– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Fonctions de références

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum bech nfassrou m3a b3adhna chapitre jdid : les fonctions de référence. Bech net3arrfou 3la trois familles de fonctions, w koll wa7da 3andha la courbe mte3ha : les trinômes a x au carré plus b x plus c, w la courbe mte3hom la parabole ; la racine carrée de (x plus b) ; w les quotients (a x plus b) sur (c x plus d), w la courbe mte3hom l'hyperbole. W fi koll marra, nabdew men courbe bsita, w n7arrkouha b translation. Yalla, nabdew.

عسلامة ! ليوم باش نفسّرو مع بعضنا chapitre جديد : les fonctions de référence . باش نتعرّفو على trois familles de fonctions ، w كل وحدة عندها la courbe متاعها : la parabole ؛ la racine carrée de (x plus b) ؛ w les quotients (a x plus b) sur (c x plus d) ، w courbe متاعهم les trinômes a x au carré plus b x plus c ، w la courbe متاعهم l'hyperbole . w في كل مرّة ، نبداو من courbe بسيطة ، w نحرّكوها بـ translation . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Aujourd'hui, on va expliquer ensemble un nouveau chapitre : les fonctions de référence. Nous allons faire connaissance avec trois familles de fonctions, chacune avec sa courbe : les trinômes a x au carré plus b x plus c, dont la courbe est la parabole ; la racine carrée de (x plus b) ; et les quotients (a x plus b) sur (c x plus d), dont la courbe est l'hyperbole. Et à chaque fois, on part d'une courbe simple, et on la déplace par une translation. Allez, on commence.

Trois fonctions simples — $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ — servent de **références** : on apprend leur courbe une fois pour toutes.

Toutes les autres fonctions du chapitre s'en déduisent en déplaçant la courbe : les trinômes donnent des **paraboles**, les quotients $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ des **hyperboles**.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Reconnaître une parabole : son sommet, son axe et son équation
  > Reconnaître une parabole : son sommet, son axe et son équation.
  > *Reconnaître une parabole : son sommet, son axe et son équation.*
- Écrire un trinôme sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$
  > Écrire un trinôme sous la forme a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta.
  > *Écrire un trinôme sous la forme a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta.*
- Tracer la courbe de $x \mapsto \sqrt{x+b}$
  > Tracer la courbe de racine carrée de (x plus b).
  > *Tracer la courbe de racine carrée de (x plus b).*
- Reconnaître une hyperbole : son centre et ses asymptotes
  > Reconnaître une hyperbole : son centre et ses asymptotes.
  > *Reconnaître une hyperbole : son centre et ses asymptotes.*
- Passer d'une courbe à une autre par une translation
  > Passer d'une courbe à une autre par une translation.
  > *Passer d'une courbe à une autre par une translation.*
- Résoudre graphiquement et par le calcul des équations et des inéquations
  > Résoudre graphiquement et par le calcul des équations et des inéquations.
  > *Résoudre graphiquement et par le calcul des équations et des inéquations.*

1. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la fonction carré

CE QU'IL DIT

Nabdew bel fonction el absat : f de x égale x au carré. Chouf la courbe mte3ha : tahbet 7atta l O, w ba3d tatla3. W les points M w N, elli les abscisses mte3hom deux w moins deux, 3andhom nafs l'ordonnée : quatre. 5ater nombre w l'opposé mte3ou 3andhom nafs le carré, ya3ni f de moins x égale f de x : f paire, w la courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. W 7aja o5ra : ki x yekber, x au carré yekber barcha. Dix puissance quinze au carré ya3ti dix puissance trente. Mahma ykoun le nombre A, f de x yfoutou ki x yfout racine carrée de A.

نبداو بالـ fonction الأبسط : f de x égale x au carré . شوف la courbe متاعها : تهبط حتّى لـ O ، w بعد تطلع . w les points M w N ، اللي les abscisses متاعهم deux w moins deux ، عندهم نفس quatre : l'ordonnée . خاطر le carré نفس متاعو عندهم nombre w l'opposé ، يعني la courbe w ، f paire : f de moins x égale f de x symétrique par rapport à l'axe des ordonnées . w حاجة أخرى : كي x يكبر ، x au carré يكبر برشا . dix puissance quinze au carré يعطي dix puissance trente . مهما يكون f de x ، le nombre A يفوتو كي x يفوت racine carrée de A .

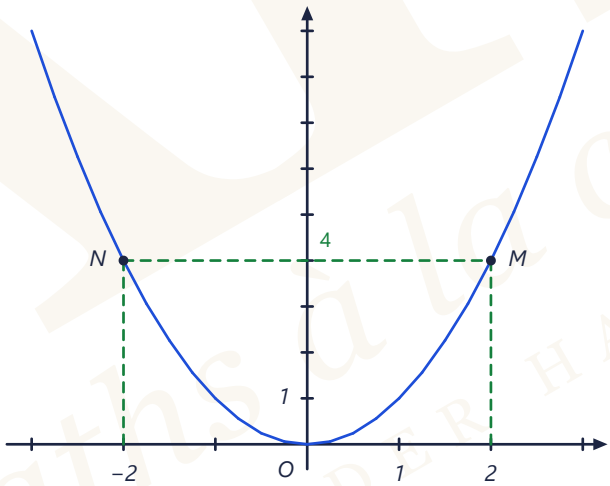
Commençons par la fonction la plus simple : f de x égale x au carré. Regarde sa courbe : elle descend jusqu'à O, puis elle remonte. Et les points M et N, d'abscisses deux et moins deux, ont la même ordonnée :

quatre. Comme un nombre et son opposé ont le même carré, f de moins x égale f de x : f est paire, et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Autre chose : quand x grandit, x au carré grandit beaucoup. Dix puissance quinze au carré donne dix puissance trente. Quel que soit le nombre A, f de x le dépasse dès que x dépasse racine carrée de A.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la courbe de la figure.

1. À l'aide du graphique, émets une conjecture sur la parité de f, puis décris ses variations sur $\mathbb{R}$.
2. Montre que la fonction f est paire, puis qu'elle est croissante sur $[0; +\infty[$.
3. Complète le tableau ci-dessous. Comment peut-on choisir x positif pour que $f(x)$ soit strictement supérieur à 10^{30} ? Et à un réel A strictement positif ?

x	10^3	10^4	10^7	10^{10}	10^{15}
$f(x)$					



La courbe de la fonction x ↦ x².

Un repère orthogonal d'origine O. La courbe de la fonction carré descend depuis la gauche jusqu'à l'origine O, son point le plus bas, puis remonte vers la droite ; elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Au palier 2, les points M, d'abscisse 2, et N, d'abscisse moins 2, sont marqués sur la courbe : ils ont la même ordonnée, 4, et le segment [NM] est horizontal.

EXEMPLE TRAITÉ

Montre que f est paire et croissante sur $[0; +\infty[$, puis dis à partir de quelle valeur de x positif on a $f(x) > A$.

La parité — Pour tout réel x, $-x$ est aussi un réel, et son image est la même que celle de x.
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Les variations — Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. Les deux facteurs $b-a$ et $b+a$ sont positifs ou nuls.

$$f(b)-f(a)=b^2-a^2=(b-a)(b+a)\geq 0$$

Le tableau — Pour élever une puissance de 10 au carré, on double l'exposant.

$$f(10^3)=10^6 \quad ; \quad f(10^4)=10^8 \quad ; \quad f(10^7)=10^{14}$$

$$f(10^{10})=10^{20} \quad ; \quad f(10^{15})=10^{30}$$

Dépasser A — Pour x positif, $x^2 > A$ équivaut à $x > \sqrt{A}$: pour dépasser 10^{30}, il suffit de prendre $x > 10^{15}$.

$$x > \sqrt{A} \Rightarrow f(x) > A$$

$$\text{pour } x \text{ positif : } \quad f(x) > A \iff x > \sqrt{A}$$

À ne pas faire : f est croissante sur $\mathbb{R}$ — f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Pour deux réels négatifs, le carré renverse l'ordre : -3 est plus petit que -2, mais son carré, 9, est plus grand que 4.

À ne pas faire : $(-x)^2=-x^2$ — $(-x)^2=x^2$. Le carré d'un nombre négatif est positif : c'est pour cela que f est paire.

---

2. VOCABULAIRE

La parabole d'équation y = x²

CE QU'IL DIT

Hedhi el asemi elli lezmek ta7fedhhom. La courbe P mta3 la fonction x au carré nsammiwha parabole. Le point O houwa le sommet mte3ha : houni houwa el point el awta fi la courbe. W la droite d'équation x égale zéro, ya3ni l'axe des ordonnées, hiya l'axe de la parabole : la courbe symétrique par rapport liha. W y égale x au carré hiya l'équation de la parabole P. W zid : ki f de x yfout ay nombre A, mahma ken kbir, n9oulou f de x tend vers plus l'infini quand x tend vers plus l'infini. W nafs echay quand x tend vers moins l'infini.

parabole . le point O نسمّيوها la fonction x au carré متاع la courbe P . هاذي الأسامي اللي لازمك تحفظهم
يعني ، la courbe . w la droite d'équation x égale zéro في الأوطى point الـ هنا هو : متاعها le sommet هو
w y égale x au . ليها l'axe de la parabole : la courbe symétrique par rapport هي ، l'axe des ordonnées
f de x نقولو ، مهما كان كبير ، nombre A يفوت أيّ f de x كي : زيد l'équation de la parabole P . w هي carré
. quand x tend vers moins l'infini نفس الشي tend vers plus l'infini quand x tend vers plus l'infini . w

Voici les noms à retenir. La courbe P de la fonction x au carré s'appelle une parabole. Le point O est son sommet : ici, c'est le point le plus bas de la courbe. Et la droite d'équation x égale zéro, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est l'axe de la parabole : la courbe est symétrique par rapport à elle. Et y égale x au carré est l'équation de la parabole P. Ajoutons : quand f de x dépasse n'importe quel nombre A, aussi grand soit-il, on dit que f de x tend vers plus l'infini quand x tend vers plus l'infini. Et de même quand x tend vers moins l'infini.

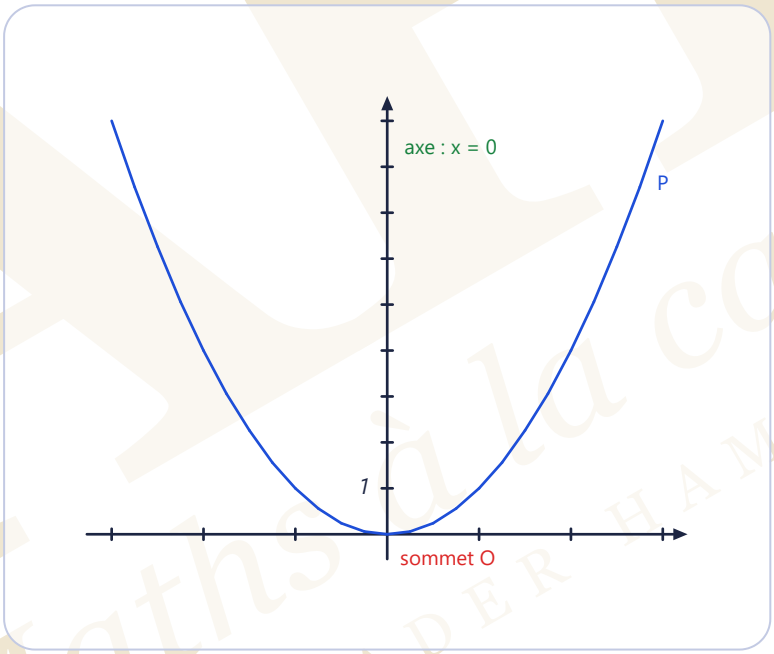
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe P de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est appelée **parabole**. Le point O est appelé le **sommet** de la parabole P, et la droite d'équation $x = 0$ est appelée l'**axe** de la parabole P.

L'équation $y = x^2$ est appelée l'**équation de la parabole P**.

Remarques. Pour tout réel A strictement positif, on peut trouver des valeurs positives de x telles que $f(x)$ soit supérieur à A. Autrement dit, $f(x)$ est supérieur à n'importe quel réel A positif, aussi grand que l'on veut, en choisissant des valeurs positives de x. On dit que $f(x)$ **tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$**.

On a aussi : $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.



La parabole P, son sommet et son axe.

La parabole P d'équation y égale x au carré, dans un repère orthogonal. Au palier 2, son sommet, l'origine O, est nommé : c'est le point le plus bas de la courbe. Au palier 3, son axe est nommé : c'est la droite d'équation x égale 0, l'axe des ordonnées, par rapport auquel la parabole est symétrique.

ÉQUATION DE LA PARABOLE P

$P : y = x^2$

$\text{sommet} : O \qquad \text{axe} : x = 0$

EXEMPLE TRAITÉ

Le point $A(-3; 9)$ est-il sur la parabole P ? Et le point $B(2; -4)$? Quel est le point de P d'abscisse $\frac{1}{2}$?

Le point A — Un point est sur P quand son ordonnée est le carré de son abscisse. Ici, c'est le cas.

$(-3)^2 = 9$

Le point B — Le carré de 2 est 4, et non -4 : le point B n'est pas sur P.

$2^2 = 4 \neq -4$

Une abscisse donnée — L'ordonnée est le carré de l'abscisse.

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$A \in P \quad ; \quad B \notin P \quad ; \quad D\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \in P$$

À ne pas faire : L'axe de la parabole P est l'axe des abscisses — L'axe de P est la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées. L'axe d'une parabole est son axe de symétrie : il passe par le sommet.

À ne pas faire : $f(x)$ tend vers $+\infty$: $f(x)$ finit par valoir $+\infty$ — $f(x)$ dépasse n'importe quel réel A dès que x est assez grand. Plus l'infini n'est pas un nombre : aucune valeur de $f(x)$ ne lui est égale.

---

3. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la courbe de 2x²

CE QU'IL DIT

Kifech nemchiw men la parabole P lel courbe mta3 deux x au carré ? B homothétie. Ne5dhou h, l'homothétie de centre O et de rapport un demi. Koll point M de coordonnées x et y men P, l'image mte3ou M prime 3andou les coordonnées x sur deux et y sur deux. W 5ater y égale x au carré, nal9aw y prime égale deux fois x prime au carré : M prime 3la la courbe C mta3 g. W bel 3aks, koll point men C houwa image mta3 point men P. Idhan l'image de la parabole P par h hiya la courbe C.

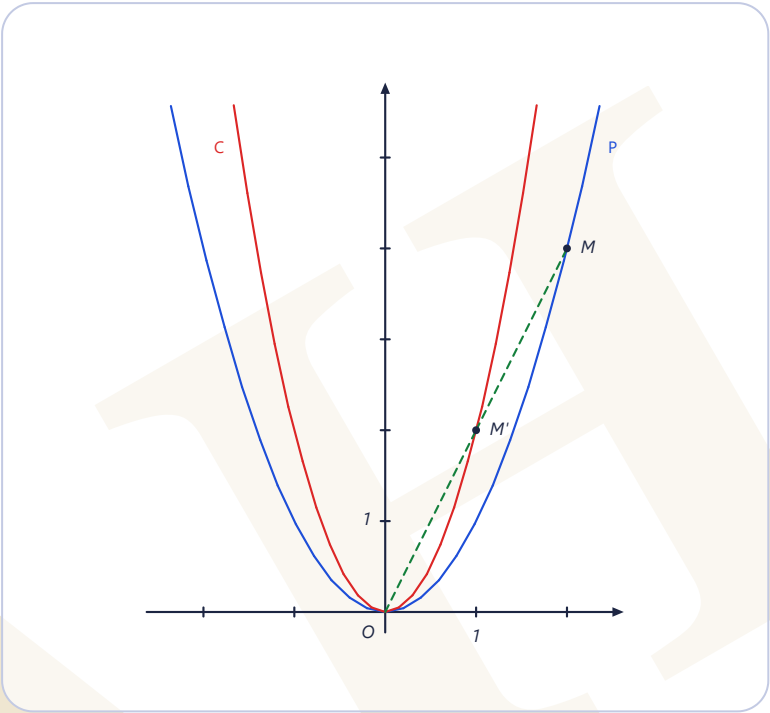
h ، l'homothétie de ناخذو . homothétie بـ ؟ deux x au carré متاع courbe للـ la parabole P من كيفاش نمشيو
عندو M prime متاعو P ، l'image من point M de coordonnées x et y كل . centre O et de rapport un demi
y prime égale deux fois x نلقاو ، y égale x au carré خاطر les coordonnées x sur deux et y sur deux . w
. P من point متاع image هو C من point كل ، بالعكس g . w متاع la courbe C على prime au carré : M prime
. la courbe C هي l'image de la parabole P par h إذن

Comment passer de la parabole P à la courbe de deux x au carré ? Par une homothétie. Prenons h, l'homothétie de centre O et de rapport un demi. Pour tout point M de coordonnées x et y de P, son image M prime a pour coordonnées x sur deux et y sur deux. Et comme y égale x au carré, on trouve y prime égale deux fois x prime au carré : M prime est sur la courbe C de g. Inversement, tout point de C est l'image d'un point de P. Donc l'image de la parabole P par h est la courbe C.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit P la parabole d'équation $y = x^2$, et h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

1. Soit $M(x; y)$ un point de la parabole P et $M'(x'; y')$ son image par l'homothétie h. Exprime x' et y' en fonction de x et y.

2. Montre que le point M' est sur la courbe représentative C de la fonction $g : x \mapsto 2x^2$.
3. Montre que tout point N de C est l'image par l'homothétie h d'un point M de P. Quelle est alors l'image de la parabole P par h ?



M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 1/2.

Un repère orthonormé d'origine O. En bleu, la parabole P d'équation y égale x au carré. Au palier 2, en rouge, la courbe C de la fonction qui à x associe 2 x au carré, plus resserrée autour de l'axe des ordonnées. Le point M, d'abscisse 2 et d'ordonnée 4, est sur P ; le point M prime, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, est sur C, au milieu du segment [OM] tracé en pointillés.

EXEMPLE TRAITÉ

Exprime les coordonnées de l'image d'un point de P par h, puis trouve l'image de la parabole P.

L'homothétie — Le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est la moitié du vecteur $\overrightarrow{OM}$: chaque coordonnée est divisée par 2.

$x' = \frac{x}{2} \quad ; \quad y' = \frac{y}{2}$

L'image est sur C — Le point M est sur P, donc $y = x^2$. On remplace x par $2x'$ et y par $2y'$.

$2y' = (2x')^2 = 4x'^2 \quad \text{donc} \quad y' = 2x'^2$

La réciproque — Si un point N d'abscisse u et d'ordonnée v est sur C, alors $v = 2u^2$. Le point d'abscisse $2u$ et d'ordonnée $2v$ est alors sur P, et son image par h est N.

$2v = 4u^2 = (2u)^2$

> l'image de P par h est la courbe C d'équation $y = 2x^2$

À ne pas faire : L'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ transforme $y = x^2$ en $y = \frac{x^2}{2}$ — Elle transforme $y = x^2$ en $y = 2x^2$. Les deux coordonnées sont divisées par 2, pas seulement l'ordonnée : la moitié du carré de $2x'$ est $2x'^2$.

4. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = ax²

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété. a réel non nul. La courbe mta3 f de x égale a x au carré hiya parabole, le sommet mte3ha O, w l'axe de symétrie mte3ha la droite d'équation x égale zéro. Ken a positif, la parabole ma7loula lel fou9, w O houwa el point el awta. Ken a négatif, ma7loula lel wta, w O houwa el point el a3la. Mithel : f de x égale moins trois x au carré. 3la les positifs, hiya décroissante, w f de x tend vers moins l'infini quand x tend vers plus l'infini.

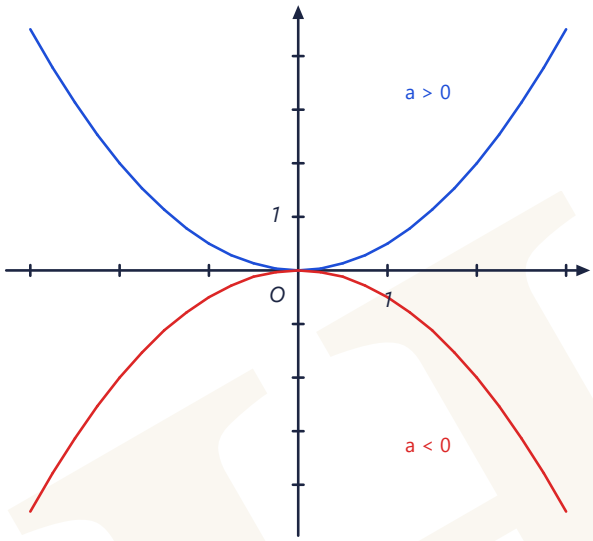
هاذي la courbe . a réel non nul . la propriété متاع f de x égale a x au carré هي le sommet ، parabole
متاعها l'axe de symétrie w O ، متاعها la droite d'équation x égale zéro . O
a positif ، la parabole كان . محلولة
a négatif كان . الأوطى point الـ هو w O ، للفوق
f de x égale : مثال . الأعلى point الـ هو w O ، محلولة للوطا ، a négatif كان . الأوطى point الـ هو w O ، للفوق
décroissante ، w f de x tend vers moins l'infini quand x tend هي ، les positifs على . moins trois x au carré
. vers plus l'infini

Voici la propriété. a est un réel non nul. La courbe de f de x égale a x au carré est une parabole de sommet O, et d'axe de symétrie la droite d'équation x égale zéro. Si a est positif, la parabole est tournée vers le haut, et O est le point le plus bas. Si a est négatif, elle est tournée vers le bas, et O est le point le plus haut. Exemple : f de x égale moins trois x au carré. Sur les positifs, elle est décroissante, et f de x tend vers moins l'infini quand x tend vers plus l'infini.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel non nul.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$ est une **parabole de sommet O et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.**

Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut ; si $a < 0$, elle est tournée vers le bas.



f(x) = ax² : la parabole selon le signe de a.

Un repère orthogonal d'origine O et deux paraboles de sommet O, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. La parabole bleue, notée a supérieur à 0, est tournée vers le haut : O est son point le plus bas. La parabole rouge, notée a inférieur à 0, est tournée vers le bas : O est son point le plus haut.

$$f(x) = ax^2 \quad (a \neq 0)$$

$$\text{parabole de sommet } O, \text{ d'axe } x = 0$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2$. Étudie ses variations. Puis, pour un réel A strictement positif, montre que si $x > \sqrt{\frac{A}{3}}$, alors $f(x) < -A$.

Pour x positif — Si $0 \leq u \leq v$, alors $u^2 \leq v^2$; multiplier par -3 renverse l'ordre. Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

$0 \leq u \leq v \Rightarrow -3u^2 \geq -3v^2$

Pour x négatif — La fonction f est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$.

Passer sous −A — Si $x > \sqrt{\frac{A}{3}}$, alors $x^2 > \frac{A}{3}$. On multiplie par -3, qui est négatif :

$-3x^2 < -A$

La conclusion — $f(x)$ devient inférieur à n'importe quel réel négatif, pourvu que x soit assez grand.

$$f(x) \text{ tend vers } -\infty \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty$$

À ne pas faire : $f(x) = -3x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$, comme x^2 — Elle est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$. Multiplier par un nombre négatif renverse l'ordre : le sommet O devient le point le plus haut de la parabole.

---

5. APPLICATION

Exemple : lire le coefficient

CE QU'IL DIT

3andna quatre paraboles, w koll wa7da la courbe mta3 fonction m x au carré. Kifech nal9aw m ? El 7ila : f de un égale m. Ya3ni m houwa l'ordonnée mta3 le point d'abscisse un. C un tet3adda men le point A de coordonnées un et un : m égale un. C deux tet3adda men B de coordonnées un et deux : m égale deux. C trois tet3adda men D de coordonnées deux et moins deux : quatre m égale moins deux, idhan m égale moins un demi. W C quatre tet3adda men E de coordonnées un et moins deux : m égale moins deux.

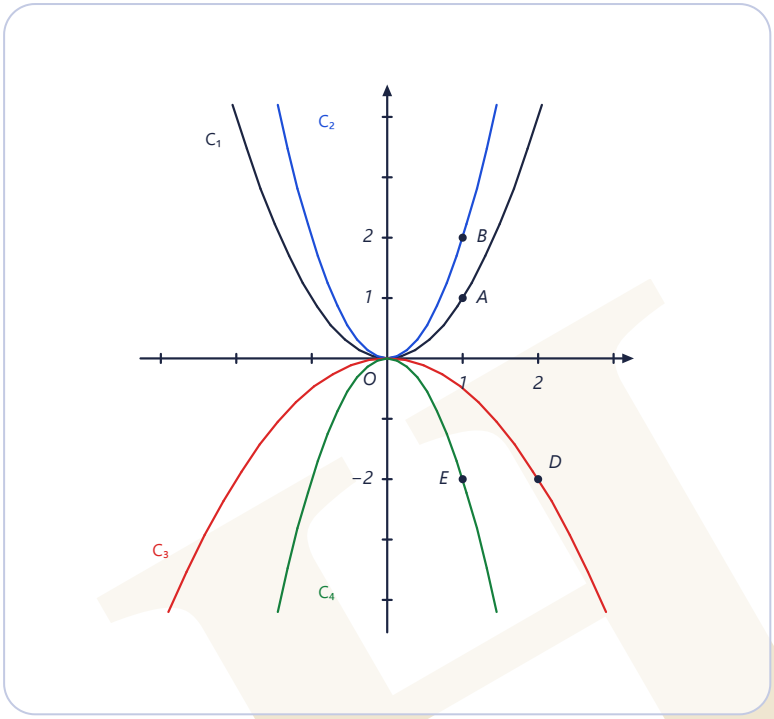
f de un : الحيلة ؟ m كيفاش نلقاو . fonction m x au carré متاع la courbe وحدة كل quatre paraboles ، w عندنا le point A de coordonnées من تتعدّى le point d'abscisse un . C un متاع l'ordonnée هو m يعني . égale m تتعدّى من B de coordonnées un et deux : m égale deux . C trois من تتعدّى un et un : m égale un . C deux m égale moins un demi . w C إذن ، D de coordonnées deux et moins deux : quatre m égale moins deux . E de coordonnées un et moins deux : m égale moins deux من تتعدّى quatre

Nous avons quatre paraboles, chacune étant la courbe d'une fonction m x au carré. Comment trouver m ? L'astuce : f de un égale m. Donc m est l'ordonnée du point d'abscisse un. C un passe par le point A de coordonnées un et un : m égale un. C deux passe par B de coordonnées un et deux : m égale deux. C trois passe par D de coordonnées deux et moins deux : quatre m égale moins deux, donc m égale moins un demi. Et C quatre passe par E de coordonnées un et moins deux : m égale moins deux.

Chaque parabole de la figure représente une fonction du type $f(x) = mx^2$, où m est une constante réelle. Détermine, pour chaque parabole, la valeur de m correspondante.

On lit sur la figure que C_1 passe par $A(1; 1)$, C_2 par $B(1; 2)$, C_3 par $D(2; -2)$ et C_4 par $E(1; -2)$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMRAM



Quatre paraboles du type y = mx².

Un repère orthogonal d'origine O et quatre paraboles de sommet O. C1, en noir, est tournée vers le haut et passe par le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 1. C2, en bleu, tournée vers le haut et plus resserrée, passe par le point B d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. C3, en rouge, est tournée vers le bas et large : elle passe par le point D d'abscisse 2 et d'ordonnée moins 2. C4, en vert, tournée vers le bas et resserrée, passe par le point E d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 2.

EXEMPLE TRAITÉ

Trouve la valeur de m pour chacune des quatre paraboles.

La méthode — Si $f(x) = mx^2$, alors $f(1) = m$: le coefficient m est l'ordonnée du point d'abscisse 1.

$f(1) = m \times 1^2 = m$

Les deux premières — La première passe par $A(1;1)$ et la deuxième par $B(1;2)$.

$m_1 = 1 \quad ; \quad m_2 = 2$

La troisième — Elle passe par $D(2;-2)$: l'abscisse n'est pas 1, on résout $m \times 2^2 = -2$.

$4m = -2 \quad \text{donc} \quad m_3 = -\frac{1}{2}$

La quatrième — Elle passe par $E(1;-2)$.

$m_4 = -2$

$$m_1 = 1 \quad ; \quad m_2 = 2 \quad ; \quad m_3 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad m_4 = -2$$

À ne pas faire : C_3 passe par $D(2;-2)$, donc $m = -2$ — $m \times 2^2 = -2$, donc $m = -\dfrac{1}{2}$. L'ordonnée ne donne m directement qu'au point d'abscisse 1 ; ailleurs, il faut diviser par le carré de l'abscisse.

6. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la courbe de $(x-2)^2$

CE QU'IL DIT

Tawa nbaddlou chwaya : f de x égale (x moins deux) au carré, w la courbe mte3ha C. Ne5dhou point M de coordonnées x et y. M 3la C ma3neha y égale (x moins deux) au carré. W hedha bedhabt ma3neh el point N, elli l'abscisse mte3ou x moins deux w l'ordonnée mte3ou y, 3la la parabole P. W men N l M, nzidou deux lel abscisse berk : M houwa l'image de N par la translation de vecteur deux i. Idhan C hiya l'image de P par la translation hedhi : nafs la parabole, m7arrka b deux lel imin. W b nafs ettari9a, la courbe mta3 la parenthèse x moins alpha, au carré hiya l'image de P par la translation de vecteur alpha i.

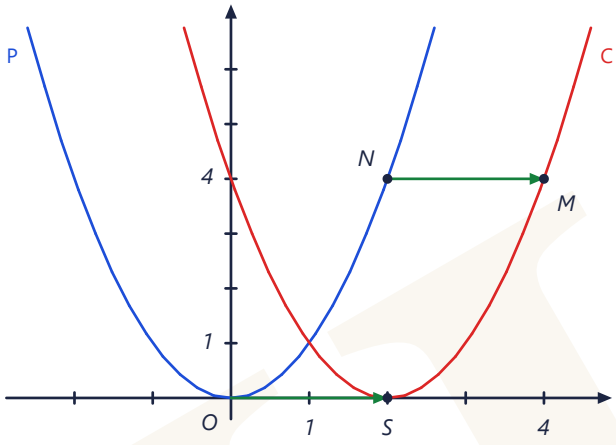
توّة نبدّلو شويّة : w la courbe ، f de x égale (x moins deux) au carré . C متاعها ناخذو point M de coordonnées x et y . M على C معناها w . y égale (x moins deux) au carré هذا بالضبط معناه الـ point N ، l'abscisse اللي متاعو x moins deux w l'ordonnée متاعو y ، على w . la parabole P من N لـ M ، نزيدو deux للـ abscisse برك : M هو l'image de N par la translation de vecteur deux i . إذن C هي l'image de P par la translation : هاذي translation نفس la parabole ، محرّكة بـ deux لليمين . w بنفس الطريقة la courbe ، la parenthèse متاع x moins alpha, au carré هي l'image de P par la translation de vecteur alpha i .

Changeons un peu : f de x égale (x moins deux) au carré, de courbe C. Prenons un point M de coordonnées x et y. M est sur C signifie y égale (x moins deux) au carré. Et c'est exactement dire que le point N, d'abscisse x moins deux et d'ordonnée y, est sur la parabole P. De N à M, on ajoute seulement deux à l'abscisse : M est l'image de N par la translation de vecteur deux i. Donc C est l'image de P par cette translation : la même parabole, déplacée de deux vers la droite. De la même façon, la courbe de la parenthèse x moins alpha, au carré est l'image de P par la translation de vecteur alpha i.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2$. On désigne par C sa courbe représentative et par P la parabole d'équation $y = x^2$.

1. Soit $M(x;y)$ un point du plan. Montre que $M(x;y)$ appartient à C équivaut à $N(x-2;y)$ appartient à P.
2. Déduis-en que C est l'image de P par une translation dont tu préciseras le vecteur.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-\alpha)^2$, où α est un réel donné, et P' sa courbe. Montre que P' est l'image de la parabole P par la translation de vecteur $\alpha\vec{i}$. On admet que P' est une parabole : détermine son sommet et son axe.

Maths à la carte
ABDELHADER HAMMAMI



C est l'image de P par la translation de vecteur 2i.

Un repère orthogonal d'origine O. En bleu, la parabole P d'équation y égale x au carré, de sommet O. Au palier 2, en rouge, la courbe C de la fonction qui à x associe (x moins 2) au carré : c'est la même parabole, déplacée de 2 vers la droite, de sommet S d'abscisse 2 sur l'axe des abscisses. Deux flèches vertes égales, de O vers S et du point N de P, d'abscisse 2 et d'ordonnée 4, vers le point M de C, d'abscisse 4 et d'ordonnée 4, montrent la translation de vecteur 2 i.

EXEMPLE TRAITÉ

Montre que la courbe C de f est l'image de la parabole P par une translation, et donne son vecteur.

Un point de C — Le point M appartient à C quand son ordonnée y est l'image de son abscisse x.

$$M(x;y) \in C \iff y = (x-2)^2$$

Un point de P — Le point N a pour abscisse $x-2$ et pour ordonnée y : il est sur P quand son ordonnée est le carré de son abscisse. C'est la même condition.

$$N(x-2;y) \in P \iff y = (x-2)^2$$

La translation — De N à M, l'abscisse augmente de 2 et l'ordonnée ne change pas : le point M est l'image de N par la translation de vecteur $2\vec{i}$.

$$\overrightarrow{NM} = 2\vec{i}$$

Le cas général — Avec α à la place de 2, le même calcul donne la translation de vecteur $\alpha\vec{i}$: le sommet de P' est l'image de O, et son axe est la droite d'équation $x = \alpha$.

> C est l'image de P par la translation de vecteur $2\vec{i}$

À ne pas faire : La courbe de $(x-2)^2$ est la parabole P décalée de 2 vers la gauche — Elle est décalée de 2 vers la droite : translation de vecteur $2\vec{i}$. Le sommet est le point où $(x-2)^2$ s'annule, c'est-à-dire en $x = 2$, et non en $x = -2$.

7. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = a(x − α)²

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété. a réel non nul, w alpha réel. La courbe mta3 f de x égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré hiya parabole, le sommet mte3ha S de coordonnées alpha et zéro, w l'axe de symétrie mte3ha la droite d'équation x égale alpha. Chouf el figure : quatre paraboles, el koll (x moins un) au carré madhrouba fi un, trois, moins deux, w un demi. 3andhom el koll nafs le sommet, de coordonnées un et zéro, w nafs l'axe, x égale un. a ybaddel el fat7a berk : lel fou9 walla lel wta, dhay9a walla wes3a.

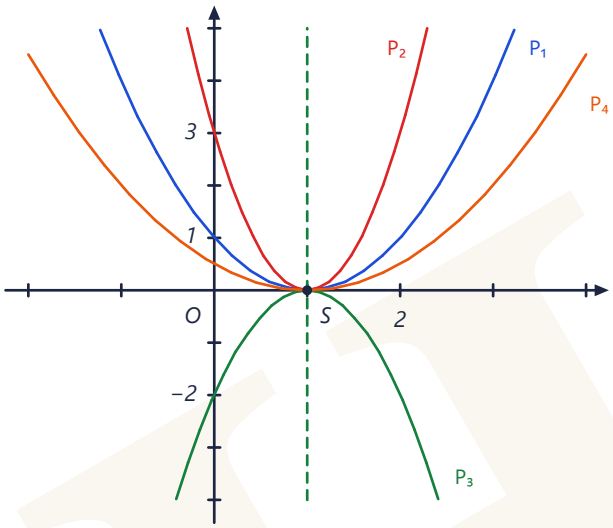
f de x égale a fois la parenthèse x moins متاع la propriété . a réel non nul ، w alpha réel . la courbe هاذي S de coordonnées alpha et zéro ، w l'axe de symétrie متاعها parabole ، le sommet هي alpha, au carré au carré (x moins un) الكل ، figure : quatre paraboles الـ شوف . la droite d'équation x égale alpha متاعها le sommet ، de coordonnées un et zéro نفس الكل عندهم . un ، trois ، moins deux ، w un demi مضروبة في w ، نفس a . x égale un ، l'axe يبدّل الفتحة برك : للفوق ولّا للوطا ، ضيّقة ولّا واسعة .

Voici la propriété. a est un réel non nul, et alpha un réel. La courbe de f de x égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré est une parabole de sommet S de coordonnées alpha et zéro, et d'axe de symétrie la droite d'équation x égale alpha. Regarde la figure : quatre paraboles, toutes (x moins un) au carré multiplié par un, trois, moins deux et un demi. Elles ont toutes le même sommet, de coordonnées un et zéro, et le même axe, x égale un. a ne change que l'ouverture : vers le haut ou vers le bas, étroite ou large.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel non nul et α un réel.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-\alpha)^2$ est une **parabole de sommet $S(\alpha; 0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.**

Maths à la carte
ABDELKADER HAMM



Quatre paraboles y = a(x − 1)² : même sommet, même axe.

Un repère orthogonal d'origine O et quatre paraboles qui ont le même sommet S, d'abscisse 1 sur l'axe des abscisses, et le même axe, la droite verticale d'équation x égale 1 tracée en pointillés verts. P1, en bleu, P2, en rouge et plus resserrée, et P4, en orange et plus large, sont tournées vers le haut ; P3, en vert, est tournée vers le bas. Au point d'abscisse 2, leurs ordonnées sont 1 pour P1, 3 pour P2, moins 2 pour P3 et un demi pour P4.

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 \quad (a \neq 0)$$

$$\text{sommet : } S(\alpha;0) \qquad \text{axe : } x = \alpha$$

EXEMPLE TRAITÉ

Détermine le sommet et l'axe de la parabole P_1 d'équation $y = (x-1)^2$. Puis fais de même pour $P_2 : y = 3(x-1)^2$, $P_3 : y = -2(x-1)^2$ et $P_4 : y = \dfrac{(x-1)^2}{2}$.

La première parabole — Ici $a = 1$ et $\alpha = 1$: le sommet est le point $S(1;0)$, et l'axe est la droite d'équation $x = 1$.

$S(1;0)$; axe : $x = 1$

Les trois autres — Seul a change : les quatre paraboles ont le même sommet et le même axe. La troisième, où a est négatif, est tournée vers le bas.

Un point de chacune — Pour les tracer, on calcule l'ordonnée du point d'abscisse 2 : elle vaut a.

1 ; 3 ; -2 ; $\frac{1}{2}$

$S(1;0)$; axe : $x = 1$

À ne pas faire : $y = (x+2)^2$: sommet $S(2;0)$ — $y = (x+2)^2$: sommet $S(-2;0)$, axe $x = -2$. On lit α dans $(x-\alpha)^2$: $x + 2$, c'est x moins l'opposé de 2, donc $\alpha = -2$.

À ne pas faire : $y = x^2 + 6x + 9$ n'est pas de ce type — $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$: sommet $S(-3;0)$, axe $x = -3$. Une identité remarquable peut cacher la forme $a(x-\alpha)^2$: on factorise avant de conclure.

---

8. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la courbe de x² + 3/2

CE QU'IL DIT

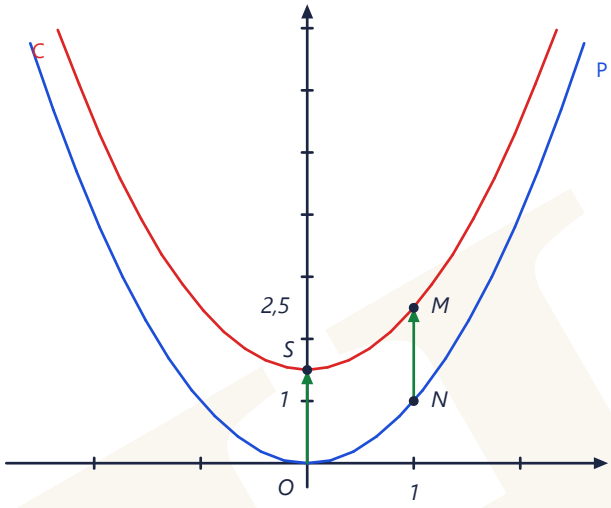
W ken nzidou nombre ? f de x égale x au carré plus trois demis, w la courbe mte3ha C. M de coordonnées x et y 3la C ma3neha y égale x au carré plus trois demis, ya3ni y moins trois demis égale x au carré. W hedha ma3neh el point N, elli l'abscisse mte3ou x w l'ordonnée mte3ou y moins trois demis, 3la la parabole P. Men N l M, nzidou trois demis lel ordonnée berk : C hiya l'image de P par la translation de vecteur trois demis j. Nafs la parabole, tal3a b trois demis. W b nafs ettari9a, la courbe mta3 x au carré plus bêta hiya l'image de P par la translation de vecteur bêta j.

C . M de coordonnées متاعها f de x égale x au carré plus trois demis ، w la courbe ؟ nombre كان نزيدو w هذا y moins trois demis égale x au carré . w يعني ، y égale x au carré plus trois demis معناها C على x et y من . la parabole P على ، y moins trois demis متاعو x w l'ordonnée متاعو l'abscisse اللي ، point N معناه الـ l'image de P par la translation de vecteur trois demis j هي C : برك ordonnée للـ trois demis نزيدو ، M لـ N l'image هي x au carré plus bêta متاع la courbe ، بنفس الطريقة trois demis . w طالعة بـ ، la parabole نفس . de P par la translation de vecteur bêta j

Et si on ajoute un nombre ? f de x égale x au carré plus trois demis, de courbe C. M de coordonnées x et y est sur C signifie y égale x au carré plus trois demis, c'est-à-dire y moins trois demis égale x au carré. Cela veut dire que le point N, d'abscisse x et d'ordonnée y moins trois demis, est sur la parabole P. De N à M, on ajoute seulement trois demis à l'ordonnée : C est l'image de P par la translation de vecteur trois demis j. La même parabole, montée de trois demis. De la même façon, la courbe de x au carré plus bêta est l'image de P par la translation de vecteur bêta j.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{2}$. On désigne par C sa courbe représentative et par P la parabole d'équation $y = x^2$.

1. Soit $M(x;y)$ un point du plan. Montre que $M(x;y)$ appartient à C équivaut à $N\left(x; y - \dfrac{3}{2}\right)$ appartient à P.
2. Déduis-en que C est l'image de P par une translation dont tu préciseras le vecteur.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + \beta$, où β est un réel donné, et P' sa courbe. Montre que P' est l'image de la parabole P par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$. On admet que P' est une parabole : détermine son sommet et son axe.



C est l'image de P par la translation de vecteur (3/2)j.

Un repère orthogonal d'origine O. En bleu, la parabole P d'équation y égale x au carré, de sommet O. Au palier 2, en rouge, la courbe C de la fonction qui à x associe x au carré plus trois demis : c'est la même parabole, montée de 1,5, de sommet S d'ordonnée 1,5 sur l'axe des ordonnées. Deux flèches vertes égales, verticales, de O vers S et du point N de P, d'abscisse 1 et d'ordonnée 1, vers le point M de C, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2,5, montrent la translation de vecteur trois demis j.

EXEMPLE TRAITÉ

Montre que la courbe C de f est l'image de la parabole P par une translation, et donne son vecteur.

Un point de C — Le point M appartient à C quand son ordonnée est l'image de son abscisse. On retranche $\frac{3}{2}$ aux deux membres.

$y = x^2 + \frac{3}{2} \iff y - \frac{3}{2} = x^2$

Un point de P — La dernière égalité dit que le point N, de même abscisse x et d'ordonnée $y - \frac{3}{2}$, est sur P.

$M(x;y) \in C \iff N\left(x; y - \frac{3}{2}\right) \in P$

La translation — De N à M, l'abscisse ne change pas et l'ordonnée augmente de $\frac{3}{2}$: le point M est l'image de N par la translation de vecteur $\frac{3}{2}\vec{j}$.

$\overrightarrow{NM} = \frac{3}{2}\vec{j}$

Le cas général — Avec β à la place de $\frac{3}{2}$, le même calcul donne la translation de vecteur $\beta\vec{j}$: le sommet de P' est l'image de O, et son axe reste la droite d'équation $x = 0$.

C est l'image de P par la translation de vecteur $\frac{3}{2}\vec{j}$

À ne pas faire : La courbe de $x^2 + \frac{3}{2}$ est la parabole P décalée vers la droite — Elle est décalée vers le haut : translation de vecteur $\frac{3}{2}\vec{j}$. Ajouter un nombre à $f(x)$ change l'ordonnée de chaque point, pas son abscisse.

9. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = x² + β

CE QU'IL DIT

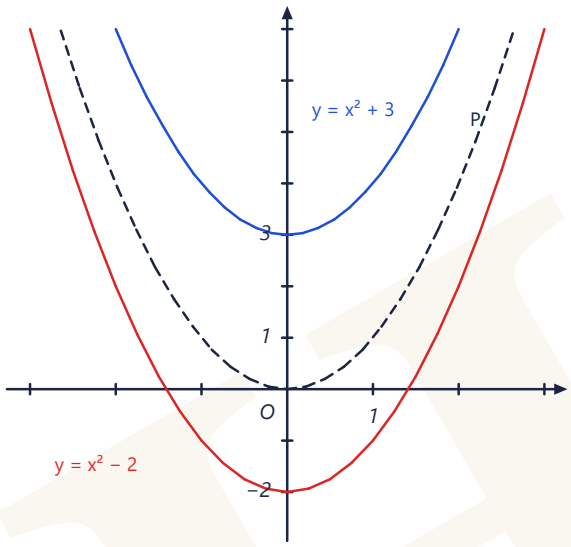
Hedhi la propriété. bêta réel. La courbe mta3 f de x égale x au carré plus bêta hiya parabole, le sommet mte3ha S de coordonnées zéro et bêta, w l'axe de symétrie mte3ha la droite d'équation x égale zéro. Ya3ni le sommet yo93od 3la l'axe des ordonnées, w yatla3 walla yahbet b bêta. Mithel : y égale x au carré plus trois, le sommet mte3ha de coordonnées zéro et trois. W y égale x au carré moins deux, le sommet mte3ha de coordonnées zéro et moins deux.

parabole ، le sommet هي f de x égale x au carré plus bêta متاع la propriété . bêta réel . la courbe هاذي يعني . la droite d'équation x égale zéro متاعها S de coordonnées zéro et bêta ، w l'axe de symétrie متاعها y égale x au carré plus trois ، le : مثال . bêta بـ يطلع ولّا يهبط l'axe des ordonnées ، w يقعد على le sommet de متاعها de coordonnées zéro et trois . w y égale x au carré moins deux ، le sommet متاعها sommet . coordonnées zéro et moins deux

Voici la propriété. bêta est un réel. La courbe de f de x égale x au carré plus bêta est une parabole de sommet S de coordonnées zéro et bêta, et d'axe de symétrie la droite d'équation x égale zéro. Le sommet reste donc sur l'axe des ordonnées, et monte ou descend de bêta. Exemple : y égale x au carré plus trois a pour sommet le point de coordonnées zéro et trois. Et y égale x au carré moins deux a pour sommet le point de coordonnées zéro et moins deux.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit β un réel.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \beta$ est une **parabole de sommet $S(0; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.**



y = x² + β : le sommet glisse sur l'axe des ordonnées.

Un repère orthogonal d'origine O. En pointillés, la parabole P d'équation y égale x au carré, de sommet O. En bleu, la parabole d'équation y égale x au carré plus 3 : la même, montée de 3, de sommet le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 3. En rouge, la parabole d'équation y égale x au carré moins 2 : la même, descendue de 2, de sommet le point d'abscisse 0 et d'ordonnée moins 2. Les trois ont pour axe l'axe des ordonnées.

$$f(x) = x^2 + \beta$$

sommet : $S(0;\beta)$ axe : $x = 0$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans chacun des cas, détermine le sommet et l'axe de la parabole : a) $y = x^2 + 3$; b) $y = x^2 - 2$; c) $y = x^2 - \frac{9}{4}$.

Premier cas — On lit $\beta = 3$: la parabole est celle de x^2, montée de 3. Son sommet est le point $A(0;3)$.

$A(0;3)$

Deuxième cas — On lit $\beta = -2$: la parabole est descendue de 2. Son sommet est le point $B(0;-2)$.

$B(0;-2)$

Troisième cas — On lit $\beta = -\frac{9}{4}$. Cette parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$, car le carré de $\frac{3}{2}$ est $\frac{9}{4}$.

$D\left(0;-\frac{9}{4}\right)$

L'axe — Dans les trois cas, l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées.

sommets : $A(0;3)$, $B(0;-2)$, $D\left(0;-\frac{9}{4}\right)$; axe : $x=0$

À ne pas faire : $y=x^2-2$: sommet $S(-2;0)$ — $y=x^2-2$: sommet $S(0;-2)$. β s'ajoute à l'ordonnée : c'est y qui change, et le sommet reste sur l'axe des ordonnées.

10. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la courbe de $2x^2 + 4x - 1$

CE QU'IL DIT

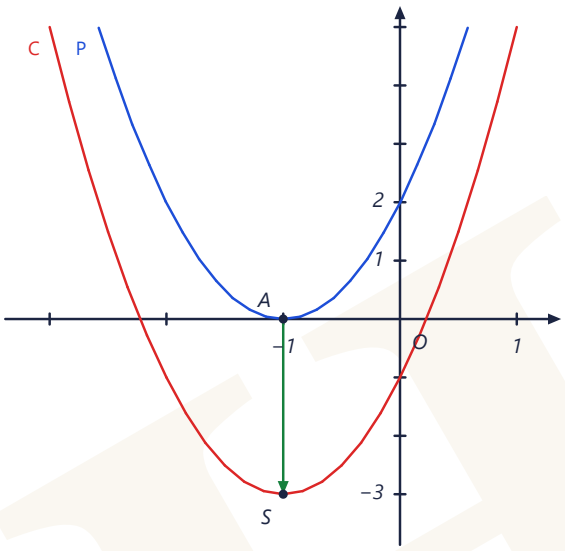
Tawa trinôme kemel : g de x égale deux x au carré plus quatre x moins un. El 7ila : nektbouh b tari9a o5ra. Deux fois (x plus un) au carré moins trois : ken tdévelopper, tal9a nafs el trinôme. Idhan nabdew men la parabole P d'équation y égale deux fois (x plus un) au carré, w nna9sou trois men koll ordonnée : la courbe C hiya l'image de P par la translation de vecteur moins trois j. W hedha yemchi m3a koll trinôme : a x au carré plus b x plus c yetkteb a fois (x moins p) au carré plus q, b p égale moins b sur deux a.

deux . نكتبوه بطريقة أخرى : الحيلة . g de x égale deux x au carré plus quatre x moins un : كامل trinôme توّة
la parabole P إذن نبداو من . trinôme الـ تلقى نفس ، développer تـ كان : fois (x plus un) au carré moins trois
هي ordonnée : la courbe C من كل trois ننقصو d'équation y égale deux fois (x plus un) au carré ، w
trinôme : a x au carré plus b x هذا يمشي مع كل l'image de P par la translation de vecteur moins trois j . w
. p égale moins b sur deux a بـ ، a fois (x moins p) au carré plus q يتكتب plus c

Maintenant, un trinôme complet : g de x égale deux x au carré plus quatre x moins un. L'astuce : l'écrire autrement. Deux fois (x plus un) au carré moins trois : si tu développes, tu retrouves le même trinôme. On part donc de la parabole P d'équation y égale deux fois (x plus un) au carré, et on retranche trois à chaque ordonnée : la courbe C est l'image de P par la translation de vecteur moins trois j. Et cela marche pour tout trinôme : a x au carré plus b x plus c s'écrit a fois (x moins p) au carré plus q, avec p égale moins b sur deux a.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^2+4x-1$. On désigne par C sa courbe représentative.

1. Vérifie que, pour tout réel x, $2x^2+4x-1=2(x+1)^2-3$.
2. Construis la parabole P d'équation $y=2(x+1)^2$, puis la courbe C.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$. Écris $f(x)$ sous la forme $f(x)=a(x-p)^2+q$, où p et q sont deux réels que tu détermineras en fonction de a, b et c. On admet que la courbe représentative de f est une parabole : détermine son sommet et son axe.



De P à C : la translation de vecteur −3j.

Un repère orthogonal d'origine O. En bleu, la parabole P d'équation y égale 2 fois (x plus 1) au carré, de sommet A d'abscisse moins 1 sur l'axe des abscisses. Au palier 2, en rouge, la courbe C de la fonction g : la même parabole, descendue de 3, de sommet S d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 3. Une flèche verte verticale, de A vers S, montre la translation de vecteur moins 3 j. La courbe C coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée moins 1.

EXEMPLE TRAITÉ

Vérifie l'égalité, explique comment passer de P à C, puis écris ax^2+bx+c sous la forme $a(x-p)^2+q$.

Développer — On développe le second membre, et on retrouve le trinôme.

$2(x+1)^2-3=2(x^2+2x+1)-3=2x^2+4x-1$

Les deux courbes — La parabole P a pour sommet le point $A(-1;0)$. On passe de P à C en retranchant 3 à chaque ordonnée : c'est la translation de vecteur $-3\vec{j}$, et le sommet de C est le point $S(-1;-3)$.

Le cas général — On met a en facteur dans les deux premiers termes, puis on complète le carré.

$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$

$p=-\frac{b}{2a}\quad;\quad q=c-\frac{b^2}{4a}$

Sommet et axe — La courbe de f est une parabole dont le sommet a pour abscisse p et pour ordonnée q, et dont l'axe est la droite d'équation $x=p$. On remarque que q est l'image de p.

$$f(x)=a(x-p)^2+q \quad \text{avec} \quad p=-\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad q=f(p)$$

À ne pas faire : $2x^2+4x-1=2(x+2)^2-1$ — $2x^2+4x-1=2(x+1)^2-3$. On met d'abord 2 en facteur : $2x^2+4x$ est le double de x^2+2x, et c'est x^2+2x qui est le début du carré de $x+1$.

11. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = ax² + bx + c

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété el kbira mta3 el chapitre. a w b w c réels, w a non nul. f de x égale a x au carré plus b x plus c dima tetkteb a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta. W la courbe mte3ha parabole, le sommet mte3ha S de coordonnées alpha et bêta, w l'axe de symétrie mte3ha la droite d'équation x égale alpha. Bech tal9ahom : alpha égale moins b sur deux a, w bêta égale f de alpha. W le signe de a y9ollek la parabole ma7loula lel fou9 walla lel wta.

chapitre . a w b w c réels ، w a non nul . f de x égale a x au carré plus b x الكبيرة متاع الـ la propriété هاذي parabole ، le متاعها a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta . w la courbe ديما تتكتب plus c la droite d'équation x égale متاعها S de coordonnées alpha et bêta ، w l'axe de symétrie متاعها sommet la يقلّك alpha égale moins b sur deux a ، w bêta égale f de alpha . w le signe de a : باش تلقاهم . alpha محلولة للفوق ولّا للوطا parabole .

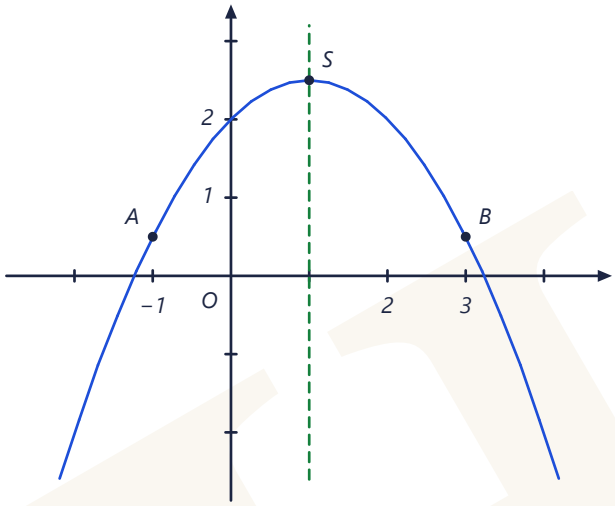
Voici la grande propriété du chapitre. a, b et c sont des réels, avec a non nul. f de x égale a x au carré plus b x plus c s'écrit toujours a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta. Et sa courbe est une parabole de sommet S de coordonnées alpha et bêta, et d'axe de symétrie la droite d'équation x égale alpha. Pour les trouver : alpha égale moins b sur deux a, et bêta égale f de alpha. Et le signe de a te dit si la parabole est tournée vers le haut ou vers le bas.

Soit a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux réels.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est une **parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.**

En pratique, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. L'écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique du trinôme.



La parabole y = −(1/2)x² + x + 2.

Un repère orthonormé d'origine O. La parabole d'équation y égale moins un demi de x au carré plus x plus 2 est tournée vers le bas. Son sommet est le point S d'abscisse 1 et d'ordonnée 2,5, et son axe est la droite verticale d'équation x égale 1, tracée en pointillés verts. Elle passe par les points A, d'abscisse moins 1, et B, d'abscisse 3, tous deux d'ordonnée 0,5, et coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{sommet : } S(\alpha;\beta) \qquad \text{axe : } x = \alpha$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Construis la parabole d'équation $y = -\dfrac{x^2}{2} + x + 2$.

L'abscisse du sommet — Ici $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 1$, donc $2a = -1$.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-1} = 1$

L'ordonnée du sommet — C'est l'image de 1.

$\beta = -\frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{5}{2}$

La forme canonique — On peut vérifier en développant le second membre.

$-\frac{x^2}{2} + x + 2 = \frac{5}{2} - \frac{(x-1)^2}{2}$

Des points — Comme a est négatif, la parabole est tournée vers le bas. Elle passe par les points A et B, d'abscisses -1 et 3 et de même ordonnée $\dfrac{1}{2}$, symétriques par rapport à l'axe.

$$S\left(1;\tfrac{5}{2}\right) \quad ; \quad \text{axe : } x = 1$$

À ne pas faire : $\alpha = \dfrac{b}{2a}$ — $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. En développant $a(x-\alpha)^2$, le terme en x a pour coefficient $-2a\alpha$: il doit être égal à b, d'où le signe moins.

À ne pas faire : $y = -x^2 + 4x - 2$: l'ordonnée du sommet est $c = -2$ — $\alpha = 2$ et $\beta = f(2) = 2$: le sommet est $S(2;2)$. c est l'ordonnée du point d'abscisse 0, pas celle du sommet : β se calcule, c'est l'image de α.

12. APPLICATION

Exemple : à chaque fonction sa parabole

CE QU'IL DIT

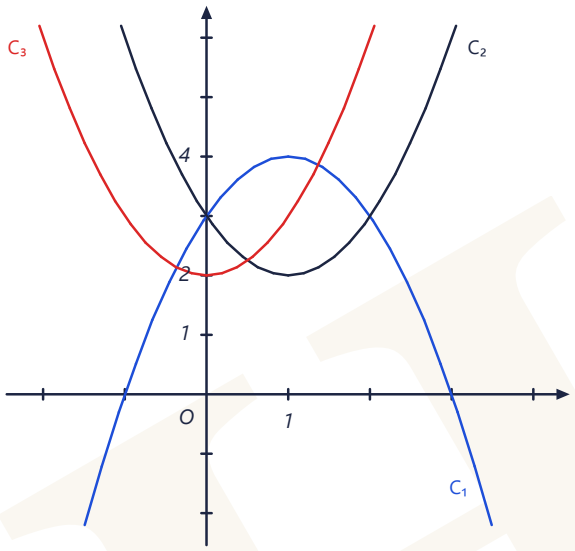
Trois paraboles, w trois fonctions : f de x égale (x moins un) au carré plus deux, g de x égale x au carré plus deux, w h de x égale moins x au carré plus deux x plus trois. Kifech na3rfou ana courbe mta3 ana fonction ? Nlawjou 3la les sommets. f : le sommet de coordonnées un et deux. g : le sommet de coordonnées zéro et deux, 3la l'axe des ordonnées. W h tetkteb moins (x moins un) au carré plus quatre : le sommet de coordonnées un et quatre, w a négatif, idhan ma7loula lel wta. C un hiya el wa7ida el ma7loula lel wta : mta3 h. C trois le sommet mte3ha 3la l'axe des ordonnées : mta3 g. W teb9a C deux mta3 f.

trois paraboles ، w trois fonctions : f de x égale (x moins un) au carré plus deux ، g de x égale x au carré plus deux ، w h de x égale moins x au carré plus deux x plus trois . كيفاش نعرفو أنا متاع courbe أنا les sommets . f : le sommet de coordonnées un et deux . g : le sommet de نلوّجو على ؟ fonction moins (x moins un) au carré plus تتكتب l'axe des ordonnées . w h على ، coordonnées zéro et deux هي الوحيدة C un . إذن محلولة للوطا ، quatre : le sommet de coordonnées un et quatre ، w a négatif . متاع f تبقى C deux g . متاع w : l'axe des ordonnées على متاعها h . C trois le sommet متاع المحلولة للوطا

Trois paraboles, et trois fonctions : f de x égale (x moins un) au carré plus deux, g de x égale x au carré plus deux, et h de x égale moins x au carré plus deux x plus trois. Comment savoir quelle courbe va avec quelle fonction ? On cherche les sommets. f : sommet de coordonnées un et deux. g : sommet de coordonnées zéro et deux, sur l'axe des ordonnées. Et h s'écrit moins (x moins un) au carré plus quatre : sommet de coordonnées un et quatre, et a négatif, donc tournée vers le bas. C un est la seule tournée vers le bas : c'est celle de h. C trois a son sommet sur l'axe des ordonnées : c'est celle de g. Il reste C deux pour f.

Les trois paraboles C_1, C_2 et C_3 de la figure sont les courbes représentatives de trois fonctions trinômes f, g et h telles que $f(x) = (x-1)^2 + 2$, $g(x) = x^2 + 2$ et $h(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Associe chaque fonction à sa courbe représentative.



Trois paraboles, trois fonctions trinômes.

Un repère orthogonal d'origine O et trois paraboles. C1, en bleu, est tournée vers le bas : son sommet a pour abscisse 1 et pour ordonnée 4, et elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3. C2, en noir, est tournée vers le haut : son sommet a pour abscisse 1 et pour ordonnée 2. C3, en rouge, est tournée vers le haut : son sommet est sur l'axe des ordonnées, à l'ordonnée 2.

EXEMPLE TRAITÉ

Associe chacune des fonctions f, g et h à sa parabole.

Deux sommets — La fonction f est déjà sous forme canonique : sa parabole a pour sommet le point d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Celle de g a pour sommet le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 2.

Le trinôme h — On complète le carré : le sommet a pour abscisse 1 et pour ordonnée 4, et $a = -1$ est négatif.

$h(x) = -(x^2 - 2x) + 3 = -(x-1)^2 + 4$

Les courbes — La seule parabole tournée vers le bas est celle de h. Celle dont le sommet est sur l'axe des ordonnées est celle de g. La dernière est celle de f.

C_2 est la courbe de f ; C_3 celle de g ; C_1 celle de h

À ne pas faire : $h(x) = -x^2 + 2x + 3$: $c = 3$, donc le sommet a pour ordonnée 3 — $h(x) = -(x-1)^2 + 4$: le sommet est le point d'abscisse 1 et d'ordonnée 4. 3 est l'ordonnée du point où la courbe coupe l'axe des ordonnées, car l'image de 0 est 3.

13. APPLICATION

Exemple : lire sommet, axe et équation

CE QU'IL DIT

Tawa bel 3aks : 3andna les paraboles, w nlawjou 3la les équations. Ettari9a dima hiya hiya : na9raw le sommet de coordonnées alpha et bêta, nektbou y égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta, w nal9aw a b point e5er men la parabole. Mithel : la première parabole, le sommet mte3ha S de coordonnées moins deux et moins deux, w tet3adda men A de coordonnées zéro et deux. Quatre a moins deux égale deux, idhan a égale un. L'équation : y égale (x plus deux) au carré moins deux.

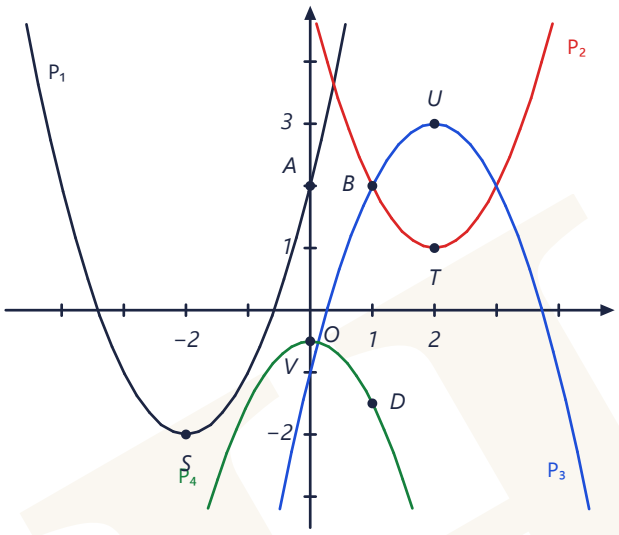
le sommet de نقراو : الطريقة ديما هي هي . les équations على نلوّجو les paraboles ، w عندنا : توّة بالعكس نلقاو y égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta ، w نكتبو ، coordonnées alpha et bêta S de coordonnées moins متاعها la première parabole ، le sommet : مثال . la parabole من آخر point بـ a إذن ، A de coordonnées zéro et deux . quatre a moins deux égale deux من تتعدّى deux et moins deux ، w . a égale un . l'équation : y égale (x plus deux) au carré moins deux

Maintenant l'inverse : on a les paraboles, et on cherche les équations. La méthode est toujours la même : on lit le sommet de coordonnées alpha et bêta, on écrit y égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta, et on trouve a avec un autre point de la parabole. Exemple : la première parabole a pour sommet S de coordonnées moins deux et moins deux, et passe par A de coordonnées zéro et deux. Quatre a moins deux égale deux, donc a égale un. L'équation : y égale (x plus deux) au carré moins deux.

Dans la figure, P_1, P_2, P_3 et P_4 sont quatre paraboles. Pour chacune d'elles, précise le sommet, l'axe et l'équation.

On lit sur la figure : P_1 a pour sommet $S(-2;-2)$ et passe par $A(0;2)$; P_2 a pour sommet $T(2;1)$ et passe par $B(1;2)$; P_3 a pour sommet $U(2;3)$ et passe aussi par $B(1;2)$; P_4 a pour sommet $V\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ et passe par $D\left(1;-\frac{3}{2}\right)$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Quatre paraboles à identifier.

Un repère orthonormé d'origine O et quatre paraboles. P1, en noir, tournée vers le haut, a pour sommet S d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 2, et passe par le point A d'abscisse 0 et d'ordonnée 2. P2, en rouge, tournée vers le haut, a pour sommet T d'abscisse 2 et d'ordonnée 1, et passe par le point B d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. P3, en bleu, tournée vers le bas, a pour sommet U d'abscisse 2 et d'ordonnée 3, et passe aussi par B. P4, en vert, tournée vers le bas, a pour sommet V d'abscisse 0 et d'ordonnée moins 0,5, et passe par le point D d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 1,5.

EXEMPLE TRAITÉ

Donne le sommet, l'axe et l'équation de chacune des quatre paraboles.

La méthode — On écrit $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec les coordonnées du sommet, puis on trouve a grâce à un autre point de la parabole.

Première parabole — Sommet $S(-2;-2)$, axe $x = -2$. Avec le point $A(0;2)$: $4a - 2 = 2$, donc $a = 1$.

$P_1 : y = (x+2)^2 - 2$

Deuxième parabole — Sommet $T(2;1)$, axe $x = 2$. Avec le point $B(1;2)$: $a + 1 = 2$, donc $a = 1$.

$P_2 : y = (x-2)^2 + 1$

Troisième parabole — Sommet $U(2;3)$, axe $x = 2$. Avec le point $B(1;2)$: $a + 3 = 2$, donc $a = -1$.

$P_3 : y = -(x-2)^2 + 3$

Quatrième parabole — Sommet $V\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, axe $x = 0$. Avec le point $D\left(1;-\frac{3}{2}\right)$: $a - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$, donc $a = -1$.

$P_4 : y = -x^2 - \frac{1}{2}$

À ne pas faire : Le sommet suffit pour écrire l'équation d'une parabole — Il faut aussi un autre point, pour trouver a. Toutes les paraboles d'équation $y = a(x-2)^2 + 1$ ont le même sommet $T(2;1)$: c'est le point

B qui fixe $a = 1$.

14. MÉTHODE

Trouver l'équation d'une parabole

CE QU'IL DIT

Hedhi la méthode, 5oudhha m3ak. Bech tal9a l'équation mta3 parabole, yelzmek zouz 7ajet : le sommet S de coordonnées alpha et bêta, w point A men la parabole. Le sommet ya3tik la forme : y égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta, w l'axe : x égale alpha. W el point A ya3tik a : tbaddel x w y b les coordonnées mte3ou, w t7ell l'équation. Mithel : S de coordonnées moins un et un, w A de coordonnées moins trois et neuf. Neuf égale quatre a plus un, idhan a égale deux.

هاذي la méthode ، خوذها معاك . باش تلقى l'équation متاع parabole ، يلزمك زوز حاجات : le sommet S de
la forme : y égale a fois la يعطيك la parabole . le sommet من coordonnées alpha et bêta ، w point A
x w y تبدّل : a يعطيك point A الـ parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta ، w l'axe : x égale alpha . w
S de coordonnées moins un et un ، w A de : مثال . l'équation تحلّ w ، متاعو les coordonnées بـ
. a égale deux إذن ، coordonnées moins trois et neuf . neuf égale quatre a plus un

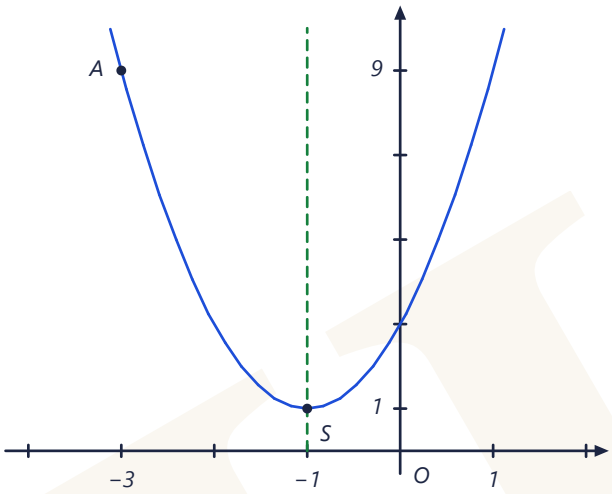
Voici la méthode, garde-la. Pour trouver l'équation d'une parabole, il te faut deux choses : le sommet S de coordonnées alpha et bêta, et un point A de la parabole. Le sommet te donne la forme : y égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta, et l'axe : x égale alpha. Et le point A te donne a : tu remplaces x et y par ses coordonnées, et tu résous l'équation. Exemple : S de coordonnées moins un et un, et A de coordonnées moins trois et neuf. Neuf égale quatre a plus un, donc a égale deux.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit P la parabole de sommet S, d'axe D et passant par le point A.

Méthode. Si le sommet est $S(\alpha ; \beta)$, l'axe est la droite D d'équation $x = \alpha$, et l'équation de P est de la forme $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$. On trouve a en écrivant que les coordonnées de A vérifient cette équation.

Détermine l'équation de la parabole P dans chacun des cas suivants :

- a) $S(0 ; 2)$, $D : x = 0$ et $A(1 ; 3)$;
- b) $S(3 ; 0)$, $D : x = 3$ et $A(4 ; 1)$;
- c) $S(-1 ; 1)$, $D : x = -1$ et $A(-3 ; 9)$;
- d) $S(2 ; -3)$, $D : x = 2$ et $A(0 ; -1)$.



La parabole de sommet S(−1 ; 1) passant par A(−3 ; 9).

Un repère orthogonal d'origine O. La parabole de sommet S, d'abscisse moins 1 et d'ordonnée 1, est tournée vers le haut ; son axe est la droite verticale d'équation x égale moins 1, tracée en pointillés verts. Elle passe par le point A d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 9, et, par symétrie, par le point d'abscisse 1 et d'ordonnée 9.

PARABOLE DE SOMMET S(A ; B)

$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

EXEMPLE TRAITÉ

Détermine l'équation de la parabole P dans les quatre cas.

Premier cas — La forme est $y = ax^2 + 2$, et le point A donne $a + 2 = 3$.

$a = 1 \quad ; \quad y = x^2 + 2$

Deuxième cas — La forme est $y = a(x-3)^2$, et le point A donne $a = 1$.

$a = 1 \quad ; \quad y = (x-3)^2$

Troisième cas — La forme est $y = a(x+1)^2 + 1$. Pour $x = -3$, on a $x + 1 = -2$, dont le carré est 4.

$9 = 4a + 1 \iff a = 2 \quad ; \quad y = 2(x+1)^2 + 1$

Quatrième cas — La forme est $y = a(x-2)^2 - 3$. Pour $x = 0$, on a $x - 2 = -2$, dont le carré est 4.

$-1 = 4a - 3 \iff a = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = \frac{(x-2)^2}{2} - 3$

À ne pas faire : Cas c) : $9 = a(-3-1)^2 + 1$ — $9 = a(-3+1)^2 + 1$. Ici $\alpha = -1$, donc $x - \alpha$ s'écrit $x + 1$: pour $x = -3$, cela fait -2, et non -4.

15. APPLICATION

Exemple : la hauteur d'une balle

CE QU'IL DIT

La parabole nal9awha fi la physique zeda. Koura narmiwha lel fou9 mel 9a3a, w la hauteur mte3ha d de t égale moins quatre virgule neuf t au carré plus quatorze virgule sept t. Nektbouha moins quatre virgule neuf fois la parenthèse t moins un virgule cinq, au carré plus onze virgule zéro vingt-cinq. a négatif : la parabole ma7loula lel wta, w le sommet houwa el point el a3la. Idhan ba3d un virgule cinq seconde, el koura tousel l la hauteur maximale : onze virgule zéro vingt-cinq mètres. W tarja3 lel 9a3a ki t égale trois : el hbout ydoum un virgule cinq seconde.

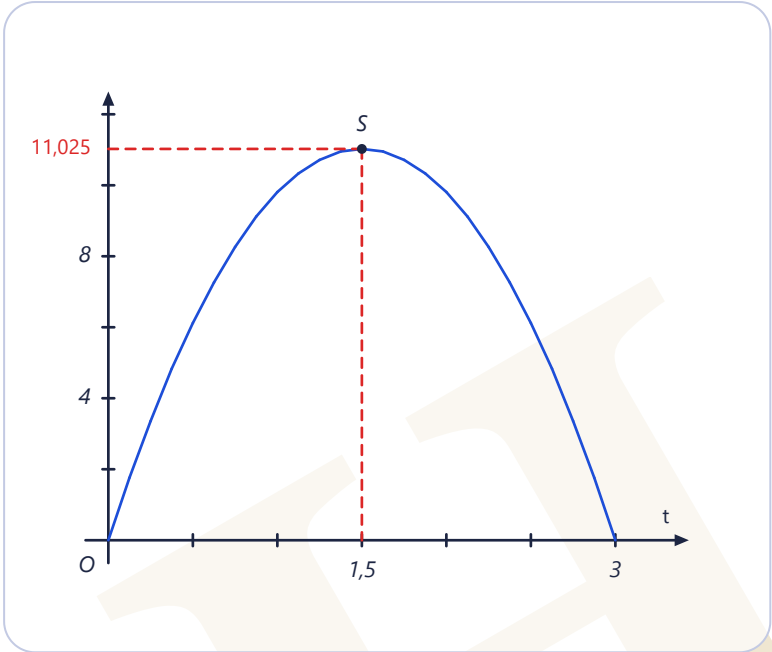
d de t égale متاعها w la hauteur ، كورة نرميوها للفوق من القاعة . زادة la physique نلقاوها في la parabole moins quatre virgule neuf fois نكتبوها . moins quatre virgule neuf t au carré plus quatorze virgule sept t la parenthèse t moins un virgule cinq, au carré plus onze virgule zéro vingt-cinq . a négatif : la parabole la الكورة توصل لـ ، un virgule cinq seconde إذن بعد . الأعلى point الـ هو w le sommet ، محلولة للوطا un الهبوط يدوم : t égale trois كي ترجع للقاعة hauteur maximale : onze virgule zéro vingt-cinq mètres . w . virgule cinq seconde

On retrouve la parabole en physique aussi. On lance une balle vers le haut depuis le sol, et sa hauteur est d de t égale moins quatre virgule neuf t au carré plus quatorze virgule sept t. On l'écrit moins quatre virgule neuf fois la parenthèse t moins un virgule cinq, au carré plus onze virgule zéro vingt-cinq. a est négatif : la parabole est tournée vers le bas, et le sommet est le point le plus haut. Donc au bout de un virgule cinq seconde, la balle atteint sa hauteur maximale : onze virgule zéro vingt-cinq mètres. Et elle revient au sol quand t égale trois : la descente dure un virgule cinq seconde.

Une balle est propulsée verticalement du sol. Elle est alors animée d'un mouvement rectiligne dont la loi horaire est donnée approximativement par $d(t) = -4{,}9t^2 + 14{,}7t$, jusqu'à ce qu'elle touche à nouveau le sol en retombant. Le temps t est en secondes et la hauteur $d(t)$ en mètres.

1. Montre qu'au bout de $1{,}5$ seconde après son lancement, la balle atteint une hauteur maximale. Quelle est cette hauteur ?
2. Combien de temps dure la descente ?

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



La hauteur de la balle en fonction du temps.

Un repère orthogonal : en abscisse le temps t, en secondes, de 0 à 3 ; en ordonnée la hauteur de la balle, en mètres. La courbe est un arc de parabole tourné vers le bas : elle part de l'origine, monte jusqu'au sommet S, d'abscisse 1,5 et d'ordonnée 11,025, puis redescend jusqu'au point d'abscisse 3 sur l'axe des abscisses. Au palier 2, des pointillés rouges lisent le sommet sur les deux axes.

EXEMPLE TRAITÉ

Trouve la hauteur maximale de la balle, puis la durée de sa descente.

La forme canonique — On met $-4{,}9$ en facteur, car $14{,}7$ est le triple de $4{,}9$, puis on complète le carré.

$$d(t) = -4{,}9(t^2 - 3t) = -4{,}9(t - 1{,}5)^2 + 11{,}025$$

Le maximum — Un carré est positif ou nul : la hauteur ne dépasse jamais $11{,}025$ mètres, et elle l'atteint pour $t = 1{,}5$.

$$d(1{,}5) = 11{,}025$$

Le retour au sol — La balle touche le sol quand sa hauteur est nulle, c'est-à-dire pour $t = 0$, au départ, et pour $t = 3$.

$$-4{,}9t(t - 3) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = 3$$

La descente — La balle monte de l'instant 0 à l'instant $1{,}5$, puis descend de l'instant $1{,}5$ à l'instant 3.

$$3 - 1{,}5 = 1{,}5$$

hauteur maximale : 11,025 mètres ; descente : 1,5 seconde

À ne pas faire : La descente dure 3 secondes — Elle dure $3 - 1{,}5 = 1{,}5$ seconde. 3 secondes, c'est tout le vol : la montée et la descente durent chacune $1{,}5$ seconde, par symétrie de la parabole.

16. APPLICATION

Exemple : deux mobiles

CE QU'IL DIT

Zouz mobiles A w B yemchiw 3la axe, trois heures. Les abscisses mte3hom trinômes fi t. Koll so2al ywalli équation walla inéquation du second degré. A fi O : n7ellou x A de t égale zéro, nal9aw t égale un virgule soixante-quinze, w la racine lo5ra négative n5alliwha : t bin zéro w trois. A w B fi nafs el blasa : n7ellou x A de t égale x B de t, ya3ni quatre t au carré moins huit t plus trois égale zéro, w nal9aw t égale zéro virgule cinq w t égale un virgule cinq.

زوز mobiles A w B يمشيو على abscisses . les heures trois ، axe متاعهم trinômes في t . كل سؤال يولّي
ولّا équation du second degré . A في inéquation : O نحلّو zéro égale de t A x ، نلقاو un virgule égale t
نخلّيوها négative الأخرى soixante-quinze ، w la racine : t بين B w A . zéro w trois في نفس البلاصة : نحلّو x A
، w يعني ، de t égale x B de t
. cinq w t égale un virgule cinq
quatre t au carré moins huit t plus trois égale zéro ، نلقاو zéro égale virgule t

Deux mobiles A et B se déplacent sur un axe pendant trois heures. Leurs abscisses sont des trinômes en t. Chaque question devient une équation ou une inéquation du second degré. A en O : on résout x A de t égale zéro, on trouve t égale un virgule soixante-quinze, et on écarte l'autre racine, négative : t est entre zéro et trois. A et B au même endroit : on résout x A de t égale x B de t, c'est-à-dire quatre t au carré moins huit t plus trois égale zéro, et on trouve t égale zéro virgule cinq et t égale un virgule cinq.

Deux mobiles A et B se déplacent durant trois heures sur un axe d'origine O (unité : 1 km). Les positions des deux mobiles sont données par les abscisses x_A et x_B des points M_A et M_B. Les lois horaires des mouvements de A et de B sont données respectivement par $x_A(t) = 8t^2 - 12t - 3{,}5$ et $x_B(t) = 4t^2 - 4t - 6{,}5$, où t est exprimé en heures et $t \in [0;3]$.

1. Où se trouve le mobile A à l'instant $t = 0$? Pour quelles valeurs de t le mobile A se trouve-t-il en O ? À gauche du point O ? À droite du point O ?
2. À quel instant les mobiles A et B sont-ils au même endroit ?
3. À quel instant le mobile B se trouve-t-il en O ? Où se trouve alors le mobile A ?



Le mobile M sur l'axe, repéré par son abscisse x(t).

Un axe horizontal orienté vers la droite, d'origine O. Une petite flèche partant de O donne le vecteur unité i. Plus à droite, un point M représente la position du mobile ; son abscisse est notée x(t).

EXEMPLE TRAITÉ

Réponds aux trois questions sur les mobiles A et B.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

Au départ — À l'instant 0, l'abscisse de A est $-3{,}5$: le mobile A est à $3{,}5$ km à gauche de O.

$x_A(0) = -3{,}5$

Le mobile A en O — On résout $8t^2 - 12t - 3{,}5 = 0$, c'est-à-dire $16t^2 - 24t - 7 = 0$. Le discriminant vaut 1024, le carré de 32.

$t = \frac{24+32}{32} = 1{,}75 \quad \text{ou} \quad t = \frac{24-32}{32} = -0{,}25$

À gauche, à droite — Seule la racine $1{,}75$ est dans $[0;3]$. Le trinôme est négatif entre ses racines : le mobile A est à gauche de O avant l'instant $1{,}75$, et à droite après.

Au même endroit — On écrit que les deux abscisses sont égales : l'équation se réduit à $4t^2 - 8t + 3 = 0$, de discriminant 16.

$t = \frac{8-4}{8} = 0{,}5 \quad \text{ou} \quad t = \frac{8+4}{8} = 1{,}5$

Le mobile B en O — On résout $4t^2 - 4t - 6{,}5 = 0$, c'est-à-dire $8t^2 - 8t - 13 = 0$, de discriminant 480. Seule la racine positive convient.

$t = \frac{8+\sqrt{480}}{16} = \frac{2+\sqrt{30}}{4} \approx 1{,}87$

Où est A alors — À cet instant, $4t^2 = 4t + 6{,}5$. En remplaçant dans l'abscisse de A, on trouve $9{,}5 - 4t$: le mobile A est à environ $2{,}02$ km à droite de O.

$x_A = 9{,}5 - (2 + \sqrt{30}) = 7{,}5 - \sqrt{30} \approx 2{,}02$

À ne pas faire : $t = -0{,}25$ est aussi un instant où le mobile A est en O — Seul $t = 1{,}75$ convient. Le temps t varie dans $[0;3]$: une racine négative n'a pas de sens ici.

17. APPLICATION

Exemple : deux paraboles

CE QU'IL DIT

Zouz paraboles fi nafs le repère. Nabdew b les équations : P un, le sommet mte3ha S de coordonnées deux et quatre, w tet3adda men O : f de x égale moins x au carré plus quatre x. P deux, le sommet mte3ha T de coordonnées moins un et moins un, w tet3adda men A de coordonnées un et un : g de x égale un demi fois (x plus un) au carré moins un. Bech nal9aw les points d'intersection, n7ellou f de x égale g de x : trois x au carré moins six x moins un égale zéro. La lecture ta3ti valeurs approchées berk ; le calcul ya3ti les valeurs exactes.

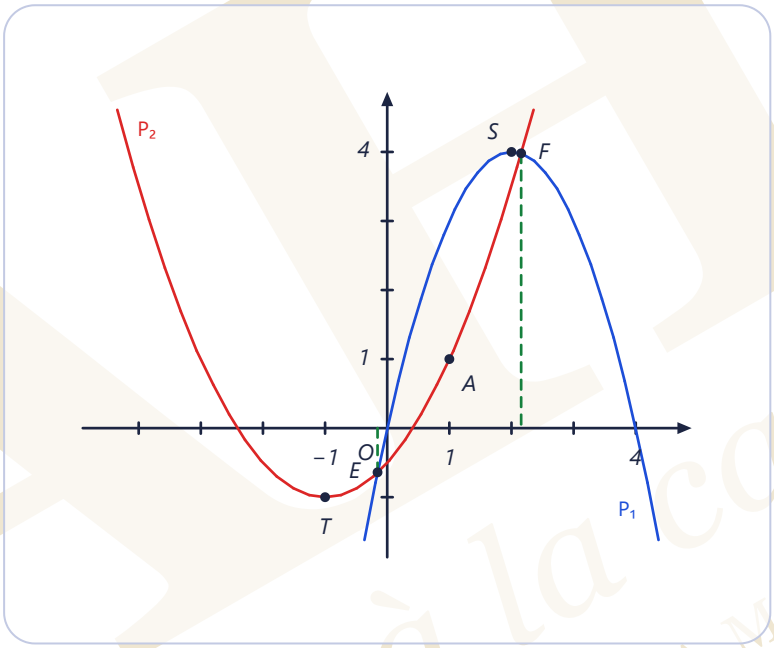
زوز paraboles في نفس الـ repère . نبداو بـ le sommet ، les équations : P un متاعها les coordonnées deux متاعها et quatre ، w تتعدّى من le sommet ، x plus quatre au carré moins x égale de x : f : O متاعها T de coordonnées moins un et moins un ، w تتعدّى من coordonnées un et un : g de x égale un demi fois A de coordonnées . (x plus un) au carré moins un باش نلقاو les points d'intersection ، نحلّو trois x au : x égale g de x f de . la lecture برك ؛ le calcul يعطي les يعطي valeurs approchées carré moins six x moins un égale zéro . valeurs exactes

Deux paraboles dans le même repère. On commence par les équations : P un a pour sommet S de coordonnées deux et quatre, et passe par O : f de x égale moins x au carré plus quatre x. P deux a pour sommet T de coordonnées moins un et moins un, et passe par A de coordonnées un et un : g de x égale un demi fois (x plus un) au carré moins un. Pour trouver les points d'intersection, on résout f de x égale g de x

: trois x au carré moins six x moins un égale zéro. La lecture ne donne que des valeurs approchées ; le calcul donne les valeurs exactes.

Dans la figure, les paraboles P_1 et P_2 sont les courbes représentatives de deux fonctions trinômes f et g. On lit : P_1 a pour sommet $S(2;4)$ et passe par l'origine O ; P_2 a pour sommet $T(-1;-1)$ et passe par $A(1;1)$.

1. À l'aide du graphique, donne l'expression de f et de g en fonction de x.
2. Calcule les coordonnées des points d'intersection des deux paraboles.
3. Résous l'inéquation $f(x) < g(x)$.



Les paraboles P_1 et P_2 des fonctions f et g.

Un repère orthogonal d'origine O et deux paraboles. P1, en bleu, est tournée vers le bas : son sommet est S, d'abscisse 2 et d'ordonnée 4, et elle passe par l'origine O et par le point d'abscisse 4 de l'axe des abscisses. P2, en rouge, est tournée vers le haut : son sommet est T, d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 1, et elle passe par le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 1. Au palier 2, leurs deux points d'intersection E et F sont marqués, d'abscisses voisines de moins 0,15 et de 2,15 : entre eux, P1 est au-dessus de P2.

EXEMPLE TRAITÉ

Trouve les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$, les points d'intersection des deux paraboles, puis résous $f(x) < g(x)$.

La fonction f — Sommet $S(2;4)$: la forme est $a(x-2)^2+4$. La parabole passe par O : $4a+4=0$, donc $a=-1$.

$f(x) = -(x-2)^2+4 = -x^2+4x$

La fonction g — Sommet $T(-1;-1)$: la forme est $a(x+1)^2-1$. La parabole passe par $A(1;1)$: $4a-1=1$, donc $a=\dfrac{1}{2}$.

$g(x) = \frac{(x+1)^2}{2} - 1 = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$

L'intersection — On écrit que les deux expressions sont égales. En multipliant par 2, l'équation devient $3x^2 - 6x - 1 = 0$, de discriminant 48.

$x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Les ordonnées — On remplace dans $-x^2 + 4x$: ce sont les ordonnées des points E et F.

$y = \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{5}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

L'inéquation — $f(x) < g(x)$ équivaut à $3x^2 - 6x - 1 > 0$: le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. Sur la figure, c'est là où la première parabole est au-dessous de la seconde.

$$x < 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad x > 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

À ne pas faire : Les points d'intersection se lisent exactement sur la figure — On les calcule : leurs abscisses sont $1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$. La lecture donne environ $-0{,}15$ et $2{,}15$: seule l'équation donne les valeurs exactes.

---

18. MÉTHODE

Lire les signes de a, b et c

CE QU'IL DIT

La parabole ta7kilek 3la a w b w c blech ma ta3rafhom. Le signe de a : ma7loula lel fou9, a positif ; lel wta, a négatif. Le nombre de racines : 9addech men marra la parabole t9oss l'axe des abscisses. Le signe de c : c houwa f de zéro, ya3ni win la parabole t9oss l'axe des ordonnées. W le signe de b : l'abscisse du sommet hiya moins b sur deux a. Fel figure : a positif, deux racines, c négatif, w le sommet 3al isar, idhan moins b sur deux a négatif, w b positif.

la parabole تحكيلك على a w b w c بلاش ما تعرفهم . le signe de a : محلولة للفوق ، a positif ؛ للوطا ، a négatif . le nombre de racines : قدّاش من مرّة la parabole تقصّ c : c le signe de c . l'axe des abscisses هو f de zéro ، يعني وين la parabole تقصّ l'abscisse du sommet : b le signe de w . l'axe des ordonnées هي الـ في le sommet ، w ، c négatif ، deux racines ، a positif : figure على اليسار ، إذن . moins b sur deux a . moins b sur deux a négatif ، w b positif

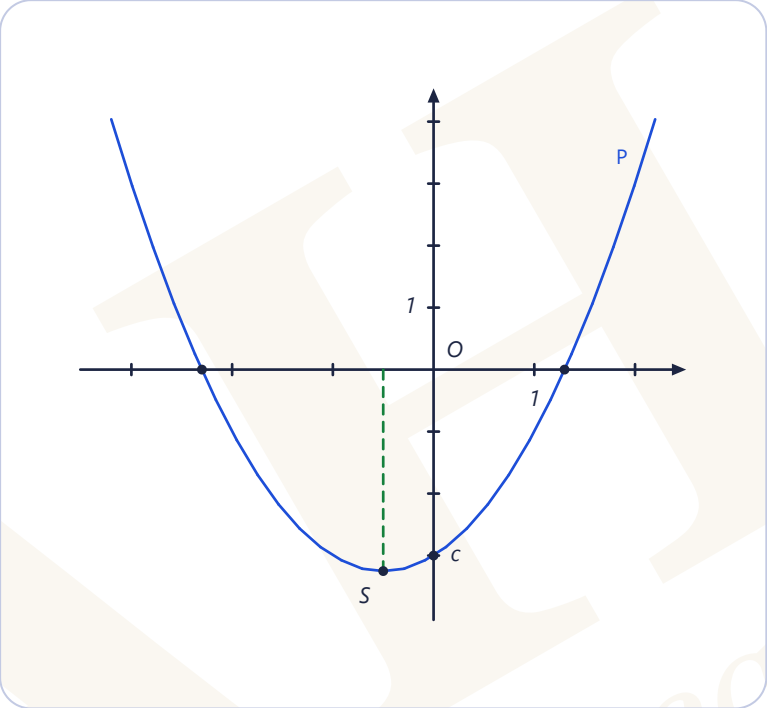
La parabole te renseigne sur a, b et c sans que tu les connaisses. Le signe de a : tournée vers le haut, a est positif ; vers le bas, a est négatif. Le nombre de racines : le nombre de fois où la parabole coupe l'axe des abscisses. Le signe de c : c est f de zéro, c'est-à-dire l'endroit où la parabole coupe l'axe des ordonnées. Et le signe de b : l'abscisse du sommet est moins b sur deux a. Sur la figure : a positif, deux racines, c négatif, et le sommet est à gauche, donc moins b sur deux a est négatif, et b est positif.

Une parabole est la courbe représentative d'une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sans connaître a, b et c, la figure donne leurs signes :

- le **signe de a** : la parabole est tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$;
- le **nombre de racines** du trinôme : c'est le nombre de points où la parabole rencontre l'axe des abscisses ;

- le **signe de c** : $c = f(0)$ est l'ordonnée du point où la parabole coupe l'axe des ordonnées ;
- le **signe de b** : l'abscisse du sommet est $-\dfrac{b}{2a}$; son signe et celui de a donnent celui de b.

La parabole P de la figure est tournée vers le haut ; son sommet S a une abscisse négative ; elle coupe l'axe des abscisses en deux points, et l'axe des ordonnées au-dessous de O.



Lire les signes de a, b et c.

Un repère orthogonal d'origine O. La parabole P est tournée vers le haut. Son sommet S a une abscisse négative, moins 0,5, et une ordonnée négative. Elle coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un d'abscisse négative et l'autre d'abscisse positive, et l'axe des ordonnées au point d'ordonnée c, situé au-dessous de O. Au palier 2, un pointillé vert relie le sommet à l'axe des abscisses, à gauche de O.

EXEMPLE TRAITÉ

Pour la parabole P de la figure, indique le signe de a, le nombre de racines du trinôme, le signe de c et le signe de b.

Le signe de a — La parabole est tournée vers le haut : a est positif.

$a > 0$

Les racines — Elle coupe l'axe des abscisses en deux points : le trinôme a deux racines.

Le signe de c — Elle coupe l'axe des ordonnées au-dessous de O : l'image de 0 est négative.

$c = f(0) < 0$

Le signe de b — Le sommet a une abscisse négative : $-\dfrac{b}{2a}$ est négatif, donc $\dfrac{b}{2a}$ est positif. Comme a est positif, b l'est aussi.

$b > 0$

$a > 0$; deux racines ; $c < 0$; $b > 0$

À ne pas faire : Le sommet est à gauche de l'axe des ordonnées, donc $b < 0$ — $-\dfrac{b}{2a} < 0$ avec $a > 0$ donne $b > 0$. C'est $-\dfrac{b}{2a}$ qui est négatif, pas b : il y a un signe moins, et il faut tenir compte du signe de a.

---

19. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la fonction racine carrée

CE QU'IL DIT

Net3addew l la deuxième famille : la racine carrée. f de x égale racine carrée de x, w hiya définie ken 3la les positifs : l'intervalle de zéro à plus l'infini. Hiya croissante : ki x yekber, racine carrée de x tekber. Ama bechwaya : racine carrée de dix puissance seize hiya dix puissance huit berk. W m3a hedha, tfout ay nombre A : yekfi x yfout A au carré. Idhan f de x tend vers plus l'infini quand x tend vers plus l'infini. Chouf la courbe : tabda men O, w tatla3 bechwaya, dima.

نتعدّاو لـ w ، les على كان définie هي la deuxième famille : la racine carrée . f de x égale racine carrée de x
: أما بالشويّة . تكبر racine carrée de x ، يكبر x كي : croissante هي . positifs : l'intervalle de zéro à plus l'infini
x يكفي : nombre A تفوت أيّ مع هذا ، w . برك dix puissance huit هي racine carrée de dix puissance seize
تبدا من : la courbe شوف . f de x tend vers plus l'infini quand x tend vers plus l'infini إذن . A au carré يفوت
w ، O تطلع بالشويّة ، ديما .

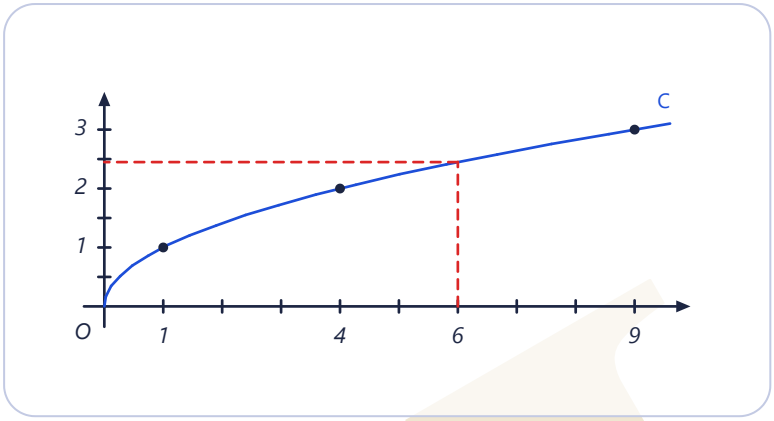
Passons à la deuxième famille : la racine carrée. f de x égale racine carrée de x, et elle n'est définie que sur les positifs : l'intervalle de zéro à plus l'infini. Elle est croissante : quand x grandit, racine carrée de x grandit. Mais lentement : racine carrée de dix puissance seize vaut seulement dix puissance huit. Et pourtant, elle dépasse n'importe quel nombre A : il suffit que x dépasse A au carré. Donc f de x tend vers plus l'infini quand x tend vers plus l'infini. Regarde la courbe : elle part de O, et elle monte lentement, toujours.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montre que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. Complète le tableau ci-dessous. Soit A un réel strictement positif : comment choisir x dans $[0;+\infty[$ pour que $f(x) > A$? Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

x	10^4	10^6	10^{10}	10^{16}
$f(x)$				

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé ; la courbe C de la fonction f est donnée par la figure. À l'aide du graphique, détermine un encadrement d'amplitude $0{,}25$ de $f(2{,}5)$, $f(4{,}5)$, $f(6)$ et $f(7)$.



La courbe C de la fonction x ↦ √x.

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe C de la fonction racine carrée part de l'origine, monte d'abord vite puis de plus en plus lentement ; elle passe par les points d'abscisses 1, 4 et 9, d'ordonnées 1, 2 et 3. L'axe des ordonnées est gradué de 0,5 en 0,5. Au palier 2, des pointillés rouges partent du point d'abscisse 6 sur l'axe des abscisses, montent jusqu'à la courbe, puis rejoignent l'axe des ordonnées entre les graduations 2 et 2,5, un peu au-dessous de 2,5.

EXEMPLE TRAITÉ

Montre que f est croissante, complète le tableau, puis encadre $f(6)$ avec une amplitude de $0{,}25$.

Croissante — Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. On multiplie et on divise par la somme des deux racines : le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs.

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} > 0$$

Le tableau — Pour prendre la racine carrée d'une puissance de 10, on divise l'exposant par 2.

$$f(10^4) = 10^2 \quad ; \quad f(10^6) = 10^3 \quad ; \quad f(10^{10}) = 10^5 \quad ; \quad f(10^{16}) = 10^8$$

Dépasser A — Pour x positif, $\sqrt{x} > A$ équivaut à $x > A^2$: il suffit de choisir x plus grand que A^2. Donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

$$x > A^2 \Rightarrow \sqrt{x} > A$$

La lecture — Sur la courbe, le point d'abscisse 6 a une ordonnée comprise entre $2{,}25$ et $2{,}5$. Le calcul le confirme : le carré de $2{,}25$ est $5{,}0625$ et celui de $2{,}5$ est $6{,}25$.

$$1{,}5 < f(2{,}5) < 1{,}75 \quad ; \quad 2 < f(4{,}5) < 2{,}25$$

$$2{,}25 < f(6) < 2{,}5 \quad ; \quad 2{,}5 < f(7) < 2{,}75$$

$$f(x) \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty$$

À ne pas faire : $\sqrt{x}$ est définie pour tout réel x — $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geq 0$: f est définie sur $[0; +\infty[$. Aucun réel n'a un carré négatif : un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée.

À ne pas faire : $\sqrt{x}$ monte si lentement qu'elle ne dépasse jamais une certaine valeur — $\sqrt{x}$ dépasse tout réel A dès que $x > A^2$. Elle monte lentement, mais sans s'arrêter : la racine carrée de 10^{16} vaut déjà 10^8.

20. APPLICATION

Exemple : racine carrée et droite

CE QU'IL DIT

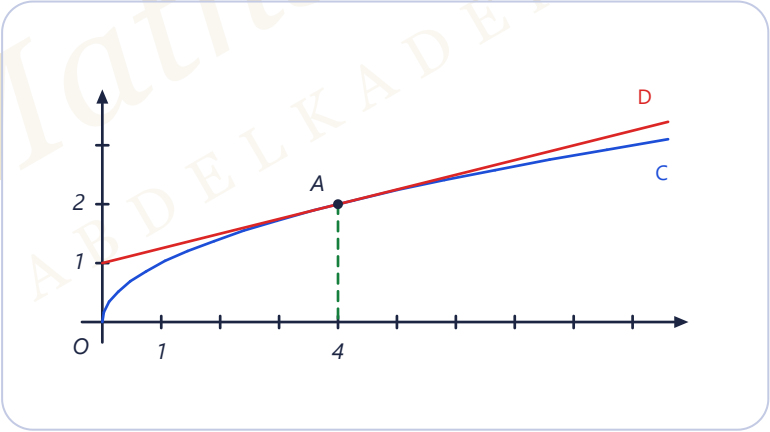
Fi nafs le repère, nrasmou la courbe C mta3 la racine carrée, w la droite D d'équation y égale un quart de x plus un. Nchoufou : D tmess C fi point wa7ed berk, le point A de coordonnées quatre et deux, w fel b9iya el koll, D fou9 C. Idhan l'équation racine carrée de x égale un quart de x plus un 3andha solution wa7da : quatre. W l'inéquation racine carrée de x inférieur à un quart de x plus un s7i7a l koll les positifs, illa quatre. W bel calcul nthabbtou : n7ottou t égale racine carrée de x, w nal9aw (t moins deux) au carré égale zéro.

في نفس الـ repère ، نرسمو la courbe C متاع la racine carrée ، w la droite D d'équation y égale un quart de x plus un . نشوفو : D تمسّ C في point واحد برك ، w le point A de coordonnées quatre et deux في البقيّة . الكل ، D فوق C . إذن l'équation racine carrée de x égale un quart de x plus un عندها solution وحدة : quatre . w l'inéquation racine carrée de x inférieur à un quart de x plus un صحيحة لكل les positifs ، إلّا . نثبّتو : نحطّو t égale racine carrée de x ، w نلقاو (t moins deux) au carré égale zéro . w نثبّتو calcul بالـ quatre .

Dans le même repère, on trace la courbe C de la racine carrée, et la droite D d'équation y égale un quart de x plus un. On voit : D touche C en un seul point, le point A de coordonnées quatre et deux, et partout ailleurs, D est au-dessus de C. Donc l'équation racine carrée de x égale un quart de x plus un a une seule solution : quatre. Et l'inéquation racine carrée de x inférieur à un quart de x plus un est vraie pour tous les positifs, sauf quatre. Et par le calcul on vérifie : on pose t égale racine carrée de x, et on trouve (t moins deux) au carré égale zéro.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit C la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et D la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

1. Trace la droite D dans le même repère que C.
2. Résous graphiquement l'équation $\sqrt{x} = \frac{1}{4}x + 1$, puis l'inéquation $\sqrt{x} < \frac{1}{4}x + 1$.
3. Retrouve, par le calcul, les résultats de la question précédente.



La droite D touche la courbe C au point A(4 ; 2).

Un repère orthonormé d'origine O. En bleu, la courbe C de la fonction racine carrée. Au palier 2, en rouge, la droite D d'équation y égale un quart de x plus 1 : elle part du point d'ordonnée 1 sur l'axe des ordonnées et monte doucement. Elle touche la courbe C en un seul point, le point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 2 ; partout ailleurs, la droite est au-dessus de la courbe.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

EXEMPLE TRAITÉ

Résous l'équation $\sqrt{x} = \frac{x}{4} + 1$ et l'inéquation $\sqrt{x} < \frac{x}{4} + 1$, par lecture puis par le calcul.

La lecture — La droite D passe par les points d'abscisses 0 et 4, d'ordonnées 1 et 2. Elle touche la courbe C en un seul point, $A(4;2)$, et partout ailleurs elle est au-dessus de C.

Le calcul — Pour $x \geq 0$, on pose $t = \sqrt{x}$, donc $x = t^2$. L'équation devient $t = \frac{t^2}{4} + 1$; on multiplie par 4.

$t^2 - 4t + 4 = 0 \iff (t-2)^2 = 0 \iff t = 2$

La solution — On revient à x : si sa racine carrée vaut 2, alors x vaut 4.

$\sqrt{x} = 2 \iff x = 4$

L'inéquation — Elle équivaut à dire que le carré de $t - 2$ est strictement positif, c'est-à-dire que t est différent de 2 : tous les réels positifs conviennent, sauf 4.

$$S = \{4\} \quad ; \quad S' = [0;4[\cup]4;+\infty[$$

À ne pas faire : L'inéquation $\sqrt{x} < \frac{x}{4} + 1$ a pour solutions tous les réels positifs — Tous les réels positifs sauf 4 : $[0;4[\cup]4;+\infty[$. En $x = 4$, la courbe et la droite se touchent : il y a égalité, et l'inégalité stricte est fausse.

21. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = √(x + b)

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété. La courbe mta3 f de x égale racine carrée de (x plus b) hiya l'image, par la translation de vecteur moins b i, mta3 la courbe mta3 la racine carrée. Mithel : racine carrée de (x plus deux). Hiya définie ki x plus deux positif, ya3ni 3la l'intervalle de moins deux à plus l'infini, w croissante 3lih. W la courbe mte3ha hiya mta3 la racine carrée, m7arrka b deux lel isar : tabda men le point d'abscisse moins deux. Rodd belek : plus deux dekhel la racine, w la courbe temchi lel isar, mouch lel imin.

l'image ، par la translation هي f de x égale racine carrée de (x plus b) متاع la propriété . la courbe هاذي هي . racine carrée de (x plus deux) : مثال . la racine carrée متاع la courbe متاع ، de vecteur moins b i w . عليه l'intervalle de moins deux à plus l'infini ، w croissante على يعني ، x plus deux positif كي définie . le point d'abscisse moins deux من تبدا : لليسار deux بـ محرّكة ، la racine carrée متاعها هي متاع la courbe ردّ بالك : plus deux داخل la courbe ، w la racine تمشي لليسار ، موش لليمين .

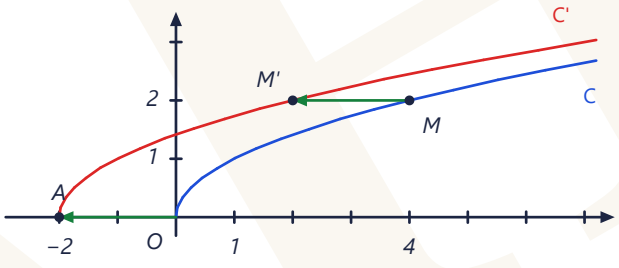
Voici la propriété. La courbe de f de x égale racine carrée de (x plus b) est l'image, par la translation de vecteur moins b i, de la courbe de la racine carrée. Exemple : racine carrée de (x plus deux). Elle est définie quand x plus deux est positif, c'est-à-dire sur l'intervalle de moins deux à plus l'infini, et elle y est croissante. Et sa courbe est celle de la racine carrée, déplacée de deux vers la gauche : elle part du point

d'abscisse moins deux. Attention : plus deux sous la racine, et la courbe va vers la gauche, pas vers la droite.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

> La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+b}$ est l'image, par la **translation de vecteur** $-b\vec{i}$, de la courbe de la fonction g.

La fonction f est définie quand $x + b \geq 0$, c'est-à-dire sur $[-b; +\infty[$, et elle est croissante sur cet intervalle.



C' est l'image de C par la translation de vecteur −2i.

Un repère orthonormé d'origine O. En bleu, la courbe C de la fonction racine carrée, qui part de O. Au palier 2, en rouge, la courbe C prime de la fonction qui à x associe racine carrée de (x plus 2) : c'est la même courbe, déplacée de 2 vers la gauche ; elle part du point A d'abscisse moins 2 sur l'axe des abscisses. Deux flèches vertes égales, horizontales, de O vers A et du point M de C, d'abscisse 4 et d'ordonnée 2, vers le point M prime de C prime, d'abscisse 2 et d'ordonnée 2, montrent la translation de vecteur moins 2 i.

$$f(x) = \sqrt{x+b}$$

$$\text{image de la courbe de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ par la translation de vecteur } -b\vec{i}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit f et g les fonctions telles que $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$, de courbes C et C'. Détermine l'ensemble de définition D de g, étudie ses variations, puis montre que C' est l'image de C par la translation T de vecteur $-2\vec{i}$.

L'ensemble de définition — Ce qui est sous la racine doit être positif ou nul.

$x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2 \quad ; \quad D = [-2; +\infty[$

Les variations — Si $-2 \leq a \leq b$, alors $0 \leq a+2 \leq b+2$, et la racine carrée garde l'ordre : g est croissante sur D.

$\sqrt{a+2} \leq \sqrt{b+2}$

La translation — L'image d'un point $M(x; y)$ par T a pour abscisse $x - 2$ et pour ordonnée y.

$x' = x - 2 \quad ; \quad y' = y$

L'équivalence — Le point M est sur C quand $y = \sqrt{x}$. Comme $x = x' + 2$ et $y = y'$, cela revient à dire que son image est sur la seconde courbe.

$y = \sqrt{x} \iff y' = \sqrt{x' + 2}$

$$D = [-2; +\infty[\quad ; \quad C' \text{ est l'image de } C \text{ par la translation de vecteur } -2\vec{i}$$

À ne pas faire : La courbe de $\sqrt{x+2}$ est celle de $\sqrt{x}$ décalée de 2 vers la droite — Elle est décalée de 2 vers la gauche : translation de vecteur $-2\vec{i}$. La courbe part du point où $x + 2$ s'annule, c'est-à-dire du point d'abscisse -2.

À ne pas faire : $\sqrt{x+4}$ est définie sur $[4; +\infty[$ — Elle est définie sur $[-4; +\infty[$. La condition est $x + 4 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -4$.

---

22. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la fonction inverse

CE QU'IL DIT

La troisième famille tabda b f de x égale un sur x. Hiya définie l koll x non nul : zéro ma 3andouch inverse. Chouf la courbe : zouz 9ta3, wa7da l x positif w wa7da l x négatif. f impaire : f de moins x égale moins f de x, w la courbe symétrique par rapport à l'origine. W f décroissante 3la koll intervalle wa7dou. Ki x yekber barcha, un sur x ya9reb l zéro : f de x tend vers zéro quand x tend vers plus l'infini. W ki x positif ya9reb l zéro, un sur x yekber barcha : f de x tend vers plus l'infini.

شوف . inverse عندوش ما x non nul : zéro لكل définie هي . f de x égale un sur x بـ تبدا la troisième famille x négatif . f impaire : f de moins x égale moins f de x ، w la وحدة لـ x positif w وحدة لـ زوز قطع ، : la courbe un ، برشا يكبر x كي . وحدو intervalle على كل courbe symétrique par rapport à l'origine . w f décroissante zéro ، un لـ يقرب x positif كي zéro : f de x tend vers zéro quand x tend vers plus l'infini . w لـ يقرب sur x . f de x tend vers plus l'infini : برشا يكبر sur x

La troisième famille commence par f de x égale un sur x. Elle est définie pour tout x non nul : zéro n'a pas d'inverse. Regarde la courbe : deux morceaux, un pour x positif et un pour x négatif. f est impaire : f de moins x égale moins f de x, et la courbe est symétrique par rapport à l'origine. Et f est décroissante sur chaque intervalle séparément. Quand x devient très grand, un sur x s'approche de zéro : f de x tend vers zéro quand x tend vers plus l'infini. Et quand x positif s'approche de zéro, un sur x devient très grand : f de x tend vers plus l'infini.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par la figure.

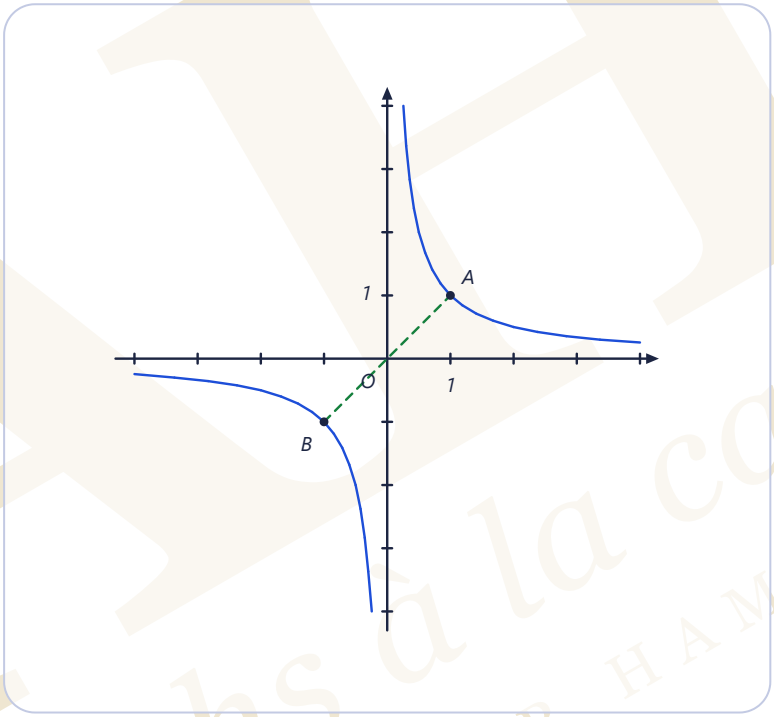
1. À l'aide du graphique, émets une conjecture sur la parité de f, puis décris ses variations.
2. Complète le premier tableau. Si $x > 10^{15}$, que peut-on dire de $f(x)$? Comment choisir x positif pour que $f(x) < 10^{-25}$? Pour que $0 < f(x) < a$, où $a > 0$? Que peut-on dire de

$f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

x	10^3	10^4	10^7	10^{10}	10^{15}
$f(x)$					

1. Complète le second tableau. Si $0 < x < 10^{-17}$, que peut-on dire de $f(x)$? Comment choisir x positif pour que $f(x) > 10^{40}$? Pour que $f(x) > A$, où $A > 0$? Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers 0 et x plus grand que 0 ?

x	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-17}
$f(x)$					



La courbe de la fonction x ↦ 1/x.

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de la fonction inverse est faite de deux morceaux. Pour x positif, elle descend : très haute près de l'axe des ordonnées, elle passe par le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 1, puis se rapproche de l'axe des abscisses sans le toucher. Pour x négatif, le morceau est le symétrique du premier par rapport à O : il passe par le point B d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 1. Au palier 2, le segment [AB], en pointillés, passe par O, son milieu.

EXEMPLE TRAITÉ

Étudie la parité et les variations de f, puis ce que devient $f(x)$ quand x est très grand, et quand x positif est proche de 0.

La parité — Pour tout réel x non nul, $-x$ est non nul, et l'image de $-x$ est l'opposée de celle de x : la fonction f est impaire.

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

Les variations — Si $0 < a < b$, la différence des images est négative : f est décroissante sur $]0; +\infty[$. Par symétrie, elle l'est aussi sur $]-\infty; 0[$.

$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} < 0$

Quand x est très grand — L'inverse de 10^{15} est 10^{-15} : si $x > 10^{15}$, alors $f(x)$ est entre 0 et 10^{-15}. Et $f(x)$ est entre 0 et a dès que x dépasse l'inverse de a.

$x > \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < a$

Quand x est très petit — L'inverse de 10^{-17} est 10^{17} : si x est entre 0 et 10^{-17}, alors $f(x)$ dépasse 10^{17}. Et $f(x)$ dépasse A dès que x est entre 0 et l'inverse de A.

$0 < x < \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{x} > A$

La conclusion — $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 en restant positif.

À ne pas faire : f est décroissante sur $\mathbb{R}$ privé de 0 — f est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. L'image de -1 est -1 et celle de 1 est 1 : d'un négatif à un positif, l'ordre n'est pas renversé.

À ne pas faire : $\frac{1}{0} = 0$ — 0 n'a pas d'inverse : f n'est pas définie en 0. Aucun nombre multiplié par 0 ne donne 1.

---

23. VOCABULAIRE

L'hyperbole d'équation y = 1/x

CE QU'IL DIT

Hedhi el asemi. La courbe H mta3 la fonction un sur x nsammiwha hyperbole. Le point O houwa le centre mte3ha. W les droites d'équations x égale zéro w y égale zéro, ya3ni les deux axes, houma les asymptotes : la courbe ta9reb menhom barcha, w ma tmesshomch. y égale un sur x hiya équation de l'hyperbole H. W mola7dha : l'hyperbole fiha zouz 9ta3, nsammiwhom les branches de l'hyperbole.

. متاعها le centre هو hyperbole . le point O نسمّيوها la fonction un sur x متاع la courbe H . هاذي الأسامي
les asymptotes : la هوما ، les deux axes يعني ، w les droites d'équations x égale zéro w y égale zéro
: ملاحظة équation de l'hyperbole H . w هي y égale un sur x . ما تمسّهمش ، w courbe تقرب منهم برشا
. les branches de l'hyperbole نسمّيوهم ، فيها زوز قطع l'hyperbole

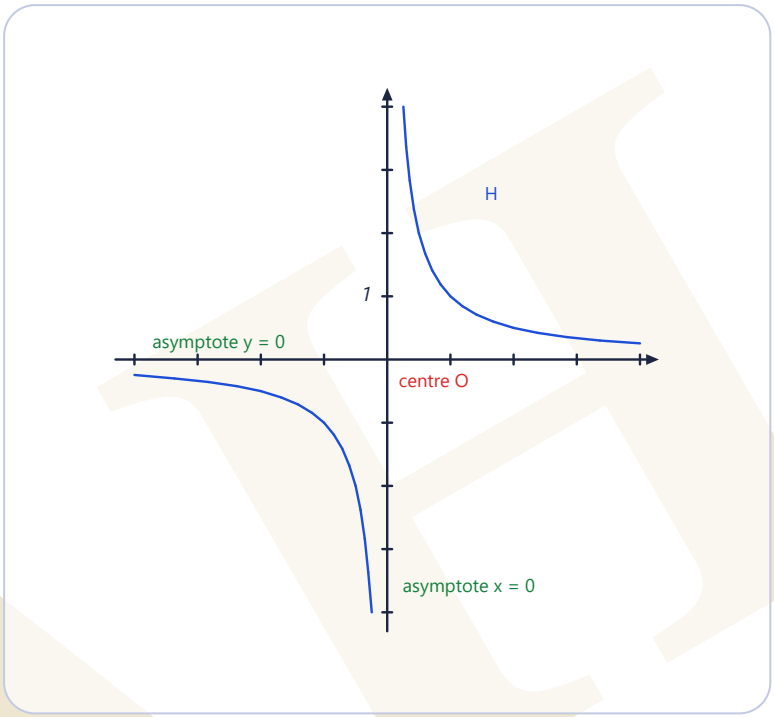
Voici les noms. La courbe H de la fonction un sur x s'appelle une hyperbole. Le point O est son centre. Et les droites d'équations x égale zéro et y égale zéro, c'est-à-dire les deux axes, sont ses asymptotes : la courbe s'en approche beaucoup, sans les toucher. y égale un sur x est une équation de l'hyperbole H. Et une remarque : l'hyperbole a deux morceaux, qu'on appelle les branches de l'hyperbole.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe H de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est appelée **hyperbole**. Le point O est appelé le **centre** de l'hyperbole, et les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont appelées les **asymptotes** de l'hyperbole.

L'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est une **équation de l'hyperbole** H.

Remarque. Une hyperbole est formée de deux branches, appelées **branches de l'hyperbole**.



L'hyperbole H, son centre et ses asymptotes.

L'hyperbole H d'équation y égale 1 sur x, dans un repère orthogonal : deux branches, l'une pour x positif, l'autre pour x négatif. Au palier 2, son centre est nommé : c'est l'origine O. Au palier 3, ses deux asymptotes sont nommées : la droite d'équation y égale 0, l'axe des abscisses, et la droite d'équation x égale 0, l'axe des ordonnées. Chaque branche s'approche des deux axes sans les toucher.

ÉQUATION DE L'HYPERBOLE H

$H : y = \frac{1}{x}$

centre : O asymptotes : $x = 0$ et $y = 0$

EXEMPLE TRAITÉ

Le point $A\left(4; \dfrac{1}{4}\right)$ est-il sur l'hyperbole H ? Et le point $B(-2; 2)$? Quel est le point de H d'ordonnée -5 ?

Le point A — Un point est sur H quand son ordonnée est l'inverse de son abscisse. L'inverse de 4 est bien $\dfrac{1}{4}$.

l'inverse de 4 est $\frac{1}{4}$

Le point B — L'inverse de -2 est $-\dfrac{1}{2}$, et non 2 : le point B n'est pas sur H.

$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \neq 2$

Une ordonnée donnée — On cherche le nombre dont l'inverse est -5.

$\frac{1}{x} = -5 \iff x = -\frac{1}{5}$

$$A \in H \quad ; \quad B \notin H \quad ; \quad D\left(-\tfrac{1}{5}; -5\right) \in H$$

À ne pas faire : L'hyperbole H finit par toucher ses asymptotes — Elle s'en approche autant qu'on veut, sans jamais les toucher. L'inverse d'un nombre n'est jamais nul, et x ne peut pas valoir 0 : aucun point de H n'est sur l'un des axes.

---

24. APPLICATION

Exemple : comparer x, x², 1/x et √x

CE QU'IL DIT

Quatre courbes fi nafs le repère : la parabole P, l'hyperbole H, la courbe C mta3 la racine carrée, w la droite D d'équation y égale x. El koll yet3addew men le point A de coordonnées un et un. Bin zéro w un, men ta7t lel fou9 : P, D, C, H. Ya3ni x au carré asghar men x, asghar men racine carrée de x, asghar men un sur x. Ba3d un, l'ordre yetbaddel : un sur x asghar men racine carrée de x, asghar men x, asghar men x au carré. W l x négatif, ncompariw x w un sur x : D w H yetle9aw fi le point B de coordonnées moins un et moins un.

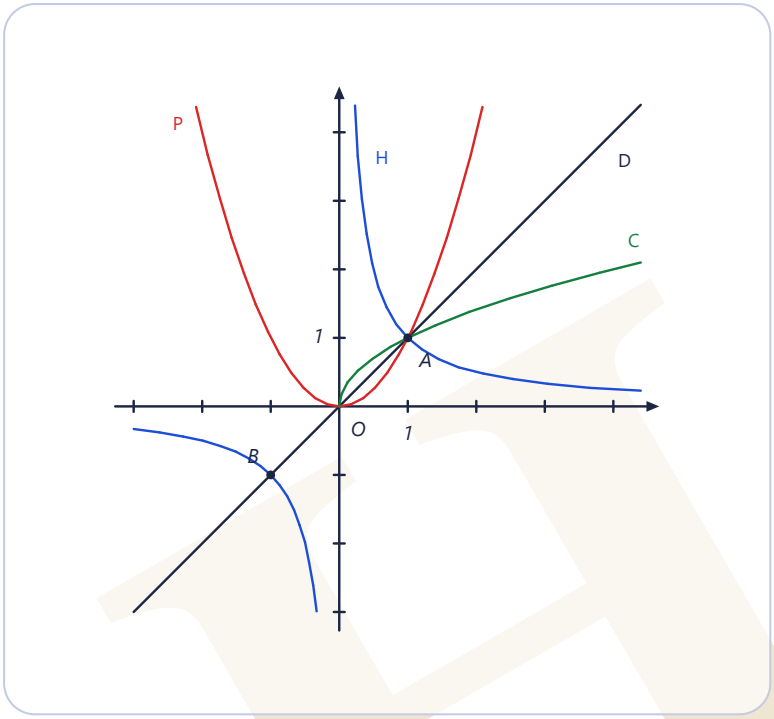
la racine carrée ، w la متاع repère : la parabole P ، l'hyperbole H ، la courbe C الـ في نفس quatre courbes من ، zéro w un بين . le point A de coordonnées un et un الكل يتعدّاو من . droite D d'équation y égale x بعد . un sur x أصغر من ، racine carrée de x أصغر من ، x أصغر من x au carré يعني . P ، D ، C ، H : تحت للفوق x négatif ، لـ x au carré . w أصغر من ، racine carrée de x أصغر من un sur x : un يتبدّل ، l'ordre . le point B de coordonnées moins un et moins un يتلاقاو في ncompariw x w un sur x : D w H

Quatre courbes dans le même repère : la parabole P, l'hyperbole H, la courbe C de la racine carrée, et la droite D d'équation y égale x. Toutes passent par le point A de coordonnées un et un. Entre zéro et un, de bas en haut : P, D, C, H. Donc x au carré est plus petit que x, plus petit que racine carrée de x, plus petit que un sur x. Après un, l'ordre change : un sur x est plus petit que racine carrée de x, plus petit que x, plus petit que x au carré. Et pour x négatif, on compare x et un sur x : D et H se coupent au point B de coordonnées moins un et moins un.

Dans la figure sont représentées la parabole P d'équation $y = x^2$, l'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}$, la courbe C d'équation $y = \sqrt{x}$ et la droite D d'équation $y = x$.

Par une lecture graphique :

1. range dans l'ordre croissant x, x^2, $\frac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$, pour $x > 0$;
2. compare x et $\frac{1}{x}$, pour $x < 0$.



P, H, C et D dans un même repère.

Un repère orthonormé d'origine O et quatre courbes : en rouge la parabole P d'équation y égale x au carré, en bleu l'hyperbole H d'équation y égale 1 sur x, en vert la courbe C d'équation y égale racine carrée de x, et en noir la droite D d'équation y égale x. Les quatre passent par le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 1. Entre les abscisses 0 et 1, on rencontre de bas en haut P, D, C puis H ; après l'abscisse 1, de bas en haut H, C, D puis P. Pour x négatif, la droite D et l'hyperbole H se coupent au point B d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 1.

EXEMPLE TRAITÉ

Range dans l'ordre croissant x, x^2, $\dfrac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$ pour $x > 0$, puis compare x et $\dfrac{1}{x}$ pour $x < 0$.

Le point commun — Les quatre courbes passent par le point $A(1;1)$: pour $x = 1$, les quatre nombres sont égaux à 1.

Entre 0 et 1 — De bas en haut, on rencontre la parabole, puis la droite, puis la courbe de la racine carrée, puis l'hyperbole.

$0 < x < 1 : \quad x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$

Après 1 — L'ordre se renverse : de bas en haut, l'hyperbole, puis la courbe de la racine carrée, puis la droite, puis la parabole.

$x > 1 : \quad \frac{1}{x} < \sqrt{x} < x < x^2$

Pour x négatif — La droite et l'hyperbole se coupent au point $B(-1;-1)$. Avant -1, la droite est au-dessous de l'hyperbole ; entre -1 et 0, elle est au-dessus.

$x < -1 : \ x < \frac{1}{x} \quad ; \quad -1 < x < 0 : \ \frac{1}{x} < x$

À ne pas faire : Un nombre positif est toujours plus petit que son carré — C'est vrai pour $x > 1$; pour $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$. Par exemple, le carré de $\dfrac{1}{2}$ est $\dfrac{1}{4}$, qui est plus petit que $\dfrac{1}{2}$.

25. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = a/x

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété. a réel non nul. La courbe mta3 f de x égale a sur x hiya hyperbole, le centre mte3ha O, w les asymptotes mte3ha les droites d'équations x égale zéro w y égale zéro. Ken a positif, les branches fel arba3 win x w y 3andhom nafs le signe. Ken a négatif, fel arba3 lo5rin. Mithel : la courbe mta3 moins un sur x hiya le symétrique mta3 H par rapport à l'axe des abscisses, 5ater les ordonnées yetbaddlou l l'opposé.

هاذي la courbe . a réel non nul . la propriété متاع x sur a égale de f x هي le centre ، hyperbole متاعها ، O
les asymptotes w متاعها zéro égale y w zéro égale x les droites d'équations . les branches كان ، a positif
x w y عندهم نفس le signe . a négatif كان ، في الأرباع الأخرين . مثال : la courbe متاع un moins
sur x هي le symétrique متاع l'axe des abscisses par rapport à H ، خاطر les ordonnées يتبدّلو لـ l'opposé .

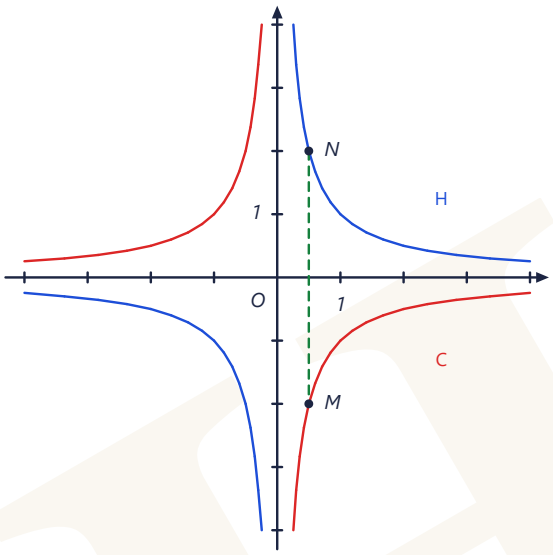
Voici la propriété. a est un réel non nul. La courbe de f de x égale a sur x est une hyperbole de centre O, dont les asymptotes sont les droites d'équations x égale zéro et y égale zéro. Si a est positif, les branches sont dans les quarts de plan où x et y ont le même signe. Si a est négatif, dans les deux autres. Exemple : la courbe de moins un sur x est le symétrique de H par rapport à l'axe des abscisses, car les ordonnées sont changées en leur opposé.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel non nul.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{a}{x}$ est une **hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.**

Si $a > 0$, les branches sont dans les quarts de plan où x et y ont le même signe ; si $a < 0$, elles sont dans les deux autres.

Maths à la carte ABDELKADER HA



H (a = 1) et C (a = −1) : symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Un repère orthonormé d'origine O. En bleu, l'hyperbole H d'équation y égale 1 sur x : ses branches sont dans les quarts de plan où x et y ont le même signe. Au palier 2, en rouge, la courbe C d'équation y égale moins 1 sur x : ses branches sont dans les deux autres quarts de plan. Le point N de H, d'abscisse 0,5 et d'ordonnée 2, et le point M de C, d'abscisse 0,5 et d'ordonnée moins 2, sont reliés par un pointillé vertical : ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, comme les deux courbes.

$$f(x) = \frac{a}{x} \quad (a \neq 0)$$

hyperbole de centre O, d'asymptotes $x = 0$ et $y = 0$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit f la fonction définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{-1}{x}$, de courbe C, et H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. Montre que C et H sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Puis donne le centre et les asymptotes de la courbe de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2}{x}$.

Un point et son symétrique — Le point $M(x;y)$ est sur C quand $y = -\dfrac{1}{x}$, c'est-à-dire quand $-y = \dfrac{1}{x}$: cela veut dire que le point $N(x;-y)$ est sur H.

$M(x;y) \in C \iff N(x;-y) \in H$

La symétrie — Les points M et N ont la même abscisse et des ordonnées opposées : ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Les deux courbes le sont donc aussi.

La courbe de g — Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\dfrac{2}{x}$ tend vers 0. La courbe est une hyperbole de centre O, dont les asymptotes sont les deux axes.

asymptotes : $x = 0$ et $y = 0$

centre : O ; asymptotes : $x = 0$ et $y = 0$

À ne pas faire : $y = \frac{3}{2x}$ n'est pas du type $\frac{a}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{1{,}5}{x}$: c'est le type $\frac{a}{x}$ avec $a = \frac{3}{2}$. On peut toujours ramener le coefficient de x à 1, en divisant le numérateur et le dénominateur par 2.

---

26. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = 1/x + β

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété. bêta réel non nul. La courbe mta3 f de x égale un sur x, plus bêta, hiya hyperbole, le centre mte3ha I de coordonnées zéro et bêta, w les asymptotes mte3ha les droites d'équations x égale zéro w y égale bêta. 3lech ? 5ater hiya l'image de H par la translation de vecteur bêta j : koll chay yatla3 walla yahbet b bêta, le centre w l'asymptote horizontale m3ah. Mithel : un sur x, moins deux. Le centre de coordonnées zéro et moins deux, w les asymptotes x égale zéro w y égale moins deux.

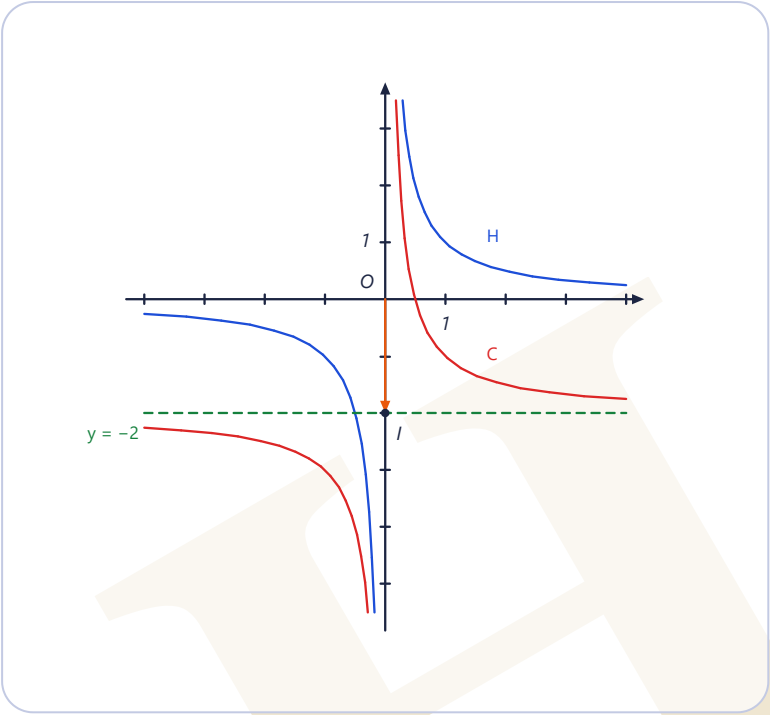
hyperbole ، le هي ، f de x égale un sur x, plus bêta متاع la propriété . bêta réel non nul . la courbe هاذي les droites d'équations x égale متاعها I de coordonnées zéro et bêta ، w les asymptotes متاعها centre كل شي يطلع ولّا : l'image de H par la translation de vecteur bêta j خاطر هي ؟ علاش . zéro w y égale bêta un sur x, moins deux . le centre de : مثال . معاه bêta ، le centre w l'asymptote horizontale يهبط بـ . coordonnées zéro et moins deux ، w les asymptotes x égale zéro w y égale moins deux

Voici la propriété. bêta est un réel non nul. La courbe de f de x égale un sur x, plus bêta, est une hyperbole de centre I de coordonnées zéro et bêta, dont les asymptotes sont les droites d'équations x égale zéro et y égale bêta. Pourquoi ? Parce que c'est l'image de H par la translation de vecteur bêta j : tout monte ou descend de bêta, le centre et l'asymptote horizontale avec. Exemple : un sur x, moins deux. Centre de coordonnées zéro et moins deux, et asymptotes x égale zéro et y égale moins deux.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit β un réel non nul.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \beta$ est une **hyperbole de centre $I(0;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = \beta$.**

C'est l'image de l'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$.



C est l'image de H par la translation de vecteur −2j.

Un repère orthogonal d'origine O. En bleu, l'hyperbole H d'équation y égale 1 sur x. Au palier 2, en rouge, la courbe C de la fonction qui à x associe 1 sur x, moins 2 : c'est la même hyperbole, descendue de 2. Son centre est le point I d'abscisse 0 et d'ordonnée moins 2, vers lequel pointe une flèche partant de O. Ses asymptotes sont l'axe des ordonnées et la droite horizontale d'équation y égale moins 2, tracée en pointillés verts.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \beta$$

centre : $I(0;\beta)$ asymptotes : $x = 0$ et $y = \beta$

EXEMPLE TRAITÉ

On désigne par H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. Soit f la fonction définie pour tout réel x non nul par $f(x) = -2 + \dfrac{1}{x}$, de courbe C. Montre que C est l'image de H par la translation de vecteur $-2\vec{j}$, puis précise le centre et les asymptotes de C.

Un point et son image — Un point $M(x;y)$ est sur H quand $y = \dfrac{1}{x}$. Son image par la translation a la même abscisse x, et pour ordonnée $y - 2$.

$y - 2 = -2 + \frac{1}{x} = f(x)$

La conclusion — L'image de M est donc sur C, et tout point de C s'obtient ainsi : la courbe C est l'image de H par cette translation.

Centre et asymptotes — La translation envoie O sur le point $I(0;-2)$, l'axe des ordonnées sur lui-même, et l'axe des abscisses sur la droite d'équation $y = -2$.

$I(0;-2)$; $x = 0$ et $y = -2$

centre : $I(0;-2)$; asymptotes : $x = 0$ et $y = -2$

À ne pas faire : $y = -2 + \frac{1}{x}$: asymptotes $x = -2$ et $y = 0$ — $y = -2 + \frac{1}{x}$: asymptotes $x = 0$ et $y = -2$. -2 s'ajoute à l'ordonnée : c'est l'asymptote horizontale qui se déplace, pas la verticale.

---

27. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = a/(x + α)

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété. a réel non nul, w alpha réel. La courbe mta3 f de x égale a sur la parenthèse x plus alpha, hiya hyperbole, le centre mte3ha I de coordonnées moins alpha et zéro, w les asymptotes mte3ha les droites d'équations x égale moins alpha w y égale zéro. f mouch définie fi moins alpha : le dénominateur ywalli zéro. Mithel : deux sur (x moins trois). La courbe hiya l'image mta3 l'hyperbole y égale deux sur x par la translation de vecteur trois i. Le centre de coordonnées trois et zéro, w l'asymptote verticale x égale trois.

f de x égale a sur la parenthèse x plus متاع la propriété . a réel non nul ، w alpha réel . la courbe هاذي متاعها I de coordonnées moins alpha et zéro ، w les asymptotes متاعها hyperbole ، le centre هي ,alpha moins alpha : le في définie موش les droites d'équations x égale moins alpha w y égale zéro . f l'hyperbole y égale متاع l'image هي deux sur (x moins trois) . la courbe : مثال . zéro يولّي dénominateur deux sur x par la translation de vecteur trois i . le centre de coordonnées trois et zéro ، w l'asymptote . verticale x égale trois

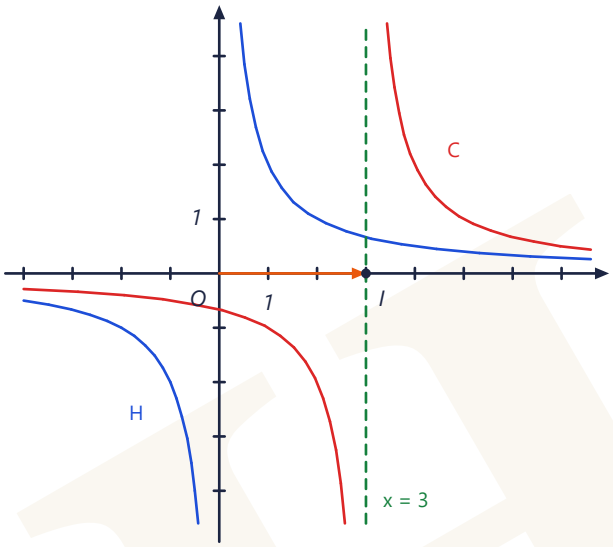
Voici la propriété. a est un réel non nul, et alpha un réel. La courbe de f de x égale a sur la parenthèse x plus alpha, est une hyperbole de centre I de coordonnées moins alpha et zéro, dont les asymptotes sont les droites d'équations x égale moins alpha et y égale zéro. f n'est pas définie en moins alpha : le dénominateur s'annule. Exemple : deux sur (x moins trois). Sa courbe est l'image de l'hyperbole y égale deux sur x par la translation de vecteur trois i. Centre de coordonnées trois et zéro, et asymptote verticale x égale trois.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel non nul et α un réel.

> La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ privé de $-\alpha$ par $f(x) = \frac{a}{x + \alpha}$ est une **hyperbole de centre $I(-\alpha; 0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\alpha$ et $y = 0$**.

C'est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ par la translation de vecteur $-\alpha\vec{i}$.

Près des asymptotes. Pour $f(x) = \frac{3}{x - 1}$, on lit sur la courbe : $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$; $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 et x est supérieur à 1 ; $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 1 et x est inférieur à 1.



C est l'image de H par la translation de vecteur 3i.

Un repère orthogonal d'origine O. En bleu, l'hyperbole H d'équation y égale 2 sur x, de centre O. Au palier 2, en rouge, la courbe C de la fonction qui à x associe 2 sur (x moins 3) : c'est la même hyperbole, déplacée de 3 vers la droite. Son centre est le point I d'abscisse 3 sur l'axe des abscisses, vers lequel pointe une flèche partant de O. Ses asymptotes sont la droite verticale d'équation x égale 3, tracée en pointillés verts, et l'axe des abscisses.

$$f(x) = \frac{a}{x+\alpha} \quad (a \neq 0)$$

centre : $I(-\alpha ; 0)$ asymptotes : $x = -\alpha$ et $y = 0$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$, de courbe C, et H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{2}{x}$. Détermine l'ensemble de définition de f. Montre que C est l'image de H par la translation T de vecteur $3\vec{i}$, puis précise les asymptotes de C.

L'ensemble de définition — Le dénominateur ne doit pas être nul.

$x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3 \quad ; \quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

La translation — L'image d'un point $M(x ; y)$ par T a pour abscisse $x + 3$ et pour ordonnée y.

$x' = x + 3 \quad ; \quad y' = y$

L'équivalence — Le point M est sur H quand $y = \dfrac{2}{x}$. Comme $x = x' - 3$ et $y = y'$, cela revient à dire que son image est sur C.

$y = \frac{2}{x} \iff y' = \frac{2}{x'-3}$

Les asymptotes — La translation envoie O sur le point $I(3 ; 0)$: c'est le centre de C. L'asymptote verticale devient la droite d'équation $x = 3$, et l'axe des abscisses reste asymptote.

$x = 3 \quad \text{et} \quad y = 0$

$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; asymptotes : $x = 3$ et $y = 0$

À ne pas faire : $y = \dfrac{1}{x+2}$: centre $I(2;0)$ — $y = \dfrac{1}{x+2}$: centre $I(-2;0)$, asymptotes $x = -2$ et $y = 0$. L'asymptote verticale est là où le dénominateur s'annule : $x + 2 = 0$ donne $x = -2$.

28. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la courbe de (x + 3)/(x + 2)

CE QU'IL DIT

W ken le numérateur fih x zeda ? f de x égale (x plus trois) sur (x plus deux). Hiya définie l koll x différent de moins deux. El 7ila : x plus trois houwa (x plus deux) plus un, idhan f de x égale un plus un sur (x plus deux). Tawa nbaddlou le repère : ne5dhou le point I de coordonnées moins deux et un k origine jdida. Fel repère ejdid, l'équation mta3 la courbe twalli grand Y égale un sur grand X : hiya l'hyperbole de référence ! Idhan C hyperbole, le centre mte3ha I, w les asymptotes mte3ha x égale moins deux w y égale un.

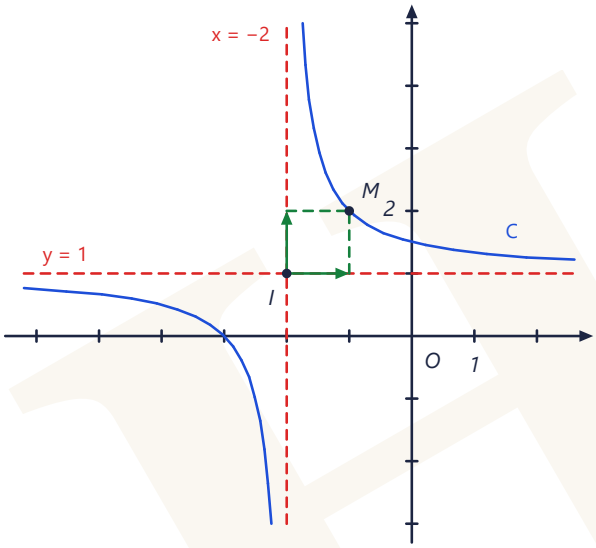
x différent لكل définie هي . f de x égale (x plus trois) sur (x plus deux) ؟ زادة x فيه le numérateur كان w f de x égale un plus un sur (x plus إذن ، plus un (x plus deux) هو x plus trois : الحيلة . de moins deux (deux . توّة نبدّلو le repère : ناخذو le point I de coordonnées moins deux et un كـ origine جديدة . في الـ l'hyperbole de هي : grand Y égale un sur grand X تولّي la courbe متاع l'équation ، الجديد repère x égale moins deux w y égale un متاعها I ، w les asymptotes متاعها C hyperbole ، le centre إذن ! référence .

Et si le numérateur contient x lui aussi ? f de x égale (x plus trois) sur (x plus deux). Elle est définie pour tout x différent de moins deux. L'astuce : x plus trois, c'est (x plus deux) plus un, donc f de x égale un plus un sur (x plus deux). Maintenant, changeons de repère : prenons le point I de coordonnées moins deux et un comme nouvelle origine. Dans le nouveau repère, l'équation de la courbe devient grand Y égale un sur grand X : c'est l'hyperbole de référence ! Donc C est une hyperbole de centre I, d'asymptotes x égale moins deux et y égale un.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$. On note C sa courbe représentative.

1. Détermine l'ensemble de définition D de f. Vérifie que $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+2}$ pour tout x de D. Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$? Quand x tend vers $-\infty$?
2. Soit $I(-2;1)$. On considère le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$. Soit M un point du plan : on note $(x;y)$ ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(X;Y)$ ses coordonnées dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$. Exprime x et y en fonction de X et Y, puis montre que M appartient à C si et seulement si $Y = \dfrac{1}{X}$.

3. Déduis-en la nature de la courbe C. Donne son centre et ses asymptotes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Dans le repère d'origine I, la courbe C a pour équation Y = 1/X.

Un repère orthonormé d'origine O. En bleu, la courbe C de la fonction f, faite de deux branches. Au palier 2, deux droites en pointillés rouges : la droite verticale d'équation x égale moins 2 et la droite horizontale d'équation y égale 1 ; elles se coupent au point I d'abscisse moins 2 et d'ordonnée 1. Chaque branche de C s'approche de ces deux droites sans les toucher. Au palier 3, deux flèches vertes partent de I, l'une vers la droite et l'autre vers le haut : dans ce nouveau repère d'origine I, le point M de C, d'abscisse moins 1 et d'ordonnée 2 dans l'ancien repère, a pour nouvelles coordonnées 1 et 1.

EXEMPLE TRAITÉ

Écris $f(x)$ autrement, change de repère, puis donne la nature de la courbe C, son centre et ses asymptotes.

L'ensemble de définition — Le dénominateur ne doit pas être nul : il faut x différent de -2.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

L'autre écriture — On réduit au même dénominateur, et on retrouve $f(x)$. Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la fraction tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers 1.

$$1 + \frac{1}{x+2} = \frac{x+2+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+2}$$

Le nouveau repère — Pour aller de O à M, on va de O à I, puis de I à M : les anciennes coordonnées sont les nouvelles, augmentées de celles de I.

$$x = X - 2 \quad ; \quad y = Y + 1$$

L'équation — On remplace dans l'égalité qui dit que M est sur C, et on simplifie.

$$Y + 1 = 1 + \frac{1}{X} \iff Y = \frac{1}{X}$$

La nature de la courbe — Dans le nouveau repère, C est l'hyperbole de référence : son centre est I, et ses asymptotes sont les deux nouveaux axes.

hyperbole de centre $I(-2;1)$, d'asymptotes $x=-2$ et $y=1$

À ne pas faire : $\frac{x+3}{x+2}=\frac{3}{2}$, en simplifiant par x — $\frac{x+3}{x+2}=1+\frac{1}{x+2}$. On ne simplifie que des facteurs, jamais les termes d'une somme : on écrit le numérateur comme $x+2$ plus 1, puis on sépare.

---

29. PROPRIÉTÉ

Fonctions du type f(x) = (ax + b)/(cx + d)

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété el 3amma. a w b w c w d réels, w c non nul. La courbe mta3 f de x égale (a x plus b) sur (c x plus d) hiya hyperbole. Le centre mte3ha I de coordonnées moins d sur c et a sur c. W les asymptotes mte3ha les droites d'équations x égale moins d sur c w y égale a sur c. Tfakkarhom hakka : l'asymptote verticale win le dénominateur égale zéro, w l'asymptote horizontale hiya le quotient mta3 les coefficients de x. Mithel : (quatre x moins sept) sur (deux x moins cinq). Les asymptotes : x égale cinq demis w y égale deux.

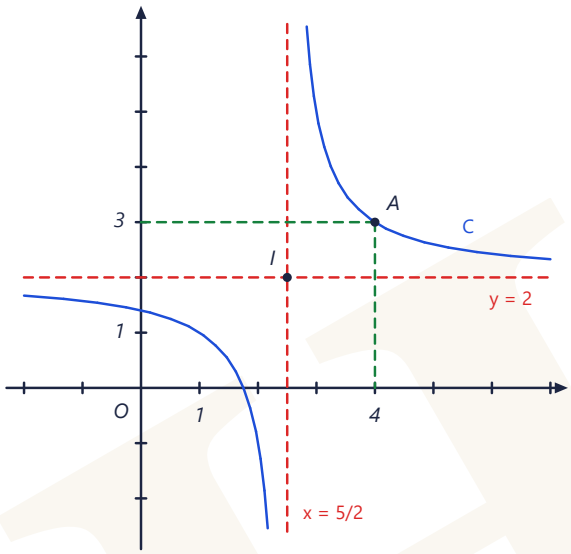
f de x égale (a x plus b) sur (c متاع a w b w c w d réels ، w c non nul . la courbe . العامّة la propriété هاذي I de coordonnées moins d sur c et a sur c . w les asymptotes متاعها hyperbole . le centre هي x plus d) l'asymptote verticale : تفكّرهم هكّا . les droites d'équations x égale moins d sur c w y égale a sur c متاعها . les coefficients de x متاع le quotient هي le dénominateur égale zéro ، w l'asymptote horizontale وين sur (deux x moins cinq) . les asymptotes : x égale cinq demis w y égale deux (quatre x moins sept) : مثال .

Voici la propriété générale. a, b, c et d sont des réels, avec c non nul. La courbe de f de x égale (a x plus b) sur (c x plus d) est une hyperbole. Son centre est I de coordonnées moins d sur c et a sur c. Et ses asymptotes sont les droites d'équations x égale moins d sur c et y égale a sur c. Retiens-les ainsi : l'asymptote verticale est là où le dénominateur égale zéro, et l'asymptote horizontale est le quotient des coefficients de x. Exemple : (quatre x moins sept) sur (deux x moins cinq). Asymptotes : x égale cinq demis et y égale deux.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit a, b, c et d quatre réels, avec c non nul.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ privé de $-\frac{d}{c}$ par $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ est une **hyperbole de centre $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$.**

L'asymptote verticale est là où le dénominateur s'annule ; l'asymptote horizontale se lit avec les coefficients de x.



L'hyperbole C, son centre I et ses asymptotes.

Un repère orthogonal d'origine O. La courbe C de la fonction g est une hyperbole à deux branches. Ses asymptotes, tracées en pointillés rouges, sont la droite verticale d'équation x égale cinq demis et la droite horizontale d'équation y égale 2 ; elles se coupent au centre I. La branche de droite est au-dessus de l'asymptote horizontale et descend ; celle de gauche est au-dessous et descend aussi. Au palier 2, des pointillés verts lisent le point A de la courbe, d'abscisse 4 et d'ordonnée 3.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0)$$

centre : $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

asymptotes : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{4x-7}{2x-5}$, de courbe C. Détermine son ensemble de définition D, vérifie que $g(x) = 2 + \dfrac{3}{2x-5}$ sur D, étudie ses variations, donne le centre et les asymptotes de C, puis résous $g(x) = 3$ et $g(x) = 2$.

L'ensemble de définition — Le dénominateur s'annule pour $x = \dfrac{5}{2}$.

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$

L'autre écriture — On réduit au même dénominateur, et on retrouve $g(x)$. Quand x tend vers $+\infty$, la fraction tend vers 0 et $g(x)$ tend vers 2.

$2 + \frac{3}{2x-5} = \frac{2(2x-5)+3}{2x-5} = \frac{4x-7}{2x-5}$

Les variations — Après $\frac{5}{2}$, quand x augmente, $2x-5$ augmente en restant positif, donc son inverse diminue : g est décroissante. Il en va de même avant $\frac{5}{2}$: g est décroissante sur chacun des deux intervalles où elle est définie.

Centre et asymptotes — Ici $a=4$, $c=2$ et $d=-5$.

$I\left(\frac{5}{2};2\right) \quad ; \quad x=\frac{5}{2} \text{ et } y=2$

Deux équations — $g(x)=3$ demande que la fraction vaille 1, donc que $2x-5=3$: la solution est 4. Et $g(x)=2$ demanderait que la fraction soit nulle, ce qui est impossible.

$g(x)=3 \iff x=4 \quad ; \quad g(x)=2 : \text{ pas de solution}$

À ne pas faire : $g(x)=2$ a une solution, puisque la droite $y=2$ est une asymptote — $g(x)=2$ n'a pas de solution. La courbe s'approche de son asymptote sans jamais la couper : la fraction qui s'ajoute à 2 n'est jamais nulle.

À ne pas faire : L'asymptote horizontale de $y=\dfrac{3x+1}{2x-4}$ est $y=3$ — C'est $y=\dfrac{3}{2}$. L'asymptote horizontale est $y=\dfrac{a}{c}$: on divise le coefficient de x du numérateur par celui du dénominateur.

---

30. APPLICATION

Exemple : parabole et hyperbole

CE QU'IL DIT

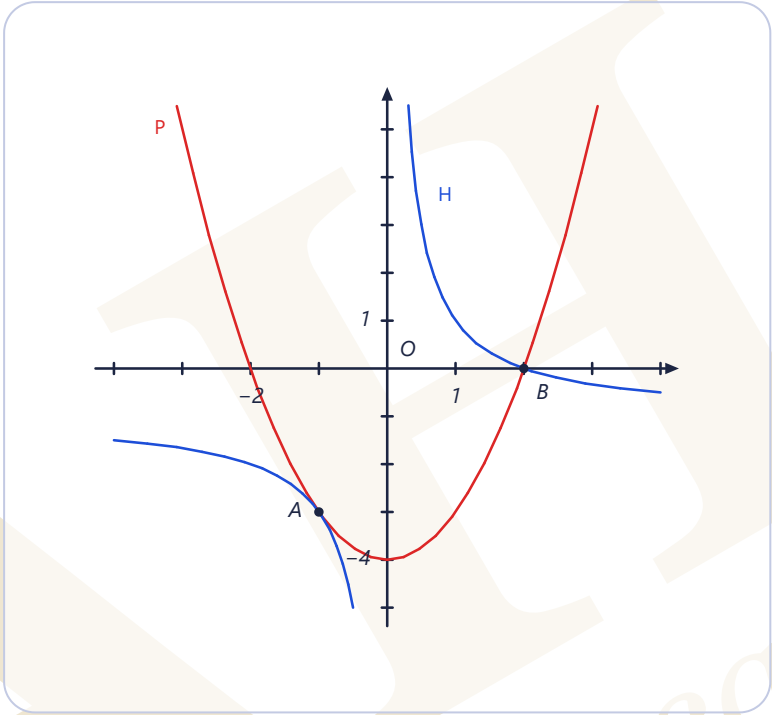
Parabole w hyperbole fi nafs le repère : P d'équation y égale x au carré moins quatre, w H d'équation y égale la parenthèse moins x plus deux, sur x. Bech n7ellou f de x égale g de x, na9raw les abscisses mta3 les points communs : yetle9aw fi le point B de coordonnées deux et zéro, w yetmessou fi le point A de coordonnées moins un et moins trois. Idhan les solutions : moins un w deux. W f de x supérieur ou égal à g de x win P fou9 H : l koll les x strictement négatifs, w l x supérieur ou égal à deux. Rodd belek : zéro ma yed5elch, g mouch définie fih.

repère : P d'équation y égale x au carré moins quatre ، w H d'équation الـ في نفس parabole w hyperbole les متاع les abscisses نقراو ، f de x égale g de x باش نحلّو . y égale la parenthèse moins x plus deux, sur x le point A de يتماسّو في le point B de coordonnées deux et zéro ، w يتلاقاو في : points communs les solutions : moins un w deux . w f de x supérieur ou égal à إذن . coordonnées moins un et moins trois ما zéro : ردّ بالك . x supérieur ou égal à deux لـ les x strictement négatifs ، w لكل : H فوق P وين g de x يدخلش ، g موش définie فيه .

Une parabole et une hyperbole dans le même repère : P d'équation y égale x au carré moins quatre, et H d'équation y égale la parenthèse moins x plus deux, sur x. Pour résoudre f de x égale g de x, on lit les abscisses des points communs : elles se coupent au point B de coordonnées deux et zéro, et se touchent au point A de coordonnées moins un et moins trois. Donc les solutions : moins un et deux. Et f de x supérieur ou égal à g de x là où P est au-dessus de H : pour tous les x strictement négatifs, et pour x supérieur ou égal à deux. Attention : zéro n'en fait pas partie, g n'y est pas définie.

Dans la figure sont représentées la parabole $P : y = x^2 - 4$ et l'hyperbole $H : y = \dfrac{-x+2}{x}$, courbes représentatives, respectivement, des fonctions f et g.

1. Résous graphiquement : a) $f(x) = g(x)$; b) $x^3 - 4x = 2 - x$; c) $f(x) \geq g(x)$.
2. Factorise $x^3 - 4x$, puis retrouve les résultats de la première question par le calcul.



La parabole P et l'hyperbole H.

Un repère orthogonal d'origine O. En rouge, la parabole P d'équation y égale x au carré moins 4, de sommet le point d'abscisse 0 et d'ordonnée moins 4 ; elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses moins 2 et 2. En bleu, l'hyperbole H, à deux branches. Les deux courbes se touchent sans se traverser au point A, d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 3, et se coupent au point B, d'abscisse 2 sur l'axe des abscisses. Pour x négatif, la parabole est au-dessus de l'hyperbole, sauf en A où elles se touchent ; pour x entre 0 et 2, elle est au-dessous ; pour x supérieur à 2, elle est au-dessus.

EXEMPLE TRAITÉ

Résous graphiquement $f(x) = g(x)$, puis $x^3 - 4x = 2 - x$, puis $f(x) \geq g(x)$, et retrouve ces résultats par le calcul.

La lecture — Les deux courbes se touchent au point $A(-1; -3)$ et se coupent au point $B(2; 0)$: les solutions de la première équation sont -1 et 2.

La deuxième équation — Pour x non nul, on divise les deux membres par x et on retrouve la première équation. Et 0 n'est pas solution : elle a donc les mêmes solutions, -1 et 2.

$x(x^2 - 4) = 2 - x \iff x^2 - 4 = \frac{-x+2}{x}$

L'inéquation — La parabole est au-dessus de l'hyperbole pour tous les x strictement négatifs, et pour x supérieur ou égal à 2.

$S =]-\infty; 0[\cup [2; +\infty[$

La factorisation — On met x en facteur, puis on reconnaît une différence de deux carrés.

$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$

Par le calcul — On ramène tout dans le premier membre, et on met $x - 2$ en facteur : on retrouve les solutions 2 et -1.

$x(x-2)(x+2) + (x-2) = (x-2)(x^2 + 2x + 1) = (x-2)(x+1)^2$

Le signe — Pour x non nul, la différence des deux fonctions a le signe du quotient de $x - 2$ par x, sauf en -1 où elle s'annule : elle est positive pour x négatif et pour x supérieur à 2.

$f(x) - g(x) = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x}$

À ne pas faire : Les courbes se touchent en A sans se traverser, donc -1 n'est pas une solution de $f(x) = g(x)$ — -1 est une solution : $f(-1) = g(-1) = -3$. Un point commun aux deux courbes donne une solution, que les courbes se croisent ou qu'elles se touchent seulement.

---

31. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : cordes parallèles

CE QU'IL DIT

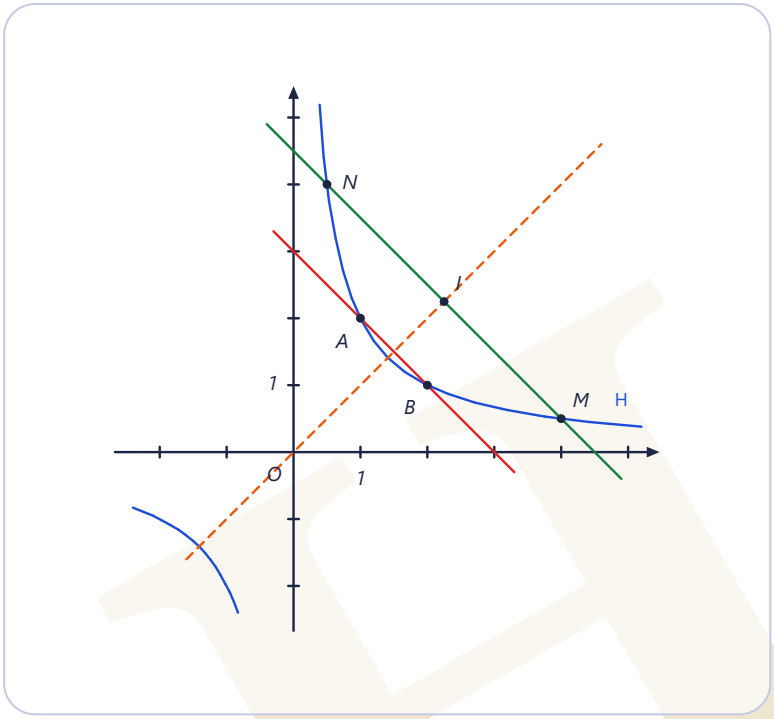
Problème bech nemchiw ab3ed. 3la l'hyperbole H d'équation y égale deux sur x, ne5dhou zouz points A w B, les abscisses mte3hom a w b. Le coefficient directeur mta3 la droite AB houwa moins deux sur a b. Idhan zouz cordes, AB w CD, parallèles si et seulement si a b égale c d. Tawa a égale un w b égale deux : le produit deux. Ken M 3andou l'abscisse x, la parallèle t9oss H fi N, elli l'abscisse mte3ou deux sur x. W le milieu I mta3 MN 3andou les deux coordonnées kif kif : I yet7arrek 3la la droite d'équation y égale x.

points A w B ، les ناخذو زوز ، l'hyperbole H d'équation y égale deux sur x على . باش نمشيو أبعد problème
cordes ، إذن زوز . moins deux sur a b هو la droite A B متاع a w b . le coefficient directeur متاعهم abscisses
. a égale un w b égale deux : le produit deux تولّة . A B w C D ، parallèles si et seulement si a b égale c d
M متاع deux sur x . w le milieu I متاعو l'abscisse اللي ، N في H تقصّ l'abscisse x ، la parallèle عندو M كان
. la droite d'équation y égale x على يتحرّك : I كيف كيف les deux coordonnées عندو N

Un problème pour aller plus loin. Sur l'hyperbole H d'équation y égale deux sur x, prenons deux points A et B, d'abscisses a et b. Le coefficient directeur de la droite A B est moins deux sur a b. Donc deux cordes, A B et C D, sont parallèles si et seulement si a b égale c d. Maintenant a égale un et b égale deux : le produit vaut deux. Si M a pour abscisse x, la parallèle recoupe H en N, d'abscisse deux sur x. Et le milieu I de M N a ses deux coordonnées égales : I se déplace sur la droite d'équation y égale x.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par H l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$. Soit A, B, C et D quatre points distincts de H, d'abscisses respectives a, b, c et d.

1. Montre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $ab = cd$.
2. On prend $a = 1$ et $b = 2$. Soit M un point de H d'abscisse x. La parallèle à (AB) passant par M recoupe l'hyperbole H en un point N. On note I le milieu du segment $[MN]$. Montre que le point I varie sur une droite, lorsque le point M varie sur l'hyperbole H.



Deux cordes parallèles de H, et le milieu I de [MN].

Un repère orthonormé d'origine O et l'hyperbole H d'équation y égale 2 sur x. En rouge, la droite (AB), qui coupe H aux points A, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, et B, d'abscisse 2 et d'ordonnée 1. Au palier 2, en vert, la parallèle à (AB) passant par le point M de H, d'abscisse 4 et d'ordonnée 0,5 : elle recoupe H au point N, d'abscisse 0,5 et d'ordonnée 4. Au palier 3, le milieu I du segment [MN], d'abscisse 2,25 et d'ordonnée 2,25, est marqué sur la droite d'équation y égale x, tracée en pointillés orange.

EXEMPLE TRAITÉ

Montre que deux cordes de H sont parallèles si et seulement si $ab = cd$, puis trouve la droite sur laquelle varie le milieu I.

Un coefficient directeur — Les points A et B ont pour ordonnées $\frac{2}{a}$ et $\frac{2}{b}$. On calcule le coefficient directeur de la droite (AB).

$\frac{\frac{2}{b}-\frac{2}{a}}{b-a} = \frac{2(a-b)}{ab(b-a)} = -\frac{2}{ab}$

Le parallélisme — De même, la droite (CD) a pour coefficient directeur $-\frac{2}{cd}$. Deux droites sont parallèles quand leurs coefficients directeurs sont égaux.

$-\frac{2}{ab} = -\frac{2}{cd} \iff ab = cd$

Le point N — Avec $a = 1$ et $b = 2$, le produit vaut 2. Si n est l'abscisse de N, le parallélisme donne $x \times n = 2$: l'abscisse de N est $\frac{2}{x}$, et son ordonnée est x.

$N\left(\frac{2}{x}; x\right)$

Le milieu — Les coordonnées de I sont les demi-sommes de celles de M et de N : elles sont égales.

$x_I = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = y_I$

I varie sur la droite d'équation $y = x$

À ne pas faire : Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{2}{ab}$ — Il vaut $-\frac{2}{ab}$. En réduisant au même dénominateur, le numérateur est $2(a-b)$, et $a-b$ est l'opposé de $b-a$: il reste un signe moins.

32. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : parabole et droite

CE QU'IL DIT

Problème e5er : parabole P w droite D, w nlawjou 3la les points d'intersection A w B. Les points hedhom mouch 3la les graduations, idhan ma na9rawhomch : na7sbouhom. Na9raw les points el wadh7in berk. P : le sommet mte3ha S de coordonnées deux et un, w tet3adda men E de coordonnées un et zéro : y égale moins (x moins deux) au carré plus un. D : tet3adda men F de coordonnées deux et moins trois, w t9oss l'axe des ordonnées fi moins un virgule cinq : y égale moins trois quarts de x moins trois demis. W ba3d n7ellou l'équation : quatre x au carré moins dix-neuf x plus six égale zéro.

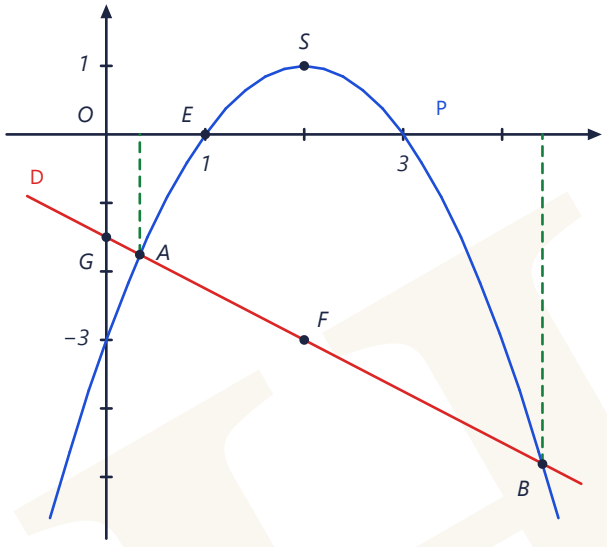
هاذم موش les points d'intersection A w B . les points نلوّجو على parabole P w droite D ، w : آخر problème
S متاعها P : le sommet . برك الواضحين les points نقراو . نحسبوهش : إذن ما نقراوهمش ، les graduations على
E de coordonnées un et zéro : y égale moins (x moins deux) من تتعدّى de coordonnées deux et un ، w
في l'axe des ordonnées تقصّ F de coordonnées deux et moins trois ، w من تتعدّى : au carré plus un . D
l'équation : quatre بعد نحلّو moins un virgule cinq : y égale moins trois quarts de x moins trois demis . w
. x au carré moins dix-neuf x plus six égale zéro

Un autre problème : une parabole P et une droite D, et on cherche leurs points d'intersection A et B. Ces points ne sont pas sur les graduations, donc on ne les lit pas : on les calcule. On ne lit que les points sûrs. P : sommet S de coordonnées deux et un, et elle passe par E de coordonnées un et zéro : y égale moins (x moins deux) au carré plus un. D : elle passe par F de coordonnées deux et moins trois, et coupe l'axe des ordonnées en moins un virgule cinq : y égale moins trois quarts de x moins trois demis. Ensuite on résout l'équation : quatre x au carré moins dix-neuf x plus six égale zéro.

Dans la figure, P est une parabole et D est une droite. Détermine les coordonnées des points A et B, intersection de P et D.

On lit sur la figure des points sûrs : P a pour sommet $S(2;1)$ et passe par $E(1;0)$; D passe par $F(2;-3)$ et coupe l'axe des ordonnées au point $G(0;-1{,}5)$.

Indications. Utilise ces points pour déterminer une équation de P et une équation de D, puis calcule les coordonnées des points A et B.



La parabole P, la droite D et leurs points communs A et B.

Un repère orthogonal d'origine O. En bleu, la parabole P, tournée vers le bas : son sommet est S, d'abscisse 2 et d'ordonnée 1, et elle passe par le point E, d'abscisse 1 sur l'axe des abscisses. En rouge, la droite D, qui descend : elle passe par le point G, d'abscisse 0 et d'ordonnée moins 1,5, et par le point F, d'abscisse 2 et d'ordonnée moins 3. Au palier 2, les deux points d'intersection sont marqués : A, d'abscisse voisine de 0,3, et B, d'abscisse voisine de 4,4 ; ils ne sont pas sur les graduations.

EXEMPLE TRAITÉ

Trouve une équation de P et une équation de D, puis calcule les coordonnées de leurs points d'intersection A et B.

La parabole — Sommet $S(2;1)$: la forme est $y = a(x-2)^2 + 1$. Elle passe par $E(1;0)$: $a + 1 = 0$, donc $a = -1$.

$P : y = -(x-2)^2 + 1 = -x^2 + 4x - 3$

La droite — De G à F, l'abscisse augmente de 2 et l'ordonnée diminue de $1{,}5$: le coefficient directeur est $-\dfrac{3}{4}$, et l'ordonnée à l'origine $-\dfrac{3}{2}$.

$D : y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

L'équation — On écrit que les deux ordonnées sont égales, on multiplie par 4, puis on regroupe dans un seul membre.

$-4x^2 + 16x - 12 = -3x - 6 \iff 4x^2 - 19x + 6 = 0$

Les abscisses — Le discriminant vaut $361 - 96$, c'est-à-dire 265 : l'équation a deux racines.

$x_A = \frac{19-\sqrt{265}}{8} \approx 0{,}34 \quad ; \quad x_B = \frac{19+\sqrt{265}}{8} \approx 4{,}41$

Les ordonnées — On remplace dans l'équation de la droite.

$y_A = \frac{-105+3\sqrt{265}}{32} \approx -1{,}76 \quad ; \quad y_B = \frac{-105-3\sqrt{265}}{32} \approx -4{,}81$

À ne pas faire : On lit sur la figure que A a pour abscisse $0{,}3$: c'est la réponse — La lecture donne une valeur approchée ; le calcul donne $x_A = \dfrac{19 - \sqrt{265}}{8}$. Les points A et B ne tombent pas sur les graduations : on lit des points sûrs pour trouver les équations, puis on calcule.

---

33. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : un lieu de points

CE QU'IL DIT

Problème e5ir : lieu de points. 3andna la droite D d'équation y égale moins deux, w point M yet7arrek 3liha. Nrasmou la perpendiculaire à D fi M, w la perpendiculaire à la droite OM fi O : yetle9aw fi point N. Esso2al : ki M yet7arrek, N win yemchi ? N7ottou m l'abscisse mta3 M. N 3andou nafs l'abscisse m. W le triangle OMN rectangle en O : b Pythagore nal9aw l'ordonnée mta3 N : m au carré sur deux. Idhan N yet7arrek 3la la parabole d'équation y égale un demi de x au carré.

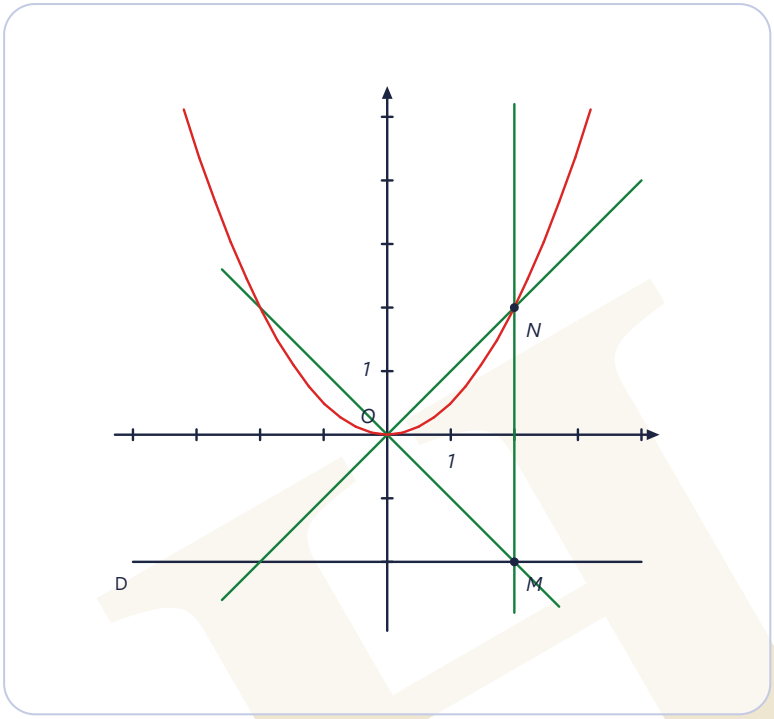
أخير problème : lieu de points . عندنا M point ، w la droite D d'équation y égale moins deux . يتحرّك عليها
نرسمو D à la perpendiculaire في M ، w la perpendiculaire à la droite O M في O : يتلاقاو في point N .
السؤال : كي M يتحرّك ، N وين يمشي ؟ نحطّو m l'abscisse متاع N . M عندو نفس l'abscisse m . w le triangle O
M N rectangle en O : بـ Pythagore نلقاو l'ordonnée متاع m au carré sur deux : N . إذن N يتحرّك على la
parabole d'équation y égale un demi de x au carré .

Un dernier problème : un lieu de points. On a la droite D d'équation y égale moins deux, et un point M qui se déplace dessus. On trace la perpendiculaire à D en M, et la perpendiculaire à la droite O M en O : elles se coupent en un point N. La question : quand M se déplace, où va N ? Notons m l'abscisse de M. N a la même abscisse m. Et le triangle O M N est rectangle en O : par Pythagore, on trouve l'ordonnée de N : m au carré sur deux. Donc N se déplace sur la parabole d'équation y égale un demi de x au carré.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D la droite d'équation $y = -2$ et M un point variable de D. La perpendiculaire à D en M et la perpendiculaire à la droite (OM) en O se coupent en un point N.

On se propose de déterminer le **lieu** du point N, c'est-à-dire la ligne qu'il décrit, lorsque le point M varie sur la droite D.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



Quand M parcourt D, le point N décrit une parabole.

Un repère orthonormé d'origine O. La droite D, horizontale, a pour équation y égale moins 2. Le point M est sur D, à l'abscisse 2. Une droite verte passe par O et M. Au palier 2, deux autres droites vertes : la perpendiculaire à D en M, verticale, et la perpendiculaire à la droite (OM) en O ; elles se coupent au point N, d'abscisse 2 et d'ordonnée 2. Au palier 3, en rouge, la parabole d'équation y égale un demi de x au carré, de sommet O : elle passe par N.

EXEMPLE TRAITÉ

Détermine le lieu du point N lorsque le point M varie sur la droite D.

Les coordonnées — On note m l'abscisse de M : son ordonnée est -2. La perpendiculaire à D en M est la droite verticale d'équation $x = m$: le point N a pour abscisse m, et on note y son ordonnée.

L'angle droit — Le triangle OMN est rectangle en O. Le repère est orthonormé : on applique le théorème de Pythagore.

$$OM^2 + ON^2 = MN^2$$

Les trois carrés — On calcule chaque carré avec les coordonnées ; les points M et N sont sur la même verticale.

$$(m^2 + 4) + (m^2 + y^2) = (y + 2)^2$$

Simplifier — On développe le second membre, et il ne reste que deux termes de chaque côté.

$$2m^2 = 4y \iff y = \frac{m^2}{2}$$

Le lieu — Le point N a pour abscisse m et pour ordonnée la moitié du carré de m : quand M parcourt D, le point N parcourt une parabole de sommet O.

> le lieu de N est la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2}$

À ne pas faire : $MN = y - 2$ — $MN = y + 2$. Le point M a pour ordonnée -2 : sur la même verticale, la distance de M à N est l'écart entre y et -2, donc $y + 2$.

34. REMARQUE

Pour la culture : phares et antennes

CE QU'IL DIT

W fel e5er, la parabole fi 7yetna. El koura elli tarmiha tarsem parabole, ken nensew la résistance de l'air. W ken ndawrou parabole 7awl l'axe mte3ha, nal9aw miroir parabolique. Edhaw elli yo5rej men le foyer yet3akes w yo5rej fi rayons parallèles : hakka ye5dmou les phares mta3 el karhba. W bel 3aks, les rayons parallèles elli yjiw yetlammou el koll fi le foyer : hakka te5dem l'antenne parabolique, w les télescopes, w le four solaire elli yousel l trois mille cinq cents degrés.

w في الآخر ، la parabole في حياتنا . الكورة اللي ترميها ترسم parabole ، كان ننساو w . la résistance de l'air كان ندوّرو parabole حول l'axe متاعها ، نلقاو miroir parabolique . الضو اللي يخرج من le foyer يتعكس w يخرج في rayons parallèles : هكّا يخدمو les phares متاع الكرهبة . w بالعكس ، les rayons parallèles اللي يجيو يتلمّو الكل في le foyer : هكّا تخدم w le four solaire ، w les télescopes ، l'antenne parabolique اللي يوصل لـ trois mille cinq cents degrés .

Et pour finir, la parabole dans notre vie. La balle que tu lances dessine une parabole, si on néglige la résistance de l'air. Et si on fait tourner une parabole autour de son axe, on obtient un miroir parabolique. La lumière qui part du foyer se réfléchit et ressort en rayons parallèles : c'est ainsi que fonctionnent les phares d'une voiture. Inversement, les rayons parallèles qui arrivent se rassemblent tous au foyer : c'est ainsi que fonctionnent l'antenne parabolique, les télescopes, et le four solaire qui atteint trois mille cinq cents degrés.

La trajectoire d'un projectile, tel qu'une balle ou un ballon, est une **parabole** si l'on néglige la résistance de l'air.

En faisant tourner une parabole autour de son axe de symétrie, on obtient la forme des **miroirs paraboliques**. Ces miroirs réfléchissent, sous la forme de rayons parallèles, les rayons émis par une source lumineuse située au **foyer** de la parabole : on utilise ce genre de réflecteurs pour les phares des automobiles et pour les projecteurs.

À l'inverse, des rayons qui arrivent parallèlement à l'axe convergent tous, en se reflétant, en un même point, le foyer. C'est le principe des télescopes, des antennes paraboliques — le récepteur est placé au foyer — et du four solaire, qui permet d'atteindre des températures de l'ordre de 3500 degrés.

Maths à la carte
ABDELHADER HAMMAMI

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. La courbe de $x \mapsto x^2$ est la parabole P de sommet O et d'axe la droite d'équation $x = 0$.

   > La courbe mta3 x au carré hiya la parabole P : le sommet O, w l'axe la droite d'équation x égale zéro.
   > *La courbe de x au carré est la parabole P : sommet O, et axe la droite d'équation x égale zéro.*

2. $f(x) = ax^2$ avec $a \neq 0$: parabole de sommet O, tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.

   > f de x égale a x au carré : parabole de sommet O, ma7loula lel fou9 ken a positif, w lel wta ken a négatif.
   > *f de x égale a x au carré : parabole de sommet O, tournée vers le haut si a est positif, vers le bas si a est négatif.*

3. $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$: parabole de sommet $S(\alpha ; \beta)$ et d'axe $x = \alpha$.

   > f de x égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta : parabole, le sommet mte3ha S de coordonnées alpha et bêta, w l'axe x égale alpha.
   > *f de x égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta : parabole de sommet S de coordonnées alpha et bêta, et d'axe x égale alpha.*

4. $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

   > Koll trinôme a x au carré plus b x plus c yetkteb hakka, b alpha égale moins b sur deux a, w bêta égale f de alpha.
   > *Tout trinôme a x au carré plus b x plus c s'écrit ainsi, avec alpha égale moins b sur deux a, et bêta égale f de alpha.*

5. La courbe de $x \mapsto \sqrt{x + b}$ est l'image de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-b\vec{i}$.

   > La courbe mta3 racine carrée de (x plus b) hiya l'image mta3 la courbe mta3 la racine carrée par la translation de vecteur moins b i.
   > *La courbe de racine carrée de (x plus b) est l'image de la courbe de la racine carrée par la translation de vecteur moins b i.*

6. La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est l'hyperbole H de centre O et d'asymptotes $x = 0$ et $y = 0$.

   > La courbe mta3 un sur x hiya l'hyperbole H : le centre O, w les asymptotes x égale zéro w y égale zéro.
   > *La courbe de un sur x est l'hyperbole H : centre O, et asymptotes x égale zéro et y égale zéro.*

7. $f(x) = \dfrac{a}{x + \alpha}$: hyperbole de centre $I(-\alpha ; 0)$. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \beta$: hyperbole de centre $I(0 ; \beta)$.

   > a sur la parenthèse x plus alpha : hyperbole de centre I de coordonnées moins alpha et zéro. W un sur x, plus bêta : hyperbole de centre I de coordonnées zéro et bêta.
   > *a sur la parenthèse x plus alpha : hyperbole de centre I de coordonnées moins alpha et zéro. Et un sur x, plus bêta : hyperbole de centre I de coordonnées zéro et bêta.*

8. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$: hyperbole de centre $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$, d'asymptotes $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$.

> (a x plus b) sur (c x plus d) : hyperbole, le centre mte3ha I de coordonnées moins d sur c et a sur c, w les asymptotes x égale moins d sur c w y égale a sur c.
> *(a x plus b) sur (c x plus d) : hyperbole de centre I de coordonnées moins d sur c et a sur c, et d'asymptotes x égale moins d sur c et y égale a sur c.*

9. Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points communs aux deux courbes ; $f(x) < g(x)$ là où la courbe de f est au-dessous de celle de g.

> Les solutions mta3 f de x égale g de x houma les abscisses mta3 les points communs, w f de x inférieur à g de x win la courbe mta3 f ta7t la courbe mta3 g.
> *Les solutions de f de x égale g de x sont les abscisses des points communs, et f de x est inférieur à g de x là où la courbe de f est au-dessous de celle de g.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna les fonctions de référence. Tfakker : la parabole 3andha sommet w axe de symétrie, w nal9awhom men la forme a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta. L'hyperbole 3andha centre w zouz asymptotes : la verticale win le dénominateur égale zéro, w l'horizontale y égale a sur c. W 9bal koll chay, chouf l'ensemble de définition. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا les fonctions de référence . تفكّر : la parabole عندها w ، sommet w axe de symétrie نلقاوهم من
زوز centre w عندها la forme a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta . l'hyperbole
قُبَلْ كل شي ، le dénominateur égale zéro ، w l'horizontale y égale a sur c . w وين asymptotes : la verticale
. exercices لـلّه بالله . l'ensemble de définition شوف

Voilà, nous avons terminé les fonctions de référence. Retiens : la parabole a un sommet et un axe de symétrie, qu'on trouve avec la forme a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta. L'hyperbole a un centre et deux asymptotes : la verticale là où le dénominateur égale zéro, et l'horizontale y égale a sur c. Et avant tout, regarde l'ensemble de définition. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · POUR COMPRENDRE : LA FONCTION CARRÉ

chnowa fonction de référence | c'est quoi une fonction de référence | fonctions de référence chnowa ma3neha | pourquoi on les appelle fonctions de référence

CE QU'IL RÉPOND

Houma les fonctions el asesiya elli na7fdhouhom : x^{2}, $\sqrt{x}$ w $\frac{1}{x}$. Koll wa7da nedrsouha marra, hiya w errasm mte3ha, w ba3d les fonctions lo5rin mta3 el chapitre nal9awhom menha, ki n7arrkou errasm.

هوما les fonctions الأساسيّة اللي نحفظوهم : x au carré ، racine carrée de x ، w un sur x . كل وحدة ندرسوها مرّة ، هي w الرسم متاعها ، w بعد les fonctions الأخرين متاع الـ chapitre نلقاوهم منها ، كي نحرّكو الرسم .

Ce sont les fonctions de base qu'on connaît par cœur : x au carré, racine carrée de x, et un sur x. On étudie chacune une fois, avec son dessin, puis les autres fonctions du chapitre s'en déduisent, en déplaçant ce dessin.

QUESTION 2 · LA PARABOLE D'ÉQUATION Y = X²

chnowa la parabole | c'est quoi une parabole | définition de la parabole | parabole chnowa ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

CE QU'IL RÉPOND

La parabole hiya el esm mta3 la courbe mta3 la fonction x^{2}, w zid mta3 koll fonction $ax^{2} + bx + c$, w a non nul. Ken a positif, tji kif el kes, w ken a négatif, kif el 9obba.

la parabole هي الاسم متاع la courbe متاع w ، la fonction x au carré زيد متاع كل fonction a x au carré plus b x plus c ، w a non nul . كان a positif ، تجي كيف الكاس ، w كان a négatif ، كيف القبّة .

La parabole, c'est le nom de la courbe de la fonction x au carré, et plus généralement de toute fonction a x au carré plus b x plus c, avec a non nul. Elle a la forme d'une coupe quand a est positif, et d'un dôme quand a est négatif.

QUESTION 3 · FONCTIONS DU TYPE F(X) = AX² + BX + C

kifech nal9a le sommet mta3 la parabole | comment trouver le sommet d'une parabole | chnowa le sommet | sommet de ax²+bx+c kifech na7sbou

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$S(\alpha;\beta) \qquad \alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha)$$

CE QU'IL RÉPOND

Le sommet houwa el point win la parabole tbaddel ettri9 : el awta ken a positif, w el a3la ken a négatif. Ken $f(x) = a(x - \alpha)^{2} + \beta$, le sommet houwa $S(\alpha ; \beta)$. W l trinôme $ax^{2} + bx + c$, a7seb $\alpha = -\frac{b}{2a}$, w ba3d $\beta = f(\alpha)$.

le sommet هو الـ point وين la parabole تبدّل الطريق : الأوطى كان w ، a positif الأعلى كان a négatif . كان f de x égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta ، le sommet S de coordonnées هو alpha égale moins b sur deux a ، w احسب ، trinôme a x au carré plus b x plus c لـ alpha et bêta . w بعد bêta égale f de alpha .

Le sommet est le point où la parabole fait demi-tour : le plus bas si a est positif, le plus haut si a est négatif. Si f de x égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta, le sommet est S de coordonnées alpha et bêta. Et pour un trinôme a x au carré plus b x plus c, calcule alpha égale moins b sur deux a, puis bêta égale f de alpha.

QUESTION 4 · LA PARABOLE D'ÉQUATION Y = X²

chnowa l'axe de symétrie mta3 la parabole | c'est quoi l'axe d'une parabole | l'axe de la parabole kifech nal9ah | axe de symétrie de la parabole

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$\text{axe} : x = \alpha$

CE QU'IL RÉPOND

L'axe mta3 parabole houwa l'axe de symétrie mte3ha : la droite verticale elli tet3adda men le sommet. Ken tatwi el war9a 3liha, ezzouz ansaf mta3 la parabole yjiw fou9 b3adhhom. L parabole le sommet mte3ha $S(\alpha ; \beta)$, hiya la droite d'équation $x = \alpha$.

l'axe de symétrie هو parabole متاع l'axe متاع parabole le sommet . كان تطوي اللي تتعدّى من la droite verticale : متاعها
الورقة عليها ، الزوز أنصاف متاع la parabole يجيو فوق بعضهم . لـ S de متاعها parabole le sommet
. la droite d'équation x égale alpha هي ، coordonnées alpha et bêta

L'axe d'une parabole est son axe de symétrie : la droite verticale qui passe par le sommet. Si tu plies la feuille le long de cette droite, les deux moitiés de la parabole se superposent. Pour une parabole de sommet S de coordonnées alpha et bêta, c'est la droite d'équation x égale alpha.

QUESTION 5 · FONCTIONS DU TYPE F(X) = AX²

kifech na3ref la parabole ma7loula lel fou9 walla lel wta | comment savoir si la parabole est tournée vers le haut ou vers le bas | parabole vers le haut ou vers le bas | a négatif : la parabole vers le bas ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$a > 0$: vers le haut $\qquad a < 0$: vers le bas

CE QU'IL RÉPOND

Le signe de a houwa elli y9arrer. Ken a positif, la parabole ma7loula lel fou9, w le sommet mte3ha houwa el point el awta. Ken a négatif, ma7loula lel wta, w le sommet mte3ha houwa el point el a3la.

le signe de a هو اللي يقرّر . كان la parabole ، a positif محلولة للفوق ، w le sommet متاعها هو الـ point
الأوطى . كان a négatif ، محلولة للوطا ، w le sommet متاعها هو الـ point الأعلى .

C'est le signe de a qui décide. Si a est positif, la parabole est tournée vers le haut, et son sommet est le point le plus bas. Si a est négatif, elle est tournée vers le bas, et son sommet est le point le plus haut.

QUESTION 6 · EXEMPLE : LIRE LE COEFFICIENT

3lech parabole dhay9a w o5ra wes3a | pourquoi une parabole est plus étroite qu'une autre | parabole large ou étroite | a kbir la parabole tedhya9

CE QU'IL RÉPOND

Hedha yetba3 el kobr mta3 a, blech le signe mte3ou. L $f(x) = ax^{2}$, le point d'abscisse 1 3andou l'ordonnée a. B $a = 2$, la courbe tatla3 asra3 men x^{2} : twalli dhay9a akthar. B $a = \frac{1}{2}$, tatla3 bechwaya : twalli wes3a akthar.

هذا يتبع الكبر متاع a ، بلاش le signe متاعو . لـ le point d'abscisse un ، عندو f de x égale a x au carré ، a égale un demi . بـ x au carré تطلع أسرع من a égale deux ، la courbe . l'ordonnée a : تولّي ضيّقة أكثر تطلع بالشويّة : تولّي واسعة أكثر .

Cela dépend de la grandeur de a, sans son signe. Pour f de x égale a x au carré, le point d'abscisse un a pour ordonnée a. Avec a égale deux, la courbe monte plus vite que x au carré : elle est plus étroite. Avec a égale un demi, elle monte moins vite : elle est plus large.

QUESTION 7 · POUR COMPRENDRE : LA COURBE DE (X − 2)²

3lech (x-2)² temchi lel imin mouch lel isar | pourquoi x moins 2 décale la courbe vers la droite | x plus 2 : la courbe va vers la gauche pourquoi | décalage à droite ou à gauche kifech na3ref

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$(x-2)^2$: vers la droite $(x+2)^2$: vers la gauche

CE QU'IL RÉPOND

Chouf win la fonction twalli zéro. L $(x - 2)^{2}$, le sommet win $x - 2 = 0$, ya3ni fi $x = 2$: la courbe temchi b 2 lel imin. L $(x + 2)^{2}$, fi $x = -2$: lel isar. W nafs echay l $\sqrt{x + 2}$, elli tabda men -2.

شوف وين la fonction تولّي zéro . لـ (x moins deux) ، le sommet au carré ، وين x moins deux égale zéro ، يعني في x égale deux : la courbe تمشي بـ deux لليمين . لـ (x plus deux) au carré ، في x égale moins deux : لليسار . w نفس الشي لـ racine carrée de (x plus deux) ، اللي تبدا من moins deux .

Regarde où la fonction s'annule. Pour (x moins deux) au carré, le sommet est là où x moins deux égale zéro, donc en x égale deux : la courbe est décalée de deux vers la droite. Pour (x plus deux) au carré, c'est en x égale moins deux : vers la gauche. Et c'est pareil pour racine carrée de (x plus deux), qui part de moins deux.

QUESTION 8 · POUR COMPRENDRE : LA COURBE DE X² + 3/2

chnowa el 3ala9a bin translation w parabole | quel est le lien entre la translation et la courbe | translation de vecteur 2i chnowa ta3mel lel courbe | kifech n7arrek la courbe b translation

CE QU'IL RÉPOND

La translation t7arrek la courbe el koll blech ma tbaddel echakl mte3ha. Ki nbaddlou x b $x - \alpha$, la courbe tet7arrek b α fi la direction de $\vec{i}$: horizontalement. W ki nzidou β l $f(x)$, tet7arrek b β fi la direction de $\vec{j}$: verticalement. Hakka nemchiw men ax^{2} l $a(x - \alpha)^{2} + \beta$, b 2 translations.

تتحرّك x moins alpha ، la courbe بـ x كي نبدّلو . الكل بلاش ما تبدّل الشكل متاعها la courbe تحرّك la translation la direction de في bêta تتحرّك بـ ، f de x لـ bêta كي نزيدو la direction de i : horizontalement . w في alpha بـ ، a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta لـ a x au carré من هكّا نمشيو . j : verticalement زوز translations .

Une translation déplace toute la courbe sans changer sa forme. Remplacer x par x moins alpha déplace la courbe de alpha dans la direction de i : horizontalement. Et ajouter bêta à f de x la déplace de bêta dans la direction de j : verticalement. C'est ainsi qu'on passe de a x au carré à a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta, par deux translations.

QUESTION 9 · POUR COMPRENDRE : LA COURBE DE 2X² + 4X − 1

chnowa la forme canonique | c'est quoi la forme canonique d'un trinôme | kifech nal9a la forme canonique | forme canonique 3lech nesta3mlouha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

CE QU'IL RÉPOND

Hiya el ktiba $a(x - \alpha)^{2} + \beta$ mta3 trinôme $ax^{2} + bx + c$. Nal9awha ki n5arrjou a k facteur, w ba3d nkamlou le carré. W hiya ta3tina toul le sommet mta3 la parabole, $S(\alpha ; \beta)$, w l'axe mte3ha, $x = \alpha$.

trinôme a x au carré plus b x plus c متاع a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta هي الكتيبة la parabole ، de متاع le sommet طول هي تعطينا le carré . w بعد نكمّلو facteur ، w كـ a نلقاوها كي نخرّجو . coordonnées alpha et bêta ، w l'axe متاعها ، x égale alpha .

C'est l'écriture a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta d'un trinôme a x au carré plus b x plus c. On l'obtient en mettant a en facteur, puis en complétant le carré. Elle donne tout de suite le sommet de la parabole, de coordonnées alpha et bêta, et son axe, x égale alpha.

QUESTION 10 · FONCTIONS DU TYPE F(X) = AX² + BX + C

kifech na7seb alpha w bêta | comment calculer alpha et bêta | alpha égale quoi | 3lech alpha égale moins b sur 2a

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha)$$

CE QU'IL RÉPOND

$\alpha = -\frac{b}{2a}$. 5ater ki tdévelopper $a(x - \alpha)^{2}$, tal9a $-2a\alpha x$, w hedha lezem ysewi bx. W ba3d $\beta = f(\alpha)$: tbaddel x b α fel trinôme. Mithel : l $x^{2} - 2x - 1$, $\alpha = 1$ w $\beta = -2$.

، développer a fois la parenthèse x moins alpha, au carré تـ خاطر كي . alpha égale moins b sur deux a
في الـ alpha بـ x تبدّل : bêta égale f de alpha بعد b x . w هذا لازم يساوي moins deux a alpha x ، w تلقى
. x au carré moins deux x moins un ، alpha égale un ، w bêta égale moins deux لـ : مثال . trinôme

alpha égale moins b sur deux a. En effet, quand on développe a fois la parenthèse x moins alpha, au carré, on trouve moins deux a alpha x, qui doit être égal à b x. Ensuite bêta égale f de alpha : on remplace x par alpha dans le trinôme. Exemple : pour x au carré moins deux x moins un, alpha égale un, et bêta égale moins deux.

QUESTION 11 · LIRE LES SIGNES DE A, B ET C

kifech na9ra le signe de b 3la la parabole | comment lire les signes de a, b et c sur la courbe | signe de c kifech nal9ah men la courbe | le signe de b avec le sommet

CE QU'IL RÉPOND

Le signe de a : positif ken la parabole ma7loula lel fou9, w négatif ken ma7loula lel wta. Le signe de c : $c = f(0)$, ya3ni l'ordonnée mta3 el point win la parabole t9oss l'axe des ordonnées. W le signe de b : l'abscisse du sommet hiya $-\frac{b}{2a}$; ki ta3ref le signe mte3ha w mta3 a, tal9a mta3 b.

le signe de c : c égale f . كان محلولة للوطا w négatif ، محلولة للفوق la parabole كان le signe de a : positif
l'axe des ordonnées . w le signe de b : تقصّ la parabole وين point متاع الـ l'ordonnée يعني ، de zéro
. b تلقى متاع ، a متاع w متاعها le signe تعرف كي ؛ moins b sur deux a هي l'abscisse du sommet

Le signe de a : positif si la parabole est tournée vers le haut, négatif si elle est tournée vers le bas. Le signe de c : c égale f de zéro, l'ordonnée du point où la parabole coupe l'axe des ordonnées. Et le signe de b : l'abscisse du sommet est moins b sur deux a ; quand tu connais son signe et celui de a, tu en déduis celui de b.

QUESTION 12 · LIRE LES SIGNES DE A, B ET C

kifech na3ref 9addech racines 3and el trinôme men la courbe | comment lire le nombre de racines sur la parabole | nombre de racines du trinôme graphiquement | combien de racines quand la parabole ne rencontre pas l'axe

CE QU'IL RÉPOND

Les racines mta3 el trinôme houma les abscisses mta3 les points win la parabole tal9a l'axe des abscisses. Ken t9ossou fi zouz points, famma 2 racines. Ken tmessou fi le sommet berk, racine wa7da. W ken ma tal9ahech, el trinôme ma 3andouch racine.

كان . l'axe des abscisses تلقى la parabole وين les points متاع les abscisses هوما trinôme الـ متاع les racines
تقصّو في زوز points ، فمّا deux racines . كان تمسّو في le sommet برك ، racine وحدة . w كان ما تلقاهش ، الـ
. racine ما عندوش trinôme

Les racines du trinôme sont les abscisses des points où la parabole rencontre l'axe des abscisses. Si elle le coupe en deux points, il y a deux racines. Si elle le touche seulement en son sommet, une seule. Et si elle ne le rencontre pas, le trinôme n'a pas de racine.

QUESTION 13 · TROUVER L'ÉQUATION D'UNE PARABOLE

kifech nal9a l'équation mta3 parabole men el figure | comment trouver l'équation d'une parabole | équation de la parabole avec le sommet et un point | l'équation kifech nektebha ki na3ref le sommet w point

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

CE QU'IL RÉPOND

A9ra le sommet 9bal, $S(\alpha ; \beta)$: l'équation hiya $y = a(x - \alpha)^{2} + \beta$. Yeb9a a : 5oudh point e5er men la parabole, baddel x w y b les coordonnées mte3ou, w 7ell. Mithel : le sommet $S(2 ; -3)$ w point $A(0 ; -1)$: $4a - 3 = -1$, idhan $a = \frac{1}{2}$.

اقرا le sommet مُبَدْ ، هي de coordonnées alpha et bêta : l'équation y égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta. يبقى a : خوذ point آخر من la parabole ، بدّل x w y بـ les coordonnées متاعو ، w le sommet de coordonnées deux et moins trois ، w point de coordonnées zéro et moins un : : مثال . حلّ a égale un demi إذن ، quatre a moins trois égale moins un .

Lis d'abord le sommet, de coordonnées alpha et bêta : l'équation est y égale a fois la parenthèse x moins alpha, au carré plus bêta. Il reste a : prends un autre point de la parabole, remplace x et y par ses coordonnées, et résous. Exemple : sommet de coordonnées deux et moins trois, et point de coordonnées zéro et moins un : quatre a moins trois égale moins un, donc a égale un demi.

QUESTION 14 · EXEMPLE : LA HAUTEUR D'UNE BALLE

kifech nal9a le maximum mta3 trinôme | comment trouver la valeur maximale d'un trinôme | le minimum de ax^2+bx+c kifech na7sbou | maximum d'une fonction du second degré

CE QU'IL RÉPOND

Le maximum walla le minimum mta3 trinôme houwa l'ordonnée mta3 le sommet mta3 la parabole mte3ou. Ken a négatif, la parabole ma7loula lel wta : β houwa maximum. Ken a positif, β houwa minimum. W nal9awh ki $x = \alpha$, ya3ni $-\frac{b}{2a}$.

ولّا le maximum walla le minimum متاع trinôme هو l'ordonnée متاع le sommet متاع la parabole متاعو . كان a négatif ، la parabole محلولة للوطا : bêta هو maximum . كان bêta ، a positif هو w . minimum نلقاوه كي x égale alpha ، يعني a deux sur b moins .

Le maximum ou le minimum d'un trinôme, c'est l'ordonnée du sommet de sa parabole. Si a est négatif, la parabole est tournée vers le bas : bêta est un maximum. Si a est positif, bêta est un minimum. Il est atteint quand x égale alpha, c'est-à-dire moins b sur deux a.

QUESTION 15 · POUR COMPRENDRE : LA FONCTION RACINE CARRÉE

3lech racine carrée de x mouch définie ki x négatif | pourquoi la racine carrée n'existe pas pour un nombre négatif | ensemble de définition de racine de x plus b | racine carrée définie 3la chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$\sqrt{x+b}$: $x + b \geq 0 \iff x \geq -b$

CE QU'IL RÉPOND

5ater ma fammech réel 3andou carré négatif : la racine carrée mta3 nombre négatif ma fammech. Idhan $\sqrt{x}$ définie ken x positif ou nul. W l $\sqrt{x + b}$, lezem $x + b \ge 0$, ya3ni $x \ge -b$.

خاطر ما فمّاش عندو réel carré négatif : la racine carrée متاع nombre négatif ما فمّاش . إذن racine carrée x positif ou nul لـ (x plus b) racine carrée de ، لازم x plus b positif ou nul ، x يعني . w كان de x définie . supérieur ou égal à moins b

Parce qu'aucun réel n'a un carré négatif : la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. Donc racine carrée de x est définie seulement pour x positif ou nul. Et pour racine carrée de (x plus b), il faut x plus b positif ou nul, c'est-à-dire x supérieur ou égal à moins b.

QUESTION 16 · POUR COMPRENDRE : LA FONCTION RACINE CARRÉE

3lech la racine carrée croissante | pourquoi la fonction racine carrée est croissante | racine carrée croissante walla décroissante | sens de variation de la racine carrée

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

CE QU'IL RÉPOND

5oudh zouz réels positifs a w b, w $a < b$. La différence $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ tetkteb $\frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$: hedha positif. Idhan koll ma x yekber, la racine carrée mte3ou tekber : la fonction croissante 3la $[0 ; +\infty[$.

خوذ زوز réels positifs a w b ، w a inférieur à b . la différence racine de b moins racine de a تتكتب b moins) sur (racine de b plus racine de a) (a هذا : positif . إذن كل ما x يكبر ، la racine carrée متاعو تكبر : la fonction على croissante . l'intervalle de zéro à plus l'infini

Prends deux réels positifs a et b, avec a inférieur à b. La différence racine de b moins racine de a s'écrit (b moins a) sur (racine de b plus racine de a) : c'est positif. Donc plus x est grand, plus sa racine carrée est grande : la fonction est croissante sur l'intervalle de zéro à plus l'infini.

QUESTION 17 · FONCTIONS DU TYPE F(X) = √(X + B)

kifech nersem la courbe mta3 racine de x plus 2 | comment tracer la courbe de racine carrée de x plus b | tracer racine de x+b à partir de racine de x | la courbe de racine de x plus b kifech tji

CE QU'IL RÉPOND

Ersem 9bal la courbe mta3 $\sqrt{x}$: tabda men O, w tet3adda men les points $(1 ; 1)$ w $(4 ; 2)$. W ba3d 7arrekha b la translation de vecteur $-b\vec{i}$. L $\sqrt{x + 2}$, koll chay yarja3 b 2 : la courbe tabda men le point d'abscisse -2.

ارسم قْبَلْ la courbe متاع racine carrée de x : تبدا من O ، w تتعدّى من ، les points de coordonnées un et un . w quatre et deux بعد حرّكها بـ la translation de vecteur moins b i . لـ racine carrée de (x plus deux) ، كل شي يرجع بـ la courbe : تبدا من deux . le point d'abscisse moins deux

Trace d'abord la courbe de racine carrée de x : elle part de O, et passe par les points de coordonnées un et un, et quatre et deux. Puis déplace-la par la translation de vecteur moins b i. Pour racine carrée de (x plus deux), tout recule de deux : la courbe part du point d'abscisse moins deux.

QUESTION 18 · L'HYPERBOLE D'ÉQUATION Y = 1/X

chnowa l'hyperbole | c'est quoi une hyperbole | définition de l'hyperbole | hyperbole chnowa ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$y = \frac{1}{x}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'hyperbole hiya el esm mta3 la courbe mta3 la fonction $\frac{1}{x}$, w zid mta3 koll fonction $\frac{ax + b}{cx + d}$ mta3 el chapitre. Fiha zouz 9ta3 mafrouzin, ma yetle9awch.

l'hyperbole هي الاسم متاع la courbe متاع la fonction un sur x ، w متاع fonction (a x plus b) sur (c x زيد متاع كل plus d) متاع الـ chapitre . فيها زوز قطع مفروزين ، ما يتلاقاوش .

L'hyperbole, c'est le nom de la courbe de la fonction un sur x, et plus généralement de toute fonction (a x plus b) sur (c x plus d) du chapitre. Elle est faite de deux morceaux séparés, qui ne se rejoignent pas.

QUESTION 19 · L'HYPERBOLE D'ÉQUATION Y = 1/X

chnowa l'asymptote | c'est quoi une asymptote | asymptote chnowa ma3neha | définition d'une asymptote

CE QU'IL RÉPOND

L'asymptote hiya droite, la courbe ta9reb menha akthar w akthar, w ma tousalhech. L l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, famma 2 : l'axe des abscisses, 5ater $\frac{1}{x}$ ya9reb l 0 ki x yekber barcha, w l'axe des ordonnées, 5ater $\frac{1}{x}$ yekber barcha ki x ya9reb l 0.

l'asymptote هي la courbe ، droite تقرب منها أكثر w أكثر w ما توصلهاش . لـ l'hyperbole y égale un sur x ، فمّا زوز : l'axe des abscisses ، خاطر un sur x يقرب لـ zéro كي x يكبر برشا ، w l'axe des ordonnées ، خاطر un sur x يكبر برشا كي x يقرب لـ zéro .

Une asymptote est une droite dont la courbe s'approche de plus en plus, sans jamais l'atteindre. Pour l'hyperbole y égale un sur x, il y en a deux : l'axe des abscisses, car un sur x s'approche de zéro quand x devient très grand, et l'axe des ordonnées, car un sur x devient très grand quand x s'approche de zéro.

QUESTION 20 · FONCTIONS DU TYPE F(X) = (AX + B)/(CX + D)

kifech nal9a les asymptotes mta3 l'hyperbole | comment trouver les asymptotes de ax+b sur cx+d | asymptote verticale w asymptote horizontale kifech nal9ahom | équations des asymptotes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$x = -\frac{d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$

CE QU'IL RÉPOND

L'asymptote verticale win le dénominateur ywalli zéro : $cx + d = 0$, idhan $x = -\frac{d}{c}$. L'asymptote horizontale hiya $y = \frac{a}{c}$, le quotient mta3 les coefficients de x. Mithel : l $\frac{3x + 1}{2x - 4}$, houma $x = 2$ w $y = \frac{3}{2}$. W yetle9aw fi le centre mta3 l'hyperbole.

x égale moins d sur c . إذن ، zéro : c x plus d égale zéro يولّي le dénominateur وين l'asymptote verticale trois x plus) لـ : مثال . les coefficients de x متاع y égale a sur c ، le quotient هي l'asymptote horizontale متاع le centre في يتلاقاو x égale deux w y égale trois demis . w هوما ، sur (deux x moins quatre) (un . l'hyperbole

L'asymptote verticale est là où le dénominateur s'annule : c x plus d égale zéro, donc x égale moins d sur c. L'asymptote horizontale est y égale a sur c, le quotient des coefficients de x. Exemple : pour (trois x plus un) sur (deux x moins quatre), ce sont x égale deux et y égale trois demis. Elles se rencontrent au centre de l'hyperbole.

QUESTION 21 · FONCTIONS DU TYPE F(X) = (AX + B)/(CX + D)

l'hyperbole tnajjem t9oss l'asymptote | est-ce que la courbe peut couper son asymptote | l'hyperbole tmess les asymptotes walla le | la courbe touche l'asymptote ?

CE QU'IL RÉPOND

Le, mouch fel chapitre hedha. 5oudh $g(x) = 2 + \frac{3}{2x - 5}$: l'asymptote horizontale mte3ha $y = 2$. Bech la courbe t9ossha, lezem $\frac{3}{2x - 5} = 0$, w hedha impossible. La courbe ta9reb men l'asymptote 9add ma n7ebbou, ama ma tal9ahech.

g de x égale deux plus trois sur (deux x moins cinq) : l'asymptote خوذ . هذا chapitre الـ في موش ، لا trois sur (deux x moins cinq) égale zéro ، w لازم ، تقصّها la courbe باش . y égale deux متاعها horizontale impossible . la courbe هذا تقرب من l'asymptote قدّ ما نحبّو ، أما ما تلقاهاش .

Non, pas dans ce chapitre. Prends g de x égale deux plus trois sur (deux x moins cinq) : son asymptote horizontale est y égale deux. Pour que la courbe la coupe, il faudrait trois sur (deux x moins cinq) égale zéro, ce qui est impossible. La courbe s'approche de l'asymptote autant qu'on veut, mais ne la rencontre pas.

QUESTION 22 · FONCTIONS DU TYPE F(X) = (AX + B)/(CX + D)

kifech nal9a le centre mta3 l'hyperbole | comment trouver le centre d'une hyperbole

chnowa le centre de l'hyperbole | centre de ax+b sur cx+d

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

CE QU'IL RÉPOND

Le centre houwa el point win ezzouz asymptotes yetle9aw, w l'hyperbole symétrique par rapport lih. L $\frac{ax + b}{cx + d}$, houwa le point $I\left(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c}\right)$. Mithel : l $\frac{x - 1}{x + 3}$, le centre houwa $I(-3 ; 1)$.

le centre هو الـ point وين الزوز asymptotes يتلاقاو ، l'hyperbole symétrique par rapport ليه . لـ (a x plus) sur (c x plus d) (b ، هو sur c et a sur c de coordonnées moins d sur c le point I . مثال : لـ (x (x moins un) sur (x plus trois) ، le centre هو plus trois) et un de coordonnées moins trois I .

Le centre est le point où les deux asymptotes se rencontrent, et l'hyperbole est symétrique par rapport à lui. Pour (a x plus b) sur (c x plus d), c'est le point I de coordonnées moins d sur c et a sur c. Exemple : pour (x moins un) sur (x plus trois), le centre est I de coordonnées moins trois et un.

QUESTION 23 · L'HYPERBOLE D'ÉQUATION Y = 1/X

chnowa les branches mta3 l'hyperbole | c'est quoi les branches de l'hyperbole | 3lech l'hyperbole fiha zouz branches | pourquoi l'hyperbole a deux branches

CE QU'IL RÉPOND

Houma ezzouz 9ta3 mta3 l'hyperbole. Famma zouz 5ater la fonction mouch définie fi valeur wa7da : l $\frac{1}{x}$, hiya zéro. La courbe ma tnajjemch tet3adda men la droite d'équation $x = 0$: 9at3a l x positif, w 9at3a l x négatif.

هوما الزوز قطع متاع l'hyperbole . فمّا زوز خاطر la fonction موش définie في valeur وحدة : لـ un sur x ، هي x positif ، w قطعة لـ : la droite d'équation x égale zéro ما تنجّمش تتعدّى من zéro . la courbe x قطعة لـ négatif .

Ce sont les deux morceaux de l'hyperbole. Il y en a deux parce que la fonction n'est pas définie en une valeur : pour un sur x, c'est zéro. La courbe ne peut pas traverser la droite d'équation x égale zéro : un morceau pour x positif, et un morceau pour x négatif.

QUESTION 24 · POUR COMPRENDRE : LA FONCTION INVERSE

3lech un sur x mouch définie fi zéro | pourquoi on ne peut pas diviser par zéro | 1/x pour x = 0 chnowa ya3ti | zéro 3andou inverse walla le

CE QU'IL RÉPOND

5ater ma fammech nombre ki todhorbou fi zéro ya3tik 1 : zéro ma 3andouch inverse. 3la hedheka la fonction $\frac{1}{x}$ définie 3la les réels el koll illa 0. W 9rib men zéro, $\frac{1}{x}$ yekber barcha : la courbe tatla3 walla tahbet b7dha l'axe des ordonnées.

la fonction un على هذاكا . inverse ما عندوش un : zéro يعطيك zéro كي تضربو في nombre خاطر ما فمّاش
. l'axe des ordonnées تطلع ولّا تهبط بحذا la courbe : يكبر برشا zéro ، un sur x قريب من zéro . w les réels على الكل إلّا sur x définie

Parce qu'aucun nombre multiplié par zéro ne donne un : zéro n'a pas d'inverse. C'est pour cela que la fonction un sur x est définie sur tous les réels sauf zéro. Et près de zéro, un sur x devient très grand : la courbe monte ou descend le long de l'axe des ordonnées.

QUESTION 25 · LA PARABOLE D'ÉQUATION Y = X²

chnowa ma3neha f(x) tend vers plus l'infini | que veut dire tend vers +∞ | tend vers l'infini chnowa ma3neha | x tend vers plus l'infini kifech nefhemha

CE QU'IL RÉPOND

Ma3neha $f(x)$ yfout ay nombre A, mahma ken kbir, ki x yekber bel behi. Mathalan, x^{2} yfout 10^{30} ki x yfout 10^{15}. W rodd belek : plus l'infini mouch nombre, $f(x)$ ma youselouch.

dix puissance يفوت x au carré ، مثلاً . يكبر بالباهي x كي ، مهما كان كبير ، nombre A يفوت أيّ f de x معناها
. ما يوصلّوش nombre ، f de x موش plus l'infini : ردّ بالك dix puissance quinze . w يفوت x كي trente

Cela veut dire que f de x dépasse n'importe quel nombre A, aussi grand soit-il, pourvu que x soit assez grand. Par exemple, x au carré dépasse dix puissance trente dès que x dépasse dix puissance quinze. Et attention : plus l'infini n'est pas un nombre, f de x ne l'atteint pas.

QUESTION 26 · EXEMPLE : COMPARER X, X², 1/X ET √X

x au carré dima akbar men x | est-ce que le carré d'un nombre est toujours plus grand que le nombre | x² plus grand que x ? | x w x au carré kifech ncompariwhom

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$0 < x < 1 : \ x^2 < x \qquad x > 1 : \ x^2 > x$$

CE QU'IL RÉPOND

Le, mouch dima. L x akbar men 1, x^{2} akbar men x : le carré de 3 houwa 9. Ama l x bin 0 w 1, bel 3aks : le carré de $\frac{1}{2}$ houwa $\frac{1}{4}$, asghar men $\frac{1}{2}$. W l $x = 0$ walla $x = 1$, ezzouz kif kif.

، zéro w un بين أما لـ x . neuf هو x : le carré de trois من أكبر un ، x au carré من أكبر x لـ . لا ، موش ديما
. الزوز كيف كيف ، un ولّا x égale zéro لـ un demi . w من أصغر ، un quart هو le carré de un demi : بالعكس

Non, pas toujours. Pour x plus grand que un, x au carré est plus grand que x : le carré de trois est neuf. Mais pour x entre zéro et un, c'est le contraire : le carré de un demi est un quart, plus petit que un demi. Et pour x égale zéro ou un, les deux sont égaux.

QUESTION 27 · POUR LA CULTURE : PHARES ET ANTENNES

3lech el koura tarsem parabole | pourquoi la trajectoire d'une balle est une parabole | la trajectoire d'un projectile | balle lancée chnowa la courbe mte3ha

CE QU'IL RÉPOND

5ater la hauteur mta3 el koura tetkteb trinôme fel wa9t t, w le coefficient mta3 t^{2} négatif, ki nensew la résistance de l'air. Idhan la courbe mte3ha parabole ma7loula lel wta : el koura tatla3, tousel l le sommet, w ba3d tahbet b nafs ettari9a.

خاطر la hauteur متاع الكورة تتكتب trinôme في الوقت le coefficient w ، t متاع t au carré négatif ، كي ننساو la résistance de l'air . إذن la courbe متاعها parabole محلولة للوطا : الكورة تطلع ، توصل لـ le sommet w ، بعد تهبط بنفس الطريقة .

Parce que la hauteur de la balle s'écrit comme un trinôme du temps t, avec un coefficient négatif devant t au carré, quand on néglige la résistance de l'air. Sa courbe est donc une parabole tournée vers le bas : la balle monte, atteint le sommet, puis redescend de la même façon.

QUESTION 28 · POUR LA CULTURE : PHARES ET ANTENNES

3lech l'antenne parabolique 3andha el forme hedhi | pourquoi les antennes sont paraboliques | à quoi sert la parabole dans la vie | miroir parabolique kifech ye5dem

CE QU'IL RÉPOND

Le miroir parabolique yeb3ath l point wa7ed, le foyer, les rayons el koll elli yjiw parallèles à l'axe mte3ou. Hakka l'antenne parabolique tlemm el signal 3la le récepteur el ma7tout fi le foyer. W bel 3aks, dhaw ma7tout fi le foyer mta3 phare ya3ti rayons parallèles.

هكّا . متاعو parallèles à l'axe الكل اللي يجيو le foyer ، les rayons ، واحد point يبعث لـ le miroir parabolique l'antenne parabolique تلمّ الـ signal على le récepteur المحطوط في w . le foyer بالعكس ، ضو محطوط في foyer متاع phare يعطي rayons parallèles .

Un miroir parabolique renvoie vers un même point, le foyer, tous les rayons qui arrivent parallèlement à son axe. C'est ainsi qu'une antenne parabolique rassemble le signal sur le récepteur placé au foyer. Et inversement, une lampe placée au foyer d'un phare donne des rayons parallèles.

QUESTION 29 · UN PROBLÈME POUR ALLER PLUS LOIN : UN LIEU DE POINTS

chnowa lieu de points | c'est quoi un lieu géométrique | lieu du point N chnowa ma3neha | kifech nal9a le lieu mta3 point

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$N\left(m;\frac{m^2}{2}\right) : \quad y=\frac{1}{2}x^2$$

CE QU'IL RÉPOND

Le lieu mta3 point houwa el 5att elli yarsmou ki point e5er yet7arrek. Bech nal9awh, nektbou les coordonnées mte3ou b nafs el nombre m, w ba3d nlawjou 3la el 3ala9a bin l'abscisse w l'ordonnée

mte3ou. Houni, N 3andou l'abscisse m w l'ordonnée $\frac{m^{2}}{2}$: yarsem la parabole $y = \frac{1}{2}x^{2}$.

متاعو بنفس les coordonnées نكتبو ، باش نلقاوه . آخر يتحرّك point كي يرسمو اللي الخطّ هو point متاع le lieu
l'abscisse m w عندو N ، هنا . متاعو l'abscisse w l'ordonnée بين العلاقة على نلوّجو بعد nombre m ، w الـ
. la parabole y égale un demi de x au carré يرسم : l'ordonnée m au carré sur deux

Le lieu d'un point, c'est la ligne qu'il décrit quand un autre point se déplace. Pour le trouver, on écrit ses coordonnées avec un même nombre m, puis on cherche la relation entre son abscisse et son ordonnée. Ici, N a pour abscisse m et pour ordonnée m au carré sur deux : il décrit la parabole y égale un demi de x au carré.

QUESTION 30 · EXEMPLE : PARABOLE ET HYPERBOLE

kifech n7ell inéquation b la parabole | comment résoudre l'inéquation $x^2 < 4$ graphiquement | résoudre une inéquation avec l'hyperbole | inéquation $1/x > 2$ kifech n7ellha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x^2 < 4 \iff -2 < x < 2$$

$$\frac{1}{x} > 2 \iff 0 < x < \frac{1}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ersem la droite horizontale mta3 el nombre, w chouf win la courbe fou9ha walla ta7tha. L $x^{2} < 4$, la parabole ta7t la droite $y = 4$ bin -2 w 2. W l $\frac{1}{x} > 2$, ken la branche mta3 les x positifs tatla3 fou9 $y = 2$, bin 0 w $\frac{1}{2}$.

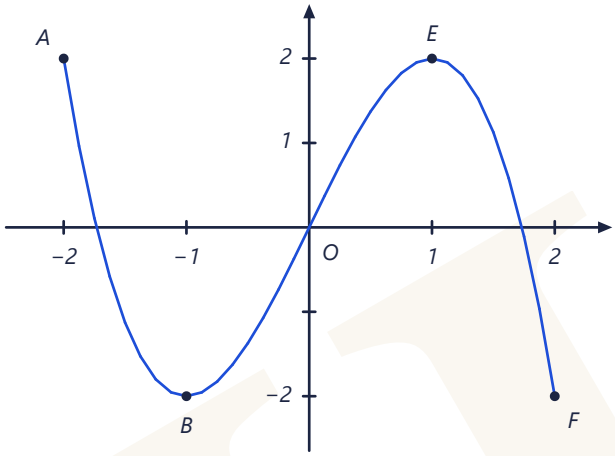
x au carré inférieur à لـ . فوقها ولّا تحتها la courbe وين شوف nombre ، w متاع الـ la droite horizontale ارسم
un sur x supérieur à deux لـ moins deux w deux . w بين la droite y égale quatre تحت quatre ، la parabole
. zéro w un demi بين ، y égale deux تطلع فوق les x positifs متاع la branche كان ،

Trace la droite horizontale qui correspond au nombre, puis regarde où la courbe est au-dessus ou au-dessous. Pour x au carré inférieur à quatre, la parabole est sous la droite y égale quatre entre moins deux et deux. Et pour un sur x supérieur à deux, seule la branche des x positifs monte au-dessus de y égale deux, entre zéro et un demi.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Paire ou impaire ?**

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-2;2]$. Elle passe par les points $A(-2;2)$, $B(-1;-2)$, $E(1;2)$ et $F(2;-2)$, et par l'origine O. La fonction f est-elle paire ou impaire ?



La courbe de la fonction f sur [−2 ; 2].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de la fonction f est tracée de l'abscisse moins 2 à l'abscisse 2. Elle part du point A, d'abscisse moins 2 et d'ordonnée 2, descend jusqu'au point B, d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 2, remonte en passant par l'origine O jusqu'au point E, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, puis redescend jusqu'au point F, d'abscisse 2 et d'ordonnée moins 2.

Réponds par un seul mot.

Réponse attendue : `impaire` — aussi acceptées : elle est impaire · f est impaire · fonction impaire · f est une fonction impaire · une fonction impaire · c'est une fonction impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare les images de deux nombres opposés, par exemple -1 et 1.
2. Ces deux images sont-elles égales, ou opposées ?
3. Regarde la symétrie de la courbe : par rapport à l'axe des ordonnées, ou par rapport à l'origine ?

CORRECTION

Deux opposés — Les images de -1 et de 1 sont opposées, comme celles de -2 et de 2.

$f(-1) = -2 \quad ; \quad f(1) = 2$

La symétrie — Chaque point de la courbe a son symétrique par rapport à O sur la courbe : A et F, B et E.

Pour tout x de $[-2;2]$, $f(-x) = -f(x)$: la fonction f est impaire, et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire / elle est paire / f est paire` → Une fonction paire a une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ici, les images de -1 et de 1 sont -2 et 2 : elles sont opposées, pas égales.

EXERCICE 2 · BASE Dépasser dix puissance trente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Pour x positif, on a $f(x) > 10^{30}$ dès que x dépasse un certain nombre. Lequel ?

Donne seulement ce nombre, par exemple 10^7. Au clavier, l'exposant se tape après l'accent circonflexe.

Réponse attendue : `10^15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour x positif, $x^2 > A$ équivaut à $x > \sqrt{A}$.
2. Écris 10^{30} comme le carré d'une puissance de 10.
3. Pour élever une puissance de 10 au carré, on double l'exposant.

CORRECTION

La racine carrée — Pour x positif, $x^2 > 10^{30}$ équivaut à $x > \sqrt{10^{30}}$.

Le calcul —

$$\sqrt{10^{30}} = 10^{15} \quad \text{car} \quad (10^{15})^2 = 10^{30}$$

Dès que $x > 10^{15}$, $f(x) > 10^{30}$: $f(x)$ dépasse n'importe quel réel, pourvu que x soit assez grand.

PIÈGES ANTICIPÉS

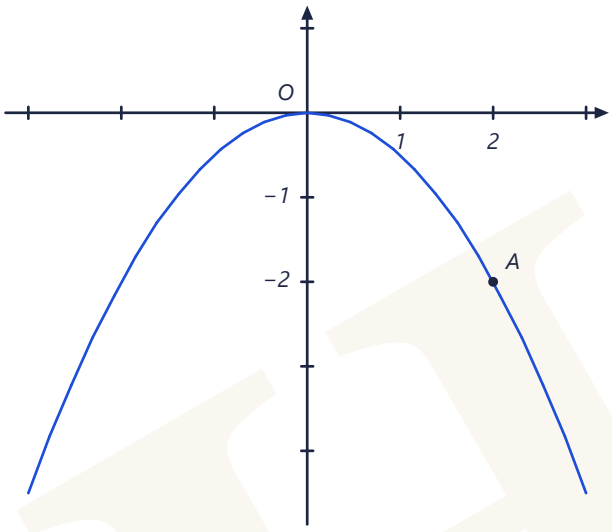
`10^60` → Tu as élevé 10^{30} au carré. Ici on cherche x tel que x^2 dépasse 10^{30} : il faut la racine carrée.

`10^30` → Si $x = 10^{30}$, alors $x^2 = 10^{60}$: c'est bien plus qu'il n'en faut. Cherche le nombre dont le carré est exactement 10^{30}.

EXERCICE 3 · BASE Lire le coefficient

La parabole de la figure représente une fonction du type $f(x) = mx^2$, où m est une constante réelle. Elle passe par le point $A(2; -2)$. Détermine m.

Maths à la carte — ABDELKADER HAMMAMI



Une parabole du type y = mx².

Un repère orthonormé d'origine O. Une parabole de sommet O, tournée vers le bas, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle passe par le point A, d'abscisse 2 et d'ordonnée moins 2.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : `-1/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de A vérifient l'équation $y = mx^2$.
2. Remplace x par 2 et y par -2.
3. Tu obtiens $4m = -2$.

CORRECTION

Le point A —

$f(2) = m \times 2^2 = 4m$

L'équation —

$4m = -2 \iff m = -\frac{1}{2}$

La parabole a pour équation $y = -\dfrac{x^2}{2}$: m est négatif, et elle est bien tournée vers le bas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → -2 est l'ordonnée du point A. Comme A a pour abscisse 2, on a $m \times 2^2 = -2$.

`1/2` → La parabole est tournée vers le bas : m est négatif.

`-1` → Il faut diviser par le carré de l'abscisse, qui vaut 4, et non par 2.

EXERCICE 4 · BASE Une identité qui cache le sommet

Soit P la parabole d'équation $y = x^2 + 6x + 9$. Quelle est l'abscisse de son sommet ?

Donne l'abscisse du sommet.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Reconnais une identité remarquable.
2. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.
3. Une parabole d'équation $y = (x - \alpha)^2$ a pour sommet $S(\alpha; 0)$.

CORRECTION

Factoriser —

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Lire alpha — $x + 3$, c'est x moins l'opposé de 3 : on lit $\alpha = -3$.

$S(-3; 0)$

Le sommet est $S(-3; 0)$, et l'axe est la droite d'équation $x = -3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$: le sommet est là où $x + 3$ s'annule, donc à une abscisse négative.

9 → 9 est l'ordonnée du point d'abscisse 0. Factorise d'abord : $x^2 + 6x + 9$ est une identité remarquable.

6 / -6 → N'utilise pas 6 tel quel : $6x$ est le double produit de x par 3.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Le sommet d'un trinôme

Soit P la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x - 2$. Détermine les coordonnées de son sommet S.

Écris les coordonnées sous la forme « (x;y) », par exemple « (2;3) ».

Réponse attendue : `(2;2)` — aussi acceptées : (2,2) · S(2;2) · S(2,2) · 2;2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse du sommet est $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Ici $a = -1$ et $b = 4$.
3. L'ordonnée du sommet est l'image de α.

CORRECTION

L'abscisse —

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times(-1)} = 2$

L'ordonnée —

$\beta = f(2) = -4 + 8 - 2 = 2$

La forme canonique —

$-x^2 + 4x - 2 = -(x - 2)^2 + 2$

Le sommet est $S(2;2)$ et l'axe est la droite d'équation $x = 2$; comme a est négatif, la parabole est tournée vers le bas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;-2) / (2,-2) / S(2;-2)` → -2 est l'image de 0, pas l'ordonnée du sommet. Calcule l'image de 2.

`(-2;2) / (-2,2) / (-2;-14) / (-2,-14)` → $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ avec $a = -1$ et $b = 4$: on divise -4 par -2, ce qui donne 2, et non -2.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

L'ordonnée du sommet

Soit P la parabole d'équation $y = -3x^2 + 5x + 2$. L'abscisse de son sommet est $\dfrac{5}{6}$. Calcule son ordonnée.

Donne l'ordonnée du sommet, en fraction irréductible.

Réponse attendue : 49/12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ordonnée du sommet est l'image de son abscisse.
2. Calcule d'abord le carré de $\dfrac{5}{6}$: c'est $\dfrac{25}{36}$.
3. Réduis les trois termes au dénominateur 12.

CORRECTION

Remplacer —

$f\left(\frac{5}{6}\right) = -3 \times \frac{25}{36} + 5 \times \frac{5}{6} + 2$

Réduire —

$-\frac{25}{12} + \frac{50}{12} + \frac{24}{12} = \frac{49}{12}$

Le sommet est $S\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{49}{12}\right)$, et l'axe est la droite d'équation $x = \dfrac{5}{6}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/6` → $\dfrac{5}{6}$ est l'abscisse du sommet. Son ordonnée est l'image de $\dfrac{5}{6}$.

`2` → 2 est l'image de 0. L'ordonnée du sommet est l'image de $\dfrac{5}{6}$.

`33/4` → Attention au signe : le premier terme vaut $-\dfrac{25}{12}$, il se retranche.

EXERCICE 7 · PRATIQUE

Le minimum d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Elle est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$. Quelle est sa valeur minimale ?

Donne la valeur minimale.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le minimum est atteint là où la fonction cesse de décroître pour se mettre à croître.
2. Calcule l'image de 1.

CORRECTION

Où ? — La fonction décroît jusqu'à 1, puis croît : le minimum est atteint en 1.

La valeur —

$f(1) = 1 - 2 - 1 = -2$

Une vérification —

$f(x) = (x-1)^2 - 2 \geq -2$

La courbe de f est une parabole de sommet $S(1;-2)$ et d'axe $x = 1$: le minimum de f est l'ordonnée du sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → 1 est le réel où le minimum est atteint. La valeur minimale est son image.

-1 → -1 est l'image de 0. Le minimum est l'image de 1.

EXERCICE 8 · PRATIQUE

Le coefficient d'une parabole

Une parabole P a pour sommet $S(-1;1)$ et passe par le point $A(-3;9)$. Son équation est de la forme $y = a(x+1)^2 + 1$. Détermine a.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de A vérifient l'équation de P.
2. Remplace x par -3 et y par 9.
3. Tu obtiens $9 = 4a + 1$.

CORRECTION

Remplacer —

$9 = a(-3+1)^2 + 1 = 4a + 1$

Résoudre —

$4a = 8 \iff a = 2$

La parabole a pour équation $y = 2(x+1)^2 + 1$, et son axe est la droite d'équation $x = -1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

9/4 → Tu as oublié le $+1$: l'équation est $9 = 4a + 1$, et non $9 = 4a$.

1/2 → Pour $x = -3$, $x + 1$ vaut -2, dont le carré est 4, et non 16.

`-2` → Le carré de -2 est 4 : un carré est positif, donc $4a = 8$ donne $a = 2$.

EXERCICE 9 · PRATIQUE

L'équation développée

Une parabole P a pour sommet $S(2; -3)$ et passe par le point $A(0; -1)$. Écris son équation sous la forme développée $y = ax^2 + bx + c$: donne l'expression de y en fonction de x.

Écris l'expression développée, par exemple $3x^2 + x - 5$. Au clavier, l'exposant se tape après l'accent circonflexe.

Réponse attendue : `x^2/2-2x-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pars de la forme $y = a(x - 2)^2 - 3$.
2. Le point $A(0; -1)$ donne $-1 = 4a - 3$.
3. Une fois a trouvé, développe $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

CORRECTION

La forme —

$y = a(x - 2)^2 - 3$

Le coefficient —

$-1 = 4a - 3 \iff a = \frac{1}{2}$

Développer —

$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{2} - 3 = \frac{x^2}{2} - 2x - 1$

On vérifie : pour $x = 0$, on trouve bien $y = -1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`x^2-4x+1` → Tu as pris $a = 1$. Écris $y = a(x - 2)^2 - 3$, puis cherche a avec le point A.

`2x^2-8x+5` → $-1 = 4a - 3$ donne $4a = 2$, donc $a = \frac{1}{2}$, et non 2.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

La hauteur maximale de la balle

Une balle est lancée verticalement du sol. Sa hauteur, en mètres, à l'instant t, en secondes, est $-4{,}9t^2 + 14{,}7t$. Elle atteint sa hauteur maximale à l'instant $t = 1{,}5$. Quelle est cette hauteur ?

Donne la hauteur maximale, en mètres, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `11.025`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace t par $1{,}5$.
2. Le carré de $1{,}5$ est $2{,}25$.
3. Calcule $-4{,}9 \times 2{,}25$, puis $14{,}7 \times 1{,}5$.

CORRECTION

Remplacer —

$-4{,}9 \times 1{,}5^2 + 14{,}7 \times 1{,}5 = -11{,}025 + 22{,}05$

Le résultat —

$11{,}025$

La hauteur s'écrit aussi $-4{,}9(t - 1{,}5)^2 + 11{,}025$: elle ne dépasse jamais $11{,}025$ mètres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1.5` → $1{,}5$ est l'instant où la hauteur est maximale. Remplace t par $1{,}5$ dans l'expression.

`14.7` → Tu as multiplié $-4{,}9$ par $1{,}5$: n'oublie pas le carré, qui vaut $2{,}25$.

`33.075` → Le premier terme est négatif : il vaut $-11{,}025$, et se retranche de $22{,}05$.

EXERCICE 11 · PRATIQUE

Le mobile passe par l'origine

Un mobile se déplace sur un axe d'origine O pendant trois heures. À l'instant t, en heures, avec t dans $[0; 3]$, son abscisse, en kilomètres, est $8t^2 - 12t - 3{,}5$. À quel instant le mobile passe-t-il par O ?

Donne l'instant t, en heures, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `1.75`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le mobile est en O quand son abscisse est nulle.
2. Multiplie l'équation par 2 : $16t^2 - 24t - 7 = 0$.
3. Le discriminant vaut 1024, le carré de 32.

CORRECTION

L'équation —

$8t^2 - 12t - 3{,}5 = 0 \iff 16t^2 - 24t - 7 = 0$

Le discriminant —

$24^2 + 4 \times 16 \times 7 = 576 + 448 = 1024 = 32^2$

Les racines —

$t = \frac{24 - 32}{32} = -0{,}25 \quad \text{ou} \quad t = \frac{24 + 32}{32} = 1{,}75$

Seule la racine $1{,}75$ est dans $[0; 3]$: le mobile passe par O au bout d'une heure et quarante-cinq minutes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-0.25 / -1/4` → $-0{,}25$ est bien une racine du trinôme, mais t est un temps, entre 0 et 3 : garde l'autre racine.

`0` → À l'instant 0, l'abscisse vaut $-3{,}5$: le mobile n'est pas en O.

`-3.5 / 3.5` → C'est l'abscisse du mobile au départ. On cherche l'instant où son abscisse est nulle.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Deux mobiles au même endroit

Deux mobiles A et B se déplacent sur un même axe pendant trois heures. À l'instant t, en heures, l'abscisse de A est $8t^2 - 12t - 3{,}5$ et celle de B est $4t^2 - 4t - 6{,}5$. À quels instants les deux mobiles sont-ils au même endroit ?

Écris l'ensemble des instants, par exemple « {1;2,5} ».

Réponse attendue : `{0.5;1.5}` — aussi acceptées : {1/2;3/2} · {0.5;3/2} · {1/2;1.5}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris que les deux abscisses sont égales.
2. Regroupe tout dans un seul membre : $4t^2 - 8t + 3 = 0$.
3. Le discriminant vaut $64 - 48$, c'est-à-dire 16.

CORRECTION

L'équation —

$$8t^2 - 12t - 3{,}5 = 4t^2 - 4t - 6{,}5 \iff 4t^2 - 8t + 3 = 0$$

Les racines —

$$t = \frac{8-4}{8} = 0{,}5 \quad \text{ou} \quad t = \frac{8+4}{8} = 1{,}5$$

Les mobiles se croisent au bout d'une demi-heure, puis d'une heure et demie ; à ces instants, leur abscisse commune vaut $-7{,}5$, puis $-3{,}5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

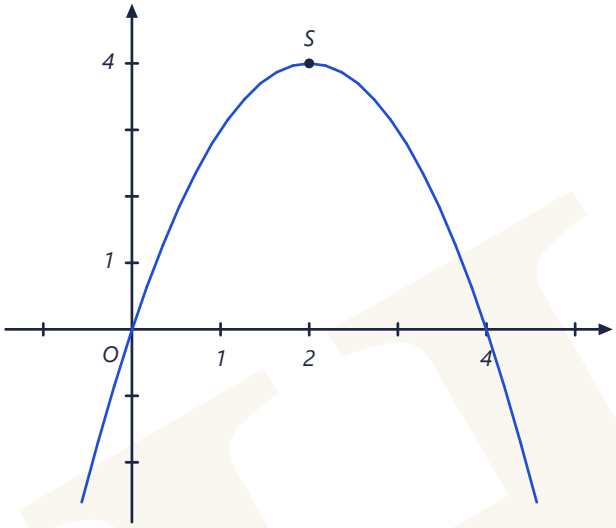
`{0.5} / {1.5}` → Il y a deux instants : l'équation $4t^2 - 8t + 3 = 0$ a deux racines dans $[0;3]$.

`{-0.25;1.75}` → Ce sont les instants où l'abscisse de A est nulle. Ici, on veut que les deux abscisses soient égales.

EXERCICE 13 · RAISONNEMENT

Lire l'expression d'un trinôme

La parabole de la figure est la courbe d'une fonction trinôme f. Son sommet est $S(2;4)$ et elle passe par l'origine O. Donne l'expression de $f(x)$.



La parabole de sommet S(2 ; 4) qui passe par O.

Un repère orthogonal d'origine O. Une parabole tournée vers le bas : elle passe par l'origine O, monte jusqu'à son sommet S, d'abscisse 2 et d'ordonnée 4, puis redescend en recoupant l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.

Écris seulement l'expression, sans « f(x) = » : par exemple $2x^2 - 3x$ ou $(x-1)^2 + 5$. Au clavier, l'exposant se tape après l'accent circonflexe.

Réponse attendue : `-x^2+4x`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pars de la forme $f(x) = a(x-2)^2 + 4$.
2. La parabole passe par O : l'image de 0 est 0.
3. Tu obtiens $4a + 4 = 0$.

CORRECTION

La forme —

$$f(x) = a(x-2)^2 + 4$$

Le coefficient —

$$f(0) = 4a + 4 = 0 \iff a = -1$$

L'expression —

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4 = -x^2 + 4x$$

La parabole est tournée vers le bas, ce qui confirme que a est négatif ; elle recoupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

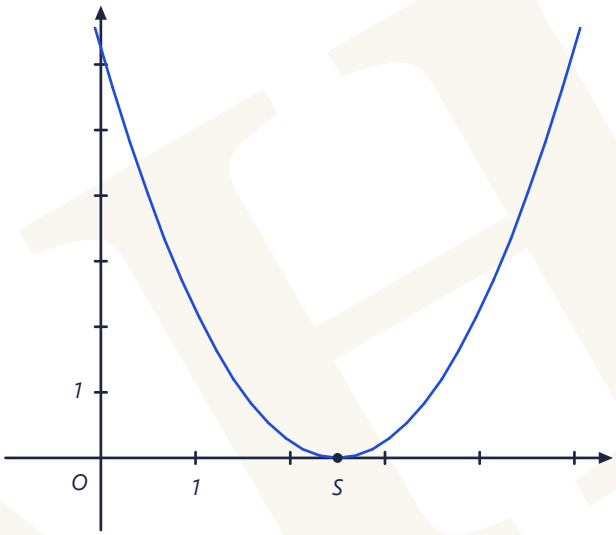
`(x-2)^2+4` → Tu as pris $a = 1$: la parabole passerait par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 8, pas par O. Utilise le fait que l'image de 0 est 0.

`-(x+2)^2+4` → Le sommet a pour abscisse 2 : on écrit $(x-2)^2$, et non $(x+2)^2$.

EXERCICE 14 · PRATIQUE

Le signe de b

La parabole de la figure est la courbe d'une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Elle est tournée vers le haut, et son sommet S, d'abscisse positive, est sur l'axe des abscisses. Quel est le signe de b ?



Une parabole dont le sommet S est sur l'axe des abscisses.

Un repère orthogonal d'origine O. Une parabole tournée vers le haut. Son sommet S est sur l'axe des abscisses, à droite de O, à l'abscisse 2,5 : la parabole touche l'axe des abscisses en ce seul point. Elle coupe l'axe des ordonnées au-dessus de O.

Réponds « positif » ou « négatif ».

Réponse attendue : `négatif` — aussi acceptées : négative · strictement négatif · b est négatif · b négatif · b est strictement négatif · b<0 · il est négatif

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse du sommet est $-\dfrac{b}{2a}$.
2. La parabole est tournée vers le haut : quel est le signe de a ?
3. $-\dfrac{b}{2a}$ est positif et a est positif : conclus sur b.

CORRECTION

Le signe de a — La parabole est tournée vers le haut.

$a > 0$

Le sommet — Son abscisse est positive.

$-\frac{b}{2a} > 0$

Le signe de b — Donc $\dfrac{b}{2a}$ est négatif, et comme $2a$ est positif :

$b < 0$

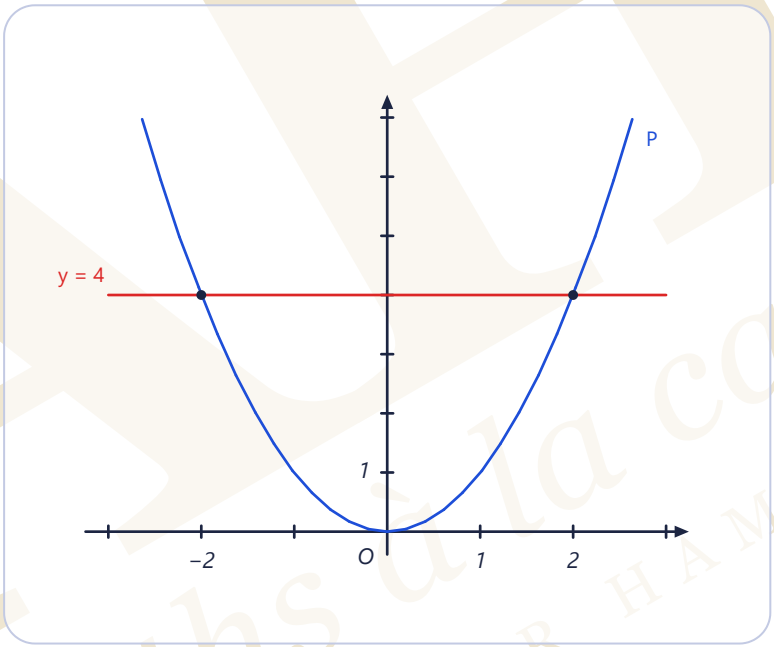
On lit aussi que le trinôme a une seule racine, puisque la parabole touche l'axe des abscisses en un seul point, et que c, l'image de 0, est positif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`positif / positive / b est positif / b>0 / b positif` → Le sommet est à droite, mais c'est $-\dfrac{b}{2a}$ qui est positif : il y a un signe moins. Comme a est positif, b est de l'autre signe.

EXERCICE 15 · PRATIQUE **Une inéquation avec la parabole**

Soit P la parabole d'équation $y = x^2$, tracée sur la figure avec la droite d'équation $y = 4$. À l'aide de P, résous l'inéquation $x^2 < 4$.



La parabole P et la droite d'équation y = 4.

Un repère orthogonal d'origine O. En bleu, la parabole P d'équation y égale x au carré. En rouge, la droite horizontale d'équation y égale 4 : elle coupe la parabole en deux points, d'abscisses moins 2 et 2. Entre ces deux points, la parabole est au-dessous de la droite ; à l'extérieur, elle est au-dessus.

Écris l'intervalle des solutions, par exemple «]1;5[».

Réponse attendue : `]-2;2[` — aussi acceptées : -2<x<2 · x>-2 et x<2 · x<2 et x>-2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde la droite horizontale d'équation $y = 4$.
2. Elle coupe la parabole aux points d'abscisses -2 et 2.
3. Garde les abscisses des points de la parabole situés sous cette droite.

CORRECTION

La droite — La droite d'équation $y = 4$ coupe P aux points d'abscisses -2 et 2, dont le carré vaut 4.

Sous la droite — La parabole est sous cette droite entre ces deux points.

$S =]-2;2[$

Pour un réel a strictement positif, $x^2 < a$ équivaut à $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;2[ / [0;2[` → Un nombre très négatif a un grand carré : le carré de -5 est 25. Il faut aussi $x > -2$.

`[-2;2]` → L'inégalité est stricte : pour $x = 2$ ou $x = -2$, le carré vaut exactement 4, qui n'est pas strictement inférieur à 4.

`]-inf;-2[U]2;+inf[ / ]-inf;-2[∪]2;+inf[` → C'est l'ensemble où $x^2 > 4$. On veut la partie de la parabole située sous la droite d'équation $y = 4$.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Une parabole et une droite

On considère la parabole P d'équation $y = -x^2 + 2x + 1$ et la droite D d'équation $y = -x + 3$. Calcule les abscisses de leurs points d'intersection.

Écris l'ensemble des deux abscisses, par exemple « {0;3} ».

Réponse attendue : `{1;2}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris que les deux ordonnées sont égales.
2. Regroupe tout dans un seul membre : $x^2 - 3x + 2 = 0$.
3. Cherche une racine évidente, ou factorise.

CORRECTION

L'équation —

$-x^2 + 2x + 1 = -x + 3 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$

Factoriser —

$(x-1)(x-2) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 2$

Les points — On remplace dans l'équation de D.

$E(1;2) \quad ; \quad F(2;1)$

La lecture graphique donne les mêmes points : la droite coupe la parabole en $E(1;2)$ et en $F(2;1)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2;-1}` → L'équation est $x^2 - 3x + 2 = 0$: la somme des racines est 3 et leur produit 2, elles sont toutes deux positives.

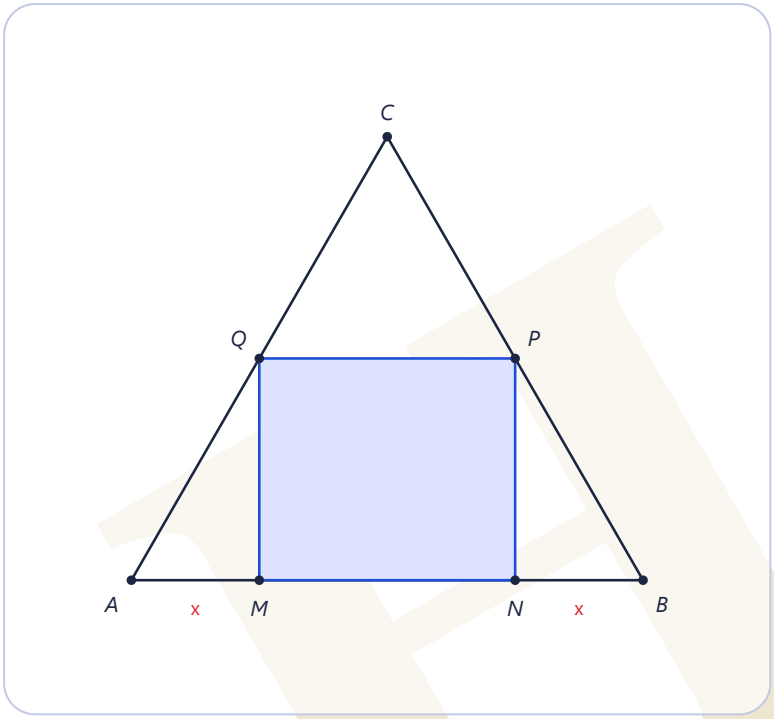
`{1} / {2}` → La droite coupe la parabole en deux points : l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ a deux racines.

EXERCICE 17 · RAISONNEMENT

Le rectangle dans le triangle

Dans la figure, ABC est un triangle équilatéral de côté 6. M et N sont deux points de $[AB]$ avec $AM = NB = x$, et $MNPQ$ est un rectangle, P étant sur $[BC]$ et Q sur $[AC]$. L'aire du

rectangle est $g(x) = (-2x^2 + 6x) \times \sqrt{3}$. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ?



Le rectangle MNPQ inscrit dans le triangle équilatéral ABC.

Un triangle équilatéral ABC de côté 6, posé sur sa base [AB], le sommet C en haut. Sur la base, de gauche à droite : A, puis M, puis N, puis B, avec AM égale NB égale x. Un rectangle MNPQ, grisé, est dressé sur [MN] : son sommet Q est sur le côté [AC] et son sommet P sur le côté [BC].

Donne la valeur de x.

Réponse attendue : `3/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. g est un trinôme dont le coefficient de x^2, $-2\sqrt{3}$, est négatif : sa courbe est une parabole tournée vers le bas.
2. Le maximum est atteint à l'abscisse du sommet, $-\dfrac{b}{2a}$.
3. Ou bien factorise : $g(x)$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 3$, et le sommet est au milieu.

CORRECTION

L'abscisse du sommet —

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6\sqrt{3}}{2\times(-2\sqrt{3})} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

L'aire maximale —

$$g\left(\tfrac{3}{2}\right) = \sqrt{3}\left(-2 \times \tfrac{9}{4} + 6 \times \tfrac{3}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

L'aire est maximale pour $x = \dfrac{3}{2}$; le rectangle a alors pour côtés $MN = 3$ et $MQ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(3)/2` → C'est l'aire maximale. On demande la valeur de x pour laquelle elle est atteinte.

`3` → Pour $x = 3$, les points M et N sont confondus au milieu de $[AB]$: l'aire est nulle. Le sommet de la parabole est au milieu des deux racines 0 et 3.

EXERCICE 18 · BASE

Un ensemble de définition

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+4}$. Détermine son ensemble de définition.

Écris l'intervalle, par exemple « [2;+inf[».

Réponse attendue : `[-4;+inf[` — aussi acceptées : D=[-4;+inf[· Df=[-4;+inf[· D_f=[-4;+inf[· [-4;+oo[· x>=-4 · x≥-4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une racine carrée n'existe que si ce qu'elle contient est positif ou nul.
2. Résous $x + 4 \geq 0$.

CORRECTION

La condition —

$$x + 4 \geq 0 \iff x \geq -4$$

L'ensemble —

$$D = [-4; +\infty[$$

La courbe de f est l'image de celle de la racine carrée par la translation de vecteur $-4\vec{i}$: elle part du point $A(-4; 0)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-4;+inf[` → -4 convient : la racine carrée de 0 existe, elle vaut 0. Le crochet est fermé en -4.

`[4;+inf[` → La condition est $x + 4 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -4$, et non $x \geq 4$.

`[0;+inf[` → C'est l'ensemble de définition de $\sqrt{x}$. Ici, c'est $x + 4$ qui doit être positif ou nul.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Le vecteur de la translation

La courbe de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x+2}$ est l'image de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $k\vec{i}$. Détermine k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'après le cours, la courbe de $\sqrt{x+b}$ est l'image de celle de $\sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-b\vec{i}$.
2. Ici $b = 2$.

CORRECTION

La propriété — Pour $f(x) = \sqrt{x+b}$, le vecteur de la translation est $-b\vec{i}$.

Ici —

$b = 2 \quad \text{donc} \quad k = -2$

La courbe de g est celle de la racine carrée, décalée de 2 vers la gauche : elle part du point $A(-2;0)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → La courbe de g part du point d'abscisse -2, là où $x+2$ s'annule : elle est décalée vers la gauche.

EXERCICE 20 · PRATIQUE

La racine carrée et la droite

Résous dans $[0;+\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = \dfrac{x}{4} + 1$.

Donne la solution.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $t = \sqrt{x}$, avec $t \geq 0$: alors $x = t^2$.
2. L'équation devient $t = \dfrac{t^2}{4} + 1$, c'est-à-dire $t^2 - 4t + 4 = 0$.
3. Reconnais une identité remarquable.

CORRECTION

Changer d'inconnue — On pose $t = \sqrt{x}$, donc $x = t^2$.

$t = \frac{t^2}{4} + 1 \iff t^2 - 4t + 4 = 0$

Résoudre —

$(t-2)^2 = 0 \iff t = 2$

Revenir à x —

$\sqrt{x} = 2 \iff x = 4$

La droite d'équation $y = \dfrac{x}{4} + 1$ touche la courbe de la racine carrée en un seul point, $A(4;2)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est la valeur de $\sqrt{x}$. Il reste à revenir à x.

16 → Tu as élevé au carré une fois de trop : si $\sqrt{x} = 2$, alors x est le carré de 2.

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

Presque tous les réels positifs

On sait que, pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{4} + 1 - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{4}$. Résous dans $[0;+\infty[$ l'inéquation $\sqrt{x} < \dfrac{x}{4} + 1$.

Écris l'ensemble des solutions comme une réunion d'intervalles, par exemple « [1;2[U]2;5] ».

Réponse attendue : `[0;4[U]4;+inf[` — aussi acceptées : [0;4[∪]4;+inf[· [0;4[ou]4;+inf[· [0;4[et]4;+inf[· [0;+inf[\{4} · [0;+inf[privé de 4 ·]4;+inf[U[0;4[·]4;+inf[∪[0;4[·]4;+inf[ou [0;4[· [0;+inf[-{4}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le carré de la différence $\sqrt{x} - 2$ est toujours positif ou nul.
2. Il est nul seulement quand $\sqrt{x} = 2$.
3. L'inégalité stricte est donc vraie partout, sauf en un seul réel.

CORRECTION

Une différence —

$$\frac{x}{4} + 1 - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{4} \geq 0$$

Le cas d'égalité — La différence est nulle seulement quand $\sqrt{x} = 2$, c'est-à-dire pour $x = 4$.

Les solutions —

$$S = [0; 4[\cup]4; +\infty[$$

Graphiquement, la courbe de la racine carrée est au-dessous de la droite partout, sauf au point $A(4; 2)$ où elles se touchent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[0;+inf[` → En $x = 4$, les deux membres sont égaux : l'inégalité stricte est fausse. Il faut retirer 4.

`]4;+inf[` → L'inégalité est vraie aussi avant 4 : par exemple pour $x = 0$, où 0 est plus petit que 1.

`[0;4[` → L'inégalité est vraie aussi après 4 : par exemple pour $x = 16$, où 4 est plus petit que 5.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

La courbe et la droite y = x

Soit C la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et D la droite d'équation $y = x$. Calcule l'abscisse du point d'intersection de C et D.

Donne l'abscisse du point d'intersection.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On résout $\sqrt{x+2} = x$: comme une racine carrée est positive, x doit être positif.
2. Élève les deux membres au carré : $x + 2 = x^2$.
3. Résous $x^2 - x - 2 = 0$, puis garde la solution positive.

CORRECTION

La condition — L'égalité $\sqrt{x+2} = x$ impose $x \geq 0$.

Au carré —

$$x + 2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x-2)(x+1) = 0$$

Le tri — La racine -1 est négative : on la rejette.

$$x = 2$$

Le point d'intersection est $A(2; 2)$, et on vérifie : la racine carrée de $2 + 2$ vaut bien 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1` → -1 vérifie $x^2 = x + 2$, mais pas l'équation de départ : la racine carrée de $-1 + 2$ vaut 1, pas -1. Une racine carrée est positive.

EXERCICE 23 · BASE

Un inverse très petit

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On a $f(x) < 10^{-25}$ dès que x dépasse un certain nombre. Lequel ?

Donne seulement ce nombre, par exemple 10^9. Au clavier, l'exposant se tape après l'accent circonflexe.

Réponse attendue : `10^25`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour x positif, $\dfrac{1}{x} < a$ équivaut à $x > \dfrac{1}{a}$.
2. L'inverse d'une puissance de 10 s'obtient en changeant le signe de l'exposant.

CORRECTION

Passer à l'inverse — Les deux nombres sont strictement positifs, et l'inverse renverse l'ordre : $\dfrac{1}{x} < 10^{-25}$ équivaut à $x > \dfrac{1}{10^{-25}}$.

Le calcul —
$\frac{1}{10^{-25}} = 10^{25}$

Plus x est grand, plus $\dfrac{1}{x}$ est proche de 0 : on dit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10^-25 / 10^(-25)` → Si $x = 10^{-25}$, alors $\dfrac{1}{x} = 10^{25}$, qui est énorme. Pour que l'inverse soit petit, il faut que x soit grand.

EXERCICE 24 · BASE

Le plus petit des quatre

Soit x un réel strictement supérieur à 1. Parmi les quatre nombres x, x^2, $\dfrac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$, lequel est le plus petit ?

Écris-le au clavier : x, x², 1/x ou racine de x.

Réponse attendue : `1/x` — aussi acceptées : l'inverse · l'inverse de x · inverse de x · inverse

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Essaie avec $x = 4$: calcule les quatre nombres.
2. Sur le graphique des quatre courbes, regarde laquelle est la plus basse à droite du point d'abscisse 1.
3. Un seul des quatre nombres est plus petit que 1.

CORRECTION

Un essai — Pour $x = 4$, les quatre nombres valent 4, 16, $\frac{1}{4}$ et 2.

En général —

$x > 1$: $\quad \frac{1}{x} < 1 < \sqrt{x} < x < x^2$

Pour $x > 1$, l'inverse est le seul à être plus petit que 1 : l'hyperbole passe sous les trois autres courbes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`x^2 / x² / x2 / le carré` → Pour $x > 1$, le carré est le plus grand des quatre : par exemple, pour $x = 4$, il vaut 16.

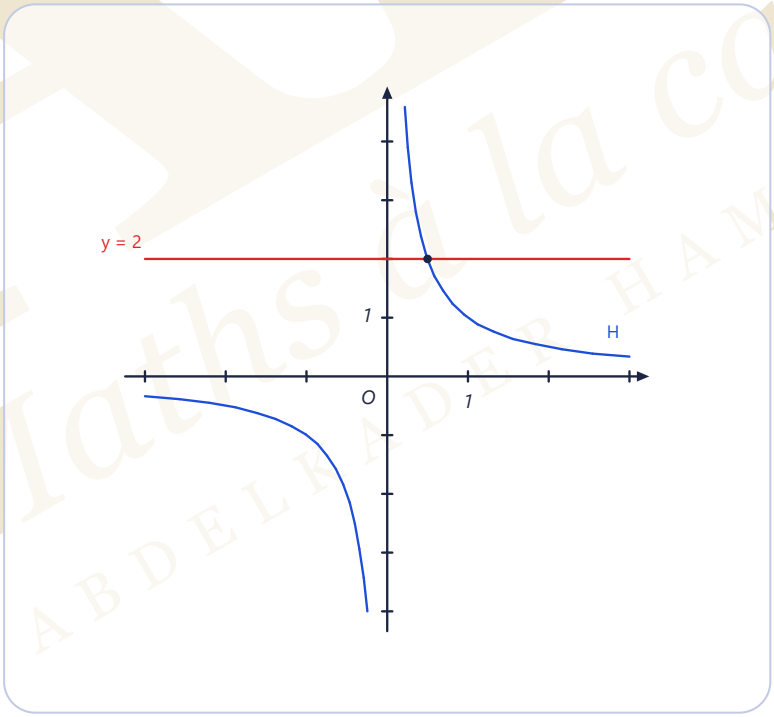
`racine(x) / √x / sqrt(x) / racine de x / la racine` → Pour $x > 1$, $\sqrt{x}$ est plus grand que 1, alors que $\frac{1}{x}$ est plus petit que 1.

`x` → Pour $x > 1$, $\frac{1}{x}$ est plus petit que 1, donc plus petit que x.

EXERCICE 25 · PRATIQUE

Une inéquation avec l'hyperbole

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$, tracée sur la figure avec la droite d'équation $y = 2$. À l'aide de H, résous l'inéquation $\frac{1}{x} > 2$.



L'hyperbole H et la droite d'équation y = 2.

Un repère orthogonal d'origine O. En bleu, l'hyperbole H d'équation y égale 1 sur x, avec ses deux branches. En rouge, la droite horizontale d'équation y égale 2 : elle coupe seulement la branche de droite, au point d'abscisse un demi. À gauche de ce point, tout près de l'axe des ordonnées, la branche de droite est au-dessus de la droite rouge ; la branche de gauche est tout entière au-dessous de l'axe des abscisses.

Écris l'intervalle des solutions, par exemple «]1;5[».

Réponse attendue : `]0;1/2[` — aussi acceptées :]0;0.5[· 0<x<1/2 · 0<x<0.5 · 0<x<0,5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde la droite horizontale d'équation $y = 2$.
2. Elle coupe l'hyperbole au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
3. Seule la branche des x positifs monte au-dessus de cette droite.

CORRECTION

Le signe — Un inverse plus grand que 2 est positif : il faut $x > 0$.

L'inverse — Pour deux nombres strictement positifs, passer à l'inverse renverse l'ordre.

$\frac{1}{x} > 2 \iff 0 < x < \frac{1}{2}$

$S = \left]0; \frac{1}{2}\right[$

Sur la figure, c'est la partie de la branche de droite située au-dessus de la droite d'équation $y = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]1/2;+inf[ / ]0.5;+inf[` → L'inverse renverse l'ordre : pour que $\frac{1}{x}$ dépasse 2, il faut que x soit plus petit que $\frac{1}{2}$.

`]-inf;1/2[ / ]-inf;0.5[` → Pour x négatif, $\frac{1}{x}$ est négatif : il ne peut pas dépasser 2. Il faut aussi $x > 0$.

`]0;1/2] / ]0;0.5]` → Pour $x = \frac{1}{2}$, l'inverse vaut exactement 2 : l'inégalité stricte est fausse.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

Deux branches, deux réponses

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$. À l'aide de H, résous l'inéquation $\frac{1}{x} < 1$.

Écris l'ensemble des solutions comme une réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;2[U]3;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;0[U]1;+inf[` — aussi acceptées :]-inf;0[∪]1;+inf[·]-inf;0[ou]1;+inf[· x<0 ou x>1 · x>1 ou x<0 ·]1;+inf[U]-inf;0[·]1;+inf[∪]-inf;0[·]1;+inf[ou]-inf;0[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite horizontale d'équation $y = 1$ coupe H au point $A(1; 1)$.
2. Regarde chaque branche séparément.
3. La branche de gauche est tout entière sous l'axe des abscisses.

CORRECTION

Pour x négatif — L'inverse d'un nombre négatif est négatif, donc inférieur à 1 : tous les réels strictement négatifs conviennent.

Pour x positif —

$\frac{1}{x} < 1 \iff x > 1$

Les solutions —

$S =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

Avec une hyperbole, on étudie chaque branche à part : on ne peut pas passer à l'inverse sans connaître le signe de x.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]1;+inf[` → Pour x négatif, $\frac{1}{x}$ est négatif, donc inférieur à 1 : toute la branche de gauche convient.

`]-inf;1[ / ]0;1[` → Pour x entre 0 et 1, l'inverse est plus grand que 1 : par exemple l'inverse de $\frac{1}{2}$ est 2.

`]-inf;0]U]1;+inf[ / ]-inf;0]∪]1;+inf[ / ]-inf;0[U[1;+inf[ / ]-inf;0[∪[1;+inf[` → 0 n'a pas d'inverse, et pour $x = 1$ l'inverse vaut exactement 1 : ces deux réels sont exclus.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

Le centre d'une hyperbole

Soit H l'hyperbole d'équation $y = -1 + \frac{1}{x}$. Détermine les coordonnées de son centre I.

Écris les coordonnées sous la forme « (x;y) », par exemple « (2;3) ».

Réponse attendue : `(0;-1)` — aussi acceptées : (0,-1) · I(0;-1) · I(0,-1) · 0;-1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'équation sous la forme $y = \frac{1}{x} + \beta$.
2. Le centre d'une telle hyperbole est $I(0;\beta)$.

CORRECTION

La forme —

$y = \frac{1}{x} + (-1)$

Le centre — On lit $\beta = -1$.

$I(0;-1)$

Les asymptotes —

$x = 0 \quad \text{et} \quad y = -1$

H est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1;0) / (-1,0)` → -1 s'ajoute à l'ordonnée : le centre est sur l'axe des ordonnées, à la hauteur -1.

`(0;1) / (0,1)` → L'équation est $y = \frac{1}{x} + \beta$ avec $\beta = -1$: le centre est $I(0;\beta)$.

`(0;0) / (0,0)` → O est le centre de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$. Ici, on lui a ajouté -1.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

L'asymptote verticale

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{-2}{x+3}$. Son asymptote verticale est la droite d'équation $x = k$. Détermine k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare avec $y = \dfrac{a}{x+\alpha}$.
2. L'asymptote verticale est là où le dénominateur s'annule : c'est la valeur interdite.

CORRECTION

La forme — L'équation est du type $y = \dfrac{a}{x+\alpha}$ avec $a = -2$ et $\alpha = 3$.

La valeur interdite —

$x + 3 = 0 \iff x = -3$

Centre et asymptotes —

$I(-3;0)$; $x = -3$ et $y = 0$

L'hyperbole a pour centre $I(-3;0)$; ses asymptotes sont les droites d'équations $x = -3$ et $y = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → L'asymptote verticale est là où le dénominateur s'annule : $x + 3 = 0$ donne $x = -3$.

`-2` → -2 est le numérateur : il ne fixe pas la place de l'asymptote. Regarde le dénominateur.

`0` → $y = 0$ est l'asymptote horizontale. On demande la verticale.

EXERCICE 29 · PRATIQUE

Près de l'asymptote verticale

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$. Que peut-on dire de $f(x)$ quand x tend vers 1 en restant inférieur à 1 ?

Réponds « plus l'infini » ou « moins l'infini ».

Réponse attendue : `-inf` — aussi acceptées : moins l'infini · tend vers -inf · f(x) tend vers -inf · vers -inf · tend vers moins l'infini · f(x) tend vers moins l'infini · moins infini · vers moins l'infini · vers moins infini · tend vers moins infini · moins inf · -oo

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends $x = 0{,}999$: que vaut $x - 1$?
2. On divise 3 par un nombre négatif très proche de 0.

CORRECTION

Un essai —

$f(0{,}999) = \frac{3}{-0{,}001} = -3000$

En général — Si x s'approche de 1 en restant plus petit, $x-1$ est négatif et s'approche de 0 : le quotient est négatif, et aussi grand qu'on veut en valeur absolue.

$f(x)$ tend vers $-\infty$

De l'autre côté, pour x supérieur à 1, $f(x)$ tend vers $+\infty$: la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`+inf / inf / plus l'infini / tend vers +inf / f(x) tend vers +inf / plus infini / vers plus l'infini / plus inf / +oo` → Pour x un peu plus petit que 1, $x-1$ est négatif et très proche de 0 : le quotient est négatif, et très grand en valeur absolue.

`0 / tend vers 0 / f(x) tend vers 0` → C'est quand x devient très grand que $f(x)$ s'approche de 0. Près de 1, le dénominateur est presque nul.

EXERCICE 30 · PRATIQUE

Centre et asymptotes

Soit H l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{x-1}{x+3}$. Détermine les coordonnées de son centre I.

Écris les coordonnées sous la forme « (x;y) », par exemple « (2;3) ».

Réponse attendue : `(-3;1)` — aussi acceptées : (-3,1) · I(-3;1) · I(-3,1) · -3;1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre est $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.
2. Ici $a=1$, $c=1$ et $d=3$.
3. On peut aussi écrire $\dfrac{x-1}{x+3}=1-\dfrac{4}{x+3}$.

CORRECTION

Les coefficients —

$a=1 \quad ; \quad b=-1 \quad ; \quad c=1 \quad ; \quad d=3$

Le centre —

$-\frac{d}{c}=-3 \quad ; \quad \frac{a}{c}=1$

Les asymptotes —

$x=-3 \quad$ et $\quad y=1$

En effet, $\dfrac{x-1}{x+3}=1-\dfrac{4}{x+3}$: H est une hyperbole de centre $I(-3;1)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3;1) / (3,1)` → L'abscisse du centre est la valeur interdite : $x+3=0$ donne $x=-3$.

`(-3;-1/3) / (-3,-1/3)` → L'ordonnée du centre est $\dfrac{a}{c}$, le quotient des coefficients de x : ici elle vaut 1.

`(1;-3) / (1,-3)` → Tu as échangé l'abscisse et l'ordonnée : l'asymptote verticale est $x=-3$, l'horizontale $y=1$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 31 · PRATIQUE

L'asymptote horizontale

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{3x+1}{2x-4}$. Son asymptote horizontale est la droite d'équation $y = k$. Détermine k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 3/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'asymptote horizontale a pour équation $y = \dfrac{a}{c}$.
2. a et c sont les coefficients de x au numérateur et au dénominateur.

CORRECTION

Les coefficients —

$a = 3 \quad ; \quad c = 2 \quad ; \quad d = -4$

L'asymptote horizontale —

$y = \frac{a}{c} = \frac{3}{2}$

Le centre —

$I\left(2; \frac{3}{2}\right)$

L'autre asymptote est la droite d'équation $x = 2$, où le dénominateur s'annule.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $x = 2$ est l'asymptote verticale, la valeur interdite. L'horizontale est $y = \dfrac{a}{c}$.

-1/4 → $-\dfrac{1}{4}$ est l'image de 0. L'asymptote horizontale se lit avec les coefficients de x.

3 → Il faut diviser par le coefficient de x du dénominateur, qui vaut 2.

EXERCICE 32 · PRATIQUE

Décomposer le quotient

Pour tout réel x différent de $\dfrac{5}{2}$, on a $\dfrac{4x-7}{2x-5} = 2 + \dfrac{k}{2x-5}$, où k est un réel. Détermine k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis le second membre au même dénominateur.
2. Son numérateur est $2(2x-5)+k$, c'est-à-dire $4x-10+k$.
3. Compare avec $4x-7$.

CORRECTION

Même dénominateur —

$2 + \frac{k}{2x-5} = \frac{4x-10+k}{2x-5}$

Comparer —

$-10 + k = -7 \iff k = 3$

Donc $\dfrac{4x-7}{2x-5} = 2 + \dfrac{3}{2x-5}$: la courbe est une hyperbole d'asymptotes $x = \dfrac{5}{2}$ et $y = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-7 → -7 est le terme constant du numérateur. Réduis le second membre au même dénominateur, puis compare les numérateurs.

-17 → Le double de -5 est -10, donc $-10 + k = -7$: on ajoute 10 aux deux membres.

EXERCICE 33 · PRATIQUE

Une équation avec une hyperbole

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{4x-7}{2x-5}$. Résous l'équation $g(x) = 3$.

Donne la solution.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour x différent de $\dfrac{5}{2}$, multiplie les deux membres par $2x - 5$.
2. Tu obtiens $4x - 7 = 3(2x - 5)$.
3. Ou bien utilise $g(x) = 2 + \dfrac{3}{2x-5}$: il faut que la fraction vaille 1.

CORRECTION

Produit en croix —

$4x - 7 = 3(2x - 5) = 6x - 15$

Résoudre —

$2x = 8 \iff x = 4$

Vérifier —

$g(4) = \frac{16-7}{8-5} = \frac{9}{3} = 3$

4 est différent de la valeur interdite $\dfrac{5}{2}$: c'est bien la solution. Graphiquement, c'est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/2 → $\dfrac{5}{2}$ est la valeur interdite : g n'y est pas définie.

-1 → $3(2x - 5) = 6x - 15$: il faut multiplier -5 par 3 aussi.

EXERCICE 34 · RAISONNEMENT

Une équation sans solution

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{4x-7}{2x-5}$, que l'on peut écrire $g(x) = 2 + \dfrac{3}{2x-5}$. Résous l'équation $g(x) = 2$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {3} » ou « ∅ ».

Réponse attendue : ∅ — aussi acceptées : pas de solution · aucune solution · {} · ensemble vide · aucune

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $g(x) = 2$ équivaut à $\dfrac{3}{2x-5} = 0$.
2. Un quotient est nul seulement quand son numérateur est nul.

CORRECTION

Simplifier —

$2 + \frac{3}{2x-5} = 2 \iff \frac{3}{2x-5} = 0$

Impossible — Le numérateur 3 n'est jamais nul : le quotient n'est jamais nul.

$S = \varnothing$

La courbe de g ne coupe jamais la droite d'équation $y = 2$: c'est son asymptote horizontale.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{5/2}` / `{2.5}` → $\dfrac{5}{2}$ est la valeur interdite : g n'y est pas définie, ce ne peut pas être une solution.

`{7/4}` / `{1.75}` → $\dfrac{7}{4}$ annule $g(x)$, pas $g(x) - 2$. Ici, il faudrait que la fraction $\dfrac{3}{2x-5}$ soit nulle.

EXERCICE 35 · RAISONNEMENT

L'ordonnée du point N

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(1;2)$ et un point M de l'axe des abscisses, d'abscisse x différente de 1. La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en un point N, dont l'ordonnée est $f(x) = \dfrac{2}{x-1} + 2$. Pour quelle valeur de x le point N a-t-il pour ordonnée 4 ?

Donne la valeur de x.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On résout $f(x) = 4$.
2. Retranche 2 aux deux membres : $\dfrac{2}{x-1} = 2$.
3. Deux divisé par un nombre donne deux : ce nombre vaut 1.

CORRECTION

L'équation —

$\frac{2}{x-1} + 2 = 4 \iff \frac{2}{x-1} = 2$

Résoudre —

$x - 1 = 1 \iff x = 2$

Vérifier — Avec M d'abscisse 2, la droite (AM) descend de 2 quand l'abscisse augmente de 1 : au point d'abscisse 0, son ordonnée est bien 4.

La courbe de f est une hyperbole de centre $I(1;2)$: ses asymptotes sont les droites d'équations $x = 1$ et $y = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Pour $x = 1$, le point M est juste sous A : la droite (AM) est parallèle à l'axe des ordonnées et ne le coupe pas.

`8/3` → Tu as calculé l'image de 4. Ici, c'est $f(x)$ qui vaut 4 : on résout une équation.

`3/2` → $\dfrac{2}{x-1} = 2$ donne $x - 1 = 1$, et non $x - 1 = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 36 · PRATIQUE

Parabole et hyperbole : les points communs

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = \dfrac{-x+2}{x}$. Pour x non nul, l'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $(x-2)(x+1)^2 = 0$. Donne l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {0;3} ».

Réponse attendue : `{-1;2}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul.
2. $x - 2 = 0$, ou bien $(x+1)^2 = 0$.

CORRECTION

Produit nul —

$(x-2)(x+1)^2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1$

Vérifier —

$f(2) = g(2) = 0 \quad ; \quad f(-1) = g(-1) = -3$

Les deux courbes se coupent au point $B(2;0)$ et se touchent au point $A(-1;-3)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2}` → -1 est aussi une solution : le carré de $x + 1$ s'annule pour $x = -1$. Les deux courbes se touchent en ce point.

`{-2;1}` → $x - 2 = 0$ donne $x = 2$, et $x + 1 = 0$ donne $x = -1$: attention aux signes.

`{-2;2}` → Ce sont les solutions de $f(x) = 0$. Ici, on cherche les x pour lesquels $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 37 · RAISONNEMENT

La parabole au-dessus de l'hyperbole

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = \dfrac{-x+2}{x}$. Pour tout x non nul, $f(x) - g(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)^2}{x}$. Résous l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

Écris l'ensemble des solutions comme une réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;1]U]3;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;0[U[2;+inf[` — aussi acceptées :]-inf;0[∪[2;+inf[·]-inf;0[ou [2;+inf[· x<0 ou x>=2 · x<0 ou x≥2 · [2;+inf[U]-inf;0[· [2;+inf[∪]-inf;0[· [2;+inf[ou]-inf;0[· x>=2 ou x<0 · x≥2 ou x<0

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le carré de $x+1$ est positif ou nul : le signe est celui du quotient de $x-2$ par x, sauf en -1 où tout s'annule.
2. Fais un tableau de signes avec $x-2$ et x.
3. N'oublie pas que 0 est interdit, et que 2 donne l'égalité.

CORRECTION

Le signe — Le carré est positif ou nul : la différence a le signe du quotient de $x-2$ par x, et s'annule en -1 et en 2.

Trois zones — Pour x négatif, le quotient est positif ; pour x entre 0 et 2, il est négatif ; pour x supérieur ou égal à 2, il est positif ou nul.

Les solutions —

$S =]-\infty;0[\cup [2;+\infty[$

La parabole est au-dessus de l'hyperbole pour tous les x strictement négatifs et pour $x \geq 2$; en -1, elles se touchent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[2;+inf[` → Pour x négatif, $x-2$ et x sont tous deux négatifs : leur quotient est positif. Les réels strictement négatifs conviennent aussi.

`]-inf;0]U[2;+inf[ / ]-inf;0]∪[2;+inf[` → 0 est la valeur interdite de g : il ne peut pas être solution.

`]0;2] / ]0;2[ / [0;2]` → Entre 0 et 2, $x-2$ est négatif et x positif : le quotient est négatif. C'est là que la parabole est au-dessous.

EXERCICE 38 · DEFI

Encadrer une solution

Pour $x > 0$, l'équation $x^3 = (x+1)^2$ équivaut à $\sqrt{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$. On pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$: sur $]0;+\infty[$, f est croissante et g est décroissante, et leurs courbes se coupent en un seul point. Compare $f(2)$ et $g(2)$, puis $f(2{,}25)$ et $g(2{,}25)$: la solution est-elle avant 2, entre 2 et $2{,}25$, ou après $2{,}25$? Donne l'encadrement d'amplitude $0{,}25$ que ces deux comparaisons justifient.

Écris l'intervalle, par exemple «]1;1,25[».

Réponse attendue : `]2;2.25[` — aussi acceptées : [2;2.25] ·]2;2.25] · [2;2.25[· 2<x<2.25 · 2<x<2,25 ·

2<=x<=2.25 · 2≤x≤2.25 · 2≤x≤2,25 ·]2;9/4[· [2;9/4]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $f(2) = \sqrt{2}$, qui vaut environ $1{,}41$, et $g(2) = 1{,}5$.
2. $f(2{,}25) = 1{,}5$, et $g(2{,}25) = 1 + \frac{4}{9}$, qui vaut environ $1{,}44$.
3. Avant la solution, la courbe de f est sous celle de g ; après, elle est au-dessus.

CORRECTION

En 2 — La racine carrée de 2 vaut environ $1{,}41$, et $g(2) = 1{,}5$: la courbe de f est au-dessous.

$$f(2) < g(2)$$

En 2,25 — La racine carrée de $2{,}25$ vaut $1{,}5$, et $g(2{,}25)$ vaut environ $1{,}44$: la courbe de f est au-dessus.

$$f(2{,}25) > g(2{,}25)$$

L'encadrement — La courbe de f passe de dessous à dessus entre 2 et $2{,}25$: le point d'intersection est entre les deux.

$$2 < x < 2{,}25$$

L'équation $x^3 = (x+1)^2$ a une seule solution, comprise entre 2 et $2{,}25$: elle vaut environ $2{,}15$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]1.75;2[ / [1.75;2] / ]2.25;2.5[ / [2.25;2.5]` → Compare les deux fonctions : en 2, la courbe de f est au-dessous de celle de g ; en $2{,}25$, elle est au-dessus. La solution est entre les deux.

`]2;3[ / [2;3]` → C'est un encadrement juste, mais d'amplitude 1. On demande une amplitude de $0{,}25$.

EXERCICE 39 · DEFI

Cordes parallèles

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$. Deux droites qui coupent chacune H en deux points, d'abscisses a et b pour l'une, c et d pour l'autre, sont parallèles si et seulement si $ab = cd$. Les points A et B de H ont pour abscisses 1 et 2, et M est le point de H d'abscisse 4. La parallèle à (AB) passant par M recoupe H en un point N. Quelle est l'abscisse de N ?

Donne l'abscisse du point N.

Réponse attendue : `1/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour la droite (AB), le produit des abscisses vaut 2.
2. Pour la parallèle, le produit des abscisses de M et de N doit aussi valoir 2.
3. Résous $4 \times n = 2$.

CORRECTION

La condition — Les droites (AB) et (MN) sont parallèles : le produit des abscisses est le même.

$$1 \times 2 = 4 \times n$$

Résoudre —

$n = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Le point N —

$N\left(\frac{1}{2};4\right)$

Le milieu de $[MN]$ a pour abscisse $\frac{9}{4}$ et pour ordonnée $\frac{9}{4}$: il est sur la droite d'équation $y=x$, comme tous les milieux de ces cordes.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est le produit des abscisses de A et de B. Il faut que l'abscisse de M multipliée par celle de N donne aussi 2.

8 → Les abscisses se multiplient : $4\times n=2$, donc on divise 2 par 4.

4 → 4 est l'abscisse de M. Le point N est l'autre point où la droite recoupe H.

EXERCICE 40 · RAISONNEMENT

Un point du lieu

Dans un repère orthonormé d'origine O, soit D la droite d'équation $y=-2$ et M le point de D d'abscisse 4. La perpendiculaire à D en M et la perpendiculaire à (OM) en O se coupent en un point N. Calcule l'ordonnée de N.

Donne l'ordonnée du point N.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. N est sur la verticale passant par M : son abscisse est 4. Note y son ordonnée.
2. Le triangle OMN est rectangle en O : $OM^2+ON^2=MN^2$.
3. $OM^2=16+4$, $ON^2=16+y^2$ et $MN^2=(y+2)^2$.

CORRECTION

Les trois carrés —

$OM^2=20\quad;\quad ON^2=16+y^2\quad;\quad MN^2=(y+2)^2$

Pythagore —

$20+16+y^2=y^2+4y+4\iff 4y=32$

L'ordonnée —

$y=8$

8 est la moitié du carré de 4 : le point $N(4;8)$ est sur la parabole d'équation $y=\frac{x^2}{2}$, le lieu de N quand M varie sur D.

PIÈGES ANTICIPÉS

16 → 16 est le carré de l'abscisse. Le théorème de Pythagore donne $4y=32$: y est la moitié de 16.

4 → 4 est l'abscisse de N, la même que celle de M. On demande son ordonnée.

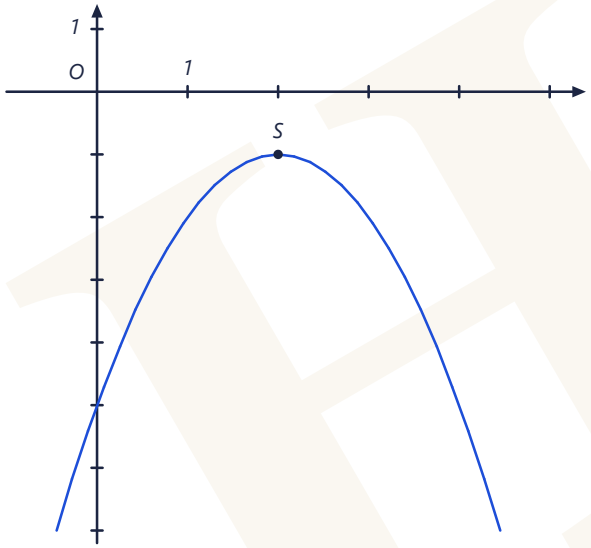
-2 / 2 → C'est l'ordonnée de M, au signe près. Le point N est sur la même verticale, mais plus haut.

Maths à la carte — ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 41 · PRATIQUE

Une parabole sous l'axe des abscisses

La parabole de la figure est la courbe d'une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Elle est tournée vers le bas, et elle ne coupe pas l'axe des abscisses. Quel est le signe de c ?



Une parabole tournée vers le bas, qui ne coupe pas l'axe des abscisses.

Un repère orthogonal d'origine O. Une parabole tournée vers le bas, tout entière au-dessous de l'axe des abscisses : elle ne le coupe pas. Son sommet S est à droite de O, à l'abscisse 2, juste sous l'axe des abscisses. La parabole coupe l'axe des ordonnées au-dessous de O.

Réponds « positif » ou « négatif ».

Réponse attendue : `négatif` — aussi acceptées : négative · strictement négatif · c est négatif · c négatif · c est strictement négatif · c<0 · il est négatif

INDICES, DANS L'ORDRE

1. c est l'image de 0 : $f(0) = c$.
2. Le point de la parabole d'abscisse 0 est celui où elle coupe l'axe des ordonnées.
3. Toute la parabole est au-dessous de l'axe des abscisses : ce point aussi.

CORRECTION

Le signe de a — La parabole est tournée vers le bas.

$a < 0$

Le nombre de racines — La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses : le trinôme n'a pas de racine, et $f(x)$ est négatif pour tout réel x.

Le signe de c — c est l'image de 0 : c'est l'ordonnée du point où la parabole coupe l'axe des ordonnées, au-dessous de O.

$c = f(0) < 0$

Ici a et c sont négatifs tous les deux, et le trinôme n'a pas de racine. Le sommet a une abscisse positive : $-\dfrac{b}{2a}$ est positif, et comme a est négatif, b est positif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`positif / positive / c est positif / c>0 / c positif` → c est l'image de 0. Regarde le point où la parabole coupe l'axe des ordonnées : il est au-dessous de l'axe des abscisses.

EXERCICE 42 · RAISONNEMENT

Une hyperbole et une droite

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit H l'hyperbole d'équation $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ et D la droite d'équation $y = x$. Elles se coupent en deux points. Quelle est l'abscisse de celui des deux dont l'abscisse est positive ?

Donne seulement la valeur exacte, avec une racine carrée : par exemple $\dfrac{3+\sqrt{2}}{5}$.

Réponse attendue : `(1+sqrt(5))/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse d'un point commun vérifie les deux équations : $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.
2. Pour x non nul, multiplie les deux membres par x : tu obtiens $x^2 = x + 1$.
3. Résous $x^2 - x - 1 = 0$: son discriminant vaut 5.

CORRECTION

L'équation — On cherche les réels x non nuls tels que $x = 1 + \dfrac{1}{x}$. On multiplie les deux membres par x.

$$x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

Le discriminant — Il est positif : l'équation a deux solutions.

$$(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$$

Les solutions —

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Le choix — La racine carrée de 5 est plus grande que 1 : la première solution est négative, la seconde est positive.

Les deux points sont sur la droite D : leur ordonnée est égale à leur abscisse. Celui d'abscisse positive a pour abscisse $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, environ $1{,}62$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(1-sqrt(5))/2` → C'est l'abscisse de l'autre point d'intersection : elle est négative, car la racine carrée de 5 dépasse 1.

`1.62 / 1.6 / 1.618` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte, écrite avec la racine carrée de 5.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

`(-1+sqrt(5))/2` → Vérifie l'équation : $x^2 = x + 1$ donne $x^2 - x - 1 = 0$, où le coefficient de x est -1. Les solutions sont alors $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 43 · BASE

Un point de la parabole

Soit P la parabole d'équation $y = x^2$. Calculer l'ordonnée du point de P d'abscisse -7.

Donne l'ordonnée du point.

Réponse attendue : 49

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point de P a pour ordonnée le carré de son abscisse.
2. Le carré d'un nombre négatif est positif.

CORRECTION

Le carré —

$y = (-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$

Le point $(-7; 49)$ est sur P : un point de la parabole d'équation $y = x^2$ a pour ordonnée le carré de son abscisse.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-49` → Le carré de -7 est positif : $(-7) \times (-7) = 49$.

`-14` → -14 est le double de -7, pas son carré.

EXERCICE 44 · BASE

Vers le haut ou vers le bas ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2$. Sa courbe est une parabole de sommet O. Est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?

Réponds « vers le haut » ou « vers le bas ».

Réponse attendue : `vers le bas` — aussi acceptées : bas · tournée vers le bas · elle est tournée vers le bas · le bas · en bas

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde le signe du coefficient de x^2.
2. Pour tout réel x, quel est le signe de $-2x^2$?

CORRECTION

Le signe de a — Ici $a = -2$, donc $a < 0$.

Les images — Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $-2x^2 \leq 0$: tous les points de la courbe sont sur l'axe des abscisses ou au-dessous, et seul O est sur l'axe.

$f(x) = -2x^2 \leq 0$

La parabole d'équation $y = ax^2$ est tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vers le haut / haut / tournée vers le haut / le haut / en haut` → Le coefficient -2 est négatif : toutes les images $-2x^2$ sont négatives ou nulles, la courbe est sous l'axe des abscisses.

EXERCICE 45 · BASE

Retrouver l'abscisse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$. Déterminer le réel positif x tel que $f(x) = 75$.

Donne la valeur de x.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Divise d'abord les deux membres de $3x^2 = 75$ par 3.
2. Cherche ensuite le nombre positif dont le carré vaut le résultat.

CORRECTION

Diviser par 3 —

$3x^2 = 75 \iff x^2 = 25$

La racine positive — On garde la solution positive.

$x = \sqrt{25} = 5$

L'équation $3x^2 = 75$ a deux solutions, -5 et 5 : la fonction f est paire, et ses deux solutions sont opposées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`25` → 25 est la valeur de x^2 : il reste à prendre sa racine carrée.

`-5` → -5 est bien solution de l'équation, mais on demande le réel positif.

`sqrt(75)` → Divise d'abord par 3 : on obtient $x^2 = 25$, pas $x^2 = 75$.

EXERCICE 46 · RAISONNEMENT

Deux points de la même parabole

Une parabole de sommet O a pour équation $y = ax^2$, et elle passe par le point $A(2; 6)$. Calculer l'ordonnée de son point d'abscisse -4.

Donne l'ordonnée du point.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de A vérifient l'équation : écris $6 = a \times 2^2$.
2. Calcule a, puis remplace x par -4 dans $y = ax^2$.

CORRECTION

Trouver a —

$6 = a \times 2^2 = 4a \iff a = \frac{3}{2}$

L'ordonnée —

$y = \frac{3}{2} \times (-4)^2 = \frac{3}{2} \times 16 = 24$

Quand l'abscisse est multipliée par -2, l'ordonnée d'un point de la parabole $y = ax^2$ est multipliée par $(-2)^2 = 4 : 6 \times 4 = 24$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-12 / 12` → L'ordonnée n'est pas proportionnelle à l'abscisse, mais à son carré : l'abscisse est multipliée par -2, l'ordonnée par 4.

`-24` → Le carré de -4 est positif, et a est positif : l'ordonnée est positive.

`3/2` → $\frac{3}{2}$ est la valeur de a ; il reste à calculer l'ordonnée du point d'abscisse -4.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Le maximum sur un intervalle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x^2}{2}$. Déterminer la valeur maximale de $f(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[-3; 2]$.

Donne la valeur maximale.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.
2. Le nombre 0 appartient-il à l'intervalle $[-3; 2]$?

CORRECTION

Le signe — Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $f(x) \leq 0$.

$f(x) = -\frac{x^2}{2} \leq 0$

Atteint en 0 — 0 est dans $[-3; 2]$, et $f(0) = 0$.

$\max f = f(0) = 0$

Pour $a < 0$, le maximum de ax^2 est atteint au sommet O, dès que l'intervalle contient 0 ; les bornes donnent les valeurs les plus basses.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-9/2` → C'est $f(-3)$, la plus petite valeur sur l'intervalle. La parabole est tournée vers le bas : le maximum est au sommet.

`-2` → C'est $f(2)$. Le sommet, d'abscisse 0, est dans l'intervalle, et il donne une valeur plus grande.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

L'image d'une parabole par une homothétie

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit P la parabole d'équation $y = x^2$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3. L'image de P par h est la parabole d'équation $y = ax^2$. Déterminer a.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : `1/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si $M(x;y)$ a pour image $M'(x';y')$, alors $x' = 3x$ et $y' = 3y$.
2. Exprime x et y en fonction de x' et y', puis remplace dans $y = x^2$.

CORRECTION

L'homothétie — $\overrightarrow{OM'} = 3\,\overrightarrow{OM}$.

$x' = 3x \quad ; \quad y' = 3y$

Remplacer — Le point M est sur P : $y = x^2$.

$\frac{y'}{3} = \left(\frac{x'}{3}\right)^2 = \frac{x'^2}{9}$

Conclure —

$y' = \frac{x'^2}{3}$

L'image de la parabole $y = x^2$ par l'homothétie de centre O et de rapport k est la parabole $y = \dfrac{x^2}{k}$: plus le rapport est grand, plus la parabole s'ouvre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Ce n'est pas $3x^2$: en multipliant les coordonnées par 3, l'abscisse grandit aussi, et son carré est multiplié par 9.

`9` / `1/9` → y' est multiplié par 3 et x'^2 par 9 : le coefficient est $\dfrac{3}{9}$.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Aussi bas que l'on veut

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2$. Pour x positif, on a $f(x) < -10^{10}$ dès que x dépasse un certain nombre. Déterminer ce nombre.

Donne seulement ce nombre, par exemple « 3*10^6 ».

Réponse attendue : `50000` — aussi acceptées : 5*10^4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Divise les deux membres de $-4x^2 < -10^{10}$ par -4 : attention au sens de l'inégalité.
2. $\dfrac{10^{10}}{4} = 25 \times 10^8$, dont la racine carrée se calcule de tête.

CORRECTION

Diviser par -4 — On divise par un nombre négatif : l'inégalité change de sens.

$-4x^2 < -10^{10} \iff x^2 > \frac{10^{10}}{4} = 25 \times 10^8$

La racine — Pour x positif :

$x > \sqrt{25 \times 10^8} = 5 \times 10^4$

Pour $a < 0$, ax^2 devient inférieur à n'importe quel nombre négatif dès que x est assez grand : $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10^5` → 10^5 est la racine carrée de 10^{10} ; il faut d'abord diviser par 4.

`25*10^8` → C'est la borne pour x^2 : prends sa racine carrée.

EXERCICE 50 · RAISONNEMENT

Le carré sur un intervalle

Soit f la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer l'intervalle formé par les valeurs de $f(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[-2; 3]$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;4] ».

Réponse attendue : `[0;9]` — aussi acceptées : `0<=x^2<=9` · `0≤x^2≤9` · `0<=x²<=9` · `0≤x²≤9` · `f(x)∈[0;9]` · `0<=f(x)<=9` · `0≤f(x)≤9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$: coupe l'intervalle en 0.
2. 0 est dans $[-2; 3]$: quelle est la plus petite valeur de x^2 ?

CORRECTION

Entre -2 et 0 — f est décroissante sur $[-2; 0]$: elle renverse l'ordre.

$-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$

Entre 0 et 3 — f est croissante sur $[0; 3]$: elle garde l'ordre.

$0 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$

Réunir — Les deux morceaux donnent toutes les valeurs de 0 à 9.

$f(x) \in [0; 9]$

On ne se contente pas d'élever les bornes au carré : quand l'intervalle contient 0, le minimum de x^2 est 0, atteint au sommet de la parabole, et le maximum est le carré de la borne la plus éloignée de 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[4;9]` → $(-2)^2 = 4$ et $3^2 = 9$, mais pour $x = 0$, qui est dans l'intervalle, $x^2 = 0$: la fonction carré n'est pas croissante sur $[-2; 3]$.

`[0;4]` → 4 est la plus grande valeur sur $[-2; 0]$; sur $[0; 3]$, x^2 va jusqu'à 9.

EXERCICE 51 · DEFI

Un carré entre deux bornes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4 < x^2 \leq 25$.

Écris l'ensemble des solutions comme une réunion d'intervalles, par exemple « [1;2[U]3;4] ».

Réponse attendue : `[-5;-2[U]2;5]` — aussi acceptées : [-5;-2[∪]2;5] · [-5;-2[ou]2;5] ·]2;5]U[-5;-2[·]2;5]∪[-5;-2[·]2;5] ou [-5;-2[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traite séparément $x^2 > 4$ et $x^2 \leq 25$.
2. La parabole $y = x^2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : l'ensemble des solutions l'est aussi.
3. Attention aux crochets : l'une des inégalités est stricte, l'autre est large.

CORRECTION

Première condition —

$x^2 > 4 \iff x < -2$ ou $x > 2$

Seconde condition —

$x^2 \leq 25 \iff -5 \leq x \leq 5$

Les deux à la fois — On garde les réels qui vérifient les deux conditions.

$S = [-5; -2[\cup]2; 5]$

Sur la parabole $y = x^2$, on garde les points situés strictement au-dessus de la droite $y = 4$, et sur ou sous la droite $y = 25$: deux morceaux symétriques par rapport à l'axe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]2;5]` → Les nombres négatifs comptent aussi : $(-3)^2 = 9$ est entre 4 et 25.

`[-5;5]` → Il faut aussi $x^2 > 4$: pour $x = 1$, $x^2 = 1$ n'est pas supérieur à 4.

`[-5;-2]U[2;5]` / `[-5;-2]∪[2;5]` / `]-5;-2[U]2;5[` / `]-5;-2[∪]2;5[` → Regarde chaque borne : ± 5 est solution, car $25 \leq 25$; ± 2 ne l'est pas, car $4 < 4$ est faux.

EXERCICE 52 · BASE

Le sommet d'une parabole décalée

Soit P la parabole d'équation $y = (x - 5)^2$. Déterminer l'abscisse de son sommet.

Donne l'abscisse du sommet.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare avec la forme $y = (x - \alpha)^2$.
2. Le sommet est le point où $(x - 5)^2$ vaut 0.

CORRECTION

Lire alpha — L'équation est de la forme $y = (x - \alpha)^2$, avec $\alpha = 5$.

$S(5; 0)$

La parabole $y = (x - \alpha)^2$ a pour sommet $S(\alpha; 0)$ et pour axe la droite d'équation $x = \alpha$: ici, l'axe est la droite $x = 5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-5 → $(x-5)^2$ s'annule pour $x=5$: le sommet est à droite de l'axe des ordonnées.

25 → 25 est l'ordonnée du point d'abscisse 0. Le sommet est là où $(x-5)^2$ s'annule.

EXERCICE 53 · BASE

Une parabole qui descend

Soit P la parabole d'équation $y=x^2-7$. Déterminer l'ordonnée de son sommet.

Donne l'ordonnée du sommet.

Réponse attendue : -7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare avec la forme $y=x^2+\beta$.
2. Le sommet est sur l'axe des ordonnées : calcule l'image de 0.

CORRECTION

Lire bêta — $x^2-7=x^2+(-7)$: on lit $\beta=-7$.

$S(0;-7)$

La parabole $y=x^2+\beta$ est l'image de la parabole $y=x^2$ par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$: ici, elle descend de 7.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → Le terme -7 fait descendre la parabole : son sommet est sous l'axe des abscisses.

0 → C'est le sommet de la parabole $y=x^2$. Ici, chaque point est descendu de 7.

EXERCICE 54 · BASE

Le vecteur de la translation

La courbe de la fonction $x\mapsto(x+4)^2$ est l'image de la parabole d'équation $y=x^2$ par la translation de vecteur $k\vec{i}$. Déterminer k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $(x+4)^2$ sous la forme $(x-\alpha)^2$.
2. Le sommet O de la parabole $y=x^2$ va sur le sommet de la nouvelle courbe.

CORRECTION

La forme —

$(x+4)^2=(x-(-4))^2$

Le vecteur — Le sommet O va au point $S(-4;0)$: $\overrightarrow{OS}=-4\vec{i}$.

$k=-4$

La courbe de $(x-\alpha)^2$ est l'image de la parabole $y=x^2$ par la translation de vecteur $\alpha\vec{i}$: un « $+4$ » dans la parenthèse décale la courbe vers la gauche.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → La nouvelle courbe a son sommet en $x=-4$, à gauche de O : le vecteur est dirigé vers la gauche.

EXERCICE 55 · BASE

L'axe de symétrie

Soit P la parabole d'équation $y=-3(x+2)^2$. Son axe de symétrie est la droite d'équation $x=k$. Déterminer k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare avec la forme $y=a(x-\alpha)^2$.
2. Le coefficient a ne joue aucun rôle sur l'axe.

CORRECTION

La forme —

$$-3(x+2)^2=-3\left(x-(-2)\right)^2$$

L'axe — On lit $\alpha=-2$: le sommet est $S(-2;0)$.

$$x=-2$$

La parabole $y=a(x-\alpha)^2$ a pour axe la droite $x=\alpha$, quel que soit a : le coefficient -3 ne change que l'ouverture et l'orientation.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $(x+2)^2$ s'annule pour $x=-2$, pas pour $x=2$.

-3 → -3 est le coefficient a : il dit que la parabole est tournée vers le bas, pas où est son axe.

EXERCICE 56 · PRATIQUE

L'équation d'une parabole translatée

Soit P la parabole d'équation $y=x^2$, et P' son image par la translation de vecteur $3\vec{i}-2\vec{j}$. Déterminer une équation de P' : donner l'expression de y en fonction de x.

Écris seulement l'expression de y, par exemple « (x+1)^2+5 ».

Réponse attendue : `(x-3)^2-2` — aussi acceptées : x^2-6x+7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le sommet O de P a pour image le point $S(3;-2)$.
2. Une parabole image de $y=x^2$ par une translation a pour équation $y=(x-\alpha)^2+\beta$, où $S(\alpha;\beta)$ est son sommet.

CORRECTION

Le sommet — Le sommet de P' est l'image de O.

$S(3;-2)$

L'équation —

$y=(x-3)^2-2$

Translater la parabole $y=x^2$ du vecteur $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ donne $y=(x-\alpha)^2+\beta$: on lit le sommet $S(\alpha;\beta)$ sans calcul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(x+3)^2-2` → Le vecteur pousse la courbe vers la droite : le sommet est en $x=3$, et $(x+3)^2$ s'annulerait en -3.

`(x-3)^2+2` → Le vecteur fait descendre la courbe de 2 : on retranche 2.

`(x+3)^2+2` → Les deux signes sont inversés : le sommet de P' est $S(3;-2)$.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Trouver le coefficient

La parabole d'équation $y=a(x-2)^2$ passe par le point $A(4;-12)$. Déterminer a.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de A vérifient l'équation de la parabole.
2. Calcule d'abord $(4-2)^2$.

CORRECTION

Remplacer —

$-12=a(4-2)^2=4a$

Conclure —

$a=-3$

Pour trouver a, on remplace x et y par les coordonnées d'un point de la parabole autre que son sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3/4` → Tu as calculé $a\times 4^2$: il faut $a\times(4-2)^2$.

`-6` → $4-2=2$ est élevé au carré : $-12=4a$.

EXERCICE 58 · PRATIQUE

Le sens de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-(x-3)^2$. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est croissante.

Écris l'intervalle, par exemple « [2;+inf[».

Maths à la carte — EL KADER HAMMAMI

Réponse attendue : `]-inf;3]` — aussi acceptées : x<=3 · x≤3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Détermine le sommet et l'orientation de la parabole.
2. Une parabole tournée vers le bas monte jusqu'à son sommet, puis descend.

CORRECTION

La parabole — La courbe est une parabole de sommet $S(3;0)$, tournée vers le bas, car $a = -1 < 0$.

Les variations — Elle monte jusqu'au sommet, puis descend.

f croissante sur $]-\infty;3]$

Pour $a < 0$, $a(x-\alpha)^2$ est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha;+\infty[$: le sommet est un maximum.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[3;+inf[` → Sur $[3;+\infty[$, la parabole tournée vers le bas descend : f y est décroissante.

`]-inf;-3]` → Le sommet est en $x = 3$, là où $(x-3)^2$ s'annule.

`]-inf;3[` → f est croissante sur $]-\infty;3[$, mais aussi sur $]-\infty;3]$, qui est plus grand : le sommet peut être inclus.

EXERCICE 59 · PRATIQUE

Le décalage vertical

La parabole d'équation $y = x^2 + \beta$ passe par le point $A(3;4)$. Déterminer β.

Donne la valeur de □eta.

Réponse attendue : `-5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de A vérifient l'équation : $4 = 3^2 + \beta$.
2. Calcule 3^2, puis isole β.

CORRECTION

Remplacer —

$4 = 3^2 + \beta = 9 + \beta$

Conclure —

$\beta = 4 - 9 = -5$

Le sommet est donc $S(0;-5)$: la parabole est celle de $y = x^2$, descendue de 5.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → On isole β en retranchant 9 : $\beta = 4 - 9$.

`1` → L'abscisse 3 est élevée au carré : $4 = 9 + \beta$.

EXERCICE 60 · RAISONNEMENT

Où la parabole coupe l'axe des ordonnées

La parabole P' est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une translation, et son sommet est le point $S(-3; -2)$. Calculer l'ordonnée du point où P' coupe l'axe des ordonnées.

Donne l'ordonnée du point.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation ne change pas la forme : P' a pour équation $y = (x - \alpha)^2 + \beta$, où $S(\alpha; \beta)$ est son sommet.
2. Remplace α et β par les coordonnées de S, puis x par 0.

CORRECTION

L'équation —

$y = (x + 3)^2 - 2$

En x = 0 —

$y = 3^2 - 2 = 7$

Le point où une courbe coupe l'axe des ordonnées est le point d'abscisse 0 : on remplace x par 0 dans l'équation.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → -2 est l'ordonnée du sommet, qui n'est pas sur l'axe des ordonnées : son abscisse est -3.

11 → Le sommet a pour ordonnée -2 : on retranche 2.

9 → $9 = (0 + 3)^2$: il reste à ajouter $\beta = -2$.

EXERCICE 61 · RAISONNEMENT

Une équation avec un carré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2(x - 1)^2 = 18$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {1;5} ».

Réponse attendue : `{-2;4}` — aussi acceptées : {4;-2}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Divise d'abord les deux membres par 2.
2. Un nombre dont le carré vaut 9 est 3 ou -3.

CORRECTION

Diviser par 2 —

$(x - 1)^2 = 9$

Deux cas — Un nombre dont le carré vaut 9 est 3 ou -3.

$x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$

Les solutions —

$S = \{-2; 4\}$

La droite $y = 18$ coupe la parabole $y = 2(x-1)^2$ en deux points symétriques par rapport à son axe, la droite $x = 1$: les deux solutions ont pour moyenne 1.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4} / 4` → $x - 1$ peut aussi valoir -3 : il y a une seconde solution.

`{-4;2}` → Résous $x - 1 = 3$ et $x - 1 = -3$: on ajoute 1.

`{-3;3}` → -3 et 3 sont les valeurs de $x - 1$; il reste à ajouter 1.

EXERCICE 62 · RAISONNEMENT

Deux paraboles qui se coupent

Soit P_1 la parabole d'équation $y = (x-2)^2$ et P_2 la parabole d'équation $y = x^2 + 2$. Elles se coupent en un seul point. Calculer l'abscisse de ce point.

Donne l'abscisse du point.

Réponse attendue : `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe $(x-2)^2$.
2. Écris l'égalité des ordonnées : les termes en x^2 s'éliminent.

CORRECTION

Développer —

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Égaler —

$x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2 \iff -4x = -2$

Conclure —

$x = \frac{1}{2}$

Pour trouver les points communs à deux courbes, on égale leurs ordonnées : ici, les termes en x^2 s'éliminent, et il reste une équation du premier degré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Le double produit de $(x-2)^2$ est $-4x$: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

`-1/2` → $-4x = -2$ donne $x = \dfrac{-2}{-4}$, un nombre positif.

EXERCICE 63 · DEFI

Deux points de l'axe des abscisses

La parabole P est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Elle passe par l'origine O et par le point $A(6;0)$. Déterminer β.

Donne la valeur de eta.

Réponse attendue : `-9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. P a pour équation $y = (x-\alpha)^2 + \beta$.
2. O et A ont la même ordonnée : ils sont symétriques par rapport à l'axe de P.
3. Trouve α, puis écris que O est sur P.

CORRECTION

L'axe — O et A sont deux points de P de même ordonnée : l'axe passe par le milieu de $[OA]$.

$\alpha = \frac{0+6}{2} = 3$

Le point O — O est sur P : $(x-3)^2 + \beta$ s'annule pour $x = 0$.

$0 = (0-3)^2 + \beta \iff \beta = -9$

P a pour équation $y = (x-3)^2 - 9 = x^2 - 6x$, et pour sommet $S(3;-9)$: deux points d'une parabole de même ordonnée donnent son axe.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → Le sommet est sous l'axe des abscisses, puisque la parabole, tournée vers le haut, le coupe en deux points : β est négatif.

3 → 3 est la valeur de α, l'abscisse du sommet. On demande β, son ordonnée.

-36 → L'axe passe par le milieu de $[OA]$: $\alpha = 3$, pas 6.

EXERCICE 64 · BASE

Retrouver b avec l'axe

La parabole d'équation $y = 2x^2 + bx + 5$, où b est un réel, a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 3$. Déterminer b.

Donne la valeur de b.

Réponse attendue : -12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'axe de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ est la droite $x = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Ici $a = 2$: écris $-\dfrac{b}{4} = 3$.

CORRECTION

L'abscisse du sommet — Avec $a = 2$:

$\alpha = -\frac{b}{2\times 2} = -\frac{b}{4}$

Égaler —

$-\frac{b}{4} = 3 \iff b = -12$

On vérifie : pour $y = 2x^2 - 12x + 5$, $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{12}{4} = 3$. La formule $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ sert aussi à retrouver un coefficient quand on connaît l'axe.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → Pour $b = 12$, $-\dfrac{b}{2a} = -3$: l'axe serait la droite $x = -3$.

-6 → Le dénominateur est $2a = 4$, pas 2 : $-\dfrac{b}{4} = 3$.

EXERCICE 65 · PRATIQUE

Un sommet sur l'axe des abscisses

Soit c un réel et P la parabole d'équation $y = x^2 + 8x + c$. Déterminer c pour que le sommet de P soit sur l'axe des abscisses.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $x^2 + 8x$ est le début du carré $(x+4)^2$: écris la forme canonique.
2. Le sommet est sur l'axe des abscisses quand son ordonnée β est nulle.

CORRECTION

Compléter le carré —

$$x^2 + 8x + c = (x+4)^2 - 16 + c$$

L'ordonnée du sommet — Le sommet est $S(-4; c-16)$; il est sur l'axe des abscisses quand son ordonnée est nulle.

$$c - 16 = 0 \iff c = 16$$

Pour $c = 16$, $y = (x+4)^2$: la parabole touche l'axe des abscisses en son sommet $S(-4;0)$. La forme canonique donne l'ordonnée du sommet en fonction du paramètre.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 / -4 → C'est l'abscisse du sommet, ou son opposé. On cherche c pour que l'ordonnée du sommet, $c - 16$, soit nulle.

-16 → Pour $c = -16$, le sommet est $S(-4;-32)$. Le carré $(x+4)^2$ contient $+16$: il faut $c = 16$.

64 → $64 = 8^2$, mais $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$: le terme constant est le carré de la moitié de 8.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

Combien de points sur l'axe ?

La courbe d'une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole tournée vers le haut, qui coupe l'axe des ordonnées au-dessous de O. Déterminer le nombre de points communs à cette parabole et à l'axe des abscisses.

Donne le nombre de points.

Réponse attendue : 2 — aussi acceptées : deux · deux points · 2 points · deux points communs · 2 points communs

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point où la parabole coupe l'axe des ordonnées a pour ordonnée $c = f(0)$: il est sous l'axe des abscisses.

2. La parabole est tournée vers le haut : où est son sommet par rapport à ce point ?

CORRECTION

Le signe de c — Le point d'abscisse 0 est au-dessous de O.

$$c = f(0) < 0$$

Le sommet — La parabole est tournée vers le haut : son sommet est son point le plus bas, donc son ordonnée est au plus $f(0)$, négative. Le sommet est sous l'axe des abscisses.

Les deux branches — De part et d'autre du sommet, la parabole remonte au-dessus de n'importe quel nombre : elle traverse l'axe des abscisses une fois à gauche du sommet et une fois à droite.

$$\text{deux points communs}$$

Quand a et c sont de signes contraires, $ac < 0$, donc le discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement positif : le trinôme a deux racines, et la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / un seul / un point / 1 point` → Un seul point commun, c'est un sommet posé sur l'axe des abscisses. Ici le sommet est au-dessous, et la parabole remonte des deux côtés.

`0 / aucun / aucun point` → La parabole passe au-dessous de l'axe des abscisses, au point d'abscisse 0, et elle est tournée vers le haut : elle finit par remonter au-dessus de l'axe, des deux côtés.

EXERCICE 67 · RAISONNEMENT

Le meilleur bénéfice

Un artisan fabrique et vend x objets par semaine, avec x dans $[0; 60]$. Son bénéfice, en dinars, est $B(x) = -2x^2 + 120x - 1000$. Calculer le bénéfice maximal, en dinars.

Donne le bénéfice maximal, en dinars.

Réponse attendue : `800`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La parabole est tournée vers le bas : le maximum est atteint au sommet.
2. L'abscisse du sommet est $-\dfrac{b}{2a}$.
3. Calcule ensuite B en cette valeur.

CORRECTION

Le sommet —

$$\alpha = -\frac{120}{2\times(-2)} = 30$$

Le maximum —

$$B(30) = -2 \times 900 + 3\,600 - 1\,000 = 800$$

Le bénéfice est maximal pour 30 objets par semaine : le maximum d'un trinôme tourné vers le bas est l'ordonnée de son sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → 30 est le nombre d'objets qui rend le bénéfice maximal ; on demande la valeur de ce bénéfice.

`4400` → $-2 \times 30^2 = -1\,800$: ce terme se retranche.

`-1000` → $B(0) = -1\,000$: c'est le bénéfice quand on ne vend rien.

EXERCICE 68 · RAISONNEMENT

L'autre point sur l'axe

Une parabole P a pour sommet $S(1;-8)$ et coupe l'axe des abscisses au point $A(3;0)$. Déterminer l'abscisse de l'autre point où P coupe l'axe des abscisses.

Donne l'abscisse de l'autre point.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'axe de P est la droite d'équation $x = 1$.
2. Les deux points de P situés sur l'axe des abscisses sont symétriques par rapport à l'axe de P.

CORRECTION

La symétrie — Le symétrique de A par rapport à la droite $x = 1$ est sur P, et aussi sur l'axe des abscisses.

Le milieu — Son abscisse x vérifie $\dfrac{3+x}{2} = 1$.

$x = -1$

Vérifier — Avec $a = 2$, on a P : $y = 2(x-1)^2 - 8$, et $2 \times (-2)^2 - 8 = 0$.

Deux points d'une parabole qui ont la même ordonnée sont symétriques par rapport à son axe : l'abscisse du sommet est la moyenne de leurs abscisses.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3` → La parabole n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, mais par rapport à la droite $x = 1$.

`1` → 1 est l'abscisse du sommet, qui est sous l'axe des abscisses.

EXERCICE 69 · DEFI

Un enclos contre un mur

Un jardinier dispose de 40 m de grillage pour fermer un enclos rectangulaire adossé à un mur : le mur forme un côté, le grillage les trois autres. On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur. Calculer l'aire maximale de l'enclos, en mètres carrés, sans écrire l'unité.

Donne l'aire maximale, sans unité.

Réponse attendue : `200`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$.
2. Exprime l'aire $A(x)$: c'est un trinôme tourné vers le bas.
3. Cherche l'abscisse de son sommet.

CORRECTION

L'aire —

$A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$

Le sommet —

$\alpha = -\frac{40}{2\times(-2)} = 10$

Le maximum —

$A(10) = 10 \times 20 = 200$

L'aire est maximale avec deux côtés de 10 m et un côté de 20 m : on modélise par un trinôme, puis on cherche son sommet.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 m est la longueur x qui rend l'aire maximale ; il reste à calculer l'aire.

`100` → L'enclos n'est pas un carré : le côté parallèle au mur mesure $40 - 2 \times 10 = 20$ m.

`400` → Le grillage forme trois côtés : deux de longueur x et un de longueur $40 - 2x$.

EXERCICE 70 · BASE Où la racine est définie

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$. Déterminer son ensemble de définition.

Écris l'intervalle, par exemple «]-inf;2] ».

Réponse attendue : `]-inf;3]` — aussi acceptées : D=]-inf;3] · Df=]-inf;3] · x<=3 · x≤3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ce qui est sous la racine doit être positif ou nul.
2. Résous l'inéquation $6 - 2x \geq 0$: attention quand tu divises par un nombre négatif.

CORRECTION

La condition —

$6 - 2x \geq 0 \iff -2x \geq -6 \iff x \leq 3$

L'ensemble — On divise par -2, négatif : l'inégalité change de sens.

$D =]-\infty; 3]$

Une racine carrée n'existe que si ce qui est sous la racine est positif ou nul : on résout une inéquation du premier degré, sans oublier de changer le sens quand on divise par un nombre négatif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[3;+inf[` → En divisant $-2x \geq -6$ par -2, l'inégalité change de sens : $x \leq 3$. Essaie $x = 4$: $6 - 8 = -2$ est négatif.

`]-inf;3[` → Pour $x = 3$, $\sqrt{0} = 0$ existe : le crochet est fermé en 3.

`]-inf;-3]` → $6 - 2x$ s'annule pour $x = 3$: $6 - 2 \times 3 = 0$.

EXERCICE 71 · BASE Une image par la racine

Soit f la fonction définie sur $[-9;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+9}$. Calculer $f(16)$.

Donne la valeur de $f(16)$.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace x par 16 sous la racine.
2. Calcule la somme avant de prendre la racine.

CORRECTION

Remplacer —

$f(16)=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

On calcule d'abord ce qui est sous la racine, puis on prend la racine : la racine d'une somme n'est pas la somme des racines.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → $\sqrt{16}+\sqrt{9}=7$, mais $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$: on ne sépare pas la racine d'une somme.

`25` → 25 est le nombre sous la racine ; il reste à prendre sa racine carrée.

EXERCICE 72 · BASE

Dépasser 30

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$. On a $f(x)>30$ dès que x dépasse un certain nombre. Déterminer ce nombre.

Donne seulement ce nombre.

Réponse attendue : `900`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. Cherche le nombre dont la racine carrée vaut 30.

CORRECTION

Le seuil — $\sqrt{900}=30$, et la fonction racine carrée est croissante.

$x>900 \iff \sqrt{x}>\sqrt{900}=30$

$\sqrt{x}$ dépasse n'importe quel réel A positif dès que $x>A^2$: $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, mais lentement.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(30)` → Pour que la racine de x dépasse 30, c'est x qui doit dépasser le carré de 30.

`60` → 60 est le double de 30 ; la racine de 60 ne vaut pas 30.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

La translation à l'envers

L'image de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $3\vec{i}$ est la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+b}$. Déterminer b.

Donne la valeur de b.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La courbe de $\sqrt{x+b}$ est l'image de celle de $\sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-b\vec{i}$.
2. Le point O, où commence la courbe de $\sqrt{x}$, va au point $(3;0)$.

CORRECTION

Le point de départ — La nouvelle courbe commence au point $(3;0)$: la fonction est définie sur $[3;+\infty[$.

Identifier — $\sqrt{x+b}$ est définie sur $[-b;+\infty[$, donc $-b=3$.

$b=-3$

La courbe de $\sqrt{x-3}$ commence au point $(3;0)$: décaler la courbe vers la droite, c'est retrancher sous la racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $\sqrt{x+3}$ est définie à partir de -3 : sa courbe est décalée vers la gauche.

EXERCICE 74 · BASE

Une équation avec une racine

Résoudre dans $[-1;+\infty[$ l'équation $\sqrt{x+1}=3$.

Donne la solution.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux membres sont positifs : élève-les au carré.
2. $\sqrt{x+1}=3$ équivaut à $x+1=9$.

CORRECTION

Au carré —

$\sqrt{x+1}=3 \iff x+1=9$

Conclure —

$x=8$

Pour un réel k positif, $\sqrt{x+1}=k$ équivaut à $x+1=k^2$: on vérifie que $\sqrt{8+1}=3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → On n'enlève pas la racine en retranchant : on élève au carré, $x+1=9$.

10 → $x+1=9$ donne $x=9-1$.

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT

Une inéquation avec une racine

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x-2} \leq 3$.

Écris l'intervalle des solutions, par exemple « [1;4] ».

Réponse attendue : `[2;11]` — aussi acceptées : 2<=x<=11 · 2≤x≤11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La racine n'existe que si $x - 2 \geq 0$.
2. Sur cet ensemble, les deux membres sont positifs : on peut les élever au carré.

CORRECTION

Le domaine —

$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$

Élever au carré — Les deux membres sont positifs, et la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

$\sqrt{x-2} \leq 3 \iff x - 2 \leq 9 \iff x \leq 11$

Les deux conditions —

$S = [2; 11]$

Pour résoudre une inéquation avec une racine, on écrit d'abord la condition d'existence, puis on élève au carré deux membres positifs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;11]` → Pour $x < 2$, $\sqrt{x-2}$ n'existe pas : il faut $x \geq 2$.

`[2;5]` → On élève au carré : $x - 2 \leq 9$, pas $x - 2 \leq 3$.

`[2;11[ / ]2;11]` → L'inégalité est large : $x = 11$ donne $\sqrt{9} = 3$, et $x = 2$ donne $\sqrt{0} = 0$; les deux sont solutions.

EXERCICE 76 · RAISONNEMENT

La racine et la moitié

Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'inéquation $\sqrt{x} \geq \dfrac{x}{2}$.

Écris l'intervalle des solutions, par exemple « [1;9] ».

Réponse attendue : `[0;4]` — aussi acceptées : 0<=x<=4 · 0≤x≤4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $t = \sqrt{x}$: alors $x = t^2$, avec $t \geq 0$.
2. L'inéquation devient $t \geq \dfrac{t^2}{2}$, soit $t(2 - t) \geq 0$.

CORRECTION

Changer d'inconnue — On pose $t = \sqrt{x}$, avec $t \geq 0$.

$t \geq \frac{t^2}{2} \iff t(2-t) \geq 0$

Le signe — Comme $t \geq 0$, il faut $2 - t \geq 0$.

$0 \leq t \leq 2$

Revenir à x — La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

$0 \leq x \leq 4 \quad ; \quad S = [0; 4]$

La courbe de $\sqrt{x}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ entre leurs deux points communs, d'abscisses 0 et 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[4;+inf[` → Pour $x = 16$: $\sqrt{16} = 4$ et $\dfrac{16}{2} = 8$; la racine est en dessous. C'est l'autre côté qu'il faut garder.

`]0;4]` → Pour $x = 0$, les deux membres valent 0, et $0 \geq 0$: 0 est solution.

`[0;2]` → $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$: c'est la racine qui est au plus 2, donc x est au plus 4.

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Une distance à l'origine

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Soit M le point de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ d'abscisse a, avec $a \geq 0$. Déterminer a pour que $OM = \sqrt{12}$.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de M sont $(a; \sqrt{a})$.
2. Écris OM^2 : le carré de $\sqrt{a}$ est a.
3. Tu obtiens une équation du second degré en a.

CORRECTION

Les coordonnées —

$M(a; \sqrt{a})$

La distance —

$OM^2 = a^2 + (\sqrt{a})^2 = a^2 + a$

L'équation — $a^2 + a - 12 = 0$, soit $(a - 3)(a + 4) = 0$; on garde $a \geq 0$.

$a = 3$

Le point cherché est $M(3; \sqrt{3})$: sur la courbe de $\sqrt{x}$, le carré de l'ordonnée est égal à l'abscisse.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4` → -4 est solution de $a^2 + a - 12 = 0$, mais a est l'abscisse d'un point de la courbe : $a \geq 0$.

`sqrt(6)` → Le carré de $\sqrt{a}$ est a, pas a^2 : $OM^2 = a^2 + a$.

EXERCICE 78 · DEFI

Une racine au-dessus d'une droite

Résoudre dans $[-3;+\infty[$ l'inéquation $\sqrt{x+3} > x-3$.

Écris l'intervalle des solutions, par exemple « [1;4[».

Réponse attendue : `[-3;6[` — aussi acceptées : -3<=x<6 · -3≤x<6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $x < 3$, le second membre est négatif : que dire de l'inégalité ?
2. Pour $x \geq 3$, les deux membres sont positifs : élève-les au carré.
3. $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$.

CORRECTION

Si x < 3 — Pour $-3 \leq x < 3$, $x - 3 < 0 \leq \sqrt{x+3}$: tous ces réels sont solutions.

$[-3;3[$

Si x ≥ 3 — Les deux membres sont positifs : on élève au carré.

$x+3 > (x-3)^2 \iff x^2 - 7x + 6 < 0 \iff (x-1)(x-6) < 0$

Avec x ≥ 3 — Le trinôme est négatif entre ses racines 1 et 6 ; on garde $x \geq 3$.

$[3;6[$

Réunir —

$S = [-3;6[$

Avant d'élever au carré, on sépare les cas selon le signe du second membre : là où il est négatif, l'inégalité est vraie d'office. La droite $y = x - 3$ est sous la courbe de $\sqrt{x+3}$ jusqu'à leur point commun $(6;3)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]1;6[` → Élever au carré n'est permis que si les deux membres sont positifs. Pour $x = 0$: $\sqrt{3} > -3$ est vrai, et 0 n'est pas dans $]1;6[$.

`[3;6[` → Pour $x < 3$, le second membre est négatif, et une racine est positive : ces réels sont aussi solutions.

`[-3;6]` → Pour $x = 6$, les deux membres valent 3 : l'inégalité stricte est fausse.

`]-inf;6[` → Pour $x < -3$, $\sqrt{x+3}$ n'existe pas : on résout dans $[-3;+\infty[$.

EXERCICE 79 · BASE

Un point de l'hyperbole

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. Déterminer l'abscisse du point de H d'ordonnée 4.

Donne l'abscisse du point.

Réponse attendue : `1/4` — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Résous l'équation $\dfrac{1}{x} = 4$.
2. Deux nombres dont le produit vaut 1 sont inverses l'un de l'autre.

CORRECTION

L'équation —

$\frac{1}{x} = 4 \iff x = \frac{1}{4}$

Le point de H d'ordonnée 4 est $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$: sur l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, l'abscisse et l'ordonnée sont inverses l'une de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 est l'ordonnée. L'abscisse est son inverse.

`-4 / -1/4` → Sur cette hyperbole, x et y ont le même signe : l'ordonnée 4 est positive, l'abscisse aussi.

EXERCICE 80 · BASE

Le coefficient de l'hyperbole

L'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ passe par le point $A(-2; 3)$. Déterminer a.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : `-6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coordonnées de A vérifient l'équation : $3 = \frac{a}{-2}$.
2. Multiplie les deux membres par -2.

CORRECTION

Remplacer —

$3 = \frac{a}{-2}$

Conclure —

$a = 3 \times (-2) = -6$

Sur l'hyperbole $y = \frac{a}{x}$, le produit xy vaut toujours a. Ici $a < 0$: les branches sont dans les quarts de plan où x et y sont de signes contraires, comme le point A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3/2` → On ne divise pas : $\frac{a}{x} = y$ donne $a = x \times y$.

`6` → $3 \times (-2) = -6$: le produit d'un positif et d'un négatif est négatif.

EXERCICE 81 · BASE

La plus petite valeur

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer la plus petite valeur de $f(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[2; 5]$.

Donne la plus petite valeur.

Réponse attendue : `1/5` — aussi acceptées : 0.2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.
2. Sur un intervalle où elle décroît, la plus petite valeur est atteinte à droite.

CORRECTION

Décroissante — La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, qui contient $[2;5]$.

Le minimum — Pour $2 \leq x \leq 5$, on a $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

$\min f = f(5) = \frac{1}{5}$

Une fonction décroissante renverse l'ordre : la plus grande valeur de x donne la plus petite image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → C'est $f(2)$, la plus grande valeur : la fonction inverse est décroissante.

`5 / 2` → On demande une valeur de $f(x)$, pas de x : calcule l'image.

EXERCICE 82 · PRATIQUE

Au-dessus de la droite y = 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de 2 par $f(x) = \dfrac{6}{x-2}$. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 3$.

Écris l'intervalle des solutions, par exemple «]1;5] ».

Réponse attendue : `]2;4]` — aussi acceptées : `2<x<=4` · `2<x≤4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si $x < 2$, quel est le signe de $\dfrac{6}{x-2}$? Peut-il dépasser 3 ?
2. Si $x > 2$, multiplie les deux membres par $x-2$, positif : le sens ne change pas.

CORRECTION

Si x < 2 — $x - 2 < 0$, donc $f(x) < 0 < 3$: aucune solution.

Si x > 2 — On multiplie par $x-2$, positif.

$\frac{6}{x-2} \geq 3 \iff 6 \geq 3(x-2) \iff x \leq 4$

Conclure — On garde $2 < x \leq 4$.

$S =]2;4]$

La branche de droite de l'hyperbole $y = \dfrac{6}{x-2}$ est au-dessus de la droite $y = 3$ jusqu'au point $(4;3)$, et la branche de gauche est sous l'axe des abscisses. On ne multiplie par $x-2$ qu'en connaissant son signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;4]` → Pour $x < 2$, $f(x)$ est négatif : il ne dépasse pas 3. Multiplier par $x-2$ sans connaître son signe fausse le résultat.

`[4;+inf[` → Pour $x = 8$: $\dfrac{6}{6} = 1$, qui n'est pas supérieur à 3. C'est entre 2 et 4 que $f(x) \geq 3$.

`]2;4[` → Pour $x = 4$, $f(4) = 3$, et $3 \geq 3$: 4 est solution.

`[2;4]` → f n'est pas définie en 2 : le crochet est ouvert en 2.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT

Le centre après une translation

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{2}{x}$, et H' son image par la translation de vecteur $-3\vec{i} + \vec{j}$.

Déterminer les coordonnées du centre de H'.

Écris les coordonnées sous la forme « (x;y) », par exemple « (2;3) ».

Réponse attendue : `(-3;1)` — aussi acceptées : (-3,1) · I(-3;1) · I(-3,1) · -3;1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de H est l'origine O.
2. Une translation envoie le centre de H sur le centre de H'.

CORRECTION

Le centre de H — H a pour centre O et pour asymptotes les axes.

L'image de O — Le centre de H' est l'image de O par la translation : $\overrightarrow{OI} = -3\vec{i} + \vec{j}$.

$I(-3;1)$

H' a pour équation $y = \dfrac{2}{x+3} + 1$, et pour asymptotes les droites $x = -3$ et $y = 1$: une translation déplace le centre et les asymptotes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3;1) / (3,1)` → Le vecteur a pour première coordonnée -3 : le centre part vers la gauche.

`(1;-3) / (1,-3)` → On écrit l'abscisse en premier : le coefficient de $\vec{i}$.

`(0;0) / (0,0)` → C'est le centre de H. Celui de H' est son image par la translation.

EXERCICE 84 · DEFI

L'inverse sous la droite y = x

Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'inéquation $\dfrac{1}{x} \leq x$.

Écris l'ensemble des solutions comme une réunion d'intervalles, par exemple « [-2;0[U[3;+inf[».

Réponse attendue : `[-1;0[U[1;+inf[` — aussi acceptées : [-1;0[∪[1;+inf[· [-1;0[ou [1;+inf[· [1;+inf[U[-1;0[· [1;+inf[∪[-1;0[· [1;+inf[ou [-1;0[· -1<=x<0 ou x>=1 · x>=1 ou -1<=x<0

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Passe tout dans le second membre : $x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.
2. Étudie le signe de $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$ dans un tableau.
3. 0 est une valeur interdite.

CORRECTION

Un seul membre —

$\frac{1}{x} \leq x \iff x - \frac{1}{x} \geq 0 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0$

Le tableau de signes — Le quotient est négatif sur $]-\infty;-1[$, positif sur $]-1;0[$, négatif sur $]0;1[$, positif sur $]1;+\infty[$; il s'annule en -1 et en 1.

Conclure — On garde où il est positif ou nul, sans 0.

$S=[-1;0[\cup[1;+\infty[$

L'hyperbole $y=\dfrac{1}{x}$ est sous la droite $y=x$, ou la touche, pour x dans $[-1;0[$ et dans $[1;+\infty[$; les points communs sont $(-1;-1)$ et $(1;1)$. On ne multiplie jamais par x sans connaître son signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[1;+inf[` → Il y a aussi des solutions négatives : pour $x=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{x}=-2$, qui est inférieur à $-\dfrac{1}{2}$.

`]-inf;-1]U[1;+inf[ / ]-inf;-1]∪[1;+inf[` → Multiplier par x ne garde le sens que si $x>0$. Pour $x=-2$: $\dfrac{1}{-2}=-0{,}5$, qui n'est pas inférieur à -2.

`]-inf;-1]U]0;1] / ]-inf;-1]∪]0;1]` → C'est l'ensemble où $\dfrac{1}{x}\geq x$. Pour $x=2$: $\dfrac{1}{2}\leq 2$, donc 2 est solution.

`[-1;0]U[1;+inf[ / [-1;0]∪[1;+inf[` → $\dfrac{1}{x}$ n'existe pas pour $x=0$: le crochet est ouvert en 0.

EXERCICE 85 · DEFI

Une seule rencontre

Soit a un réel non nul. On cherche a pour que l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{a}{x}$ et la droite d'équation $y=-x+4$ aient un seul point commun. Déterminer a.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $x\neq 0$, multiplie les deux membres de $\dfrac{a}{x}=-x+4$ par x.
2. Tu obtiens une équation du second degré : elle doit avoir une seule solution.
3. Une équation du second degré a une seule solution quand son discriminant est nul.

CORRECTION

L'équation — Pour $x\neq 0$, on multiplie par x.

$\frac{a}{x}=-x+4 \iff x^2+4x+a=0$

Une seule racine — Le discriminant doit être nul.

$\Delta=16-4a=0 \iff a=4$

Vérifier — La racine double est $x=2$, non nulle : le point commun est $(2;2)$.

Le nombre de points communs à deux courbes est le nombre de solutions de l'équation obtenue en égalant leurs ordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4` → Pour $a=-4$, $x^2-4x-4=0$ a un discriminant positif : deux points communs.

16 → Le discriminant de $x^2 - 4x + a$ est $16 - 4a$, pas $16 - a$.

2 → 2 est l'abscisse du point commun ; on demande la valeur de a.

EXERCICE 86 · BASE **La valeur interdite**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$. Déterminer le réel pour lequel f n'est pas définie.

Donne ce réel.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un quotient n'existe pas quand son dénominateur est nul.
2. Résous $x - 4 = 0$.

CORRECTION

Le dénominateur —

$x - 4 = 0 \iff x = 4$

f est définie sur $\mathbb{R}$ privé de 4, et la droite d'équation $x = 4$ est l'asymptote verticale de sa courbe.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → $x - 4$ s'annule pour $x = 4$.

-1/2 → En $-\dfrac{1}{2}$, c'est le numérateur qui s'annule : f y vaut 0, elle est bien définie.

EXERCICE 87 · BASE **L'asymptote verticale**

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{x+5}{3x-6}$. Son asymptote verticale est la droite d'équation $x = k$. Déterminer k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'asymptote verticale est là où le dénominateur s'annule.
2. Résous $3x - 6 = 0$.

CORRECTION

Le dénominateur —

$3x - 6 = 0 \iff x = 2$

Pour $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, l'asymptote verticale est la droite $x = -\dfrac{d}{c}$: ici $-\dfrac{-6}{3} = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → $3x - 6$ s'annule pour $x = 2$: $3 \times 2 - 6 = 0$.

-5 → -5 annule le numérateur ; l'asymptote verticale vient du dénominateur.

1/3 → $\frac{1}{3}$ donne l'asymptote horizontale, $y = \frac{1}{3}$; on demande la verticale.

6 → Divise par 3 : $3x = 6$ donne $x = 2$.

EXERCICE 88 · BASE

Un coefficient par l'asymptote

Soit a un réel et H la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{ax + 1}{2x - 3}$. H est une hyperbole d'asymptote horizontale la droite d'équation $y = 4$. Déterminer a.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'asymptote horizontale de l'hyperbole $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ est la droite $y = \dfrac{a}{c}$.
2. Ici $c = 2$: écris $\dfrac{a}{2} = 4$.

CORRECTION

Le quotient — Les coefficients de x sont a et 2.

$\frac{a}{2} = 4$

Conclure —

$a = 8$

$f(x) = \dfrac{8x + 1}{2x - 3}$ a pour asymptotes les droites $x = \dfrac{3}{2}$ et $y = 4$: le quotient des coefficients de x donne l'asymptote horizontale.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $\dfrac{a}{2} = 4$ donne $a = 4 \times 2$: on multiplie, on ne divise pas.

4 → 4 est le quotient $\dfrac{a}{2}$, pas a lui-même.

EXERCICE 89 · PRATIQUE

Un centre sur la droite y = x

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de -1 par $f(x) = \dfrac{mx - 1}{3x + 3}$, dont la courbe est une hyperbole. Déterminer m pour que le centre de cette hyperbole soit sur la droite d'équation $y = x$.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de l'hyperbole $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.
2. Un point est sur la droite $y = x$ quand son ordonnée est égale à son abscisse.

CORRECTION

Le centre — L'asymptote verticale est $x = -1$, l'horizontale $y = \dfrac{m}{3}$.

$I\left(-1; \frac{m}{3}\right)$

Sur la droite y = x —

$\frac{m}{3} = -1 \iff m = -3$

Pour $m = -3$, $f(x) = \dfrac{-3x-1}{3x+3}$, de centre $I(-1; -1)$: le centre se lit sur les coefficients, puis on traduit la condition sur ses coordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $3x + 3$ s'annule pour $x = -1$: l'abscisse du centre est -1, pas 1.

-1 → L'ordonnée du centre est $\dfrac{m}{3}$, pas m : $\dfrac{m}{3} = -1$.

EXERCICE 90 · PRATIQUE **Où l'hyperbole coupe l'axe des abscisses**

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$. Calculer l'abscisse du point où H coupe l'axe des abscisses.

Donne l'abscisse du point.

Réponse attendue : 3/2 — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur l'axe des abscisses, l'ordonnée est nulle.
2. Un quotient est nul quand son numérateur est nul et son dénominateur ne l'est pas.

CORRECTION

Le numérateur —

$2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$

Le dénominateur — Pour $x = \dfrac{3}{2}$, $x + 4 \neq 0$: le point existe.

La courbe coupe l'axe des abscisses là où le numérateur s'annule, et l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → En -4, c'est le dénominateur qui s'annule : H n'a pas de point d'abscisse -4.

-3/4 → $-\dfrac{3}{4}$ est l'image de 0 : c'est là que H coupe l'axe des ordonnées.

-3/2 → $2x - 3 = 0$ donne $x = \dfrac{3}{2}$, positif.

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

L'hyperbole et la droite y = x

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de 1 par $f(x) = \dfrac{3x-4}{x-1}$. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

Donne la solution.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $x \neq 1$, multiplie les deux membres par $x - 1$.
2. Tu obtiens une équation du second degré : reconnais une identité remarquable.

CORRECTION

Multiplier — Pour $x \neq 1$:

$\frac{3x-4}{x-1} = x \iff 3x - 4 = x^2 - x$

Ordonner —

$x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0$

Conclure — 2 est différent de 1 : c'est la solution.

$S = \{2\}$

La droite $y = x$ ne rencontre la courbe de f qu'au point $(2; 2)$, et elle ne la traverse pas : c'est une racine double.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → f n'est pas définie en 1 : ce ne peut pas être une solution.

-2 → $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ s'annule pour $x = 2$.

EXERCICE 92 · RAISONNEMENT

Une inéquation avec une hyperbole

Résoudre dans $\mathbb{R}$ privé de 3 l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x-3} < 2$.

Écris l'intervalle des solutions, par exemple «]-inf;5[».

Réponse attendue : `]-inf;3[` — aussi acceptées : x<3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ne multiplie pas par $x - 3$ sans connaître son signe : passe tout dans le premier membre.
2. Réduis $\dfrac{2x+1}{x-3} - 2$ au même dénominateur.

CORRECTION

Tout à gauche —

$\frac{2x+1}{x-3} - 2 = \frac{2x+1-2(x-3)}{x-3} = \frac{7}{x-3}$

Le signe — $\dfrac{7}{x-3}$ est négatif exactement quand $x - 3 < 0$.

$\frac{7}{x-3} < 0 \iff x < 3$

Conclure —

$S =]-\infty; 3[$

La courbe de $\dfrac{2x+1}{x-3} = 2 + \dfrac{7}{x-3}$ est sous son asymptote horizontale $y = 2$ à gauche de l'asymptote verticale, et au-dessus à droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]3;+inf[` → Pour $x = 4$: $\dfrac{9}{1} = 9$, qui n'est pas inférieur à 2. C'est l'autre côté de 3.

`∅ / {}` → Multiplier par $x - 3$ sans connaître son signe fausse le sens de l'inégalité. Réduis plutôt au même dénominateur.

EXERCICE 93 · DEFI

Un changement de repère

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de -3 par $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+3}$, de courbe C. On note $I(-3;3)$ et, pour un point M du plan, $(X;Y)$ ses coordonnées dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$. Une équation de C dans ce repère est $Y = \dfrac{k}{X}$. Déterminer k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $f(x)$ sous la forme $3 + \dfrac{k}{x+3}$.
2. Dans le nouveau repère, $x = X - 3$ et $y = Y + 3$.
3. Remplace dans $y = f(x)$.

CORRECTION

Décomposer —

$\frac{3x+5}{x+3} = \frac{3(x+3)-4}{x+3} = 3 - \frac{4}{x+3}$

Changer de repère — $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ donne $x = X - 3$ et $y = Y + 3$.

$Y + 3 = 3 - \frac{4}{X}$

Conclure —

$Y = \frac{-4}{X}$

Dans le repère centré en I, C a pour équation $Y = -\dfrac{4}{X}$: c'est une hyperbole de centre $I(-3;3)$, image de l'hyperbole $y = -\dfrac{4}{x}$ par une translation. Comme $k < 0$, ses branches sont dans les quarts où X et Y sont de signes contraires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 est le terme constant du numérateur ; il faut d'abord écrire $3x + 5 = 3(x+3) - 4$.

4 → $3x+5-3(x+3)=5-9=-4$, un nombre négatif.

3 → 3 est l'ordonnée du centre ; le reste de la division donne k.

EXERCICE 94 · DEFI

Retrouver un coefficient

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ privé de 1 par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$, où a et b sont deux réels. Sa courbe est une hyperbole de centre $I(1;3)$ qui passe par le point $A(2;1)$. Déterminer b.

Donne la valeur de b.

Réponse attendue : `-5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ordonnée du centre est le quotient des coefficients de x : elle donne a.
2. Écris ensuite que $f(2)=1$.

CORRECTION

Trouver a — Le centre de l'hyperbole $\dfrac{ax+b}{x-1}$ a pour ordonnée $\dfrac{a}{1}$.

$a=3$

Le point A —

$f(2)=\frac{3\times2+b}{2-1}=6+b=1$

Conclure —

$b=-5$

$f(x)=\dfrac{3x-5}{x-1}=3-\dfrac{2}{x-1}$: le centre donne les coefficients de x, un point de la courbe donne ce qui reste.

PIÈGES ANTICIPÉS

-1 → Le centre impose $a=3$: tu as pris $a=1$.

3 → 3 est la valeur de a. Il reste à trouver b avec le point A.

5 → $6+b=1$ donne $b=1-6$.

EXERCICE 95 · DEFI

Un coût moyen

Une entreprise fabrique x objets, avec x entier, $x\geq 1$. Le coût moyen de fabrication d'un objet, en dinars, est $C(x)=\dfrac{2x+600}{x}$. Déterminer le plus petit nombre d'objets pour lequel le coût moyen est strictement inférieur à $2{,}5$ dinars.

Donne le nombre d'objets.

Réponse attendue : `1201`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $C(x) = 2 + \dfrac{600}{x}$.
2. Résous $\dfrac{600}{x} < 0{,}5$ pour x positif.
3. L'inégalité est stricte, et x est un entier.

CORRECTION

Décomposer —

$C(x) = \frac{2x+600}{x} = 2 + \frac{600}{x}$

L'inéquation — Pour $x > 0$, on multiplie par x sans changer le sens.

$2 + \frac{600}{x} < 2{,}5 \iff \frac{600}{x} < 0{,}5 \iff x > 1\,200$

Le plus petit entier — Pour $x = 1\,200$, le coût moyen vaut exactement $2{,}5$ dinars.

$x = 1\,201$

Le coût moyen décroît et se rapproche de 2 dinars, son asymptote horizontale, sans jamais l'atteindre : l'inégalité stricte exclut $1\,200$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1200` → Pour $1\,200$ objets, $C = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$ dinars : ce n'est pas strictement inférieur.

`240` → $\dfrac{600}{2{,}5} = 240$ ne convient pas : retranche d'abord le 2, il reste $\dfrac{600}{x} < 0{,}5$.

EXERCICE 96 · PRATIQUE

L'autre point commun

Soit P la parabole d'équation $y = x^2$ et D la droite d'équation $y = x + 6$. Le point $A(-2; 4)$ est commun à P et à D. Calculer l'abscisse de l'autre point commun à P et à D.

Donne l'abscisse de l'autre point.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'égalité des ordonnées : $x^2 = x + 6$.
2. -2 est une solution de $x^2 - x - 6 = 0$: factorise par $x + 2$.

CORRECTION

Égaler —

$x^2 = x + 6 \iff x^2 - x - 6 = 0$

Factoriser — -2 est racine, donc $x + 2$ est un facteur.

$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$

Conclure —

$x = 3$

L'autre point commun est $B(3; 9)$: connaître une racine d'un trinôme permet de le factoriser, et donne l'autre racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Le point $(2;4)$ est bien sur P, symétrique de A par rapport à l'axe de P, mais il n'est pas sur D : $2+6=8$.

-3 → Vérifie : $(-3)^2=9$, mais $-3+6=3$. Le facteur est $x-3$, qui s'annule en 3.

9 → 9 est l'ordonnée de l'autre point ; on demande son abscisse.

EXERCICE 97 · RAISONNEMENT

La parabole au-dessus de la droite

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=2x+3$. Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$.

Écris l'ensemble des solutions comme une réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;2[U]3;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;-1[U]3;+inf[` — aussi acceptées :]-inf;-1[∪]3;+inf[·]-inf;-1[ou]3;+inf[·]3;+inf[U]-inf;-1[·]3;+inf[∪]-inf;-1[·]3;+inf[ou]-inf;-1[· x<-1 ou x>3 · x>3 ou x<-1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Étudie le signe de $f(x)-g(x)=x^2-2x-3$.
2. Factorise : -1 et 3 sont racines.

CORRECTION

La différence —

$$f(x)-g(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

Le signe — Un trinôme de coefficient $a=1>0$ est positif à l'extérieur de ses racines.

$$(x+1)(x-3)>0 \iff x<-1 \text{ ou } x>3$$

Conclure —

$$S=]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$$

La parabole est au-dessus de la droite à l'extérieur de leurs points d'intersection, d'abscisses -1 et 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-1;3[` → Entre -1 et 3, la parabole est sous la droite : pour $x=0$, $0<3$.

`]-inf;-3[U]1;+inf[ / ]-inf;-3[∪]1;+inf[` → Les racines de x^2-2x-3 sont -1 et 3 : vérifie, $9-6-3=0$.

`]-inf;-1]U[3;+inf[ / ]-inf;-1]∪[3;+inf[` → L'inégalité est stricte : en -1 et en 3, les deux fonctions sont égales.

EXERCICE 98 · RAISONNEMENT

Une corde de la parabole

Soit P la parabole d'équation $y=x^2$, et A et B ses points d'abscisses respectives -1 et 3. La droite (AB) a pour équation $y=mx+p$. Déterminer m.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord les ordonnées de A et de B.
2. m est le quotient de la différence des ordonnées par la différence des abscisses.

CORRECTION

Les points —

$A(-1;1) \quad ; \quad B(3;9)$

Le coefficient —

$m = \frac{9-1}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$

Pour la parabole $y = x^2$, la droite qui joint les points d'abscisses a et b a pour coefficient $a + b$: ici $-1 + 3 = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est la différence des abscisses ; on divise la différence des ordonnées par ce nombre.

8 → 8 est la différence des ordonnées ; il reste à la diviser par $3 - (-1) = 4$.

-2 → Prends les différences dans le même ordre : $\dfrac{9-1}{3-(-1)}$.

EXERCICE 99 · DEFI

Une droite qui évite la parabole

Soit P la parabole d'équation $y = x^2$ et, pour un réel m, D_m la droite d'équation $y = 2x + m$. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels D_m et P n'ont aucun point commun.

Écris l'intervalle des valeurs de m, par exemple «]2;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;-1[` — aussi acceptées : m<-1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'égalité des ordonnées : $x^2 = 2x + m$.
2. L'équation $x^2 - 2x - m = 0$ ne doit avoir aucune solution.
3. Une équation du second degré n'a pas de solution quand son discriminant est strictement négatif.

CORRECTION

L'équation —

$x^2 = 2x + m \iff x^2 - 2x - m = 0$

Le discriminant —

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 4 + 4m$

Aucune solution —

$4 + 4m < 0 \iff m < -1$

Pour $m = -1$, la droite $y = 2x - 1$ touche la parabole au seul point $(1;1)$; pour $m > -1$, il y a deux points communs, et pour $m < -1$, la droite passe sous la parabole sans la rencontrer.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-1;+inf[` → Pour $m = 0$, la droite $y = 2x$ coupe la parabole en O et en $(2;4)$: il faut $\Delta < 0$, soit $m < -1$.

`]-inf;-1]` → Pour $m = -1$, le discriminant est nul : la droite touche la parabole en un point. Le crochet est ouvert en -1.

`-1 / {-1}` → -1 est la valeur pour laquelle il y a un seul point commun ; on demande toutes les valeurs pour lesquelles il n'y en a aucun.

EXERCICE 100 · DEFI

Le lieu des milieux

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Soit $A(2;0)$. Un point M décrit la parabole P d'équation $y = x^2$, et I est le milieu du segment $[AM]$. Lorsque M décrit P, le point I décrit la parabole d'équation $y = k(x-1)^2$. Déterminer k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note $M(t;t^2)$ et calcule les coordonnées $(X;Y)$ de I.
2. Exprime t en fonction de X, puis remplace dans Y.

CORRECTION

Le milieu —

$X = \frac{t+2}{2}$; $Y = \frac{t^2}{2}$

Éliminer t —

$t = 2X - 2 = 2(X-1)$

Conclure —

$Y = \frac{4(X-1)^2}{2} = 2(X-1)^2$

Le lieu de I est la parabole $y = 2(x-1)^2$, de sommet $(1;0)$, le milieu de $[AO]$: pour trouver un lieu, on exprime les coordonnées du point en fonction d'un paramètre, puis on élimine ce paramètre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → L'ordonnée de I est la moitié de t^2, mais l'abscisse aussi est divisée par 2 : $t = 2(X-1)$, et son carré vaut $4(X-1)^2$.

`1` → Le carré de $2(X-1)$ est $4(X-1)^2$, pas $2(X-1)^2$.

EXERCICE 101 · DEFI

Un ballon au-dessus d'une hauteur

Un ballon est lancé vers le haut. Sa hauteur, en mètres, à l'instant t, en secondes, est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}8$. Calculer la durée pendant laquelle le ballon est à plus de $16{,}8$ m du sol, en secondes, sans écrire l'unité.

Donne la durée, sans unité.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Résous l'inéquation $h(t) > 16{,}8$.
2. Elle s'écrit $-5t^2 + 20t - 15 > 0$: divise par -5, en changeant le sens.
3. La durée est l'écart entre les deux instants où le ballon passe à $16{,}8$ m.

CORRECTION

L'inéquation —

$$h(t) > 16{,}8 \iff -5t^2 + 20t - 15 > 0 \iff t^2 - 4t + 3 < 0$$

Les racines —

$$t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$$

La durée — Le trinôme est négatif entre ses racines : pour t dans $]1;3[$.

$$3 - 1 = 2$$

Le ballon monte au-dessus de $16{,}8$ m à l'instant 1 et redescend à l'instant 3 ; son sommet, à l'instant 2, est au milieu.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → À l'instant 1, le ballon passe à $16{,}8$ m en montant ; il y reste jusqu'à l'instant 3.

3 → 3 est l'instant où il redescend sous $16{,}8$ m ; la durée est l'écart entre les deux instants.

4 → 4 est l'instant où le ballon revient à sa hauteur de départ, $1{,}8$ m.

EXERCICE 102 · DEFI

La plus petite somme

Pour tout réel x strictement positif, on a $x + \dfrac{4}{x} - 4 = \dfrac{(x-2)^2}{x}$. Déterminer la plus petite valeur de $x + \dfrac{4}{x}$ lorsque x parcourt $]0;+\infty[$.

Donne la plus petite valeur.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $x > 0$, quel est le signe de $\dfrac{(x-2)^2}{x}$?
2. Cette différence s'annule-t-elle pour une valeur de x ?

CORRECTION

Le signe — Pour $x > 0$, un carré divisé par un nombre positif est positif ou nul.

$$x + \tfrac{4}{x} - 4 = \tfrac{(x-2)^2}{x} \geq 0$$

Atteinte — La différence est nulle pour $x = 2$.

$$2 + \tfrac{4}{2} = 4$$

La droite $y = 4$ est sous la courbe de $x + \dfrac{4}{x}$ et la touche au point $(2; 4)$: pour un minimum, il faut une inégalité et une valeur où elle devient une égalité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 est la valeur de x qui donne le minimum ; on demande la plus petite valeur de $x + \dfrac{4}{x}$.

`0` → 0 est la plus petite valeur de la différence $x + \dfrac{4}{x} - 4$; il reste à ajouter 4.

AH
Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI