– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Droites et plans de l’espace

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU’IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro seize : droites et plans de l'espace. Lyoum bech no5rjou mel plan w nod5lou l la géométrie dans l'espace. Nabdew b tadhkir 3la les solides : le cube, la pyramide w le tétraèdre. Ba3d nchoufou les quatre axiomes, elli koll chay mebni 3lihom. W ba3d net3allmou kifech n3arrfou plan, w chnowa ma3neha coplanaires w sécantes. W nchoufou les positions relatives : deux droites, droite w plan, w deux plans. W nkammlou b la construction mta3 les intersections fi le tétraèdre. Yalla, nabdew.

les solides : le نبداو بتذكير على . la géométrie dans l'espace لـ ندخلو plan w الـ ليوم باش نخرجو من . chapitre numéro seize : droites et plans de l'espace الـ ! عسلامة coplanaires w شنوّة معناها plan ، w بعد نتعلّمو كيفاش نعرّفو w . اللي كل شي مبني عليهم ، les quatre axiomes بعد نشوفو . cube ، la pyramide w le tétraèdre ، يالله . le tétraèdre في les intersections متاع la construction نكمّلو بـ les positions relatives : deux droites ، droite w plan ، w deux plans . w نشوفو sécantes . w نبداو .

Bonjour ! Le chapitre numéro seize : droites et plans de l'espace. Aujourd'hui, nous allons sortir du plan et entrer dans la géométrie dans l'espace. Nous commencerons par un rappel sur les solides : le cube, la pyramide et le tétraèdre. Puis nous verrons les quatre axiomes, sur lesquels tout repose. Ensuite nous apprendrons comment déterminer un plan, et ce que veulent dire coplanaires et sécantes. Nous verrons les positions relatives : deux droites, une droite et un plan, et deux plans. Et nous terminerons par la construction des intersections dans le tétraèdre. Allez, on commence.

Ce chapitre fait entrer dans la **géométrie dans l'espace** : des points, des droites et des plans, et la façon dont ils se rencontrent.

On y travaille dans les solides connus — le cube, la pyramide, le tétraèdre — à partir de quatre axiomes. On apprend à déterminer un plan, à dire si des droites sont coplanaires ou sécantes, à trouver où une droite perce un plan et suivant quelle droite deux plans se coupent. Et on apprend à raisonner sans se fier au dessin.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU’IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Calculer les diagonales, l'aire latérale et le volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle
  > Calculer les diagonales, l'aire latérale et le volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle.
  > *Calculer les diagonales, l'aire latérale et le volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle.*
- Utiliser les quatre axiomes et les trois façons de déterminer un plan
  > Utiliser les quatre axiomes, et les trois façons de déterminer un plan.
  > *Utiliser les quatre axiomes, et les trois façons de déterminer un plan.*
- Reconnaître des points coplanaires, des droites coplanaires et des droites sécantes
  > Reconnaître des points coplanaires, des droites coplanaires et des droites sécantes.
  > *Reconnaître des points coplanaires, des droites coplanaires et des droites sécantes.*
- Déterminer la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, et de deux plans
  > Déterminer la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, et de deux plans.
  > *Déterminer la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, et de deux plans.*
- Construire l'intersection de deux plans et le point où une droite perce un plan
  > Construire l'intersection de deux plans, et le point où une droite perce un plan.
  > *Construire l'intersection de deux plans, et le point où une droite perce un plan.*

1. ACTIVITÉ

Rappels : les solides de l’espace

CE QU’IL DIT

Nabdew b tadhkir 3la les solides. Le cube fih six faces w huit sommets, kif le parallélépipède rectangle. Le tétraèdre fih quatre faces w quatre sommets. La pyramide à base carrée fiha cinq faces w cinq sommets, w le prisme droit à base triangulaire fih cinq faces w six sommets. Fel chapitre hedha el koll, bech nekhdmou fi les solides hedhom : les sommets ya3tiwna des points, les arêtes ya3tiwna des droites, w les faces ya3tiwna des plans.

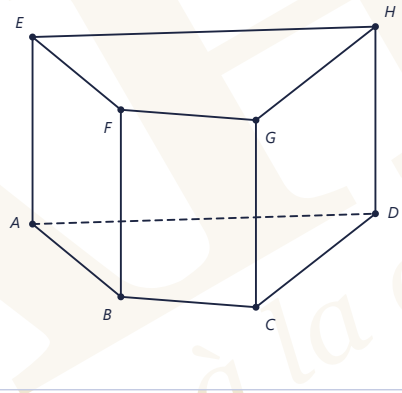
نبداو بتذكير على les solides . le cube فيه six faces w huit sommets ، كيف le parallélépipède rectangle . le tétraèdre فيه quatre faces w quatre sommets . la pyramide à base carrée فيها cinq faces w cinq sommets ، w le prisme droit à base triangulaire فيه cinq faces w six sommets . في الـ chapitre هذا الكل ، باش نخدمو في les solides هاذم : les sommets يعطيونا les points ، les arêtes يعطيونا les faces ، w les droites يعطيونا des plans .

Commençons par un rappel sur les solides. Le cube a six faces et huit sommets, comme le parallélépipède rectangle. Le tétraèdre a quatre faces et quatre sommets. La pyramide à base carrée a cinq faces et cinq sommets, et le prisme droit à base triangulaire a cinq faces et six sommets. Dans tout ce chapitre, nous allons travailler dans ces solides : leurs sommets donnent des points, leurs arêtes des droites, et leurs faces des plans.

On retrouve les solides rencontrés les années précédentes. Pour chacun, on compte ses **faces** et ses **sommets** :

- le **cube** : 6 faces, 8 sommets ;
- le **parallélépipède rectangle** : 6 faces, 8 sommets — un cube est un parallélépipède rectangle particulier ;
- le **tétraèdre** : 4 faces, 4 sommets ;
- le **prisme droit à base triangulaire** : 5 faces, 6 sommets ;
- la **pyramide** à base carrée : 5 faces, 5 sommets — un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Un cube et un parallélépipède rectangle sont aussi des **prismes droits**. Dans un solide, deux faces voisines ont en commun une **arête**, et une arête relie deux **sommets**.



Le prisme droit ABCDEFGH : E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Un prisme droit ABCDEFGH vu en perspective. La base du bas est le quadrilatère ABCD : A à gauche, B et C devant, D à droite. La base du haut EFGH est juste au-dessus : E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. Les arêtes latérales [AE], [BF], [CG] et [DH] sont verticales. L'arête [AD], cachée, est en pointillés.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCDEFGH$ est un prisme droit de bases $ABCD$ et $EFGH$. a) Nommer toutes les faces qui contiennent le sommet A. b) Nommer toutes les faces qui contiennent les sommets A et B. c) Nommer la face qui contient les arêtes $[BC]$ et $[CG]$. d) Trouver les points communs aux faces $ABCD$ et $CGHD$.

Le sommet A — Trois faces se rejoignent au sommet A : la base et deux faces latérales.

$ABCD$, $ABFE$ et $ADHE$

Les sommets A et B — Parmi ces trois faces, deux seulement contiennent aussi B : celles qui ont l'arête $[AB]$ en commun.

$ABCD$ et $ABFE$

Deux arêtes — Les arêtes $[BC]$ et $[CG]$ partent du sommet C : une seule face les contient toutes les deux.

$BCGF$

Deux faces — Les faces $ABCD$ et $CGHD$ sont voisines : leurs points communs sont tous les points de leur arête commune.

$[CD]$

les faces $ABCD$ et $CGHD$ ont en commun l'arête $[CD]$

À ne pas faire : Un cube n'est pas un parallélépipède rectangle — Un cube est un parallélépipède rectangle dont toutes les faces sont des carrés. Un carré est un rectangle particulier : le cube est donc un cas particulier de parallélépipède rectangle.

À ne pas faire : Les faces $ABCD$ et $CGHD$ ont seulement deux points communs, C et D — Elles ont en commun tous les points du segment $[CD]$. Deux faces voisines partagent toute une arête, pas seulement ses deux extrémités.

2. ACTIVITÉ

Pour comprendre : mesure de grandeurs

CE QU'IL DIT

Bech nefhmou, n9isou cube d'arête a. La petite diagonale hiya la diagonale mta3 face : b le théorème de Pythagore, la petite diagonale égale a racine carrée de deux. La grande diagonale tcho99 el cube men sommet lel sommet opposé : la grande diagonale égale a racine carrée de trois. L'aire latérale, ya3ni l'aire mta3 les quatre faces latérales, égale quatre a au carré, w le volume égale a au cube. W fi parallélépipède rectangle de dimensions a, b w c : le volume égale a fois b fois c, w la diagonale égale racine carrée de (a au carré plus b au carré plus c au carré).

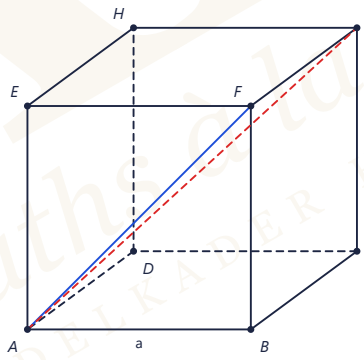
le théorème de Pythagore ، la petite diagonale égale a racine carrée de بـ : face متاع la diagonale هي cube d'arête a . la petite diagonale باش نفهمو ، نقيسو les متاع l'aire يعني ، sommet opposé : la grande diagonale égale a racine carrée de trois . l'aire latérale للـ sommet من cube تشقّ الـ deux . la grande diagonale parallélépipède rectangle de dimensions a ، b w c : le volume égale a fois في quatre faces latérales ، égale quatre a au carré ، w le volume égale a au cube . w . b fois c ، w la diagonale égale racine carrée de (a au carré plus b au carré plus c au carré)

Pour comprendre, mesurons un cube d'arête a. La petite diagonale est la diagonale d'une face : par le théorème de Pythagore, la petite diagonale égale a racine carrée de deux. La grande diagonale traverse le cube d'un sommet au sommet opposé : la grande diagonale égale a racine carrée de trois. L'aire latérale, c'est-à-dire l'aire des quatre faces latérales, égale quatre a au carré, et le volume égale a au cube. Et dans un parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c : le volume égale a fois b fois c, et la diagonale égale racine carrée de (a au carré plus b au carré plus c au carré).

On considère un **cube d'arête** a, où a est un réel strictement positif.

- Une **petite diagonale** est la diagonale d'une face. Une face est un carré de côté a : par le théorème de Pythagore, elle mesure $a\sqrt{2}$.
- Une **grande diagonale** joint deux sommets opposés du cube. Avec une arête et une petite diagonale, elle forme un triangle rectangle : son carré vaut $a^2 + 2a^2 = 3a^2$, donc elle mesure $a\sqrt{3}$.
- L'**aire latérale** est l'aire des quatre faces latérales : $4a^2$.
- Le **volume** est a^3.

Pour un **parallélépipède rectangle** de dimensions a, b et c, dont la base a pour côtés a et b et dont la hauteur est c : l'aire latérale est $2(a+b)c$, le volume est abc et une diagonale mesure $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



En bleu, une petite diagonale ; en rouge, une grande diagonale.

Un cube ABCDEFGH d'arête a, vu en perspective. La face du bas est ABCD : A devant à gauche, B devant à droite, C derrière B, D derrière A. La face du haut est EFGH, avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [AF] de la face avant est tracée en bleu : c'est une petite diagonale. Le segment [AG], en rouge, traverse le cube du sommet A au sommet opposé G : c'est une grande diagonale.

CUBE : PETITE ET GRANDE DIAGONALE

$$a\sqrt{2} \quad ; \quad a\sqrt{3}$$

CUBE : AIRE LATÉRALE ET VOLUME

$$4a^2 \quad ; \quad a^3$$

DIAGONALE DU PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est 22 cm². La somme des longueurs de ses arêtes est 24 cm. Quelle est la longueur d'une diagonale ?

Les aires — On note a, b et c les dimensions. Les six faces vont par deux : leur aire totale est $2(ab+bc+ca)$.

$$2(ab+bc+ca)=22 \quad \text{donc} \quad ab+bc+ca=11$$

Les arêtes — Il y a douze arêtes : quatre de chaque longueur.

$$4(a+b+c)=24 \quad \text{donc} \quad a+b+c=6$$

Une identité — On développe le carré de la somme : il fait apparaître $a^2+b^2+c^2$, le carré de la diagonale d.

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

La diagonale — On remplace par les valeurs trouvées.

$$d^2=6^2-2\times 11=14$$

$$d=\sqrt{14}\ \text{cm}$$

À ne pas faire : La grande diagonale d'un cube d'arête a mesure $a\sqrt{2}$ — La petite diagonale mesure $a\sqrt{2}$, la grande diagonale mesure $a\sqrt{3}$. La diagonale d'une face reste dans cette face ; la grande diagonale traverse le cube : il faut appliquer Pythagore une deuxième fois.

À ne pas faire : L'aire latérale d'un cube d'arête a est $6a^2$ — L'aire latérale est $4a^2$; $6a^2$ est l'aire totale. L'aire latérale ne compte que les quatre faces latérales, sans les deux bases.

3. PROPRIÉTÉ

Les axiomes de base

CE QU'IL DIT

Fi la géométrie dans l'espace, na9blou quatre axiomes men ghir démonstration. Axiome un : par trois points non alignés passe un plan et un seul. Axiome deux : si un plan contient deux points distincts, alors il contient toute la droite passant par ces deux points. Axiome trois : si deux plans distincts ont un point commun, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point. Axiome quatre : tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace. Cheddhom mli7 fi belek : el chapitre el koll mebni 3la les quatre axiomes hedhom.

démonstration . Axiome un : par trois points non alignés passe un plan et un seul . Axiome deux : si un plan contient deux points distincts ، alors il contient toute la droite passant par ces deux points . Axiome trois : si deux plans distincts ont un point commun ، alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point . Axiome quatre : tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace . شدّهم مليح في بالك : الـ chapitre الكل مبني على les quatre axiomes هاذم .

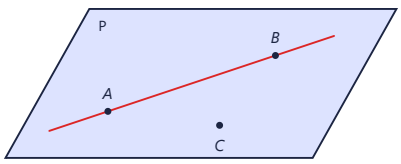
في géométrie dans l'espace ، نقبلو quatre axiomes من غير

En géométrie dans l'espace, on admet quatre axiomes, sans démonstration. Axiome un : par trois points non alignés passe un plan et un seul. Axiome deux : si un plan contient deux points distincts, alors il contient toute la droite passant par ces deux points. Axiome trois : si deux plans distincts ont un point commun, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point. Axiome quatre : tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace. Retiens-les bien : tout le chapitre repose sur ces quatre axiomes.

En géométrie dans l'espace, on admet les quatre axiomes suivants.

- **Axiome 1.** Par trois points non alignés passe un plan et un seul.
- **Axiome 2.** Si un plan contient deux points distincts, alors il contient toute la droite passant par ces deux points.
- **Axiome 3.** Si deux plans distincts ont un point commun, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point.
- **Axiome 4.** Tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace.

Le plan qui passe par trois points non alignés A, B et C se note (ABC).



Le plan P passe par A, B et C ; il contient toute la droite (AB).

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Trois points non alignés A, B et C sont marqués dans ce plan. La droite (AB), tracée en rouge, est tout entière dans le plan.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ est un tétraèdre et I est un point de l'arête $[AB]$. a) Justifier que la droite (CI) est contenue dans le plan (ABC). b) Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (ABD).

Le point I — Le plan (ABC) contient les points A et B : d'après l'axiome 2, il contient toute la droite (AB), donc le point I.

$I \in (ABC)$

La droite (CI) — C et I sont deux points distincts du plan (ABC) : d'après l'axiome 2, ce plan contient toute la droite (CI).

$(CI) \subset (ABC)$

Deux plans — Les plans (ABC) et (ABD) sont distincts, car D n'est pas dans le plan (ABC), et ils ont le point A en commun : d'après l'axiome 3, ils sont sécants suivant une droite.

$A \in (ABC) \quad \text{et} \quad A \in (ABD)$

La droite — Le point B est lui aussi commun aux deux plans : la droite d'intersection passe par A et par B.

$(ABC) \cap (ABD) = (AB)$

la droite (CI) est contenue dans le plan (ABC) ; les plans (ABC) et (ABD) se coupent suivant la droite (AB)

À ne pas faire : Par trois points passe toujours un plan et un seul — Par trois points **non alignés** passe un plan et un seul. Si les trois points sont alignés, une infinité de plans les contiennent : tous ceux qui contiennent leur droite.

À ne pas faire : Deux plans distincts peuvent avoir un seul point commun — Deux plans distincts qui ont un point commun ont toute une droite en commun. C'est l'axiome 3 : dès qu'il y a un point commun, l'intersection est une droite passant par ce point.

---

4. APPLICATION

Pour comprendre : trois points alignés

CE QU'IL DIT

Bech nefhmou les axiomes fi chnowa yenf3ou, ne5dhou tétraèdre ABCD, w trois points I, J w K 3la les arêtes [DA], [DB] w [DC]. La droite (JK) coupe la droite (BC) en L, la droite (KI) coupe la droite (CA) en M, w la droite (IJ) coupe la droite (AB) en N. Les points L, M w N mawjoudin fi le plan (ABC), w mawjoudin zeda fi le plan (IJK). W zouz plans distincts 3andhom point commun, yetle9aw fi droite. Donc L, M w N 3la el droite hedhi : les trois points alignés. Chedd et-tari9a : bech tbayyen elli des points alignés fi l'espace, bayyen elli houma fi zouz plans distincts.

les arêtes D A ، D B w D C . la droite J K coupe la droite B C en L ، la على tétraèdre A B C D ، w trois points I ، J w K ناخذو ، ينفعو شنوّة في les axiomes باش نفهمو le plan I J K . موجودين زادة في le plan A B C ، w موجودين في droite K I coupe la droite C A en M ، w la droite I J coupe la droite A B en N . les points L ، M w N des باش تبيّن اللي : شدّ الطريقة . les trois points alignés : هاذي droite الـ على droite . donc L ، M w N في ، يتلاقاو point commun عندهم plans distincts زوز w plans distincts في l'espace في points alignés ، بيّن اللي هوما في زوز .

Pour comprendre à quoi servent les axiomes, prenons un tétraèdre A B C D, et trois points I, J et K sur les arêtes D A, D B et D C. La droite J K coupe la droite B C en L, la droite K I coupe la droite C A en M, et la droite I J coupe la droite A B en N. Les points L, M et N sont dans le plan A B C, et ils sont aussi dans le plan I J K. Or deux plans distincts qui ont un point commun se coupent suivant une droite. Donc L, M et N sont sur cette droite : les trois points sont alignés. Retiens la méthode : pour montrer que des points sont alignés dans l'espace, montre qu'ils sont dans deux plans distincts.

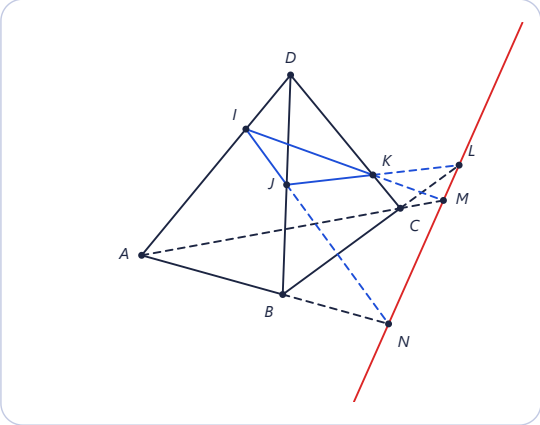
Soit $ABCD$ un tétraèdre et I, J, K trois points appartenant respectivement aux arêtes $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$, distincts des sommets, tels que :

- les droites (JK) et (BC) se coupent en un point L ;
- les droites (KI) et (CA) se coupent en un point M ;
- les droites (IJ) et (AB) se coupent en un point N.

Les points L, M et N appartiennent à la fois au plan (ABC) et au plan (IJK). Ces deux plans sont distincts : d'après l'axiome 3, leur intersection est une droite, et L, M, N sont sur cette droite.

À retenir. Pour montrer que des points de l'espace sont alignés, on montre qu'ils appartiennent à deux plans distincts.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMA



L, M et N sont alignés : ils sont dans le plan (ABC) et dans le plan (IJK).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet D est en haut, A à gauche, B en bas devant, C à droite ; l'arête [AC], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [DA], J sur l'arête [DB] et K sur l'arête [DC]. Le triangle IJK est tracé en bleu. La droite (JK) prolongée coupe la droite (BC) en L, la droite (KI) coupe la droite (CA) en M et la droite (IJ) coupe la droite (AB) en N. Les trois points L, M et N sont sur une même droite, tracée en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, justifier que les points L, M et N sont alignés, puis en déduire que les droites (BC), (KJ) et (MN) sont concourantes.

Dans le plan (ABC) — L est sur la droite (BC), M sur la droite (CA) et N sur la droite (AB). Ces trois droites sont contenues dans le plan (ABC), d'après l'axiome 2.

$$L,\ M,\ N \in (ABC)$$

Dans le plan (IJK) — L est aussi sur la droite (JK), M sur la droite (KI) et N sur la droite (IJ) : ces trois droites sont contenues dans le plan (IJK).

$$L,\ M,\ N \in (IJK)$$

Une droite — Le point I n'est pas dans le plan (ABC) : les plans (ABC) et (IJK) sont distincts. Ils ont un point commun, donc ils sont sécants suivant une droite, et cette droite contient L, M et N.

$$L,\ M \text{ et } N \text{ sont alignés}$$

Concourantes — Le point L est sur (BC) et sur (KJ) par définition, et il est sur (MN) puisque L, M, N sont alignés : les trois droites passent par L.

$$L \in (BC),\ L \in (KJ) \text{ et } L \in (MN)$$

$$(BC),\ (KJ) \text{ et } (MN) \text{ sont concourantes en } L$$

À ne pas faire : L, M et N sont alignés parce qu'on le voit sur la figure — L, M et N sont alignés parce qu'ils appartiennent aux deux plans distincts (ABC) et (IJK). Une figure en perspective ne prouve rien : c'est l'axiome 3 qui donne la droite commune aux deux plans.

5. THÉORÈME

Un plan par une droite et un point

CE QU'IL DIT

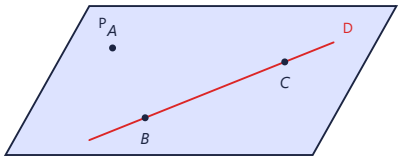
3andna droite D, w point A elli ma houch 3la el droite hedhi. El théorème y9oul : il existe un plan et un seul contenant la droite D et le point A. 3lech ? Ne5dhou deux points distincts B w C 3la la droite D. A, B w C mouch alignés, donc b l'axiome un, yet3adda menhom plan wa7ed bark. W el plan hedha fih B w C, donc b l'axiome deux, fih la droite D el koll. Thabbet mli7 : el point A lezem ma ykounch 3la la droite D.

عندنا point A ، w droite D اللي ما هوش على الـ droite هاذي . théorème يقول : il existe un plan et un seul contenant la droite D et le point A . علاش ؟ ناخذو deux points distincts B w C على A ، B w C . la droite D موش ، donc alignés ، l'axiome un بـ . plan واحد برك ، يتعدّى منهم plan الـ w . هذا فيه plan ، donc B w C بـ l'axiome . deux ، فيه la droite D الكل . ثبّت مليح : الـ point A لازم ما يكونش على la droite D .

On a une droite D, et un point A qui n'est pas sur cette droite. Le théorème dit : il existe un plan et un seul contenant la droite D et le point A. Pourquoi ? Prenons deux points distincts B et C sur la droite D. A, B et C ne sont pas alignés, donc, par l'axiome un, il passe par eux un seul plan. Et ce plan contient B et C, donc, par l'axiome deux, il contient toute la droite D. Fais bien attention : le point A ne doit pas être sur la droite D.

Soit D une droite et A un point n'appartenant pas à cette droite.

Il existe un plan et un seul contenant la droite D et le point A.



Le plan (ABC) contient la droite D et le point A.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Une droite D est tracée en rouge dans ce plan ; deux points B et C sont marqués sur cette droite. Un point A, qui n'est pas sur la droite D, est marqué dans le plan.

DÉMONSTRATION

On choisit deux points distincts B et C sur la droite D. Comme A n'appartient pas à D, les points A, B et C ne sont pas alignés : d'après l'axiome 1, il passe par eux un plan et un seul, le plan (ABC).

Ce plan contient B et C : d'après l'axiome 2, il contient toute la droite (BC), c'est-à-dire D. Il contient donc D et A.

Inversement, un plan qui contient D et A contient les trois points A, B et C : c'est le plan (ABC). Il n'y en a donc qu'un seul.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un tétraèdre $ABCD$, nommer le plan déterminé par la droite (CD) et le point A, puis le plan déterminé par la droite (AB) et le point D.

La droite (CD) et A — Le point A n'est pas sur la droite (CD) : il existe un seul plan qui contient (CD) et A. Ce plan passe par A, C et D.
(ACD)

La droite (AB) et D — De même, D n'est pas sur la droite (AB) : le seul plan qui contient (AB) et D passe par A, B et D.
(ABD)

(ACD) ; (ABD)

À ne pas faire : Une droite et un point déterminent toujours un seul plan — Une droite et un point **n'appartenant pas à cette droite** déterminent un seul plan. Si le point est sur la droite, tous les plans qui contiennent la droite conviennent : il y en a une infinité.

---

6. DÉFINITION

Points coplanaires, droites coplanaires

CE QU'IL DIT

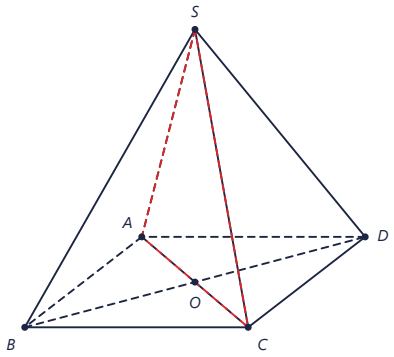
N9oulou elli des points coplanaires ki ykounou el koll fi nafs el plan. W kif kif, des droites coplanaires ki ykounou el koll fi nafs el plan. Trois points dima coplanaires. Ama quatre points, mouch dima : les quatre sommets mta3 tétraèdre mouch coplanaires. Bech ta3ref, lawwej 3la el plan elli yet3adda men trois points menhom, w chouf le quatrième point mawjoud fih walla le.

ديما plan . trois points الـ نفس في الكل يكونو كي des droites coplanaires ، كيف كيف plan . w الـ نفس في الكل يكونو كي des points coplanaires اللي نقولو
، منهم trois points من يتعدّى اللي plan الـ على لوّج ، تعرف باش . coplanaires موش tétraèdre متاع les quatre sommets : ديما موش ، quatre points أما . coplanaires
. لا ولّا فيه موجود le quatrième point شوف w

On dit que des points sont coplanaires lorsqu'ils sont tous dans un même plan. De même, des droites sont coplanaires lorsqu'elles sont toutes dans un même plan. Trois points sont toujours coplanaires. Mais quatre points, pas toujours : les quatre sommets d'un tétraèdre ne sont pas coplanaires. Pour le savoir, cherche le plan qui passe par trois de ces points, et regarde si le quatrième point lui appartient ou non.

- On dit que des points de l'espace sont **coplanaires** lorsqu'ils sont contenus dans un même plan.
- On dit que des droites de l'espace sont **coplanaires** lorsqu'elles sont contenues dans un même plan.

Trois points sont toujours coplanaires. Pour **quatre points**, il faut vérifier : on cherche le plan qui passe par trois d'entre eux, puis on regarde si le quatrième lui appartient.



O est le point d'intersection des diagonales de la base.

Une pyramide SABCD vue en perspective. La base ABCD est dessinée comme un parallélogramme : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche. Les diagonales [AC] et [BD] de la base, en pointillés, se coupent en O. Le sommet S est au-dessus de la base. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés. Le triangle SAC, qui contient le point O, est tracé en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la pyramide $SABCD$ de la figure, O est le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de la base. a) Les points A, O, C et S sont-ils dans un même plan ? b) Les points A, O, D et S sont-ils dans un même plan ? c) Les droites (OB) et (AD) sont-elles contenues dans un même plan ? d) Les droites (CS) et (AD) sont-elles contenues dans un même plan ?

A, O, C et S — Le point O est sur la droite (AC), et la droite (AC) est contenue dans le plan (SAC) : les quatre points sont dans le plan (SAC).

a) oui

A, O, D et S — Les points A, O et D ne sont pas alignés : le seul plan qui les contient est le plan de la base. Or le sommet S n'est pas dans le plan de la base.

b) non

(OB) et (AD) — Les points O, B, A et D sont tous dans le plan de la base : les deux droites y sont contenues, d'après l'axiome 2.

c) oui

(CS) et (AD) — Un plan qui contiendrait ces deux droites contiendrait A, D et C : ce serait le plan de la base, et il contiendrait S. C'est impossible.

d) non

a) oui ; b) non ; c) oui ; d) non

À ne pas faire : Quatre points sont toujours coplanaires — Trois points sont toujours coplanaires ; quatre points ne le sont pas toujours. Les quatre sommets d'un tétraèdre ne sont pas dans un même plan.

7. EXEMPLE

Exemple : coplanaires ou non ?

CE QU'IL DIT

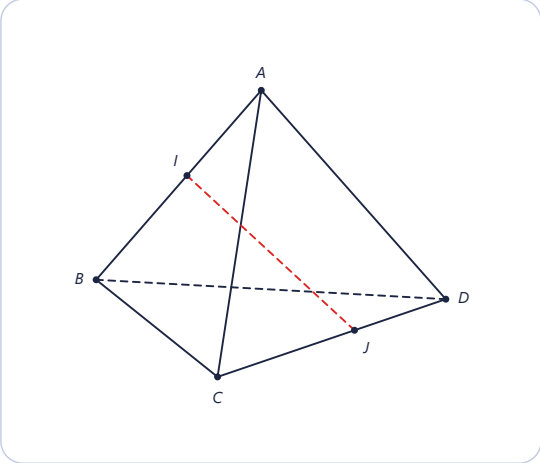
Ne5dhou exemple. 3andna tétraèdre ABCD, point I 3la l'arête [AB], w point J 3la l'arête [CD]. La droite (IJ) w la droite (BC), coplanaires walla le ? El plan el wa7id elli fih la droite (BC) w le point J houwa le plan (BCD). Ama le point I mouch fi le plan (BCD). Donc la droite (IJ) w la droite (BC) mouch coplanaires. W la droite (IJ) w la droite (CD) ? Hedhom yetle9aw fi J, donc coplanaires. Thabbet mli7 : 3la el dessin, zouz droites ynajjmou ybenou metle9in, w houma fi l'espace ma yetle9awch.

exemple ناخذو . عندنا point I ، tétraèdre A B C D على point J ، w point J على l'arête A B ، coplanaires على l'arête C D . la droite I J w la droite B C ولّا لا ؟ الـ plan الوحيد اللي
فيه droite B C w le point J هو la droite B C D . le plan B C D . أما le point I في موش le plan B C D . donc la droite I J w la droite B C موش la droite I J w la droite B C coplanaires .
ماذم يتلاقاو في droites ، donc coplanaires . J ، droite C D ؟ هاذم يتلاقاو في droites ، زوز dessin الـ على : ثبّت مليح . J ، donc coplanaires
ما يتلاقاوش . l'espace في هوما w ، ينجّمو يبانو متلاقين

Prenons un exemple. On a un tétraèdre A B C D, un point I sur l'arête A B, et un point J sur l'arête C D. La droite I J et la droite B C sont-elles coplanaires ? Le seul plan qui contient la droite B C et le point J est le plan B C D. Mais le point I n'est pas dans le plan B C D. Donc la droite I J et la droite B C ne sont pas coplanaires. Et la droite I J et la droite C D ? Elles se coupent en J, donc elles sont coplanaires. Fais bien attention : sur le dessin, deux droites peuvent sembler se croiser alors que, dans l'espace, elles ne se rencontrent pas.

Soient $ABCD$ un tétraèdre, I un point de l'arête $[AB]$ distinct de A et de B, et J un point de l'arête $[CD]$ distinct de C et de D.

Pour savoir si deux droites sont coplanaires, on cherche un plan qui contient l'une des deux et un point de l'autre, puis on regarde si l'autre droite est tout entière dans ce plan.



I est sur [AB], J est sur [CD].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [AB], entre A et B. Le point J est sur l'arête [CD], entre C et D. Le segment [IJ], tracé en rouge et en pointillés, traverse l'intérieur du tétraèdre.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Les droites (IJ) et (BC) sont-elles coplanaires ? b) Les droites (IJ) et (CD) sont-elles coplanaires ? c) Les points I, J, A et C sont-ils coplanaires ? d) Les points I, A, B et D sont-ils coplanaires ?

(IJ) et (BC) — Le seul plan qui contient la droite (BC) et le point J est le plan (BCD). Or I est sur (AB) et distinct de B : il n'est pas dans le plan (BCD).

a) non

(IJ) et (CD) — Le point J est sur la droite (CD) : les deux droites se coupent en J. Elles sont contenues dans le plan qui passe par I, C et D.

b) oui

I, J, A et C — Le plan qui passe par I, A et C est le plan (ABC). Or J est sur (CD) et distinct de C : il n'est pas dans le plan (ABC).

c) non

I, A, B et D — Le point I est sur la droite (AB), qui est contenue dans le plan (ABD).

d) oui

a) non ; b) oui ; c) non ; d) oui

À ne pas faire : Sur la figure, $[IJ]$ croise l'arête $[AC]$: les droites (IJ) et (AC) sont sécantes — Les droites (IJ) et (AC) ne sont pas coplanaires : elles n'ont aucun point commun. En perspective, deux droites non coplanaires peuvent se croiser sur le dessin sans se rencontrer dans l'espace.

8. ACTIVITÉ

Pour comprendre : deux droites dans l'espace

CE QU'IL DIT

Bech nefhmou, nchoufou trois figures, w fi koll wa7da 3andna zouz droites D w D prime. Fi la figure un, la droite D prime fi plan, w la droite D tcho99 el plan hedha fi point elli mouch 3la D prime : el deux droites mouch coplanaires, w ma 3andhom 7atta point commun. Fi la figure deux, el deux droites fi nafs el plan w yetle9aw fi point A. W fi la figure trois, el deux droites fi nafs el plan w parallèles. Thabbet mli7 : fi l'espace, zouz droites ma 3andhomch point commun, mouch bedh-dharoura parallèles. Ynajjmou ykounou mouch coplanaires.

باش نفهمو ، نشوفو trois figures في كل وحدة عندنا زوز droites D w D prime . في la figure un ، la droite D prime في la droite D ، w plan تشقّ الـ plan هذا في . في la figure deux ، الـ deux droites في نفس الـ plan w يتلاقاو point commun حتّى ما عندهم coplanaires ، w موش deux droites الـ : D prime على موش اللي point A . w في la figure trois في الـ deux droites في نفس الـ plan w parallèles . ثبّت مليح : l'espace في ، زوز droites ما عندهمش point commun ، موش بالضرورة . ينجّمو يكونو موش coplanaires . parallèles

Pour comprendre, regardons trois figures ; dans chacune, on a deux droites D et D prime. Dans la figure un, la droite D prime est dans un plan, et la droite D traverse ce plan en un point qui n'est pas sur D prime : les deux droites ne sont pas coplanaires, et elles n'ont aucun point commun. Dans la figure deux, les deux droites sont dans le même plan et se coupent en un point A. Et dans la figure trois, les deux droites sont dans le même plan et sont parallèles. Fais bien attention : dans l'espace, deux droites qui n'ont pas de point commun ne sont pas forcément parallèles. Elles peuvent être non coplanaires.

On observe trois figures. Dans chacune, on se demande si les droites D et D' sont coplanaires, et on cherche $D \cap D'$.

- **Fig. I.** La droite D' est dans un plan, et la droite D perce ce plan en un point qui n'est pas sur D' : D et D' ne sont **pas coplanaires**, et $D \cap D' = \varnothing$.
- **Fig. II.** D et D' sont dans un même plan et se coupent en un point A : elles sont coplanaires, et $D \cap D' = \{A\}$.
- **Fig. III.** D et D' sont dans un même plan et sont parallèles : elles sont coplanaires, et $D \cap D' = \varnothing$.

Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont donc pas forcément parallèles : elles peuvent être non coplanaires.

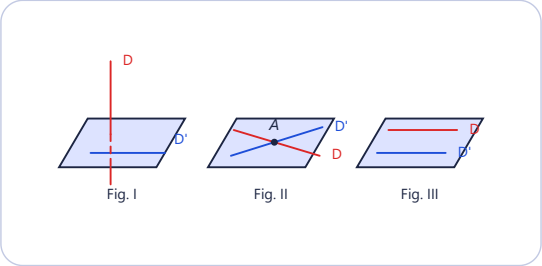


Fig. I : non coplanaires. Fig. II : sécantes. Fig. III : parallèles.

Trois figures côte à côte, chacune avec un plan dessiné comme un parallélogramme. Figure I : la droite D' est tracée dans le plan, et la droite D, verticale, traverse le plan en un point qui n'est pas sur D'. Figure II : les droites D et D' sont toutes les deux dans le plan et se coupent en un point A. Figure III : les droites D et D' sont toutes les deux dans le plan et sont parallèles.

EXEMPLE TRAITÉ

Pour chacune des trois figures, dire si les droites D et D' sont coplanaires, et déterminer $D \cap D'$.

Première figure — Aucun plan ne contient à la fois D et D' : elles ne sont pas coplanaires, et elles n'ont aucun point commun.

$D \cap D' = \varnothing$

Deuxième figure — Les deux droites sont dans le même plan et se coupent en A.

$D \cap D' = \{A\}$

Troisième figure — Les deux droites sont dans le même plan et sont parallèles : aucun point commun.

$D \cap D' = \varnothing$

Première figure : non coplanaires ; deuxième et troisième figures : coplanaires

À ne pas faire : $D \cap D' = \varnothing$, donc D et D' sont parallèles — $D \cap D' = \varnothing$, donc D et D' sont parallèles **ou** non coplanaires. Dans le plan, deux droites sans point commun sont parallèles ; dans l'espace, il existe un troisième cas : les droites non coplanaires.

9. DÉFINITION

Droites sécantes

CE QU'IL DIT

Et-ta3rif : n9oulou elli deux droites coplanaires D w D prime sécantes, ki l'intersection mte3hom tkoun point wa7ed. Donc deux droites sécantes dima coplanaires. Bech tbayyen elli zouz droites sécantes, bayyen 9bal elli houma fi nafs el plan, w ba3d bayyen elli fel plan hedha mouch parallèles. Mathalan fi le cube, la droite (CD) w la droite (CD') sécantes en C. Ama la droite (AB) w la droite (CC') mouch coplanaires : la sécantes la parallèles.

التعريف : نقولو اللي deux droites coplanaires D w D prime sécantes ، كي l'intersection متاعهم تكون point واحد . donc deux droites sécantes ديما coplanaires .

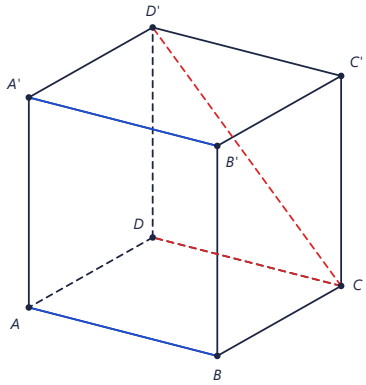
باش تبيّن اللي زوز droites sécantes ، بيّن قْبَلْ اللي هوما في نفس الـ plan ، w بعد بيّن اللي في الـ plan هذا موش parallèles . مثلاً في le cube ، la droite C D w la droite

أما . C D prime sécantes en C la droite A B w la droite C C prime موش coplanaires : لا sécantes لا parallèles .

La définition : on dit que deux droites coplanaires D et D prime sont sécantes lorsque leur intersection est un seul point. Donc deux droites sécantes sont toujours coplanaires. Pour montrer que deux droites sont sécantes, montre d'abord qu'elles sont dans un même plan, puis que, dans ce plan, elles ne sont pas parallèles. Par exemple, dans le cube, la droite C D et la droite C D prime sont sécantes en C. Mais la droite A B et la droite C C prime ne sont pas coplanaires : elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

On dit que deux droites coplanaires D et D' sont **sécantes** lorsque leur intersection est un point.

Deux droites sécantes sont donc toujours coplanaires. Pour montrer que deux droites sont sécantes, on montre qu'elles sont dans un même plan, puis, dans ce plan, qu'elles ne sont pas parallèles.



En bleu, (AB) et (A'B') ; en rouge, (CD) et (CD').

Un cube ABCDA'B'C'D' vu en perspective. La face du bas est ABCD : A devant à gauche, B devant, C à droite, D derrière. La face du haut est A'B'C'D', avec A' au-dessus de A, B' au-dessus de B, C' au-dessus de C et D' au-dessus de D. Les arêtes cachées [DA], [DC] et [DD'] sont en pointillés. Les droites (AB) et (A'B') sont en bleu ; les droites (CD) et (CD') sont en rouge et se coupent en C.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, $ABCDA'B'C'D'$ est un cube. a) Déterminer la position relative des droites (AB) et $(A'B')$. b) Déterminer la position relative des droites (CD) et (CD'). c) Citer deux droites non coplanaires.

Deux côtés opposés — Ces deux droites sont dans le plan de la face $ABB'A'$, qui est un carré : elles portent deux côtés opposés. Elles sont coplanaires et parallèles.

a) coplanaires et parallèles

Deux droites issues de C — Ces deux droites sont distinctes et passent toutes les deux par C : leur intersection est le point C.

b) sécantes en C

Non coplanaires — La droite (AB) est dans le plan (ABC). La droite (CC') perce ce plan en C, et C n'est pas sur (AB) : aucun plan ne contient ces deux droites.

c) (AB) et (CC')

(AB) et (CC') ne sont pas coplanaires

À ne pas faire : Dans le cube, (AB) et (CC') ne se coupent pas : elles sont parallèles — (AB) et (CC') ne sont pas coplanaires : elles ne sont ni sécantes ni parallèles. Deux droites parallèles sont dans un même plan ; or aucun plan ne contient à la fois (AB) et (CC').

10. THÉORÈME

Un plan par deux droites sécantes

CE QU'IL DIT

3andna deux droites sécantes D w D prime. El théorème y9oul : il existe un plan et un seul contenant les droites D et D prime. 3lech ? Nsammiw A le point d'intersection, w ne5dhou point B 3la D w point C 3la D prime. A, B w C mouch alignés, donc yet3adda menhom plan wa7ed bark, w b l'axiome deux el plan hedha fih el deux droites. El 7asel, 3andna trois façons bech n3arrfou plan : trois points non alignés, walla droite w point elli mouch 3liha, walla deux droites sécantes.

عندنا deux droites sécantes D w D prime . il existe un plan et un seul contenant les droites D et D prime : يقول théorème الـ . علاش ؟ نسمّيو A le point d'intersection ، w ناخذو B على point C على D w point A ، B w C على D prime . موش donc ، alignés يتعدّى منهم plan واحد برك ، w بـ deux l'axiome الـ plan هذا فيه الـ . deux droites sécantes ولّا ، plan : trois points non alignés باش نعرّفو trois façons عندنا الحاصل . deux droites اللي موش عليها ، ولّا droite w point

On a deux droites sécantes D et D prime. Le théorème dit : il existe un plan et un seul contenant les droites D et D prime. Pourquoi ? Appelons A le point d'intersection, et prenons un point B sur D et un point C sur D prime. A, B et C ne sont pas alignés, donc il passe par eux un seul plan, et, par l'axiome deux, ce plan contient les deux droites. En résumé, on a trois façons de déterminer un plan : trois points non alignés, ou bien une droite et un point qui n'est pas sur elle, ou bien deux droites sécantes.

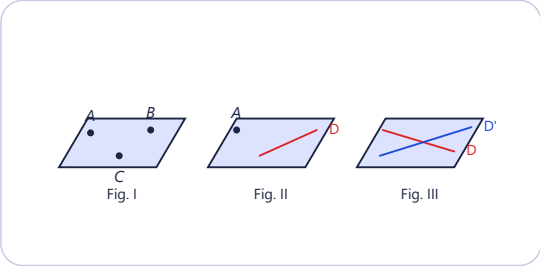
Soient D et D' deux droites sécantes.

Il existe un plan et un seul contenant les droites D et D'.

On connaît donc trois façons de déterminer un plan :

- par **trois points non alignés** (Fig. I) ;
- par **une droite et un point** n'appartenant pas à cette droite (Fig. II) ;

- par **deux droites sécantes** (Fig. III).



Trois façons de déterminer un plan.

Trois figures côte à côte, chacune avec un plan dessiné comme un parallélogramme. Figure I : trois points A, B et C non alignés sont marqués dans le plan. Figure II : un point A et une droite D qui ne passe pas par A sont dans le plan. Figure III : deux droites D et D' qui se coupent sont dans le plan.

DÉMONSTRATION

Soit A le point d'intersection de D et D'. On choisit un point B sur D et un point C sur D', tous les deux distincts de A. Les points A, B et C ne sont pas alignés : d'après l'axiome 1, il passe par eux un plan et un seul, le plan (ABC).

Ce plan contient A et B, donc toute la droite (AB), c'est-à-dire D ; il contient A et C, donc toute la droite (AC), c'est-à-dire D' (axiome 2).

Inversement, un plan qui contient D et D' contient A, B et C : c'est le plan (ABC).

À ne pas faire : Deux droites quelconques de l'espace déterminent un plan — Deux droites **sécantes** déterminent un plan. Deux droites non coplanaires ne sont contenues dans aucun plan.

---

11. EXEMPLE

Exemple : déterminer un plan

CE QU'IL DIT

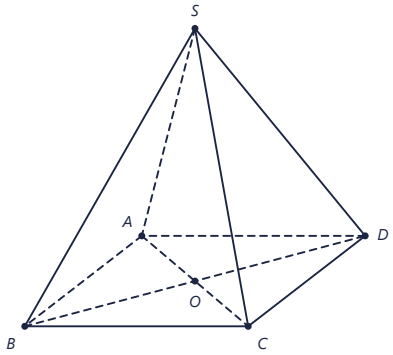
Ne5dhou exemple 3la les trois façons. 3andna pyramide SABCD, w la base ABCD carré de centre O. Le plan mta3 la base, nnajjmou n3arrfouh b trois points non alignés : A, B w C. Nnajjmou n3arrfouh b droite w point : la droite (AB) w le point C. W nnajjmou n3arrfouh b deux droites sécantes : la droite (AC) w la droite (BD), elli yetle9aw fi O. Thabbet mli7 : A, O w C ma y3arrfouch plan, 5ater houma alignés.

ناخذو exemple على les trois façons . عندنا le plan . la base متاع pyramide S A B C D ، w la base A B C D carré de centre O trois points non بـ نعرّفوه نجّمو ، droite w point : la droite A B w le point C . w نجّمو نعرّفوه بـ . alignés : A ، B w C deux droites sécantes : la droite A C w la droite B D نجّمو نعرّفوه بـ اللي يتلاقاو ، ثبّت مليح : O . في A ، O w C ما يعرّفوش ، plan خاطر هوما alignés .

Prenons un exemple sur les trois façons. On a une pyramide S A B C D, dont la base A B C D est un carré de centre O. Le plan de la base, on peut le déterminer par trois points non alignés : A, B et C. On peut le déterminer par une droite et un point : la droite A B et le point C. Et on peut le déterminer par deux droites sécantes : la droite A C et la droite B D, qui se coupent en O. Fais bien attention : A, O et C ne déterminent pas un plan, car ils sont alignés.

Dans la figure, $SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de centre O.

Un même plan peut être déterminé de plusieurs façons : on choisit celle qui sert le mieux le problème.



SABCD : la base ABCD est un carré de centre O.

Une pyramide SABCD vue en perspective, dont la base ABCD est un carré de centre O. La base est dessinée comme un parallélogramme : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche. Les diagonales [AC] et [BD], en pointillés, se coupent en O. Le sommet S est au-dessus de la base. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Déterminer le plan de la face $ABCD$ à l'aide de trois points non alignés, puis d'une droite et d'un point n'appartenant pas à cette droite, puis de deux droites sécantes. b) Déterminer le plan (SAD) par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite, puis par deux droites sécantes.

Trois points — A, B et C sont trois sommets du carré : ils ne sont pas alignés.

(ABC)

Une droite et un point — Le point C n'est pas sur la droite (AB) : le plan de la base est le plan qui contient la droite (AB) et le point C.

(AB) et C

Deux droites sécantes — Les diagonales du carré se coupent en son centre : les droites (AC) et (BD) sont sécantes en O.

(AC) et (BD)

Le plan (SAD) — Le point S n'est pas sur la droite (AD) ; et les droites (SA) et (SD) sont sécantes en S.

(AD) et S ; (SA) et (SD)

(SAD) : la droite (AD) et le point S, ou les droites (SA) et (SD)

À ne pas faire : Le plan de la base est déterminé par les points A, O et C — Le plan de la base est déterminé par A, B et C, ou par A, O et B. A, O et C sont alignés sur la diagonale (AC) : trois points alignés ne déterminent pas un plan.

12. EXEMPLE

Exemple : sécantes ou non ?

CE QU'IL DIT

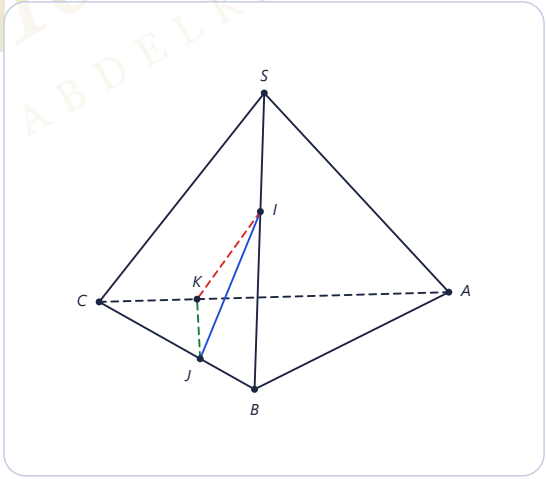
Ne5dhou exemple e5er. 3andna tétraèdre SABC, point I 3la l'arête [SB], point J 3la l'arête [BC], w point K 3la l'arête [AC]. La droite (SA) w la droite (BC), sécantes walla le ? Le : ken famma plan fih el deux droites, ykoun fih les quatre sommets mta3 el tétraèdre, w hedha impossible. La droite (IJ) w la droite (SB) ? Ey, sécantes en I, 5ater I 3la ez-zouz. W la droite (JK) w la droite (AB) ? Ez-zouz fi le plan (ABC), donc coplanaires. Tfakker : 9bal ma t9oul sécantes, chouf 9bal coplanaires walla le.

l'arête A C . la droite S A w la droite B C ، sécantes على l'arête B C ، w point K على l'arête S B ، point J على tétraèdre S A B C ، point I عندنا . آخر exemple ناخذو ، sécantes en I ، إي ؟ impossible . la droite I J w la droite S B هذا tétraèdre ، w متاع الـ les quatre sommets ، يكون فيه deux droites ، فيه الـ plan فمّا : كان لا ؟ ولّا لا . خاطر ا على الزوز w la droite J K w la droite A B ؟ الزوز في donc coplanaires ، le plan A B C . تفكّر : قُبَلْ ما تقول ، sécantes شوف ، قُبَلْ : coplanaires ولّا لا .

Prenons un autre exemple. On a un tétraèdre S A B C, un point I sur l'arête S B, un point J sur l'arête B C, et un point K sur l'arête A C. La droite S A et la droite B C sont-elles sécantes ? Non : s'il existait un plan contenant les deux droites, il contiendrait les quatre sommets du tétraèdre, et c'est impossible. La droite I J et la droite S B ? Oui, elles sont sécantes en I, car I est sur les deux. Et la droite J K et la droite A B ? Elles sont toutes les deux dans le plan A B C, donc coplanaires. Retiens : avant de dire sécantes, regarde d'abord si elles sont coplanaires ou non.

Soient $SABC$ un tétraèdre, I un point de $[SB]$ distinct de S et de B, J un point de $[BC]$ distinct de B et de C, et K un point de $[AC]$ distinct de A et de C.

Deux droites ne peuvent être sécantes que si elles sont coplanaires : c'est la première chose à regarder.



I est sur [SB], J sur [BC] et K sur [AC].

Un tétraèdre SABC vu en perspective : le sommet S est en haut, C à gauche, B en bas devant, A à droite. L'arête [CA], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [SB], le point J sur l'arête [BC] et le point K sur l'arête [AC].

EXEMPLE TRAITÉ

a) Les droites (SA) et (BC) sont-elles sécantes ? b) Les droites (IJ) et (SB) sont-elles sécantes ? c) Les droites (IK) et (SC) sont-elles sécantes ? d) Les droites (JK) et (AB) sont-elles coplanaires ?

(SA) et (BC) — Un plan qui contiendrait ces deux droites contiendrait les quatre sommets S, A, B et C du tétraèdre : c'est impossible. Elles ne sont pas coplanaires.

a) non

(IJ) et (SB) — Le point I est sur la droite (SB) et sur la droite (IJ), et ces droites sont distinctes puisque J n'est pas sur (SB) : elles se coupent en I.

b) oui, en I

(IK) et (SC) — Le seul plan qui contient la droite (SC) et le point I est le plan (SBC). Or K est sur (AC) et distinct de C : il n'est pas dans ce plan. Les deux droites ne sont pas coplanaires.

c) non

(JK) et (AB) — J est sur (BC) et K sur (AC) : la droite (JK) est contenue dans le plan (ABC), comme la droite (AB). Dans ce plan, elles sont sécantes dès qu'elles ne sont pas parallèles.

d) oui, dans le plan (ABC)

a) non ; b) oui ; c) non ; d) oui

À ne pas faire : (SA) et (BC) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes — (SA) et (BC) ne sont pas coplanaires : elles ne sont ni parallèles ni sécantes. « Non parallèles donc sécantes » n'est vrai que pour deux droites d'un même plan.

13. DÉFINITION

Une droite et un plan

CE QU'IL DIT

Tawa droite D w plan P. Famma trois cas. Le premier cas : 3andhom point wa7ed commun, nsammiwh A. N9oulou elli la droite w le plan sécants, w n9oulou zeda : la droite perce le plan en A, walla le plan coupe la droite. Le deuxième cas : ma 3andhom 7atta point commun. W le troisième cas : la droite D el koll fi le plan P. W tfakker l'axiome deux : droite 3andha deux points distincts fi plan, hiya el koll fel plan hedha.

la droite perce : نقولو زادة la droite w le plan sécants ، w نقولو اللي . A نسمّيوه ، commun واحد point عندهم : trois cas . le premier cas فمّا . droite D w plan P توّة l'axiome تفكّر le plan P . w الكل في point commun . w le troisième cas : la droite D ما عندهم حتّى : le plan coupe la droite . le deuxième cas ولّا ، le plan en A هذا plan الـ في الكل هي ، plan في deux points distincts عندها deux : droite .

Maintenant, une droite D et un plan P. Il y a trois cas. Le premier cas : ils ont un seul point commun, qu'on appelle A. On dit que la droite et le plan sont sécants, et on dit aussi : la droite perce le plan en A, ou bien le plan coupe la droite. Le deuxième cas : ils n'ont aucun point commun. Et le troisième cas : la droite D est tout entière dans le plan P. Et souviens-toi de l'axiome deux : une droite qui a deux points distincts dans un plan est tout entière dans ce plan.

On dit qu'une droite et un plan sont **sécants** si leur intersection est un point.

Vocabulaire. Lorsqu'une droite et un plan sont sécants, on dit que la droite **perce** le plan ou que le plan **coupe** la droite.

Pour une droite D et un plan P, on observe trois cas :

- **Fig. I.** D et P ont un seul point commun A : ils sont sécants, $D \cap P = \{A\}$.
- **Fig. II.** D et P n'ont aucun point commun : $D \cap P = \varnothing$.
- **Fig. III.** D est contenue dans P : $D \cap P = D$.

D'après l'axiome 2, une droite qui a deux points distincts dans un plan est contenue dans ce plan. Une droite qui n'est pas contenue dans un plan a donc au plus un point commun avec lui.

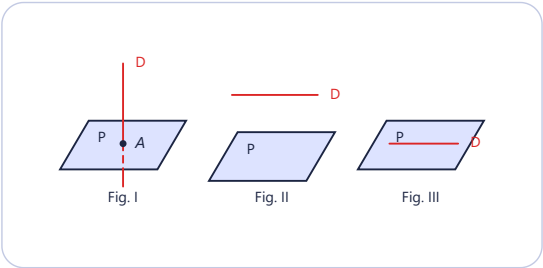


Fig. I : D perce P en A. Fig. II : aucun point commun. Fig. III : D est contenue dans P.

Trois figures côte à côte, chacune avec un plan P dessiné comme un parallélogramme. Figure I : la droite D, verticale, traverse le plan P en un seul point A. Figure II : la droite D est tracée au-dessus du plan P et ne le rencontre pas. Figure III : la droite D est tracée dans le plan P.

EXEMPLE TRAITÉ

Pour chacune des trois figures, déterminer $D \cap P$.

Première figure — La droite D traverse le plan P au point A : elle perce le plan en A.

$D \cap P = \{A\}$

Deuxième figure — La droite D ne rencontre pas le plan P.

$D \cap P = \varnothing$

Troisième figure — Tous les points de D sont dans le plan P : l'intersection est la droite D tout entière.

$D \cap P = D$

le point A ; $\varnothing$; la droite D

À ne pas faire : Une droite peut percer un plan en deux points — Une droite qui a deux points dans un plan est contenue dans ce plan. C'est l'axiome 2 : avec deux points distincts dans le plan, toute la droite y est.

---

14. APPLICATION

Pour comprendre : une droite qui perce un plan

CE QU'IL DIT

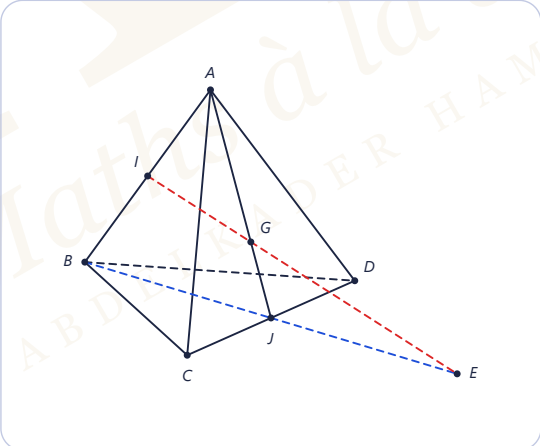
Bech nefhmou kifech droite perce plan, ne5dhou tétraèdre ABCD. I le milieu de [AB], J le milieu de [CD], w G le centre de gravité du triangle ACD. Nlawwjou win la droite (IG) perce le plan (BCD). G 3la la médiane [AJ], donc la droite (IG) w la droite (BJ) ez-zouz fi le plan (ABJ). W fel plan hedha mouch parallèles, 5ater AI sur AB égale un demi, w AG sur AJ égale deux tiers. Donc yetle9aw fi point E. W E 3la la droite (BJ), elli hiya fi le plan (BCD). El 7asel : la droite (IG) perce le plan (BCD) en E.

la نلوّجو وين . tétraèdre A B C D . I le milieu de A B ، J le milieu de C D ، w G le centre de gravité du triangle A C D ناخذو ، droite perce plan باش نفهمو كيفاش A I sur A خاطر ، parallèles موش هذا plan الـ في le plan A B J . w الزوز في la médiane A J ، donc la droite I G w la droite B J على droite I G perce le plan B C D . G la droite I G perce le plan : الحاصل . le plan B C D في اللي هي ، la droite B J على point E . w E يتلاقاو في B égale un demi ، w A G sur A J égale deux tiers . donc . B C D en E

Pour comprendre comment une droite perce un plan, prenons un tétraèdre A B C D. I est le milieu de A B, J le milieu de C D, et G le centre de gravité du triangle A C D. Cherchons où la droite I G perce le plan B C D. G est sur la médiane A J, donc la droite I G et la droite B J sont toutes les deux dans le plan A B J. Et dans ce plan elles ne sont pas parallèles, car A I sur A B égale un demi, et A G sur A J égale deux tiers. Donc elles se coupent en un point E. Et E est sur la droite B J, qui est dans le plan B C D. En résumé : la droite I G perce le plan B C D en E.

Soient $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et G le centre de gravité du triangle ACD.

Pour trouver le point où la droite (IG) perce le plan (BCD), on cherche une droite du plan (BCD) qui soit **coplanaire** avec (IG) : ici, la droite (BJ). Leur point d'intersection est le point cherché.



La droite (IG) perce le plan (BCD) au point E de la droite (BJ).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : A en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite ; l'arête [BD], cachée, est en pointillés. I est le milieu de l'arête [AB] et J le milieu de l'arête [CD]. Le point G, centre de gravité du triangle ACD, est sur la médiane [AJ], aux deux tiers à partir de A. La droite (IG), en rouge, et la droite (BJ), en bleu, se coupent en un point E situé à droite du tétraèdre, au-delà de J.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Montrer que les droites (IG) et (BJ) sont sécantes. b) En déduire que la droite (IG) perce le plan (BCD) en un point E.

Le point G — J est le milieu de $[CD]$: $[AJ]$ est une médiane du triangle ACD. Le centre de gravité G est sur cette médiane, aux deux tiers à partir de A.

$AG = \frac{2}{3}AJ$

Coplanaires — I est sur (AB) et G sur (AJ) : les droites (IG) et (BJ) sont toutes les deux contenues dans le plan (ABJ).

$(IG) \subset (ABJ)$ et $(BJ) \subset (ABJ)$

Non parallèles — Dans le triangle ABJ, si (IG) était parallèle à (BJ), le théorème de Thalès donnerait $\frac{AI}{AB} = \frac{AG}{AJ}$. Or ces rapports valent $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

$\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AG}{AJ} = \frac{2}{3}$

Sécantes — Les droites (IG) et (BJ) sont coplanaires et non parallèles : elles sont sécantes en un point E.

$(IG) \cap (BJ) = \{E\}$

Le plan (BCD) — E est sur (BJ), qui est contenue dans le plan (BCD). Et (IG) n'est pas contenue dans ce plan, car I n'y est pas : elle le perce en E.

$(IG) \cap (BCD) = \{E\}$

$$(IG) \cap (BCD) = \{E\}$$

À ne pas faire : (IG) et (BJ) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes — (IG) et (BJ) sont dans le plan (ABJ) et ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes. Sans le plan commun, « non parallèles » ne suffit pas : les deux droites pourraient être non coplanaires.

---

15. DÉFINITION

Deux plans

CE QU'IL DIT

Tawa deux plans P w Q. Famma trois cas. Le premier cas : l'intersection mte3hom droite D. N9oulou elli les deux plans sécants. Le deuxième cas : ma 3andhom 7atta point commun. W le troisième cas : les deux plans confondus, ya3ni houma nafs el plan. W tfakker l'axiome trois : deux plans distincts 3andhom point commun, dima sécants, w l'intersection mte3hom droite, mouch point.

توّة P w Q deux plans . فمّا l'intersection : le premier cas . trois متاعهم droite D . نقولو اللي les deux plans sécants . le deuxième cas : ما عندهم حتّى point commun . w le troisième cas : les deux plans confondus ، يعني هوما نفس الـ plan . تفكّر l'axiome trois : deux plans distincts عندهم point commun ، ديما sécants ، w l'intersection متاعهم droite ، موش point .

Maintenant, deux plans P et Q. Il y a trois cas. Le premier cas : leur intersection est une droite D. On dit que les deux plans sont sécants. Le deuxième cas : ils n'ont aucun point commun. Et le troisième cas : les deux plans sont confondus, c'est-à-dire que c'est le même plan. Et souviens-toi de l'axiome trois : deux plans distincts qui ont un point commun sont toujours sécants, et leur intersection est une droite, pas un point.

On dit que deux plans sont **sécants** lorsque leur intersection est une droite.

Pour deux plans P et Q, on observe trois cas :

- **Fig. I.** P et Q ont une droite D en commun : ils sont sécants, $P \cap Q = D$.
- **Fig. II.** P et Q n'ont aucun point commun : $P \cap Q = \varnothing$.
- **Fig. III.** P et Q sont confondus : $P \cap Q = P$.

D'après l'axiome 3, deux plans distincts qui ont un point commun sont toujours sécants.

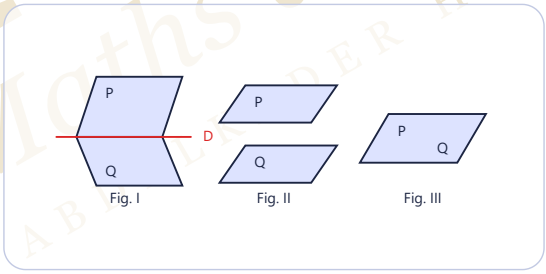


Fig. I : sécants suivant D. Fig. II : aucun point commun. Fig. III : confondus.

Trois figures côte à côte. Figure I : deux plans P et Q se coupent le long d'une droite D, tracée en rouge, comme un livre ouvert. Figure II : deux plans P et Q sont dessinés l'un au-dessus de l'autre et ne se rencontrent pas. Figure III : un seul parallélogramme porte les deux noms P et Q : les deux plans sont confondus.

EXEMPLE TRAITÉ

Pour chacune des trois figures, déterminer l'intersection des plans P et Q.

Première figure — Les deux plans se coupent : leurs points communs forment la droite D.

$P \cap Q = D$

Deuxième figure — Les deux plans ne se rencontrent pas.

$P \cap Q = \varnothing$

Troisième figure — Les deux plans sont confondus : tous leurs points sont communs.

$P \cap Q = P$

$$\text{la droite } D \quad ; \quad \varnothing \quad ; \quad \text{le plan } P$$

À ne pas faire : Deux plans sécants se coupent en un point — Deux plans sécants se coupent suivant une droite. Deux droites se coupent en un point ; deux plans, eux, ont toute une droite en commun.

16. MÉTHODE

Déterminer l'intersection de deux plans

CE QU'IL DIT

Kifech nal9aw l'intersection mta3 deux plans ? Na3rfou elli deux plans distincts 3andhom point commun, yetle9aw fi droite. W el droite na3rfouha b deux points. Donc et-tari9a sehla : lawwej 3la deux points distincts communs lez-zouz plans, M w N. L'intersection hiya la droite (MN). W point ykoun commun ki ykoun 3la droite men le premier plan, w 3la droite men le deuxième plan. Ma tlawwejch ken fi les sommets : se3at el points communs ykounou 3la les arêtes.

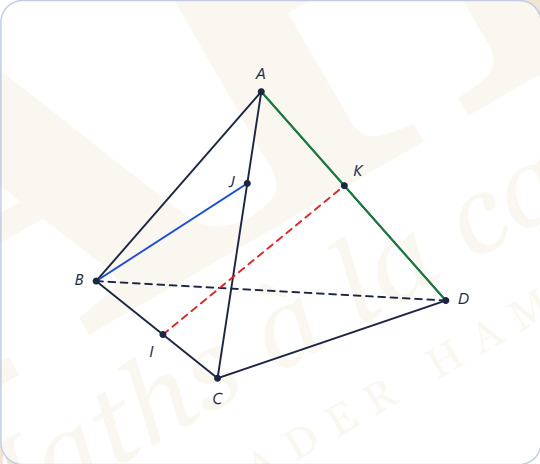
كيفاش نلقاو l'intersection متاع deux plans ؟ نعرفو اللي deux plans distincts عندهم point commun ، يتلاقاو في w . droite الـ droite نعرفوها بـ deux points . donc
الطريقة ساهلة : لوّج على deux points distincts communs للزوز l'intersection . M w N ، plans هي point w . la droite M N يكون commun كي يكون على droite من le
. les arêtes يكونو على points communs ساعات الـ : les sommets ما تلوّجش كان في . le deuxième plan من droite على premier plan ، w

Comment trouver l'intersection de deux plans ? On sait que deux plans distincts qui ont un point commun se coupent suivant une droite. Et une droite est connue par deux points. La méthode est donc simple : cherche deux points distincts communs aux deux plans, M et N. L'intersection est la droite M N. Et un point est commun quand il est sur une droite du premier plan, et sur une droite du deuxième plan. Ne cherche pas seulement parmi les sommets : parfois les points communs sont sur les arêtes.

Deux plans distincts qui ont un point commun sont sécants suivant une droite (axiome 3). Une droite est connue dès qu'on en connaît deux points.

Méthode. Pour déterminer l'intersection de deux plans distincts, on cherche **deux points distincts communs** aux deux plans, M et N : l'intersection est la droite (MN).

Un point est commun aux deux plans quand il appartient à une droite contenue dans le premier et à une droite contenue dans le second.



I est sur [BC], J sur [AC] et K sur [AD].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [BC], le point J sur l'arête [AC] et le point K sur l'arête [AD]. La droite (BJ) est tracée en bleu, l'arête [AD] en vert et la droite (IK) en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit $ABCD$ un tétraèdre et I, J, K des points des arêtes $[BC]$, $[AC]$ et $[AD]$, comme sur la figure. a) Déterminer l'intersection des plans (ACI) et (BDJ). b) Déterminer l'intersection des plans (ABK) et (CDJ). c) Déterminer l'intersection des plans (BCK) et (ADI).

(ACI) et (BDJ) — I est sur (BC) : le plan (ACI) est le plan (ABC), il contient B. Et J est sur (AC) : J est dans le plan (ACI). Les points B et J sont donc communs aux deux plans.

$(ACI) \cap (BDJ) = (BJ)$

(ABK) et (CDJ) — K est sur (AD) : le plan (ABK) est le plan (ABD). J est sur (AC) : le plan (CDJ) est le plan (ACD). Les points A et D sont communs aux deux plans.

$(ABK) \cap (CDJ) = (AD)$

(BCK) et (ADI) — K est dans le plan (BCK), et il est sur (AD), donc dans le plan (ADI). I est dans le plan (ADI), et il est sur (BC), donc dans le plan (BCK).

$(BCK) \cap (ADI) = (IK)$

$$(BJ) \quad ; \quad (AD) \quad ; \quad (IK)$$

À ne pas faire : Les plans (BCK) et (ADI) n'ont aucun sommet du tétraèdre en commun, donc ils ne se coupent pas — Ils ont en commun les points I et K : leur intersection est la droite (IK). Les points communs à deux plans ne sont pas toujours des sommets : on les cherche sur les droites de chaque plan.

À ne pas faire : L'intersection des plans (ACI) et (BDJ) est le point J — L'intersection des plans (ACI) et (BDJ) est la droite (BJ). L'intersection de deux plans sécants est une droite : un seul point commun ne suffit pas, il en faut un deuxième.

---

17. APPLICATION

Pour comprendre : construire l'intersection

CE QU'IL DIT

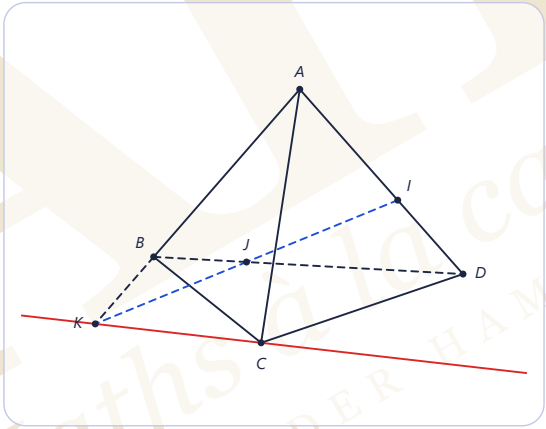
Se3at ma nchoufou ken point wa7ed commun, w lezem nebniw el point le5er. Ne5dhou tétraèdre ABCD, point I 3la l'arête [AD], w point J 3la l'arête [BD]. Nlawwjou 3la l'intersection mta3 le plan (ABC) w le plan (CIJ). Le point C fez-zouz plans. W le5er ? La droite (IJ) w la droite (AB) ez-zouz fi le plan (ABD) w mouch parallèles, donc yetle9aw fi point K. K 3la la droite (AB), donc fi le plan (ABC). W K 3la la droite (IJ), donc fi le plan (CIJ). El 7asel : l'intersection hiya la droite (CK).

نلوّجو على l'arête B D على l'arête A D ، w point J على tétraèdre A B C D ، point I ناخذو . الآخر point الـ لازم نبنيو commun ، w واحد point كان ساعات ما نشوفو parallèles ، donc موش le plan A B D w الزوز في la droite I J w la droite A B ؟ الآخر plans . w الزوز في le plan A B C w le plan C I J . le point C متاع l'intersection : الحاصل . le plan C I J في la droite I J ، donc على le plan A B C . w K في la droite A B ، donc على point K . K في يتلاقاو . la droite C K هي l'intersection

Parfois on ne voit qu'un seul point commun, et il faut construire l'autre. Prenons un tétraèdre A B C D, un point I sur l'arête A D, et un point J sur l'arête B D. Cherchons l'intersection du plan A B C et du plan C I J. Le point C est dans les deux plans. Et l'autre ? La droite I J et la droite A B sont toutes les deux dans le plan A B D et ne sont pas parallèles, donc elles se coupent en un point K. K est sur la droite A B, donc dans le plan A B C. Et K est sur la droite I J, donc dans le plan C I J. En résumé : l'intersection est la droite C K.

Soient $ABCD$ un tétraèdre et I et J deux points appartenant respectivement aux arêtes $[AD]$ et $[BD]$, tels que les droites (IJ) et (AB) ne soient pas parallèles.

Quand un seul point commun est visible, on **construit** le second : on prolonge deux droites coplanaires, une dans chaque plan, jusqu'à leur point d'intersection.



K est commun aux deux plans : leur intersection est la droite (CK).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : A en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite ; l'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [AD] et le point J sur l'arête [BD]. La droite (IJ), en bleu, prolongée au-delà de J, coupe la droite (AB), prolongée au-delà de B, en un point K situé à gauche du tétraèdre. La droite (CK) est tracée en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Construire le point K, intersection des droites (IJ) et (AB). b) Déterminer et construire la droite d'intersection des plans (ABC) et (CIJ).

Le point K — Les droites (IJ) et (AB) sont toutes les deux contenues dans le plan (ABD) et ne sont pas parallèles : elles sont sécantes. On les prolonge jusqu'à leur point d'intersection K.

$(IJ) \cap (AB) = \{K\}$

Un point commun — Le point C appartient aux deux plans.

$C \in (ABC) \quad \text{et} \quad C \in (CIJ)$

Un autre — K est sur (AB), contenue dans le plan (ABC) ; et K est sur (IJ), contenue dans le plan (CIJ).

$K \in (ABC) \quad \text{et} \quad K \in (CIJ)$

La droite — Les deux plans sont distincts et ont en commun les points C et K : leur intersection est la droite (CK).

$(ABC) \cap (CIJ) = (CK)$

$$(ABC) \cap (CIJ) = (CK)$$

À ne pas faire : Les plans (ABC) et (CIJ) n'ont que le point C en commun — Ils ont aussi en commun le point K, où (IJ) coupe (AB) : leur intersection est (CK). Deux plans distincts qui ont un point commun ont toujours une droite commune : le deuxième point se construit.

18. EXEMPLE

Exemple : un point commun dans une face

CE QU'IL DIT

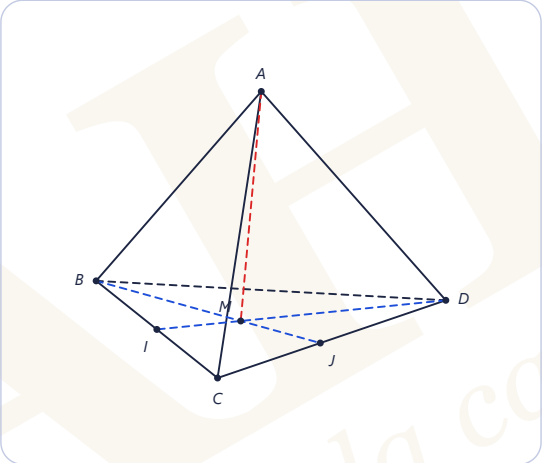
Ne5dhou exemple. 3andna tétraèdre ABCD, point I 3la l'arête [BC], w point J 3la l'arête [CD]. La droite (BJ) w la droite (DI) yetle9aw fi point M. Nlawwjou 3la l'intersection mta3 le plan (AID) w le plan (JAB). Le point A fez-zouz plans. W le point M zeda : M 3la la droite (DI), elli hiya fi le plan (AID), w M 3la la droite (BJ), elli hiya fi le plan (JAB). Donc l'intersection hiya la droite (AM).

نلوّجو على . point M يتلاقاو في l'arête C D . la droite B J w la droite D I على l'arête B C ، w point J على tétraèdre A B C D ، point I عندنا . exemple ناخذو la droite على le plan A I D ، w M اللي هي في ، la droite D I على M : زادة plans . w le point M في الزوج le plan A I D w le plan J A B . le point A متاع l'intersection . la droite A M هي le plan J A B . donc l'intersection في اللي هي ، B J

Prenons un exemple. On a un tétraèdre A B C D, un point I sur l'arête B C, et un point J sur l'arête C D. La droite B J et la droite D I se coupent en un point M. Cherchons l'intersection du plan A I D et du plan J A B. Le point A est dans les deux plans. Et le point M aussi : M est sur la droite D I, qui est dans le plan A I D, et M est sur la droite B J, qui est dans le plan J A B. Donc l'intersection est la droite A M.

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I un point de l'arête $[BC]$ et J un point de l'arête $[CD]$. On désigne par M le point d'intersection des droites (BJ) et (DI).

Le point M est dans la face BCD : il sert de second point commun aux plans (AID) et (JAB).



M est le point d'intersection de (BJ) et (DI).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [BC] et le point J sur l'arête [CD]. Dans la face BCD, les segments [BJ] et [DI], en bleu, se coupent en M. Le segment [AM] est tracé en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer l'intersection des plans (AID) et (JAB).

Un point commun — Le point A appartient aux deux plans.

$A \in (AID) \quad \text{et} \quad A \in (JAB)$

Le point M — M est sur la droite (DI), contenue dans le plan (AID) ; et M est sur la droite (BJ), contenue dans le plan (JAB).

$M \in (AID) \quad \text{et} \quad M \in (JAB)$

La droite — Les deux plans sont distincts et ont en commun les points A et M.

$(AID) \cap (JAB) = (AM)$

$$(AID) \cap (JAB) = (AM)$$

19. APPLICATION

Exemple : un plan qui coupe trois arêtes

CE QU'IL DIT

Ne5dhou exemple e5er. Fi le tétraèdre ABCD, 3andna trois points E, F w G 3la les arêtes [AB], [AC] w [AD]. Nlawwjou 3la l'intersection mta3 le plan (BCD) w le plan (EFG). Ma nchoufou 7atta point commun, donc nebniw deux points. La droite (EF) w la droite (BC) ez-zouz fi le plan (ABC), w yetle9aw fi point P. La droite (EG) w la droite (BD) ez-zouz fi le plan (ABD), w yetle9aw fi point Q. P w Q fez-zouz plans, donc l'intersection hiya la droite (PQ). Tfakker : el plan ma youfech fel triangle, houwa ykammel men koll jiha.

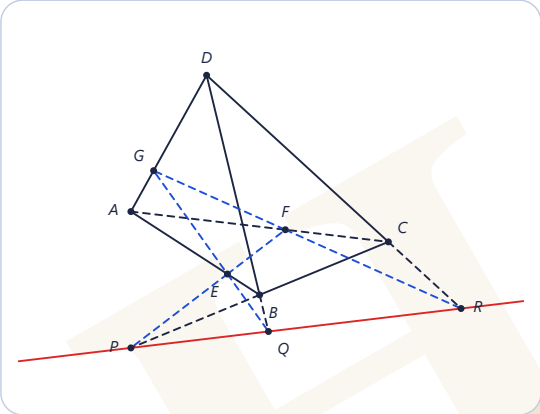
le plan B C D w le plan E F متاع l'intersection على نلوّجو . les arêtes A B ، A C w A D على trois points E ، F w G عندنا ، le tétraèdre A B C D في آخر exemple ناخذو point P . la droite E G w la droite B D يتلاقاو في le plan A B C ، w الزوج في deux points . la droite E F w la droite B C نبنيو point commun ، donc ما نشوفو حتّى . G

الزوز في le plan A B D ، w يتلاقاو في P w Q . point Q في الزوز donc l'intersection ، plans هي la droite P Q . تفكّر : الـ plan ما يوفاش في الـ triangle ، هو يكمّل من كل جهة .

Prenons un autre exemple. Dans le tétraèdre A B C D, on a trois points E, F et G sur les arêtes A B, A C et A D. Cherchons l'intersection du plan B C D et du plan E F G. On ne voit aucun point commun, donc on en construit deux. La droite E F et la droite B C sont toutes les deux dans le plan A B C, et se coupent en un point P. La droite E G et la droite B D sont toutes les deux dans le plan A B D, et se coupent en un point Q. P et Q sont dans les deux plans, donc l'intersection est la droite P Q. Retiens : un plan ne s'arrête pas au triangle, il se prolonge de tous les côtés.

Dans le tétraèdre $ABCD$, les points E, F et G appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. On cherche l'intersection des plans (BCD) et (EFG).

Aucun point commun n'est visible : on en construit deux. Sur la figure, la droite (EF) coupe la droite (BC) en P, et la droite (EG) coupe la droite (BD) en Q.



La droite rouge est l'intersection des plans (BCD) et (EFG).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : D en haut, A à gauche, B en bas devant, C à droite ; l'arête [AC], cachée, est en pointillés. Le point E est sur l'arête [AB], F sur l'arête [AC] et G sur l'arête [AD]. Le triangle EFG est tracé en bleu. La droite (EF) prolongée coupe la droite (BC) en P, la droite (GE) prolongée coupe la droite (BD) en Q et la droite (GF) prolongée coupe la droite (CD) en R, tous les trois en dessous du tétraèdre. Les points P, Q et R sont sur une même droite, tracée en rouge : c'est l'intersection des plans (BCD) et (EFG).

EXEMPLE TRAITÉ

Sur la figure, les droites (EF) et (BC) se coupent en P, et les droites (EG) et (BD) se coupent en Q. Déterminer l'intersection des plans (BCD) et (EFG).

Le point P — Les droites (EF) et (BC) sont dans le plan (ABC). Leur point d'intersection P est sur (BC), donc dans le plan (BCD), et sur (EF), donc dans le plan (EFG).

$P \in (BCD) \quad$ et $\quad P \in (EFG)$

Le point Q — De même, les droites (EG) et (BD) sont dans le plan (ABD) : leur point d'intersection Q est commun aux deux plans.

$Q \in (BCD) \quad$ et $\quad Q \in (EFG)$

La droite — Les plans (BCD) et (EFG) sont distincts et ont en commun les points P et Q.

$(BCD) \cap (EFG) = (PQ)$

Une vérification — Le point R où (FG) coupe (CD) est lui aussi commun aux deux plans : il est sur la droite (PQ).

$R \in (PQ)$

$$(BCD) \cap (EFG) = (PQ)$$

À ne pas faire : Les plans (BCD) et (EFG) ne se coupent pas, car le triangle EFG ne touche pas la face BCD — Un plan ne s'arrête pas au triangle qui le nomme : les plans (BCD) et (EFG) se coupent suivant la droite (PQ). Un plan est illimité : on prolonge ses droites pour trouver les points communs.

20. APPLICATION

Exemple : autour du centre de gravité

CE QU'IL DIT

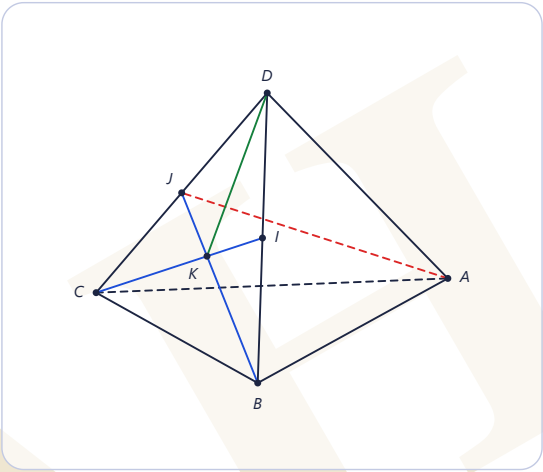
Ne5dhou exemple m3a le centre de gravité. 3andna tétraèdre ABCD, w K le centre de gravité du triangle BCD. Nsammiw I le milieu de [BD], w J le milieu de [CD]. Tfakker : le centre de gravité houwa le point de concours mta3 les médianes. Donc la droite (CK) hiya la médiane elli to5rej men C, w coupe la droite (BD) en I. W la droite (BD) fi le plan (ABD). El 7asel : la droite (CK) perce le plan (ABD) en I. W kif kif, la droite (BK) coupe la droite (CD) en J, donc l'intersection mta3 le plan (ABK) w le plan (ACD) hiya la droite (AJ).

تفكّر . I le milieu de B D ، w J le milieu de C D نسمّيو . tétraèdre A B C D ، w K le centre de gravité du triangle B C D عندنا . le centre de gravité مع exemple ناخذو C ، w coupe la droite B D en I . w la droite B D اللي تخرج من la médiane هي les médianes . donc la droite C K متاع le point de concours هو le centre de gravité : le plan A B K w le متاع la droite B K coupe la droite C D en J ، donc l'intersection كيف كيف ، la droite C K perce le plan A B D en I . w : الحاصل . le plan A B D في . la droite A J هي plan A C D

Prenons un exemple avec le centre de gravité. On a un tétraèdre A B C D, et K le centre de gravité du triangle B C D. Appelons I le milieu de B D, et J le milieu de C D. Souviens-toi : le centre de gravité est le point de concours des médianes. Donc la droite C K est la médiane issue de C, et elle coupe la droite B D en I. Et la droite B D est dans le plan A B D. En résumé : la droite C K perce le plan A B D en I. De même, la droite B K coupe la droite C D en J, donc l'intersection du plan A B K et du plan A C D est la droite A J.

Dans la figure, $ABCD$ est un tétraèdre et le point K est le centre de gravité du triangle BCD. On note I le milieu de $[BD]$ et J le milieu de $[CD]$.

Le centre de gravité est le point de concours des médianes : K est sur la médiane (CI) et sur la médiane (BJ) du triangle BCD. Ce sont ces deux droites qui donnent les points cherchés.



K est le centre de gravité du triangle BCD.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : D en haut, C à gauche, B en bas devant, A à droite ; l'arête [CA], cachée, est en pointillés. I est le milieu de l'arête [BD] et J le milieu de l'arête [CD]. Dans la face BCD, les médianes [CI] et [BJ], en bleu, se coupent en K, le centre de gravité du triangle BCD. Le segment [AJ] est tracé en rouge et le segment [DK] en vert.

EXEMPLE TRAITÉ

a) En quel point la droite (CK) perce-t-elle le plan (ABD) ? b) En quel point la droite (BD) perce-t-elle le plan (ACK) ? c) Déterminer l'intersection des plans (ABK) et (ACD). d) Déterminer l'intersection des plans (AKD) et (BCD).

(CK) et (ABD) — La droite (CK) est la médiane issue de C : elle coupe (BD) en son milieu I. Or (BD) est contenue dans le plan (ABD), et C n'est pas dans ce plan.

$(CK) \cap (ABD) = \{I\}$

(BD) et (ACK) — I est sur (CK), contenue dans le plan (ACK), et sur (BD). Comme B n'est pas dans le plan (ACK), la droite (BD) perce ce plan en I.

$(BD) \cap (ACK) = \{I\}$

(ABK) et (ACD) — A est commun aux deux plans. La droite (BK) est la médiane issue de B : elle coupe (CD) en son milieu J, qui est donc commun aux deux plans.

$(ABK) \cap (ACD) = (AJ)$

(AKD) et (BCD) — Les points D et K appartiennent aux deux plans.

$(AKD) \cap (BCD) = (DK)$

$I \quad ; \quad I \quad ; \quad (AJ) \quad ; \quad (DK)$

À ne pas faire : La droite (CK) perce le plan (ABD) en K — La droite (CK) perce le plan (ABD) en I, le milieu de $[BD]$. K est dans la face BCD, pas dans le plan (ABD) : il faut prolonger (CK) jusqu'à la droite (BD).

21. MÉTHODE

Construire le point où une droite perce un plan

CE QU'IL DIT

Kifech nebniw le point win droite perce plan ? Et-tari9a fiha trois étapes. Ne5dhou plan auxiliaire elli fih el droite. Nal9aw la droite d'intersection mta3 el plan auxiliaire m3a el plan P. W le point elli nlawwjou 3lih houwa win el droite mte3na tetle9a m3a la droite d'intersection hedhi. Mathalan fi le tétraèdre ABCD : la

droite (CF) fi le plan (BCM). W l'intersection mta3 le plan (BCM) w le plan (ABD) hiya la droite (BN). Donc la droite (CF) perce le plan (ABD) fi point 3la la droite (BN).

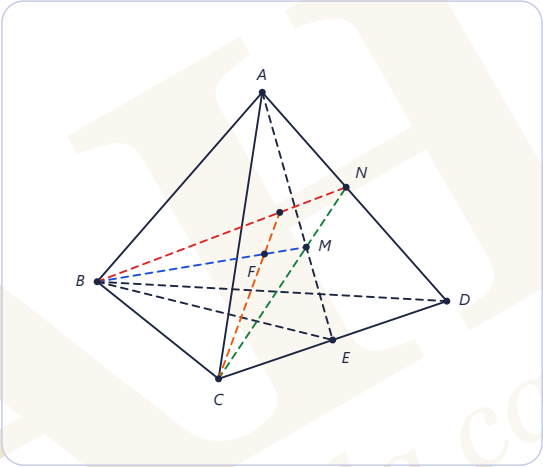
كيفاش نبنيو le point وين le plan P ؟ droite perce plan الطريقة فيها trois étapes . ناخذو plan auxiliaire اللي فيه الـ droite . نلقاو la droite d'intersection متاع الـ plan auxiliaire
مع الـ le point w le plan P . اللي نلوّجو عليه هو وين الـ droite متاعنا تتلاقى مع la droite d'intersection هاذي . مثلاً في le tétraèdre A B C D : la droite C F في le plan B C هي le plan A B D متاع M . w l'intersection
. la droite B N على point في la droite B N . donc la droite C F perce le plan A B D

Comment construire le point où une droite perce un plan ? La méthode a trois étapes. On prend un plan auxiliaire qui contient la droite. On détermine la droite d'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan P. Et le point cherché est celui où notre droite coupe cette droite d'intersection. Par exemple, dans le tétraèdre A B C D : la droite C F est dans le plan B C M. Et l'intersection du plan B C M et du plan A B D est la droite B N. Donc la droite C F perce le plan A B D en un point de la droite B N.

Dans le tétraèdre $ABCD$, le point E appartient à l'arête $[DC]$ et le point F appartient au plan (ABE). On se propose de construire le point d'intersection de la droite (CF) et du plan (ABD).

Méthode. Pour construire le point où une droite perce un plan P :

- on choisit un plan **auxiliaire** qui contient la droite ;
- on détermine la droite d'intersection de ce plan auxiliaire avec P ;
- le point cherché est le point où la droite donnée coupe cette droite d'intersection.



La droite (CF) perce le plan (ABD) en un point de la droite (BN).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point E est sur l'arête [DC]. Le point F est à l'intérieur du triangle ABE. La droite (BF), en bleu, coupe le segment [AE] en M. La droite (CM), en vert, coupe l'arête [AD] en N. La droite (BN) est tracée en rouge. La droite (CF), en orange, la coupe en un point : c'est là que (CF) perce le plan (ABD).

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le plan (ABE), les droites (BF) et (AE) se coupent en M. Dans le plan (ACD), les droites (CM) et (AD) se coupent en N. Justifier que la droite (CF) perce le plan (ABD) en un point de la droite (BN).

Le plan auxiliaire — F est sur la droite (BM) : la droite (CF) est contenue dans le plan (BCM). C'est le plan auxiliaire.
$(CF) \subset (BCM)$

Deux points communs — B est commun aux plans (BCM) et (ABD). N est sur (CM), donc dans le plan (BCM), et sur (AD), donc dans le plan (ABD).
$(BCM) \cap (ABD) = (BN)$

Conclure — Le point où (CF) perce le plan (ABD) est dans le plan (BCM) et dans le plan (ABD) : il est sur leur droite d'intersection.
$(CF) \cap (ABD) \subset (BN)$

(CF) perce (ABD) au point où elle coupe (BN)

À ne pas faire : La droite (CF) perce le plan (ABD) au point F — (CF) perce le plan (ABD) au point où elle coupe la droite (BN). F est un point du plan (ABE) : rien ne dit qu'il est dans le plan (ABD). Il faut passer par le plan auxiliaire (BCM).

22. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : le tétraèdre qui bascule

CE QU'IL DIT

Tawa problème bech nemchiw ab3ed. 3andna tétraèdre régulier, les faces mte3ou mra99min men un l quatre, w houwa ma7tout 3la la face un. Fi koll étape, n9albouh 3la arête men la base, w nektbou le numéro mta3 la face elli jet louta. N3awdou deux mille six marrat, w nejm3ou les numéros el koll, m3a el un mta3 el bideya. El fekra : ki yet9leb, la face elli louta dima tetbaddel. Donc deux numéros wra b3adhhom dima différents. Bech la somme tkoun kbira, nbaddlou bin quatre w trois. W bech tkoun sghira, nbaddlou bin deux w un.

توّة problème باش نمشيو أبعد . عندنا tétraèdre régulier ، les faces . la face un هو محطوط على quatre ، w لـ un متاعو مرقّمين من ، étape كل في . نقلبوه على arête ، la base ، w من نكتبو le numéro متاع la face اللي جات لوطة . نعاودو deux mille six مرّات ، w نجمعو les numéros الكل ، مع الـ un متاع البداية . الفكرة : كي يتقلب ، la face اللي لوطة ديما تتبدّل . différents وراء بعضهم ديما donc deux numéros ، نبدّلو بين w . la somme باش تكون كبيرة ، نبدّلو بين quatre w trois . w باش تكون صغيرة ، نبدّلو بين deux un .

Voici un problème pour aller plus loin. On a un tétraèdre régulier dont les faces sont numérotées de un à quatre, et il est posé sur la face un. À chaque étape, on le fait basculer autour d'une arête de la base, et on note le numéro de la face qui se retrouve en bas. On recommence deux mille six fois, et on additionne tous les numéros, avec le un du départ. L'idée : quand il bascule, la face du bas change toujours. Donc deux numéros qui se suivent sont toujours différents. Pour que la somme soit grande, on alterne entre quatre et trois. Et pour qu'elle soit petite, on alterne entre deux et un.

Les faces d'un tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Le tétraèdre est posé sur la table, la face « 1 » contre cette table. Une étape consiste à faire basculer le tétraèdre autour de l'une quelconque des arêtes de sa base. À l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme S de tous ces nombres après 2006 étapes, en comptant le « 1 » initial.

Quand le tétraèdre bascule, la face posée **change** toujours, et chacune des trois autres faces peut venir se poser. Deux numéros notés à la suite sont donc toujours différents, et c'est la seule contrainte.

EXEMPLE TRAITÉ

Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut obtenir pour la somme S.

Compter — On note le « 1 » initial, puis 2006 numéros : on les regroupe en 1003 paires de numéros consécutifs.

$2006 = 2 \times 1003$

Le maximum — Deux numéros consécutifs sont différents : leur somme vaut au plus $4 + 3$. On atteint ce maximum en alternant les faces « 4 » et « 3 ».

$S_{\max} = 1 + 1003 \times 7 = 7022$

Le minimum — De même, la somme de deux numéros consécutifs vaut au moins $2 + 1$. On atteint ce minimum en alternant les faces « 2 » et « 1 ».

$S_{\min} = 1 + 1003 \times 3 = 3010$

$$S_{\max} = 7022 \quad ; \quad S_{\min} = 3010$$

23. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : compter dans un cube

CE QU'IL DIT

Tawa deux problèmes 3la le cube. Le premier : 3andna 2050 mouches fi boîte cubique d'arête 8. N9ossou el boîte l cubes d'arête 1 : nal9aw 512 cubes. Ken koll cube fih quatre mouches 3al akthar, ykoun el majmou3 2048 3al akthar. Ama 3andna 2050. Donc famma cube fih cinq mouches 3al a9all. Le deuxième : cube mad-houn, ma9sous l 1000 petits cubes. Bech na7sbou elli fihom face mad-houna, na7sbou elli ma fihomch : huit au cube, ya3ni 512. Donc el be9i 1000 moins 512, ya3ni 488.

توّة deux problèmes على le premier . عندنا deux mille cinquante mouches في boîte cubique d'arête huit . نقصّو الـ boîte لـ cubes d'arête un : نلقاو cinq . cent douze cubes . كان كل cube فيه quatre mouches على الأكثر ، يكون المجموع على الأكثر deux mille quarante-huit . أما عندنا donc . deux mille cinquante فمّا le deuxième : cube . مدهون ، مقصوص لـ mille petits cubes . باش نحسبو اللي فيهم face مدهونة ، نحسبو اللي ما فيهمش : huit au cube ، يعني donc . cube ، يعني mille moins cinq cent douze الباقي cinq cent douze . quatre cent quatre-vingt-huit

Voici deux problèmes sur le cube. Le premier : on a deux mille cinquante mouches dans une boîte cubique d'arête huit. On découpe la boîte en cubes d'arête un : on en trouve cinq cent douze. Si chaque cube contenait au plus quatre mouches, le total serait au plus deux mille quarante-huit. Or on en a deux mille cinquante. Donc il y a un cube qui contient au moins cinq mouches. Le deuxième : un cube peint, découpé en mille petits cubes. Pour compter ceux qui ont une face peinte, on compte ceux qui n'en ont pas : huit au cube, c'est-à-dire cinq cent douze. Il en reste donc mille moins cinq cent douze, c'est-à-dire quatre cent quatre-vingt-huit.

Des mouches dans une boîte. 2050 mouches sont enfermées dans une boîte cubique d'arête 8. On découpe la boîte en $8^3 = 512$ cubes d'arête 1. Si chacun de ces cubes contenait au plus 4 mouches, il y aurait au plus $4 \times 512 = 2048$ mouches. Or il y en a 2050 : à tout moment, il y a donc un cube d'arête 1 où se trouvent au moins 5 mouches.

Un cube peint. On peint les faces d'un cube en bois, puis on le découpe en 1000 petits cubes identiques par des traits de scie parallèles aux faces. Pour compter les petits cubes qui ont au moins une face peinte, on compte d'abord ceux qui n'en ont **aucune** : ce sont les cubes de l'intérieur.

EXEMPLE TRAITÉ

On peint les faces d'un cube en bois, puis on le découpe en 1000 cubes identiques à l'aide de traits de scie parallèles aux faces. Combien y a-t-il de petits cubes qui ont au moins une face peinte ?

Le découpage — $1000 = 10^3$: il y a 10 petits cubes le long de chaque arête.

$1000 = 10^3$

L'intérieur — Les petits cubes sans aucune face peinte forment un cube intérieur : on enlève une couche de chaque côté, il reste 8 petits cubes le long de chaque arête.

$8^3 = 512$

La différence — Tous les autres ont au moins une face peinte.

$1000 - 512 = 488$

488

À ne pas faire : Il y a $6 \times 100 = 600$ petits cubes peints, 100 par face — Il y a $1000 - 512 = 488$ petits cubes peints. En comptant face par face, les petits cubes des arêtes et des coins sont comptés plusieurs fois.

---

24. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : cubes et carrés

CE QU'IL DIT

E5er problème : n7ebbou nektbou le cube mta3 entier k différence de deux carrés. Nesta3mlou l'identité : a au carré moins b au carré égale (a moins b) fois (a plus b). Mathalan cinq au cube égale 125, w 125 égale 5 fois 25. Ne5dhou a moins b égale 5, w a plus b égale 25. Nal9aw a égale 15 w b égale 10. W bel7a99 : quinze au carré moins dix au carré égale 125. W nafs et-tari9a l treize au cube : nal9aw a égale 91 w b égale 78.

آخر : problème نحبّو نكتبو le cube متاع entier كـ différence de deux carrés . نستعملو l'identité : a au carré moins b au carré égale (a moins b) fois (a plus b) . مثلاً cinq au cube égale cent vingt-cinq ، w cent vingt-cinq égale cinq fois vingt-cinq . ناخذو a plus b égale vingt-cinq ، w a moins b égale cinq . نلقاو a égale quinze w b égale dix . w بالحقّ : treize au cube نلقاو : a égale quatre-vingt-onze w b égale soixante-dix-huit .

Dernier problème : on veut écrire le cube d'un entier comme différence de deux carrés. On utilise l'identité : a au carré moins b au carré égale (a moins b) fois (a plus b). Par exemple, cinq au cube égale cent vingt-cinq, et cent vingt-cinq égale cinq fois vingt-cinq. On prend a moins b égale cinq, et a plus b égale vingt-cinq. On trouve a égale quinze et b égale dix. Et en effet : quinze au carré moins dix au carré égale cent vingt-cinq. Et la même méthode pour treize au cube : on trouve a égale quatre-vingt-onze et b égale soixante-dix-huit.

On cherche à écrire le cube d'un entier comme différence de deux carrés. L'outil est l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$: il suffit d'écrire le cube comme un produit de deux facteurs de même parité — par exemple $n \times n^2$ — et de résoudre $a - b$ égale le petit facteur, $a + b$ égale le grand.

Géométriquement, un parallélépipède rectangle de dimensions a, a et 1 a pour volume a^2 : le volume d'un cube d'arête 13 est la différence des volumes de deux parallélépipèdes de dimensions $(a, a, 1)$ et $(b, b, 1)$ dès que $a^2 - b^2 = 13^3$.

C'est toujours possible : pour tout entier naturel n, $n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$.

LE CUBE D'UN ENTIER, DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS

$$n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

EXEMPLE TRAITÉ

a) Trouver deux entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 5^3$. b) Écrire 8^3 comme différence des carrés de deux entiers naturels. c) Déterminer deux entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 13^3$.

Factoriser — $5^3 = 125 = 5 \times 25$. On cherche a et b tels que $a - b = 5$ et $a + b = 25$: en ajoutant, $2a = 30$.

$a = 15 \quad$ et $\quad b = 10$

Vérifier — On calcule la différence des carrés.

$15^2 - 10^2 = 225 - 100 = 125$

Le cube de 8 — $8^3 = 512 = 8 \times 64$: $a - b = 8$ et $a + b = 64$ donnent $a = 36$ et $b = 28$.

$36^2 - 28^2 = 1296 - 784 = 512$

Le cube de 13 — $13^3 = 2197 = 13 \times 169$: $a - b = 13$ et $a + b = 169$ donnent $a = 91$ et $b = 78$.

$91^2 - 78^2 = 8281 - 6084 = 2197$

$13^3 = 91^2 - 78^2$

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Cube d'arête a : petite diagonale $a\sqrt{2}$, grande diagonale $a\sqrt{3}$, aire latérale $4a^2$, volume a^3. Parallélépipède rectangle : diagonale $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
   > Fi cube d'arête a : la petite diagonale égale a racine carrée de deux, la grande diagonale égale a racine carrée de trois, l'aire latérale égale quatre a au carré, w le volume égale a au cube. W fi parallélépipède rectangle, la diagonale égale racine carrée de (a au carré plus b au carré plus c au carré).
   > *Dans un cube d'arête a : la petite diagonale égale a racine carrée de deux, la grande diagonale égale a racine carrée de trois, l'aire latérale égale quatre a au carré, et le volume égale a au cube. Et dans un parallélépipède rectangle, la diagonale égale racine carrée de (a au carré plus b au carré plus c au carré).*
2. Axiomes : par trois points non alignés passe un plan et un seul ; un plan qui contient deux points distincts contient toute leur droite ; deux plans distincts qui ont un point commun sont sécants suivant une droite ; la géométrie plane s'applique dans chaque plan.
   > Les quatre axiomes : par trois points non alignés passe un plan et un seul. El plan elli fih deux points distincts, fih la droite mte3hom el koll. Deux plans distincts 3andhom point commun, sécants suivant une droite. W la géométrie plane te5dem fi koll plan.
   > *Les quatre axiomes : par trois points non alignés passe un plan et un seul. Un plan qui contient deux points distincts contient toute leur droite. Deux plans distincts qui ont un point commun sont sécants suivant une droite. Et la géométrie plane s'applique dans chaque plan.*
3. Un plan est déterminé par trois points non alignés, par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite, ou par deux droites sécantes.
   > El plan n3arrfouh b trois façons : trois points non alignés, walla droite w point elli mouch 3liha, walla deux droites sécantes.
   > *Un plan se détermine de trois façons : trois points non alignés, ou une droite et un point qui n'est pas sur elle, ou deux droites sécantes.*
4. Des points, ou des droites, sont coplanaires lorsqu'ils sont contenus dans un même plan. Quatre points ne sont pas toujours coplanaires.
   > Des points walla des droites coplanaires, ki ykounou el koll fi nafs el plan. Quatre points mouch dima coplanaires.
   > *Des points, ou des droites, sont coplanaires lorsqu'ils sont tous dans un même plan. Quatre points ne sont pas toujours coplanaires.*
5. Deux droites coplanaires sont sécantes lorsque leur intersection est un point. Dans l'espace, deux droites sans point commun sont parallèles ou non coplanaires.
   > Deux droites coplanaires sécantes ki l'intersection mte3hom tkoun point. W fi l'espace, deux droites ma 3andhomch point commun, parallèles walla non coplanaires.
   > *Deux droites coplanaires sont sécantes lorsque leur intersection est un point. Et dans l'espace, deux droites sans point commun sont parallèles ou non coplanaires.*
6. Une droite et un plan sont sécants si leur intersection est un point : la droite perce le plan. Une droite qui a deux points dans un plan y est contenue.
   > Droite w plan sécants ki l'intersection mte3hom tkoun point : n9oulou la droite perce le plan. W droite 3andha deux points fi plan, hiya el koll fih.
   > *Une droite et un plan sont sécants lorsque leur intersection est un point : on dit que la droite perce le plan. Et une droite qui a deux points dans un plan y est tout entière.*
7. Deux plans sont sécants lorsque leur intersection est une droite : on la détermine par deux points communs.
   > Deux plans sécants ki l'intersection mte3hom tkoun droite. Bech nal9awha, nlawwjou 3la deux points communs.
   > *Deux plans sont sécants lorsque leur intersection est une droite. Pour la trouver, on cherche deux points communs.*
8. Pour montrer que des points sont alignés, on montre qu'ils appartiennent à deux plans distincts.
   > Bech nbayynou elli des points alignés, nbayynou elli houma fi deux plans distincts.
   > *Pour montrer que des points sont alignés, on montre qu'ils appartiennent à deux plans distincts.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : par trois points non alignés passe un plan et un seul. Deux droites sécantes dima coplanaires, w 9bal ma t9oul sécantes, lawwej 3la plan fih ez-zouz. La droite elli 3andha deux points fi plan, hiya el koll fih. W l'intersection mta3 deux plans sécants droite : lawwej 3la deux points communs. W ma tthabbetch bel 3in : el dessin en perspective ynajjem yghalltek. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : deux droites sécantes . ديما w ، coplanaires قُبَلْ ما تقول sécantes ، لوّج على par trois points non alignés passe un plan et un seul . plan فيه الزوز . la droite اللي عندها deux points في plan ، هي الكل فيه . w l'intersection متاع droite : deux plans sécants لوّج على w . deux points communs ما . exercices لـ يالله . ينجّم يغلّطك dessin en perspective : الـ بالعين تتبّتش .

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : par trois points non alignés passe un plan et un seul. Deux droites sécantes sont toujours coplanaires, et avant de dire sécantes, cherche un plan qui les contient toutes les deux. Une droite qui a deux points dans un plan y est tout entière. Et l'intersection de deux plans sécants est une droite : cherche deux points communs. Et ne vérifie pas à l'œil : un dessin en perspective peut te tromper. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · LES AXIOMES DE BASE

c'est quoi un axiome | chnowa axiome | axiome ma3neha chnowa | définition d'un axiome

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

axiome : une propriété admise sans démonstration

CE QU'IL RÉPOND

L'axiome houwa 9a3da na9blouha men ghir démonstration, w nebniw 3liha el be9i. Fi la géométrie dans l'espace 3andna quatre axiomes. Mathalan l'axiome un y9oul : par trois points non alignés passe un plan et un seul.

l'axiome هو قاعدة نقبلوها من غير démonstration ، w نبنيو عليها الباقي . في la géométrie dans l'espace عندنا quatre axiomes . مثلاً l'axiome un يقول : par trois points non alignés passe un plan et un seul .

Un axiome est une règle qu'on admet sans démonstration, et sur laquelle on construit le reste. En géométrie dans l'espace, nous avons quatre axiomes. Par exemple, l'axiome un dit : par trois points non alignés passe un plan et un seul.

QUESTION 2 · LES AXIOMES DE BASE

pourquoi les trois points doivent être non alignés | 3lech lezem trois points non alignés | trois points alignés ça donne un plan ? | et si les trois points sont alignés

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

trois points non alignés $\Rightarrow$ un plan et un seul

CE QU'IL RÉPOND

5ater ken les trois points alignés, houma 3la droite wa7da, w el droite hedhi yet3adda menha 3adad infini men les plans. Ma najjmouch ne5tarou plan wa7ed. Ama ken les trois points non alignés, yet3adda menhom plan wa7ed bark : hedha l'axiome un.

les trois points خاطر كان alignés ، هوما على droite وحدة ، w الـ droite هاذي يتعدّى منها عدد infini من les plans . ما نجّموش نختارو plan واحد . أما كان les trois points non alignés ، يتعدّى منهم plan واحد برك : هذا l'axiome un .

Parce que si les trois points sont alignés, ils sont sur une même droite, et par cette droite passe une infinité de plans. On ne peut pas en choisir un seul. Mais si les trois points ne sont pas alignés, il passe par eux un seul plan : c'est l'axiome un.

QUESTION 3 · EXEMPLE : UN PLAN QUI COUPE TROIS ARÊTES

est-ce que le plan est infini | le plan (ABC) est limité au triangle ABC ? | el plan infini walla le | le plan s arrête au triangle ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

le plan (ABC) est illimité

CE QU'IL RÉPOND

El plan ma youfech : houwa illimité, ykammel men koll jiha. Le plan (ABC) mouch el triangle ABC bark, houwa el plan el koll elli fih el triangle. 3la hedheka nnajjmou ntawwlou les droites mte3ou bech nal9aw des points d'intersection barra mel solide.

الـ plan ما يوفاش : هو illimité ، يكمّل من كل جهة . le plan A B C موش الـ triangle A B C برك ، هو الـ plan الكل اللي فيه الـ triangle . على هذاكا ننجّمو نطوّلو les droites متاعو باش نلقاو des points d'intersection برّا من الـ solide .

Un plan ne s'arrête pas : il est illimité, il se prolonge de tous les côtés. Le plan A B C n'est pas seulement le triangle A B C, c'est tout le plan qui contient ce triangle. C'est pour cela qu'on peut prolonger ses droites pour trouver des points d'intersection en dehors du solide.

QUESTION 4 · LES AXIOMES DE BASE

que veut dire la notation (ABC) | chnowa ma3neha (ABC) bel parenthèses | différence entre (AB) et [AB] | notation (AB) w [AB] chnowa el far9

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

(AB) : droite ; $[AB]$: segment ; (ABC) : plan

CE QU'IL RÉPOND

B les parenthèses, (AB) hiya la droite elli tet3adda men A w B, w hiya illimitée. B les crochets, [AB] houwa le segment, men A l B bark. W b trois lettres bin parenthèses, (ABC) houwa le plan elli yet3adda men les trois points A, B w C.

parenthèses ، بين trois lettres بـ w . برك B لـ A من ، le segment هو les crochets ، A B بـ . illimitée هي A w B ، w من اللي تتعدّى la droite هي les parenthèses ، A B بـ le plan هو A B C اللي يتعدّى من A ، B w C . les trois points

Avec des parenthèses, A B est la droite qui passe par A et B, et elle est illimitée. Avec des crochets, A B est le segment, de A à B seulement. Et avec trois lettres entre parenthèses, A B C est le plan qui passe par les trois points A, B et C.

QUESTION 5 · POINTS COPLANAIRES, DROITES COPLANAIRES

c'est quoi des points coplanaires | chnowa coplanaires | coplanaires ma3neha chnowa | définition de coplanaires

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

coplanaires : contenus dans un même plan

CE QU'IL RÉPOND

Des points coplanaires houma des points elli el koll fi nafs el plan. W kif kif, des droites coplanaires houma des droites elli el koll fi nafs el plan. Mathalan les sommets mta3 face fi cube coplanaires.

les مثلاً . plan الـ نفس في الكل الكل اللي des points هوما des points coplanaires
des droites هوما des droites coplanaires ، كيف كيف plan . w الـ نفس في الكل اللي des points
. cube coplanaires في face متاع sommets

Des points coplanaires sont des points qui sont tous dans un même plan. De même, des droites coplanaires sont des droites qui sont toutes dans un même plan. Par exemple, les sommets d'une face d'un cube sont coplanaires.

QUESTION 6 · POINTS COPLANAIRES, DROITES COPLANAIRES

est-ce que quatre points sont toujours coplanaires | quatre points dima coplanaires ? | 4 points coplanaires toujours ? | kifech na3ref quatre points coplanaires walla le

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

trois points : toujours coplanaires
quatre points : pas toujours

CE QU'IL RÉPOND

Le, mouch dima. Trois points dima coplanaires, ama quatre points le : les quatre sommets mta3 tétraèdre mouch coplanaires. Bech ta3ref, lawwej 3la le plan elli yet3adda men trois points menhom, w chouf le quatrième point mawjoud fih walla le.

le plan اللي يتعدّى على لوّج ، تعرف باش . coplanaires موش tétraèdre متاع les quatre sommets : لا quatre points أما ، coplanaires ديما trois points . موش ، لا
من trois points منهم ، w شوف le quatrième point موجود فيه ولّا لا .

Non, pas toujours. Trois points sont toujours coplanaires, mais pas quatre : les quatre sommets d'un tétraèdre ne sont pas coplanaires. Pour le savoir, cherche le plan qui passe par trois de ces points, et regarde si le quatrième point lui appartient ou non.

QUESTION 7 · POUR COMPRENDRE : DEUX DROITES DANS L'ESPACE

deux droites qui ne se coupent pas sont-elles parallèles | zouz droites ma yet9at3ouch ma3neha parallèles ? | deux droites sans point commun sont forcément parallèles ? | droites parallèles walla non coplanaires kifech na3ref

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$D \cap D' = \varnothing$: parallèles ou non coplanaires

CE QU'IL RÉPOND

Fel plan ey, ama fi l'espace le. Zouz droites ma 3andhomch point commun, ynajjmou ykounou parallèles, w ynajjmou ykounou mouch coplanaires. El far9 : les droites parallèles fi nafs el plan, w les droites non coplanaires ma fammech plan ylemmhom.

les droites parallèles : الفرق . coplanaires موش ينجّمو يكونو parallèles ، w ينجّمو يكونو point commun ما عندهمش droites زوز . لا l'espace في ، أما في plan الـ إي
في نفس الـ les droites non coplanaires ، w plan ما فمّاش plan يلمّهم .

Dans le plan oui, mais dans l'espace non. Deux droites sans point commun peuvent être parallèles, et elles peuvent aussi être non coplanaires. La différence : les droites parallèles sont dans un même plan, alors qu'aucun plan ne contient des droites non coplanaires.

QUESTION 8 · POUR COMPRENDRE : DEUX DROITES DANS L'ESPACE

quelles sont les positions relatives de deux droites | chnouma les positions mta3 deux droites fi l espace | positions de deux droites dans l espace | deux droites 9adech men position

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

sécantes ; parallèles ; non coplanaires

CE QU'IL RÉPOND

Fi l'espace, deux droites distinctes 3andhom trois positions. Ynajjmou ykounou sécantes : 3andhom point wa7ed commun. Ynajjmou ykounou parallèles : fi nafs el plan w ma yetle9awch. W ynajjmou ykounou non coplanaires : ma fammech plan ylemmhom, w ma 3andhomch point commun.

في نفس الـ w plan ما : parallèles ينجّمو يكونو . commun واحد point عندهم : sécantes ينجّمو يكونو . trois positions عندهم l'espace ، deux droites distinctes في
يتلاقاوش . w ينجّمو يكونو non coplanaires : ما فمّاش plan يلمّهم ، w ما عندهمش point commun .

Dans l'espace, deux droites distinctes ont trois positions possibles. Elles peuvent être sécantes : elles ont un seul point commun. Elles peuvent être parallèles : dans un même plan, sans se rencontrer. Et elles peuvent être non coplanaires : aucun plan ne les contient, et elles n'ont pas de point commun.

QUESTION 9 · DROITES SÉCANTES

c'est quoi deux droites sécantes | chnowa droites sécantes | sécantes ma3neha chnowa | définition de droites sécantes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$D \cap D' = \{A\}$

CE QU'IL RÉPOND

Deux droites sécantes houma deux droites coplanaires elli l'intersection mte3hom point wa7ed. Ya3ni houma fi nafs el plan, w yetle9aw fi point wa7ed bark.

deux droites sécantes هوما deux droites coplanaires اللي l'intersection متاعهم point واحد . يعني هوما في نفس الـ w ، plan يتلاقاو في point واحد برك .

Deux droites sécantes sont deux droites coplanaires dont l'intersection est un point. Autrement dit, elles sont dans un même plan, et elles se coupent en un seul point.

QUESTION 10 · DROITES SÉCANTES

comment montrer que deux droites sont sécantes | kifech nbayen elli zouz droites sécantes | comment prouver que deux droites se coupent | méthode pour montrer droites sécantes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

coplanaires et non parallèles ⇒ sécantes

CE QU'IL RÉPOND

Famma deux étapes. Bayyen 9bal elli el deux droites coplanaires, ya3ni lawwej 3la plan fih ez-zouz. W ba3d bayyen elli fel plan hedha mouch parallèles, mathalan b le théorème de Thalès. Deux droites coplanaires w mouch parallèles, houma sécantes.

فمّا deux étapes . بيّن قُبَلْ اللي الـ deux droites coplanaires ، يعني لوّج على plan فيه الزوز . w بعد بيّن اللي في الـ plan هذا موش parallèles ، مثلاً بـ le théorème de Thalès . deux droites coplanaires w موش parallèles ، هوما sécantes .

Il y a deux étapes. Montre d'abord que les deux droites sont coplanaires, c'est-à-dire trouve un plan qui les contient toutes les deux. Puis montre que, dans ce plan, elles ne sont pas parallèles, par exemple avec le théorème de Thalès. Deux droites coplanaires et non parallèles sont sécantes.

QUESTION 11 · EXEMPLE : COPLANAIRES OU NON ?

sur le dessin les deux droites se croisent mais pas dans l espace pourquoi | 3lech 3la el dessin les droites yet9at3ou w houma mouch sécantes | les droites se croisent sur la figure est-ce suffisant | el dessin ybayen elli yet9at3ou

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

se croiser sur le dessin ≠ être sécantes

CE QU'IL RÉPOND

5ater el dessin en perspective ma ywarrich koll chay. Zouz droites non coplanaires ynajjmou ybenou metle9in 3al war9a, w houma fi l'espace wa7da 9oddem lo5ra w ma yetle9awch. 3la hedheka ma nthabbtouch bel 3in : nlawwjou dima 3la plan fih el deux droites.

خاطر الـ dessin en perspective ما يورّيش كل شي . زوز droites non coplanaires ينجّمو يبانو متلاقين على الورقة ، w هوما في l'espace وحدة قدّام الأخرى w ما يتلاقاوش . على هذاكا ما نثبّتوش بالعين : نلوّجو ديما على plan فيه الـ deux droites .

Parce qu'un dessin en perspective ne montre pas tout. Deux droites non coplanaires peuvent sembler se croiser sur la feuille, alors que dans l'espace l'une passe devant l'autre sans la rencontrer. C'est pourquoi on ne vérifie pas à l'œil : on cherche toujours un plan qui contient les deux droites.

QUESTION 12 · UN PLAN PAR DEUX DROITES SÉCANTES

comment déterminer un plan | kifech n3arref plan | quelles sont les façons de déterminer un plan | chnouma les trois façons bech n3arrfou plan

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

trois points non alignés
une droite et un point hors de la droite
deux droites sécantes

CE QU'IL RÉPOND

3andna trois façons. Trois points non alignés. Walla droite w point elli mouch 3al droite hedhi. Walla deux droites sécantes. Fi koll 7ala, famma plan wa7ed bark.

عندنا trois points non alignés . trois façons . وﻷ droite w point اللي موش على الـ droite هاذي . وﻷ deux droites sécantes . في كل حالة ، فمّا plan واحد برك .

On a trois façons. Trois points non alignés. Ou bien une droite et un point qui n'est pas sur cette droite. Ou bien deux droites sécantes. Dans chaque cas, il existe un seul plan.

QUESTION 13 · UN PLAN PAR UNE DROITE ET UN POINT

et si le point est sur la droite | ken el point 3la la droite chnowa ysir | pourquoi le point ne doit pas appartenir à la droite | point appartient à la droite ça donne un plan ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$A \in D$: une infinité de plans

CE QU'IL RÉPOND

Ken el point A 3la la droite D, ma 3adech 3andna plan wa7ed : koll plan fih la droite D, fih A zeda. W famma 3adad infini men les plans elli fihom la droite D. 3la hedheka el théorème yechtret elli A ma ykounch 3la D.

كان الـ point A على la droite D ، ما عادش عندنا plan واحد : كل plan فيه la droite D ، فيه A زادة . w فمّا عدد infini من les plans اللي فيهم la droite D . على هذاكا الـ théorème يشترط اللي A ما يكونش على D .

Si le point A est sur la droite D, on n'a plus un seul plan : tout plan qui contient la droite D contient aussi A. Et il y a une infinité de plans qui contiennent la droite D. C'est pourquoi le théorème exige que A ne soit pas sur D.

QUESTION 14 · UNE DROITE ET UN PLAN

ça veut dire quoi une droite perce un plan | chnowa ma3neha la droite perce le plan | perce le plan ya3ni chnowa | définition de percer un plan

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$D \cap P = \{A\}$

CE QU'IL RÉPOND

N9oulou la droite perce le plan ki la droite w le plan sécants, ya3ni l'intersection mte3hom point wa7ed. N9oulou zeda : le plan coupe la droite. Les deux expressions 3andhom nafs el ma3na.

نقولو la droite perce le plan كي la droite w le plan sécants ، يعني l'intersection متاعهم point واحد . نقولو زادة : le plan coupe la droite . les deux expressions عندهم نفس المعنى .

On dit que la droite perce le plan lorsque la droite et le plan sont sécants, c'est-à-dire lorsque leur intersection est un seul point. On dit aussi : le plan coupe la droite. Les deux expressions ont le même sens.

QUESTION 15 · UNE DROITE ET UN PLAN

quelles sont les positions d'une droite et d'un plan | chnouma les positions mta3 droite et plan | positions relatives droite et plan | droite et un plan 9adech men position

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$D \cap P = \{A\} \quad ; \quad D \cap P = \varnothing \quad ; \quad D \subset P$

CE QU'IL RÉPOND

Famma trois positions. La droite w le plan sécants : 3andhom point wa7ed commun. Walla ma 3andhom 7atta point commun. Walla la droite el koll fi le plan. W ma fammech 7ala o5ra : droite 3andha deux points fi plan, hiya el koll fih.

فمّا trois positions : عندهم point واحد commun . ولّا ما عندهم حتّى point commun . ولّا la droite في الكل . w le plan ما فمّاش حالة أخرى : droite عندها deux points في plan ، هي الكل فيه .

Il y a trois positions. La droite et le plan sont sécants : ils ont un seul point commun. Ou bien ils n'ont aucun point commun. Ou bien la droite est tout entière dans le plan. Et il n'y a pas d'autre cas : une droite qui a deux points dans un plan y est tout entière.

QUESTION 16 · UNE DROITE ET UN PLAN

comment montrer qu'une droite est incluse dans un plan | kifech nbayen elli droite incluse fi plan | droite contenue dans un plan comment le prouver | droite incluse dans le plan kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$A \in P$ et $B \in P \Rightarrow (AB) \subset P$

CE QU'IL RÉPOND

Yekfi tal9a deux points distincts mel droite elli houma fel plan. B l'axiome deux, el plan elli fih deux points distincts, fih la droite el koll elli tet3adda menhom. Mathalan la droite (AB) fi le plan (ABC), 5ater A w B fel plan hedha.

يكفي تلقى deux points distincts من الـ droite اللي هوما في الـ plan . بـ l'axiome deux ، الـ plan اللي فيه deux points distincts ، فيه la droite الكل اللي تتعدّى منهم . مثلاً la droite A B في le plan A B C ، خاطر A w B في الـ plan هذا .

Il suffit de trouver deux points distincts de la droite qui sont dans le plan. Par l'axiome deux, un plan qui contient deux points distincts contient toute la droite qui passe par eux. Par exemple, la droite A B est dans le plan A B C, car A et B sont dans ce plan.

QUESTION 17 · DEUX PLANS

quelles sont les positions relatives de deux plans | chnouma les positions mta3 deux plans | positions de deux plans dans l espace | deux plans 9adech men position

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$P \cap Q = D \quad ; \quad P \cap Q = \varnothing \quad ; \quad P = Q$

CE QU'IL RÉPOND

Deux plans 3andhom trois positions. Sécants : l'intersection mte3hom droite. Walla ma 3andhom 7atta point commun. Walla confondus, ya3ni houma nafs el plan.

deux plans عندهم : sécants . trois positions متاعهم droite . ولّا ما عندهم حتّى point commun . ولّا confondus ، يعني هوما نفس الـ plan .

Deux plans ont trois positions possibles. Sécants : leur intersection est une droite. Ou bien ils n'ont aucun point commun. Ou bien ils sont confondus, c'est-à-dire que c'est le même plan.

QUESTION 18 · DEUX PLANS

est-ce que deux plans peuvent se couper en un seul point | deux plans yet9at3ou fi point wa7ed ? | intersection de deux plans peut être un seul point ? | deux plans un seul point commun

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

deux plans sécants : une droite commune

CE QU'IL RÉPOND

Le, mosta7il. B l'axiome trois, ken deux plans distincts 3andhom point commun, 3andhom droite kemla commune elli tet3adda mel point hedha. L'intersection mta3 deux plans sécants dima droite.

لا ، مستحيل . بـ l'axiome trois ، كان deux plans distincts عندهم point commun ، عندهم droite كاملة commune اللي تتعدّى من الـ point هذا . متاع l'intersection deux plans sécants ديما droite .

Non, c'est impossible. Par l'axiome trois, si deux plans distincts ont un point commun, ils ont toute une droite commune qui passe par ce point. L'intersection de deux plans sécants est toujours une droite.

QUESTION 19 · DÉTERMINER L'INTERSECTION DE DEUX PLANS

comment trouver l'intersection de deux plans | kifech nal9a l'intersection mta3 deux plans | méthode intersection de deux plans | comment déterminer la droite d'intersection de deux plans

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

M et N communs $\Rightarrow P \cap Q = (MN)$

CE QU'IL RÉPOND

Lawwej 3la deux points distincts communs lez-zouz plans. Koll point ykoun 3la droite men le premier plan w 3la droite men le deuxième plan. Ki tal9ahom, l'intersection hiya la droite elli tet3adda menhom. W ken ma tchoufch ken point wa7ed, tawwel deux droites coplanaires 7atta yetle9aw.

لوّج على deux points distincts communs للزوز plans . كل point يكون على droite من le premier plan w على droite من le deuxième plan ، كي تلقاهم l'intersection هي la droite اللي تتعدّى منهم . w كان ما تشوفش كان point واحد ، طوّل deux droites coplanaires حتّى يتلاقاو .

Cherche deux points distincts communs aux deux plans. Chaque point doit être sur une droite du premier plan et sur une droite du deuxième plan. Quand tu les as, l'intersection est la droite qui passe par eux. Et si tu ne vois qu'un seul point, prolonge deux droites coplanaires jusqu'à ce qu'elles se coupent.

QUESTION 20 · CONSTRUIRE LE POINT OÙ UNE DROITE PERCE UN PLAN

comment trouver le point d'intersection d'une droite et d'un plan | kifech nal9a win la droite perce le plan | comment construire l'intersection d'une droite avec un plan | intersection droite et plan kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

plan auxiliaire $\rightarrow$ droite d'intersection $\rightarrow$ point

CE QU'IL RÉPOND

Nesta3mlou plan auxiliaire. Ne5dhou plan fih la droite. Nal9aw la droite d'intersection mte3ou m3a le plan elli 3andna. W le point elli nlawwjou 3lih houwa win la droite mte3na tetle9a m3a la droite d'intersection hedhi.

نستعملو plan auxiliaire . ناخذو plan فيه la droite . نلقاو la droite d'intersection متاعو مع le plan اللي عندنا . w le point اللي نلوّجو عليه هو وين la droite متاعنا تتلاقى مع la droite d'intersection هاذي .

On utilise un plan auxiliaire. On prend un plan qui contient la droite. On détermine sa droite d'intersection avec le plan donné. Et le point cherché est celui où notre droite coupe cette droite d'intersection.

QUESTION 21 · POUR COMPRENDRE : TROIS POINTS ALIGNÉS

comment montrer que des points sont alignés dans l'espace | kifech nbayen elli trois points alignés fi l espace | méthode pour prouver un alignement dans l espace | montrer alignement de trois points

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

dans deux plans distincts $\Rightarrow$ alignés

CE QU'IL RÉPOND

Bayyen elli les points hedhom mawjoudin fi deux plans distincts. Deux plans distincts 3andhom point commun, yetle9aw fi droite. Donc les points el koll 3al droite hedhi, ya3ni alignés.

بيّن اللي les points هاذم موجودين في deux plans distincts . deux plans distincts عندهم point commun ، يتلاقاو في donc les points . droite الكل على الـ droite هاذي ، يعني alignés .

Montre que ces points appartiennent à deux plans distincts. Deux plans distincts qui ont un point commun se coupent suivant une droite. Donc tous ces points sont sur cette droite, c'est-à-dire alignés.

QUESTION 22 · POUR COMPRENDRE : TROIS POINTS ALIGNÉS

c'est quoi des droites concourantes | chnowa droites concourantes | concourantes ma3neha chnowa | définition de concourantes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

concourantes : passent par un même point

CE QU'IL RÉPOND

Des droites concourantes houma des droites elli yet3addew el koll men nafs el point. Mathalan les trois médianes mta3 triangle concourantes : yetle9aw fi le centre de gravité.

. le centre de gravité في يتلاقاو : triangle concourantes متاع les trois médianes مثلاً . point الـ نفس من الكل يتعدّاو اللي des droites هوما des droites concourantes

Des droites concourantes sont des droites qui passent toutes par un même point. Par exemple, les trois médianes d'un triangle sont concourantes : elles se rencontrent au centre de gravité.

QUESTION 23 · EXEMPLE : AUTOUR DU CENTRE DE GRAVITÉ

c'est quoi le centre de gravité d'un triangle | chnowa le centre de gravité | win yji le centre de gravité | centre de gravité 3la la médiane win

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AG = \frac{2}{3}AJ$$

CE QU'IL RÉPOND

Le centre de gravité mta3 triangle houwa le point de concours mta3 les trois médianes. W houwa 3la koll médiane, aux deux tiers men le sommet. Mathalan ken G le centre de gravité du triangle ACD, w J le milieu de [CD] : AG égale deux tiers de AJ.

G le centre de كان مثلاً . le sommet من médiane ، aux deux tiers كل على هو les trois médianes . w متاع le point de concours هو triangle متاع le centre de gravité . gravité du triangle A C D ، w J le milieu de C D : A G égale deux tiers de A J

Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours de ses trois médianes. Et il est sur chaque médiane, aux deux tiers à partir du sommet. Par exemple, si G est le centre de gravité du triangle A C D, et J le milieu de C D : A G égale deux tiers de A J.

QUESTION 24 · POUR COMPRENDRE : MESURE DE GRANDEURS

comment calculer la diagonale d'un cube | kifech na7seb la diagonale mta3 cube | différence entre petite et grande diagonale du cube | diagonale du cube 9adech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

petite diagonale : $a\sqrt{2}$

grande diagonale : $a\sqrt{3}$

CE QU'IL RÉPOND

Fi cube d'arête a, 3andna zouz anwe3 mta3 diagonales. La petite diagonale hiya la diagonale mta3 face : égale $a\sqrt{2}$. W la grande diagonale tcho99 el cube men sommet lel sommet opposé : égale $a\sqrt{3}$. Ez-zouz nal9awhom b le théorème de Pythagore.

الـ تشقّ face : égale a racine carrée de deux . w la grande diagonale متاع la diagonale هي diagonales . la petite diagonale متاع أنواع زوز عندنا ، cube d'arête a في . le théorème de Pythagore بـ نلقاوهم الزوز . sommet opposé : égale a racine carrée de trois لـ sommet من cube

Dans un cube d'arête a, il y a deux sortes de diagonales. La petite diagonale est la diagonale d'une face : elle égale a racine carrée de deux. Et la grande diagonale traverse le cube d'un sommet au sommet opposé : elle égale a racine carrée de trois. On trouve les deux avec le théorème de Pythagore.

QUESTION 25 · POUR COMPRENDRE : MESURE DE GRANDEURS

comment calculer la diagonale d'un parallélépipède rectangle | kifech na7seb la diagonale mta3 parallélépipède rectangle | diagonale du pavé formule | diagonale parallélépipède 9adech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi parallélépipède rectangle de dimensions a, b w c, la diagonale égale $\sqrt{a^{2} + b^{2} + c^{2}}$. Ya3ni nejm3ou les carrés mta3 les trois dimensions, w ne5dhou la racine carrée.

les carrés نجمعو يعني . parallélépipède rectangle de dimensions a ، b w c ، la diagonale égale racine carrée de (a au carré plus b au carré plus c au carré) في . la racine carrée ناخذو les trois dimensions ، w متاع

Dans un parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c, la diagonale égale racine carrée de (a au carré plus b au carré plus c au carré). Autrement dit, on additionne les carrés des trois dimensions, et on prend la racine carrée.

QUESTION 26 · POUR COMPRENDRE : MESURE DE GRANDEURS

c'est quoi l'aire latérale | chnowa l'aire latérale | différence entre aire latérale et aire totale | aire latérale kifech na7sebha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

aire latérale du cube : $4a^2$

CE QU'IL RÉPOND

L'aire latérale hiya l'aire mta3 les faces latérales bark, men ghir les deux bases. Fi cube d'arête a, 3andna quatre faces latérales, donc l'aire latérale égale $4a^{2}$. W l'aire totale fiha les six faces : $6a^{2}$.

quatre faces latérales ، donc l'aire latérale égale quatre a عندنا ، cube d'arête a في . les deux bases من غير ، برك les faces latérales متاع l'aire هي l'aire latérale . les six faces : six a au carré فيها au carré . w l'aire totale

L'aire latérale est l'aire des faces latérales seulement, sans les deux bases. Dans un cube d'arête a, il y a quatre faces latérales, donc l'aire latérale égale quatre a au carré. Et l'aire totale compte les six faces : six a au carré.

QUESTION 27 · RAPPELS : LES SOLIDES DE L'ESPACE

c'est quoi un tétraèdre | chnowa tétraèdre | tétraèdre ma3neha chnowa | tetraedre 9adech fih men face

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

tétraèdre : 4 faces, 4 sommets

CE QU'IL RÉPOND

Le tétraèdre houwa solide fih quatre faces, el koll triangles, w quatre sommets. Houwa pyramide à base triangulaire. W les quatre sommets mte3ou mouch coplanaires : 3la hedheka nesta3mlouh barcha fel chapitre hedha.

: coplanaires متاعو موش pyramide à base triangulaire . w les quatre sommets هو . triangles ، w quatre sommets الكل ، quatre faces فيه solide هو le tétraèdre . على هذاكا نستعملوه برشة في الـ chapitre هذا

Le tétraèdre est un solide qui a quatre faces, toutes triangulaires, et quatre sommets. C'est une pyramide à base triangulaire. Et ses quatre sommets ne sont pas coplanaires : c'est pour cela qu'on l'utilise beaucoup dans ce chapitre.

QUESTION 28 · RAPPELS : LES SOLIDES DE L'ESPACE

quelle est la différence entre un prisme et une pyramide | chnowa el far9 bin prisme w pyramide | prisme et pyramide différence | prisme walla pyramide kifech nfarre9

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

prisme : deux bases ; pyramide : une base et un sommet

CE QU'IL RÉPOND

Le prisme droit 3andou deux bases superposables, wa7da fou9 lo5ra, w les faces latérales mte3ou rectangles. La pyramide 3andha base wa7da, w sommet, w les faces latérales mte3ha triangles elli yetle9aw fel sommet.

w sommet ، w les faces ، وحدة base عندها rectangles . la pyramide متاعو w les faces latérales ، وحدة فوق الأخرى ، deux bases superposables عندو le prisme droit . sommet اللي يتلاقاو في الـ triangles متاعها latérales

Le prisme droit a deux bases superposables, l'une au-dessus de l'autre, et ses faces latérales sont des rectangles. La pyramide a une seule base, et un sommet, et ses faces latérales sont des triangles qui se rejoignent au sommet.

QUESTION 29 · RAPPELS : LES SOLIDES DE L'ESPACE

pourquoi certaines arêtes sont en pointillés | 3lech famma des arêtes en pointillés | les pointillés sur la figure ça veut dire quoi | pointillés ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

pointillés : arêtes cachées

CE QU'IL RÉPOND

Les pointillés ywarriw les arêtes el m5abbya, elli ma nchoufouhomch 5ater houma wra el solide. Les arêtes elli nchoufouhom narsmouhom en trait plein. Hakka el dessin en perspective yet9ra 5ir.

dessin en perspective الـ هكّا . en trait plein نشوفوهم نرسموهم اللي solide . les arêtes وراء الـ هوما خاطر نشوفوهمش ما اللي ، المخبّية les arêtes يورّيو les pointillés . يتقرا خير

Les pointillés montrent les arêtes cachées, celles qu'on ne voit pas parce qu'elles sont derrière le solide. Les arêtes visibles se dessinent en trait plein. Ainsi le dessin en perspective se lit mieux.

QUESTION 30 · LES AXIOMES DE BASE

est-ce qu'on peut utiliser Thalès dans l'espace | Pythagore yemchi fi l espace ? | nnajjem nesta3mel Thalès fi l espace ? | les théorèmes de la géométrie plane marchent dans l espace ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

axiome 4 : la géométrie plane vaut dans chaque plan

CE QU'IL RÉPOND

Ey, ama dekhel plan wa7ed. L'axiome quatre y9oul : tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace. Donc 9bal ma testa3mel Thalès walla Pythagore, thabbet elli les points elli te5dem bihom el koll fi nafs el plan.

إي ، أما داخل plan واحد . يقول l'axiome quatre : donc . tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace قُبَلْ ما تستعمل Thalès ولّا Pythagore ، ثبّت اللي les points اللي تخدم بيهم الكل في نفس الـ plan .

Oui, mais à l'intérieur d'un même plan. L'axiome quatre dit : tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace. Donc avant d'utiliser Thalès ou Pythagore, vérifie que les points avec lesquels tu travailles sont tous dans un même plan.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Les faces d'un tétraèdre**

Combien de faces un tétraèdre a-t-il ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un tétraèdre $ABCD$, chaque face est un triangle formé par trois des sommets A, B, C et D.
2. Compte les triangles : ABC, ABD, ACD, et il en reste un.

CORRECTION

Les faces — Chaque face est un triangle formé par trois des quatre sommets.

$$ABC,\ ABD,\ ACD,\ BCD$$

Un tétraèdre a 4 faces, toutes triangulaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est le nombre d'arêtes du tétraèdre, pas le nombre de faces.

5 → 5 est le nombre de faces d'une pyramide à base carrée ; la base du tétraèdre est un triangle.

EXERCICE 2 · BASE **Les sommets d'un prisme**

Combien de sommets un prisme droit à base triangulaire a-t-il ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un prisme droit a deux bases superposables : ici, deux triangles.
2. Chaque triangle a trois sommets, et les deux bases n'ont aucun sommet en commun.

CORRECTION

Deux bases — Les deux bases sont des triangles, sans sommet commun.

$$3 + 3 = 6$$

Un prisme droit à base triangulaire a 6 sommets.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → 5 est son nombre de faces : deux bases et trois faces latérales.

3 → Tu n'as compté qu'une base : il y a deux triangles.

EXERCICE 3 · BASE **Les faces d'une pyramide**

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré. Combien de faces a-t-elle ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il y a la base, et les faces latérales, qui sont des triangles de sommet S.
2. Il y a autant de faces latérales que de côtés de la base.

CORRECTION

Compter — La base a quatre côtés : il y a quatre faces latérales, plus la base.

$4 + 1 = 5$

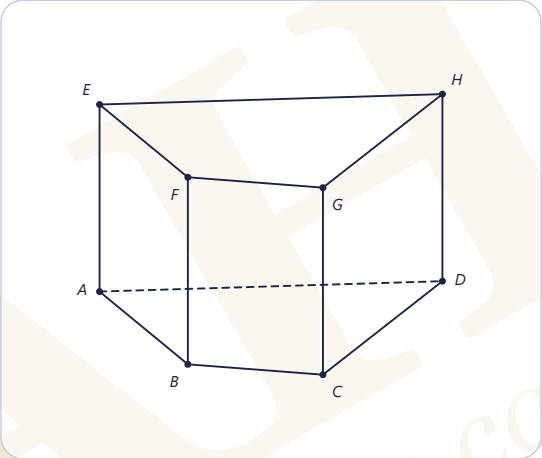
La pyramide $SABCD$ a 5 faces : $ABCD$, SAB, SBC, SCD et SDA.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Tu as compté les quatre faces latérales : il manque la base $ABCD$.

EXERCICE 4 · BASE **Des faces dans un prisme**

$ABCDEFGH$ est le prisme droit de la figure, de bases $ABCD$ et $EFGH$. Combien de faces contiennent à la fois le sommet A et le sommet B ?



Le prisme droit ABCDEFGH : E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Un prisme droit ABCDEFGH vu en perspective. La base du bas est le quadrilatère ABCD : A à gauche, B et C devant, D à droite. La base du haut EFGH est juste au-dessus : E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. Les arêtes latérales [AE], [BF], [CG] et [DH] sont verticales. L'arête [AD], cachée, est en pointillés.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une face qui contient A et B contient toute l'arête $[AB]$.
2. Une arête est toujours commune à un même nombre de faces : regarde l'arête $[AB]$ sur la figure.

CORRECTION

L'arête [AB] — L'arête $[AB]$ est commune à la base du bas et à une face latérale.

$ABCD$ et $ABFE$

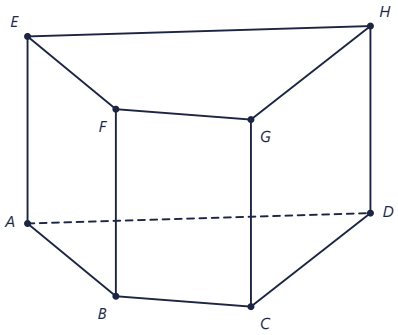
Deux faces contiennent A et B : $ABCD$ et $ABFE$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Trois faces contiennent A, mais $ADHE$ ne contient pas B.

EXERCICE 5 · BASE **Une arête et une base**

$ABCDEFGH$ est le prisme droit de la figure, de bases $ABCD$ et $EFGH$. Combien de points le segment $[AE]$ et la face $ABCD$ ont-ils en commun ?



Le prisme droit ABCDEFGH : E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Un prisme droit ABCDEFGH vu en perspective. La base du bas est le quadrilatère ABCD : A à gauche, B et C devant, D à droite. La base du haut EFGH est juste au-dessus : E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. Les arêtes latérales [AE], [BF], [CG] et [DH] sont verticales. L'arête [AD], cachée, est en pointillés.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le segment $[AE]$ est une arête latérale : il part de la base du bas et monte jusqu'à la base du haut.
2. Quelle extrémité de $[AE]$ est un sommet de la face $ABCD$? Et les autres points du segment, sont-ils dans cette face ?

CORRECTION

Le sommet A — A est une extrémité de l'arête $[AE]$ et un sommet de la face $ABCD$: c'est un point commun.

$$A \text{ est un point commun}$$

Les autres points — Tous les autres points de $[AE]$ sont au-dessus de la base : aucun n'est dans la face $ABCD$.

$$1 \text{ seul point commun}$$

Le segment $[AE]$ et la face $ABCD$ ont un seul point commun : le sommet A.

PIÈGES ANTICIPÉS

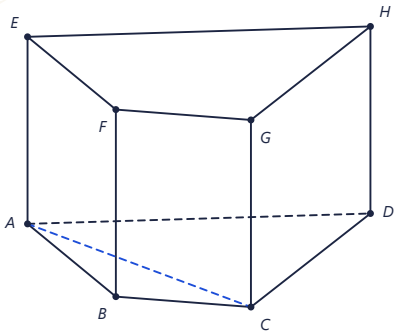
`2` → E est un sommet de la base du haut $EFGH$: il n'est pas dans la face $ABCD$. Seul A est commun.

`0` → Le sommet A est à la fois sur l'arête $[AE]$ et dans la face $ABCD$: il y a un point commun.

EXERCICE 6 · BASE

Une diagonale de la base

$ABCDEFGH$ est le prisme droit de la figure, de bases $ABCD$ et $EFGH$. Tous les points du segment $[AC]$ sont-ils dans la face $ABCD$?



Le prisme droit ABCDEFGH : E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Un prisme droit ABCDEFGH vu en perspective. La base du bas est le quadrilatère ABCD : A à gauche, B et C devant, D à droite. La base du haut EFGH est juste au-dessus : E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. Les arêtes latérales [AE], [BF], [CG] et [DH] sont verticales. L'arête [AD], cachée, est en pointillés. La diagonale [AC] de la base du bas est tracée en pointillés bleus.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui tous · tous · oui ils sont tous dans la face · ils sont tous dans la face · oui ils sont dans la face · ils sont dans la face · oui tous les points · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · oui ils sont tous dans la face ABCD · ils sont tous dans la face ABCD · oui ils sont dans la face ABCD · ils sont dans la face ABCD · tous dans la face ABCD · oui tous dans la face ABCD · tous dans la face · oui tous dans la face

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A et C sont deux sommets de la face $ABCD$: que représente le segment $[AC]$ pour ce quadrilatère ?
2. C'est une diagonale de la base : elle se trace sans quitter la face.

CORRECTION

Une diagonale — A et C sont deux sommets opposés de la base $ABCD$: le segment $[AC]$ est une diagonale de ce quadrilatère.

$$\text{le segment } [AC] \text{ est dans la face } ABCD$$

Oui : tous les points du segment $[AC]$ sont dans la face $ABCD$. Aucun point de $[AC]$ n'est en dehors de cette face.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / c'est non / faux / non pas tous / pas tous / seulement A et C / non seulement A et C / non, seulement A et C / le / lé / la` → Il n'y a pas que A et C : le segment $[AC]$ est une diagonale de la base, et tous ses points sont dans la face $ABCD$.

EXERCICE 7 · BASE **La petite diagonale**

Un cube a pour arête 3 cm. Quelle est, en cm, la longueur d'une petite diagonale, c'est-à-dire de la diagonale d'une face ?

Donne la valeur exacte.

Réponse attendue : `3*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(18) · 3√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une face est un carré de côté 3 : sa diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle.
2. Par Pythagore, le carré de la diagonale vaut $3^2 + 3^2$.

$$d^2 = 3^2 + 3^2$$

CORRECTION

Pythagore — Dans une face, la diagonale et deux côtés forment un triangle rectangle.

$$d^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

La racine — On simplifie la racine carrée.

$$d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

La petite diagonale mesure $3\sqrt{2}$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(3) / sqrt(27)` → $3\sqrt{3}$ est la grande diagonale, celle qui traverse le cube.

`18` → 18 est le carré de la diagonale : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 8 · BASE **La grande diagonale**

Un cube a pour arête 5 cm. Quelle est, en cm, la longueur d'une grande diagonale ?

Donne la valeur exacte.

Réponse attendue : `5*sqrt(3)` — aussi acceptées : sqrt(75) · 5√3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La grande diagonale d'un cube d'arête a est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont une arête et une petite diagonale.
2. Son carré vaut $a^2 + 2a^2$.

$$d^2 = 3a^2$$

CORRECTION

La formule — La grande diagonale d'un cube d'arête a mesure $a\sqrt{3}$.

$$d^2 = 5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$$

La racine —

$$d = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

La grande diagonale mesure $5\sqrt{3}$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5*sqrt(2) / sqrt(50)` → $5\sqrt{2}$ est la petite diagonale, celle d'une face.

EXERCICE 9 · BASE **L'aire latérale d'un cube**

Un cube a pour arête 3 cm. Quelle est, en cm², son aire latérale ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire latérale ne compte que les faces latérales, sans les deux bases.
2. Un cube a quatre faces latérales, chacune d'aire a^2.

$4a^2$

CORRECTION

Une face — Chaque face est un carré de côté 3.

$3^2 = 9$

Quatre faces —

$4 \times 9 = 36$

L'aire latérale du cube est 36 cm².

PIÈGES ANTICIPÉS

54 → 54 est l'aire totale, celle des six faces : l'aire latérale n'en compte que quatre.

27 → 27 est le volume du cube, en cm³.

EXERCICE 10 · PRATIQUE **La diagonale d'un parallélépipède rectangle**

Un parallélépipède rectangle a pour dimensions 3 cm, 4 cm et 12 cm. Quelle est, en cm, la longueur d'une diagonale ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La diagonale d'un parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c vérifie une relation qui ressemble à Pythagore, avec trois carrés.

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

2. Calcule la somme des trois carrés, puis prends la racine carrée.

CORRECTION

Les carrés —

$d^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 9 + 16 + 144 = 169$

La racine —

$d = \sqrt{169} = 13$

La diagonale mesure 13 cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

19 → On n'ajoute pas les dimensions : on ajoute leurs carrés, puis on prend la racine carrée.

169 → 169 est le carré de la diagonale : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 11 · RAISONNEMENT **Aires, arêtes et diagonale**

La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est 22 cm². La somme des longueurs de ses arêtes est 24 cm. Quelle est, en cm, la longueur d'une diagonale ?

Donne la valeur exacte.

Réponse attendue : `sqrt(14)` — aussi acceptées : √14 · 14^(1/2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note a, b et c les dimensions. Les six faces vont par deux, et il y a quatre arêtes de chaque longueur.

$2(ab + bc + ca) \quad ; \quad 4(a + b + c)$

2. Le carré de la diagonale est $a^2 + b^2 + c^2$. Développe $(a + b + c)^2$ pour le faire apparaître.

CORRECTION

Les données — On traduit les deux sommes.

$ab + bc + ca = 11 \quad ; \quad a + b + c = 6$

Une identité —

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

La diagonale —

$d^2 = 36 - 22 = 14$

La diagonale mesure $\sqrt{14}$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

`14` → 14 est le carré de la diagonale : il reste à prendre la racine carrée.

`5 / sqrt(25)` → Dans $(a+b+c)^2$, les produits sont doublés : il faut retrancher 2×11, pas 11.

EXERCICE 12 · RAISONNEMENT

Une autre diagonale

La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est 72 cm². La somme des longueurs de ses arêtes est 44 cm. Quelle est, en cm, la longueur d'une diagonale ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec les dimensions a, b et c : l'aire totale est $2(ab+bc+ca)$ et la somme des arêtes est $4(a+b+c)$.
2. Utilise $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$.

CORRECTION

Les données —

$2(ab+bc+ca) = 72 \quad ; \quad a+b+c = 11$

Le carré —

$d^2 = 11^2 - 72 = 121 - 72 = 49$

La racine —

$d = \sqrt{49} = 7$

La diagonale mesure 7 cm.

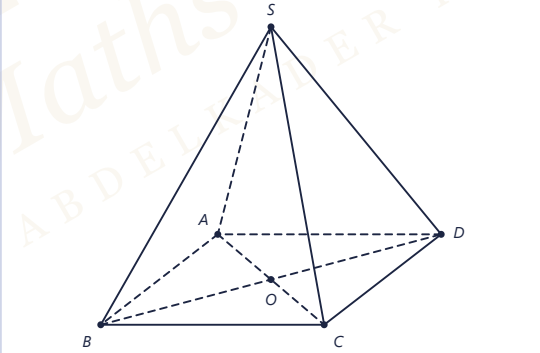
PIÈGES ANTICIPÉS

`49` → 49 est le carré de la diagonale : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 13 · BASE

Quatre points dans une pyramide

Dans la pyramide $SABCD$ de la figure, O est le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de la base. Les points A, O, D et S sont-ils coplanaires ?



O est le point d'intersection des diagonales de la base.

Une pyramide SABCD vue en perspective. La base ABCD est dessinée comme un parallélogramme : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche. Les diagonales [AC] et [BD] de la base, en pointillés, se coupent en O. Le sommet S est au-dessus de la base. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · non coplanaires · pas coplanaires · ils ne sont pas coplanaires · le · lé · la · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas coplanaires · non, pas coplanaires · ne sont pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · non elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne sont pas coplanaires · non ils ne sont pas coplanaires · non, ils ne sont pas coplanaires · les points ne sont pas coplanaires · non les points ne sont pas coplanaires · non, les points ne sont pas coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche d'abord le plan qui passe par trois de ces points : A, O et D ne sont pas alignés.

2. A, O et D sont dans le plan de la base. Le sommet S est-il dans ce plan ?

CORRECTION

Trois points — A, O et D ne sont pas alignés : le seul plan qui les contient est le plan de la base.

$$A,\ O \text{ et } D \text{ sont dans le plan } (ABC)$$

Le quatrième — Le sommet S de la pyramide n'est pas dans le plan de la base.

$$S \notin (ABC)$$

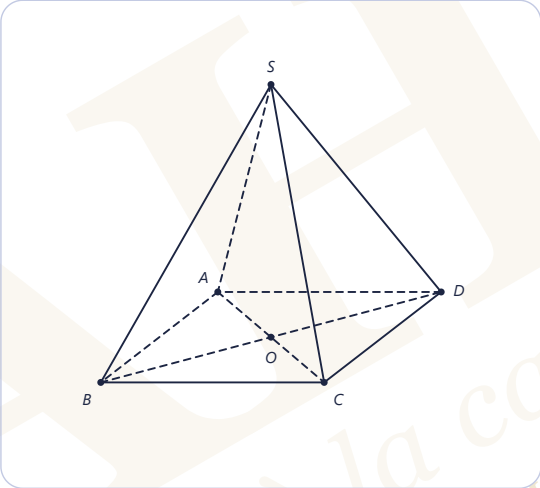
Non : les points A, O, D et S ne sont pas coplanaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / coplanaires / ils sont coplanaires / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / oui coplanaires / oui, coplanaires / sont coplanaires / elles sont coplanaires / oui elles sont coplanaires / oui, elles sont coplanaires / oui ils sont coplanaires / oui, ils sont coplanaires / les points sont coplanaires / oui les points sont coplanaires / oui, les points sont coplanaires` → Ce sont A, O, C et S qui sont coplanaires, car O est sur (AC). Ici, O n'est pas sur (AD).

EXERCICE 14 · PRATIQUE **Un point dans un plan ?**

Dans la pyramide $SABCD$ de la figure, O est le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de la base. Le point A appartient-il au plan (SOC) ?



O est le point d'intersection des diagonales de la base.

Une pyramide SABCD vue en perspective. La base ABCD est dessinée comme un parallélogramme : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche. Les diagonales [AC] et [BD] de la base, en pointillés, se coupent en O. Le sommet S est au-dessus de la base. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui il appartient · il appartient · oui A appartient au plan · A appartient au plan · A appartient au plan SOC · oui A appartient au plan SOC · il appartient au plan · oui il appartient au plan · il appartient au plan SOC · oui il appartient au plan SOC · oui A appartient · A appartient · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (SOC) contient les points O et C : que contient-il d'autre, d'après l'axiome 2 ?
2. Il contient toute la droite (OC). Sur quelle diagonale se trouvent O et C ?

CORRECTION

L'axiome 2 — Le plan (SOC) contient O et C : il contient toute la droite (OC).

$$(OC) \subset (SOC)$$

La diagonale — O est sur la diagonale $[AC]$: la droite (OC) est la droite (AC), qui passe par A.

$$A \in (OC)$$

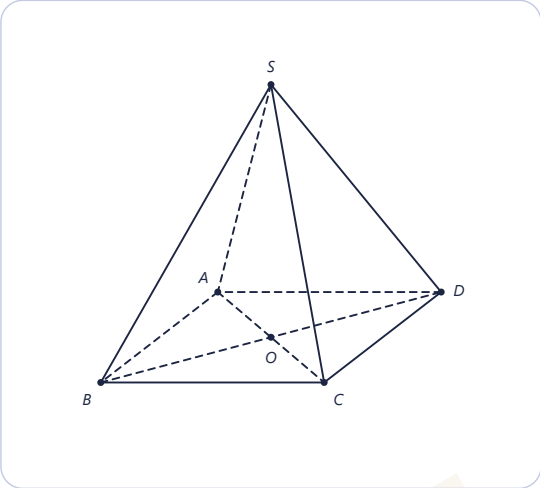
Oui : le point A appartient au plan (SOC), qui est le plan (SAC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / il n appartient pas / il n'appartient pas / non il n appartient pas / non il n'appartient pas / non, il n'appartient pas / A n'appartient pas / A n'appartient pas au plan / A n'appartient pas au plan (SOC) / non A n'appartient pas au plan (SOC) / non, A n'appartient pas au plan (SOC) / il n'appartient pas au plan (SOC) / il n'appartient pas au plan / c'est non / faux / le / lé / la` → A n'est pas dans le nom du plan, mais il est sur la droite (OC), que ce plan contient tout entière.

EXERCICE 15 · PRATIQUE **Deux droites dans une pyramide**

Dans la pyramide $SABCD$ de la figure, les droites (AB) et (SD) sont-elles coplanaires ?



O est le point d'intersection des diagonales de la base.

Une pyramide SABCD vue en perspective. La base ABCD est dessinée comme un parallélogramme : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche. Les diagonales [AC] et [BD] de la base, en pointillés, se coupent en O. Le sommet S est au-dessus de la base. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · non coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · le · lé · la · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas coplanaires · non, pas coplanaires · ne sont pas coplanaires · non elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne sont pas coplanaires · ils ne sont pas coplanaires · non ils ne sont pas coplanaires · non, ils ne sont pas coplanaires · les droites ne sont pas coplanaires · non les droites ne sont pas coplanaires · non, les droites ne sont pas coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Suppose qu'un plan contient les deux droites : quels sommets de la pyramide contiendrait-il ?
2. Il contiendrait A, B et D : ce serait le plan de la base. Que dire alors de S ?

CORRECTION

Supposer — Un plan qui contiendrait (AB) et (SD) contiendrait A, B et D : ce serait le plan de la base. (ABD)

Contradiction — Il contiendrait aussi S. Or le sommet S n'est pas dans le plan de la base. $S \notin (ABD)$

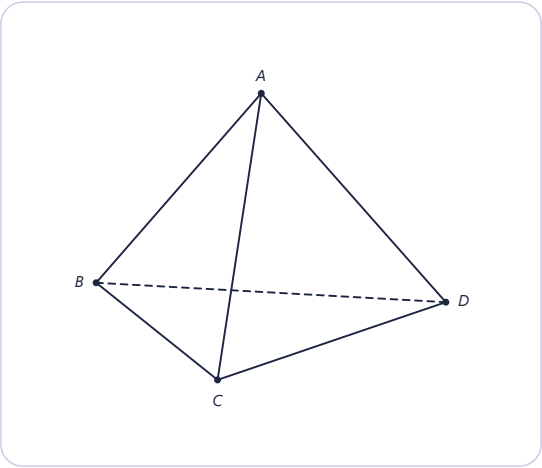
Non : les droites (AB) et (SD) ne sont pas coplanaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / coplanaires / elles sont coplanaires / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / oui coplanaires / oui, coplanaires / sont coplanaires / oui elles sont coplanaires / oui, elles sont coplanaires / ils sont coplanaires / oui ils sont coplanaires / oui, ils sont coplanaires / les droites sont coplanaires / oui les droites sont coplanaires / oui, les droites sont coplanaires` → Aucun plan ne contient à la fois A, B, D et S : les deux droites ne sont pas coplanaires, donc ni sécantes ni parallèles.

EXERCICE 16 · PRATIQUE **Deux arêtes opposées**

$ABCD$ est un tétraèdre. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?



Le tétraèdre ABCD.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · non sécantes · pas sécantes · elles ne sont pas sécantes · le · lé · la · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas sécantes · non, pas sécantes · ne sont pas sécantes · non elles ne sont pas sécantes · non, elles ne sont pas sécantes · ils ne sont pas sécantes · non ils ne sont pas sécantes · non, ils ne sont pas sécantes · les droites ne sont pas sécantes · non les droites ne sont pas sécantes · non, les droites ne sont pas sécantes · non coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · non elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne sont pas coplanaires · les droites ne sont pas coplanaires · elles ne se coupent pas · non elles ne se coupent pas · non, elles ne se coupent pas · les droites ne se coupent pas

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites sécantes sont toujours coplanaires.
2. Un plan qui contiendrait (AB) et (CD) contiendrait les quatre sommets du tétraèdre.

CORRECTION

Coplanaires ? — Un plan qui contiendrait les deux droites contiendrait A, B, C et D. Or les quatre sommets d'un tétraèdre ne sont pas coplanaires.

$D \notin (ABC)$

Non : les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires, donc elles ne sont pas sécantes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / sécantes / elles sont sécantes / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / oui sécantes / oui, sécantes / sont sécantes / oui elles sont sécantes / oui, elles sont sécantes / ils sont sécantes / oui ils sont sécantes / oui, ils sont sécantes / les droites sont sécantes / oui les droites sont sécantes / oui, les droites sont sécantes / elles se coupent / oui elles se coupent / oui, elles se coupent` → « Non parallèles donc sécantes » ne vaut que dans un plan. Ici les deux droites ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Coplanaires dans un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre, I un point de $[AC]$ distinct de A et de C, et J un point de $[BD]$ distinct de B et de D. Les droites (IJ) et (AB) sont-elles coplanaires ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · non coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · le · lé · la · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas coplanaires · non, pas coplanaires · ne sont pas coplanaires · non elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne sont pas coplanaires · ils ne sont pas coplanaires · non ils ne sont pas coplanaires · non, ils ne sont pas coplanaires · les droites ne sont pas coplanaires · non les droites ne sont pas coplanaires · non, les droites ne sont pas coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le plan qui contient la droite (AB) et le point I.
2. C'est le plan (ABC). Le point J, qui est sur (BD) et distinct de B, est-il dans ce plan ?

CORRECTION

Un plan — Le seul plan qui contient la droite (AB) et le point I est le plan (ABC).

$I \in (AC) \quad$ et $\quad (AC) \subset (ABC)$

Le point J — Si J était dans le plan (ABC), la droite (BJ), c'est-à-dire (BD), y serait contenue, et D serait dans le plan (ABC).

$J \notin (ABC)$

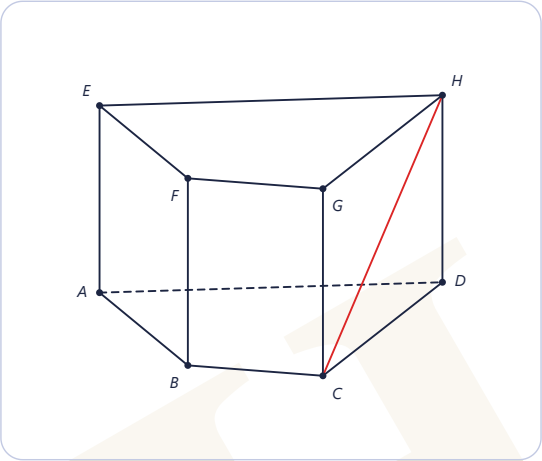
Non : les droites (IJ) et (AB) ne sont pas coplanaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

oui / coplanaires / elles sont coplanaires / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / oui coplanaires / oui, coplanaires / sont coplanaires / oui elles sont coplanaires / oui, elles sont coplanaires / ils sont coplanaires / oui ils sont coplanaires / oui, ils sont coplanaires / les droites sont coplanaires / oui les droites sont coplanaires / oui, les droites sont coplanaires → Le plan qui contient (AB) et I est (ABC), et J n'y est pas : les deux droites ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 18 · BASE **Deux droites dans un prisme**

$ABCDEFGH$ est le prisme droit de la figure, de bases $ABCD$ et $EFGH$. En quel point les droites (CD) et (CH) sont-elles sécantes ?



Le prisme droit ABCDEFGH : E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Un prisme droit ABCDEFGH vu en perspective. La base du bas est le quadrilatère ABCD : A à gauche, B et C devant, D à droite. La base du haut EFGH est juste au-dessus : E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D. Les arêtes latérales [AE], [BF], [CG] et [DH] sont verticales. L'arête [AD], cachée, est en pointillés. La diagonale [CH] de la face latérale CGHD est tracée en rouge.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : C — aussi acceptées : le point C · point C · c'est C · c'est le point C · en C · au point C · = C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites sécantes ont un seul point commun.
2. Regarde les noms des deux droites : quel point est sur les deux ?

CORRECTION

Un point commun — Les deux droites sont distinctes et passent toutes les deux par le même sommet.

$(CD) \cap (CH) = \{C\}$

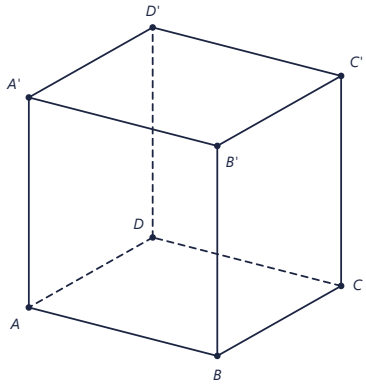
Les droites (CD) et (CH) sont sécantes en C.

PIÈGES ANTICIPÉS

D / le point D / point D / en D / H / le point H / point H / en H → D est sur (CD) mais pas sur (CH), et H est sur (CH) mais pas sur (CD).

EXERCICE 19 · PRATIQUE **Ni sécantes ni parallèles**

Dans le cube $ABCDA'B'C'D'$ de la figure, les droites (AB) et (CC') sont-elles coplanaires ?



Le cube ABCDA'B'C'D'.

Un cube ABCDA'B'C'D' vu en perspective. La face du bas est ABCD : A devant à gauche, B devant, C à droite, D derrière. La face du haut est A'B'C'D', avec A' au-dessus de A, B' au-dessus de B, C' au-dessus de C et D' au-dessus de D. Les arêtes cachées [DA], [DC] et [DD'] sont en pointillés.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · non coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · le · lé · la · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas coplanaires · non, pas coplanaires · ne sont pas coplanaires · non elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne sont pas coplanaires · ils ne sont pas coplanaires · non ils ne sont pas coplanaires · non, ils ne sont pas coplanaires · les droites ne sont pas coplanaires · non les droites ne sont pas coplanaires · non, les droites ne sont pas coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite (AB) est contenue dans le plan (ABC). Où la droite (CC') rencontre-t-elle ce plan ?
2. Elle le perce en C seulement. Le point C est-il sur la droite (AB) ?

CORRECTION

Un plan — Le seul plan qui contient la droite (AB) et le point C est le plan (ABC).

(ABC)

Le quatrième point — Le point C' n'est pas dans le plan (ABC) : aucun plan ne contient à la fois (AB) et (CC').

$C' \notin (ABC)$

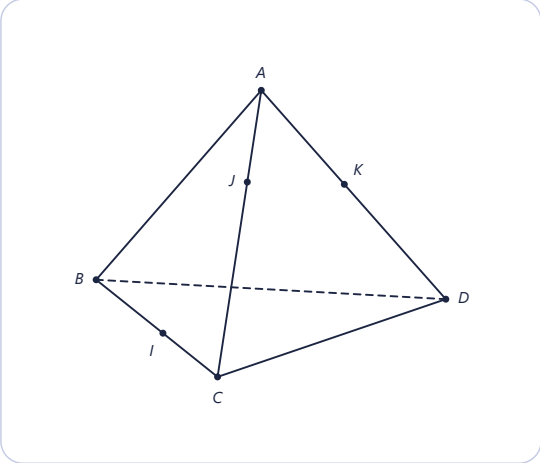
Non : les droites (AB) et (CC') ne sont pas coplanaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / coplanaires / elles sont coplanaires / parallèles / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / oui coplanaires / oui, coplanaires / sont coplanaires / oui elles sont coplanaires / oui, elles sont coplanaires / ils sont coplanaires / oui ils sont coplanaires / oui, ils sont coplanaires / les droites sont coplanaires / oui les droites sont coplanaires / oui, les droites sont coplanaires / elles sont parallèles / oui elles sont parallèles / oui, elles sont parallèles` → Elles n'ont aucun point commun, mais elles ne sont pas parallèles pour autant : aucun plan ne les contient toutes les deux.

EXERCICE 20 · PRATIQUE **Une intersection de deux plans**

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I est un point de $[BC]$, J un point de $[AC]$ et K un point de $[AD]$. Quelle est l'intersection des plans (ACI) et (BDJ) ?



I est sur [BC], J sur [AC] et K sur [AD].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [BC], le point J sur l'arête [AC] et le point K sur l'arête [AD].

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(BJ)` — aussi acceptées : BJ · la droite (BJ) · la droite BJ · droite (BJ) · droite BJ · c'est (BJ) · c'est la droite (BJ) · (JB) · JB · la droite (JB) · la droite JB · droite (JB) · droite JB · c'est (JB) · c'est la droite (JB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'intersection de deux plans distincts est une droite : cherche deux points communs aux deux plans.
2. I est sur (BC) : le plan (ACI) est le plan (ABC). Quels points du plan (BDJ) sont dans le plan (ABC) ?

CORRECTION

Le plan (ACI) — I est sur (BC) : le plan (ACI) est le plan (ABC). Il contient B.

$B \in (ACI)$

Le point J — J est sur (AC), donc dans le plan (ACI) ; et J est dans le plan (BDJ).

$J \in (ACI)$

La droite —

$(ACI) \cap (BDJ) = (BJ)$

L'intersection des plans (ACI) et (BDJ) est la droite (BJ).

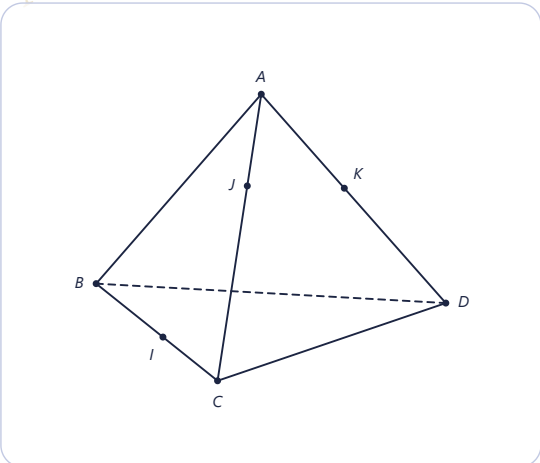
PIÈGES ANTICIPÉS

`J / le point J / B / le point B` → L'intersection de deux plans sécants est une droite, pas un point : il faut deux points communs.

`(BD) / BD / (AC) / AC` → Cette droite est contenue dans un seul des deux plans. Vérifie que chacun de ses deux points est dans les deux plans.

EXERCICE 21 · PRATIQUE **Deux plans cachés derrière leurs noms**

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I est un point de $[BC]$, J un point de $[AC]$ et K un point de $[AD]$. Quelle est l'intersection des plans (ABK) et (CDJ) ?



I est sur [BC], J sur [AC] et K sur [AD].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [BC], le point J sur l'arête [AC] et le point K sur l'arête [AD].

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(AD)` — aussi acceptées : AD · la droite (AD) · la droite AD · droite (AD) · droite AD · c'est (AD) · c'est la droite (AD) · (DA) · DA · la droite (DA) · la droite DA · droite (DA) · droite DA · c'est (DA) · c'est la droite (DA) · (AK) · (KA) · (DK) · (KD) · AK · DK · KA · KD · la droite (AK) · la droite AK · droite (AK) · droite AK · c'est (AK) · c'est la droite (AK) · la droite (KA) · la droite KA · droite (KA) · droite KA · c'est (KA) · c'est la droite (KA) · la droite (DK) · la droite DK · droite (DK) · droite DK · c'est (DK) · c'est la droite (DK) · la droite (KD) · la droite KD · droite (KD) · droite KD · c'est (KD) · c'est la droite (KD)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Reconnais d'abord chaque plan : le point K est sur une arête issue de A, et le point J aussi.
2. Le plan (ABK) est le plan (ABD), et le plan (CDJ) est le plan (ACD). Quels sommets ont-ils en commun ?

CORRECTION

Reconnaître — K est sur (AD) : le plan (ABK) est (ABD). J est sur (AC) : le plan (CDJ) est (ACD).

$(ABK) = (ABD) \quad ; \quad (CDJ) = (ACD)$

Deux points — Les sommets A et D sont communs aux deux faces.

$(ABD) \cap (ACD) = (AD)$

L'intersection des plans (ABK) et (CDJ) est la droite (AD).

PIÈGES ANTICIPÉS

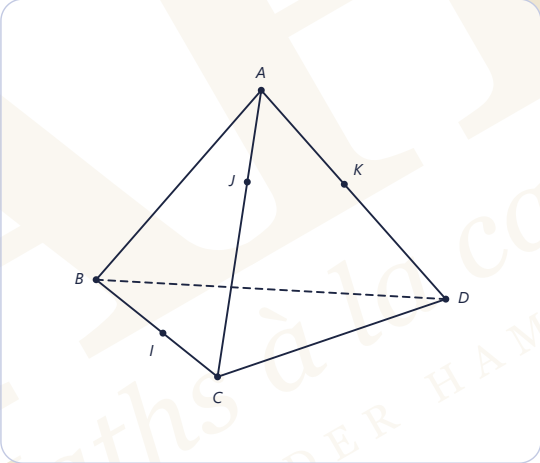
`K / le point K / A / le point A / D / le point D` → L'intersection de deux plans sécants est une droite, pas un point.

`(JK) / JK / (KJ) / KJ` → J n'est pas dans le plan (ABK), c'est-à-dire (ABD) : la droite (JK) n'est pas commune aux deux plans.

EXERCICE 22 · RAISONNEMENT

Aucun sommet en commun

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I est un point de $[BC]$, J un point de $[AC]$ et K un point de $[AD]$. Quelle est l'intersection des plans (BCK) et (ADI) ?



I est sur [BC], J sur [AC] et K sur [AD].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [BC], le point J sur l'arête [AC] et le point K sur l'arête [AD].

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(IK)` — aussi acceptées : IK · la droite (IK) · la droite IK · droite (IK) · droite IK · c'est (IK) · c'est la droite (IK) · (KI) · KI · la droite (KI) · la droite KI · droite (KI) · droite KI · c'est (KI) · c'est la droite (KI)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points communs ne sont pas forcément des sommets : pense aux points I et K.
2. K est sur (AD) : est-il dans le plan (ADI) ? I est sur (BC) : est-il dans le plan (BCK) ?

CORRECTION

Le point K — K est dans le plan (BCK), et il est sur (AD), contenue dans le plan (ADI).

$K \in (BCK) \quad \text{et} \quad K \in (ADI)$

Le point I — I est dans le plan (ADI), et il est sur (BC), contenue dans le plan (BCK).

$I \in (ADI) \quad \text{et} \quad I \in (BCK)$

La droite —

$(BCK) \cap (ADI) = (IK)$

L'intersection des plans (BCK) et (ADI) est la droite (IK).

PIÈGES ANTICIPÉS

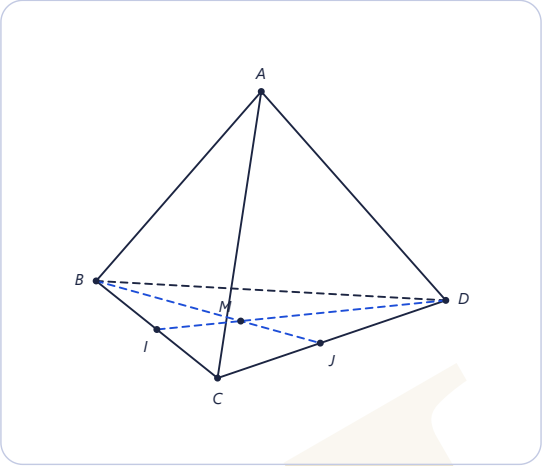
`K / le point K / I / le point I` → L'intersection de deux plans sécants est une droite : I et K sont tous les deux communs.

`(BC) / BC / (AD) / AD` → Cette droite est contenue dans un seul des deux plans.

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Un point commun dans la face

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I est un point de $[BC]$ et J un point de $[CD]$. Les droites (BJ) et (DI) se coupent en M. Quelle est l'intersection des plans (AID) et (JAB) ?



M est le point d'intersection de (BJ) et (DI).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [BC] et le point J sur l'arête [CD]. Dans la face BCD, les segments [BJ] et [DI], en bleu, se coupent en M.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(AM)` — aussi acceptées : AM · la droite (AM) · la droite AM · droite (AM) · droite AM · c'est (AM) · c'est la droite (AM) · (MA) · MA · la droite (MA) · la droite MA · droite (MA) · droite MA · c'est (MA) · c'est la droite (MA)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point A est commun aux deux plans : il en faut un deuxième.
2. La droite (DI) est contenue dans le plan (AID) et la droite (BJ) dans le plan (JAB) : que dire de leur point commun ?

CORRECTION

Le point A —

$A \in (AID)$ et $A \in (JAB)$

Le point M — M est sur (DI), contenue dans (AID), et sur (BJ), contenue dans (JAB).

$M \in (AID)$ et $M \in (JAB)$

La droite —

$(AID) \cap (JAB) = (AM)$

L'intersection des plans (AID) et (JAB) est la droite (AM).

PIÈGES ANTICIPÉS

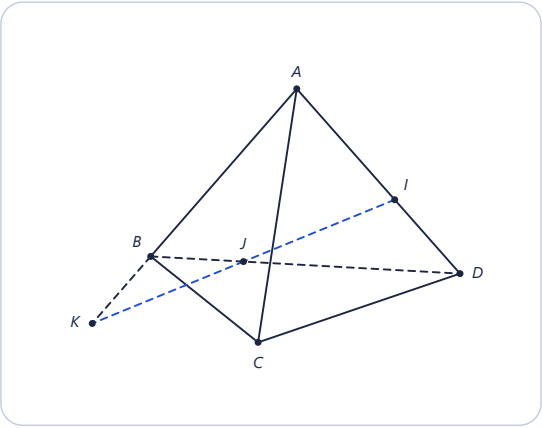
`A` / `le point A` / `M` / `le point M` → L'intersection de deux plans sécants est une droite : elle passe par A et par M.

`(AI)` / `AI` / `(AJ)` / `AJ` / `(AD)` / `AD` / `(AB)` / `AB` → Cette droite est contenue dans un seul des deux plans : son deuxième point n'est pas commun.

EXERCICE 24 · RAISONNEMENT

Construire le second point

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I est un point de $[AD]$ et J un point de $[BD]$. Les droites (IJ) et (AB) se coupent en K. Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (CIJ) ?



La droite (IJ) coupe la droite (AB) en K.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : A en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite ; l'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [AD] et le point J sur l'arête [BD]. La droite (IJ), en bleu, prolongée au-delà de J, coupe la droite (AB), prolongée au-delà de B, en un point K situé à gauche du tétraèdre.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(CK)` — aussi acceptées : CK · la droite (CK) · la droite CK · droite (CK) · droite CK · c'est (CK) · c'est la droite (CK) · (KC) · KC · la droite (KC) · la droite KC · droite (KC) · droite KC · c'est (KC) · c'est la droite (KC)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point C est commun aux deux plans : il en faut un deuxième.
2. K est sur (AB) et sur (IJ) : dans quels plans ces deux droites sont-elles contenues ?

CORRECTION

Le point C —
$C \in (ABC) \quad$ et $\quad C \in (CIJ)$

Le point K — K est sur (AB), contenue dans (ABC), et sur (IJ), contenue dans (CIJ).
$K \in (ABC) \quad$ et $\quad K \in (CIJ)$

La droite —
$(ABC) \cap (CIJ) = (CK)$

L'intersection des plans (ABC) et (CIJ) est la droite (CK).

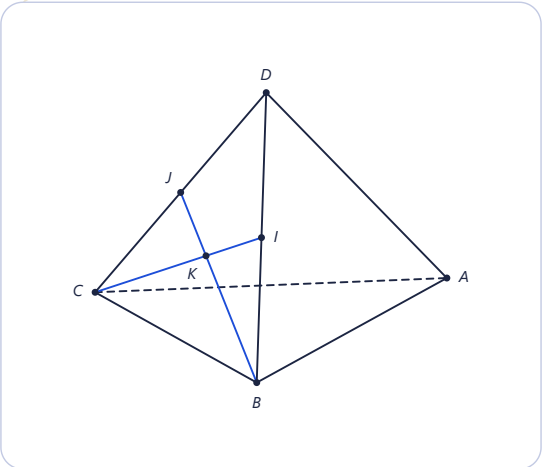
PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / K / le point K` → L'intersection de deux plans sécants est une droite : elle passe par C et par K.

`(IJ) / IJ / (AB) / AB / (CI) / CI / (CJ) / CJ` → Cette droite est contenue dans un seul des deux plans.

EXERCICE 25 · PRATIQUE **Une médiane qui perce un plan**

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, K est le centre de gravité du triangle BCD, I est le milieu de $[BD]$ et J le milieu de $[CD]$. En quel point la droite (CK) perce-t-elle le plan (ABD) ?



K est le centre de gravité du triangle BCD.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : D en haut, C à gauche, B en bas devant, A à droite ; l'arête [CA], cachée, est en pointillés. I est le milieu de l'arête [BD] et J le milieu de l'arête [CD]. Dans la face BCD, les médianes [CI] et [BJ], en bleu, se coupent en K, le centre de gravité du triangle BCD.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `I` — aussi acceptées : le point I · point I · c'est I · c'est le point I · en I · au point I · = I · le milieu de [BD] · milieu de [BD] · milieu de BD · le milieu de BD · au milieu de [BD] · au milieu de BD · I le milieu de [BD] · I, le milieu de [BD] · I milieu de [BD] · I le milieu de BD · I milieu de BD · le point I milieu de [BD] · le point I, milieu de [BD] · en I le milieu de [BD] · en I, le milieu de [BD] · c'est le milieu de [BD]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de gravité est sur les trois médianes du triangle BCD : que représente la droite (CK) ?
2. La médiane issue de C passe par le milieu du côté opposé, $[BD]$. Et la droite (BD) est contenue dans le plan (ABD).

CORRECTION

La médiane — (CK) est la médiane issue de C du triangle BCD : elle coupe (BD) en son milieu.

$(CK) \cap (BD) = \{I\}$

Le plan — La droite (BD) est contenue dans le plan (ABD), et C n'est pas dans ce plan.

$(CK) \cap (ABD) = \{I\}$

La droite (CK) perce le plan (ABD) en I, le milieu de $[BD]$.

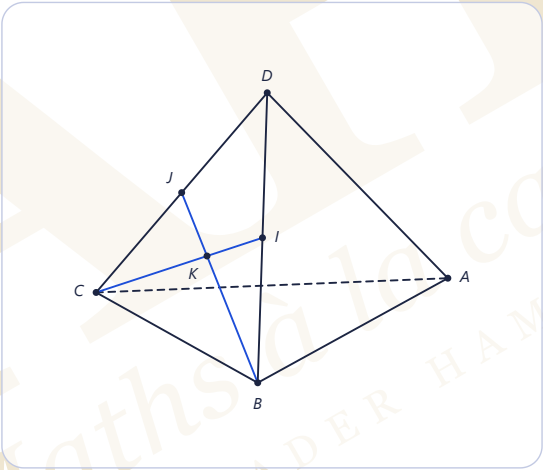
PIÈGES ANTICIPÉS

`K / le point K / en K` → K est dans la face BCD, pas dans le plan (ABD) : il faut prolonger (CK) jusqu'à (BD).

`J / le point J / en J` → J est le milieu de $[CD]$: c'est la médiane issue de B qui passe par J.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT **Deux plans et une médiane**

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, K est le centre de gravité du triangle BCD, I est le milieu de $[BD]$ et J le milieu de $[CD]$. Quelle est l'intersection des plans (ABK) et (ACD) ?



K est le centre de gravité du triangle BCD.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : D en haut, C à gauche, B en bas devant, A à droite ; l'arête [CA], cachée, est en pointillés. I est le milieu de l'arête [BD] et J le milieu de l'arête [CD]. Dans la face BCD, les médianes [CI] et [BJ], en bleu, se coupent en K, le centre de gravité du triangle BCD.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(AJ)` — aussi acceptées : AJ · la droite (AJ) · la droite AJ · droite (AJ) · droite AJ · c'est (AJ) · c'est la droite (AJ) · (JA) · JA · la droite (JA) · la droite JA · droite (JA) · droite JA · c'est (JA) · c'est la droite (JA)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point A est commun aux deux plans. Pour le second, pense à la droite (BK), contenue dans le plan (ABK).
2. (BK) est la médiane issue de B du triangle BCD : en quel point coupe-t-elle (CD) ?

CORRECTION

La médiane — (BK) est la médiane issue de B : elle coupe (CD) en son milieu J.

$J \in (BK) \quad \text{et} \quad (BK) \subset (ABK)$

Commun — J est aussi sur (CD), contenue dans le plan (ACD).

$J \in (ACD)$

La droite —

$(ABK) \cap (ACD) = (AJ)$

L'intersection des plans (ABK) et (ACD) est la droite (AJ).

PIÈGES ANTICIPÉS

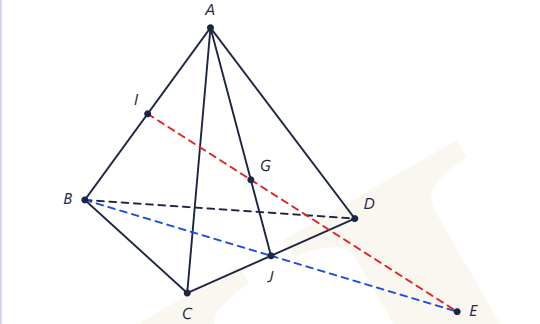
`(AK)` / `AK` / `(AI)` / `AI` / `(AD)` / `AD` / `(AC)` / `AC` → Le deuxième point de cette droite n'est pas dans les deux plans : cherche où (BK) rencontre le plan (ACD).

`A` / `le point A` / `J` / `le point J` → L'intersection de deux plans sécants est une droite : elle passe par A et par J.

EXERCICE 27 · DEFI

Où est le point E ?

$ABCD$ est un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et G le centre de gravité du triangle ACD. La droite (IG) perce le plan (BCD) en un point E de la droite (BJ). Combien vaut le rapport $\dfrac{BE}{BJ}$?



La droite (IG) perce le plan (BCD) au point E de la droite (BJ).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : A en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite ; l'arête [BD], cachée, est en pointillés. I est le milieu de l'arête [AB] et J le milieu de l'arête [CD]. Le point G, centre de gravité du triangle ACD, est sur la médiane [AJ], aux deux tiers à partir de A. La droite (IG), en rouge, et la droite (BJ), en bleu, se coupent en un point E situé à droite du tétraèdre, au-delà de J.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Travaille dans le plan (ABJ) : I est le milieu de $[AB]$ et G est sur $[AJ]$ avec $AG = \dfrac{2}{3}AJ$.
2. Trace par J la parallèle à (IG) : elle coupe (AB) en un point L. Applique le théorème de Thalès dans le triangle ALJ, puis dans le triangle BIE.

CORRECTION

Une parallèle — Dans le plan (ABJ), la parallèle à (IG) passant par J coupe (AB) en L. Par Thalès dans le triangle ALJ : $\dfrac{AI}{AL} = \dfrac{AG}{AJ} = \dfrac{2}{3}$.

$AL = \dfrac{3}{2}AI = \dfrac{3}{4}AB$

Le point L — L est donc entre I et B, avec $BL = \dfrac{1}{4}AB$ et $BI = \dfrac{1}{2}AB$.

$\dfrac{BL}{BI} = \dfrac{1}{2}$

Thalès encore — Dans le triangle BIE, la droite (LJ) est parallèle à (IE) : $\dfrac{BJ}{BE} = \dfrac{BL}{BI}$.

$\dfrac{BJ}{BE} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{BE}{BJ} = 2$: le point J est le milieu de $[BE]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` / `0.5` → $\dfrac{1}{2}$ est le rapport $\dfrac{BJ}{BE}$: le point E est au-delà de J, donc BE est plus grand que BJ.

`3/2` / `1.5` → $\dfrac{3}{2}$ est le rapport $\dfrac{AJ}{AG}$: il sert à placer L, pas E.

EXERCICE 28 · RAISONNEMENT

Trois plans et une droite

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[DB]$ et K le milieu de $[BC]$. Les plans (ABI), (ACJ) et (ADK) ont une droite commune : elle passe par A et par un point remarquable du triangle BCD. Lequel ?

Écris le nom de ce point.

Réponse attendue : `centre de gravité` — aussi acceptées : le centre de gravité · son centre de gravité · le centre de gravité du triangle BCD · centre de gravité du triangle BCD · le centre de gravité de BCD · centre de gravité de BCD · c'est le centre de gravité · centre de gravite · le centre de gravite · le centre de gravité du triangle · centre de gravité du triangle · le centre de gravité G · centre de gravité G · le centre de gravité G du triangle BCD · le point de concours des médianes · point de concours des médianes · le point de concours des médianes du triangle BCD · le point d'intersection des médianes · point d'intersection des médianes · l'intersection des médianes · le point de rencontre des médianes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle BCD, que représentent les droites (BI), (CJ) et (DK) ?
2. Ce sont les trois médianes : elles passent toutes par un même point G. Dans quels plans ce point se trouve-t-il ?

CORRECTION

Les médianes — (BI), (CJ) et (DK) sont les médianes du triangle BCD : elles sont concourantes en son centre de gravité G.

$G \in (BI),\ G \in (CJ)$ et $G \in (DK)$

Trois plans — (BI) est contenue dans le plan (ABI), (CJ) dans (ACJ) et (DK) dans (ADK) : G appartient aux trois plans, comme A.

A et G sont communs aux trois plans

Les trois plans ont en commun la droite (AG), où G est le centre de gravité du triangle BCD.

PIÈGES ANTICIPÉS

`orthocentre / l'orthocentre / centre du cercle circonscrit / le centre du cercle circonscrit` → I, J et K sont des milieux : les droites (BI), (CJ) et (DK) sont des médianes, pas des hauteurs ni des médiatrices.

EXERCICE 29 · DEFI

Le tétraèdre qui bascule : le maximum

Les faces d'un tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Il est posé sur la face « 1 ». À chaque étape, on le fait basculer autour d'une arête de sa base et on note le numéro de la face posée. Après 2006 étapes, on fait la somme S de tous les numéros notés, en comptant le « 1 » initial. Quelle est la valeur maximale de S ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : `7022`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quand le tétraèdre bascule, la face posée change toujours : on ne peut pas noter deux fois de suite le même numéro.
2. Regroupe les 2006 numéros notés après le « 1 » en 1003 paires de numéros consécutifs : que vaut au plus la somme d'une paire ?

CORRECTION

Une paire — Deux numéros consécutifs sont différents : leur somme vaut au plus $4 + 3$.

$4 + 3 = 7$

Le total — Il y a 1003 paires après le « 1 » initial, et on atteint le maximum en alternant « 4 » et « 3 ».

$S = 1 + 1003 \times 7 = 7022$

La valeur maximale de S est 7022.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8025 / 8024 / 8028` → On ne peut pas poser la face « 4 » deux fois de suite : à chaque étape, la face posée change.

`7021` → Il ne faut pas oublier le « 1 » initial.

EXERCICE 30 · DEFI

Le tétraèdre qui bascule : le minimum

Les faces d'un tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Il est posé sur la face « 1 ». À chaque étape, on le fait basculer autour d'une arête de sa base et on note le numéro de la face posée. Après 2006 étapes, on fait la somme S de tous les numéros notés, en comptant le « 1 » initial. Quelle est la valeur minimale de S ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : `3010`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La face posée change à chaque étape : après un « 1 », on ne peut pas noter « 1 » de nouveau.
2. Regroupe les 2006 numéros notés après le « 1 » initial en 1003 paires de numéros consécutifs : que vaut au moins la somme d'une paire ?

CORRECTION

Une paire — Deux numéros consécutifs sont différents : leur somme vaut au moins $2 + 1$.

$2 + 1 = 3$

Le total — Il y a 1003 paires après le « 1 » initial, et on atteint le minimum en alternant « 2 » et « 1 ».

$S = 1 + 1003 \times 3 = 3010$

La valeur minimale de S est 3010.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2007` → On ne peut pas rester sur la face « 1 » : à chaque étape, la face posée change.

`3009` → Il ne faut pas oublier le « 1 » initial.

EXERCICE 31 · PRATIQUE

Des petits cubes dans un grand

Une boîte cubique a pour arête 8. On la découpe en cubes d'arête 1. Combien de petits cubes obtient-on ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 512

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il y a 8 petits cubes le long de chaque arête : dans la longueur, dans la largeur et dans la hauteur.
2. Le nombre de petits cubes est le volume de la boîte.

CORRECTION

Le volume — Il y a 8 petits cubes dans chacune des trois directions.

$$8 \times 8 \times 8 = 512$$

On obtient 512 cubes d'arête 1.

PIÈGES ANTICIPÉS

`64` → 64 est le nombre de petits cubes d'une seule couche : il y a 8 couches.

`384` → 384 est l'aire totale de la boîte : on demande son volume.

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT

Le cube peint

On peint les faces d'un cube en bois, puis on le découpe en 1000 cubes identiques à l'aide de traits de scie parallèles aux faces. Combien y a-t-il de petits cubes qui ont au moins une face peinte ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 488

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $1000 = 10^3$: il y a 10 petits cubes le long de chaque arête. Compte d'abord ceux qui n'ont aucune face peinte.
2. Les petits cubes sans peinture forment un cube intérieur : on enlève une couche de chaque côté.

CORRECTION

L'intérieur — En enlevant une couche de chaque côté, il reste 8 petits cubes le long de chaque arête.

$$8^3 = 512$$

La différence —

$$1000 - 512 = 488$$

488 petits cubes ont au moins une face peinte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`600` → En comptant 100 cubes par face, tu comptes plusieurs fois ceux des arêtes et des coins.

`512` → 512 est le nombre de petits cubes sans aucune face peinte : on demande les autres.

EXERCICE 33 · RAISONNEMENT

Un cube, différence de deux carrés

Deux entiers naturels a et b vérifient $a - b = 13$ et $a + b = 169$, de sorte que $a^2 - b^2 = 13^3$. Combien vaut a ?

Écris un nombre.

Réponse attendue : 91

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ajoute membre à membre les deux égalités : les b s'éliminent.
2. On obtient $2a = 13 + 169$.

CORRECTION

Ajouter —

$$2a = 13 + 169 = 182$$

Les deux entiers —

$$a = 91 \quad \text{et} \quad b = 78$$

Vérifier —

$91^2 - 78^2 = 8281 - 6084 = 2197$

$a = 91$, et $13^3 = 91^2 - 78^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

78 → 78 est la valeur de b : on demande a.

182 → 182 est la valeur de $2a$: il reste à diviser par 2.

EXERCICE 34 · BASE **Les arêtes d'un prisme triangulaire**

Déterminer le nombre d'arêtes d'un prisme droit à base triangulaire.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte d'abord les arêtes des deux bases, qui sont des triangles.
2. Ajoute ensuite les arêtes latérales : une par sommet d'une base.

CORRECTION

Les deux bases — Chaque base est un triangle : elle a 3 arêtes.

$2 \times 3 = 6$

Les arêtes latérales — Chaque sommet d'une base est relié au sommet correspondant de l'autre base.

3

Le total —

$6 + 3 = 9$

Un prisme droit à base triangulaire a 9 arêtes : on compte les arêtes des bases, puis les arêtes latérales.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6, ce sont les arêtes des deux bases, ou les sommets : il manque les 3 arêtes latérales.

5 → 5 est le nombre de faces du prisme, pas celui de ses arêtes.

EXERCICE 35 · BASE **Les arêtes d'une pyramide**

Déterminer le nombre d'arêtes d'une pyramide à base carrée.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte les côtés de la base, puis les arêtes qui partent du sommet.
2. Le sommet de la pyramide est relié à chacun des sommets de la base.

CORRECTION

La base — La base est un carré : 4 arêtes.

4

Les arêtes latérales — Le sommet est relié aux 4 sommets de la base.

4

Le total —

$4 + 4 = 8$

Une pyramide à base carrée a 8 arêtes : celles de la base, plus une arête par sommet de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4, ce sont seulement les côtés de la base : il faut ajouter les arêtes qui montent au sommet.

5 → 5 est le nombre de sommets, ou de faces : on demande les arêtes.

EXERCICE 36 · PRATIQUE **Une pyramide à base pentagonale**

Une pyramide a pour base un pentagone. Calculer la somme de son nombre de faces, de son nombre de sommets et de son nombre d'arêtes.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 22

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les faces : la base, plus une face triangulaire par côté de la base.
2. Les sommets : ceux de la base, plus le sommet de la pyramide. Les arêtes : les côtés de la base, plus une arête par sommet de la base.

CORRECTION

Les faces — La base et 5 faces latérales.

$$1 + 5 = 6$$

Les sommets — Les 5 sommets de la base et le sommet S.

$$5 + 1 = 6$$

Les arêtes — Les 5 côtés de la base et les 5 arêtes latérales.

$$5 + 5 = 10$$

La somme —

$$6 + 6 + 10 = 22$$

On trouve 22. Pour une pyramide, on compte toujours séparément la base et ce qui monte vers le sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

21 → Tu as oublié la base parmi les faces : une pyramide à base pentagonale a 6 faces.

EXERCICE 37 · RAISONNEMENT

Un prisme de dix-huit arêtes

Un prisme droit a 18 arêtes. Déterminer son nombre de faces.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle n le nombre de côtés d'une base. Combien d'arêtes le prisme a-t-il en fonction de n ?
2. Chaque base a n arêtes, et il y a n arêtes latérales. Les faces : les deux bases et une face latérale par côté.

CORRECTION

Les arêtes — Si une base a n côtés, le prisme a n arêtes sur chaque base et n arêtes latérales.

$$3n = 18 \iff n = 6$$

Les faces — Les deux bases hexagonales et 6 faces latérales.

$$6 + 2 = 8$$

Le prisme a 8 faces. On exprime d'abord le nombre d'arêtes en fonction du nombre de côtés de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est le nombre de faces latérales : il faut ajouter les deux bases.

9 / 11 → Les arêtes ne se répartissent pas en deux : il y a n arêtes sur chaque base et n arêtes latérales, soit $3n$.

EXERCICE 38 · BASE

Le volume d'un cube

Un cube a pour arête 6 cm. Calculer son volume, en cm³, sans écrire l'unité.

Écris un nombre, sans l'unité.

Réponse attendue : 216

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le volume d'un cube d'arête a est a^3.
2. Calcule $6 \times 6 \times 6$.

CORRECTION

La formule —

$$V = a^3$$

Le calcul —

$$V = 6^3 = 216$$

Le volume du cube est 216 cm³ : on élève l'arête au cube.

PIÈGES ANTICIPÉS

36 → 36 est l'aire d'une face, 6^2 : le volume est 6^3.

144 → 144 est l'aire latérale, 4×6^2 : on demande le volume.

18 → 6^3 n'est pas 3×6 : c'est $6 \times 6 \times 6$.

EXERCICE 39 · BASE

L'aire latérale d'un pavé

Un parallélépipède rectangle a une base de côtés 5 cm et 3 cm, et une hauteur de 7 cm. Calculer son aire latérale, en cm², sans écrire l'unité.

Écris un nombre, sans l'unité.

Réponse attendue : 112

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire latérale est l'aire des quatre faces qui entourent la base, sans les deux bases.
2. Le périmètre de la base, multiplié par la hauteur : $2(a+b)c$.

CORRECTION

Le périmètre de la base —

$2(5+3) = 16$

Fois la hauteur —

$16 \times 7 = 112$

L'aire latérale est 112 cm² : le périmètre de la base multiplié par la hauteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`105` → $105 = 5 \times 3 \times 7$ est le volume : on demande l'aire des faces latérales.

`142` → 142 est l'aire totale : elle compte aussi les deux bases, qui ne sont pas des faces latérales.

`56` → Tu as pris $5+3$, le demi-périmètre : il faut le périmètre $2(5+3)$.

EXERCICE 40 · PRATIQUE

La contenance d'un aquarium

Un aquarium a la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur 60 cm, de largeur 30 cm et de hauteur 40 cm. Calculer sa contenance, en L.

Donne la contenance en L.

Réponse attendue : 72

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord le volume en cm³ avec la formule abc.
2. Un litre, c'est 1 dm³, c'est-à-dire 1000 cm³.

CORRECTION

Le volume —

$60 \times 30 \times 40 = 72\,000 \text{ cm}^3$

En litres — 1 L $= 1000$ cm³.

$72\,000 \div 1000 = 72$

L'aquarium contient 72 L : on calcule le volume, puis on convertit, 1 L valant 1000 cm³.

PIÈGES ANTICIPÉS

`72000` → $72\,000$ est le volume en cm³ : il reste à le convertir en litres.

`720 / 7.2` → 1 L vaut 1000 cm³ : on divise le volume en cm³ par 1000.

EXERCICE 41 · PRATIQUE

Retrouver l'arête

Un cube a pour volume 343 cm³. Calculer, en cm, la longueur de son arête.

Donne la longueur en cm.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le nombre a tel que $a^3 = 343$.
2. Essaie les cubes des premiers entiers : 5^3, 6^3, 7^3…

CORRECTION

L'équation —

$a^3 = 343$

Le cube cherché — $7 \times 7 \times 7 = 343$.

$a = 7$

L'arête mesure 7 cm : on cherche le nombre dont le cube est le volume.

PIÈGES ANTICIPÉS

`343/3 / 114.33 / 114.3` → On ne divise pas par 3 : on cherche le nombre a tel que $a \times a \times a = 343$.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

La grande diagonale est donnée

La grande diagonale d'un cube mesure 12 cm. Calculer, en cm, la longueur de son arête. Donner la valeur exacte.

Donne la valeur exacte, en cm.

Réponse attendue : `4*sqrt(3)` — aussi acceptées : 12/sqrt(3) · sqrt(48) · 4√3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La grande diagonale d'un cube d'arête a mesure $a\sqrt{3}$.
2. Résous $a\sqrt{3} = 12$, puis rends le dénominateur rationnel.

CORRECTION

L'équation —

$$a\sqrt{3} = 12$$

Diviser —

$$a = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

Simplifier —

$$a = 4\sqrt{3}$$

L'arête mesure $4\sqrt{3}$ cm : on part de la formule $a\sqrt{3}$ de la grande diagonale.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(2) / 12/sqrt(2) / sqrt(72)` → $a\sqrt{2}$ est la petite diagonale, celle d'une face : la grande diagonale mesure $a\sqrt{3}$.

`4` → On divise par $\sqrt{3}$, pas par 3.

`6.93 / 6.9 / 6.928` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, avec une racine carrée.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

De l'aire latérale au volume

L'aire latérale d'un cube est 100 cm². Calculer son volume, en cm³, sans écrire l'unité.

Écris un nombre, sans l'unité.

Réponse attendue : `125`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire latérale d'un cube d'arête a est $4a^2$: trouve d'abord a.
2. $4a^2 = 100$ donne $a^2 = 25$.

CORRECTION

L'arête —

$$4a^2 = 100 \iff a^2 = 25 \iff a = 5$$

Le volume —

$$V = 5^3 = 125$$

Le volume est 125 cm³ : on retrouve l'arête à partir de l'aire latérale $4a^2$, puis on calcule a^3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1000` → 100 cm² est l'aire des quatre faces latérales, pas d'une seule : $4a^2 = 100$.

EXERCICE 44 · PRATIQUE

La hauteur d'une boîte

Une boîte a la forme d'un parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté 3 cm. Une diagonale de la boîte mesure 9 cm. Calculer, en cm, la hauteur de la boîte. Donner la valeur exacte.

Donne la valeur exacte, en cm.

Réponse attendue : `3*sqrt(7)` — aussi acceptées : sqrt(63) · 3√7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une diagonale d d'un parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c vérifie $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
2. Ici $a = b = 3$ et $d = 9$: isole c^2.

CORRECTION

La relation —

$9^2 = 3^2 + 3^2 + c^2$

Isoler —

$c^2 = 81 - 18 = 63$

La racine —

$c = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

La hauteur mesure $3\sqrt{7}$ cm : on utilise $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ et on isole l'inconnue.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(2) / sqrt(72)` → La base a deux côtés de 3 cm : il faut retrancher 3^2 deux fois.

`3` → On ne retranche pas les longueurs : on retranche leurs carrés, $81 - 9 - 9$.

`7.94 / 7.9 / 7.937` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, avec une racine carrée.

EXERCICE 45 · PRATIQUE

Le plus long bâton

Un coffre a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions intérieures 10 cm, 40 cm et 80 cm. Calculer, en cm, la longueur du plus long bâton rectiligne qu'on peut y ranger.

Donne la longueur en cm.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plus long segment contenu dans le coffre joint deux sommets opposés : c'est une diagonale.
2. Calcule $10^2 + 40^2 + 80^2$, puis prends la racine carrée.

CORRECTION

Une diagonale — Le bâton le plus long est posé selon une diagonale du coffre.

$d^2 = 10^2 + 40^2 + 80^2$

Les carrés —

$d^2 = 100 + 1600 + 6400 = 8100$

La racine —

$d = \sqrt{8100} = 90$

On peut ranger un bâton de 90 cm : la diagonale est le plus long segment du parallélépipède.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40*sqrt(5) / sqrt(8000) / 89.44` → C'est la diagonale de la plus grande face : en traversant le coffre d'un coin au coin opposé, on gagne encore un peu.

`130` → On n'ajoute pas les dimensions : on ajoute leurs carrés, puis on prend la racine carrée.

`8100` → 8100 est le carré de la diagonale : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 46 · RAISONNEMENT

Le volume par les faces

Les trois faces d'un parallélépipède rectangle qui ont un sommet commun ont pour aires 12 cm², 20 cm² et 15 cm². Calculer son volume, en cm³, sans écrire l'unité.

Écris un nombre, sans l'unité.

Réponse attendue : `60`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle a, b et c les dimensions : les trois aires sont ab, bc et ac.
2. Multiplie les trois aires : que vaut $ab \times bc \times ac$ en fonction du volume abc ?

CORRECTION

Le produit des aires —

$ab \times bc \times ac = (abc)^2$

Le calcul —

$(abc)^2 = 12 \times 20 \times 15 = 3600$

Le volume —

$V = abc = \sqrt{3600} = 60$

Le volume est 60 cm³ (dimensions 3, 4 et 5 cm) : le produit des trois aires est le carré du volume.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3600` → 3600 est le carré du volume : $ab \times bc \times ac = (abc)^2$.

`47` → La somme des aires ne donne pas le volume : multiplie-les.

EXERCICE 47 · RAISONNEMENT

Un triangle de petites diagonales

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Son arête mesure 4 cm. Calculer, en cm, le périmètre du triangle BDG. Donner la valeur exacte.

Donne la valeur exacte, en cm.

Réponse attendue : `12*sqrt(2)` — aussi acceptées : 3*4*sqrt(2) · sqrt(288) · 12√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chacun des côtés $[BD]$, $[DG]$ et $[GB]$ est la diagonale d'une face du cube. Lesquelles ?
2. Une petite diagonale d'un cube d'arête a mesure $a\sqrt{2}$.

CORRECTION

Trois diagonales de faces — $[BD]$ est une diagonale de la face $ABCD$, $[DG]$ de la face $CDHG$ et $[GB]$ de la face $BCGF$.

$BD = DG = GB = 4\sqrt{2}$

Le périmètre —

$3 \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Le périmètre est $12\sqrt{2}$ cm : le triangle BDG est équilatéral, ses côtés sont des petites diagonales.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12*sqrt(3) / sqrt(432)` → Les côtés du triangle sont des diagonales de faces, de longueur $a\sqrt{2}$, pas des grandes diagonales.

`12` → $[BD]$, $[DG]$ et $[GB]$ ne sont pas des arêtes : chacun traverse une face en diagonale.

`16.97 / 17 / 16.9` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, avec une racine carrée.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

Du sommet au centre d'une face

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Son arête mesure 4 cm et O est le centre de la face $EFGH$. Calculer, en cm, la distance AO. Donner la valeur exacte.

Donne la valeur exacte, en cm.

Réponse attendue : `2*sqrt(6)` — aussi acceptées : sqrt(24) · 2√6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O est le milieu de la diagonale $[EG]$: calcule d'abord EO.
2. Le triangle AEG, formé de l'arête $[AE]$ et de la petite diagonale $[EG]$, est rectangle en E, comme dans le calcul de la grande diagonale. Or O est sur $[EG]$.

CORRECTION

La demi-diagonale — O est le milieu de $[EG]$, et $EG = 4\sqrt{2}$.

$EO = 2\sqrt{2}$

Pythagore — Le triangle AEG, formé de l'arête $[AE]$ et de la petite diagonale $[EG]$, est rectangle en E ; O est sur $[EG]$, donc le triangle AEO est rectangle en E :

$AO^2 = AE^2 + EO^2 = 16 + 8 = 24$

La racine —

$AO = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$AO = 2\sqrt{6}$ cm : on se ramène à un triangle rectangle formé d'une arête et d'une demi-diagonale de face.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(5) / sqrt(20)` → O n'est pas le milieu d'une arête : EO est la moitié d'une diagonale de face, $2\sqrt{2}$, pas 2.

`4*sqrt(3) / sqrt(48)` → $4\sqrt{3}$ est la grande diagonale AG : O est au milieu de la face, pas au sommet G.

`4.9 / 4.90 / 4.899` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, avec une racine carrée.

EXERCICE 49 · DEFI

Un sommet et le milieu d'une arête

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Son arête mesure 4 cm et I est le milieu de l'arête $[EF]$. Calculer, en cm, la distance CI.

Donne la longueur en cm.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Passe par le sommet F : calcule d'abord CF, diagonale de la face $BCGF$.

2. Le triangle CFE, formé de l'arête $[FE]$ et de la petite diagonale $[FC]$, est rectangle en F, comme dans le calcul de la grande diagonale. Or I est sur $[FE]$.

CORRECTION

La petite diagonale — $[CF]$ est une diagonale de la face carrée $BCGF$.

$CF = 4\sqrt{2}$

Le triangle CFI — Le triangle CFE, formé de l'arête $[FE]$ et de la petite diagonale $[FC]$, est rectangle en F ; I est sur $[FE]$, avec $FI = 2$: le triangle CFI est rectangle en F.

$CI^2 = CF^2 + FI^2 = 32 + 4 = 36$

La racine —

$CI = 6$

$CI = 6$ cm : on se ramène à un triangle rectangle formé d'une petite diagonale et d'une partie d'arête, comme pour la grande diagonale.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(2) / sqrt(32)` → $4\sqrt{2}$ est la longueur CF de la petite diagonale : il reste à aller de F jusqu'à I.

`2*sqrt(5) / sqrt(20)` → $\sqrt{20}$ est la distance BI dans la face $ABFE$: ce n'est qu'une étape, il reste à rejoindre C.

`36` → 36 est le carré de CI : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 50 · DEFI

Le chemin de la fourmi

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Son arête mesure 6 cm. Une fourmi va du sommet A au sommet G en marchant sur les faces du cube. Calculer, en cm, la longueur du plus court chemin possible. Donner la valeur exacte.

Donne la valeur exacte, en cm.

Réponse attendue : `6*sqrt(5)` — aussi acceptées : sqrt(180) · 6√5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La fourmi ne peut pas traverser le cube : la grande diagonale ne convient pas. Déplie deux faces voisines, par exemple $ABFE$ et $BCGF$, dans un même plan.
2. Une fois dépliées, les deux faces forment un rectangle de 6 cm sur 12 cm, et le plus court chemin est un segment.

CORRECTION

Déplier — On déplie les faces $ABFE$ et $BCGF$ autour de l'arête $[BF]$: elles forment un rectangle de côtés $6 + 6 = 12$ et 6, dont A et G sont deux sommets opposés.

$6 + 6 = 12$

Le segment — Dans ce rectangle, le plus court chemin de A à G est la diagonale.

$AG^2 = 12^2 + 6^2 = 180$

La racine —

$AG = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

Le plus court chemin mesure $6\sqrt{5}$ cm : pour un trajet sur la surface, on déplie les faces dans un plan et on y trace un segment.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(3) / sqrt(108)` → $6\sqrt{3}$ est la grande diagonale : elle passe à l'intérieur du cube, la fourmi ne peut pas la suivre.

`6+6*sqrt(2)` → Une arête puis une diagonale de face, c'est un chemin possible, mais pas le plus court : déplie les faces.

`18` → Suivre trois arêtes est bien plus long : déplie deux faces et trace un segment.

`13.42 / 13.4 / 13.416` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, avec une racine carrée.

EXERCICE 51 · DEFI

Trois diagonales de faces

Les diagonales de trois faces d'un parallélépipède rectangle qui ont un sommet commun mesurent $\sqrt{13}$ cm, $2\sqrt{10}$ cm et $3\sqrt{5}$ cm. Calculer, en cm, la longueur d'une diagonale du parallélépipède.

Donne la longueur en cm.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec des dimensions a, b et c, les carrés des trois diagonales de faces sont $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$ et $a^2 + c^2$.
2. Ajoute ces trois carrés : tu obtiens deux fois $a^2 + b^2 + c^2$.

CORRECTION

Les carrés —

$(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) = 13 + 40 + 45 = 98$

Diviser par deux —

$a^2 + b^2 + c^2 = 49$

La diagonale —

$d = \sqrt{49} = 7$

La diagonale mesure 7 cm : la somme des carrés des trois diagonales de faces vaut $2d^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7*sqrt(2) / sqrt(98)` → Chaque carré a^2, b^2, c^2 est compté deux fois dans 98 : il faut diviser par 2.

`49` → 49 est le carré de la diagonale : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 52 · BASE

Doubler l'arête

On double la longueur de l'arête d'un cube. Déterminer par quel nombre son volume est multiplié.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si l'arête vaut a, le volume vaut a^3. Que vaut le volume quand l'arête vaut $2a$?
2. Développe $(2a)^3 = 2a \times 2a \times 2a$.

CORRECTION

Le nouveau volume —

$(2a)^3 = 2^3 \times a^3$

Le coefficient —

$(2a)^3 = 8a^3$

Le volume est multiplié par 8 : quand les longueurs sont multipliées par k, le volume est multiplié par k^3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Le volume n'est pas proportionnel à l'arête : les trois dimensions sont doublées.

`4` → 4 est le coefficient des aires : pour un volume, on a trois dimensions, 2^3.

EXERCICE 53 · BASE

Un plan par trois points

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace. Déterminer le nombre de plans qui passent par ces trois points.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis l'axiome 1.
2. Les trois points ne sont pas alignés : c'est exactement la condition de l'axiome 1.

CORRECTION

L'axiome 1 — Par trois points non alignés passe un plan et un seul.

(ABC)

Le nombre —

1

Un seul plan passe par A, B et C : on le note (ABC). S'ils étaient alignés, il y en aurait une infinité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Il existe toujours un plan qui passe par trois points ; l'axiome 1 dit qu'il est unique quand ils ne sont pas alignés.

`3` → L'axiome 1 dit « un plan et un seul » : les trois points déterminent un seul plan.

EXERCICE 54 · BASE

Une droite dans une face

$ABCD$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[BD]$. Dire si la droite (IJ) est contenue dans le plan (BCD).

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elle l'est · oui, elle l'est · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · contenue · oui contenue · oui, contenue · elle est contenue · oui elle est contenue · oui, elle est contenue · elle est contenue dans le plan · oui elle est contenue dans le plan · oui, elle est contenue dans le plan · elle est dans le plan · oui elle est dans le plan · oui, elle est dans le plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Où sont les points I et J ? Appartiennent-ils au plan (BCD) ?
2. Relis l'axiome 2 : un plan qui contient deux points distincts contient toute la droite qui passe par eux.

CORRECTION

Deux points du plan — I est sur $[BC]$ et J est sur $[BD]$: les deux points sont dans le plan (BCD).

$I \in (BCD)$ et $J \in (BCD)$

L'axiome 2 — Le plan (BCD) contient donc toute la droite (IJ).

$(IJ) \subset (BCD)$

Oui : deux points distincts d'un plan suffisent pour que la droite qui les joint soit tout entière dans ce plan.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elle ne l'est pas / non, elle ne l'est pas / elle ne l'est pas / c'est non / faux / le / lé / la / pas contenue / non pas contenue / elle n'est pas contenue / non elle n'est pas contenue / non, elle n'est pas contenue / elle n'est pas contenue dans le plan / elle n'est pas dans le plan` → I et J sont deux points distincts du plan (BCD) : d'après l'axiome 2, toute la droite (IJ) est dans ce plan.

EXERCICE 55 · PRATIQUE **Le plan d'une droite et d'un point**

$ABCD$ est un tétraèdre. Nommer le plan déterminé par la droite (BD) et le point C.

Écris le nom du plan, par exemple (ABC).

Réponse attendue : `(BCD)` — aussi acceptées : BCD · le plan (BCD) · le plan BCD · plan (BCD) · plan BCD · c'est (BCD) · c'est le plan (BCD) · (BDC) · BDC · le plan (BDC) · le plan BDC · plan (BDC) · plan BDC · c'est (BDC) · c'est le plan (BDC) · (CBD) · CBD · le plan (CBD) · le plan CBD · plan (CBD) · plan CBD · c'est (CBD) · c'est le plan (CBD) · (CDB) · CDB · le plan (CDB) · le plan CDB · plan (CDB) · plan CDB · c'est (CDB) · c'est le plan (CDB) · (DBC) · DBC · le plan (DBC) · le plan DBC · plan (DBC) · plan DBC · c'est (DBC) · c'est le plan (DBC) · (DCB) · DCB · le plan (DCB) · le plan DCB · plan (DCB) · plan DCB · c'est (DCB) · c'est le plan (DCB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point C n'est pas sur la droite (BD) : il existe un seul plan qui les contient.
2. Ce plan contient les points B, D et C, qui ne sont pas alignés.

CORRECTION

Un seul plan — $C \notin (BD)$: un seul plan contient la droite (BD) et le point C.

$C \notin (BD)$

Son nom — Il contient les trois points non alignés B, C et D : c'est le plan de la face BCD.

(BCD)

C'est le plan (BCD) : un plan déterminé par une droite et un point se nomme avec deux points de la droite et le point.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(ABD) / ABD / le plan (ABD) / le plan ABD / plan (ABD) / plan ABD / c'est (ABD) / c'est le plan (ABD) / (ADB) / ADB / le plan (ADB) / le plan ADB / plan (ADB) / plan ADB / c'est (ADB) / c'est le plan (ADB) / (BAD) / BAD / le plan (BAD) / le plan BAD / plan (BAD) / plan BAD / c'est (BAD) / c'est le plan (BAD) / (BDA) / BDA / le plan (BDA) / le plan BDA / plan (BDA) / plan BDA / c'est (BDA) / c'est le plan (BDA) / (DAB) / DAB / le plan (DAB) / le plan DAB / plan (DAB) / plan DAB / c'est (DAB) / c'est le plan (DAB) / (DBA) / DBA / le plan (DBA) / le plan DBA / plan (DBA) / plan DBA / c'est (DBA) / c'est le plan (DBA)` → Le plan (ABD) contient la droite (BD), mais pas le point C.

EXERCICE 56 · PRATIQUE **Le plan de deux droites sécantes**

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré de centre O. Nommer le plan déterminé par les droites sécantes (SB) et (SD), à l'aide de trois points de la figure.

Écris le nom du plan, par exemple (ABC).

Réponse attendue : `(SBD)` — aussi acceptées : SBD · le plan (SBD) · le plan SBD · plan (SBD) · plan SBD · c'est (SBD) · c'est le plan (SBD) · (SDB) · SDB · le plan (SDB) · le plan SDB · plan (SDB) · plan SDB · c'est (SDB) · c'est le plan (SDB) · (BSD) · BSD · le plan (BSD) · le plan BSD · plan (BSD) · plan BSD · c'est (BSD) · c'est le plan (BSD) · (BDS) · BDS · le plan (BDS) · le plan BDS · plan (BDS) · plan BDS · c'est (BDS) · c'est le plan (BDS) · (DSB) · DSB · le plan (DSB) · le plan DSB · plan (DSB) · plan DSB · c'est (DSB) · c'est le plan (DSB) · (DBS) · DBS · le plan (DBS) · le plan DBS · plan (DBS) · plan DBS · c'est (DBS) · c'est le plan (DBS) · (SBO) · SBO · le plan (SBO) · le plan SBO · plan (SBO) · plan SBO · c'est (SBO) · c'est le plan (SBO) · (SOB) · SOB · le plan (SOB) · le plan SOB · plan (SOB) · plan SOB · c'est (SOB) · c'est le plan (SOB) · (BSO) · BSO · le plan (BSO) · le plan BSO · plan (BSO) · plan BSO · c'est (BSO) · c'est le plan (BSO) · (BOS) · BOS · le plan (BOS) · le plan BOS · plan (BOS) · plan BOS · c'est (BOS) · c'est le plan (BOS) · (OSB) · OSB · le plan (OSB) · le plan OSB · plan (OSB) · plan OSB · c'est (OSB) · c'est le plan (OSB) · (OBS) · OBS · le plan (OBS) · le plan OBS · plan (OBS) · plan OBS · c'est (OBS) · c'est le plan (OBS) · (SOD) · SOD · le plan (SOD) · le plan SOD · plan (SOD) · plan SOD · c'est (SOD) · c'est le plan (SOD) · (SDO) · SDO · le plan (SDO) · le plan SDO · plan (SDO) · plan SDO · c'est (SDO) · c'est le plan (SDO) · (OSD) · OSD · le plan (OSD) · le plan OSD · plan (OSD) · plan OSD · c'est (OSD) · c'est le plan (OSD) · (ODS) · ODS · le plan (ODS) · le plan ODS · plan (ODS) · plan ODS · c'est (ODS) · c'est le plan (ODS) · (DSO) · DSO · le plan (DSO) · le plan DSO · plan (DSO) · plan DSO · c'est (DSO) · c'est le plan (DSO) · (DOS) · DOS · le plan (DOS) · le plan DOS · plan (DOS) · plan DOS · c'est (DOS) · c'est le plan (DOS)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites sécantes déterminent un plan : il contient leur point commun et un autre point de chacune.
2. Les droites (SB) et (SD) se coupent en S.

CORRECTION

Le point commun — Les droites (SB) et (SD) sont sécantes en S.

$(SB) \cap (SD) = \{S\}$

Le plan — Il contient S, B et D, qui ne sont pas alignés.

(SBD)

C'est le plan (SBD) : il contient aussi le centre O, qui est sur (BD).

EXERCICE 57 · PRATIQUE **Quatre points dans une face**

$ABCD$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Dire si les points I, J, B et C sont coplanaires.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui, elles le sont · oui ils le sont · oui, ils le sont · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · coplanaires · oui coplanaires · oui, coplanaires · sont coplanaires · elles sont coplanaires · oui elles sont coplanaires · oui, elles sont coplanaires · ils sont coplanaires · oui ils sont coplanaires · oui, ils sont coplanaires · les points sont coplanaires · oui les points sont coplanaires · oui, les points sont coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un plan qui contient B et C, et regarde où sont I et J.
2. I est sur (AB) et J sur (AC) : ces deux droites sont dans le plan de la face ABC.

CORRECTION

Le plan (ABC) — Les droites (AB) et (AC) sont dans le plan (ABC) ; I est sur la première, J sur la seconde.

$I \in (ABC)$ et $J \in (ABC)$

Les quatre points —

$I, J, B, C \in (ABC)$

Oui : les quatre points sont dans le plan (ABC). Pour quatre points, on cherche un plan qui les contient tous.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / c'est non / faux / le / lé / la / non coplanaires / pas coplanaires / elles ne sont pas coplanaires / non, elles ne le sont pas / elles ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / ils ne le sont pas / non pas coplanaires / non, pas coplanaires / ne sont pas coplanaires / non elles ne sont pas coplanaires / non, elles ne sont pas coplanaires / ils ne sont pas coplanaires / non ils ne sont pas coplanaires / non, ils ne sont pas coplanaires / les points ne sont pas coplanaires / non les points ne sont pas coplanaires / non, les points ne sont pas coplanaires` → Les quatre points sont tous dans la face ABC : ils sont coplanaires.

EXERCICE 58 · PRATIQUE **Combien de plans ?**

Quatre points de l'espace ne sont pas coplanaires. Déterminer le nombre de plans qui passent par trois de ces quatre points.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois de ces points ne peuvent pas être alignés : sinon les quatre seraient dans un même plan.
2. Choisir trois points parmi quatre, c'est choisir celui qu'on laisse de côté.

CORRECTION

Jamais alignés — Si trois des points étaient alignés, la droite qui les porte et le quatrième point seraient dans un même plan : les quatre points seraient coplanaires.

trois points non alignés

Les choix — Chaque groupe de trois points correspond au point laissé de côté, et les quatre plans obtenus sont distincts.

4

Il y a 4 plans : ce sont les plans des quatre faces du tétraèdre formé par ces points.

PIÈGES ANTICIPÉS

`24` → L'ordre des points ne compte pas : (ABC) et (BCA) sont le même plan.

`6` → 6 est le nombre de façons de choisir deux points : un plan en demande trois.

EXERCICE 59 · PRATIQUE **Un rectangle caché dans le cube**

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Dire si les points B, D, H et F sont coplanaires.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui, elles le sont · oui ils le sont · oui, ils le sont · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · coplanaires · oui coplanaires · oui, coplanaires · sont coplanaires · elles sont coplanaires · oui elles sont coplanaires · oui, elles sont coplanaires · ils sont coplanaires · oui ils sont coplanaires · oui, ils sont coplanaires · les points sont coplanaires · oui les points sont coplanaires · oui, les points sont coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde les droites (BF) et (DH) : ce sont deux arêtes du cube.
2. $BDHF$ est un quadrilatère dont les côtés $[BF]$ et $[DH]$ sont parallèles et de même longueur.

CORRECTION

Deux arêtes — Les arêtes latérales $[BF]$ et $[DH]$ du cube sont parallèles et de même longueur : deux droites parallèles sont coplanaires.

$(BF) \parallel (DH)$

Un même plan — Le plan qui contient ces deux droites contient B, F, D et H : $BDHF$ est un rectangle.

$B, D, H, F \in (BDH)$

Oui : $BDHF$ est un rectangle qui coupe le cube en diagonale. Des points coplanaires ne sont pas forcément sur une même face.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / c'est non / faux / le / lé / la / non coplanaires / pas coplanaires / elles ne sont pas coplanaires / non, elles ne le sont pas / elles ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / ils ne le sont pas / non pas coplanaires / non, pas coplanaires / ne sont pas coplanaires / non elles ne sont pas coplanaires / non, elles ne sont pas coplanaires / ils ne sont pas coplanaires / non ils ne sont pas coplanaires / non, ils ne sont pas coplanaires / les points ne sont pas coplanaires / non les points ne sont pas coplanaires / non, les points ne sont pas coplanaires` → $BDHF$ n'est pas une face, mais c'est un rectangle : ses quatre sommets sont dans un même plan.

EXERCICE 60 · PRATIQUE

Le quatrième sommet

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Le plan déterminé par la droite (AD) et le point F contient un autre sommet du cube. Déterminer lequel.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `G` — aussi acceptées : le point G · point G · c'est G · c'est le point G · en G · au point G · = G · le sommet G · sommet G · c'est le sommet G

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle arête du cube passe par F et est parallèle à (AD) ?
2. L'arête $[FG]$ est parallèle à $[AD]$: les droites (AD) et (FG) sont coplanaires.

CORRECTION

Une parallèle — Les arêtes $[AD]$ et $[FG]$ du cube sont parallèles et de même longueur : elles sont dans un même plan, qui contient F.

$(AD) \parallel (FG)$

Le sommet — Ce plan est le plan déterminé par (AD) et F : il contient aussi G, et $ADGF$ est un rectangle.

$G \in (ADF)$

C'est le sommet G : le plan (ADF) coupe le cube suivant le rectangle $ADGF$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`E / le point E / point E / c'est E / c'est le point E / en E / au point E / = E / B / le point B / point B / c'est B / c'est le point B / en B / au point B / = B / le sommet E / sommet E / c'est le sommet E / le sommet B / sommet B / c'est le sommet B` → Ce sommet n'est pas dans le plan (ADF) : cherche l'arête qui part de F parallèlement à $[AD]$.

EXERCICE 61 · DEFI

Quatre sommets non coplanaires

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Dire si les points A, C, F et H sont coplanaires.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · le · lé · la · non coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas coplanaires · non, pas coplanaires · ne sont pas coplanaires · non elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne sont pas coplanaires · ils ne sont pas coplanaires · non ils ne sont pas coplanaires · non, ils ne sont pas coplanaires · les points ne sont pas coplanaires · non les points ne sont pas coplanaires · non, les points ne sont pas coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les six segments qui joignent deux de ces points sont des diagonales de faces : ils ont tous la même longueur, $a\sqrt{2}$ si a est l'arête.
2. Suppose les quatre points dans un même plan. Dans ce plan, où sont les points à la distance $a\sqrt{2}$ à la fois de A et de C ? Quelle distance les sépare ?

CORRECTION

Six longueurs égales — $[AC]$, $[AF]$, $[AH]$, $[CF]$, $[CH]$ et $[FH]$ sont des diagonales de faces.

$AC = AF = AH = CF = CH = FH = a\sqrt{2}$

Supposer un plan — Si les quatre points étaient dans un même plan, la géométrie plane s'y appliquerait (axiome 4). F et H seraient deux points distincts de ce plan à la distance $a\sqrt{2}$ de A et de C : les sommets des deux triangles équilatéraux de base $[AC]$, symétriques par rapport à (AC). Ils seraient séparés par deux hauteurs de ces triangles.

$$FH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a\sqrt{2} = a\sqrt{6}$$

Contradiction — Or $FH = a\sqrt{2}$, et $a\sqrt{2} \neq a\sqrt{6}$.

$H \notin (ACF)$

Non : A, C, F et H ne sont pas coplanaires. Ce sont les sommets d'un tétraèdre régulier logé dans le cube.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / coplanaires / oui coplanaires / oui, coplanaires / sont coplanaires / elles sont coplanaires / oui elles sont coplanaires / oui, elles sont coplanaires / ils sont coplanaires / oui ils sont coplanaires / oui, ils sont coplanaires / les points sont coplanaires / oui les points sont coplanaires / oui, les points sont coplanaires` → Les quatre points sont reliés par des diagonales de faces, mais aucun plan ne les contient tous : ils forment un tétraèdre.

EXERCICE 62 · PRATIQUE

Un même plan sous deux noms

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré de centre O. Nommer le plan (SOA) à l'aide de trois sommets de la pyramide.

Écris le nom du plan, par exemple (ABC).

Réponse attendue : `(SAC)` — aussi acceptées : SAC · le plan (SAC) · le plan SAC · plan (SAC) · plan SAC · c'est (SAC) · c'est le plan (SAC) · (SCA) · SCA · le plan (SCA) · le plan SCA · plan (SCA) · plan SCA · c'est (SCA) · c'est le plan (SCA) · (ASC) · ASC · le plan (ASC) · le plan ASC · plan (ASC) · plan ASC · c'est (ASC) · c'est le plan (ASC) · (ACS) · ACS · le plan (ACS) · le plan ACS · plan (ACS) · plan ACS · c'est (ACS) · c'est le plan (ACS) · (CSA) · CSA · le plan (CSA) · le plan CSA · plan (CSA) · plan CSA · c'est (CSA) · c'est le plan (CSA) · (CAS) · CAS · le plan (CAS) · le plan CAS · plan (CAS) · plan CAS · c'est (CAS) · c'est le plan (CAS)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O est le centre du carré : sur quelle diagonale de la base se trouve-t-il, avec A ?
2. La droite (OA) est la droite (AC) : le plan contient donc C.

CORRECTION

La droite (OA) — Le centre O est le milieu de la diagonale $[AC]$: la droite (OA) est la droite (AC).

$(OA) = (AC)$

Le plan — Le plan (SOA) contient S et la droite (AC) : c'est le plan (SAC).

$(SOA) = (SAC)$

Le plan (SOA) est le plan (SAC) : un plan se nomme avec trois de ses points non alignés, quels qu'ils soient.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(SOA) / SOA / le plan (SOA) / le plan SOA / plan (SOA) / plan SOA / c'est (SOA) / c'est le plan (SOA) / (SAO) / SAO / le plan (SAO) / le plan SAO / plan (SAO) / plan SAO / c'est (SAO) / c'est le plan (SAO) / (OSA) / OSA / le plan (OSA) / le plan OSA / plan (OSA) / plan OSA / c'est (OSA) / c'est le plan (OSA) / (OAS) / OAS / le plan (OAS) / le plan OAS / plan (OAS) / plan OAS / c'est (OAS) / c'est le plan (OAS) / (ASO) / ASO / le plan (ASO) / le plan ASO / plan (ASO) / plan ASO / c'est (ASO) / c'est le plan (ASO) / (AOS) / AOS / le plan (AOS) / le plan AOS / plan (AOS) / plan AOS / c'est (AOS) / c'est le plan (AOS)` → O n'est pas un sommet de la pyramide : remplace-le par un sommet de la même droite.

`(SBD) / SBD / le plan (SBD) / le plan SBD / plan (SBD) / plan SBD / c'est (SBD) / c'est le plan (SBD) / (SDB) / SDB / le plan (SDB) / le plan SDB / plan (SDB) / plan SDB / c'est (SDB) / c'est le plan (SDB) / (BSD) / BSD / le plan (BSD) / le plan BSD / plan (BSD) / plan BSD / c'est (BSD) / c'est le plan (BSD) / (BDS) / BDS / le plan (BDS) / le plan BDS / plan (BDS) / plan BDS / c'est (BDS) / c'est le plan (BDS) / (DSB) / DSB / le plan (DSB) / le plan DSB / plan (DSB) / plan DSB / c'est (DSB) / c'est le plan (DSB) / (DBS) / DBS / le plan (DBS) / le plan DBS / plan (DBS) / plan DBS / c'est (DBS) / c'est le plan (DBS)` → O est aussi sur (BD), mais A ne l'est pas : le plan (SBD) ne contient pas A.

EXERCICE 63 · PRATIQUE

Deux arêtes opposées et quatre points

$ABCD$ est un tétraèdre, I est un point de l'arête $[AC]$ distinct de A et de C, et J un point de l'arête $[BD]$ distinct de B et de D. Dire si les points I, J, C et D sont coplanaires.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · le · lé · la · non coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas coplanaires · non, pas coplanaires · ne sont pas coplanaires · non elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne sont pas coplanaires · ils ne sont pas coplanaires · non ils ne sont pas coplanaires · non, ils ne sont pas coplanaires · les points ne sont pas coplanaires · non les points ne sont pas coplanaires · non, les points ne sont pas coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points I, C et D ne sont pas alignés : quel plan déterminent-ils ?
2. Le plan (ICD) est le plan (ACD). La droite (BD) n'a qu'un point commun avec lui : lequel ?

CORRECTION

Le plan (ICD) — I est sur (AC) : le plan (ICD) est le plan (ACD).

$$(ICD) = (ACD)$$

La droite (BD) — B n'est pas dans le plan (ACD) : la droite (BD) le coupe seulement en D. Comme $J \neq D$, le point J n'est pas dans ce plan.

$$J \notin (ACD)$$

Non : I, J, C et D ne sont pas coplanaires. On nomme le plan de trois des points, puis on teste le quatrième.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / coplanaires / oui coplanaires / oui, coplanaires / sont coplanaires / elles sont coplanaires / oui elles sont coplanaires / oui, elles sont coplanaires / ils sont coplanaires / oui ils sont coplanaires / oui, ils sont coplanaires / les points sont coplanaires / oui les points sont coplanaires / oui, les points sont coplanaires` → J est sur (BD), qui ne rencontre le plan (ACD) qu'en D : J n'est pas dans le plan des trois autres points.

EXERCICE 64 · RAISONNEMENT

Cinq points, combien de plans ?

Cinq points de l'espace sont tels que quatre d'entre eux ne sont jamais coplanaires. Déterminer le nombre de plans qui passent par trois de ces cinq points.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois des points ne sont jamais alignés, et deux groupes différents de trois points donnent deux plans différents : sinon quatre points seraient coplanaires.
2. Choisir trois points parmi cinq, c'est choisir les deux points qu'on laisse de côté.

CORRECTION

Des plans distincts — Si deux groupes de trois points donnaient le même plan, ce plan contiendrait au moins quatre des points.

$$\text{un plan par groupe de trois points}$$

Compter les paires — Laisser de côté deux points parmi cinq : $\dfrac{5 \times 4}{2}$ façons.

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Il y a 10 plans : on compte les groupes de trois points, sans tenir compte de l'ordre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → $5 \times 4 \times 3$ compte chaque groupe plusieurs fois, dans tous les ordres : (ABC) et (CAB) sont le même plan.

`20` → 20 compte encore l'ordre des deux points laissés de côté : divise par 2.

EXERCICE 65 · DEFI

Les plans des sommets d'un cube

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Déterminer le nombre de plans qui passent par au moins trois sommets de ce cube.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Classe les plans selon le nombre de sommets qu'ils contiennent. Un tel plan contient 3 ou 4 sommets.
2. Plans à 4 sommets : les faces, et les rectangles comme $BDHF$ qui coupent le cube en diagonale. Plans à 3 sommets : ceux qui coupent un coin, comme (BDE).

CORRECTION

Les faces —

$$6$$

Les rectangles diagonaux — Chacune des 12 arêtes a une arête opposée, symétrique par rapport au centre ; chaque paire donne un rectangle comme $ABGH$.

$$\frac{12}{2} = 6$$

Les coins — Chaque sommet a trois voisins ; les trois voisins forment un triangle équilatéral, comme BDE pour le sommet A, et ce plan ne contient aucun autre sommet.

$$8$$

Le total — Tout groupe de trois sommets est dans un et un seul de ces plans.

$$6 + 6 + 8 = 20$$

Il y a 20 plans : 6 faces, 6 rectangles diagonaux et 8 triangles de coin. On classe avant de compter.

PIÈGES ANTICIPÉS

56 → 56 groupes de trois sommets, mais un plan à quatre sommets est compté quatre fois.

6 → Les faces ne sont pas les seuls plans : pense à $(BDHF)$ ou à (BDE).

12 → Il manque les plans qui ne contiennent que trois sommets, comme (BDE).

14 → Il manque les rectangles diagonaux comme $BDHF$.

EXERCICE 66 · BASE

Les arêtes qui coupent une arête

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Déterminer le nombre d'arêtes du cube, autres que $[AB]$, portées par une droite sécante avec la droite (AB).

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une arête du cube rencontre la droite (AB) en un sommet : en A ou en B.
2. Compte les arêtes qui partent de A, puis celles qui partent de B, sans compter $[AB]$.

CORRECTION

Par A —

(AD) et (AE)

Par B —

(BC) et (BF)

Le total —

$2 + 2 = 4$

4 arêtes : celles qui partent de A ou de B. Les autres sont parallèles à (AB) ou non coplanaires avec elle.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Chaque sommet a trois arêtes, mais $[AB]$ est comptée deux fois, et on l'exclut : il reste 4.

2 → N'oublie pas les arêtes qui partent de l'autre extrémité.

EXERCICE 67 · RAISONNEMENT

Les arêtes non coplanaires

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Déterminer le nombre d'arêtes du cube portées par une droite non coplanaire avec la droite (AB).

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écarte d'abord les arêtes qui ont un sommet commun avec $[AB]$: elles sont sécantes avec (AB).
2. Parmi les 7 arêtes restantes, certaines sont parallèles à (AB) : (CD), (EF) et (GH). Deux droites parallèles sont coplanaires.

CORRECTION

Les sécantes — Les arêtes $[AD]$, $[AE]$, $[BC]$ et $[BF]$ coupent (AB).

4

Les parallèles — Les arêtes $[CD]$, $[EF]$ et $[GH]$ sont parallèles à $[AB]$.

3

Ce qui reste — Sur les 11 autres arêtes :

$11 - 4 - 3 = 4$

4 arêtes, $[CG]$, $[DH]$, $[EH]$ et $[FG]$, ne sont pas coplanaires avec (AB) : elles n'ont aucun point commun avec elle sans lui être parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → Parmi les 7 arêtes sans point commun avec $[AB]$, trois sont parallèles à (AB) : elles sont coplanaires avec elle.

3 → 3 est le nombre d'arêtes parallèles à (AB) : celles-là sont coplanaires avec elle.

EXERCICE 68 · PRATIQUE

Dans un prisme triangulaire

$ABCDEF$ est un prisme droit de bases les triangles ABC et DEF, d'arêtes latérales $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$. Déterminer le nombre d'arêtes du prisme portées par une droite non coplanaire avec la droite (AB).

Écris un nombre.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écarte les arêtes qui ont un sommet commun avec $[AB]$, puis l'arête parallèle à $[AB]$.
2. L'arête $[DE]$ est parallèle à $[AB]$: $ABED$ est une face rectangulaire.

CORRECTION

Les sécantes — $[BC]$, $[CA]$, $[AD]$ et $[BE]$ ont un sommet commun avec $[AB]$.

4

La parallèle — $[DE]$ est parallèle à $[AB]$ dans la face $ABED$.

1

Ce qui reste — Sur les 8 autres arêtes :

$8 - 4 - 1 = 3$

3 arêtes, $[CF]$, $[DF]$ et $[EF]$, ne sont pas coplanaires avec (AB).

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $[DE]$ n'a pas de point commun avec $[AB]$, mais elle lui est parallèle : elles sont coplanaires.

EXERCICE 69 · RAISONNEMENT

Les paires d'un tétraèdre

Déterminer le nombre de paires d'arêtes d'un tétraèdre portées par des droites non coplanaires.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Nomme le tétraèdre $ABCD$. Deux arêtes qui ont un sommet commun sont sécantes.
2. Pour l'arête $[AB]$, quelle arête n'a aucun sommet commun avec elle ?

CORRECTION

Arêtes opposées — Deux arêtes sans sommet commun sont opposées : $[AB]$ et $[CD]$. Elles ne sont pas coplanaires, sinon A, B, C, D le seraient.

$[AB]$ et $[CD]$

Toutes les paires — Chaque arête a exactement une arête opposée : 6 arêtes donnent 3 paires.

$\frac{6}{2} = 3$

3 paires : les arêtes opposées $[AB]$ et $[CD]$, $[AC]$ et $[BD]$, $[AD]$ et $[BC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Tu as compté chaque paire deux fois, une fois pour chacune de ses arêtes.

EXERCICE 70 · DEFI

Les paires d'un cube

Déterminer le nombre de paires d'arêtes d'un cube portées par des droites non coplanaires.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour une arête donnée, compte les arêtes non coplanaires avec elle : écarte les sécantes et les parallèles.
2. Chaque arête est non coplanaire avec 4 autres arêtes. Attention : chaque paire contient deux arêtes.

CORRECTION

Pour une arête — Une arête coupe 4 arêtes et est parallèle à 3 : il en reste $11 - 4 - 3$.

$11 - 4 - 3 = 4$

Toutes les arêtes — En comptant pour chacune des 12 arêtes, chaque paire est comptée deux fois.

$\frac{12 \times 4}{2} = 24$

24 paires : on compte pour une arête, on multiplie par le nombre d'arêtes, puis on divise par 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

48 → Chaque paire a été comptée deux fois, une fois depuis chacune de ses arêtes : divise par 2.

42 / 84 → Les arêtes parallèles n'ont pas de point commun, mais elles sont coplanaires : il faut les écarter.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

Deux diagonales d'une face

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Dire si les droites (BG) et (CF) sont sécantes.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui, elles le sont · oui ils le sont · oui, ils le sont · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · sécantes · oui sécantes · oui, sécantes · sont sécantes · elles sont sécantes · oui elles sont sécantes · oui, elles sont sécantes · ils sont sécantes · oui ils sont sécantes · oui, ils sont sécantes · les droites sont sécantes · oui les droites sont sécantes · oui, les droites sont sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les quatre points B, G, C et F appartiennent à une même face. Laquelle ?
2. Dans la face $BCGF$, les segments $[BG]$ et $[CF]$ sont les diagonales d'un carré.

CORRECTION

Une même face — Les deux droites sont dans le plan de la face $BCGF$: elles sont coplanaires.

$$(BG), (CF) \subset (BCG)$$

Les diagonales — Dans le carré $BCGF$, les diagonales se coupent en son centre.

$$(BG) \cap (CF) = \{\text{centre de } BCGF\}$$

Oui : les droites sont coplanaires et non parallèles. Elles se coupent au centre de la face $BCGF$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / c'est non / faux / le / lé / la / non sécantes / pas sécantes / elles ne sont pas sécantes / non, elles ne le sont pas / elles ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / ils ne le sont pas / non pas sécantes / non, pas sécantes / ne sont pas sécantes / non elles ne sont pas sécantes / non, elles ne sont pas sécantes / ils ne sont pas sécantes / non ils ne sont pas sécantes / non, ils ne sont pas sécantes / les droites ne sont pas sécantes / non les droites ne sont pas sécantes / non, les droites ne sont pas sécantes` → $[BG]$ et $[CF]$ sont les deux diagonales du carré $BCGF$: elles se coupent en son centre.

EXERCICE 72 · PRATIQUE

Coplanaires, mais pas sécantes

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Dire si les droites (BG) et (AH) sont sécantes.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · le · lé · la · non sécantes · pas sécantes · elles ne sont pas sécantes · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas sécantes · non, pas sécantes · ne sont pas sécantes · non elles ne sont pas sécantes · non, elles ne sont pas sécantes · ils ne sont pas sécantes · non ils ne sont pas sécantes · non, ils ne sont pas sécantes · les droites ne sont pas sécantes · non les droites ne sont pas sécantes · non, les droites ne sont pas sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points A, B, G et H sont-ils coplanaires ? Regarde le quadrilatère $ABGH$.
2. $[BG]$ est une diagonale de la face $BCGF$, $[AH]$ une diagonale de la face opposée $ADHE$: le quadrilatère $ABGH$ est un rectangle.

CORRECTION

Un rectangle — $AB = HG$ et les côtés $[AB]$ et $[HG]$ sont parallèles : $ABGH$ est un parallélogramme, et même un rectangle.

$$ABGH \text{ est un rectangle}$$

Côtés opposés — $[BG]$ et $[AH]$ sont deux côtés opposés de ce rectangle : les droites sont coplanaires et parallèles.

$$(BG) \parallel (AH)$$

Non : les droites (BG) et (AH) sont coplanaires, mais parallèles. Coplanaires ne veut pas dire sécantes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / sécantes / oui sécantes / oui, sécantes / sont sécantes / elles sont sécantes / oui elles sont sécantes / oui, elles sont sécantes / ils sont sécantes / oui ils sont sécantes / oui, ils sont sécantes / les droites sont sécantes / oui les droites sont sécantes / oui, les droites sont sécantes` → (BG) et (AH) sont deux côtés opposés du rectangle $ABGH$: elles sont parallèles, donc sans point commun.

EXERCICE 73 · RAISONNEMENT

Deux grandes diagonales

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Dire si les droites (AG) et (CE) sont sécantes.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui, elles le sont · oui ils le sont · oui, ils le sont · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · sécantes · oui sécantes · oui, sécantes · sont sécantes · elles sont sécantes · oui elles sont sécantes · oui, elles sont sécantes · ils sont sécantes · oui ils sont

sécantes · oui, ils sont sécantes · les droites sont sécantes · oui les droites sont sécantes · oui, les droites sont sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un plan qui contient les deux droites : regarde le quadrilatère $ACGE$.
2. $[AE]$ et $[CG]$ sont deux arêtes parallèles et de même longueur : $ACGE$ est un rectangle.

CORRECTION

Le rectangle ACGE — Les arêtes $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur : $ACGE$ est un parallélogramme, et même un rectangle.

$(AG), (CE) \subset (ACG)$

Ses diagonales — $[AG]$ et $[CE]$ sont les diagonales de ce rectangle : elles se coupent en leur milieu.

$(AG) \cap (CE) = \{\text{centre du cube}\}$

Oui : deux grandes diagonales du cube sont les diagonales d'un rectangle, et se coupent au centre du cube.

PIÈGES ANTICIPÉS

non / non elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / c'est non / faux / le / lé / la / non sécantes / pas sécantes / elles ne sont pas sécantes / non, elles ne le sont pas / elles ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / ils ne le sont pas / non pas sécantes / non, pas sécantes / ne sont pas sécantes / non elles ne sont pas sécantes / non, elles ne sont pas sécantes / ils ne sont pas sécantes / non ils ne sont pas sécantes / non, ils ne sont pas sécantes / les droites ne sont pas sécantes / non les droites ne sont pas sécantes / non, les droites ne sont pas sécantes → (AG) et (CE) ne sont pas dans une face, mais dans le rectangle $ACGE$, dont elles sont les diagonales.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

Une grande diagonale et une petite

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Dire si les droites (AG) et (BD) sont coplanaires.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · le · lé · la · non coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne le sont pas · elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · ils ne le sont pas · non pas coplanaires · non, pas coplanaires · ne sont pas coplanaires · non elles ne sont pas coplanaires · non, elles ne sont pas coplanaires · ils ne sont pas coplanaires · non ils ne sont pas coplanaires · non, ils ne sont pas coplanaires · les droites ne sont pas coplanaires · non les droites ne sont pas coplanaires · non, les droites ne sont pas coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Suppose qu'un plan contienne les deux droites : quels sommets contiendrait-il ?
2. Il contiendrait A, B et D, donc ce serait le plan de la face $ABCD$. Que dire alors de G ?

CORRECTION

Supposer — Un plan qui contiendrait (AG) et (BD) contiendrait A, B et D : ce serait le plan (ABD), celui de la face $ABCD$.

(ABD)

Contradiction — Il contiendrait aussi G. Or G est un sommet de la face opposée $EFGH$: il n'est pas dans le plan (ABD).

$G \notin (ABD)$

Non : les droites (AG) et (BD) ne sont pas coplanaires. On suppose un plan commun et on aboutit à une contradiction.

PIÈGES ANTICIPÉS

oui / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / coplanaires / oui coplanaires / oui, coplanaires / sont coplanaires / elles sont coplanaires / oui elles sont coplanaires / oui, elles sont coplanaires / ils sont coplanaires / oui ils sont coplanaires / oui, ils sont coplanaires / les droites sont coplanaires / oui les droites sont coplanaires / oui, les droites sont coplanaires → Le centre de la face $ABCD$ est sur (BD), mais pas sur (AG) : aucun plan ne contient A, B, D et G.

EXERCICE 75 · BASE

Les diagonales de la base

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré de centre O. Déterminer le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

Écris le nom du point.

Réponse attendue : O — aussi acceptées : le point O · point O · c'est O · c'est le point O · en O · au point O · = O · le centre O · centre O · c'est le centre O · le centre du carré

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les droites (AC) et (BD) sont dans le plan de la base : ce sont les diagonales du carré.
2. Les diagonales d'un carré se coupent en son centre.

CORRECTION

Coplanaires — Les deux droites sont dans le plan de la base $ABCD$.

$(AC), (BD) \subset (ABC)$

Le centre — Les diagonales du carré $ABCD$ se coupent en son centre O.

$(AC) \cap (BD) = \{O\}$

Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en O : dans un plan de l'espace, la géométrie plane s'applique (axiome 4).

PIÈGES ANTICIPÉS

`S / le point S / point S / c'est S / c'est le point S / en S / au point S / = S` → S n'est sur aucune des deux diagonales de la base.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Ni sécantes ni parallèles

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Donner la position relative des droites (EH) et (CG) : sécantes, parallèles ou non coplanaires.

Écris : sécantes, parallèles ou non coplanaires.

Réponse attendue : `non coplanaires` — aussi acceptées : non coplanaire · elles sont non coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · non-coplanaires · ni sécantes ni parallèles · elles ne sont ni sécantes ni parallèles · non-coplanaire · ni parallèles ni sécantes · elles ne sont ni parallèles ni sécantes · ni sécantes, ni parallèles · ni parallèles, ni sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux arêtes ont-elles un sommet commun ? Sont-elles parallèles ?
2. Suppose qu'un plan contienne les deux droites : il contiendrait E, H et G. Quel plan est-ce ?

CORRECTION

Supposer — Un plan qui contiendrait (EH) et (CG) contiendrait E, H et G : ce serait le plan de la face $EFGH$.

(EHG)

Contradiction — Il contiendrait aussi C, qui est un sommet de la face opposée $ABCD$.

$C \notin (EHG)$

Les droites (EH) et (CG) sont non coplanaires : elles n'ont aucun point commun, sans être parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallèles / elles sont parallèles / parallèle` → Deux droites parallèles sont dans un même plan : aucun plan ne contient à la fois (EH) et (CG).

`sécantes / elles sont sécantes / sécante / coplanaires / elles sont coplanaires` → (EH) et (CG) n'ont aucun point commun : $[EH]$ est sur la face du haut, et $[CG]$ ne la touche qu'en G, qui n'est pas sur (EH).

EXERCICE 77 · BASE

Une arête qui perce une face

$ABCD$ est un tétraèdre. Déterminer le point où la droite (AC) perce le plan (BCD).

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `C` — aussi acceptées : le point C · point C · c'est C · c'est le point C · en C · au point C · = C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lequel des deux points A et C est dans le plan (BCD) ?
2. A n'est pas dans le plan (BCD) : la droite (AC) n'y est pas contenue, et elle a au plus un point commun avec lui.

CORRECTION

Un point commun —

$C \in (AC)$ et $C \in (BCD)$

Un seul — $A \notin (BCD)$: la droite (AC) n'est pas contenue dans le plan, elle n'a qu'un point commun avec lui.

$(AC) \cap (BCD) = \{C\}$

La droite (AC) perce le plan (BCD) en C : une droite non contenue dans un plan a au plus un point commun avec lui.

PIÈGES ANTICIPÉS

`A / le point A / point A / c'est A / c'est le point A / en A / au point A / = A` → A est le sommet opposé à la face BCD : il n'est pas dans ce plan.

EXERCICE 78 · BASE

Combien de points communs ?

Une droite D n'est pas contenue dans un plan P, et A est un point commun à D et à P. Déterminer le nombre de points communs à D et à P.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que se passerait-il si D et P avaient deux points communs distincts ?

2. Relis l'axiome 2.

CORRECTION

Par l'absurde — Si D et P avaient un second point commun $B \neq A$, le plan P contiendrait A et B, donc toute la droite $(AB) = D$ (axiome 2).

$D \subset P$

Contradiction — Or D n'est pas contenue dans P.

$D \cap P = \{A\}$

D et P ont un seul point commun : la droite perce le plan en A.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Avec deux points communs, la droite serait tout entière dans le plan (axiome 2).

EXERCICE 79 · PRATIQUE **Un plan nommé autrement**

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Déterminer le point où la droite (AG) perce le plan (BCD).

Écris le nom du point.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · c'est A · c'est le point A · en A · au point A · = A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (BCD) est le plan d'une face du cube : laquelle ?
2. Le plan (BCD) est celui de la face $ABCD$. Lequel des points A et G y est ?

CORRECTION

Le plan (BCD) — Le plan (BCD) est le plan de la face $ABCD$: il contient A.

$A \in (BCD)$

Un seul point — G est sur la face opposée : $G \notin (BCD)$, donc (AG) n'est pas contenue dans le plan.

$(AG) \cap (BCD) = \{A\}$

La droite (AG) perce le plan (BCD) en A : un plan nommé par trois points contient aussi les autres points de la même face.

PIÈGES ANTICIPÉS

C / le point C / point C / c'est C / c'est le point C / en C / au point C / = C / G / le point G / point G / c'est G / c'est le point G / en G / au point G / = G → Le plan (BCD) est le plan de la face $ABCD$: c'est le sommet A qui est à la fois sur (AG) et dans ce plan.

EXERCICE 80 · PRATIQUE **La droite (SO)**

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré de centre O. Déterminer le point où la droite (SO) perce le plan (ABC).

Écris le nom du point.

Réponse attendue : O — aussi acceptées : le point O · point O · c'est O · c'est le point O · en O · au point O · = O · le centre O · centre O · c'est le centre O · le centre du carré

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ABC) est le plan de la base. Lequel des points S et O y appartient ?
2. O est le milieu de $[AC]$: il est sur une droite du plan (ABC).

CORRECTION

Le point O — O est sur (AC), qui est contenue dans le plan (ABC).

$O \in (ABC)$

Le sommet S — $S \notin (ABC)$: la droite (SO) n'est pas contenue dans le plan.

$(SO) \cap (ABC) = \{O\}$

La droite (SO) perce le plan de la base en son centre O.

PIÈGES ANTICIPÉS

S / le point S / point S / c'est S / c'est le point S / en S / au point S / = S → S est le sommet de la pyramide : il n'est pas dans le plan de la base.

EXERCICE 81 · PRATIQUE **Une diagonale qui perce une face**

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Déterminer le point où la droite (EC) perce le plan (ABF).

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `E` — aussi acceptées : le point E · point E · c'est E · c'est le point E · en E · au point E · = E

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ABF) est le plan d'une face du cube : laquelle ?
2. C'est la face $ABFE$. Lequel des points E et C y appartient ?

CORRECTION

Le plan (ABF) — C'est le plan de la face $ABFE$: il contient E.

$$E \in (ABF)$$

Le point C — C n'est pas sur cette face : (EC) n'est pas contenue dans le plan.

$$(EC) \cap (ABF) = \{E\}$$

La grande diagonale (EC) perce le plan (ABF) en E.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / point C / c'est C / c'est le point C / en C / au point C / = C / B / le point B / point B / c'est B / c'est le point B / en B / au point B / = B` → Le plan (ABF) est celui de la face $ABFE$: c'est E qui est sur (EC) et dans ce plan.

EXERCICE 82 · RAISONNEMENT **Le point construit**

$ABCD$ est un tétraèdre, I un point de $[AB]$ et J un point de $[AC]$, distincts des sommets, tels que les droites (IJ) et (BC) se coupent en un point K. Déterminer le point où la droite (IJ) perce le plan (BCD).

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `K` — aussi acceptées : le point K · point K · c'est K · c'est le point K · en K · au point K · = K

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un point de la droite (IJ) qui soit dans le plan (BCD).
2. K est sur la droite (BC). La droite (IJ) est-elle contenue dans le plan (BCD) ?

CORRECTION

Un point commun — K est sur (IJ) et sur (BC), qui est contenue dans le plan (BCD).

$$K \in (IJ) \text{ et } K \in (BCD)$$

Pas contenue — I est sur $[AB]$ et distinct de B : $I \notin (BCD)$, donc (IJ) n'est pas contenue dans (BCD).

$$(IJ) \cap (BCD) = \{K\}$$

La droite (IJ) perce le plan (BCD) en K : on cherche une droite du plan coplanaire avec la droite donnée, ici (BC), dans le plan (ABC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`B / le point B / point B / c'est B / c'est le point B / en B / au point B / = B / C / le point C / point C / c'est C / c'est le point C / en C / au point C / = C` → B et C sont dans le plan (BCD), mais ils ne sont pas sur la droite (IJ).

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT **Au centre du cube**

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. La droite (HB) perce le plan (ACG) en un point K. Calculer le rapport $\dfrac{HK}{HB}$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ACG) est le plan du rectangle $ACGE$. Cherche un plan auxiliaire qui contient (HB) : le rectangle $BDHF$.
2. Les plans (ACG) et (BDH) se coupent suivant la droite qui joint les centres des faces $ABCD$ et $EFGH$. Dans le rectangle $BDHF$, cette droite joint les milieux de $[BD]$ et de $[FH]$.

CORRECTION

Le plan auxiliaire — La droite (HB) est dans le plan (BDH). Les centres P de $ABCD$ et Q de $EFGH$ sont dans les deux plans.

$$(BDH) \cap (ACG) = (PQ)$$

Dans le rectangle BDHF — P et Q sont les milieux des côtés $[BD]$ et $[FH]$: la droite (PQ) coupe la diagonale $[HB]$ en son milieu.

$$K = \text{milieu de } [HB]$$

Le rapport —

$$\frac{HK}{HB} = \frac{1}{2}$$

$\dfrac{HK}{HB} = \dfrac{1}{2}$: K est le centre du cube. On passe par un plan auxiliaire qui contient la droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` / `2/3` → Dans le rectangle $BDHF$, la droite (PQ) joint les milieux de deux côtés opposés : elle coupe la diagonale en son milieu.

EXERCICE 84 · DEFI **Au tiers de la grande diagonale**

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. O est le centre de la face $ABCD$. La droite (EC) perce le plan (BDG) en un point K. Calculer le rapport $\dfrac{EK}{EC}$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends comme plan auxiliaire le plan (ACE) du rectangle $ACGE$, qui contient (EC). Il coupe le plan (BDG) suivant la droite (GO).
2. Dans le rectangle $ACGE$, les droites (OC) et (EG) sont parallèles et $OC = \dfrac{1}{2}EG$. Applique le théorème de Thalès aux triangles KOC et KGE.

CORRECTION

Le plan auxiliaire — G et O sont dans les plans (ACE) et (BDG) : O est sur (AC) et sur (BD).

$(ACE) \cap (BDG) = (GO)$

Le point K — Dans le plan (ACE), K est l'intersection de (EC) et de (GO).

$K = (EC) \cap (GO)$

Thalès — Les droites (OC) et (EG) sont parallèles, avec $OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}EG$:

$\dfrac{KC}{KE} = \dfrac{OC}{EG} = \dfrac{1}{2}$

Le rapport — $KE = 2KC$, donc $EC = KE + KC = 3KC$.

$\dfrac{EK}{EC} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{EK}{EC} = \dfrac{2}{3}$: le plan (BDG) coupe la grande diagonale au tiers, à partir de C. Plan auxiliaire, droite d'intersection, puis Thalès dans un plan.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → $\dfrac{1}{3}$ est le rapport $\dfrac{CK}{CE}$: K est plus près de C que de E.

`1/2` / `0.5` → Le plan (BDG) ne passe pas par le centre du cube : OC est la moitié de EG, donc KC est la moitié de KE.

`0.67` / `0.66` / `0.667` / `0.666` / `0.7` → C'est une valeur approchée : le rapport exact est une fraction.

EXERCICE 85 · DEFI **Une droite qui perce un plan diagonal**

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré de centre O. M est le point de l'arête $[SC]$ tel que $SM = \dfrac{1}{3}SC$. La droite (AM) perce le plan (SBD) en un point K. Calculer le rapport $\dfrac{SK}{SO}$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan auxiliaire (SAC) contient (AM). Il coupe le plan (SBD) suivant la droite (SO) : K est le point d'intersection de (AM) et de (SO).
2. Dans le triangle SAC, trace par M la parallèle à (SO) : elle coupe (AC) en N. Applique Thalès dans les triangles CSO puis ANM.

CORRECTION

Le plan auxiliaire — S et O sont dans les plans (SAC) et (SBD).

$(SAC) \cap (SBD) = (SO)$

Une parallèle — Par M, la parallèle à (SO) coupe (AC) en N. Dans le triangle CSO : $\dfrac{CN}{CO} = \dfrac{NM}{SO} = \dfrac{CM}{CS} = \dfrac{2}{3}$.

$ON = \dfrac{1}{3}OC = \dfrac{1}{3}AO$

Thalès encore — Dans le triangle ANM, $(OK) \parallel (NM)$ et $AN = \dfrac{4}{3}AO$:

$OK = \dfrac{AO}{AN} \times NM = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3}SO = \dfrac{1}{2}SO$

Le rapport —

$\dfrac{SK}{SO} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{SK}{SO} = \dfrac{1}{2}$: on se ramène au plan auxiliaire (SAC), puis on applique Thalès deux fois.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/3` → $\frac{2}{3}$ serait le rapport si M était le milieu de $[SC]$: K serait alors le centre de gravité du triangle SAC. Ici $SM = \frac{1}{3}SC$.

`1/3` → $\frac{1}{3}$ est le rapport $\frac{SM}{SC}$: il ne se reporte pas tel quel sur $[SO]$.

EXERCICE 86 · DEFI

Le milieu d'une médiane

$ABCD$ est un tétraèdre, G le centre de gravité du triangle BCD, J le milieu de $[CD]$ et I le milieu de $[AG]$. La droite (BI) perce le plan (ACD) en un point P de la droite (AJ). Calculer le rapport $\frac{AP}{AJ}$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `2/5` — aussi acceptées : 0.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Travaille dans le plan (ABJ) : il contient B, G (sur la médiane $[BJ]$), A, donc I et P. On a $BG = \frac{2}{3}BJ$.
2. Trace par G la parallèle à (BP) : elle coupe $[AJ]$ en L. Applique Thalès dans le triangle AGL, puis dans le triangle JBP.

CORRECTION

Le plan (ABJ) — G est sur $[BJ]$ avec $JG = \frac{1}{3}JB$; I est le milieu de $[AG]$. La parallèle à (BP) passant par G coupe (AJ) en L.

$(GL) \parallel (BP)$

Dans le triangle JBP — $(GL) \parallel (BP)$:

$\frac{JL}{JP} = \frac{JG}{JB} = \frac{1}{3}$

Dans le triangle AGL — I est le milieu de $[AG]$ et $(IP) \parallel (GL)$: P est le milieu de $[AL]$.

$AP = PL$

Les longueurs — Avec $JL = \frac{1}{3}JP$ et $PL = \frac{2}{3}JP = AP$: $AJ = AP + JP = \frac{2}{3}JP + JP = \frac{5}{3}JP$.

$\frac{AP}{AJ} = \frac{\frac{2}{3}JP}{\frac{5}{3}JP} = \frac{2}{5}$

$\frac{AP}{AJ} = \frac{2}{5}$: le point où une droite perce un plan se calcule dans un plan auxiliaire bien choisi, ici (ABJ).

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` / `0.5` → I est le milieu de $[AG]$, mais P n'est pas le milieu de $[AJ]$: trace la parallèle à (BP) par G.

`3/5` / `0.6` → $\frac{3}{5}$ est le rapport $\frac{JP}{JA}$: on demande $\frac{AP}{AJ}$.

`2/3` → $\frac{2}{3}$ est le rapport $\frac{BG}{BJ}$: il sert à placer G, pas P.

EXERCICE 87 · BASE

Deux faces d'un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre. Déterminer l'intersection des plans (ABD) et (BCD).

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(BD)` — aussi acceptées : BD · la droite (BD) · la droite BD · droite (BD) · droite BD · c'est (BD) · c'est la droite (BD) · (DB) · DB · la droite (DB) · la droite DB · droite (DB) · droite DB · c'est (DB) · c'est la droite (DB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche deux points communs aux deux plans.
2. Quelles lettres les deux noms ont-ils en commun ?

CORRECTION

Deux points communs —

$B, D \in (ABD)$ et $B, D \in (BCD)$

Deux plans distincts — $C \notin (ABD)$: les plans sont distincts, ils se coupent suivant une droite.

$(ABD) \cap (BCD) = (BD)$

L'intersection est la droite (BD), l'arête commune aux deux faces.

PIÈGES ANTICIPÉS

`B` / `le point B` / `point B` / `c'est B` / `c'est le point B` / `en B` / `au point B` / `= B` / `D` / `le point D` / `point D` / `c'est D` / `c'est le point D` / `en D` / `au point D` / `= D` → Deux plans sécants se coupent suivant une droite, pas en un point : il faut deux points communs.

EXERCICE 88 · BASE

Deux faces du cube

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. Déterminer l'intersection des plans (ABF) et (BCG).

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(BF)` — aussi acceptées : BF · la droite (BF) · la droite BF · droite (BF) · droite BF · c'est (BF) · c'est la droite (BF) · (FB) · FB · la droite (FB) · la droite FB · droite (FB) · droite FB · c'est (FB) · c'est la droite (FB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Reconnais les deux faces : (ABF) est le plan de la face $ABFE$. Et (BCG) ?
2. (BCG) est le plan de la face $BCGF$. Quels sommets ces deux faces ont-elles en commun ?

CORRECTION

Les faces — (ABF) est le plan de la face $ABFE$, (BCG) celui de la face $BCGF$.

$B, F \in (ABF) \cap (BCG)$

La droite — Les plans sont distincts et ont deux points communs B et F.

$(ABF) \cap (BCG) = (BF)$

L'intersection est la droite (BF) : on reconnaît d'abord les faces que désignent les noms des plans.

PIÈGES ANTICIPÉS

`B / le point B / point B / c'est B / c'est le point B / en B / au point B / = B` → B est commun aux deux noms, mais le sommet F est aussi dans les deux faces.

`(AB) / AB / la droite (AB) / la droite AB / droite (AB) / droite AB / c'est (AB) / c'est la droite (AB) / (BA) / BA / la droite (BA) / la droite BA / droite (BA) / droite BA / c'est (BA) / c'est la droite (BA) / (CG) / CG / la droite (CG) / la droite CG / droite (CG) / droite CG / c'est (CG) / c'est la droite (CG) / (GC) / GC / la droite (GC) / la droite GC / droite (GC) / droite GC / c'est (GC) / c'est la droite (GC)` → Cette droite n'est contenue que dans un des deux plans.

EXERCICE 89 · PRATIQUE

Deux plans diagonaux de la pyramide

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré de centre O. Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD).

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(SO)` — aussi acceptées : SO · la droite (SO) · la droite SO · droite (SO) · droite SO · c'est (SO) · c'est la droite (SO) · (OS) · OS · la droite (OS) · la droite OS · droite (OS) · droite OS · c'est (OS) · c'est la droite (OS)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. S est commun aux deux plans. Il faut un second point commun.
2. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de la base se coupent en un point.

CORRECTION

Le premier point —

$S \in (SAC) \cap (SBD)$

Le second point — O est sur $(AC) \subset (SAC)$ et sur $(BD) \subset (SBD)$.

$O \in (SAC) \cap (SBD)$

La droite —

$(SAC) \cap (SBD) = (SO)$

L'intersection est la droite (SO) : le second point commun est à l'intersection de deux droites, une dans chaque plan.

PIÈGES ANTICIPÉS

`S / le point S / point S / c'est S / c'est le point S / en S / au point S / = S / O / le point O / point O / c'est O / c'est le point O / en O / au point O / = O` → Deux plans distincts qui ont un point commun se coupent suivant une droite : il faut deux points communs.

`(AC) / AC / la droite (AC) / la droite AC / droite (AC) / droite AC / c'est (AC) / c'est la droite (AC) / (CA) / CA / la droite (CA) / la droite CA / droite (CA) / droite CA / c'est (CA) / c'est la droite (CA) / (BD) / BD / la droite (BD) / la droite BD / droite (BD) / droite BD / c'est (BD) / c'est la droite (BD) / (DB) / DB / la droite (DB) / la droite DB / droite (DB) / droite DB / c'est (DB) / c'est la droite (DB)` → Cette diagonale de la base n'est contenue que dans un des deux plans.

EXERCICE 90 · PRATIQUE

Le plan d'une médiane

$ABCD$ est un tétraèdre et I est le milieu de $[BC]$. Déterminer l'intersection des plans (ADI) et (BCD).

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(DI)` — aussi acceptées : DI · la droite (DI) · la droite DI · droite (DI) · droite DI · c'est (DI) · c'est la droite (DI) · (ID) · ID · la droite (ID) · la

droite ID · droite (ID) · droite ID · c'est (ID) · c'est la droite (ID)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point D est dans les deux plans. Cherche un second point commun.
2. I est sur $[BC]$: est-il dans le plan (BCD) ?

CORRECTION

Deux points communs — D est dans les deux plans ; I est dans (ADI) et sur $(BC) \subset (BCD)$.

$D, I \in (ADI) \cap (BCD)$

La droite — $A \notin (BCD)$: les plans sont distincts.

$(ADI) \cap (BCD) = (DI)$

L'intersection est la droite (DI), la médiane issue de D du triangle BCD.

PIÈGES ANTICIPÉS

(BC) / BC / la droite (BC) / la droite BC / droite (BC) / droite BC / c'est (BC) / c'est la droite (BC) / (CB) / CB / la droite (CB) / la droite CB / droite (CB) / droite CB / c'est (CB) / c'est la droite (CB) / (AI) / AI / la droite (AI) / la droite AI / droite (AI) / droite AI / c'est (AI) / c'est la droite (AI) / (IA) / IA / la droite (IA) / la droite IA / droite (IA) / droite IA / c'est (IA) / c'est la droite (IA) → Cette droite n'est contenue que dans un des deux plans : vérifie que ses deux points sont dans les deux.

EXERCICE 91 · PRATIQUE

Deux rectangles diagonaux

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. P est le centre de la face $ABCD$ et Q le centre de la face $EFGH$. Déterminer l'intersection des plans (ACG) et (BDH).

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : (PQ) — aussi acceptées : PQ · la droite (PQ) · la droite PQ · droite (PQ) · droite PQ · c'est (PQ) · c'est la droite (PQ) · (QP) · QP · la droite (QP) · la droite QP · droite (QP) · droite QP · c'est (QP) · c'est la droite (QP)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre d'une face est le point d'intersection de ses diagonales.
2. P est sur $[AC]$ et sur $[BD]$; Q est sur $[EG]$ et sur $[FH]$. Dans quels plans sont ces diagonales ?

CORRECTION

Le point P — P est sur $(AC) \subset (ACG)$ et sur $(BD) \subset (BDH)$.

$P \in (ACG) \cap (BDH)$

Le point Q — Le plan (ACG) contient E (rectangle $ACGE$), donc (EG) ; le plan (BDH) contient F (rectangle $BDHF$), donc (FH). Q est sur les deux.

$Q \in (ACG) \cap (BDH)$

La droite —

$(ACG) \cap (BDH) = (PQ)$

L'intersection est la droite (PQ) qui joint les centres de deux faces opposées.

PIÈGES ANTICIPÉS

(AG) / AG / la droite (AG) / la droite AG / droite (AG) / droite AG / c'est (AG) / c'est la droite (AG) / (GA) / GA / la droite (GA) / la droite GA / droite (GA) / droite GA / c'est (GA) / c'est la droite (GA) / (BH) / BH / la droite (BH) / la droite BH / droite (BH) / droite BH / c'est (BH) / c'est la droite (BH) / (HB) / HB / la droite (HB) / la droite HB / droite (HB) / droite HB / c'est (HB) / c'est la droite (HB) / (AC) / AC / la droite (AC) / la droite AC / droite (AC) / droite AC / c'est (AC) / c'est la droite (AC) / (CA) / CA / la droite (CA) / la droite CA / droite (CA) / droite CA / c'est (CA) / c'est la droite (CA) / (BD) / BD / la droite (BD) / la droite BD / droite (BD) / droite BD / c'est (BD) / c'est la droite (BD) / (DB) / DB / la droite (DB) / la droite DB / droite (DB) / droite DB / c'est (DB) / c'est la droite (DB) → Cette droite n'est contenue que dans un des deux plans.

EXERCICE 92 · RAISONNEMENT

Un plan qui cache son nom

$ABCD$ est un tétraèdre, I un point de $[AD]$ et J un point de $[BD]$, distincts des sommets. Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (ABC).

Écris le nom de la droite, par exemple (CD).

Réponse attendue : (AB) — aussi acceptées : AB · la droite (AB) · la droite AB · droite (AB) · droite AB · c'est (AB) · c'est la droite (AB) · (BA) · BA · la droite (BA) · la droite BA · droite (BA) · droite BA · c'est (BA) · c'est la droite (BA)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (DIJ) contient D et I, donc toute la droite (DI). Quel sommet est sur cette droite ?
2. Le plan (DIJ) contient A et B : c'est le plan d'une face.

CORRECTION

Le plan (DIJ) — I est sur (AD) et J sur (BD) : le plan (DIJ) contient les droites (DA) et (DB).

$(DIJ) = (ABD)$

Deux faces — Les plans (ABD) et (ABC) ont en commun A et B.

$(DIJ) \cap (ABC) = (AB)$

L'intersection est la droite (AB) : avant de chercher des points communs, on reconnaît le plan (DIJ), qui est celui de la face ABD.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(IJ) / IJ / la droite (IJ) / la droite IJ / droite (IJ) / droite IJ / c'est (IJ) / c'est la droite (IJ) / (JI) / JI / la droite (JI) / la droite JI / droite (JI) / droite JI / c'est (JI) / c'est la droite (JI)` → I et J ne sont pas dans le plan (ABC) : ils sont sur $[AD]$ et $[BD]$, distincts de A et de B.

EXERCICE 93 · RAISONNEMENT

Deux faces latérales

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base est un quadrilatère convexe $ABCD$; les droites (AD) et (BC) se coupent en un point E. Déterminer l'intersection des plans (SAD) et (SBC).

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(SE)` — aussi acceptées : SE · la droite (SE) · la droite SE · droite (SE) · droite SE · c'est (SE) · c'est la droite (SE) · (ES) · ES · la droite (ES) · la droite ES · droite (ES) · droite ES · c'est (ES) · c'est la droite (ES)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. S est un premier point commun. Le second doit être dans les deux plans.
2. E est sur la droite (AD) et sur la droite (BC) : dans quels plans sont ces droites ?

CORRECTION

Le premier point —

$S \in (SAD) \cap (SBC)$

Le second point — E est sur $(AD) \subset (SAD)$ et sur $(BC) \subset (SBC)$.

$E \in (SAD) \cap (SBC)$

La droite —

$(SAD) \cap (SBC) = (SE)$

L'intersection est la droite (SE) : le second point commun s'obtient en prolongeant deux droites coplanaires de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`S / le point S / point S / c'est S / c'est le point S / en S / au point S / = S / E / le point E / point E / c'est E / c'est le point E / en E / au point E / = E` → Deux plans distincts qui ont un point commun se coupent suivant une droite : il faut deux points communs.

EXERCICE 94 · RAISONNEMENT

Avec le point construit

$ABCD$ est un tétraèdre, I un point de $[AB]$ et J un point de $[AC]$, distincts des sommets, tels que les droites (IJ) et (BC) se coupent en un point K. Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (BCD).

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(DK)` — aussi acceptées : DK · la droite (DK) · la droite DK · droite (DK) · droite DK · c'est (DK) · c'est la droite (DK) · (KD) · KD · la droite (KD) · la droite KD · droite (KD) · droite KD · c'est (KD) · c'est la droite (KD)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D est commun aux deux plans. Cherche un second point commun.
2. K est sur (IJ) et sur (BC).

CORRECTION

Le point D —

$D \in (DIJ) \cap (BCD)$

Le point K — K est sur $(IJ) \subset (DIJ)$ et sur $(BC) \subset (BCD)$.

$K \in (DIJ) \cap (BCD)$

La droite — $I \notin (BCD)$: les plans sont distincts.

$(DIJ) \cap (BCD) = (DK)$

L'intersection est la droite (DK) : le point K, construit dans la face ABC, est le second point commun.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(IJ) / IJ / la droite (IJ) / la droite IJ / droite (IJ) / droite IJ / c'est (IJ) / c'est la droite (IJ) / (JI) / JI / la droite (JI) / la droite JI / droite (JI) / droite JI / c'est (JI) / c'est la droite (JI) / (BC) / BC / la droite (BC) / la droite BC / droite (BC) / droite BC / c'est (BC) / c'est la droite (BC) / (CB) / CB / la droite (CB) / la droite CB / droite (CB) / droite CB / c'est (CB) / c'est la droite (CB)` → Cette droite n'est contenue que dans un des deux plans.

D / le point D / point D / c'est D / c'est le point D / en D / au point D / = D / K / le point K / point K / c'est K / c'est le point K / en K / au point K / = K → L'intersection de deux plans sécants est une droite : il faut deux points communs.

EXERCICE 95 · RAISONNEMENT

Un sommet et un centre

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. O est le centre de la face $ABCD$. Déterminer l'intersection des plans (ACH) et (BDH).

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : (HO) — aussi acceptées : HO · la droite (HO) · la droite HO · droite (HO) · droite HO · c'est (HO) · c'est la droite (HO) · (OH) · OH · la droite (OH) · la droite OH · droite (OH) · droite OH · c'est (OH) · c'est la droite (OH)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. H est commun aux deux plans. Il faut un second point commun.
2. Le centre O est sur la diagonale $[AC]$ et sur la diagonale $[BD]$.

CORRECTION

Le point H —

$H \in (ACH) \cap (BDH)$

Le point O — O est sur $(AC) \subset (ACH)$ et sur $(BD) \subset (BDH)$.

$O \in (ACH) \cap (BDH)$

La droite —

$(ACH) \cap (BDH) = (HO)$

L'intersection est la droite (HO) : on cherche deux droites, une dans chaque plan, qui se coupent.

PIÈGES ANTICIPÉS

(AC) / AC / la droite (AC) / la droite AC / droite (AC) / droite AC / c'est (AC) / c'est la droite (AC) / (CA) / CA / la droite (CA) / la droite CA / droite (CA) / droite CA / c'est (CA) / c'est la droite (CA) / (BD) / BD / la droite (BD) / la droite BD / droite (BD) / droite BD / c'est (BD) / c'est la droite (BD) / (DB) / DB / la droite (DB) / la droite DB / droite (DB) / droite DB / c'est (DB) / c'est la droite (DB) / (DH) / DH / la droite (DH) / la droite DH / droite (DH) / droite DH / c'est (DH) / c'est la droite (DH) / (HD) / HD / la droite (HD) / la droite HD / droite (HD) / droite HD / c'est (HD) / c'est la droite (HD) → Cette droite n'est contenue que dans un des deux plans.

EXERCICE 96 · DEFI

Où la section coupe une arête

$ABCD$ est un tétraèdre, E le milieu de $[AB]$ et F le point de $[AC]$ tel que $AF = \frac{3}{4}AC$. La droite (EF) coupe la droite (BC) en un point P, qui sert à construire l'intersection des plans (DEF) et (BCD). Calculer le rapport $\frac{PB}{PC}$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Travaille dans le plan (ABC). Trace par C la parallèle à (AB) : elle coupe (EF) en un point L.
2. Thalès dans les triangles FAE et FCL donne CL en fonction de AE ; puis Thalès dans les triangles PBE et PCL.

CORRECTION

Une parallèle — Dans le plan (ABC), la parallèle à (AB) passant par C coupe (EF) en L. Comme $FC = \frac{1}{4}AC$:

$\frac{CL}{AE} = \frac{FC}{FA} = \frac{1}{3}$

Les longueurs — E est le milieu de $[AB]$: $BE = AE = 3CL$.

$BE = 3CL$

Thalès encore — $(CL) \parallel (BE)$:

$\frac{PB}{PC} = \frac{BE}{CL} = 3$

$\frac{PB}{PC} = 3$: P est au-delà de C. La géométrie plane (axiome 4) s'applique dans le plan (ABC).

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → $\frac{1}{3}$ est le rapport $\frac{PC}{PB}$: P est plus près de C que de B.

2 → 2 correspondrait à $AF = \frac{2}{3}AC$. Ici $FC = \frac{1}{4}AC$: recalcule $\frac{CL}{AE}$.

EXERCICE 97 · BASE

Les coins peints

On peint les faces d'un cube en bois, puis on le découpe en 125 petits cubes identiques par des traits de scie parallèles aux faces. Déterminer le nombre de petits cubes qui ont exactement trois faces peintes.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un petit cube a trois faces peintes s'il touche trois faces du grand cube.
2. Où se trouvent les petits cubes qui touchent trois faces à la fois ?

CORRECTION

Les coins — Seuls les petits cubes placés aux sommets du grand cube touchent trois faces.

$$\text{un par sommet}$$

Le nombre — Le grand cube a 8 sommets.

$$8$$

8 petits cubes, ceux des coins, ont trois faces peintes, quel que soit le nombre de découpes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → 6 est le nombre de faces du grand cube : les petits cubes à trois faces peintes sont aux sommets.

EXERCICE 98 · PRATIQUE

Deux faces peintes

On peint les faces d'un cube en bois, puis on le découpe en 125 petits cubes identiques par des traits de scie parallèles aux faces. Déterminer le nombre de petits cubes qui ont exactement deux faces peintes.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $125 = 5^3$: il y a 5 petits cubes le long de chaque arête.
2. Les petits cubes à deux faces peintes sont le long des arêtes, sans les coins.

CORRECTION

Le long d'une arête — Sur une arête, 5 petits cubes, dont 2 coins à trois faces peintes.

$$5 - 2 = 3$$

Les douze arêtes —

$$12 \times 3 = 36$$

36 petits cubes ont exactement deux faces peintes : on compte arête par arête, sans les coins.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → Tu as compté les coins sur chaque arête : ils ont trois faces peintes, pas deux.

`44` → Les 8 coins ont trois faces peintes : ils ne font pas partie du compte.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

Une seule face peinte

On peint les faces d'un cube en bois, puis on le découpe en 216 petits cubes identiques par des traits de scie parallèles aux faces. Déterminer le nombre de petits cubes qui ont exactement une face peinte.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 96

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $216 = 6^3$: il y a 6 petits cubes le long de chaque arête, et 36 sur chaque face.
2. Sur une face, enlève les petits cubes du bord : ils ont au moins deux faces peintes.

CORRECTION

Sur une face — En enlevant le bord, il reste un carré de $6 - 2 = 4$ petits cubes de côté.

$$4^2 = 16$$

Les six faces —

$$6 \times 16 = 96$$

96 petits cubes ont exactement une face peinte : sur chaque face, ceux qui ne touchent pas le bord.

PIÈGES ANTICIPÉS

150 → Il faut enlever le bord des deux côtés : il reste $6-2=4$ petits cubes par côté, pas 5.

216 → 6×36 compte plusieurs fois les petits cubes des arêtes et des coins, qui ont plusieurs faces peintes.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT **Des billes dans une boîte**

1300 billes sont rangées dans une boîte cubique d'arête 5, que l'on partage en cubes d'arête 1. Une bille posée sur une paroi commune est comptée dans un seul petit cube. Déterminer le plus grand entier k tel qu'on soit sûr qu'un des petits cubes contient au moins k billes.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte les petits cubes : 5^3.
2. Si chaque petit cube contenait au plus 10 billes, combien de billes y aurait-il au plus ?

CORRECTION

Les petits cubes —

$5^3=125$

Au plus dix ? — Si chaque petit cube contenait au plus 10 billes, il y en aurait au plus $1250<1300$: un petit cube en contient au moins 11.

$10\times 125=1250<1300$

Pas douze — On peut mettre 11 billes dans 50 petits cubes et 10 dans les 75 autres : aucun n'en contient 12.

$50\times 11+75\times 10=1300$

$k=11$: on raisonne par l'absurde, comme pour les mouches dans la boîte, puis on vérifie qu'on ne peut pas faire mieux.

PIÈGES ANTICIPÉS

10 → $1300\div 125=10{,}4$: avec au plus 10 billes par cube, il n'y en aurait que 1250. On est donc sûr d'en trouver 11.

10.4 → Le nombre de billes est un entier : $10{,}4$ signifie qu'un cube en contient au moins 11.

EXERCICE 101 · DEFI **Autant dedans que sur les faces**

On peint les faces d'un cube en bois, puis on le découpe en n^3 petits cubes identiques, avec $n>2$. Le nombre de petits cubes sans aucune face peinte est égal au nombre de petits cubes qui ont exactement une face peinte. Déterminer n.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les petits cubes sans face peinte forment un cube intérieur de $(n-2)^3$ petits cubes.
2. Ceux qui ont exactement une face peinte : $(n-2)^2$ par face. Écris l'égalité et simplifie par $(n-2)^2$, qui n'est pas nul.

CORRECTION

Sans peinture —

$(n-2)^3$

Une face peinte —

$6(n-2)^2$

L'équation — Comme $n>2$, on peut diviser par $(n-2)^2\neq 0$.

$(n-2)^3=6(n-2)^2 \iff n-2=6$

La valeur —

$n=8$

$n=8$: il y a alors 216 petits cubes de chaque sorte. On met chaque catégorie en équation.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est la valeur de $n-2$: il reste à ajouter 2.

EXERCICE 102 · DEFI **Une somme de cubes**

Pour tout entier naturel n, on a $n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2$. En utilisant cette égalité, calculer $1^3+2^3+3^3+\cdots+12^3$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `6084`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Remarque que $\dfrac{n(n-1)}{2} = T_{n-1}$: l'égalité s'écrit $n^3 = T_n^2 - T_{n-1}^2$.
2. En ajoutant ces égalités pour $n = 1, 2, \dots, 12$, presque tous les termes s'éliminent deux à deux.

CORRECTION

Réécrire — Avec $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on a $\dfrac{n(n-1)}{2} = T_{n-1}$ et $T_0 = 0$.

$$n^3 = T_n^2 - T_{n-1}^2$$

Additionner — Les termes intermédiaires s'éliminent deux à deux.

$$1^3 + 2^3 + \cdots + 12^3 = T_{12}^2 - T_0^2 = T_{12}^2$$

Le calcul —

$$T_{12} = \frac{12 \times 13}{2} = 78 \quad ; \quad 78^2 = 6084$$

La somme vaut 6084 : la somme des cubes des premiers entiers est le carré de leur somme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`78` → 78 est la somme $1 + 2 + \cdots + 12$: la somme des cubes en est le carré.

`24336` → Tu as oublié de diviser par 2 : $T_{12} = \dfrac{12 \times 13}{2}$.

AH Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI