de composantes $-3$ et $2$, et $\vec{v}$ de composantes $1$ et $4$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{w}=2\vec{u}-5\vec{v}$.**

**Les produits —** On multiplie chaque composante de $\vec{u}$ par $2$, et chaque composante de $\vec{v}$ par $-5$.

$$2\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}\qquad -5\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-20\end{pmatrix}$$

**La somme —** On additionne composante par composante : moins six moins cinq, puis quatre moins vingt.

$$\vec{w}\begin{pmatrix}-6-5\\4-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\-16\end{pmatrix}$$

$$\vec{w}(-11,-16)$$

**À ne pas faire :** $2\vec{u}-5\vec{v}$ a pour composantes $(2\times(-3)-5\times1,\ 2+4)$ — $(2\times(-3)-5\times1,\ 2\times2-5\times4)=(-11,-16)$. Le réel multiplie les deux composantes du vecteur, la seconde comme la première.

11. THÉORÈME

## Le déterminant

CE QU'IL DIT

Kifech na3rfou zouz vecteurs colinéaires bel composantes ? u x, y w v x prime, y prime. N7esbou le déterminant : x y prime moins x prime y. Nektbouh fi tableau : x w x prime el fou9, y w y prime el louta, w nedherbou en croix. El théorème : u w v colinéaires, ki le déterminant égale zéro. Mathalan u trois, deux w v moins six, moins quatre : trois fois moins quatre, moins moins six fois deux, égale moins douze plus douze, égale zéro : colinéaires.

كيفاش نعرفو زوز vecteurs colinéaires بالـ composantes ؟ x ، y w v x prime ، y prime . نحسبو le
déterminant : x y prime moins x prime y . نكتبوه في tableau : x w x prime الفوق ، y w y prime اللوطة ، w
نضربو en croix . الـ théorème : u w v colinéaires ، كي le déterminant égale zéro . مثلا u trois ، deux w v

moins six ، moins quatre : trois fois moins quatre ، moins moins six fois deux ، égale moins douze plus douze ، égale zéro : colinéaires .

*Comment savoir si deux vecteurs sont colinéaires à partir de leurs composantes ? Soient u de composantes x, y et v de composantes x prime, y prime. On calcule le déterminant : x y prime moins x prime y. On l'écrit dans un tableau : x et x prime en haut, y et y prime en bas, et on multiplie en croix. Le théorème : u et v sont colinéaires quand le déterminant égale zéro. Par exemple, u trois, deux et v moins six, moins quatre : trois fois moins quatre, moins moins six fois deux, égale moins douze plus douze, égale zéro : ils sont colinéaires.*

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i},\vec{j})$.

- Le réel $xy'-x'y$ est appelé le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ ; on le note $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si leur déterminant est **nul** :

$$\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ colinéaires} \iff \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}=0 \iff xy'-x'y=0.$$

Par exemple, $\vec{u}(3,2)$ et $\vec{v}(-6,-4)$ sont colinéaires ($-12+12=0$).

LE DÉTERMINANT

$$\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$$

$$\vec{u},\vec{v}\text{ colinéaires} \iff xy'-x'y=0$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Les vecteurs $\vec{u}$ de composantes $2$ et $1-\sqrt{5}$, et $\vec{v}$ de composantes $\sqrt{5}+1$ et $-2$, sont-ils colinéaires ?**

**Le déterminant —** On calcule $x$ fois $y'$, moins $x'$ fois $y$ : la première composante de u par la seconde de v, moins l'inverse.

$xy'-x'y=2\times(-2)-(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5})$

**Le produit —** Le produit $(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$ est une identité remarquable : un moins cinq.

$(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5})=1-5=-4$

**Conclure —** Le déterminant vaut moins quatre moins moins quatre, donc zéro : les vecteurs sont colinéaires.

$xy'-x'y=-4-(-4)=0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

**À ne pas faire :** $xy' - x'y = 3 \times (-6) - 2 \times (-4)$ pour $\vec{u}(3, 2)$ et $\vec{v}(-6, -4)$ — $xy' - x'y = 3 \times (-4) - (-6) \times 2 = 0$. On croise : la première composante de $\vec{u}$ avec la seconde de $\vec{v}$, moins la première de $\vec{v}$ avec la seconde de $\vec{u}$.

**À ne pas faire :** $xy' + x'y = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires — $xy' - x'y = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Le déterminant est une différence de produits en croix ; la somme $xx' + yy'$ sert à autre chose, à l'orthogonalité.

---

12. DÉFINITION

## Repère cartésien

CE QU'IL DIT

O point, w i, j base : O, i, j, nsammiweh repère cartésien. W koll point M, 3andou couple wa7id x, y, elli le vecteur OM égale x i plus y j. x hiya l'abscisse w y hiya l'ordonnée, w nektbou M x, y. O hiya l'origine. Ya3ni les coordonnées du point M, houma bedhabt les composantes du vecteur OM. W rodd belek : fi repère cartésien, les axes mouch lezem ykounou perpendiculaires.

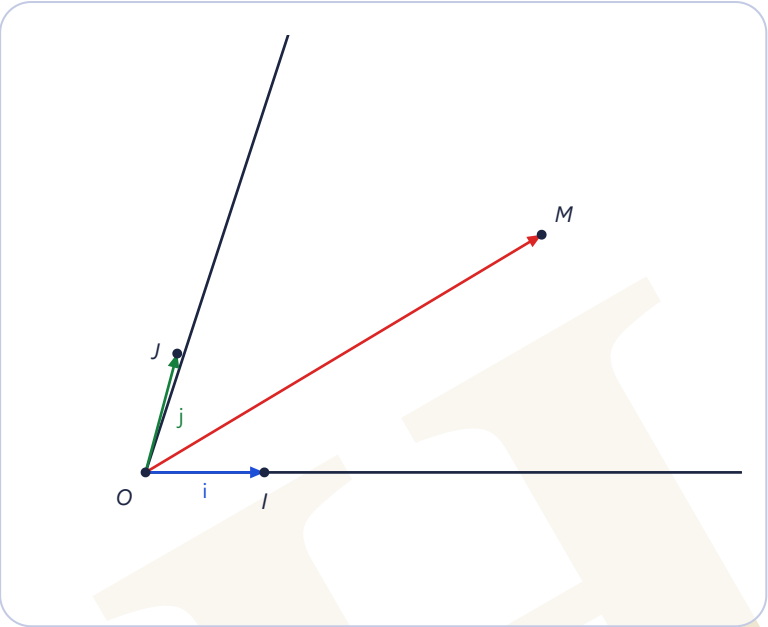
le اللي ، x ، y وحيد couple عندو ، point M كل repère cartésien . w نسمّيوه ، O point ، w i ، j base : O ، i ، j
يعني . l'origine هي M x ، y . O نكتبو l'ordonnée ، w هي l'abscisse w y هي vecteur O M égale x i plus y j . x
repère في : رد بالك les composantes du vecteur O M . w هوما بالضبط ، les coordonnées du point M
. perpendiculaires موش لازم يكونو cartésien ، les axes

*Soit O un point, et i, j une base : O, i, j s'appelle un repère cartésien. Et tout point M a un unique couple x, y tel que le vecteur O M égale x i plus y j. x est l'abscisse et y l'ordonnée, et on note M x, y. O est l'origine. Les coordonnées du point M sont donc exactement les composantes du vecteur O M. Et attention : dans un repère cartésien, les axes ne sont pas forcément perpendiculaires.*

Soit $O$ un point du plan et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

- $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé **repère cartésien** du plan.
- Soit $M$ un point du plan. Le couple de **coordonnées** du point $M$ dans ce repère est l'unique couple $(x, y)$ de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Le réel $x$ est l'**abscisse** de $M$ et le réel $y$ son **ordonnée**. On note $M(x, y)$.
- Le point $O$ est l'**origine** du repère ; $(O, \vec{i})$ est l'**axe des abscisses** et $(O, \vec{j})$ l'**axe des ordonnées**.

Les coordonnées du point $M$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$.




Les coordonnées de M sont les composantes du vecteur OM.

*Un repère cartésien d'origine O, en bas à gauche. Le vecteur i, égal au vecteur OI, part de O vers la droite ; le vecteur j, égal au vecteur OJ, part de O vers le haut en penchant légèrement : les axes ne sont pas forcément perpendiculaires. Un point M en haut à droite, et le vecteur OM en rouge.*

$$M(x,y) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne $\overrightarrow{OM} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\overrightarrow{ON} = 3\vec{j}$. Donner les coordonnées de $M$ et de $N$.**

**Le point M —** Les coordonnées de $M$ sont les coefficients de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ dans le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
$M(-2,5)$

**Le point N —** Le vecteur $\vec{i}$ n'apparaît pas dans $\overrightarrow{ON}$ : l'abscisse de $N$ est nulle, $N$ est sur l'axe des ordonnées.
$N(0,3)$

$$M(-2,5) \quad ; \quad N(0,3)$$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{ON} = 3\vec{j}$, donc $N(3,0)$ — $\overrightarrow{ON} = 0\vec{i} + 3\vec{j}$, donc $N(0,3)$. L'abscisse est toujours le coefficient de $\vec{i}$, écrite en premier.

13. PROPRIÉTÉ

## Composantes du vecteur AB

CE QU'IL DIT

A x A, y A w B x B, y B. Les composantes du vecteur AB : x B moins x A, w y B moins y A. Dima l'extrémité moins l'origine : B moins A. Mathalan A moins un, deux w B trois, quatre : le vecteur AB 3andou quatre, deux. W ken n7ebbou ABCD parallélogramme, nektbou le vecteur AB égale le vecteur DC, w nsawiw les composantes wa7da b wa7da.

ديما . A x A ، y A w B x B ، y B . les composantes du vecteur A B : x B moins x A ، w y B moins y A عندو A moins un ، deux w B trois ، quatre : le vecteur A B مثلا . l'extrémité moins l'origine : B moins A نساويو le vecteur A B égale le vecteur D C ، w نكتبو ، A B C D parallélogramme كان نحبّو quatre ، deux . w وحدة بوحدة les composantes .

*Soient A de coordonnées x A, y A et B de coordonnées x B, y B. Les composantes du vecteur A B : x B moins x A, et y B moins y A. Toujours l'extrémité moins l'origine : B moins A. Par exemple, A moins un, deux et B trois, quatre : le vecteur A B a pour composantes quatre, deux. Et si on veut que A B C D soit un parallélogramme, on écrit le vecteur A B égale le vecteur D C, et on égale les composantes une à une.*

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points. Par Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, donc :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour $A(-1, 2)$ et $B(3, 4)$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; pour $A(-5, 3)$ et $B(-2, 3)$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$ABCD$ est un **parallélogramme** si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ : on traduit cette égalité composante par composante.

EXTRÉMITÉ MOINS ORIGINE

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**On donne $A(5, 4)$, $B(-6, 1)$ et $C(2, 2)$. Calculer les coordonnées du point $D$ pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.**

**Traduire —** $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. On note $D(x, y)$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 - 5 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 - x \\ 2 - y \end{pmatrix}$$

**Égaler les composantes —** Deux vecteurs égaux ont les mêmes composantes : deux moins x égale moins onze, et deux moins y égale moins trois.

$$2 - x = -11 \quad \text{et} \quad 2 - y = -3$$

**Résoudre —** On isole x puis y dans chacune des deux équations.

$$x = 13 \quad ; \quad y = 5$$

$D(13, 5)$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$ — $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. On retranche toujours l'origine à l'extrémité : les coordonnées de $B$ moins celles de $A$.

**À ne pas faire :** $ABCD$ parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ — $ABCD$ parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Dans $ABCD$, le côté $[AB]$ et le côté $[DC]$ sont parcourus dans le même sens.

---

14. MÉTHODE

## Alignement, parallélisme

CE QU'IL DIT

Etari9a : A, B w C alignés, ki le vecteur AB w le vecteur AC colinéaires. W la droite AB parallèle à la droite CD, ki le vecteur AB w le vecteur CD colinéaires. Donc n7esbou les composantes, w men ba3d le déterminant. Mathalan A moins quatre, deux, B moins trois, cinq, w C moins deux, huit : le vecteur AB un, trois, w le vecteur AC deux, six. Un fois six moins deux fois trois égale zéro : alignés.

الطريقة : A ، B w C alignés . le vecteur A B w le vecteur A C colinéaires . w la droite A B parallèle à la droite C D ، كي ، donc le vecteur A B w le vecteur C D colinéaires ، نحسبو w les composantes ، من بعد le déterminant . مثلا le vecteur A B un : huit ، cinq ، deux ، A moins quatre ، deux ، six . un fois six moins deux fois trois égale zéro : alignés . ، trois ، w le vecteur A C

*La méthode : A, B et C sont alignés quand le vecteur A B et le vecteur A C sont colinéaires. Et la droite A B est parallèle à la droite C D quand le vecteur A B et le vecteur C D sont colinéaires. On calcule donc les composantes, puis le déterminant. Par exemple, A moins quatre, deux, B moins trois, cinq, et C moins deux, huit : le vecteur A B un, trois, et le vecteur A C deux, six. Un fois six moins deux fois trois égale zéro : ils sont alignés.*

Dans un repère cartésien :

- **Trois points** $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul.
- **Deux droites** $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Méthode : calculer les composantes des deux vecteurs, puis leur déterminant $xy' - x'y$.

Par exemple, pour $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(0, 1)$ et $D(2, -2)$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; le déterminant vaut $(-4)(-3) - 2 \times 2 = 8$ : les vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Les points $A(-4,2)$, $B(-3,5)$ et $C(-2,8)$ sont-ils alignés ?**

**Les vecteurs —** On calcule les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ : extrémité moins origine.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3+4\\5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2+4\\8-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

**Le déterminant —** Un fois six, moins deux fois trois : le déterminant est nul.

$$1\times 6-2\times 3=0$$

**Conclure —** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, d'ailleurs $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ : les points sont alignés.

$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$$

$A, B, C$ sont alignés

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires, donc $A$, $B$ et $C$ sont alignés — $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, donc $A$, $B$ et $C$ sont alignés. Pour un alignement, les deux vecteurs doivent partir du même point.

---

15. APPLICATION

## Un trapèze

CE QU'IL DIT

Tatbi9 : trapèze ABCD, w le vecteur DC égale trois fois le vecteur AB. I w J les milieux de AB w CD, w O elli le vecteur DO égale trois demis du vecteur DA. El fekra : na5dhou repère mel figure rou7ha : D, le vecteur DC, le vecteur DA. Tawa D zéro, zéro, C un, zéro, A zéro, un, w B un tiers, un. W bech nthabtou elli O, B, C alignés, n7esbou le déterminant mta3 le vecteur OB w le vecteur OC : nal9aweh zéro.

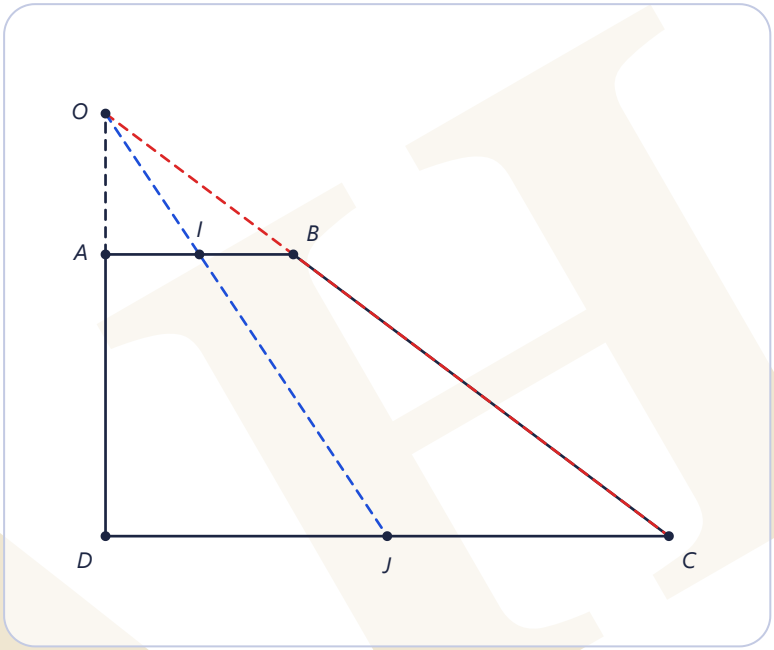
تطبيق : ، trapèze A B C D ، w le vecteur D C égale trois fois le vecteur A B . I w J les milieux de A B w C D ، الفكرة : ناخذو repère من الـ figure روحها : ، le vecteur D O égale trois demis du vecteur D A اللي w O باش نثبتو D zéro ، zéro ، C un ، zéro ، A zéro ، un ، w B un tiers ، un . w توّا . vecteur D C ، le vecteur D A . zéro نلقاوه : le vecteur O B w le vecteur O C متاع le déterminant نحسبو ، O ، B ، C alignés اللي

*Une application : le trapèze A B C D, avec le vecteur D C égale trois fois le vecteur A B. I et J sont les milieux de A B et C D, et O est le point tel que le vecteur D O égale trois demis du vecteur D A. L'idée : prendre un repère donné par la figure elle-même : D, le vecteur D C, le vecteur D A. Alors D a pour coordonnées zéro, zéro, C un, zéro, A zéro, un, et B un tiers, un. Et pour prouver que O, B et C sont alignés, on calcule le déterminant du vecteur O B et du vecteur O C : on trouve zéro.*

$ABCD$ est un trapèze tel que $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$. $I$ et $J$ sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[CD]$, et $O$ est le point défini par $\overrightarrow{DO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$. On considère le repère $(D,\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$.

Dans ce repère, $D(0,0)$, $C(1,0)$ et $A(0,1)$. Comme $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, on a $B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ ; puis $O\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $J\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $I\left(\frac{1}{6}, 1\right)$.

Le choix du repère, porté par la figure elle-même, rend tous les calculs simples.




O, B, C sont alignés ; O, I, J aussi.

*Un trapèze ABCD : la grande base [DC] en bas, de D à gauche à C à droite ; la petite base [AB] en haut, trois fois plus courte, avec A au-dessus de D. I est le milieu de [AB] et J le milieu de [DC]. Le point O est au-dessus de A, sur la droite (DA). Les droites (OC) et (OJ) sont tracées en pointillés : la première passe par B, la seconde par I.*

EXEMPLE TRAITÉ

**Montrer que les points $O$, $B$ et $C$ d'une part, et les points $O$, $I$ et $J$ d'autre part, sont alignés.**

**O, B et C —** On calcule les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, puis leur déterminant.

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right) - 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

**O, I et J —** Même méthode avec les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ : le déterminant est encore nul.

$$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{6}\times\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OJ} = 3\overrightarrow{OI}$$

16. DÉFINITION

## Norme d'un vecteur

CE QU'IL DIT

La norme du vecteur u : ken u égale le vecteur AB, la norme de u hiya la longueur AB. Nektbouha u bin zouz barres doubles. Ken la norme égale un, n9oulou u unitaire, walla normé. La norme égale zéro ken u houwa le vecteur nul bark. W la norme de alpha u, égale la valeur absolue de alpha, fois la norme de u. Mathalan ken la norme de u égale trois, la norme de moins trois u égale neuf, mouch moins neuf. W rodd belek : la norme de u plus v, mouch dima la somme des normes.

نكتبوها u بين زوز . la longueur A B هي u égale le vecteur A B ، la norme de u كان : la norme du vecteur u le هو u كان normé . la norme égale zéro ولّا ، u unitaire نقولو ، la norme égale un كان . barres doubles مثلا كان . w la norme de alpha u ، égale la valeur absolue de alpha ، fois la norme de u . برك vecteur nul la norme : رد بالك moins neuf . w موش ، la norme de u égale trois ، la norme de moins trois u égale neuf . la somme des normes ديما موش ، de u plus v

*La norme du vecteur u : si u égale le vecteur A B, la norme de u est la longueur A B. On l'écrit u entre deux doubles barres. Si la norme égale un, on dit que u est unitaire, ou normé. La norme est nulle seulement si u est le vecteur nul. Et la norme de alpha u égale la valeur absolue de alpha, fois la norme de u. Par exemple, si la norme de u égale trois, la norme de moins trois u égale neuf, et non moins neuf. Et attention : la norme de u plus v n'est pas toujours la somme des normes.*

Soient $A$ un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur et $B$ le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$ le réel noté $\|\vec{u}\|$ et qui est égal à $AB$. Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est un vecteur **unitaire** ou **normé**.

- $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ;
- pour tout réel $\alpha$ : $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$.

Par exemple, si $\|\vec{u}\| = 3$, alors $\|-\vec{u}\| = 3$, $\|2\vec{u}\| = 6$ et $\|-3\vec{u}\| = 9$.

En général $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ; dans le triangle formé par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et leur somme, on a $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

$$\|\vec{u}\| = AB \quad \text{où} \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$$

EXEMPLE TRAITÉ

**$\vec{u}$ est un vecteur de norme $3$. Calculer la norme de chacun des vecteurs $-\vec{u}$, $2\vec{u}$ et $-3\vec{u}$.**

**La règle —** La norme du produit est la valeur absolue du réel multipliée par la norme du vecteur : le signe disparaît.

$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \times 3$

**Les trois normes —** On multiplie trois par un, par deux, puis par trois, les valeurs absolues de moins un, deux et moins trois.

$\|-\vec{u}\| = 3 \quad ; \quad \|2\vec{u}\| = 6 \quad ; \quad \|-3\vec{u}\| = 9$

$3 \quad ; \quad 6 \quad ; \quad 9$

**À ne pas faire :** $\|-3\vec{u}\| = -3\|\vec{u}\| = -9$ — $\|-3\vec{u}\| = |-3| \cdot \|\vec{u}\| = 9$. Une norme est une longueur : elle n'est jamais négative, c'est pourquoi on prend la valeur absolue du réel.

**À ne pas faire :** $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ — $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. Dans un triangle, un côté est plus court que la somme des deux autres : les normes ne s'additionnent pas.

---

17. DÉFINITION

## Vecteurs orthogonaux

CE QU'IL DIT

u w v vecteurs mouch nuls, u égale le vecteur AB w v égale le vecteur AC. u w v orthogonaux, ki la droite AB w la droite AC perpendiculaires. W par convention, le vecteur nul orthogonal m3a ay vecteur. Base i, j orthonormée, ki i w j orthogonaux, w ezzouz la norme mte3hom un. W repère orthonormé, ki la base mte3ou orthonormée. Mithel : u w v 3andhom nafs la norme : u plus v w u moins v, houma les diagonales mta3 losange, donc orthogonaux.

la كي ، nuls ، u égale le vecteur A B w v égale le vecteur A C . u w v orthogonaux موش u w v vecteurs vecteur مع أيّ droite A B w la droite A C perpendiculaires . w par convention ، le vecteur nul orthogonal كي ، un . w repère orthonormé متاعهم la norme الزوز i w j orthogonaux ، w كي ، . base i ، j orthonormée les هوما ، la norme : u plus v w u moins v عندهم نفس u w v : مثال . orthonormée متاعو la base . losange ، donc orthogonaux متاع diagonales

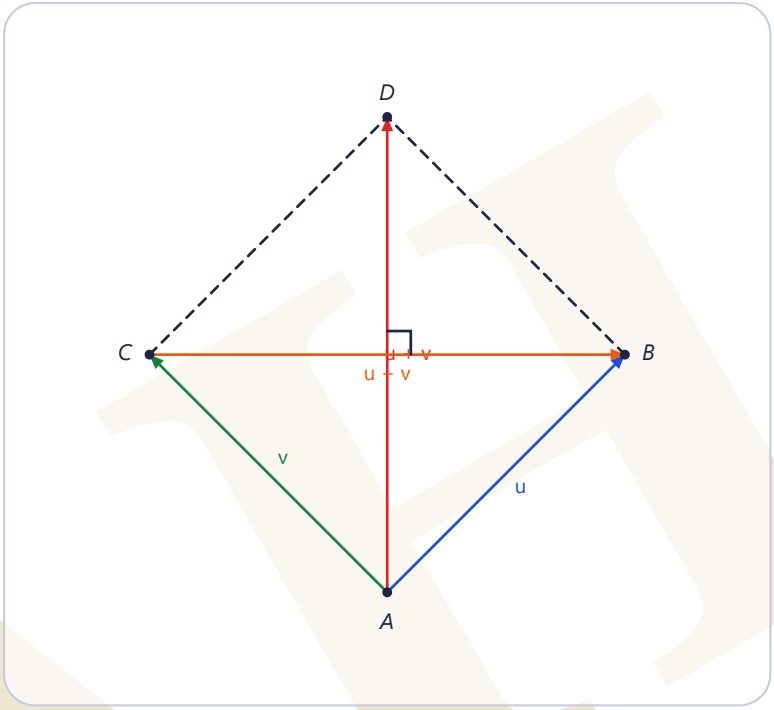
*Soient u et v deux vecteurs non nuls, u égale le vecteur A B et v égale le vecteur A C. u et v sont orthogonaux quand la droite A B et la droite A C sont perpendiculaires. Et par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur. Une base i, j est orthonormée quand i et j sont orthogonaux, et ont tous les deux une norme égale à un. Et un repère est orthonormé quand sa base est orthonormée. Un exemple : si u et v ont la même norme, u plus v et u moins v sont les diagonales d'un losange, donc ils sont orthogonaux.*

Soit $A$ un point du plan et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls**. Soient $B$ et $C$ les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires. On écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Par exemple, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et de même norme, $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux — ce sont les diagonales d'un losange. Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $a\vec{u} \perp b\vec{v}$ pour tous réels $a$ et $b$.

- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormée** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et normés : $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé** si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.




u et v de même norme : u + v et u − v sont orthogonaux.

*Un losange ABDC : A en bas, B à droite, C à gauche, D en haut. Le vecteur u, égal au vecteur AB, et le vecteur v, égal au vecteur AC, ont la même longueur. La diagonale [AD] porte le vecteur u plus v ; la diagonale [CB] porte le vecteur u moins v. Les deux diagonales se coupent à angle droit.*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff (AB) \perp (AC)$$

$$(\vec{i}, \vec{j}) \text{ orthonormée} \iff \vec{i} \perp \vec{j} \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$$

EXEMPLE TRAITÉ

**$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de même norme. Montrer que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.**

**La figure —** On place $B$ et $C$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis $D$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Comme $AB = AC$, ce parallélogramme est un losange.

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$

**La différence —** La différence u moins v s'écrit avec Chasles : c'est le vecteur qui va de C à B.

$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

**Conclure —** Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires : les vecteurs u plus v et u moins v sont donc orthogonaux.

$(AD) \perp (CB)$

$\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux

**À ne pas faire :** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} \perp \vec{j}$ est un repère orthonormé — $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Orthonormé, c'est orthogonal et normé : les deux vecteurs de la base doivent aussi avoir pour norme un.

---

18. APPLICATION

## Un rectangle

CE QU'IL DIT

Tatbi9 e5or : rectangle ABCD, w AB égale deux fois AD. Na5dhou le repère A, le vecteur AI, le vecteur AD. Bima elli AI égale AD, el points 3andhom coordonnées sehla : B deux, zéro, C deux, un, D zéro, un. E elli le vecteur DE égale deux tiers du vecteur DI : E deux tiers, un tiers. W le déterminant mta3 le vecteur AE w le vecteur AC yotla3 zéro : A, E w C alignés.

تطبيق آخر : rectangle A B C D ، w A B égale deux fois A D . ناخذو le repère A ، le vecteur A I ، le vecteur A D . بما اللي A D égale A I ، الـ points عندهم coordonnées ساهلة : B deux ، zéro ، C deux ، un ، D zéro ، un . le vecteur D E égale deux tiers du vecteur D I : E deux tiers ، un tiers . w le déterminant اللي متاع E يطلع vecteur A E w le vecteur A C alignés ، E w C ، A : zéro .

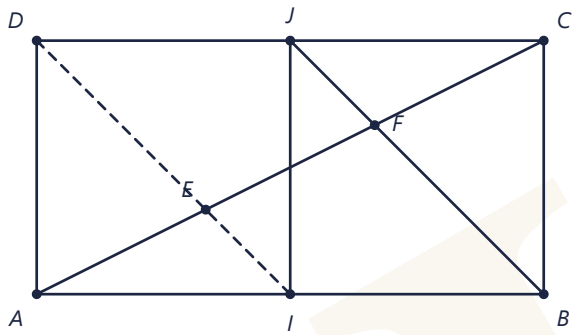
*Une autre application : le rectangle A B C D, avec A B égale deux fois A D. On prend le repère A, le vecteur A I, le vecteur A D. Comme A I égale A D, les points ont des coordonnées simples : B deux, zéro, C deux, un, D zéro, un. E est tel que le vecteur D E égale deux tiers du vecteur D I : E a pour coordonnées deux tiers, un tiers. Et le déterminant du vecteur A E et du vecteur A C est nul : A, E et C sont alignés.*

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 2AD$ ; $I$ et $J$ sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ ; $F$ est le point d'intersection des segments $[JB]$ et $[AC]$. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$.

Dans ce repère : $A(0,0)$, $I(1,0)$, $B(2,0)$, $D(0,1)$, $C(2,1)$ et $J(1,1)$.

Le point $E$ est défini par $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$. Comme $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, on obtient $E\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI




E est sur [DI] et sur [AC] ; F est sur [JB] et sur [AC].

*Un rectangle ABCD deux fois plus long que haut : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. I est le milieu de [AB], J le milieu de [DC], et le segment [IJ] est tracé. La diagonale [AC] et le segment [JB] se coupent en F. Le segment [DI] est en pointillés, et le point E est sur [DI], aux deux tiers à partir de D ; E est aussi sur la diagonale [AC].*

EXEMPLE TRAITÉ

**Montrer que $A$, $E$ et $C$ sont alignés, puis déterminer les coordonnées de $F$ sachant que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$.**

**A, E et C alignés —** On calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ : deux tiers fois un, moins deux fois un tiers.

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} \qquad \frac{2}{3}\times 1 - 2\times\frac{1}{3} = 0$$

**Le vecteur CE —** On calcule les composantes du vecteur $\overrightarrow{CE}$, puis on en prend la moitié.

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-2\\ \frac{1}{3}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

**Le point F —** On ajoute les composantes du vecteur $\overrightarrow{CF}$ aux coordonnées de $C$.

$$x_F = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad ; \quad y_F = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$F\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

19. THÉORÈME

## Distance et norme

CE QU'IL DIT

Fi repère orthonormé bark : M x, y, w H le projeté orthogonal mte3ou 3la l'axe des abscisses. Pythagore fi le triangle OHM : OM au carré égale x au carré plus y au carré. W zouz points A w B : AB égale racine carrée de la parenthèse x B moins x A, au carré, plus la parenthèse y B moins y A, au carré. W la norme de u x, y : racine carrée de x au carré plus y au carré. Mathalan u trois, moins quatre : racine carrée de neuf plus seize, égale cinq.

في repère orthonormé برك : M x ، y ، w H le projeté orthogonal متاعو على l'axe des abscisses . w في Pythagore زوز points A w B : A B le triangle O H M : O M au carré égale x au carré plus y au carré . égale racine carrée de la parenthèse x B moins x A ، au carré ، plus la parenthèse y B moins y A ، au carré . w la norme de u x ، y : racine carrée de x au carré plus y au carré مثلا : u trois ، moins quatre racine carrée de neuf plus seize ، égale cinq .

*Seulement dans un repère orthonormé : soit M de coordonnées x, y, et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. Pythagore dans le triangle O H M : O M au carré égale x au carré plus y au carré. Et pour deux points A et B : A B égale racine carrée de, entre parenthèses, x B moins x A, au carré, plus, entre parenthèses, y B moins y A, au carré. Et la norme de u de composantes x, y : racine carrée de x au carré plus y au carré. Par exemple u trois, moins quatre : racine carrée de neuf plus seize, égale cinq.*

Le plan est muni d'un **repère orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Pour $M(x, y)$ et $H$ son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, le théorème de Pythagore dans le triangle $OHM$ donne $OM^2 = x^2 + y^2$.
- Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan :

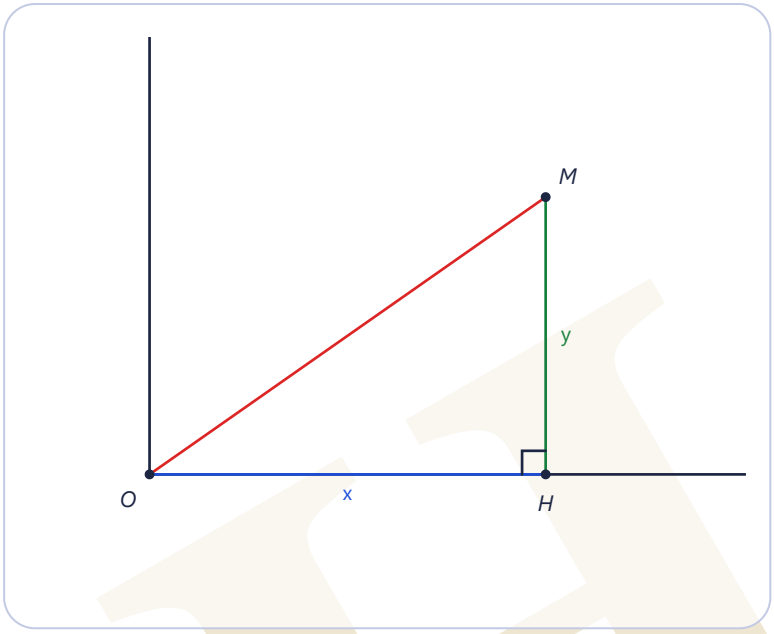
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Par exemple, $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ a pour norme $5$ ; $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ a pour norme $1$ : il est unitaire.

Ces formules supposent le repère **orthonormé** : elles reposent sur Pythagore.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI




Pythagore dans OHM : OM² = x² + y².

*Un repère orthonormé d'origine O. Un point M de coordonnées positives, en haut à droite ; H est son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H : OH vaut x, HM vaut y, et l'hypoténuse [OM] est en rouge.*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Dans un repère orthonormé, calculer la distance $AB$ pour $A(-2, -4)$ et $B(3, 5)$.**

**Les différences —** On calcule les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : trois moins moins deux, puis cinq moins moins quatre.

$x_B - x_A = 3 + 2 = 5 \quad ; \quad y_B - y_A = 5 + 4 = 9$

**La formule —** On additionne les carrés, puis on prend la racine carrée : vingt-cinq plus quatre-vingt-un.

$AB = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$

$$AB = \sqrt{106}$$

**À ne pas faire :** $AB = \sqrt{5^2 + 9^2} = 5 + 9 = 14$ — $AB = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$. La racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées.

**À ne pas faire :** $y_B - y_A = 5 - 4 = 1$ pour $A(-2, -4)$ et $B(3, 5)$ — $y_B - y_A = 5 - (-4) = 9$. On retranche une coordonnée négative : moins moins quatre, c'est plus quatre.

20. THÉORÈME

## Orthogonalité analytique

CE QU'IL DIT

Fi base orthonormée, u x, y w v x prime, y prime : u w v orthogonaux, ki x x prime plus y y prime égale zéro. Ya3ni nedherbou el composantes elli fi nafs el blasa, w njam3ou. Ma t5allatech m3a le déterminant : le déterminant, x y prime moins x prime y, houwa mta3 colinéarité. Mathalan u quatre, moins deux w v deux, quatre : quatre fois deux plus moins deux fois quatre, égale huit moins huit, égale zéro : orthogonaux.

x x prime plus y y prime كي ، base orthonormée ، u x ، y w v x prime ، y prime : u w v orthogonaux في le déterminant : مع تخلطش . نجمعو w ، اللي في نفس البلاصة composantes الـ يعني نضربو . égale zéro u quatre ، moins deux w v deux ، مثلا . colinéarité هو متاع ، le déterminant ، x y prime moins x prime y . quatre : quatre fois deux plus moins deux fois quatre ، égale huit moins huit ، égale zéro : orthogonaux

*Dans une base orthonormée, soient u de composantes x, y et v de composantes x prime, y prime : u et v sont orthogonaux quand x x prime plus y y prime égale zéro. On multiplie les composantes de même rang, et on additionne. Ne confonds pas avec le déterminant : le déterminant, x y prime moins x prime y, sert à la colinéarité. Par exemple u quatre, moins deux et v deux, quatre : quatre fois deux plus moins deux fois quatre, égale huit moins huit, égale zéro : ils sont orthogonaux.*

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans une **base orthonormée** $(\vec{i},\vec{j})$. Alors :

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff xx'+yy'=0.$$

Pourquoi ? Avec $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, le triangle $OAB$ est rectangle en $O$ si et seulement si $OA^2+OB^2=AB^2$ ; en développant avec la formule de la distance, cette égalité se ramène à $xx'+yy'=0$.

Par exemple, $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux ($8-8=0$) ; $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ ne le sont pas ($-8\neq 0$).

EN BASE ORTHONORMÉE

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff xx'+yy'=0$$

DÉMONSTRATION

On pose $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, de sorte que $A(x,y)$ et $B(x',y')$. Alors $OA^2=x^2+y^2$, $OB^2=x'^2+y'^2$ et $AB^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2-2(xx'+yy')$. Par Pythagore et sa réciproque, $\vec{u}\perp\vec{v}$ équivaut à $OA^2+OB^2=AB^2$, c'est-à-dire à $xx'+yy'=0$. Si l'un des vecteurs est nul, les deux membres sont vrais.

EXEMPLE TRAITÉ

**Déterminer le réel $m$ pour que les vecteurs $\vec{u}$ de composantes $m$ et $9$, et $\vec{v}$ de composantes $-6$ et $m+1$, soient orthogonaux.**

**La condition —** On écrit que $x$ fois $x'$ plus $y$ fois $y'$ est nul : m fois moins six, plus neuf fois la parenthèse m plus un.

$m \times (-6) + 9(m+1) = 0$

**Développer —** On développe et on réduit le membre de gauche, puis on résout.

$3m + 9 = 0$

**Conclure —** On isole m : moins neuf divisé par trois.

$m = -3$

$$m = -3$$

**À ne pas faire :** $\vec{u} \perp \vec{v} \iff xy' - x'y = 0$ — $\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$. Le déterminant teste la colinéarité ; pour l'orthogonalité, on multiplie les composantes de même rang et on additionne.

---

21. APPLICATION

## Un carré

CE QU'IL DIT

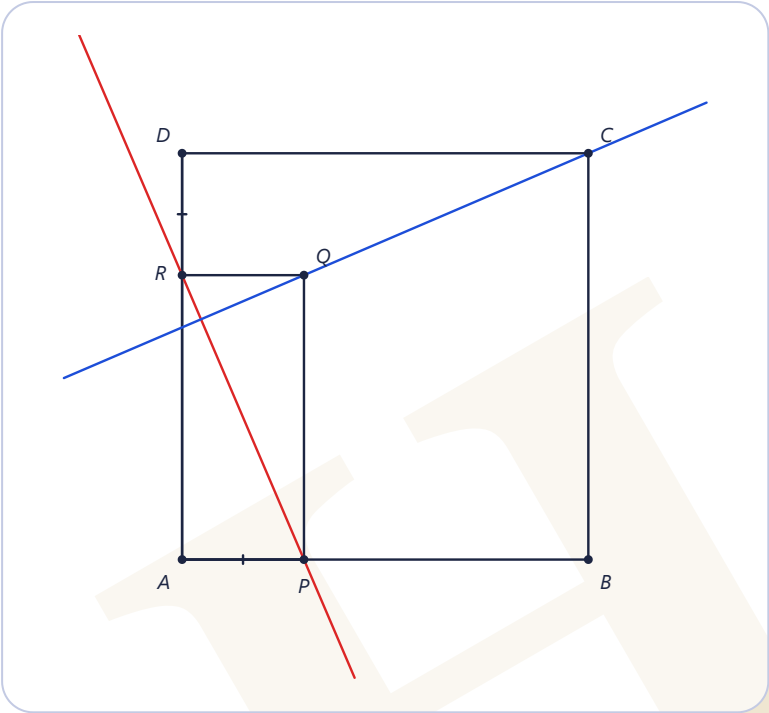
Tatbi9 : carré ABCD, le côté mte3ou un, w rectangle APQR, w AP égale DR. N7ebbou nthabtou elli la droite PR w la droite CQ perpendiculaires. Na5dhou le repère orthonormé A, le vecteur AB, le vecteur AD, w nsammiw x égale AP. P x, zéro, R zéro, un moins x, w Q x, un moins x. N7esbou x x prime plus y y prime lel vecteur PR w le vecteur CQ : yotla3 zéro, mahma ken x.

تطبيق : carré A B C D ، le côté ، un . نحبّو نثبتو اللي la droite P ، w rectangle A P Q R ، w A P égale D R متاعو
le repère orthonormé A ، le vecteur A B ، le vecteur A D ، w ناخذو . R w la droite C Q perpendiculaires
x x prime plus y y prime نحسبو . x égale A P . P x ، zéro ، R zéro ، un moins x ، w Q x ، un moins x نسمّيو
. x مهما كان ، zéro يطلع : vecteur P R w le vecteur C Q للـ

*Une application : le carré A B C D, de côté un, et le rectangle A P Q R, avec A P égale D R. On veut prouver que la droite P R et la droite C Q sont perpendiculaires. On prend le repère orthonormé A, le vecteur A B, le vecteur A D, et on pose x égale A P. Alors P x, zéro, R zéro, un moins x, et Q x, un moins x. On calcule x x prime plus y y prime pour le vecteur P R et le vecteur C Q : on trouve zéro, quel que soit x.*

$ABCD$ est un carré de côté $1$ ; $APQR$ est un rectangle tel que $P$ et $R$ sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré, et $AP = DR$. On veut montrer que les droites $(PR)$ et $(CQ)$ sont perpendiculaires.

On choisit le repère **orthonormé** $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et on pose $x = AP$. Alors $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$, $P(x,0)$ ; comme $DR = x$, on a $AR = 1 - x$, donc $R(0, 1-x)$ et $Q(x, 1-x)$.




AP = DR : les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

*Un carré ABCD de côté 1 : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. Un petit rectangle APQR a pour sommets A, P sur le côté [AB], Q à l'intérieur du carré et R sur le côté [AD], avec AP égal à DR. Les droites (PR) et (CQ) sont tracées en rouge et en bleu : elles se coupent à angle droit.*

EXEMPLE TRAITÉ

**Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{CQ}$, et montrer qu'ils sont orthogonaux.**

**Les composantes —** Extrémité moins origine, pour chacun des deux vecteurs, avec les coordonnées trouvées en fonction de x.

$$\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-x\\1-x\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix}x-1\\-x\end{pmatrix}$$

**La condition —** Le repère est orthonormé : on calcule $xx' + yy'$ et on développe les deux produits.

$$(-x)(x-1) + (1-x)(-x) = -x^2 + x - x + x^2 = 0$$

**Conclure —** Les vecteurs sont orthogonaux pour toute valeur de x : les droites $(PR)$ et $(CQ)$ sont perpendiculaires.

$$(PR) \perp (CQ)$$

$(PR)$ et $(CQ)$ sont perpendiculaires

22. PROPRIÉTÉ

## Vecteurs et configurations

CE QU'IL DIT

El vecteurs y3abbrou 3al géométrie. La droite AB parallèle à la droite CD, ki le vecteur AB w le vecteur CD colinéaires. Perpendiculaires, ki orthogonaux. M 3la la droite AB, ki le vecteur AM égale x fois le vecteur AB. W ken I le milieu de AB, l ay point M : le vecteur MA plus le vecteur MB égale deux fois le vecteur MI. El ithbet b Chasles : net3addew b I, w le vecteur IA plus le vecteur IB ya3ti le vecteur nul.

le vecteur A B w le كي ، géométrie . la droite A B parallèle à la droite C D يعبّرو على الـ vecteurs الـ
le vecteur A M كي ، la droite A B على orthogonaux . M كي ، vecteur C D colinéaires . perpendiculaires
point M : le vecteur M A plus le vecteur M B لأيّ ، I le milieu de A B كان égale x fois le vecteur A B . w
le يعطي I ، w le vecteur I A plus le vecteur I B نتعدّاو بـ : Chasles الإثبات بـ . égale deux fois le vecteur M I
. vecteur nul

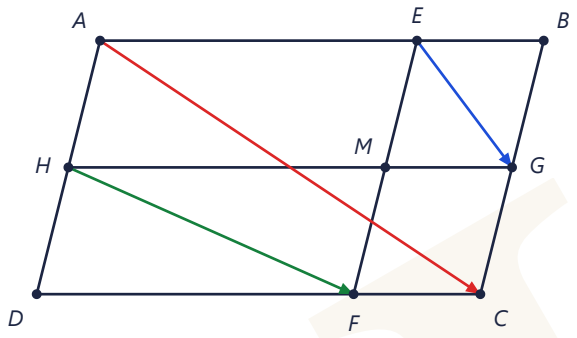
*Les vecteurs traduisent la géométrie. La droite A B est parallèle à la droite C D quand le vecteur A B et le vecteur C D sont colinéaires. Perpendiculaires, quand ils sont orthogonaux. M est sur la droite A B quand le vecteur A M égale x fois le vecteur A B. Et si I est le milieu de A B, pour tout point M : le vecteur M A plus le vecteur M B égale deux fois le vecteur M I. La preuve avec Chasles : on passe par I, et le vecteur I A plus le vecteur I B donne le vecteur nul.*

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan.

- Si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
- Deux droites $(AB)$ et $(CD)$ sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Deux droites $(AB)$ et $(CD)$ sont **perpendiculaires** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
- Un point $M$ appartient à la droite $(AB)$ si et seulement s'il existe un réel $x$ tel que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$.
- Si $I$ est le milieu de $[AB]$, alors pour tout point $M$ du plan : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Par exemple, si $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{BC}$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAM




EG + HF = AC.

*Un parallélogramme ABCD : A en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite, D en bas à gauche, les côtés [AB] et [DC] horizontaux. Une droite parallèle à (AD) coupe [AB] en E et [DC] en F ; une droite parallèle à (AB) coupe [AD] en H et [BC] en G. Les deux droites se coupent en M. Les vecteurs EG et HF sont tracés en couleur, et le vecteur AC en rouge.*

$$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$$

I MILIEU DE [AB]

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

DÉMONSTRATION

Pour le milieu : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}$, car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

EXEMPLE TRAITÉ

**$ABCD$ est un parallélogramme, $(EF)$ est parallèle à $(AD)$ et $(HG)$ est parallèle à $(AB)$, ces deux droites se coupant en $M$. Montrer que $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC}$.**

**Passer par M —** On décompose chacun des deux vecteurs en passant par le point M, puis on regroupe autrement.

$$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MF} = (\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF})$$

**Chasles —** Chaque parenthèse se simplifie par la relation de Chasles.

$$= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EF}$$

**Les parallélogrammes —** $ABGH$ et $AEFD$ sont des parallélogrammes, donc le vecteur HG égale le vecteur AB, et le vecteur EF égale le vecteur AD ; on conclut par la règle du parallélogramme.

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC}$$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$ pour $I$ milieu de $[AB]$ — $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. Le vecteur MI est la moitié de la somme : le facteur deux ne doit pas disparaître.

---

23. THÉORÈME

## Centre de gravité

CE QU'IL DIT

G le centre de gravité du triangle ABC, w I le milieu de BC. Le vecteur GA égale moins deux fois le vecteur GI. W el théorème : G centre de gravité, ki le vecteur GA plus le vecteur GB plus le vecteur GC égale le vecteur nul. 3lech ? Le vecteur GB plus le vecteur GC égale deux fois le vecteur GI, w le vecteur GA égale moins deux fois le vecteur GI : el majmou3 zéro. W el 3aks sa7i7 : ken point M y7a99e9 nafs el égalité, M houwa G.

G le centre de gravité du triangle A B C ، w I le milieu de B C . le vecteur G A égale moins deux fois le le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G كي ، théorème : G centre de gravité الـ vecteur G I . w le vecteur G B plus le vecteur G C égale deux fois le vecteur G I ، w le ؟ علاش . C égale le vecteur nul يحقّق نفس point M كان : صحيح العكس zéro . w المجموع : vecteur G A égale moins deux fois le vecteur G I الـ M ، égalité هو G .

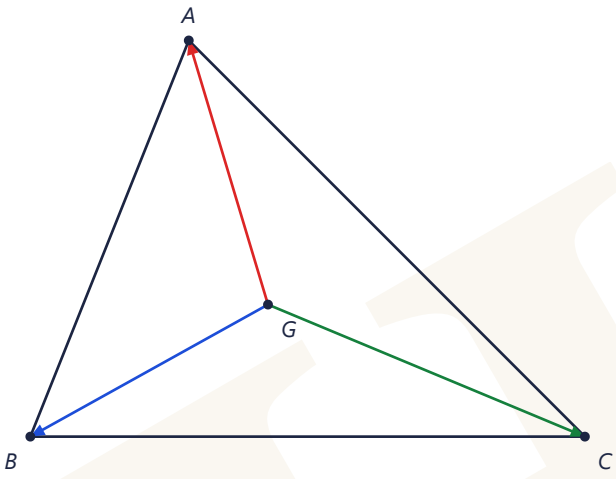
*Soit G le centre de gravité du triangle A B C, et I le milieu de B C. Le vecteur G A égale moins deux fois le vecteur G I. Et le théorème : G est le centre de gravité quand le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul. Pourquoi ? Le vecteur G B plus le vecteur G C égale deux fois le vecteur G I, et le vecteur G A égale moins deux fois le vecteur G I : la somme est nulle. Et la réciproque est vraie : si un point M vérifie la même égalité, M est G.*

Soit $ABC$ un triangle, $G$ son centre de gravité et $I$ le milieu de $[BC]$. On a $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GI}$, et :

$$G \text{ est le centre de gravité du triangle } ABC \iff \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Réciproquement, si un point $M$ vérifie $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, alors $M$ est confondu avec $G$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI




La somme des vecteurs GA, GB et GC est nulle.

*Un triangle ABC avec son centre de gravité G. Les trois vecteurs GA, GB et GC partent de G vers chacun des sommets ; ajoutés bout à bout, ils se referment et donnent le vecteur nul.*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

DÉMONSTRATION

$I$ est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. Comme $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$, on obtient $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MI}$ ; en passant par $I$, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MI}$, d'où $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AG}$ : $M = G$.

EXEMPLE TRAITÉ

**$ABC$ est un triangle, $I$ le milieu de $[AB]$ et $M$ le point tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Montrer que $M$ est le milieu de $[IC]$.**

**Le milieu I —** $I$ est le milieu de $[AB]$ : on remplace la somme des vecteurs MA et MB par deux fois le vecteur MI.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

**Simplifier —** L'égalité devient deux fois la somme des vecteurs MI et MC, égale au vecteur nul ; on divise par deux.

$$2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

**Conclure —** C'est exactement la caractérisation du milieu du segment d'extrémités I et C.

$M$ est le milieu de $[IC]$

$M$ milieu de $[IC]$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ — $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, ou $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$. $G$ est au tiers de la médiane en partant du milieu $I$, donc aux deux tiers en partant du sommet $A$.

---

24. THÉORÈME

## Thalès vectoriel

CE QU'IL DIT

Thalès bel vecteurs. ABC triangle, M 3la la droite AB, w la parallèle à BC elli tet3adda b M t9oss la droite AC fi N. Ken le vecteur AM égale x fois le vecteur AB, ywalli le vecteur AN égale x fois le vecteur AC, w le vecteur MN égale x fois le vecteur BC. Nafs el réel x fel thletha. W ken M le milieu de AB, x égale un demi : hedhi la droite des milieux.

Thalès بالـ M ، A B C triangle . vecteurs على B C la parallèle à la droite A B ، w اللي تتعدّى بـ M تقصّ la
droite A C في N . كان A B le vecteur A M égale x fois le vecteur A B ، يولّي le vecteur A N égale x fois le
. vecteur A C ، w le vecteur M N égale x fois le vecteur B C نفس الـ x réel في الثلاثة . كان w M le milieu de
. la droite des milieux هاذي : A B ، x égale un demi

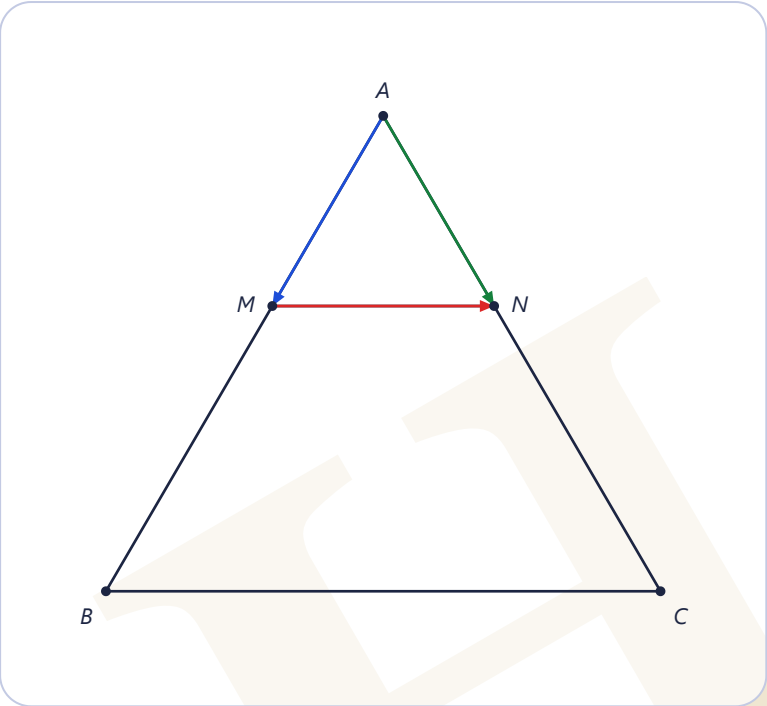
*Thalès avec les vecteurs. A B C est un triangle, M est sur la droite A B, et la parallèle à B C passant par M coupe la droite A C en N. Si le vecteur A M égale x fois le vecteur A B, alors le vecteur A N égale x fois le vecteur A C, et le vecteur M N égale x fois le vecteur B C. Le même réel x dans les trois. Et si M est le milieu de A B, x égale un demi : c'est la droite des milieux.*

Soit $ABC$ un triangle et $M$ un point de $(AB)$, distinct de $A$. La parallèle à $(BC)$ passant par $M$ coupe $(AC)$ en $N$.

$$\text{Si } \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} \text{ alors } \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}.$$

En effet, on place $P$ tel que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC}$ ; alors $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{BC}$, donc $(MP)$ est parallèle à $(BC)$, et $P$ est le point $N$. Si $M$ est le milieu de $[AB]$, on retrouve $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ : c'est la droite des milieux.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI




Si AM = x AB, alors AN = x AC et MN = x BC.

*Un triangle ABC : A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. M est sur le côté [AB] et N sur le côté [AC], et le segment [MN] est parallèle à [BC]. Les vecteurs AM et AB partent de A en bleu, AN et AC en vert ; le vecteur MN et le vecteur BC sont en rouge.*

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Dans le triangle $ABC$, $M$ est le point de $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, et la parallèle à $(BC)$ passant par $M$ coupe $(AC)$ en $N$. On donne $BC = 10$ cm. Exprimer $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{MN}$, puis calculer $MN$.**

**Thalès vectoriel —** Le coefficient deux cinquièmes passe tel quel aux deux autres égalités.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{MN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

**La longueur —** On passe aux longueurs : la longueur MN est les deux cinquièmes de dix centimètres.

$$MN = \frac{2}{5} \times 10 = 4$$

$$MN = 4 \text{ cm}$$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{CB}$ — $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$. Le vecteur MN va dans le même sens que le vecteur BC, comme M va vers N quand B va vers C.

25. THÉORÈME

## Théorème de la projection

CE QU'IL DIT

El théorème de la projection : A, B, C alignés, w na3mloulhom projection 3la la droite D b des droites parallèles : ya3tiwna A prime, B prime w C prime. Ken le vecteur AB égale x fois le vecteur AC, ywalli le vecteur A prime B prime égale x fois le vecteur A prime C prime. Ya3ni el coefficient x ma yetbaddelch bel projection. El ithbet : nersmou la parallèle à D men A, w ntab9ou Thalès, w men ba3d les parallélogrammes.

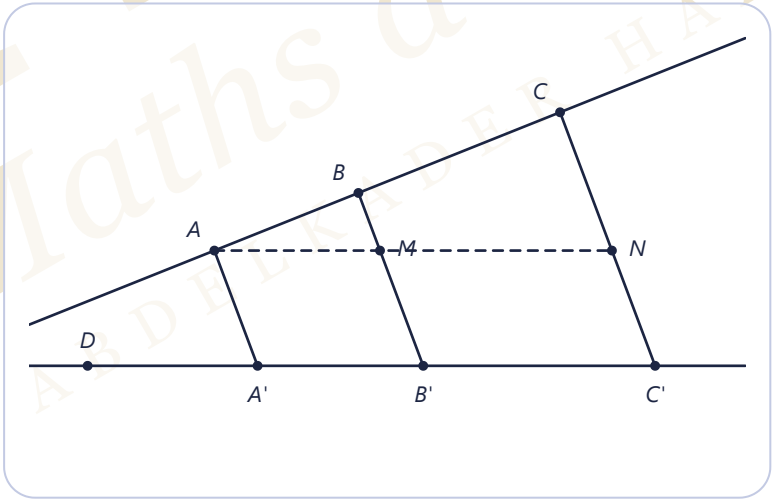
théorème de la projection : A ، B ، C alignés ، w الـ projection نعملولهم على la droite D بـ des droites parallèles : يعطيونا A prime ، B prime w C prime . كان le vecteur A B égale x fois le vecteur A C ، يولّي le vecteur A prime B prime égale x fois le vecteur A prime C prime . يعني الـ coefficient x ما يتبدّلش بالـ projection . الإثبات : نرسمو la parallèle à D من A ، w نطبّقو Thalès ، w من بعد les parallélogrammes .

*Le théorème de la projection : A, B et C sont alignés, et on les projette sur la droite D par des droites parallèles : on obtient A prime, B prime et C prime. Si le vecteur A B égale x fois le vecteur A C, alors le vecteur A prime B prime égale x fois le vecteur A prime C prime. Le coefficient x ne change pas par projection. La preuve : on trace la parallèle à D passant par A, on applique Thalès, puis on utilise les parallélogrammes.*

Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés, et les droites $(AA')$, $(BB')$ et $(CC')$ sont parallèles ; $A'$, $B'$ et $C'$ sont sur une droite $D$. La parallèle à $D$ passant par $A$ coupe $(BB')$ en $M$ et $(CC')$ en $N$.

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} \text{ alors } \overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}.$$

Le coefficient se **conserve par projection** parallèle : par Thalès dans le triangle $ACN$, $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AN}$ ; or $AMB'A'$ et $ANC'A'$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AN}$.




On projette parallèlement : le coefficient x se conserve.

*Une droite oblique porte, de gauche à droite et en montant, les points A, B et C. En bas, une droite horizontale D porte A', B' et C'. Les segments [AA'], [BB'] et [CC'] sont parallèles entre eux. La parallèle à D passant par A, en pointillés, coupe (BB') en M et (CC') en N.*

$$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**$ABCD$ est un parallélogramme, $E$ le point tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$, et les droites $(AE)$ et $(DC)$ se coupent en $F$. Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$, puis $\overrightarrow{DC}$ en fonction de $\overrightarrow{DF}$.**

**Un repère —** Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$, et $E$ s'obtient en ajoutant cinq quarts du vecteur BC au point B.

$$E\left(1, \frac{5}{4}\right)$$

**Le point F —** F est sur la droite (AE), donc le vecteur AF est t fois le vecteur AE, et sur la droite (DC), d'ordonnée un : cinq quarts de t égale un.

$$\frac{5}{4}t = 1 \iff t = \frac{4}{5} \qquad F\left(\frac{4}{5}, 1\right)$$

**Conclure —** On compare les composantes : le vecteur AE est cinq quarts du vecteur AF, et le vecteur DC est cinq quarts du vecteur DF, de composantes quatre cinquièmes et zéro.

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AF} \quad ; \quad \overrightarrow{DC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{DF}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AF} \quad ; \quad \overrightarrow{DC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{DF}$$

26. MÉTHODE

## Problème d'alignement

CE QU'IL DIT

Mochkel alignement : bech nthabtou elli I, D w E alignés, 3andna zouz torq. Tari9a vectorielle : nlawjou 3la relation fiha I, D w E bark, kima le vecteur ID égale k fois le vecteur IE. W tari9a analytique : na5dhou le repère A, le vecteur AB, le vecteur AC, n7esbou les coordonnées, w men ba3d le déterminant. Houni nal9aw le vecteur ID égale deux fois le vecteur IE.

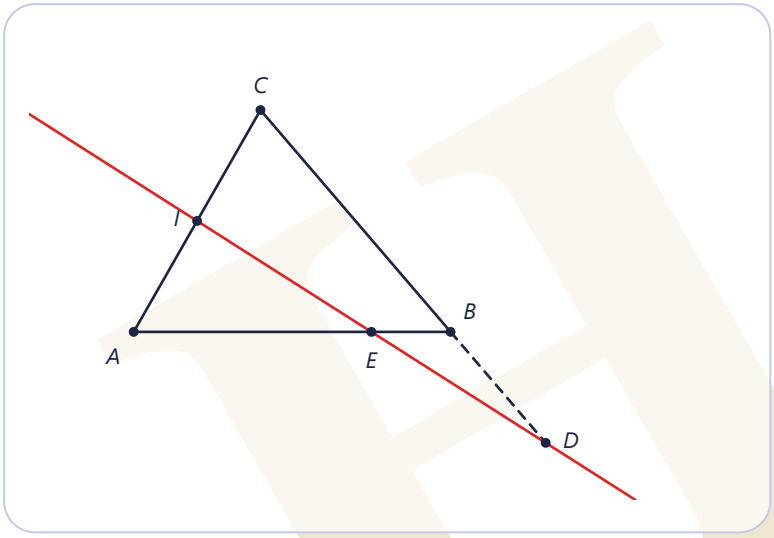
مشكل alignement : باش نثبتو اللي D w E alignés ، I ، عندنا زوز طرق . طريقة vectorielle : نلوّجو على relation
فيها D w E ، برك ، كيما I . w le vecteur I D égale k fois le vecteur I E طريقة analytique : ناخذو ، le repère A
. égale deux fois le vecteur I E ، le vecteur A C ، le vecteur A B ، نحسبو ، w les coordonnées من بعد le déterminant . هنا نلقاو le vecteur I D

*Un problème d'alignement : pour prouver que I, D et E sont alignés, on a deux méthodes. La méthode vectorielle : chercher une relation qui ne contient que I, D et E, comme le vecteur I D égale k fois le vecteur I E. La méthode analytique : prendre le repère A, le vecteur A B, le vecteur A C, calculer les coordonnées, puis le déterminant. Ici on trouve le vecteur I D égale deux fois le vecteur I E.*

$ABC$ est un triangle, $I$ le milieu de $[AC]$, $D$ et $E$ les points tels que $3\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Montrer que $I$, $D$ et $E$ sont alignés.

Deux stratégies sont possibles :

1. **Méthode vectorielle** : établir une relation vectorielle qui ne fait intervenir **que** les points $I$, $D$ et $E$, du type $\overrightarrow{ID} = k\overrightarrow{IE}$.
2. **Méthode analytique** : choisir le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, calculer les coordonnées des trois points, puis un déterminant.




I, E et D sont sur une même droite.

*Un triangle ABC : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut. I est le milieu de [AC]. E est sur le côté [AB], aux trois quarts à partir de A. D est sur la droite (BC), au-delà de B, du côté opposé à C. Les points I, E et D sont alignés sur une même droite, tracée en rouge.*

EXEMPLE TRAITÉ

**Résoudre ce problème par la méthode analytique, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.**

**Le point D —** On écrit trois fois le vecteur DB égale le vecteur DC en passant par A : deux fois le vecteur AD égale trois fois le vecteur AB moins le vecteur AC.

$$3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

**Le point E —** De même, le vecteur EA plus trois fois le vecteur EB égale le vecteur nul donne quatre fois le vecteur AE égale trois fois le vecteur AB.

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \qquad I\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad D\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad E\left(\frac{3}{4}, 0\right)$$

**Le déterminant —** On calcule les composantes des vecteurs ID et IE, puis leur déterminant : il est nul.

$$\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} \times (-1) = 0$$

$$\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IE}$$

**À ne pas faire :** $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ — $\overrightarrow{EA} + 3(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
On ramène tous les vecteurs à la même origine avec Chasles avant de les regrouper.

27. REMARQUE

## Les figures en poésie

CE QU'IL DIT

Kelma 3al culture : ech-che3er Eugène Guillevic kteb des poèmes 3al géométrie, y7ki fihom el triangle w el parallélogramme kif ma y7kiw el bachar. El parallélogramme y9oul elli najmou nta77ouh walla nwa99fouh, w y5af ywalli rectangle. W bel vecteurs, el parallélogramme ABCD houwa jomla wa7da : le vecteur AB égale le vecteur DC, mahma ken echakl mte3ou.

الشاعر Eugène Guillevic كتب des poèmes على الـ géométrie ، يحكي فيهم الـ triangle w كلمة على الـ culture : parallélogramme الـ كيف ما يحكيو البشر . الـ parallélogramme يقول اللي نجّمو نطيّحوه ولّا نوقّفوه ، w يخاف rectangle . w يولّي بالـ vecteurs ، الـ parallélogramme A B C D هو جملة وحدة : le vecteur A B égale le vecteur D C ، مهما كان الشكل متاعو .

*Un mot de culture : le poète Eugène Guillevic a écrit des poèmes sur la géométrie, où le triangle et le parallélogramme parlent comme des personnes. Le parallélogramme dit qu'on pourrait l'aplatir ou le redresser, et il a peur de devenir rectangle. Et avec les vecteurs, le parallélogramme A B C D tient en une seule phrase : le vecteur A B égale le vecteur D C, quelle que soit sa forme.*

D'après le magazine *Tangente* n° 92 : nombre d'écrivains ont écrit sur les mathématiques ; certains en ont chanté la beauté. Eugène Guillevic (1907-1997), dans ses *Euclidiennes* (Gallimard, 1967), fait parler les figures elles-mêmes : un triangle qui se dit « ce qu'il y a de plus élémentaire », et un parallélogramme inquiet, qu'on pourrait « aplatir » ou « redresser » et qui a peur de devenir, un instant, rectangle.

Un parallélogramme, c'est exactement ce que décrit l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ : quelle que soit sa forme, la relation reste vraie.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Elli lezem tetfakkrou :

اللي لازم تتفكّرو :

*Ce qu'il faut retenir :*

1. $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ où $ABDC$ est un parallélogramme ; Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

   > u plus v houwa le vecteur AD, w ABDC parallélogramme. W Chasles : le vecteur AB plus le vecteur BC égale le vecteur AC.
   > *u plus v est le vecteur A D, où A B D C est un parallélogramme. Et Chasles : le vecteur A B plus le vecteur B C égale le vecteur A C.*

2. L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$ ; $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

> L'opposé du vecteur AB houwa le vecteur BA, w u moins v égale u plus l'opposé de v.
> *L'opposé du vecteur A B est le vecteur B A, et u moins v égale u plus l'opposé de v.*

3. $a\vec{u} + b\vec{u} = (a+b)\vec{u}$, $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$, $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.
> a u plus b u égale a plus b, fois u. a fois b u égale a b fois u. W a fois u plus v égale a u plus a v.
> *a u plus b u égale a plus b, fois u. a fois b u égale a b fois u. Et a fois u plus v égale a u plus a v.*

4. $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
> Alpha u égale le vecteur nul, ken alpha égale zéro walla u nul, w bark.
> *Alpha u égale le vecteur nul seulement si alpha égale zéro ou u est nul.*

5. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires : l'un est le produit de l'autre par un réel, ou $xy' - x'y = 0$.
> u w v colinéaires : wa7ed menhom réel fois le5er, walla x y prime moins x prime y égale zéro.
> *u et v sont colinéaires : l'un est un réel fois l'autre, ou x y prime moins x prime y égale zéro.*

6. Une base est un couple de vecteurs non colinéaires ; $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ donne les composantes $(x, y)$.
> Base, zouz vecteurs mouch colinéaires ; w u égale x i plus y j ya3ti les composantes x, y.
> *Une base, ce sont deux vecteurs non colinéaires ; et u égale x i plus y j donne les composantes x, y.*

7. Dans un repère : $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.
> Le vecteur AB : x B moins x A, w y B moins y A.
> *Le vecteur A B a pour composantes x B moins x A, et y B moins y A.*

8. $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$ ; en repère orthonormé, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$.
> La norme de alpha u, la valeur absolue de alpha fois la norme de u. W fi repère orthonormé, la norme égale racine carrée de x au carré plus y au carré.
> *La norme de alpha u est la valeur absolue de alpha fois la norme de u. Et dans un repère orthonormé, la norme égale racine carrée de x au carré plus y au carré.*

9. En base orthonormée : $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
> Fi base orthonormée : u w v orthogonaux, ki x x prime plus y y prime égale zéro.
> *Dans une base orthonormée : u et v sont orthogonaux quand x x prime plus y y prime égale zéro.*

10. $A$, $B$, $C$ alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ; $(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires.
> A, B, C alignés, ki le vecteur AB w le vecteur AC colinéaires ; w les droites AB w CD parallèles, ki le vecteur AB w le vecteur CD colinéaires.
> *A, B et C sont alignés quand le vecteur A B et le vecteur A C sont colinéaires ; et les droites A B et C D sont parallèles quand le vecteur A B et le vecteur C D sont colinéaires.*

11. $I$ milieu de $[AB]$ : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ ; $G$ centre de gravité : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
> Ken I le milieu : le vecteur MA plus le vecteur MB égale deux fois le vecteur MI. W ken G le centre de gravité : le vecteur GA plus le vecteur GB plus le vecteur GC égale le vecteur nul.
> *I milieu : le vecteur M A plus le vecteur M B égale deux fois le vecteur M I. G centre de gravité : le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul.*

12. Thalès : si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$.

> Thalès : ken le vecteur AM égale x fois le vecteur AB, le vecteur AN égale x fois le vecteur AC, w le vecteur MN égale x fois le vecteur BC.
> *Thalès : si le vecteur A M égale x fois le vecteur A B, alors le vecteur A N égale x fois le vecteur A C, et le vecteur M N égale x fois le vecteur B C.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : colinéaires, ki le déterminant x y prime moins x prime y égale zéro ; orthogonaux, fi base orthonormée, ki x x prime plus y y prime égale zéro. W les composantes du vecteur AB, dima B moins A. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : colinéaires ، كي le déterminant x y prime moins x prime y égale zéro ؛
orthogonaux ، في base orthonormée ، كي w les composantes du . x x prime plus y y prime égale zéro
. يالله للـ exercices . B moins A ديما ، vecteur A B

*Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : colinéaires quand le déterminant x y prime moins x prime y égale zéro ; orthogonaux, dans une base orthonormée, quand x x prime plus y y prime égale zéro. Et les composantes du vecteur A B, c'est toujours B moins A. Allons aux exercices.*

## Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

*Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.*

QUESTION 1 · SOMME DE DEUX VECTEURS

c'est quoi la somme de deux vecteurs | kifech n7seb la somme de deux vecteurs | comment additionner deux vecteurs | somme de deux vecteurs chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

CE QU'IL RÉPOND

N7ottou ezzouz vecteurs 3la nafs l'origine : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ w $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Nkammlou le parallélogramme ABDC. $\vec{u} + \vec{v}$ houwa $\overrightarrow{AD}$, la diagonale elli to5rej men A. W ken el vecteurs wra b3adhhom, nesta3mlou Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

نحطّو الزوز vecteurs على نفس l'origine : le vecteur A B égale u w le vecteur A C égale v . نكمّلو le
. u plus v هو parallélogramme A B D C ، la diagonale اللي تخرج من le vecteur A D . w كان الـ A وra vecteurs
. Chasles : le vecteur A B plus le vecteur B C égale le vecteur A C بعضهم ، نستعملو

*On place les deux vecteurs à partir de la même origine : le vecteur A B égale u et le vecteur A C égale v. On complète le parallélogramme A B D C. u plus v est le vecteur A D, la diagonale issue de A. Et si les*

*vecteurs se suivent, on utilise Chasles : le vecteur A B plus le vecteur B C égale le vecteur A C.*

## QUESTION 2 · PROPRIÉTÉS DE L'ADDITION

c'est quoi la relation de chasles | chasles kifech nesta3mlou | relation de chasles ma3neha chnowa | comment utiliser chasles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

CE QU'IL RÉPOND

La relation de Chasles : l ay points A, B w C, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Ech-chart : l'extrémité mta3 vecteur hiya l'origine mta3 elli ba3dou, kif B houni. W to5dem bel 3aks zeda : najmou nfekkou vecteur, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$, l ay point M.

. points B w C ، le vecteur A B plus le vecteur B C égale le vecteur A C لأيّ زوز : la relation de Chasles
الشرط : l'extrémité متاع vecteur هي l'origine متاع اللي بعدو ، كيف B هنا . w تخدم بالعكس زادة : نجّمو نفكّو
. point M لأيّ ، vecteur ، le vecteur A C égale le vecteur A M plus le vecteur M C

*La relation de Chasles : pour tous points A, B et C, le vecteur A B plus le vecteur B C égale le vecteur A C. La condition : l'extrémité d'un vecteur est l'origine du suivant, comme B ici. Et elle marche aussi dans l'autre sens : on peut décomposer un vecteur, le vecteur A C égale le vecteur A M plus le vecteur M C, pour n'importe quel point M.*

## QUESTION 3 · OPPOSÉ, DIFFÉRENCE

c'est quoi l'opposé d'un vecteur | l oppose mta3 vecteur chnowa | opposé du vecteur AB | kifech nal9a l oppose d un vecteur

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'opposé de $\vec{u}$ houwa el vecteur elli ki nzidouh l $\vec{u}$ ya3ti le vecteur nul, w nektbouh $-\vec{u}$ : nafs la direction, nafs la longueur, w le sens bel 3aks. L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ houwa $\overrightarrow{BA}$, 5ater $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, ya3ni nul.

la direction نفس : moins u نكتبوه le vecteur nul ، w يعطي u لـ نزيدوه اللي vecteur هو الـ l'opposé de u
le vecteur A B خاطر ، le vecteur B A هو l'opposé du vecteur A B . بالعكس la longueur ، w le sens نفس ،
. nul يعني ، plus le vecteur B A égale le vecteur A A

*L'opposé de u est le vecteur qui, ajouté à u, donne le vecteur nul ; on le note moins u : même direction, même longueur, et sens contraire. L'opposé du vecteur A B est le vecteur B A, car le vecteur A B plus le vecteur B A égale le vecteur A A, c'est-à-dire le vecteur nul.*

---

### QUESTION 4 · OPPOSÉ, DIFFÉRENCE

c'est quoi la différence u moins v | kifech na3mel la différence de deux vecteurs | différence de deux vecteurs | soustraire deux vecteurs

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

CE QU'IL RÉPOND

$\vec{u} - \vec{v}$, ma3neha $\vec{u} + (-\vec{v})$. W bel points : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, nbaddlouh b $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$, w ya3ti $\overrightarrow{CB}$. Bel composantes sehla : na9sou composante men composante.

le نبدّلوه بـ ، points : le vecteur A B moins le vecteur A C بالـ u plus l'opposé de v . w معناها ، u moins v composante نطرحو : ساهلة composantes بالـ . le vecteur C B يعطي vecteur C A plus le vecteur A B ، w composante من .

*u moins v signifie u plus l'opposé de v. Et avec des points : le vecteur A B moins le vecteur A C, on le remplace par le vecteur C A plus le vecteur A B, ce qui donne le vecteur C B. Avec les composantes, c'est simple : on soustrait composante par composante.*

---

### QUESTION 5 · PRODUIT PAR UN RÉEL

c'est quoi le produit alpha u | kifech nedhreb vecteur fi réel | multiplier un vecteur par un réel | produit d un vecteur par un nombre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$$

CE QU'IL RÉPOND

$\alpha\vec{u}$, vecteur 3andou nafs la direction mta3 $\vec{u}$. Ken alpha positif, nafs le sens ; ken alpha négatif, le sens bel 3aks. W la longueur tetdhreb fi la valeur absolue de alpha. Mathalan $-2\vec{u}$ : 3aks $\vec{u}$, w toulou marrtin.

alpha négatif ، le كان ؛ le sens نفس ، alpha positif كان . u متاع la direction عندو نفس alpha u ، vecteur عكس w ، u طولو : moins deux u مثلا . la valeur absolue de alpha في تتضرب w la longueur . بالعكس sens مرّتين .

*Alpha u est un vecteur de même direction que u. Si alpha est positif, il a le même sens ; si alpha est négatif, le sens contraire. Et la longueur est multipliée par la valeur absolue de alpha. Par exemple moins deux u : sens contraire de u, et deux fois plus long.*

## QUESTION 6 · PRODUIT NUL

quand alpha u égale le vecteur nul | alpha u egal zero waqtech | produit nul vecteur | alpha fois u égal zéro

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha\vec{u} = \vec{0} \iff (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$$

CE QU'IL RÉPOND

$\alpha\vec{u} = \vec{0}$, fi zouz 7alet bark : $\alpha = 0$, walla $\vec{u} = \vec{0}$. Donc ken $\vec{u}$ mouch nul, el réel houwa elli lezem ykoun zéro.

في زوز حالات برك ، alpha u égale le vecteur nul ، alpha égale zéro ولّا u هو donc . u كان le vecteur nul موش nul ، الـ réel هو اللي لازم يكون zéro .

*Alpha u égale le vecteur nul dans deux cas seulement : alpha égale zéro, ou u est le vecteur nul. Donc si u n'est pas nul, c'est le réel qui doit être nul.*

## QUESTION 7 · VECTEURS COLINÉAIRES

c'est quoi deux vecteurs colinéaires | colineaires ma3neha chnowa | définition de vecteurs colinéaires | chnowa colinéaire

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz vecteurs colinéaires, ki wa7ed menhom houwa le5er madhroub fi réel : $\vec{v} = k\vec{u}$. Ya3ni 3andhom nafs la direction. W le vecteur nul colinéaire m3a ay vecteur.

زوز vecteurs colinéaires ، كي واحد منهم هو الآخر مضروب في u égale k v : réel . يعني عندهم نفس la direction . w le vecteur nul colinéaire مع أيّ vecteur .

*Deux vecteurs sont colinéaires quand l'un est le produit de l'autre par un réel : v égale k u. Ils ont donc la même direction. Et le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.*

## QUESTION 8 · VECTEURS COLINÉAIRES

même sens ou sens contraire | kifech na3ref nafs le sens | sens contraires vecteurs colinéaires | quand deux vecteurs sont de même sens

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$ : ken $\alpha > 0$, ezzouz vecteurs colinéaires w de même sens ; ken $\alpha < 0$, colinéaires w de sens contraires. Ya3ni le signe mta3 alpha houwa elli y9oul le sens.

vecteurs colinéaires w de الزوج ، alpha positif كان : le vecteur A B égale alpha fois le vecteur C D كان
هي اللي تقول alpha متاع la signe يعني . alpha négatif ، colinéaires w de sens contraires كان ؛ même sens
. le sens

*Si le vecteur A B égale alpha fois le vecteur C D : si alpha est positif, les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens ; si alpha est négatif, ils sont colinéaires et de sens contraires. C'est le signe de alpha qui donne le sens.*

---

## QUESTION 9 · BASE ET COMPOSANTES

c'est quoi une base | base de l ensemble des vecteurs chnowa | définition d une base | quand deux vecteurs forment une base

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

CE QU'IL RÉPOND

Base, hiya zouz vecteurs $\vec{i}$ w $\vec{j}$ mouch colinéaires. Bihom najmou nektbou ay vecteur $\vec{u}$ b tari9a wa7da bark : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. W bech ta3ref zouz vecteurs ya3mlou base, t7seb le déterminant : lezmou mouch zéro.

u égale x i : بطريقة وحدة برك vecteur u أيّ نكتبو نجّمو بيهم . colinéaires موش vecteurs i w j زوز ، هي base
. zéro موش لازمو : le déterminant تحسب ، base يعملو vecteurs زوز تعرف باش plus y j . w

*Une base, ce sont deux vecteurs i et j non colinéaires. Avec eux, on peut écrire tout vecteur u d'une seule manière : u égale x i plus y j. Et pour savoir si deux vecteurs forment une base, on calcule leur déterminant : il doit être non nul.*

---

## QUESTION 10 · BASE ET COMPOSANTES

c'est quoi les composantes d un vecteur | composantes chnowa | comment trouver les composantes | kifech nal9a les composantes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \iff \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, le couple $(x, y)$ houma les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. x houwa el coefficient mta3 $\vec{i}$, w y el coefficient mta3 $\vec{j}$. Nektbouhom fi colonne, x el fou9 w y el louta.

coefficient الـ هو les composantes de u dans la base i ، j . x هوما u égale x i plus y j ، le couple x ، y كان
متاع y w i ، الـ coefficient متاع j . نكتبوهم في x ، colonne الفوق y w اللوطة .

*Si u égale x i plus y j, le couple x, y, ce sont les composantes de u dans la base i, j. x est le coefficient de i, et y celui de j. On les écrit en colonne, x en haut et y en bas.*

## QUESTION 11 · LE DÉTERMINANT

c'est quoi le déterminant | kifech n7seb le determinant | comment calculer un déterminant | determinant de deux vecteurs chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

CE QU'IL RÉPOND

Le déterminant de $\vec{u}(x, y)$ w $\vec{v}(x', y')$ : $xy' - x'y$. Nektbou x w x' el fou9, y w y' el louta, w nedherbou en croix : la diagonale elli tahbet, moins la diagonale elli totla3. Mathalan $\vec{u}(3, 2)$ w $\vec{v}(-6, -4)$ : $-12 - (-12) = 0$.

le déterminant de u x ، y w v x prime ، y prime : x y prime moins x prime y نكتبو x w x prime الفوق ، y w u trois ، مثلا . اللي تطلع moins la diagonale ، اللي تهبط en croix : la diagonale نضربو w ، اللوطة y prime . deux w v moins six ، moins quatre : moins douze moins moins douze ، égale zéro

*Le déterminant de u de composantes x, y et de v de composantes x prime, y prime : x y prime moins x prime y. On écrit x et x prime en haut, y et y prime en bas, et on multiplie en croix : la diagonale qui descend, moins la diagonale qui monte. Par exemple, u trois, deux et v moins six, moins quatre : moins douze moins moins douze, égale zéro.*

## QUESTION 12 · LE DÉTERMINANT

pourquoi déterminant nul veut dire colinéaires | 3lech determinant zero ya3ni colineaires | déterminant égal à zéro donc colinéaires | si le determinant est nul

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ colinéaires} \iff xy' - x'y = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $\vec{v} = k\vec{u}$, ya3ni $x' = kx$ w $y' = ky$, t3awwedh : $x \times ky - kx \times y = 0$. W bel 3aks, ken $xy' - x'y = 0$, najmou nal9aw el réel k. Donc le déterminant nul, houwa w colinéaires nafs el 7aja. W ken mouch nul, $\vec{u}$ w $\vec{v}$ ya3mlou base.

x fois k y moins k x fois y ، égale : تعوّض ، x prime égale k x w y prime égale k y يعني ، v égale k u كان réel k . donc le déterminant nul الـ نجّمو نلقاو ، x y prime moins x prime y égale zéro كان ، بالعكس zéro . w ، هو colinéaires w نفس الحاجة . w كان موش u w v ، nul يعملو base .

*Si v égale k u, c'est-à-dire x prime égale k x et y prime égale k y, on remplace : x fois k y moins k x fois y, égale zéro. Et réciproquement, si x y prime moins x prime y égale zéro, on peut trouver le réel k. Un déterminant nul et des vecteurs colinéaires, c'est donc la même chose. Et s'il n'est pas nul, u et v forment une base.*

## QUESTION 13 · REPÈRE CARTÉSIEN

c'est quoi un repère cartésien | repere cartesien chnowa | définition du repère cartésien | repère cartésien ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$M(x,y) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

CE QU'IL RÉPOND

Repère cartésien, houwa point O w base $(\vec{i}, \vec{j})$. Koll point M 3andou coordonnées $(x, y)$, elli $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. W el axes mouch lezem ykounou perpendiculaires : ken $\vec{i}$ w $\vec{j}$ orthogonaux w normés, n9oulou repère orthonormé.

le vecteur O M égale اللي ، coordonnées x ، y عندو point M كل . point O w base i ، j هو ، repère cartésien
repère نقولو ، i w j orthogonaux w normés كان : perpendiculaires موش لازم يكونو axes الـ x i plus y j . w
. orthonormé

*Un repère cartésien, c'est un point O et une base i, j. Tout point M a des coordonnées x, y telles que le vecteur O M égale x i plus y j. Et les axes ne sont pas forcément perpendiculaires : si i et j sont orthogonaux et normés, on dit repère orthonormé.*

## QUESTION 14 · REPÈRE CARTÉSIEN

différence entre coordonnées et composantes | coordonnees w composantes chnowa el far9 | coordonnées ou composantes | est ce que coordonnées et composantes c est pareil

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les coordonnées mta3 point, w les composantes mta3 vecteur. Er-rabt : les coordonnées du point M houma les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$. W les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, houma les coordonnées de B moins les coordonnées de A.

هوما les coordonnées du point M : الرابط . vecteur متاع point ، w les composantes متاع les coordonnées
les coordonnées de B هوما ، les composantes du vecteur O M . w les composantes du vecteur A B
. moins les coordonnées de A

*Les coordonnées sont celles d'un point, les composantes celles d'un vecteur. Le lien : les coordonnées du point M sont les composantes du vecteur O M. Et les composantes du vecteur A B sont les coordonnées de B moins celles de A.*

## QUESTION 15 · COMPOSANTES DU VECTEUR AB

composantes du vecteur AB | kifech n7seb les composantes de AB | xB moins xA ou xA moins xB | comment calculer le vecteur AB avec les coordonnées

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : $x_B - x_A$, w $y_B - y_A$. Dima l'extrémité moins l'origine. Tfakker b Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Mathalan $A(-1, 2)$ w $B(3, 4)$ : $(4, 2)$.

تفكّر . l'extrémité moins l'origine ديما . les composantes du vecteur A B : x B moins x A ، w y B moins y A
A moins un ، deux w B trois ، مثلا . Chasles : le vecteur A B égale le vecteur O B moins le vecteur O A بـ
. quatre : quatre ، deux

*Les composantes du vecteur A B : x B moins x A, et y B moins y A. Toujours l'extrémité moins l'origine. Souviens-toi de Chasles : le vecteur A B égale le vecteur O B moins le vecteur O A. Par exemple, A moins un, deux et B trois, quatre : on obtient quatre, deux.*

---

## QUESTION 16 · ALIGNEMENT, PARALLÉLISME

comment montrer que trois points sont alignés | kifech nthabbet elli trois points alignés | points alignés avec les vecteurs | trois points alignes methode

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

A, B w C alignés, ki $\overrightarrow{AB}$ w $\overrightarrow{AC}$ colinéaires. Bel composantes : n7esbou le déterminant mte3hom, w ken zéro, alignés. Walla blech repère : nlawjou 3la réel k, elli $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

le نحسبو : composantes بالـ . le vecteur A B w le vecteur A C colinéaires كي ، A ، B w C alignés
le vecteur A C égale k اللي ، réel k على نلوّجو : repère ولّا بلاش . zéro ، alignés كان w ، متاعهم déterminant
. fois le vecteur A B

*A, B et C sont alignés quand le vecteur A B et le vecteur A C sont colinéaires. Avec les composantes : on calcule leur déterminant, et s'il est nul, les points sont alignés. Ou sans repère : on cherche un réel k tel que le vecteur A C égale k fois le vecteur A B.*

---

## QUESTION 17 · VECTEURS ET CONFIGURATIONS

comment montrer que deux droites sont parallèles | kifech nthabbet zouz droites paralleles | droites parallèles et vecteurs | parallelisme avec les vecteurs

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

La droite (AB) parallèle à la droite (CD), ki $\overrightarrow{AB}$ w $\overrightarrow{CD}$ colinéaires. Ya3ni nal9aw réel k elli $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, walla le déterminant mte3hom zéro. Rodd belek : houni el vecteurs mouch lezem yebdew men nafs el point.

réel k يعني نلقاو . le vecteur A B w le vecteur C D colinéaires كي ، la droite A B parallèle à la droite C D vecteurs الـ هنا : رد بالك . zéro متاعهم le déterminant ولّا ، le vecteur C D égale k fois le vecteur A B اللي موش لازم يبداو من نفس الـ point .

*La droite A B est parallèle à la droite C D quand le vecteur A B et le vecteur C D sont colinéaires. On cherche donc un réel k tel que le vecteur C D égale k fois le vecteur A B, ou on vérifie que leur déterminant est nul. Attention : ici, les vecteurs n'ont pas besoin de partir du même point.*

---

## QUESTION 18 · NORME D'UN VECTEUR

c'est quoi la norme d un vecteur | la norme chnowa | comment calculer la norme | kifech n7seb la norme

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

CE QU'IL RÉPOND

La norme du vecteur $\vec{u}$, hiya toulou : ken $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, la norme hiya AB. W fi base orthonormée, ken $\vec{u}(x, y)$ : la norme égale $\sqrt{x^{2} + y^{2}}$. Mathalan $\vec{u}(3, -4)$ : 5.

base في A B . w هي u égale le vecteur A B ، la norme كان : هي طولو ، la norme du vecteur u u trois ، moins مثلا . u x ، y : la norme égale racine carrée de x au carré plus y au carré كان ، orthonormée . quatre : cinq

*La norme du vecteur u, c'est sa longueur : si u égale le vecteur A B, la norme est A B. Et dans une base orthonormée, si u a pour composantes x, y, la norme égale racine carrée de x au carré plus y au carré. Par exemple u trois, moins quatre : cinq.*

---

## QUESTION 19 · NORME D'UN VECTEUR

c'est quoi un vecteur unitaire | vecteur unitaire ma3neha | kifech na3ref vecteur unitaire | définition vecteur unitaire

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\|\vec{u}\| = 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Vecteur unitaire, walla normé, houwa vecteur la norme mte3ou égale 1. Mathalan fi base orthonormée, $\vec{i}$ w $\vec{j}$ unitaires, w le vecteur $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ unitaire zeda, 5ater $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

base orthonormée ، i w j في مثلا . égale un متاعو vecteur la norme هو ، normé ولّا ، vecteur unitaire trois quarts plus un quart خاطر ، زادة unitaires ، w le vecteur racine de trois sur deux ، un demi ، unitaire . égale un

*Un vecteur unitaire, ou normé, est un vecteur de norme égale à un. Par exemple, dans une base orthonormée, i et j sont unitaires, et le vecteur racine de trois sur deux, un demi, est unitaire aussi, car trois quarts plus un quart égale un.*

---

### QUESTION 20 · NORME D'UN VECTEUR

la norme de u plus v égale la somme des normes | norme de la somme | est ce que la norme de u+v = norme u + norme v | norme w somme ki yetjam3ou

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

CE QU'IL RÉPOND

La, mouch dima. La norme de $\vec{u} + \vec{v}$, asghar walla tsewi la norme de $\vec{u}$ plus la norme de $\vec{v}$ : fi triangle, côté a9sar men majmou3 ezzouz lo5rin. Tsewi bark ki $\vec{u}$ w $\vec{v}$ colinéaires w de même sens.

triangle ، في : la norme de u plus la norme de v أصغر ولّا تساوي ، la norme de u plus v . لا ، موش ديما
. u w v colinéaires w de même sens تساوي برك كي . côté أقصر من مجموع الزوز الأخرين

*Non, pas toujours. La norme de u plus v est inférieure ou égale à la norme de u plus la norme de v : dans un triangle, un côté est plus court que la somme des deux autres. Il y a égalité seulement quand u et v sont colinéaires et de même sens.*

---

### QUESTION 21 · VECTEURS ORTHOGONAUX

c'est quoi deux vecteurs orthogonaux | orthogonaux ma3neha chnowa | définition vecteurs orthogonaux | vecteurs orthogonaux chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

CE QU'IL RÉPOND

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ w $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ : $\vec{u}$ w $\vec{v}$ orthogonaux, ki la droite (AB) w la droite (AC) perpendiculaires. W par convention, le vecteur nul orthogonal m3a ay vecteur.

la droite A B w la droite A C كي ، u égale le vecteur A B w v égale le vecteur A C : u w v orthogonaux
. vecteur أيّ مع perpendiculaires . w par convention ، le vecteur nul orthogonal

*Avec u égale le vecteur A B et v égale le vecteur A C : u et v sont orthogonaux quand la droite A B et la droite A C sont perpendiculaires. Et par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.*

---

### QUESTION 22 · ORTHOGONALITÉ ANALYTIQUE

comment savoir si deux vecteurs sont orthogonaux | kifech na3ref zouz vecteurs orthogonaux

---

condition d orthogonalité xx'+yy' | test orthogonaux avec les composantes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi base orthonormée, $\vec{u}(x, y)$ w $\vec{v}(x', y')$ orthogonaux, ki $xx' + yy' = 0$. Nedherbou el composantes elli fi nafs el blasa, w njam3ou. Rodd belek : hedhi mouch le déterminant, w tsa77 ken fi base orthonormée.

x x prime plus y y prime égale كي ، base orthonormée ، u x ، y w v x prime ، y prime orthogonaux في تصحّ le déterminant ، w هاذي موش : رد بالك . نجمعو w ، composantes اللي في نفس البلاصة . نضربو الـ zéro . كان في base orthonormée .

*Dans une base orthonormée, u de composantes x, y et v de composantes x prime, y prime sont orthogonaux quand x x prime plus y y prime égale zéro. On multiplie les composantes de même rang, et on additionne. Attention : ce n'est pas le déterminant, et cela ne vaut que dans une base orthonormée.*

---

## QUESTION 23 · VECTEURS ORTHOGONAUX

c'est quoi un repère orthonormé | base orthonormée chnowa | repere orthonorme ma3neha | orthonormé définition

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{i} \perp \vec{j} \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Base $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée, ki $\vec{i}$ w $\vec{j}$ orthogonaux, w ezzouz normés, ya3ni la norme mte3hom 1. W repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, ki la base mte3ou orthonormée. Fih bark nesta3mlou la formule de la distance w el condition $xx' + yy' = 0$.

un . w repère O ، i متاعهم la norme يعني ، normés الزوز i w j orthogonaux ، w كي ، base i ، j orthonormée الـ la formule de la distance w نستعملو . فيه برك orthonormée متاعو la base كي ، ، j orthonormé . condition x x prime plus y y prime

*Une base i, j est orthonormée quand i et j sont orthogonaux, et tous deux normés, c'est-à-dire de norme un. Et le repère O, i, j est orthonormé quand sa base est orthonormée. C'est seulement dans ce cas qu'on utilise la formule de la distance et la condition x x prime plus y y prime égale zéro.*

---

## QUESTION 24 · DISTANCE ET NORME

comment calculer la distance entre deux points | kifech n7seb la distance AB | formule de la distance | distance de deux points

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi repère orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^{2} + (y_B - y_A)^{2}}$. Hiya Pythagore. Mathalan $A(-2, -4)$ w $B(3, 5)$ : $\sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$.

في repère orthonormé : A B égale racine carrée de la parenthèse x B moins x A ، au carré ، plus la parenthèse y B moins y A ، au carré . Pythagore هي . مثلا : cinq ، trois w B moins quatre ، moins deux A . racine carrée de vingt-cinq plus quatre-vingt-un ، égale racine carrée de cent six

*Dans un repère orthonormé : A B égale racine carrée de, entre parenthèses, x B moins x A, au carré, plus, entre parenthèses, y B moins y A, au carré. C'est Pythagore. Par exemple, A moins deux, moins quatre et B trois, cinq : racine carrée de vingt-cinq plus quatre-vingt-un, égale racine carrée de cent six.*

---

## QUESTION 25 · VECTEURS ET CONFIGURATIONS

comment caractériser le milieu avec les vecteurs | milieu w les vecteurs kifech | MA + MB = 2MI avec I milieu | le milieu d un segment en vecteurs

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

CE QU'IL RÉPOND

I le milieu de [AB], ki $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, walla $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$. W l ay point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. Bel coordonnées : I houwa la moyenne mta3 les coordonnées de A w B.

كي I le milieu de A B ، ولّا le vecteur A B égale le vecteur I A plus le vecteur I B égale le vecteur nul . w لأيّ point M : le vecteur M A plus le vecteur M B égale deux fois le vecteur M I . بالـ I : coordonnées هو la moyenne متاع les coordonnées de A w B.

*I est le milieu de A B quand le vecteur I A plus le vecteur I B égale le vecteur nul, ou quand le vecteur A B égale deux fois le vecteur A I. Et pour tout point M : le vecteur M A plus le vecteur M B égale deux fois le vecteur M I. Avec les coordonnées : I a pour coordonnées la moyenne de celles de A et de B.*

---

## QUESTION 26 · CENTRE DE GRAVITÉ

c'est quoi le centre de gravité en vecteurs | centre de gravite GA+GB+GC | kifech nthabbet centre de gravité | centre de gravité d un triangle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

G le centre de gravité du triangle ABC, ki $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. W ken I le milieu de [BC] : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Bech tthabbet elli point M houwa G, yekfi tthabbet elli $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G C égale كي ، G le centre de gravité du triangle A B C
باش تثبت اللي . I le milieu de B C : le vecteur A G égale deux tiers du vecteur A I كان le vecteur nul . w
le vecteur M A plus le vecteur M B plus le vecteur M C égale le vecteur يكفي تثبت اللي ، G هو point M
. nul

*G est le centre de gravité du triangle A B C quand le vecteur G A plus le vecteur G B plus le vecteur G C égale le vecteur nul. Et si I est le milieu de B C : le vecteur A G égale deux tiers du vecteur A I. Pour prouver qu'un point M est G, il suffit de prouver que le vecteur M A plus le vecteur M B plus le vecteur M C égale le vecteur nul.*

---

### QUESTION 27 · THALÈS VECTORIEL

c'est quoi thalès avec les vecteurs | thales vectoriel kifech | forme vectorielle du théorème de thalès | thales bel vecteurs

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$$

CE QU'IL RÉPOND

ABC triangle, M 3la la droite (AB), w la parallèle à (BC) men M t9oss la droite (AC) fi N. Ken $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, ywalli $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$, w $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$. Nafs x fel thletha.

le vecteur كان . N في la droite A C تقصّ M من la droite A B ، w la parallèle à B C على A B C triangle ، M
le vecteur A N égale x fois le vecteur A C ، w le vecteur M N égale يولّي ، A M égale x fois le vecteur A B
. x fois le vecteur B C نفس x . في الثلاثة

*A B C est un triangle, M est sur la droite A B, et la parallèle à B C passant par M coupe la droite A C en N. Si le vecteur A M égale x fois le vecteur A B, alors le vecteur A N égale x fois le vecteur A C, et le vecteur M N égale x fois le vecteur B C. Le même x dans les trois.*

---

### QUESTION 28 · COMPOSANTES DU VECTEUR AB

comment trouver le quatrième sommet d un parallélogramme | kifech nal9a D bech ABCD parallelogramme | parallélogramme avec les coordonnées | ABCD parallelogramme coordonnees de D

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$ABCD \text{ parallélogramme} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

CE QU'IL RÉPOND

ABCD parallélogramme, ki $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. N7esbou les composantes mta3 $\overrightarrow{AB}$, w nektbou les composantes mta3 $\overrightarrow{DC}$ b $D(x, y)$, w nsawiwhom. Rodd belek mel tartib : $\overrightarrow{AB}$ w $\overrightarrow{DC}$, mouch $\overrightarrow{CD}$.

le متاع les composantes نحسبو . le vecteur A B égale le vecteur D C كي ، A B C D parallélogramme
A B : نساويوهم D x ، y ، w بـ le vecteur D C متاع les composantes نكتبو vecteur A B ، w
. C D ، موش w D C

*A B C D est un parallélogramme quand le vecteur A B égale le vecteur D C. On calcule les composantes du vecteur A B, on écrit celles du vecteur D C avec D de coordonnées x, y, et on les égale. Attention à l'ordre : A B et D C, pas C D.*

---

QUESTION 29 · THÉORÈME DE LA PROJECTION

c'est quoi le théorème de la projection | theoreme de la projection kifech | projection parallèle et vecteurs | la projection ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken A, B, C alignés, w na3mloulhom projection 3la droite b des droites parallèles, ya3tiwna A', B' w C'. Ken $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC}$, ywalli $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}$. El coefficient ma yetbaddelch.

A prime ، B يعطيونا ، des droites parallèles بـ droite على projection نعملولهم A ، B ، C alignés ، w كان
le vecteur A prime B prime égale x يولّي ، le vecteur A B égale x fois le vecteur A C كان . prime w C prime
. ما يتبدّلش coefficient الـ . fois le vecteur A prime C prime

*Si A, B et C sont alignés, et qu'on les projette sur une droite par des droites parallèles, on obtient A prime, B prime et C prime. Si le vecteur A B égale x fois le vecteur A C, alors le vecteur A prime B prime égale x fois le vecteur A prime C prime. Le coefficient ne change pas.*

## Les exercices — avec les corrigés

---

EXERCICE 1 · BASE **Simplifier une écriture**

$\vec{u}$ est un vecteur. Simplifier $6\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{u}$, c'est-à-dire trouver le réel $k$ tel que $6\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{u} = k\vec{u}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** 28/5 — aussi acceptées : 5.6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On utilise $a\vec{u} + b\vec{u} = (a+b)\vec{u}$ : on calcule la différence des deux réels.
2. Écris $6$ avec le dénominateur $5$ : $6 = \frac{30}{5}$.

CORRECTION

**Factoriser —** On met $\vec{u}$ en facteur.

$$6\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{u} = \left(6 - \frac{2}{5}\right)\vec{u}$$

**Calculer —**

$$6 - \frac{2}{5} = \frac{30}{5} - \frac{2}{5} = \frac{28}{5}$$

$6\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{u} = \frac{28}{5}\vec{u}$, donc $k = \frac{28}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/5` → $6 - \frac{2}{5}$ n'est pas $\frac{6-2}{5}$ : écris d'abord $6$ en cinquièmes.

---

EXERCICE 2 · BASE

## Un produit de produits

$\vec{u}$ est un vecteur non nul. Trouver le réel $k$ tel que $-4\left(\frac{3}{2}\vec{u}\right) = k\vec{u}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `-6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La règle est $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ : on multiplie les deux réels.
2. Calcule $-4 \times \frac{3}{2}$.

CORRECTION

**Multiplier les réels —**

$$-4\left(\frac{3}{2}\vec{u}\right) = \left(-4 \times \frac{3}{2}\right)\vec{u} = -6\vec{u}$$

$k = -6$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-5/2` / `-2.5` → Tu as additionné les deux réels ; la règle est $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ : on les multiplie.

`6` → Le produit d'un négatif par un positif est négatif.

---

EXERCICE 3 · PRATIQUE

## Développer et réduire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs. Simplifier l'écriture du vecteur $\vec{a} = 2(\vec{u} - 3\vec{v}) - (5\vec{u} - 6\vec{v})$.

**Écris $\vec{a}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par exemple $2u - v$.**

**Réponse attendue :** `-3u` — aussi acceptées : a=-3u · -3*u · a=-3*u · -3\vec{u} · \vec{a}=-3\vec{u} · -3 vecteur u · -3u→

---

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe chaque parenthèse ; le signe moins devant la seconde change ses deux signes.
2. Regroupe ensuite les termes en $\vec{u}$ d'un côté, les termes en $\vec{v}$ de l'autre.

CORRECTION

**Développer —**

$\vec{a} = 2\vec{u} - 6\vec{v} - 5\vec{u} + 6\vec{v}$

**Regrouper —** Les termes en $\vec{v}$ s'annulent.

$\vec{a} = (2-5)\vec{u} + (-6+6)\vec{v} = -3\vec{u}$

$\vec{a} = -3\vec{u}.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3u-12v / -3u - 12v / a=-3u-12v` → Le signe moins devant $(5\vec{u} - 6\vec{v})$ change aussi le signe de $-6\vec{v}$ : on obtient $+6\vec{v}$.

`-3u+3v / -3u + 3v` → Le $2$ multiplie aussi $-3\vec{v}$ : $2(\vec{u} - 3\vec{v}) = 2\vec{u} - 6\vec{v}$.

---

EXERCICE 4 · PRATIQUE

## Un crochet à ouvrir

Simplifier l'écriture du vecteur $\vec{b} = 3\vec{u} + \vec{v} - \left[7\vec{u} - \frac{1}{2}(8\vec{u} + 2\vec{v})\right]$.

**Écris $\vec{b}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par exemple $3u - v$.**

**Réponse attendue :** 2v — aussi acceptées : b=2v · 2*v · b=2*v · 2\vec{v} · \vec{b}=2\vec{v} · 2 vecteur v · 2v→

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par l'intérieur du crochet : $\frac{1}{2}(8\vec{u} + 2\vec{v}) = 4\vec{u} + \vec{v}$.
2. Le crochet vaut $3\vec{u} - \vec{v}$ ; en le retirant, ses deux signes changent.

CORRECTION

**Le crochet —**

$7\vec{u} - \frac{1}{2}(8\vec{u} + 2\vec{v}) = 7\vec{u} - 4\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{u} - \vec{v}$

**Retirer le crochet —**

$\vec{b} = 3\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{v}$

$\vec{b} = 2\vec{v}.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`0 / 0v / 0u` → En retirant le crochet $[3\vec{u} - \vec{v}]$ précédé d'un moins, $-\vec{v}$ devient $+\vec{v}$.

---

EXERCICE 5 · BASE

## Composantes d'une combinaison

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère $\vec{u}$ de composantes $-3$ et $2$, et $\vec{v}$ de composantes $1$ et $4$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{w} = 2\vec{u} - 5\vec{v}$.

**Écris le couple de composantes de $\vec{w}$, entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.**

**Réponse attendue :** `(-11;-16)` — aussi acceptées : (-11,-16) · w(-11;-16) · w(-11,-16) · w=(-11;-16) · w=(-11,-16) · -11;-16 · x=-11;y=-16 · x=-11 et y=-16 · x=-11,y=-16 · (x;y)=(-11;-16) · (x,y)=(-11,-16)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie les composantes de $\vec{u}$ par $2$ et celles de $\vec{v}$ par $-5$.
2. $2\vec{u}$ a pour composantes $-6$ et $4$ ; $-5\vec{v}$ a pour composantes $-5$ et $-20$. Additionne.

CORRECTION

**Les produits —**

$$2\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix} \qquad -5\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-20\end{pmatrix}$$

**La somme —**

$$\vec{w}\begin{pmatrix}-6-5\\4-20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\-16\end{pmatrix}$$

$\vec{w}$ a pour composantes $-11$ et $-16$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1;24)` / `(-1,24)` → Le réel devant $\vec{v}$ est $-5$, pas $5$ : $-5\vec{v}$ a pour composantes $-5$ et $-20$.

---

EXERCICE 6 · BASE

## Calculer un déterminant

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}$ de composantes $14$ et $-8$, et $\vec{v}$ de composantes $1$ et $-2$. Calculer le déterminant $xy' - x'y$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Sont-ils colinéaires ?

**Donne la valeur du déterminant.**

**Réponse attendue :** `-20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ici $x = 14$, $y = -8$, $x' = 1$ et $y' = -2$.
2. Calcule $14 \times (-2) - 1 \times (-8)$.

CORRECTION

**Les produits en croix —**

$$xy' - x'y = 14 \times (-2) - 1 \times (-8)$$

**Calculer —**

$$= -28 + 8 = -20$$

Le déterminant vaut $-20$ : il n'est pas nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-36` → Le déterminant est une **différence** : $xy' - x'y$, pas $xy' + x'y$.

`30` → Tu as calculé $xx' + yy'$ ; le déterminant croise : $xy' - x'y$.

`20` → $-28 - (-8) = -28 + 8$, qui est négatif.

---

EXERCICE 7 · PRATIQUE

## Un réel pour la colinéarité

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}$ a pour composantes $m$ et $2$, et $\vec{v}$ a pour composantes $5$ et $-3$. Déterminer le réel $m$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

**Donne la valeur de $m$.**

**Réponse attendue :** `-10/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris que le déterminant $xy' - x'y$ est nul.
2. Le déterminant vaut $m \times (-3) - 5 \times 2$.

CORRECTION

**La condition —**

$$m \times (-3) - 5 \times 2 = 0$$

**Résoudre —**

$$-3m - 10 = 0 \iff m = -\frac{10}{3}$$

Les vecteurs sont colinéaires pour $m = -\frac{10}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10/3` → $-3m = 10$ donne $m = -\frac{10}{3}$ : attention au signe en divisant par $-3$.

`6/5` → Tu as écrit $xx' + yy' = 0$, la condition d'orthogonalité ; pour la colinéarité, c'est $xy' - x'y = 0$.

---

EXERCICE 8 · PRATIQUE

## Colinéarité avec un paramètre

$\vec{u}$ a pour composantes $m$ et $m - 1$, et $\vec{v}$ a pour composantes $6$ et $1$. Déterminer le réel $m$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

**Donne la valeur de $m$.**

**Réponse attendue :** `6/5` — aussi acceptées : 1.2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le déterminant vaut $m \times 1 - 6(m - 1)$.
2. Développe : $m - 6m + 6 = 0$.

CORRECTION

**La condition —**

$$m \times 1 - 6(m - 1) = 0$$

**Résoudre —**

$$-5m + 6 = 0 \iff m = \frac{6}{5}$$

Les vecteurs sont colinéaires pour $m = \frac{6}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/5 / -0.2` → Le $6$ multiplie toute la parenthèse $(m-1)$ : $6(m-1) = 6m - 6$.

---

EXERCICE 9 · PRATIQUE

## Colinéaires, avec une fraction

$\vec{u}$ a pour composantes $2m$ et $\frac{4}{3}$, et $\vec{v}$ a pour composantes $6$ et $10$. Déterminer le réel $m$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

**Donne la valeur de $m$.**

**Réponse attendue :** `2/5` — aussi acceptées : 0.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le déterminant vaut $2m \times 10 - 6 \times \frac{4}{3}$.
2. $6 \times \frac{4}{3} = 8$ ; résous $20m - 8 = 0$.

CORRECTION

**La condition —**

$$2m \times 10 - 6 \times \frac{4}{3} = 0$$

**Résoudre —**

$$20m - 8 = 0 \iff m = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Les vecteurs sont colinéaires pour $m = \frac{2}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/5 / 0.8` → La première composante est $2m$, pas $m$ : le produit en croix donne $20m$.

---

EXERCICE 10 · RAISONNEMENT

## Quand cela est possible

$\vec{u}$ a pour composantes $m + 1$ et $-1$, et $\vec{v}$ a pour composantes $-3$ et $0$. Déterminer, quand cela est possible, les réels $m$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

**Donne l'ensemble des valeurs de $m$ ; s'il n'y en a aucune, écris ∅ ou « impossible ».**

**Réponse attendue :** ∅ — aussi acceptées : impossible · aucune solution · pas de solution · {} · S = ∅

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule le déterminant $(m+1)\times 0-(-3)\times(-1)$.
2. Le terme en $m$ disparaît : le déterminant ne dépend pas de $m$.

CORRECTION

**Le déterminant —**

$$(m+1)\times 0-(-3)\times(-1)=0-3=-3$$

**Conclure —** Le déterminant vaut $-3$ pour tout réel $m$ : il n'est jamais nul.

Aucun réel $m$ ne convient : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont jamais colinéaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-1} / m=-1 / -1` → Pour $m=-1$, $\vec{u}$ a pour composantes $0$ et $-1$ : le déterminant vaut encore $-3$. Il ne s'annule jamais.

---

EXERCICE 11 · BASE **Le quatrième sommet**

Dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère $A\left(-2,\dfrac{3}{4}\right)$, $B(0,-1)$ et $C(3,4)$. Déterminer l'ordonnée du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

**Donne seulement l'ordonnée de $D$.**

**Réponse attendue :** `23/4` — aussi acceptées : 5.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $2$ et $-\dfrac{7}{4}$ ; écris $4-y=-\dfrac{7}{4}$.

CORRECTION

**Le vecteur AB —**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0+2\\-1-\dfrac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-\dfrac{7}{4}\end{pmatrix}$$

**Égaler —** Avec $D(x,y)$, le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour composantes $3-x$ et $4-y$.

$$3-x=2\quad;\quad 4-y=-\frac{7}{4}$$

**Résoudre —**

$$x=1\quad;\quad y=4+\frac{7}{4}=\frac{23}{4}$$

$D\left(1,\dfrac{23}{4}\right)$ : l'ordonnée de $D$ est $\dfrac{23}{4}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9/4 / 2.25` → Dans $ABCD$, c'est $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, pas $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

## Trois points alignés

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-4, 2)$, $B(-3, 5)$ et $C(0, a)$. Déterminer le réel $a$ pour que $A$, $B$ et $C$ soient alignés.

**Donne la valeur de $a$.**

**Réponse attendue : 14**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $1$ et $3$, $\overrightarrow{AC}$ a pour composantes $4$ et $a-2$ : écris que le déterminant est nul.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\a-2\end{pmatrix}$$

**Le déterminant —**

$$1 \times (a-2) - 4 \times 3 = 0 \iff a - 14 = 0$$

Les points sont alignés pour $a = 14$.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → La seconde composante de $\overrightarrow{AC}$ est $a-2$, pas $a$ : extrémité moins origine.

EXERCICE 13 · RAISONNEMENT

## Alignés, le paramètre dans A

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(2a+1, 1)$, $B(1, 6)$ et $C(-1, 2)$. Déterminer le réel $a$ pour que $A$, $B$ et $C$ soient alignés.

**Donne la valeur de $a$.**

**Réponse attendue :** `-5/4` — aussi acceptées : -1.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le paramètre est dans $A$ : prends plutôt les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$, de même origine $B$.
2. $\overrightarrow{BA}$ a pour composantes $2a$ et $-5$, $\overrightarrow{BC}$ a pour composantes $-2$ et $-4$.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2a\\-5\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$$

**Le déterminant —**

$$2a \times (-4) - (-2) \times (-5) = -8a - 10$$

**Résoudre —**

$$-8a - 10 = 0 \iff a = -\frac{5}{4}$$

Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés pour $a = -\frac{5}{4}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/4 / 1.25` → $(-2) \times (-5) = 10$ : le déterminant vaut $-8a - 10$, qui s'annule pour une valeur négative.

---

EXERCICE 14 · BASE **Une distance**

Dans un repère orthonormé, calculer la distance $AB$ pour $A\left(2, \frac{3}{4}\right)$ et $B(1, 0)$.

**Donne la valeur exacte de $AB$.**

**Réponse attendue :** `5/4` — aussi acceptées : 1.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
2. Les différences valent $-1$ et $-\frac{3}{4}$ ; la somme des carrés vaut $\frac{25}{16}$.

CORRECTION

**Les différences —**

$$x_B - x_A = 1 - 2 = -1 \quad ; \quad y_B - y_A = 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

**La formule —**

$$AB = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$AB = \frac{5}{4}.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

`25/16` → $\frac{25}{16}$ est $AB^2$ ; il reste à prendre la racine carrée.

---

EXERCICE 15 · BASE **Une distance avec une racine**

Dans un repère orthonormé, calculer la distance $AB$ pour $A(-\sqrt{3}, 2)$ et $B(0, 6)$.

**Donne la valeur exacte de $AB$.**

**Réponse attendue :** `sqrt(19)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les différences valent $0 - (-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ et $6 - 2 = 4$.

2. Le carré de $\sqrt{3}$ est $3$.

CORRECTION

**Les différences —**

$x_B - x_A = \sqrt{3}$ ; $y_B - y_A = 4$

**La formule —**

$AB = \sqrt{3 + 16} = \sqrt{19}$

$AB = \sqrt{19}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(3)+4` → La racine d'une somme n'est pas la somme des racines : on calcule $\sqrt{3 + 16}$.

---

EXERCICE 16 · BASE

## La norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ de composantes $-3$ et $2$.

**Donne la valeur exacte de la norme.**

**Réponse attendue :** `sqrt(13)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La norme d'un vecteur de composantes $x$ et $y$ est $\sqrt{x^2 + y^2}$.
2. $(-3)^2 = 9$ et $2^2 = 4$.

CORRECTION

**La formule —** La norme de $\vec{u}$ :

$\sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

La norme de $\vec{u}$ est $\sqrt{13}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → $13$ est le carré de la norme ; il reste à prendre la racine carrée.

---

EXERCICE 17 · BASE

## Orthogonaux ou non ?

Dans une base orthonormée, les vecteurs $\vec{u}$ de composantes $3$ et $-1$, et $\vec{v}$ de composantes $2$ et $6$, sont-ils orthogonaux ?

**Réponds par oui ou par non.**

**Réponse attendue :** `oui` — aussi acceptées : orthogonaux · ils sont orthogonaux · oui ils sont orthogonaux · oui orthogonaux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En base orthonormée, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
2. Calcule $3 \times 2 + (-1) \times 6$.

CORRECTION

**La condition —**

$xx' + yy' = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0$

$xx' + yy' = 0$ : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / pas orthogonaux / non orthogonaux` → Tu as sans doute calculé le déterminant ($20$), qui teste la colinéarité. Pour l'orthogonalité, calcule $xx' + yy'$.

---

EXERCICE 18 · PRATIQUE

## Le test d'orthogonalité

Dans une base orthonormée, $\vec{u}$ a pour composantes $\frac{2}{3}$ et $-2$, et $\vec{v}$ a pour composantes $-3$ et $\frac{1}{2}$. Calculer $xx' + yy'$. Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?

**Donne la valeur de $xx' + yy'$.**

**Réponse attendue :** `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $xx' = \frac{2}{3} \times (-3)$ et $yy' = -2 \times \frac{1}{2}$.
2. $\frac{2}{3} \times (-3) = -2$ et $-2 \times \frac{1}{2} = -1$.

CORRECTION

**Calculer —**

$xx' + yy' = \frac{2}{3} \times (-3) + (-2) \times \frac{1}{2} = -2 - 1 = -3$

$xx' + yy' = -3 \neq 0$ : les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1` → $(-2) \times \frac{1}{2} = -1$ : les deux produits sont négatifs, ils s'ajoutent.

---

EXERCICE 19 · PRATIQUE

## Un réel pour l'orthogonalité

Dans une base orthonormée, $\vec{u}$ a pour composantes $m$ et $9$, et $\vec{v}$ a pour composantes $-6$ et $m + 1$. Déterminer le réel $m$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

**Donne la valeur de $m$.**

**Réponse attendue :** `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $xx' + yy' = 0$ : $m \times (-6) + 9(m + 1) = 0$.
2. Développe et réduis : $3m + 9 = 0$.

---

CORRECTION

**La condition —**

$-6m + 9(m+1) = 0$

**Résoudre —**

$3m + 9 = 0 \iff m = -3$

Les vecteurs sont orthogonaux pour $m = -3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-6/5` → Ce serait une condition de colinéarité. Pour l'orthogonalité : $xx' + yy' = 0$.

---

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

## Deux valeurs possibles

Dans une base orthonormée, $\vec{u}$ a pour composantes $m+2$ et $m-2$, et $\vec{v}$ a pour composantes $m$ et $3$. Déterminer les réels $m$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

**Donne l'ensemble des valeurs de $m$, par exemple $\{-2\,;5\}$.**

**Réponse attendue :** `{-6;1}` — aussi acceptées : m = -6 ou m = 1 · m = 1 ou m = -6 · -6 et 1 · {1;-6}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $(m+2)m + 3(m-2) = 0$ et développe.
2. On obtient $m^2 + 5m - 6 = 0$ ; cherche une racine évidente.

CORRECTION

**La condition —**

$(m+2)m + 3(m-2) = m^2 + 2m + 3m - 6 = m^2 + 5m - 6$

**Factoriser —** $1$ est racine évidente ($1 + 5 - 6 = 0$).

$m^2 + 5m - 6 = (m-1)(m+6)$

**Résoudre —**

$(m-1)(m+6) = 0 \iff m = 1$ ou $m = -6$

Les vecteurs sont orthogonaux pour $m = -6$ ou $m = 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1}` / `m=1` → Une équation du second degré peut avoir deux solutions : $(m-1)(m+6) = 0$ donne aussi $m = -6$.

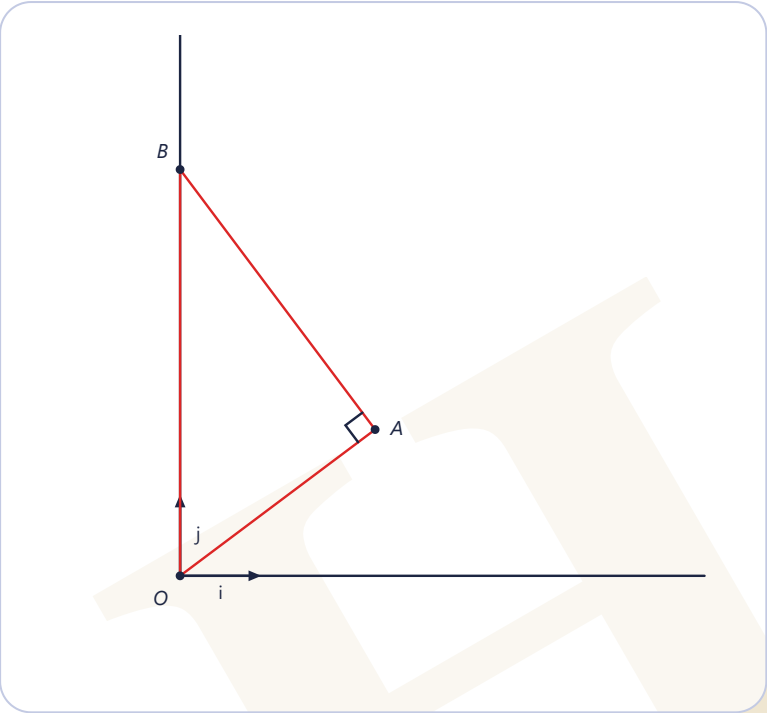
`{-1;6}` / `{6;-1}` → $(m-1)(m+6) = 0$ donne $m = 1$ ou $m = -6$ : vérifie avec $1 + 5 - 6 = 0$.

---

EXERCICE 21 · DEFI

## Un triangle rectangle dans un repère

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $OAB$ est un triangle rectangle en $A$ tel que $OA = 3$ et $AB = 4$ ; le point $B$ est sur la demi-droite des ordonnées positives et $A$ a une abscisse positive. Déterminer l'abscisse du point $A$.




OA = 3, AB = 4, angle droit en A.

*Un repère orthonormé d'origine O, avec ses vecteurs i et j. Le point B est sur l'axe des ordonnées, au-dessus de O. Le point A est à droite, plus bas que B. Le triangle OAB est rectangle en A, marqué d'une équerre.*

**Donne seulement l'abscisse de $A$.**

**Réponse attendue :** 12/5 — aussi acceptées : 2.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par Pythagore, $OB = 5$, donc $B(0,5)$. Pose $A(x,y)$.
2. Écris $OA^2 = 9$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 9$, et l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$.
3. $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $-x$ et $5 - y$ ; l'orthogonalité donne $x^2 + y^2 = 5y$, donc $y = \dfrac{9}{5}$.

CORRECTION

**Le point B —** Le triangle est rectangle en $A$ : $OB^2 = 9 + 16 = 25$.

$$OB = 5 \quad ; \quad B(0,5)$$

**Orthogonalité —** Avec $A(x,y)$, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$, de composantes $(x,y)$ et $(-x, 5-y)$, sont orthogonaux.

$$x(-x) + y(5-y) = 0 \iff x^2 + y^2 = 5y$$

**L'ordonnée —** Or $OA = 3$, donc $x^2 + y^2 = 9$.

$$5y = 9 \iff y = \frac{9}{5}$$

**L'abscisse —** On reporte dans $x^2 + y^2 = 9$ et on garde l'abscisse positive.

$$x^2 = 9 - \frac{81}{25} = \frac{144}{25} \quad ; \quad x = \frac{12}{5}$$

$A\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$ : l'abscisse de $A$ est $\dfrac{12}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

9/5 / 1.8 → $\frac{9}{5}$ est l'ordonnée de $A$ ; on demande son abscisse.

---

EXERCICE 22 · PRATIQUE

## Même milieu

$A$ et $B$ sont deux points, $M$ et $N$ les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On note $K$ le milieu de $[MN]$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AB}$, et conclure.

Donne le réel $k$.

**Réponse attendue :** 1/2 — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $K$ est le milieu de $[MN]$ : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AK}$.
2. $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1$.

CORRECTION

Le milieu —

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

Diviser par deux —

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$k = \frac{1}{2}$ : $K$ est aussi le milieu de $[AB]$, donc $[AB]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ vaut $2\overrightarrow{AK}$, pas $\overrightarrow{AK}$ : il reste à diviser par deux.

---

EXERCICE 23 · PRATIQUE

## Placer le point E

$ABC$ est un triangle et $E$ le point défini par $3\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$.

Donne le réel $k$.

**Réponse attendue :** 1/4 — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec Chasles, écris $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$.
2. On obtient $4\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ; puis $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{EA}$.

CORRECTION

**Chasles —**

$3\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff 4\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AB}$

**Retourner —** On change de sens : $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{EA}$.

$\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ : $E$ est sur $[AB]$, au quart à partir de $A$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/4 / -0.25` → $-\frac{1}{4}$ est le coefficient de $\overrightarrow{EA}$ ; pour $\overrightarrow{AE}$, le signe change.

`1/3 / -1/3` → $3\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}$ fait apparaître $4\overrightarrow{EA}$ après Chasles, pas $3\overrightarrow{EA}$.

---

EXERCICE 24 · PRATIQUE

## B, C et D alignés

Quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont tels que $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$, et conclure.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `2/5` — aussi acceptées : 0.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais passer tous les vecteurs par $B$ : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
2. Les termes en $\overrightarrow{AB}$ s'annulent : il reste $5\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

CORRECTION

**Chasles —**

$5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = 3\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

**Simplifier —**

$5\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ : les vecteurs sont colinéaires, donc $B$, $C$ et $D$ sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/5 / 0.6` → $\frac{3}{5}$ est le coefficient de $\overrightarrow{CD}$ par rapport à $\overrightarrow{CB}$ ; on demande $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

---

EXERCICE 25 · PRATIQUE

## Deux droites parallèles

$ABC$ est un triangle, $E$ et $F$ les points tels que $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{BC}$, et conclure.

Donne le réel $k$.

**Réponse attendue : 2**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$.
2. On obtient $-2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ ; or $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

CORRECTION

**Le vecteur EF —**

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$$

**Chasles —**

$$2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{BC}$$

$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BC}$ : les droites $(BC)$ et $(EF)$ sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, pas $\overrightarrow{CB}$ : vérifie le sens avec Chasles.

---

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

## Un parallélogramme BCMN

$ABC$ est un triangle ; à tout réel $x$ on associe les points $M$ et $N$ tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. On montre que $\overrightarrow{MN} = (1-x)\overrightarrow{BC}$. Déterminer la valeur de $x$ pour laquelle $BCMN$ est un parallélogramme.

Donne la valeur de $x$.

**Réponse attendue : 2**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $BCMN$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NM}$.
2. $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN} = (x-1)\overrightarrow{BC}$.

CORRECTION

**Le vecteur MN —**

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (x-1)\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AC} = (1-x)\overrightarrow{BC}$$

**Le parallélogramme —** $BCMN$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NM}$.

$$\overrightarrow{NM} = (x-1)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \iff x - 1 = 1$$

$BCMN$ est un parallélogramme pour $x = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

0 → Dans $BCMN$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NM}$ : c'est $(x-1)\overrightarrow{BC}$, pas $(1-x)\overrightarrow{BC}$.

1 → Pour $x = 1$, $M = N$ : le quadrilatère est aplati, ce n'est pas un parallélogramme.

---

EXERCICE 27 · BASE

## Un milieu caché

$ABC$ est un triangle, $I$ le milieu de $[AB]$ et $M$ le point tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IC}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $I$ est le milieu de $[AB]$ : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
2. On obtient $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ : $M$ est le milieu de $[IC]$.

CORRECTION

**Le milieu I —**

$2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**Conclure —** $M$ est donc le milieu de $[IC]$.

$\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

$k = \frac{1}{2}$ : $M$ est le milieu de $[IC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $M$ est entre $I$ et $C$ : le vecteur $\overrightarrow{IM}$ est plus court que $\overrightarrow{IC}$.

---

EXERCICE 28 · PRATIQUE

## Des vecteurs colinéaires

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(8, -5)$, $B(2, -1)$, $C(-19, 8)$ et $D(-1, -4)$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CD}$ : extrémité moins origine.
2. $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $-6$ et $4$, $\overrightarrow{CD}$ a pour composantes $18$ et $-12$.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1+19\\-4-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\-12\end{pmatrix}$

**Comparer —**

$18 = -3 \times (-6) \quad ; \quad -12 = -3 \times 4$

$\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$ : les vecteurs sont colinéaires, de sens contraires.

PIÈGES ANTICIPÉS

-1/3 → $-\dfrac{1}{3}$ donne $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ ; on demande l'inverse.

---

EXERCICE 29 · DEFI

## Des normes qui s'ajoutent

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que la norme de $\vec{u}$ vaut $2$, celle de $\vec{v}$ vaut $3$ et celle de $\vec{u} + \vec{v}$ vaut $5$. Ces vecteurs sont colinéaires : trouver le réel $k$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** 3/2 — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, on a $AB = 2$, $BC = 3$ et $AC = 5 = AB + BC$.
2. L'égalité $AC = AB + BC$ place $B$ sur le segment $[AC]$ : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.

CORRECTION

**Les points —** On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, de sorte que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$AB = 2 \quad ; \quad BC = 3 \quad ; \quad AC = 5 = AB + BC$

**Alignement —** Comme $AC = AB + BC$, le point $B$ est sur le segment $[AC]$ : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

**Le coefficient —** Le rapport des longueurs donne le réel, positif :

$k = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{2}$

$\vec{v} = \dfrac{3}{2}\vec{u}.$

PIÈGES ANTICIPÉS

-3/2 / -1.5 → Si $\vec{v}$ était de sens contraire, la norme de $\vec{u} + \vec{v}$ vaudrait $3 - 2 = 1$, pas $5$.

---

EXERCICE 30 · RAISONNEMENT

## Deux à deux colinéaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont tels que $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$ et $\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w} = \vec{0}$. Trouver le réel $k$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** -7/2 — aussi acceptées : -3.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Additionne les deux égalités membre à membre : $\vec{v}$ disparaît.
2. Tu obtiens $3\vec{u}+2\vec{w}=\vec{0}$, donc $\vec{w}=-\dfrac{3}{2}\vec{u}$ ; reporte dans la première égalité.

CORRECTION

**Additionner —**

$(2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})+(\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w})=3\vec{u}+2\vec{w}=\vec{0}$

**Le vecteur w —**

$\vec{w}=-\dfrac{3}{2}\vec{u}$

**Le vecteur v —** La première égalité donne $\vec{v}=\vec{w}-2\vec{u}$.

$\vec{v}=-\dfrac{3}{2}\vec{u}-2\vec{u}=-\dfrac{7}{2}\vec{u}$

$\vec{v}=-\dfrac{7}{2}\vec{u}$ et $\vec{w}=-\dfrac{3}{2}\vec{u}$ : les trois vecteurs sont deux à deux colinéaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3/2 / -1.5` → $-\dfrac{3}{2}$ est le coefficient de $\vec{w}$ ; reporte-le dans $\vec{v}=\vec{w}-2\vec{u}$.

---

EXERCICE 31 · PRATIQUE

## Une combinaison de deux vecteurs

Soient $\vec{a}=\vec{u}-2\vec{v}$ et $\vec{b}=\dfrac{4}{5}\vec{u}+\vec{v}$. Exprimer le vecteur $2\vec{a}+5\vec{b}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

**Écris le résultat en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par exemple $3u-2v$.**

**Réponse attendue :** 6u+v — aussi acceptées : v+6u · 6*u+v · 2a+5b=6u+v · 6\vec{u}+\vec{v} · 6u+1v · 6 vecteur u + vecteur v

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $2\vec{a}=2\vec{u}-4\vec{v}$ et $5\vec{b}=4\vec{u}+5\vec{v}$.
2. Additionne les termes en $\vec{u}$, puis les termes en $\vec{v}$.

CORRECTION

**Les produits —**

$2\vec{a}=2\vec{u}-4\vec{v}\quad ;\quad 5\vec{b}=4\vec{u}+5\vec{v}$

**La somme —**

$2\vec{a}+5\vec{b}=(2+4)\vec{u}+(-4+5)\vec{v}=6\vec{u}+\vec{v}$

$2\vec{a}+5\vec{b}=6\vec{u}+\vec{v}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2u+v / 2u + v` → $5\times\dfrac{4}{5}\vec{u}=4\vec{u}$ : le 5 multiplie aussi le premier terme de $\vec{b}$.

---

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT

## Une nouvelle base

$ABC$ est un triangle, $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis conclure.

**Donne la valeur du déterminant.**

**Réponse attendue :** 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $A$, $B$, $C$ non alignés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base. $\vec{u}$ a pour composantes $2$ et $1$, $\vec{v}$ a pour composantes $-1$ et $3$.
2. Calcule $2 \times 3 - (-1) \times 1$.

CORRECTION

**Les composantes —**

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

**Le déterminant —**

$$2 \times 3 - (-1) \times 1 = 6 + 1 = 7$$

Le déterminant vaut $7$, il n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → $-(-1) \times 1 = +1$ : le déterminant vaut $6 + 1$.

---

EXERCICE 33 · BASE

## Le milieu, en vecteurs

$I$ est le milieu du segment $[AB]$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{AB}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `-1/2` — aussi acceptées : -0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ va de $I$ vers $A$ : est-il de même sens que $\overrightarrow{AB}$ ou de sens contraire ?
2. Sa longueur $IA$ est la moitié de $AB$.

CORRECTION

**Le milieu —** $I$ est le milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

**L'opposé —** $\overrightarrow{IA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AI}$.

$$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$k = -\dfrac{1}{2}$ : pour écrire un vecteur en fonction d'un autre, on regarde le sens, puis la longueur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2 / 0.5` → Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires : le réel est négatif.

`-2` → C'est $\overrightarrow{AB}$ qui vaut $-2$ fois $\overrightarrow{IA}$, pas l'inverse : $IA$ est la moitié de $AB$.

---

EXERCICE 34 · PRATIQUE

## Une somme autour du milieu

$I$ est le milieu de $[AB]$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AI}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que vaut $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ quand $I$ est le milieu de $[AB]$ ?
2. Il reste $\overrightarrow{AB}$ : écris-le à l'aide de $\overrightarrow{AI}$.

CORRECTION

**Le milieu —** Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés.

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

**Il reste AB —**

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$$

$k = 2$. Le milieu $I$ de $[AB]$ se traduit par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, ou par $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ n'est pas $\overrightarrow{AB}$ : les deux vecteurs sont opposés, leur somme est le vecteur nul.

`1/2 / 0.5` → C'est $\overrightarrow{AI}$ qui est la moitié de $\overrightarrow{AB}$ : $\overrightarrow{AB}$ est le double de $\overrightarrow{AI}$.

---

EXERCICE 35 · BASE

## La règle du parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. Écrire le vecteur $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ à l'aide de deux des points $A$, $B$, $C$ et $D$.

**Écris le vecteur par ses deux lettres, par exemple $EF$ pour $\overrightarrow{EF}$ ; écris $0$ pour le vecteur nul.**

**Réponse attendue :** DB — aussi acceptées : \overrightarrow{DB} · vecteur DB · le vecteur DB · DB→ · →DB · vec DB · c'est le vecteur DB · DA+DC=DB

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux vecteurs ont la même origine $D$ : leur somme est une diagonale du parallélogramme construit sur eux.
2. Dans $ABCD$, quel sommet est opposé à $D$ ?

CORRECTION

**Même origine —** Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$ partent de $D$ ; la somme est la diagonale issue de $D$.

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

**Vérifier par Chasles —** Dans le parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$ : la somme de deux vecteurs de même origine est la diagonale issue de cette origine.

PIÈGES ANTICIPÉS

`BD` / `\overrightarrow{BD}` / `vecteur BD` → Le vecteur somme part du point commun $D$ : c'est $\overrightarrow{DB}$, pas $\overrightarrow{BD}$.

`AC` / `CA` → La somme de deux vecteurs d'origine $D$ est la diagonale issue de $D$, pas l'autre diagonale.

---

EXERCICE 36 · BASE

## Réordonner pour Chasles

$A$, $B$, $C$ et $D$ sont quatre points. Simplifier l'écriture du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$.

**Écris le vecteur par ses deux lettres, par exemple $EF$ pour $\overrightarrow{EF}$ ; écris $0$ pour le vecteur nul.**

**Réponse attendue :** `CD` — aussi acceptées : \overrightarrow{CD} · vecteur CD · le vecteur CD · CD→ · →CD · vec CD · c'est le vecteur CD

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'addition est commutative : place les vecteurs pour que l'extrémité de l'un soit l'origine du suivant.
2. Commence par $\overrightarrow{CA}$ : il arrive en $A$, origine de $\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

**Réordonner —**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

**Chasles deux fois —**

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$

La somme vaut $\overrightarrow{CD}$ : on réordonne la somme en une chaîne, puis la relation de Chasles la réduit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`DC` / `\overrightarrow{DC}` / `vecteur DC` → Le vecteur obtenu part de l'origine du premier maillon de la chaîne, $C$, et arrive à l'extrémité du dernier, $D$.

---

EXERCICE 37 · PRATIQUE

## Une chaîne qui se referme

$A$, $B$ et $C$ sont trois points. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{BC}$.

**Donne le réel $k$.**

Maths à la carte DELKADER HAMMAMI

**Réponse attendue : 1**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $2\overrightarrow{BC}$ sous la forme $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}$.
2. Que vaut $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ ?

CORRECTION

**Découper —**

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BC}$$

**Chasles —** La chaîne part de $A$ et revient en $A$.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

**Conclure —**

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}$$

$k=1$ : une chaîne de Chasles qui revient à son point de départ donne le vecteur nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ n'est pas $\overrightarrow{BC}$ : c'est $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$.

2 → Une partie de $2\overrightarrow{BC}$ est absorbée par la chaîne $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

---

EXERCICE 38 · PRATIQUE

## Une différence qui s'annule

$M$, $N$ et $P$ sont trois points. Simplifier l'écriture du vecteur $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$.

**Écris le vecteur par ses deux lettres, par exemple $EF$ pour $\overrightarrow{EF}$ ; écris $0$ pour le vecteur nul.**

**Réponse attendue :** `0` — aussi acceptées : \vec{0} · vecteur nul · le vecteur nul · 0→ · nul · c'est le vecteur nul · →0 · vecteur 0 · le vecteur 0 · MM · NN · PP

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Retrancher $\overrightarrow{MP}$, c'est ajouter son opposé $\overrightarrow{PM}$.
2. Réordonne : $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}$ est une chaîne de Chasles.

CORRECTION

**Retrancher —**

$$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PN}$$

**Conclure —** $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont opposés.

$$\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{PP}=\vec{0}$$

Le vecteur est nul. Retrancher un vecteur, c'est ajouter son opposé : $-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PM}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2NP / 2\overrightarrow{NP} → $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$ n'est pas $\overrightarrow{NP}$ : c'est $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$, l'opposé de $\overrightarrow{NP}$.

---

EXERCICE 39 · BASE

## Opposé et Chasles

$A$, $B$ et $C$ sont trois points. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{AC}$.

Donne le réel $k$.

**Réponse attendue :** -1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par $\overrightarrow{CB}$ : il arrive en $B$, origine de $\overrightarrow{BA}$.
2. Compare le vecteur obtenu à $\overrightarrow{AC}$ : même sens ou sens contraire ?

CORRECTION

**Chasles —**

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$$

**L'opposé —**

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$$

$k = -1$ : on obtient $\overrightarrow{CA}$, l'opposé de $\overrightarrow{AC}$ ; changer l'ordre des lettres change le signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → On trouve $\overrightarrow{CA}$, qui est l'opposé de $\overrightarrow{AC}$ : le réel est $-1$.

---

EXERCICE 40 · PRATIQUE

## Enlever des parenthèses

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs. Écrire sans parenthèses et réduire le vecteur $\vec{a} = \vec{u} - (2\vec{v} - \vec{u}) - (\vec{u} + \vec{v})$.

Écris $\vec{a}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par exemple $2u - v$.

**Réponse attendue :** u-3v — aussi acceptées : a=u-3v · -3v+u · u-3*v · a=u-3*v · \vec{u}-3\vec{v} · \vec{a}=\vec{u}-3\vec{v} · 1u-3v · a=-3v+u · -3*v+u · u+(-3v)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un signe moins devant une parenthèse change le signe de chacun de ses termes.
2. Regroupe ensuite les termes en $\vec{u}$, puis les termes en $\vec{v}$.

CORRECTION

**Enlever les parenthèses —**

$$\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{u} - \vec{u} - \vec{v}$$

**Regrouper —**

$\vec{a} = (1+1-1)\vec{u} + (-2-1)\vec{v} = \vec{u} - 3\vec{v}$

$\vec{a} = \vec{u} - 3\vec{v}$ : l'opposé d'une somme est la somme des opposés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-u-3v / a=-u-3v` → L'opposé de $2\vec{v} - \vec{u}$ est $-2\vec{v} + \vec{u}$ : le signe de $\vec{u}$ change aussi.

`u-v / a=u-v` → L'opposé de $\vec{u} + \vec{v}$ est $-\vec{u} - \vec{v}$ : le signe de $\vec{v}$ change aussi.

---

EXERCICE 41 · BASE

## Abscisse et vecteur

$A$ et $B$ sont deux points distincts, et $M$ est le point de la droite $(AB)$ d'abscisse $-\frac{3}{2}$ dans le repère $(A, B)$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `3/2` — aussi acceptées : `1.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse de $M$ dans le repère $(A, B)$ donne $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2. $\overrightarrow{MA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AM}$.

CORRECTION

**L'abscisse —**

$\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

**L'opposé —**

$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$k = \frac{3}{2}$ : l'abscisse de $M$ dans le repère $(A, B)$ est le réel $x$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ ; changer le sens du vecteur change le signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3/2 / -1.5` → Ce réel est celui de $\overrightarrow{AM}$ ; on demande $\overrightarrow{MA}$, son opposé.

---

EXERCICE 42 · PRATIQUE

## Une longueur sur un segment

$A$ et $B$ sont deux points tels que $AB = 8$ cm, et $C$ est le point tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Calculer la longueur $BC$ en cm.

**Donne $BC$ en cm.**

**Réponse attendue :** `2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le réel $\frac{3}{4}$ est positif et inférieur à $1$ : où se trouve $C$ ?
2. Calcule d'abord $AC$, puis retire-la de $AB$.

CORRECTION

**La longueur AC —**

$$AC = \frac{3}{4} \times 8 = 6 \text{ cm}$$

**La longueur BC —** $C$ est sur le segment $[AB]$.

$$BC = AB - AC = 8 - 6 = 2 \text{ cm}$$

$BC = 2$ cm : si $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$ avec $0 < x < 1$, le point $C$ est sur le segment $[AB]$ et $AC = x \cdot AB$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → $6$ cm, c'est $AC$. Le point $C$ est entre $A$ et $B$ : $BC = AB - AC$.

---

EXERCICE 43 · RAISONNEMENT

## Retrouver une abscisse

$A$ et $B$ sont deux points distincts, et $N$ est le point tel que $\overrightarrow{BN} = -2\overrightarrow{AB}$. Déterminer l'abscisse de $N$ dans le repère $(A, B)$.

**Donne l'abscisse du point N.**

**Réponse attendue :** `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse de $N$ dans le repère $(A, B)$ est le réel $x$ tel que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB}$.
2. Passe par $B$ : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.

CORRECTION

**Chasles —**

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB}$$

**Réduire —**

$$\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB}$$

L'abscisse de $N$ est $-1$ : $N$ est le symétrique de $B$ par rapport à $A$. On ramène le vecteur à l'origine $A$ du repère par la relation de Chasles.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → $-2$ est le réel de $\overrightarrow{BN}$, pas celui de $\overrightarrow{AN}$ : l'abscisse se lit à partir de l'origine $A$.

3 → Avec Chasles, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ : on ajoute $\overrightarrow{BN}$, on ne le retranche pas.

---

EXERCICE 44 · PRATIQUE

## Développer et réduire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs. Simplifier l'écriture du vecteur $\vec{w} = 3(2\vec{u} - \vec{v}) - 2(\vec{u} - 4\vec{v})$.

**Écris $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par exemple $2u - v$.**

**Réponse attendue :** 4u+5v — aussi acceptées : w=4u+5v · 5v+4u · 4*u+5*v · w=4*u+5*v · \vec{w}=4\vec{u}+5\vec{v} · 4\vec{u}+5\vec{v} · w=5v+4u · 5*v+4*u

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe chaque produit : le réel multiplie chacun des deux vecteurs de la parenthèse.
2. Attention au produit $-2 \times (-4\vec{v})$.

CORRECTION

**Développer —**

$\vec{w} = 6\vec{u} - 3\vec{v} - 2\vec{u} + 8\vec{v}$

**Regrouper —**

$\vec{w} = (6 - 2)\vec{u} + (-3 + 8)\vec{v} = 4\vec{u} + 5\vec{v}$

$\vec{w} = 4\vec{u} + 5\vec{v}$ : on développe avec $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$, puis on regroupe avec $a\vec{u} + b\vec{u} = (a + b)\vec{u}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4u-11v / w=4u-11v` → $-2 \times (-4\vec{v}) = +8\vec{v}$ : deux signes moins donnent un plus.

`4u+7v / w=4u+7v` → Le $3$ multiplie aussi $-\vec{v}$ : $3(2\vec{u} - \vec{v}) = 6\vec{u} - 3\vec{v}$.

---

EXERCICE 45 · BASE

## Un produit nul

$\vec{u}$ est un vecteur non nul et $x$ un réel tel que $(3x + 7)\vec{u} = \vec{0}$. Déterminer la valeur exacte de $x$.

**Donne la valeur exacte de $x$.**

**Réponse attendue :** `-7/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un produit $\alpha\vec{u}$ est nul si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
2. Ici $\vec{u}$ n'est pas nul : que dire du réel $3x + 7$ ?

CORRECTION

**La propriété —** Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul, donc c'est le réel qui est nul.

$3x + 7 = 0$

**Résoudre —**

$x = -\dfrac{7}{3}$

$x = -\dfrac{7}{3}$ : si $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\alpha = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7/3` → On isole $x$ : $3x = -7$, le signe moins reste.

`-3/7` → $3x = -7$ donne $x = \dfrac{-7}{3}$ : on divise par $3$.

`-2.33` / `-2.3` / `-2.333` → On demande la valeur exacte : garde la fraction.

---

EXERCICE 46 · PRATIQUE

## Deux valeurs possibles

$\vec{u}$ est un vecteur non nul et $x$ un réel tel que $(x^2 - 5x)\vec{u} = \vec{0}$. Déterminer les valeurs possibles de $x$.

Donne l'ensemble des valeurs de $x$, par exemple $\{-2\,;5\}$.

**Réponse attendue :** `{0;5}` — aussi acceptées : x = 0 ou x = 5 · x = 5 ou x = 0 · 0 et 5 · {5;0} · S = {0;5} · 0 ou 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul : c'est le réel $x^2 - 5x$ qui est nul.
2. Factorise $x^2 - 5x$, puis applique la règle du produit nul.

CORRECTION

**La propriété —**

$x^2 - 5x = 0$

**Factoriser —**

$x(x - 5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$

$x = 0$ ou $x = 5$ : le produit nul ramène à une équation entre réels, qu'on résout en factorisant.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{5}` / `x = 5` → Diviser par $x$ fait perdre une solution : factorise plutôt $x^2 - 5x = x(x - 5)$.

---

EXERCICE 47 · RAISONNEMENT

## Un réel au carré

$\vec{u}$ est un vecteur non nul et $k$ un réel tel que $k(k\vec{u}) = 9\vec{u}$. Déterminer les valeurs possibles de $k$.

Donne l'ensemble des valeurs de $k$, par exemple $\{-2\,;5\}$.

**Réponse attendue :** `{-3;3}` — aussi acceptées : k = -3 ou k = 3 · k = 3 ou k = -3 · -3 et 3 · {3;-3} · S = {-3;3} · ±3 · k=±3 · 3 et -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La propriété $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ transforme $k(k\vec{u})$.
2. Regroupe tout dans un membre : tu obtiens un produit d'un réel par $\vec{u}$, égal au vecteur nul.

CORRECTION

**Associativité —**

$k(k\vec{u}) = k^2\vec{u}$

**Produit nul —** Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul.

$(k^2 - 9)\vec{u} = \vec{0} \iff k^2 = 9$

**Résoudre —**

$k = -3$ ou $k = 3$

$k = -3$ ou $k = 3$ : on regroupe en un seul produit $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, puis on écrit $\alpha = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{3} / k = 3` → $(-3) \times (-3) = 9$ aussi : l'équation $k^2 = 9$ a deux solutions.

`{9} / k = 9 / {-9;9}` → $k(k\vec{u}) = (k \times k)\vec{u}$ : c'est $k^2$ qui vaut $9$, pas $k$.

---

EXERCICE 48 · BASE

## Colinéaires : trouver le réel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, $\vec{a} = 3\vec{u} - 6\vec{v}$ et $\vec{b} = -\vec{u} + 2\vec{v}$. Trouver le réel $k$ tel que $\vec{a} = k\vec{b}$.

Donne le réel $k$.

**Réponse attendue :** `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare les coefficients de $\vec{u}$ dans $\vec{a}$ et dans $\vec{b}$.
2. Vérifie que le même réel convient pour les coefficients de $\vec{v}$.

CORRECTION

Factoriser —

$\vec{a} = 3\vec{u} - 6\vec{v} = -3(-\vec{u} + 2\vec{v})$

Conclure —

$\vec{a} = -3\vec{b}$

$k = -3$ : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, l'un est le produit de l'autre par un réel.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → $3 \times (-\vec{u}) = -3\vec{u}$, pas $3\vec{u}$ : le réel est négatif.

`-1/3` → $-\dfrac{1}{3}$ donne $\vec{b}$ en fonction de $\vec{a}$ ; on demande $\vec{a} = k\vec{b}$.

---

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

## Trois points alignés

$A$, $B$ et $C$ sont trois points, et $D$ est le point tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CB}$.

Donne le réel $k$.

**Réponse attendue :** `3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Passe par $A$ : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$.
2. Mets $3$ en facteur, puis reconnais $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

CORRECTION

**Chasles —**

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

**Réduire —**

$\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

**Reconnaître CB —** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CB}$

$k = 3$ : $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires, donc $B$, $C$ et $D$ sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ est $\overrightarrow{CB}$, pas $\overrightarrow{BC}$ : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$.

---

EXERCICE 50 · BASE

## Lire des composantes

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan. Donner les composantes du vecteur $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{j} - 5\vec{i}$.

**Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.**

**Réponse attendue :** `(-5;2/3)` — aussi acceptées : (-5,2/3) · u(-5;2/3) · u(-5,2/3) · u=(-5;2/3) · u=(-5,2/3) · -5;2/3 · x=-5;y=2/3 · x=-5 et y=2/3 · x=-5,y=2/3 · (x;y)=(-5;2/3) · (x,y)=(-5,2/3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La première composante est le coefficient de $\vec{i}$, la seconde celui de $\vec{j}$.
2. Ici le terme en $\vec{i}$ est écrit en dernier : ne te fie pas à l'ordre d'écriture.

CORRECTION

**Réordonner —**

$\vec{u} = -5\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$

**Lire —**

$\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Les composantes de $\vec{u}$ sont $-5$ et $\frac{2}{3}$ : dans $x\vec{i} + y\vec{j}$, on lit $x$ puis $y$, quel que soit l'ordre d'écriture.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2/3;-5)` / `(2/3,-5)` → La première composante est le coefficient de $\vec{i}$, même s'il est écrit en second.

---

EXERCICE 51 · PRATIQUE

## Composantes d'une combinaison

$(\vec{i},\vec{j})$ est une base, $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{w}=3\vec{u}-2\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

**Réponse attendue :** `(4;-9)` — aussi acceptées : (4,-9) · w(4;-9) · w(4,-9) · w=(4;-9) · w=(4,-9) · 4;-9 · x=4;y=-9 · x=4 et y=-9 · x=4,y=-9 · (x;y)=(4;-9) · (x,y)=(4,-9)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par leurs expressions, puis développe.
2. Regroupe les termes en $\vec{i}$ et les termes en $\vec{j}$.

CORRECTION

**Développer —**

$\vec{w}=6\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{i}-6\vec{j}$

**Regrouper —**

$\vec{w}=4\vec{i}-9\vec{j}$

**Lire —**

$\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix}$

Les composantes de $\vec{w}$ sont $4$ et $-9$ : on calcule dans la base comme en algèbre, puis on lit les coefficients de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(4;3)` / `(4,3)` → $-2\times 3\vec{j}=-6\vec{j}$ : on retranche $2\vec{v}$ en entier.

`(8;3)` / `(8,3)` → On retranche $2\vec{v}$, on ne l'ajoute pas.

---

EXERCICE 52 · RAISONNEMENT

## Changer de base

$(\vec{i},\vec{j})$ est une base, $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ ; on admet que $(\vec{u},\vec{v})$ est aussi une base. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{w}=5\vec{i}+\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

**Réponse attendue :** `(3;2)` — aussi acceptées : (3,2) · 3;2 · a=3;b=2 · a=3 et b=2 · a=3,b=2 · (a;b)=(3;2) · (a,b)=(3,2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche deux réels $a$ et $b$ tels que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.
2. Développe $a\vec{u}+b\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ et identifie les coefficients.
3. Tu obtiens un système de deux équations : additionne-les.

CORRECTION

**Développer —**

$a\vec{u}+b\vec{v}=(a+b)\vec{i}+(a-b)\vec{j}$

**Identifier —** Les composantes dans une base sont uniques.

$a+b=5 \quad ; \quad a-b=1$

**Résoudre —**

$a=3 \quad ; \quad b=2$

**Conclure —**

$\vec{w}=3\vec{u}+2\vec{v}$

Dans la base $(\vec{u},\vec{v})$, $\vec{w}$ a pour composantes $3$ et $2$ : on identifie les coefficients, car les composantes dans une base sont uniques.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5;1) / (5,1)` → Ce sont les composantes de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ ; on les demande dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

`(2;3) / (2,3)` → La première composante est le coefficient de $\vec{u}$ : $a+b=5$ et $a-b=1$.

---

EXERCICE 53 · PRATIQUE

## Isoler un vecteur

Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}$ a pour composantes $1$ et $-5$, et $\vec{v}$ a pour composantes $3$ et $1$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{w}$ tel que $2\vec{w}-\vec{u}=3\vec{v}$.

**Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.**

**Réponse attendue :** `(5;-1)` — aussi acceptées : (5,-1) · w(5;-1) · w(5,-1) · w=(5;-1) · w=(5,-1) · 5;-1 · x=5;y=-1 · x=5 et y=-1 · x=5,y=-1 · (x;y)=(5;-1) · (x,y)=(5,-1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Isole $\vec{w}$ comme dans une équation : $2\vec{w}=3\vec{v}+\vec{u}$.
2. Calcule les composantes de $3\vec{v}+\vec{u}$, puis multiplie-les par $\dfrac{1}{2}$.

CORRECTION

**Isoler —**

$2\vec{w}=\vec{u}+3\vec{v} \iff \vec{w}=\dfrac{1}{2}(\vec{u}+3\vec{v})$

**Composantes —**

$\vec{u}+3\vec{v}\begin{pmatrix}1+9\\-5+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$

**Diviser par deux —**

$\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

Les composantes de $\vec{w}$ sont $5$ et $-1$ : on isole le vecteur inconnu, puis on calcule composante par composante.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(4;4) / (4,4)` → On ajoute $\vec{u}$ aux deux membres : $2\vec{w}=3\vec{v}+\vec{u}$, pas $3\vec{v}-\vec{u}$.

`(10;-2) / (10,-2)` → Ce sont les composantes de $2\vec{w}$ : il reste à diviser par $2$.

EXERCICE 54 · RAISONNEMENT

## Décomposer sur deux vecteurs

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}$ de composantes $1$ et $2$, $\vec{v}$ de composantes $3$ et $-1$, et $\vec{w}$ de composantes $-1$ et $5$. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Donne le couple $(a; b)$, par exemple $(3\,;-4)$.

**Réponse attendue :** `(2;-1)` — aussi acceptées : (2,-1) · 2;-1 · a=2;b=-1 · a=2 et b=-1 · a=2,b=-1 · (a;b)=(2;-1) · (a,b)=(2,-1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les composantes de $a\vec{u} + b\vec{v}$ en fonction de $a$ et $b$.
2. Égale-les à celles de $\vec{w}$ : tu obtiens un système de deux équations.
3. Tire $b$ de la seconde équation, puis remplace dans la première.

CORRECTION

**Composantes —**

$a\vec{u} + b\vec{v} \begin{pmatrix} a + 3b \\ 2a - b \end{pmatrix}$

**Le système —**

$a + 3b = -1 \quad ; \quad 2a - b = 5$

**Résoudre —** La seconde équation donne $b = 2a - 5$ ; dans la première, $7a - 15 = -1$.

$a = 2 \quad ; \quad b = -1$

$\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ : on égale les composantes, puis on résout le système obtenu.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1;2)` / `(-1,2)` → Le couple demandé est $(a; b)$ : $a$ est le coefficient de $\vec{u}$.

EXERCICE 55 · RAISONNEMENT

## Colinéaires dans une base quelconque

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, $\vec{a} = (m-1)\vec{u} + 2\vec{v}$ et $\vec{b} = 3\vec{u} + m\vec{v}$, où $m$ est un réel. Déterminer les réels $m$ pour que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient colinéaires.

Donne l'ensemble des valeurs de $m$, par exemple $\{-2\,;5\}$.

**Réponse attendue :** `{-2;3}` — aussi acceptées : m = -2 ou m = 3 · m = 3 ou m = -2 · -2 et 3 · {3;-2} · S = {-2;3}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont des composantes dans cette base.
2. Écris que leur déterminant $xy' - x'y$ est nul.
3. Tu obtiens une équation du second degré : calcule son discriminant.

CORRECTION

**Composantes —**

$\vec{a}\begin{pmatrix} m-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b}\begin{pmatrix} 3 \\ m \end{pmatrix}$

**Le déterminant —**

$(m-1) \times m - 3 \times 2 = m^2 - m - 6$

**Résoudre —** Le discriminant vaut $1 + 24 = 25$.

$m^2 - m - 6 = 0 \iff m = -2$ ou $m = 3$

$m = -2$ ou $m = 3$ : deux vecteurs non colinéaires forment une base, et la condition du déterminant nul s'applique dans n'importe quelle base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-3;2}` / `{2;-3}` → Vérifie en remplaçant : pour $m = 2$, $m^2 - m - 6 = -4$, qui n'est pas nul.

---

EXERCICE 56 · BASE

## Coordonnées d'un point

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $M$ est le point tel que $\overrightarrow{OM} = 3(\vec{i} - 2\vec{j}) + 4\vec{j}$. Donner l'ordonnée de $M$.

**Donne l'ordonnée du point M.**

**Réponse attendue :** `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe $3(\vec{i} - 2\vec{j})$, puis regroupe les termes en $\vec{j}$.
2. Les coordonnées de $M$ sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$.

CORRECTION

**Développer —**

$\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{j} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

**Lire —**

$M(3, -2)$

L'ordonnée de $M$ est $-2$ : on réduit $\overrightarrow{OM}$ sous la forme $x\vec{i} + y\vec{j}$, et $y$ est l'ordonnée.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-6` → Tu as oublié le terme $+4\vec{j}$ : regroupe tous les termes en $\vec{j}$.

`3` → $3$ est l'abscisse : l'ordonnée est le coefficient de $\vec{j}$.

---

EXERCICE 57 · PRATIQUE

## De proche en proche

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $A$ est le point tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$, et $B$ le point tel que $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$. Déterminer les coordonnées du point $B$.

**Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.**

**Réponse attendue :** `(-1;5)` — aussi acceptées : (-1,5) · B(-1;5) · B(-1,5) · B=(-1;5) · B=(-1,5) · -1;5 · x=-1;y=5 · x=-1 et y=5 · x=-1,y=5 · (x;y)=(-1;5) · (x,y)=(-1,5)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de $B$ sont les composantes de $\overrightarrow{OB}$.
2. Relation de Chasles : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

**Chasles —**

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

**Réduire —**

$$\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 5\vec{j}$$

**Lire —**

$$B(-1, 5)$$

$B(-1, 5)$ : on obtient $\overrightarrow{OB}$ par Chasles, puis on lit ses composantes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5;-3)` / `(5,-3)` → Par Chasles, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ : on additionne.

`(-3;4)` / `(-3,4)` → Ce sont les composantes de $\overrightarrow{AB}$ : il faut partir de l'origine $O$.

---

EXERCICE 58 · BASE

## Composantes de AB

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(3, -1)$ et $B(-2, 4)$. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

**Réponse attendue :** `(-5;5)` — aussi acceptées : (-5,5) · AB(-5;5) · AB(-5,5) · AB=(-5;5) · AB=(-5,5) · -5;5 · x=-5;y=5 · x=-5 et y=5 · x=-5,y=5 · (x;y)=(-5;5) · (x,y)=(-5,5)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.
2. Soustrais les coordonnées de l'origine $A$ à celles de l'extrémité $B$.

CORRECTION

**La formule —**

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

**Calculer —**

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 4 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $-5$ et $5$ : extrémité moins origine.

---

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5;-5)` / `(5,-5)` → Extrémité moins origine : $x_B - x_A$, pas $x_A - x_B$.

---

EXERCICE 59 · PRATIQUE **Le milieu d'un segment**

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(4, -3)$ et $B(-2, 5)$. Déterminer les coordonnées du milieu $I$ de $[AB]$.

Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

**Réponse attendue :** `(1;1)` — aussi acceptées : (1,1) · I(1;1) · I(1,1) · I=(1;1) · I=(1,1) · 1;1 · x=1;y=1 · x=1 et y=1 · x=1,y=1 · (x;y)=(1;1) · (x,y)=(1,1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $I$ est le milieu de $[AB]$ : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Calcule $\overrightarrow{AB}$, prends-en la moitié, puis ajoute le résultat aux coordonnées de $A$.

CORRECTION

Le vecteur AB —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$$

Le vecteur AI —

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

Le point I —

$$x_I = 4 - 3 = 1 \quad ; \quad y_I = -3 + 4 = 1$$

$I(1, 1)$ : les coordonnées du milieu sont les moyennes des coordonnées des extrémités, ce que redonne $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-3;4)` / `(-3,4)` → Ce sont les composantes de $\overrightarrow{AI}$ : ajoute-les aux coordonnées de $A$.

`(2;2)` / `(2,2)` → La somme des coordonnées doit encore être divisée par $2$.

---

EXERCICE 60 · RAISONNEMENT **Partager un segment**

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1, 3)$ et $B(4, -3)$. Déterminer les coordonnées du point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

**Réponse attendue :** `(3;-1)` — aussi acceptées : (3,-1) · M(3;-1) · M(3,-1) · M=(3;-1) · M=(3,-1) · 3;-1 · x=3;y=-1 · x=3 et y=-1 · x=3,y=-1 · (x;y)=(3;-1) · (x,y)=(3,-1)

---

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$.
2. Regroupe les termes en $\overrightarrow{AM}$ : tu obtiens $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

**Chasles —**

$$\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \iff 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$$

**Composantes —**

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \times 3 \\ \frac{2}{3} \times (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

**Le point M —**

$M(1+2, 3-4) = M(3, -1)$

$M(3, -1)$ : on exprime $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ par Chasles, puis on ajoute ses composantes aux coordonnées de $A$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;-4)` / `(2,-4)` → Ce sont les composantes de $\overrightarrow{AM}$ : ajoute-les aux coordonnées de $A$.

`(7;-9)` / `(7,-9)` → $\overrightarrow{MB}$ n'est pas $\overrightarrow{AB}$ : passe par $A$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$.

---

EXERCICE 61 · BASE **Trois points alignés ?**

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $A(2, 1)$, $B(4, 5)$ et $C(-1, -5)$ sont-ils alignés ?

**Réponds par oui ou par non.**

**Réponse attendue :** `oui` — aussi acceptées : oui alignés · alignés · ils sont alignés · oui ils sont alignés

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2. Calcule leur déterminant $xy' - x'y$ : est-il nul ?

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

**Le déterminant —**

$2 \times (-6) - (-3) \times 4 = -12 + 12 = 0$

Oui : le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et $A$, $B$, $C$ sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

non / pas alignés / non alignés / ils ne sont pas alignés → Calcule le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ : $2 \times (-6) - (-3) \times 4$ est nul.

---

EXERCICE 62 · PRATIQUE

## Rendre deux droites parallèles

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-2, 3)$, $B(1, -3)$, $C(0, 5)$ et $D(3, y)$. Déterminer le réel $y$ pour que les droites $(AB)$ et $(CD)$ soient parallèles.

**Donne la valeur de $y$.**

**Réponse attendue : `-1`**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2. Exprime les composantes de $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $y$, puis écris que le déterminant est nul.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ y-5 \end{pmatrix}$

**Déterminant nul —**

$3(y-5) - 3 \times (-6) = 0 \iff 3y + 3 = 0$

**Résoudre —**

$y = -1$

$y = -1$ : deux droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles quand le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

11 → Le déterminant est $xy' - x'y$ : on retranche le produit $3 \times (-6)$, on ne l'ajoute pas.

---

EXERCICE 63 · PRATIQUE

## Un point de la droite (AB)

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-2, 1)$ et $B(2, 4)$. Déterminer le réel $a$ pour que le point $C(a, a)$ appartienne à la droite $(AB)$.

**Donne la valeur de $a$.**

**Réponse attendue : `10`**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $C$ est sur la droite $(AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
2. Exprime les composantes de $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $a$, puis écris que le déterminant $xy' - x'y$ est nul.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}a+2\\a-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

**Déterminant nul —**

$3(a+2)-4(a-1)=0 \iff 10-a=0$

**Résoudre —**

$a=10$

$a=10$ : le point $C(10,10)$ est sur $(AB)$. Un point $C$ est sur la droite $(AB)$ quand $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2/7` → Le déterminant est $xy'-x'y$ : on retranche le produit $4(a-1)$, on ne l'ajoute pas.

---

EXERCICE 64 · RAISONNEMENT

## Alignés avec l'origine

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(m,3)$ et $B(2,m+1)$, où $m$ est un réel. Déterminer les réels $m$ pour que les points $O$, $A$ et $B$ soient alignés.

**Donne l'ensemble des valeurs de $m$, par exemple $\{-2\,;5\}$.**

**Réponse attendue :** `{-3;2}` — aussi acceptées : m = -3 ou m = 2 · m = 2 ou m = -3 · -3 et 2 · {2;-3} · S = {-3;2}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $O$, $A$ et $B$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.
2. Les composantes de $\overrightarrow{OA}$ sont les coordonnées de $A$.
3. Le déterminant donne une équation du second degré.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\m+1\end{pmatrix}$

**Le déterminant —**

$m(m+1)-2\times 3=m^2+m-6$

**Résoudre —** Le discriminant vaut $1+24=25$.

$m^2+m-6=0 \iff m=-3 \text{ ou } m=2$

$m=-3$ ou $m=2$ : l'alignement de trois points se traduit par un déterminant nul, ici une équation du second degré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2;3} / {3;-2}` → Vérifie en remplaçant : pour $m=3$, $m^2+m-6=6$, qui n'est pas nul.

`{2} / m = 2` → L'équation du second degré a deux solutions : cherche l'autre.

EXERCICE 65 · RAISONNEMENT

## Un trapèze dans un repère

$ABCD$ est un trapèze tel que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, et l'on note $E$ le point d'intersection des droites $(AD)$ et $(BC)$. Déterminer l'ordonnée de $E$ dans ce repère.

**Donne l'ordonnée du point E.**

**Réponse attendue : `-1`**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $D(0,1)$ ; trouve $C$ à l'aide de $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$.
2. $E$ est sur $(AD)$, l'axe des ordonnées : note $E(0,y)$ et écris que $B$, $C$ et $E$ sont alignés.

CORRECTION

**Le point C —**

$\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow C(0+2, 1+0) = C(2,1)$

**Alignement —**

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\ y\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \qquad (-1)\times 1 - 1\times y = 0$

**Résoudre —**

$y = -1$

$E(0,-1)$ : $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$, le point $E$ est le symétrique de $D$ par rapport à $A$. Un repère bien choisi ramène la figure à un calcul de déterminant.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Le déterminant de $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ est $(-1)\times 1 - 1\times y$ : il s'annule pour une ordonnée négative.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

## Un parallélogramme comme repère

$ABCD$ est un parallélogramme. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées du point $E$ tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BD}$.

**Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.**

**Réponse attendue : `(-1;3)`** — aussi acceptées : (-1,3) · E(-1;3) · E(-1,3) · E=(-1;3) · E=(-1,3) · -1;3 · x=-1;y=3 · x=-1 et y=3 · x=-1,y=3 · (x;y)=(-1;3) · (x,y)=(-1,3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $D(0,1)$ ; $C$ s'obtient par $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
2. Calcule les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{BD}$, puis celles de $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BD}$.

CORRECTION

**Les points —**

$A(0,0) \quad B(1,0) \quad C(1,1) \quad D(0,1)$

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

**La somme —**

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1-2\\1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

**Le point E —**

$E(-1,3)$

$E(-1,3)$ : l'origine du repère étant $A$, les coordonnées de $E$ sont les composantes de $\overrightarrow{AE}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3;-1) / (3,-1)` → $\overrightarrow{BD}$ va de $B$ à $D$ : ses composantes sont $x_D - x_B$ et $y_D - y_B$.

---

EXERCICE 67 · BASE

## Norme d'un produit

$\vec{u}$ est un vecteur de norme $4$. Calculer la norme du vecteur $-\frac{5}{2}\vec{u}$.

**Donne la norme de ce vecteur.**

**Réponse attendue : `10`**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La norme de $\alpha\vec{u}$ est $|\alpha|$ fois la norme de $\vec{u}$.
2. Quelle est la valeur absolue de $-\frac{5}{2}$ ?

CORRECTION

**La règle —**

$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$

**Calculer —**

$$\left\|-\frac{5}{2}\vec{u}\right\| = \frac{5}{2} \times 4 = 10$$

La norme vaut $10$ : le réel passe en valeur absolue, une norme n'est jamais négative.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-10` → Une norme est une longueur : elle n'est jamais négative. On multiplie par $\left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$.

---

EXERCICE 68 · PRATIQUE

## Un vecteur unitaire

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire et $\vec{v} = -3\vec{u}$. Calculer la norme du vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$.

**Donne la norme de ce vecteur.**

**Réponse attendue :** 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace $\vec{v}$ par $-3\vec{u}$ et réduis.
2. Un vecteur unitaire a pour norme $1$.

CORRECTION

**Réduire —**

$$2\vec{u} - \vec{v} = 2\vec{u} + 3\vec{u} = 5\vec{u}$$

**La norme —**

$$\|5\vec{u}\| = 5 \times 1 = 5$$

La norme vaut $5$ : on réduit d'abord le vecteur sous la forme $\alpha\vec{u}$, puis on applique $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → $-\vec{v} = -(-3\vec{u}) = 3\vec{u}$ : $2\vec{u} - \vec{v} = 2\vec{u} + 3\vec{u}$.

---

EXERCICE 69 · RAISONNEMENT

## Retrouver le réel

$\vec{u}$ est un vecteur de norme $6$. Déterminer les réels $k$ tels que le vecteur $k\vec{u}$ ait pour norme $15$.

**Donne l'ensemble des valeurs de $k$, par exemple $\{-2\,;5\}$.**

**Réponse attendue :** {-5/2;5/2} — aussi acceptées : k = -5/2 ou k = 5/2 · k = 5/2 ou k = -5/2 · -5/2 et 5/2 · {5/2;-5/2} · S = {-5/2;5/2} · ±5/2 · ±2.5 · {-2.5;2.5}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La norme de $k\vec{u}$ est $|k| \times 6$.
2. Résous l'équation $6|k| = 15$ : combien de réels ont une valeur absolue donnée ?

CORRECTION

**La règle —**

$$\|k\vec{u}\| = |k| \times 6$$

**L'équation —**

$$6|k| = 15 \iff |k| = \frac{5}{2}$$

**Résoudre —**

$$k = -\frac{5}{2} \text{ ou } k = \frac{5}{2}$$

$k = -\frac{5}{2}$ ou $k = \frac{5}{2}$ : la norme ne voit pas le signe du réel, donc deux réels opposés conviennent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{5/2} / {2.5} / k = 5/2` → Le réel $k$ peut être négatif : $|k| = \dfrac{5}{2}$ a deux solutions.

---

EXERCICE 70 · PRATIQUE

## Diagonales d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$ cm et $AD = 3$ cm. Les vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ?

**Réponds par oui ou par non.**

**Réponse attendue :** non — aussi acceptées : pas orthogonaux · non orthogonaux · non pas orthogonaux · ils ne sont pas orthogonaux · non ils ne sont pas orthogonaux · ne sont pas orthogonaux · non, ils ne sont pas orthogonaux · non, pas orthogonaux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris chacun des deux vecteurs comme une diagonale du parallélogramme.
2. Quand les diagonales d'un parallélogramme sont-elles perpendiculaires ?

CORRECTION

**La somme —**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

**La différence —**

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$$

**Conclure —** Les diagonales d'un parallélogramme ne sont perpendiculaires que si c'est un losange ; or $AB \neq AD$.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne sont pas orthogonaux

Non : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ sont les diagonales $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ ; elles ne sont orthogonales que si $AB = AD$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / orthogonaux / ils sont orthogonaux / oui orthogonaux` → Ces vecteurs sont les diagonales du parallélogramme ; elles ne sont perpendiculaires que pour un losange, et ici $AB \neq AD$.

---

EXERCICE 71 · PRATIQUE

## Orthogonalité et Pythagore

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux ; la norme de $\vec{u}$ vaut $5$ et celle de $\vec{v}$ vaut $12$. Calculer la norme du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

**Donne la norme de $\vec{u} + \vec{v}$.**

**Réponse attendue :** 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place $A$, $B$ et $D$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BD} = \vec{v}$ : alors $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$.

2. Le triangle $ABD$ est rectangle en $B$ : applique le théorème de Pythagore.

CORRECTION

**La figure —**

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

**Pythagore —** Le triangle $ABD$ est rectangle en $B$.

$AD^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

**Conclure —**

$AD = 13$

La norme de $\vec{u} + \vec{v}$ vaut $13$ : pour deux vecteurs orthogonaux, le théorème de Pythagore donne la norme de leur somme.

PIÈGES ANTICIPÉS

17 → Les normes ne s'additionnent pas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un angle droit, on applique Pythagore.

169 → $169$ est le carré de la norme : prends la racine carrée.

---

EXERCICE 72 · PRATIQUE

## Un rectangle dans un repère

$ABCD$ est un rectangle ; $M$ est le milieu de $[CD]$ et $N$ le point tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

**Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.**

**Réponse attendue :** `(1/2;-3/4)` — aussi acceptées : (1/2,-3/4) · MN(1/2;-3/4) · MN(1/2,-3/4) · MN=(1/2;-3/4) · MN=(1/2,-3/4) · 1/2;-3/4 · x=1/2;y=-3/4 · x=1/2 et y=-3/4 · x=1/2,y=-3/4 · (x;y)=(1/2;-3/4) · (x,y)=(1/2,-3/4) · (0.5;-0.75) · (0,5;-0,75) · MN(0.5;-0.75) · (0.5,-0.75) · MN(0,5;-0,75)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, $B(1,0)$, $C(1,1)$ et $D(0,1)$.
2. Calcule les coordonnées de $M$ et de $N$, puis extrémité moins origine.

CORRECTION

**Le point M —** $M$ est le milieu de $[CD]$.

$M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

**Le point N —**

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow N\left(1, \frac{1}{4}\right)$

**Le vecteur MN —**

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}$ a pour composantes $\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{4}$ : dans un repère attaché à la figure, on lit les coordonnées des sommets, puis on calcule.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1/2;3/4)` / `(-1/2,3/4)` / `(-0.5;0.75)` → Ce sont les composantes de $\overrightarrow{NM}$ : extrémité $N$ moins origine $M$.

---

EXERCICE 73 · DEFI

## Intersection dans un rectangle

$ABCD$ est un rectangle, $E$ le milieu de $[BC]$ et $F$ le point de $[DC]$ tel que $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Les droites $(AE)$ et $(BF)$ se coupent en $G$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AE}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `3/4` — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place-toi dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et calcule les coordonnées de $E$ et de $F$.
2. $G$ est sur $(AE)$ : $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AE}$ donne les coordonnées de $G$ en fonction de $k$.
3. $G$ est aussi sur $(BF)$ : écris que $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.

CORRECTION

**Les points —**

$$E\left(1, \frac{1}{2}\right) \qquad F\left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

**Le point G —**

$$\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AE} \Rightarrow G\left(k, \frac{k}{2}\right)$$

**Alignement —**

$$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} k-1 \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (k-1)\times 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{k}{2} = 0$$

**Résoudre —**

$$\frac{4k}{3} - 1 = 0 \iff k = \frac{3}{4}$$

$k = \frac{3}{4}$ : on paramètre le point cherché sur une droite, puis on écrit qu'il est sur l'autre par un déterminant nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/8` / `0.375` → $\frac{3}{8}$ est l'ordonnée de $G$ ; on demande le réel $k$ tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AE}$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

3/2 / 1.5 → Attention au signe : $-x'y = -\left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{k}{2} = +\frac{k}{3}$.

---

EXERCICE 74 · PRATIQUE

## Un périmètre exact

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2,-1)$, $B(5,3)$ et $C(-2,2)$. Calculer la valeur exacte du périmètre du triangle $ABC$.

**Donne le périmètre en valeur exacte, sans écrire l'unité.**

**Réponse attendue :** `10+5*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les trois longueurs avec $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
2. Simplifie $\sqrt{50}$ : $50 = 25 \times 2$.

CORRECTION

**La longueur AB —**

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

**La longueur AC —**

$AC = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

**La longueur BC —**

$BC = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

**Le périmètre —**

$AB + AC + BC = 10 + 5\sqrt{2}$

Le périmètre vaut $10 + 5\sqrt{2}$ : on applique la formule de la distance à chaque côté, puis on simplifie les racines.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → $\sqrt{49+1}$ n'est pas $7+1$ : la racine d'une somme n'est pas la somme des racines.

17.07 / 17.1 / 17.071 → On demande la valeur exacte : garde $5\sqrt{2}$.

---

EXERCICE 75 · DEFI

## Norme d'une combinaison

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux ; la norme de $\vec{u}$ vaut $3$ et celle de $\vec{u} + \vec{v}$ vaut $5$. Calculer la valeur exacte de la norme du vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$.

**Donne la norme en valeur exacte.**

**Réponse attendue :** `2*sqrt(13)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec Pythagore, trouve d'abord la norme de $\vec{v}$.
2. $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$ sont encore orthogonaux : quelles sont leurs normes ?

3. Applique de nouveau Pythagore, à $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

CORRECTION

**La norme de v —**

$\|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow \|\vec{v}\| = 4$

**Les normes —**

$\|2\vec{u}\| = 6 \quad ; \quad \|-\vec{v}\| = 4$

**Pythagore —** $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$ sont orthogonaux.

$\|2\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

La norme vaut $2\sqrt{13}$ : des vecteurs colinéaires à deux vecteurs orthogonaux restent orthogonaux, et Pythagore s'applique encore.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$ sont orthogonaux : on applique Pythagore, on ne retranche pas les normes.

`sqrt(10)` → Dans Pythagore, on additionne les carrés des normes : $6^2 + 4^2$.

`7.21 / 7.2 / 7.211` → On demande la valeur exacte : garde la racine.

---

EXERCICE 76 · RAISONNEMENT

## Un vecteur de norme donnée

Dans une base orthonormée, $\vec{u}$ a pour composantes $3$ et $4$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$, de sens contraire à $\vec{u}$ et de norme $15$.

**Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.**

**Réponse attendue :** `(-9;-12)` — aussi acceptées : (-9,-12) · v(-9;-12) · v(-9,-12) · v=(-9;-12) · v=(-9,-12) · -9;-12 · x=-9;y=-12 · x=-9 et y=-12 · x=-9,y=-12 · (x;y)=(-9;-12) · (x,y)=(-9,-12)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule la norme de $\vec{u}$.
2. Cherche $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k < 0$ : la norme de $\vec{v}$ est $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.

CORRECTION

**La norme de u —**

$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

**Le réel —**

$\vec{v} = k\vec{u}, \quad |k| \times 5 = 15, \quad k < 0 \Rightarrow k = -3$

**Les composantes —**

$\vec{v} \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = -3\vec{u}$ : un vecteur colinéaire s'écrit $k\vec{u}$ ; la norme fixe $|k|$, le sens fixe le signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(9;12) / (9,12)` → Le vecteur est de sens contraire à $\vec{u}$ : le réel est négatif.

`(-45;-60) / (-45,-60)` → La norme de $\vec{u}$ est $5$, pas $1$ : on multiplie $\vec{u}$ par $-3$, pas par $-15$.

EXERCICE 77 · DEFI

## Une distance qui donne une équation

Dans un repère orthonormé, on donne $A(x, 2)$ et $B(3, x)$, où $x$ est un réel. Déterminer les réels $x$ pour lesquels $AB = \sqrt{5}$.

Donne l'ensemble des valeurs de $x$, par exemple $\{-2\,;5\}$.

**Réponse attendue :** `{1;4}` — aussi acceptées : x = 1 ou x = 4 · x = 4 ou x = 1 · 1 et 4 · {4;1} · S = {1;4}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $AB^2 = 5$ avec la formule de la distance.
2. Développe les deux carrés : tu obtiens une équation du second degré.
3. Divise par $2$ avant de chercher les solutions.

CORRECTION

**Le carré —**

$$AB^2 = (3 - x)^2 + (x - 2)^2 = 5$$

**Développer —**

$$9 - 6x + x^2 + x^2 - 4x + 4 = 5 \iff 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

**Résoudre —**

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 4$$

$x = 1$ ou $x = 4$ : on travaille avec le carré de la distance, ce qui supprime la racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-4;-1}` / `{-1;-4}` → Vérifie en remplaçant : pour $x = -1$, $AB^2 = 16 + 9 = 25$.

EXERCICE 78 · BASE

## Trouver la composante manquante

Dans une base orthonormée, $\vec{u}$ a pour composantes $-3$ et $5$, et $\vec{v}$ a pour composantes $10$ et $y$. Déterminer le réel $y$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Donne la valeur de $y$.

**Réponse attendue :** 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans une base orthonormée, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
2. Remplace, puis résous l'équation du premier degré en $y$.

CORRECTION

**La condition —**

$$(-3) \times 10 + 5 \times y = 0$$

**Résoudre —**

$$-30 + 5y = 0 \iff y = 6$$

$y = 6$ : l'orthogonalité dans une base orthonormée s'écrit $xx' + yy' = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-6` → $(-3) \times 10 + 5 \times y = 0$ donne $5y = 30$ : le réel est positif.

`-50/3` → Tu as écrit la condition de colinéarité ; l'orthogonalité s'écrit $xx' + yy' = 0$.

---

EXERCICE 79 · PRATIQUE

## Un angle droit en A

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1, 1)$, $B(4, 3)$ et $C(x, 5)$. Déterminer la valeur exacte du réel $x$ pour que les droites $(AB)$ et $(AC)$ soient perpendiculaires.

**Donne la valeur exacte de $x$.**

**Réponse attendue :** `-5/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2. Le repère est orthonormé : écris $xx' + yy' = 0$.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x-1\\4\end{pmatrix}$

**La condition —**

$3(x-1) + 2 \times 4 = 0 \iff 3x + 5 = 0$

**Résoudre —**

$x = -\dfrac{5}{3}$

$x = -\dfrac{5}{3}$ : deux droites sont perpendiculaires quand les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`11/3` → Le produit $2 \times 4$ s'ajoute : $3(x-1) + 8 = 0$.

`-1.67 / -1.7 / -1.66 / -1.667` → On demande la valeur exacte : garde la fraction.

---

EXERCICE 80 · RAISONNEMENT

## Rectangle en C

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2, 1)$, $B(6, 3)$ et $C(3, y)$, où $y$ est un réel. Déterminer les réels $y$ pour que le triangle $ABC$ soit rectangle en $C$.

**Donne l'ensemble des valeurs de $y$, par exemple $\{-2\,;5\}$.**

**Réponse attendue :** `{0;4}` — aussi acceptées : y = 0 ou y = 4 · y = 4 ou y = 0 · 0 et 4 · {4;0} · S = {0;4}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle est rectangle en $C$ si et seulement si $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.
2. Développe $xx' + yy'$ : tu obtiens une équation du second degré en $y$.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\1-y\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\3-y\end{pmatrix}$

**La condition —**

$-3+(1-y)(3-y)=0 \iff y^2-4y=0$

**Factoriser —**

$y(y-4)=0 \iff y=0 \text{ ou } y=4$

$y=0$ ou $y=4$ : l'angle droit en $C$ se traduit par l'orthogonalité de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ; pour ces deux valeurs, les trois points ne sont pas alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4}` / `y = 4` → En divisant par $y$, tu perds une solution : factorise $y^2-4y$.

---

EXERCICE 81 · RAISONNEMENT

## Quel angle est droit ?

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1,1)$, $B(5,3)$ et $C(3,7)$. Le triangle $ABC$ est rectangle : en quel sommet ?

**Donne le nom du sommet de l'angle droit.**

**Réponse attendue :** B — aussi acceptées : en B · rectangle en B · il est rectangle en B · le point B · sommet B · au point B · le triangle est rectangle en B · ABC est rectangle en B · le triangle ABC est rectangle en B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Teste $xx' + yy' = 0$ pour les deux côtés issus de chaque sommet.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

**Au sommet A —**

$4\times 2+2\times 6=20\neq 0$

**Au sommet B —** On utilise $\overrightarrow{BA}$, opposé de $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{BC}$.

$(-4)\times(-2)+(-2)\times 4=8-8=0$

Le triangle est rectangle en $B$ : on cherche le sommet où les deux côtés donnent $xx' + yy' = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`A` / `en A` → En $A$ : $4\times 2+2\times 6=20$, les côtés ne sont pas perpendiculaires.

`C / en C` → En $C$ : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ donnent $(-2)\times 2+(-6)\times(-4)=20$, pas $0$.

---

EXERCICE 82 · DEFI

## Un sommet à coordonnées égales

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1,-4)$ et $B(0,1)$. Déterminer les réels $x$ pour lesquels le triangle $ABC$, avec $C(x,x)$, est rectangle en $C$.

**Donne l'ensemble des valeurs de $x$, par exemple $\{-3\,;4\}$.**

**Réponse attendue :** `{-2;1}` — aussi acceptées : x = -2 ou x = 1 · x = 1 ou x = -2 · -2 et 1 · {1;-2} · S = {-2;1}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle est rectangle en $C$ si $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.
2. Les deux coordonnées de $C$ valent $x$ : exprime les composantes de $\overrightarrow{CA}$ et de $\overrightarrow{CB}$ en fonction de $x$.
3. Développe la condition $xx'+yy'=0$, puis calcule le discriminant.

CORRECTION

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1-x\\-4-x\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-x\\1-x\end{pmatrix}$

**La condition —**

$(1-x)(-x)+(-4-x)(1-x)=0\iff 2x^2+2x-4=0$

**Résoudre —** On divise par $2$ ; le discriminant de $x^2+x-2$ vaut $1+8=9$.

$x=-2$ ou $x=1$

$x=-2$ ou $x=1$ : les points $C(-2,-2)$ et $C(1,1)$ conviennent. L'angle droit en $C$ se traduit par l'orthogonalité de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$, ici une équation du second degré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-1;2} / {2;-1}` → Vérifie en remplaçant : pour $x=2$, $\overrightarrow{CA}(-1,-6)$ et $\overrightarrow{CB}(-2,-1)$ donnent $2+6=8$, qui n'est pas nul.

`{1} / x = 1` → L'équation du second degré a deux solutions : cherche l'autre.

---

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT

## Perpendiculaires dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté $1$ ; $E$ est le milieu de $[BC]$ et $F$ le point de $[DC]$ tel que $DF=x$. Dans le repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, déterminer $x$ pour que les droites $(AE)$ et $(BF)$ soient perpendiculaires.

**Donne la valeur de $x$.**

**Réponse attendue :** `1/2` — aussi acceptées : 0.5

---

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, $B(1,0)$, $C(1,1)$ et $D(0,1)$ ; donne les coordonnées de $E$ et de $F$.
2. Écris $xx' + yy' = 0$ pour les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$.

CORRECTION

**Les points —**

$E\left(1, \frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $F(x,1)$

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x-1\\ 1\end{pmatrix}$

**La condition —**

$$(x-1)\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ : $F$ est le milieu de $[DC]$. Le repère orthonormé lié au carré ramène la perpendicularité à $xx' + yy' = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3/2 / 1.5 → Attention au signe : $\frac{1}{2}\times 1$ s'ajoute à $x-1$.

---

EXERCICE 84 · DEFI **Un triangle rectangle dans un carré**

$ABCD$ est un carré de côté $6$ cm. $M$ est le point de $[AB]$ tel que $AM = 2$ cm, et $N$ le point de $[BC]$ tel que $BN = t$ cm. Déterminer la valeur exacte de $t$ pour que le triangle $DMN$ soit rectangle en $M$.

**Donne la valeur exacte de $t$.**

**Réponse attendue :** 4/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Choisis un repère orthonormé d'origine $A$, d'unité le centimètre, avec $B$ sur l'axe des abscisses et $D$ sur l'axe des ordonnées.
2. Écris les coordonnées de $D$, $M$ et $N$.
3. Le triangle est rectangle en $M$ si $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont orthogonaux.

CORRECTION

**Les points —**

$D(0,6)$ $\quad$ $M(2,0)$ $\quad$ $N(6,t)$

**Les vecteurs —**

$\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}-2\\ 6\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}4\\ t\end{pmatrix}$

**La condition —**

$(-2) \times 4 + 6t = 0 \iff t = \dfrac{4}{3}$

$t = \dfrac{4}{3}$ : on choisit un repère orthonormé lié au carré, et l'angle droit devient l'équation $xx' + yy' = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/4 / 0.75` → $6t = 8$ donne $t = \dfrac{8}{6}$ : on divise par $6$.

`1.33 / 1.3 / 1.333` → On demande la valeur exacte : garde la fraction.

---

EXERCICE 85 · DEFI

## Construire un carré

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1, 2)$ et $B(4, 3)$. $ABCD$ est un carré, et son sommet $D$ a une abscisse inférieure à celle de $A$. Déterminer les coordonnées du point $C$.

Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

**Réponse attendue :** `(3;6)` — aussi acceptées : (3,6) · C(3;6) · C(3,6) · C=(3;6) · C=(3,6) · 3;6 · x=3;y=6 · x=3 et y=6 · x=3,y=6 · (x;y)=(3;6) · (x,y)=(3,6)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de même norme : cherche ses composantes.
2. Deux vecteurs conviennent ; la condition sur l'abscisse de $D$ en élimine un.
3. Dans un carré $ABCD$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

CORRECTION

**Le vecteur AB —**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad AB = \sqrt{10}$$

**Le vecteur AD —** Les vecteurs de composantes $(-1, 3)$ et $(1, -3)$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$ et de norme $\sqrt{10}$ ; l'abscisse de $D$ doit être inférieure à $1$.

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow D(0, 5)$$

**Le point C —**

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow C(4 - 1, 3 + 3) = C(3, 6)$$

$C(3, 6)$ : le côté $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de même norme, puis $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donne $C$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5;0) / (5,0)` → C'est le carré construit de l'autre côté de $(AB)$ : son sommet $D$ aurait une abscisse supérieure à celle de $A$.

`(0;5) / (0,5)` → Ce sont les coordonnées de $D$ ; $C$ s'obtient par $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 86 · PRATIQUE

## Quatre vecteurs, un centre

$ABCD$ est un parallélogramme de centre $O$, et $M$ un point quelconque du plan. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MO}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $O$ est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.
2. Si $I$ est le milieu de $[PQ]$, alors $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MI}$.

CORRECTION

**Diagonale AC —**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$

**Diagonale BD —**

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$

**La somme —**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

$k=4$ : on regroupe les vecteurs deux à deux autour des milieux, avec $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MI}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Chaque diagonale donne $2\overrightarrow{MO}$ : il y en a deux.

`0` → C'est $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ qui est nul, pas $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$.

EXERCICE 87 · RAISONNEMENT

## Un point sur une diagonale

$ABCD$ est un parallélogramme, $E$ le milieu de $[CD]$ et $F$ le point tel que $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BD}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ : $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Calcule $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Reconnais $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

**Le vecteur AE —**

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

**Le vecteur AF —**

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

**Le vecteur BF —**

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$$

$k = \frac{2}{3}$ : $B$, $F$ et $D$ sont alignés. On exprime tout en fonction de deux vecteurs non colinéaires, puis on compare.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → Calcule $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$ en entier : le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ devient $\frac{1}{3} - 1$.

-2/3 → $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$, pas $\overrightarrow{DB}$.

---

EXERCICE 88 · DEFI

## Trois points alignés dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme, $E$ le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $F$ le point tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CF}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `-1/2` — aussi acceptées : -0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
2. Exprime $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Compare les deux expressions.

CORRECTION

**Le vecteur CE —**

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

**Le vecteur CF —**

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{CE}$$

**Conclure —**

$$\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$$

$k = -\frac{1}{2}$ : $C$, $E$ et $F$ sont alignés, et $C$ est entre $E$ et $F$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → $\overrightarrow{CF} = -2\overrightarrow{CE}$ : on demande $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{CF}$.

`1/2` / `0.5` → $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont de sens contraires : $C$ est entre $E$ et $F$.

---

EXERCICE 89 · BASE

## Une propriété du centre de gravité

$G$ est le centre de gravité d'un triangle $ABC$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = k\overrightarrow{GC}$.

Donne le réel $k$.

**Réponse attendue : `-1`**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que vaut $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ ?
2. Isole $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.

CORRECTION

La propriété —

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Isoler —

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}$$

$k = -1$ : le centre de gravité est caractérisé par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → On fait passer $\overrightarrow{GC}$ dans l'autre membre : il change de signe.

---

EXERCICE 90 · PRATIQUE

## Coordonnées du centre de gravité

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-1, 4)$, $B(5, 2)$ et $C(2, -3)$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité $G$ du triangle $ABC$.

Écris le couple entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

**Réponse attendue : `(2;1)`** — aussi acceptées : (2,1) · G(2;1) · G(2,1) · G=(2;1) · G=(2,1) · 2;1 · x=2;y=1 · x=2 et y=1 · x=2,y=1 · (x;y)=(2;1) · (x,y)=(2,1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, passe par l'origine $O$ : $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}$.
2. Tu obtiens $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

CORRECTION

Chasles —

$$3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

**Les coordonnées —**

$$x_G = \frac{-1+5+2}{3} = 2 \quad ; \quad y_G = \frac{4+2-3}{3} = 1$$

**Conclure —**

$G(2,1)$

$G(2,1)$ : les coordonnées du centre de gravité sont les moyennes des coordonnées des trois sommets.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3;3/2) / (3,3/2) / (3;1.5)` → On divise par $3$, le nombre de sommets, pas par $2$.

`(6;3) / (6,3)` → Ce sont les sommes des coordonnées : il reste à diviser par $3$.

---

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

## Le symétrique par rapport à G

$ABC$ est un triangle, $G$ son centre de gravité, $A'$ le milieu de $[BC]$ et $D$ le symétrique de $A$ par rapport à $G$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AA'}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** 4/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $G$ est aux deux tiers de la médiane : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
2. $G$ est le milieu de $[AD]$ : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}$.

CORRECTION

**La médiane —**

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

**Le symétrique —**

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'}$$

$k = \frac{4}{3}$ : le point $D$ est au-delà de $A'$ sur la médiane. On enchaîne $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et la symétrie.

PIÈGES ANTICIPÉS

2/3 → C'est le réel de $\overrightarrow{AG}$ ; $D$ est le symétrique de $A$ par rapport à $G$, donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}$.

2 → $D$ est le symétrique de $A$ par rapport à $G$, pas par rapport à $A'$.

---

EXERCICE 92 · DEFI

## Deux centres de gravité

$ABC$ est un triangle de centre de gravité $G$, et $E$ le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. On note $G'$ le centre de gravité du triangle $BCE$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{GG'} = k\overrightarrow{AE}$.

**Donne le réel $k$.**

> **Réponse attendue :** `1/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour tout point $M$, $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ : prends $M = A$.
2. Fais de même pour $G'$, centre de gravité de $BCE$.
3. $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG}$.

CORRECTION

**Le point G —**

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$$

**Le point G' —**

$$3\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AE}$$

**Le vecteur GG' —**

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$$

$k = \dfrac{1}{3}$ : la relation $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, vraie pour tout point $M$, permet de comparer deux centres de gravité depuis un même point.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/3` → C'est le réel de $\overrightarrow{AG'}$ : il faut encore retrancher $\overrightarrow{AG}$.

`-1/3` → $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG}$ : l'extrémité moins l'origine, dans cet ordre.

---

EXERCICE 93 · DEFI

## La distance au centre de gravité

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ et $C(1, 6)$. Calculer la valeur exacte de la distance $AG$, où $G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.

**Donne $AG$ en valeur exacte.**

> **Réponse attendue :** `10/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les coordonnées du milieu $A'$ de $[BC]$, puis la longueur de la médiane $AA'$.
2. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

CORRECTION

**Le milieu A' —**

$$A'\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = A'(2, 4)$$

**La médiane —**

$AA' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

**La distance AG —**

$AG = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3}$

$AG = \frac{10}{3}$ : $G$ est aux deux tiers de la médiane à partir du sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → $5$ est la longueur de la médiane $AA'$ ; $G$ est aux deux tiers de cette médiane.

`5/3` → $AG$ vaut les deux tiers de la médiane ; c'est $GA'$ qui en vaut le tiers.

`3.33 / 3.3 / 3.333` → On demande la valeur exacte : garde la fraction.

---

EXERCICE 94 · BASE

## Thalès vectoriel

$ABC$ est un triangle tel que $AC = 14$ cm, et $M$ le point de $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$. La parallèle à $(BC)$ passant par $M$ coupe $(AC)$ en $N$. Calculer $AN$ en cm.

**Donne $AN$ en cm.**

**Réponse attendue :** 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le théorème de Thalès vectoriel transporte le réel : $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.
2. Passe aux longueurs.

CORRECTION

**Thalès vectoriel —**

$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

**La longueur —**

$AN = \frac{3}{7} \times 14 = 6$ cm

$AN = 6$ cm : si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → 8 cm, c'est $NC$ : $AN = \frac{3}{7}AC$.

---

EXERCICE 95 · RAISONNEMENT

## Deux parallèles

$ABC$ est un triangle et $M$ le point de $[AB]$ tel que $MB = 2AM$. La parallèle à $(BC)$ passant par $M$ coupe $(AC)$ en $N$, et la parallèle à $(AB)$ passant par $N$ coupe $(BC)$ en $P$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}$.

**Donne le réel $k$.**

> **Réponse attendue :** 1/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $MB = 2AM$ et $M \in [AB]$ : écris $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2. Thalès dans $ABC$ donne $\overrightarrow{AN}$ ; puis Thalès vu depuis le sommet $C$, avec la parallèle $(NP)$ à $(AB)$.
3. $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$.

CORRECTION

**Le point M —**

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

**Le point N —**

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$$

**Le point P —** $(NP) \parallel (AB)$ : Thalès vectoriel depuis le sommet $C$.

$$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

**Le vecteur BP —**

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$k = \frac{1}{3}$ : on applique Thalès vectoriel deux fois, depuis $A$ puis depuis $C$, et Chasles relie les résultats.

PIÈGES ANTICIPÉS

2/3 → C'est le réel de $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$ ; passe à $\overrightarrow{BP}$ par Chasles.

---

EXERCICE 96 · DEFI

## Un losange dans un triangle

$ABC$ est un triangle tel que $AB = 6$ cm et $BC = 4$ cm. $M$ est le point de $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, avec $0 < x < 1$ ; la parallèle à $(BC)$ passant par $M$ coupe $(AC)$ en $N$, et la parallèle à $(AB)$ passant par $N$ coupe $(BC)$ en $P$. Déterminer $x$ pour que $MN = NP$.

**Donne la valeur de $x$.**

> **Réponse attendue :** 3/5 — aussi acceptées : 0.6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Thalès vectoriel donne $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$.
2. Depuis $C$ : $\overrightarrow{CN} = (1-x)\overrightarrow{CA}$, donc $\overrightarrow{NP} = (1-x)\overrightarrow{AB}$.
3. Écris $MN = NP$ avec les longueurs.

CORRECTION

**La longueur MN —**

$\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC} \Rightarrow MN = 4x$

**La longueur NP —**

$\overrightarrow{NP} = (1-x)\overrightarrow{AB} \Rightarrow NP = 6(1-x)$

**L'équation —**

$4x = 6 - 6x \iff x = \dfrac{3}{5}$

$x = \dfrac{3}{5}$ : $BMNP$ est alors un losange. Thalès vectoriel, appliqué depuis deux sommets, donne les deux longueurs en fonction de $x$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/5 / 0.4` → Tu as échangé les rôles : $MN = x \cdot BC$ et $NP = (1-x) \cdot AB$.

---

EXERCICE 97 · PRATIQUE

## Projeter une longueur

Les points $A$, $M$ et $B$ sont alignés, avec $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. On les projette parallèlement à une même direction sur une droite $\Delta$, en $A'$, $M'$ et $B'$, et l'on a $A'B' = 15$ cm. Calculer $A'M'$ en cm.

**Donne $A'M'$ en cm.**

**Réponse attendue :** 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le réel se conserve par projection : $\overrightarrow{A'M'} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{A'B'}$.
2. Passe aux longueurs.

CORRECTION

**La projection —**

$\overrightarrow{A'M'} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{A'B'}$

**La longueur —**

$A'M' = \dfrac{2}{5} \times 15 = 6 \text{ cm}$

$A'M' = 6$ cm : si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → 9 cm, c'est $M'B'$ ; on demande $A'M'$.

`37.5` → Le réel se conserve : on multiplie $A'B'$ par $\dfrac{2}{5}$, on ne divise pas.

---

EXERCICE 98 · RAISONNEMENT

## Un réel à retrouver

Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés, avec $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$. On les projette parallèlement à une direction donnée sur une droite $\Delta$, en $A'$, $B'$ et $C'$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `3/4` — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime d'abord $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
2. Le réel se conserve par projection.

CORRECTION

**Chasles —**

$$\overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \iff 4\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$$

**Le réel —**

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

**Projeter —**

$$\overrightarrow{A'B'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A'C'}$$

$k = \dfrac{3}{4}$ : on exprime d'abord la relation entre les points de départ sous la forme demandée, puis la projection la conserve.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → $3$ relie $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{BC}$ ; on demande $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de $\overrightarrow{A'C'}$.

`1/3` → Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ par Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

---

EXERCICE 99 · DEFI

## Projection et sens

Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés et distincts, avec $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. On les projette parallèlement à une direction donnée sur une droite $\Delta$, en $A'$, $B'$ et $C'$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{B'C'}$.

**Donne le réel $k$.**

**Réponse attendue :** `-3/5` — aussi acceptées : -0.6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Tire $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
2. Exprime $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
3. La projection conserve le réel.

CORRECTION

**Le vecteur AB —**

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

**Le vecteur BC —**

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

**Combiner —**

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2} \times \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$

**Projeter —**

$$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{B'C'}$$

$k = -\dfrac{3}{5}$ : $A$ est entre $B$ et $C$, et la projection conserve le réel, signe compris.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/5 / 0.6` → $A$ est entre $B$ et $C$ : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de sens contraires.

`-3/2 / -1.5` → C'est le réel de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ ; on demande $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de $\overrightarrow{B'C'}$.

---

EXERCICE 100 · DEFI

## Trouver le point aligné

$ABC$ est un triangle, $I$ le milieu de $[AB]$, $J$ le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, et $K$ le point de la droite $(BC)$ tel que $\overrightarrow{BK} = x\overrightarrow{BC}$. Déterminer le réel $x$ pour que $I$, $J$ et $K$ soient alignés.

**Donne la valeur de $x$.**

**Réponse attendue :** 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Choisis le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et calcule les coordonnées de $I$, $J$ et $K$.
2. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$.
3. Écris que le déterminant de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ est nul.

CORRECTION

**Les points —**

$$I\left(\frac{1}{2}, 0\right) \qquad J\left(0, \frac{2}{3}\right) \qquad K(1-x, x)$$

**Les vecteurs —**

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x \\ x \end{pmatrix}$$

**Déterminant nul —**

$$-\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{x}{6} - \frac{1}{3} = 0 \iff x = 2$$

$x = 2$ : $C$ est le milieu de $[BK]$. La méthode analytique : un repère lié au triangle, des coordonnées, un déterminant nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

2/7 → Le déterminant est $xy' - x'y$ : on retranche le second produit, $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right)$.

---

EXERCICE 101 · DEFI

## Une droite qui coupe un côté

$ABC$ est un triangle, $D$ le point tel que $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $E$ le milieu de $[AD]$. La droite $(BE)$ coupe $(AC)$ en $F$. Trouver le réel $k$ tel que $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AC}$.

Donne le réel $k$.

**Réponse attendue :** `1/4` — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Choisis le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ : calcule les coordonnées de $D$, puis de $E$.
2. $F$ est sur $(AC)$ : $F(0, k)$.
3. $B$, $E$ et $F$ sont alignés : écris que le déterminant de $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ est nul.

CORRECTION

Le point D —

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow D\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Le point E —

$$E\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Déterminant nul —

$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix} \qquad -\frac{2}{3}k + \frac{1}{6} = 0 \iff k = \frac{1}{4}$$

$k = \frac{1}{4}$ : le point d'intersection se trouve en écrivant qu'il est sur une droite (coordonnées) et aligné avec deux points de l'autre (déterminant).

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/4 / -0.25` → Attention au signe : $-x'y = -(-1) \times \frac{1}{6} = +\frac{1}{6}$.

---



Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI