– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Généralités sur les fonctions

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum bech nfassrou m3a b3adhna chapitre jdid : généralités sur les fonctions. Bech net3allmou kifech nrasmou w na9raw la courbe mta3 fonction : les images, les antécédents, les équations w les inéquations. W mba3d nchoufou le maximum w le minimum, w le sens de variation : fonction croissante, décroissante walla constante. W nkamlou bel fonctions paires w impaires, w la symétrie mta3 les courbes mte3hom. Yalla, nabdew.

عسلامة ! ليوم باش نفسّرو مع بعضنا chapitre جديد : généralités sur les fonctions . باش نتعلّمو كيفاش نرسمو w نقراو la courbe متاع fonction : les images ، les antécédents ، les équations w les inéquations . w مبعّد نشوفو le sens de w le maximum ، w le minimum نكمّلو بالـ symétrie w la ، impaires w paires ، fonctions متاع courbes les . w ولّا variation : fonction croissante ، décroissante constante متاعهم . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Aujourd'hui, on va expliquer ensemble un nouveau chapitre : généralités sur les fonctions. Nous allons apprendre à tracer et à lire la courbe d'une fonction : les images, les antécédents, les équations et les inéquations. Ensuite, nous verrons le maximum et le minimum, et le sens de variation : fonction croissante, décroissante ou constante. Et nous terminerons par les fonctions paires et impaires, et la symétrie de leurs courbes. Allez, on commence.

Une fonction associe à un réel x au plus un réel $f(x)$. Ce chapitre apprend à la **voir** : sa courbe représentative, et tout ce qu'on y lit — les images, les antécédents, les solutions d'une équation ou d'une inéquation.

On y nomme ensuite ce que la courbe montre : le **maximum** et le **minimum**, le **sens de variation**, et la **parité**, qui se traduit par une symétrie de la courbe.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Lire la courbe d'une fonction : images, antécédents, appartenance d'un point
  > Lire la courbe d'une fonction : les images, les antécédents, et savoir si un point est sur la courbe.
  > *Lire la courbe d'une fonction : les images, les antécédents, et savoir si un point est sur la courbe.*
- Résoudre graphiquement des équations et des inéquations
  > Résoudre graphiquement des équations et des inéquations.
  > *Résoudre graphiquement des équations et des inéquations.*
- Reconnaître et démontrer un maximum ou un minimum sur un intervalle
  > Reconnaître et démontrer un maximum ou un minimum sur un intervalle.
  > *Reconnaître et démontrer un maximum ou un minimum sur un intervalle.*
- Étudier le sens de variation, sur une courbe ou par le calcul
  > Étudier le sens de variation, sur une courbe ou par le calcul.
  > *Étudier le sens de variation, sur une courbe ou par le calcul.*

- Reconnaître une fonction paire ou impaire et la symétrie de sa courbe

> Reconnaître une fonction paire ou impaire, et la symétrie de sa courbe.
> *Reconnaître une fonction paire ou impaire, et la symétrie de sa courbe.*

1. ACTIVITÉ

Pour comprendre : l'ensemble de définition

CE QU'IL DIT

9bal ma nrasmou la courbe mta3 fonction, lezem na3rfou ana houma les réels x elli 3andhom image : hedha l'ensemble de définition. Trois 7ajet dima fi belek. Polynôme mo3arref 3la R el koll. Quotient : le dénominateur ma yelzemch ykoun nul, ya3ni nna77iw les valeurs elli ywalli fihom zéro. Racine carrée : elli ta7t la racine lezem ykoun positif walla nul. W rodd belek mel ensemble de départ : ken la fonction tabda men l'intervalle men zéro l cinq, nchoufou ken les réels elli fel intervalle hedha.

قُبَلْ ما نرسمو la courbe متاع fonction ، لازم نعرفو أنا هوما les réels x اللي عندهم image : هذا trois . l'ensemble de définition حاجات
ديما في بالك . polynôme معرّف على الكل R . quotient : le dénominateur ما يلزمش يكون nul ، يعني ننحّيو les valeurs اللي يولّي فيهم
zéro . racine carrée : اللي تحت الـ racine لازم يكون positif ولّا w . nul ردّ بالك مالـ ensemble de départ : كان الـ fonction تبدا من
l'intervalle من zéro لـ cinq ، نشوفو كان les réels اللي في الـ intervalle هذا .

Avant de tracer la courbe d'une fonction, il faut savoir quels sont les réels x qui ont une image : c'est l'ensemble de définition. Trois réflexes à garder en tête. Un polynôme est défini sur R tout entier. Un quotient : le dénominateur ne doit pas être nul, donc on enlève les valeurs qui l'annulent. Une racine carrée : ce qui est sous la racine doit être positif ou nul. Et attention à l'ensemble de départ : si la fonction part de l'intervalle de zéro à cinq, on ne regarde que les réels de cet intervalle.

Avant de tracer une courbe, on doit savoir pour quels réels x le nombre $f(x)$ existe : c'est l'**ensemble de définition** de la fonction.

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x - 4}$.
4. $k : [0; 5] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{x - 3}$.
5. $l : [0; +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Détermine l'ensemble de définition de chacune des cinq fonctions.

Un polynôme — $x^2 + 2x$ se calcule pour tout réel x.
$D_f = \mathbb{R}$

Un quotient — Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x^2 - 1 = 0$ pour $x = 1$ ou pour $x = -1$.
$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Une racine carrée — Ce qui est sous la racine doit être positif ou nul : $x - 4 \geq 0$.
$D_h = [4; +\infty[$

L'ensemble de départ compte — La fonction k part de l'intervalle $[0; 5]$, et il faut encore $x \neq 3$.
$D_k = [0; 3[\cup]3; 5]$

Deux conditions — Il faut $x \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $-1 \leq x \leq 1$.
$D_l = [0; 1]$

À ne pas faire : $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ — $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ s'annule deux fois : en 1 et en -1.

À ne pas faire : $D_k = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ — $D_k = [0;3[\cup]3;5]$. La fonction k part de l'intervalle $[0;5]$: on ne cherche ses images que pour les réels de cet intervalle.

2. ACTIVITÉ

Pour comprendre : le trajet d'un cycliste

CE QU'IL DIT

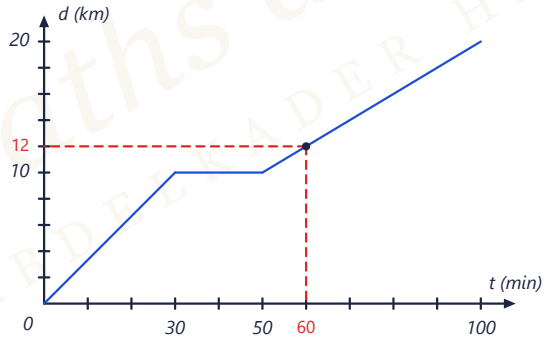
Chouf le graphique : fi l'axe des abscisses el wa9t bel minutes, w fi l'axe des ordonnées la distance bel kilomètres. Koll instant t 3andou distance d wa7da berk : la distance hiya fonction mta3 el wa9t. La courbe toufa fi le point d'abscisse cent et d'ordonnée vingt : le trajet ydoum cent minutes, w bin ezzouz villes famma vingt kilomètres. Bin trente w cinquante minutes, la courbe horizontale : le cycliste we9ef. W l soixante minutes, natl3ou 7atta lel courbe, w na9raw 3la l'axe des ordonnées : douze kilomètres.

شوف الـ graphique : في l'axe des abscisses الوقت بالـ minutes ، w l'axe des ordonnées la distance بالـ kilomètres . كل instant t
عندو distance d وحدة برك : la distance هي fonction متاع الوقت . الـ courbe توفى في le point d'abscisse cent et d'ordonnée vingt : le
يدوم trajet ، w cent minutes بين الزوز villes فمّا vingt kilomètres . بين trente w cinquante minutes ، الـ courbe horizontale : الـ cycliste
واقف . لـ w soixante minutes ، نطلعو حتّى للـ courbe ، نقراو على douze kilomètres : l'axe des ordonnées .

Regarde le graphique : sur l'axe des abscisses le temps en minutes, et sur l'axe des ordonnées la distance en kilomètres. À chaque instant t correspond une seule distance d : la distance est une fonction du temps. La courbe s'arrête au point d'abscisse cent et d'ordonnée vingt : le trajet dure cent minutes, et les deux villes sont à vingt kilomètres l'une de l'autre. Entre trente et cinquante minutes, la courbe est horizontale : le cycliste est à l'arrêt. Et pour soixante minutes, on monte jusqu'à la courbe, puis on lit sur l'axe des ordonnées : douze kilomètres.

Un cycliste part d'une ville A et se dirige vers une ville B. Le graphique donne, à chaque instant t (en minutes), la distance parcourue d (en kilomètres).

1. Détermine la distance qui sépare les deux villes, la durée totale du trajet, et la distance parcourue après 60 minutes.
2. Décris le trajet de ce cycliste.



La distance parcourue par le cycliste en fonction du temps.

Un repère : en abscisse le temps t en minutes, gradué de 10 en 10 jusqu'à 100 ; en ordonnée la distance parcourue d en kilomètres, graduée de 2 en 2 jusqu'à 20. La courbe est faite de trois segments. Le premier monte de l'origine au point d'abscisse 30 et d'ordonnée 10. Le deuxième est horizontal, à la hauteur 10, de l'abscisse 30 à l'abscisse 50. Le troisième monte du point d'abscisse 50 et d'ordonnée 10 au point d'abscisse 100 et d'ordonnée 20. Au palier 2, des pointillés rouges lisent le point d'abscisse 60 : son ordonnée est 12.

EXEMPLE TRAITÉ

Lis le graphique, puis décris le trajet du cycliste.

La distance entre les villes — Le dernier point de la courbe a pour ordonnée 20.

$d = 20$ km

La durée du trajet — Ce même point a pour abscisse 100.

$t = 100$ min

Après 60 minutes — Sur le dernier segment, le cycliste parcourt 10 kilomètres en 50 minutes, donc 2 kilomètres en 10 minutes.

$10 + 2 = 12$ km

Le trajet — Il roule 30 minutes et parcourt 10 kilomètres, il s'arrête 20 minutes, puis il parcourt les 10 kilomètres restants en 50 minutes : il roule moins vite qu'au départ.

20 kilomètres ; 100 minutes ; 12 kilomètres après 60 minutes

À ne pas faire : Entre 30 et 50 minutes, le cycliste roule à vitesse constante — Entre 30 et 50 minutes, la distance reste égale à 10 kilomètres : le cycliste est à l'arrêt. Un segment horizontal signifie que la distance parcourue ne change pas : le temps passe, mais le cycliste n'avance pas.

---

3. ACTIVITÉ

Pour comprendre : un rectangle de périmètre 10

CE QU'IL DIT

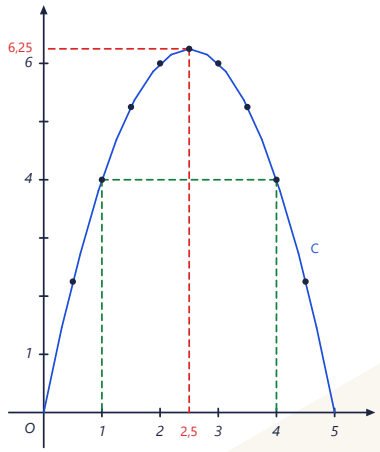
3andna rectangle ABCD, le périmètre mte3ou dix, w AB égale x. Le demi-périmètre houwa cinq, idhan AD égale cinq moins x, w l'aire hiya f de x égale x fois (cinq moins x). W 5ater ezzouz côtés strictement positifs, x bin zéro w cinq, w ma youselhomch. L koll x, n7ottou le point d'abscisse x et d'ordonnée f de x : les points hedhom el koll yrasmou la courbe C. 3la la courbe hedhi, le point el a3la 3andou abscisse deux virgule cinq w ordonnée six virgule vingt-cinq : hedhi l'aire maximale. W l'aire quatre nal9awha ki x égale un w ki x égale quatre.

عندنا le périmètre ، rectangle ABCD متاعو le demi-périmètre . w AB égale x ، dix هو cinq ، إذن l'aire w ، x moins cinq égale AD هي f
. w (cinq moins x) fois x de égale x الزوز خاطر ، positifs strictement côtés بين w ، cinq zéro w يوصلهمش ما . x لكل ، نحطّو le point
. la courbe C يرسمو الكل هاذم d'abscisse x et d'ordonnée f de x : les points ، هاذي le point الأعلى عندو deux abscisse
. x égale quatre كي x égale un w كي نلقاوها l'aire maximale . w l'aire quatre هاذي : virgule cinq w ordonnée six virgule vingt-cinq

On a un rectangle ABCD de périmètre dix, avec AB égale x. Le demi-périmètre vaut cinq, donc AD égale cinq moins x, et l'aire est f de x égale x fois (cinq moins x). Comme les deux côtés sont strictement positifs, x est entre zéro et cinq, sans les atteindre. Pour chaque x, on place le point d'abscisse x et d'ordonnée f de x : tous ces points dessinent la courbe C. Sur cette courbe, le point le plus haut a pour abscisse deux virgule cinq et pour ordonnée six virgule vingt-cinq : c'est l'aire maximale. Et l'aire quatre est atteinte quand x égale un et quand x égale quatre.

Soit $ABCD$ un rectangle de périmètre 10 et de côté variable $AB = x$.

1. Exprime AD en fonction de x.
2. Soit f la fonction telle que $f(x)$ soit égale à l'aire du rectangle $ABCD$. Donne l'ensemble de définition de f et l'expression de $f(x)$.
3. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). La courbe $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(x; f(x))$, avec $x \in]0; 5[$. Place sur $\mathcal{C}$ les points d'abscisses $0{,}5$; 1 ; $1{,}5$; 2 ; $2{,}5$; 3 ; $3{,}5$; 4 et $4{,}5$.
4. Par une lecture graphique, détermine la valeur maximale de $f(x)$.
5. Détermine les dimensions des rectangles dont l'aire est égale à 4.



La courbe C de l'aire f(x) du rectangle, pour x entre 0 et 5.

Un repère orthogonal d'origine O. La courbe C de la fonction f part du point d'abscisse 0 et d'ordonnée 0, monte jusqu'au point d'abscisse 2,5 et d'ordonnée 6,25, puis redescend jusqu'au point d'abscisse 5 et d'ordonnée 0 ; les deux extrémités ne font pas partie de la courbe. Neuf points sont marqués, d'abscisses 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 et d'ordonnées 2,25 ; 4 ; 5,25 ; 6 ; 6,25 ; 6 ; 5,25 ; 4 ; 2,25. Au palier 2, des pointillés rouges montrent le point le plus haut. Au palier 3, une horizontale verte à la hauteur 4 coupe la courbe aux points d'abscisses 1 et 4.

EXEMPLE TRAITÉ

Réponds aux cinq questions.

Le côté AD — Le demi-périmètre vaut 5 : $AB + AD = 5$.

$AD = 5 - x$

L'aire — Les deux côtés sont des longueurs strictement positives : $x > 0$ et $5 - x > 0$.

$f(x) = x(5 - x) \quad ; \quad D_f =]0; 5[$

Les points — On calcule les images une à une, par exemple $f(1) = 1 \times 4 = 4$.

$f(0{,}5) = 2{,}25 \quad ; \quad f(1{,}5) = 5{,}25 \quad ; \quad f(2) = 6 \quad ; \quad f(2{,}5) = 6{,}25$

La valeur maximale — Le point le plus haut de la courbe a pour abscisse $2{,}5$ et pour ordonnée $6{,}25$: le rectangle est alors un carré.

$f(2{,}5) = 6{,}25$

L'aire 4 — La droite horizontale de hauteur 4 coupe la courbe aux points d'abscisses 1 et 4 : les côtés mesurent 1 et 4.

$x(5 - x) = 4 \iff x = 1$ ou $x = 4$

À ne pas faire : $AD = 10 - x$ — $AD = 5 - x$. Le périmètre compte deux fois chaque côté : $2(AB + AD) = 10$, donc $AB + AD = 5$.

À ne pas faire : Il y a deux rectangles différents d'aire 4 — Pour $x = 1$ ou pour $x = 4$, c'est le même rectangle, de côtés 1 et 4. Échanger la longueur et la largeur ne change pas le rectangle : les deux points de la courbe donnent les mêmes dimensions.

4. DÉFINITION

Représentation graphique d'une fonction

CE QU'IL DIT

Hedhi la définition. Fi repère, la représentation graphique mta3 fonction f, w n9oulou zeda la courbe représentative, hiya l'ensemble des points M de coordonnées x et f de x, ki x yet3adda 3la l'ensemble de définition E el koll. W n9oulou la courbe C 3andha l'équation y égale f de x. Tfakker mli7 : le point de coordonnées x et y appartient à la courbe si et seulement si x est dans

E et y égale f de x. Idhan bech na3rfou point 3la la courbe walla le, na7sbou l'image mta3 l'abscisse mte3ou, w nchoufouha tsewi l'ordonnée mte3ou walla le.

هاذي la définition . في la représentation graphique ، w متاع repère ، fonction f نقولو زادة la courbe représentative ، هي l'ensemble des points M de coordonnées x et f de x ، كي x يتعدّى على l'ensemble de définition E الكل . w نقولو la courbe C عندها l'équation y . إذن le point de coordonnées x et y appartient à la courbe si et seulement si x est dans E et y égale f de x : تفكّر مليح . égale f de x باش نعرفو point على الـ courbe ولّا لا ، نحسبو l'image متاع l'abscisse ، w متاعو نشوفوها تساوي l'ordonnée متاعو ولّا لا .

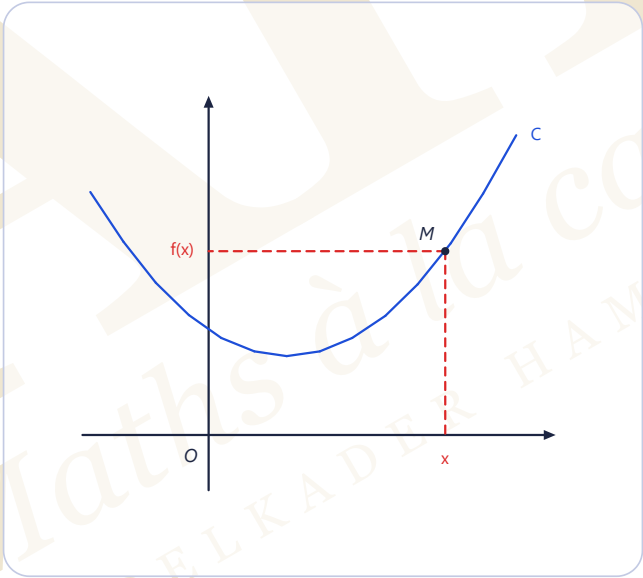
Voici la définition. Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction f, on dit aussi sa courbe représentative, c'est l'ensemble des points M de coordonnées x et f de x, quand x parcourt tout l'ensemble de définition E. Et on dit que la courbe C a pour équation y égale f de x. Retiens bien : le point de coordonnées x et y appartient à la courbe si et seulement si x est dans E et y égale f de x. Donc pour savoir si un point est sur la courbe ou non, on calcule l'image de son abscisse, et on regarde si elle est égale à son ordonnée.

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

On appelle **représentation graphique** de f, ou **courbe représentative** de f, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$, où x appartient à E.

Vocabulaire. Si une fonction f, définie sur un ensemble E, a pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}$, on dit que $\mathcal{C}$ a pour **équation** $y = f(x)$, avec $x \in E$.

Un point $M(x; y)$ appartient donc à $\mathcal{C}$ si et seulement si $x \in E$ et $y = f(x)$.



Un point M de la courbe C : son abscisse est x, son ordonnée est f(x).

Un repère d'origine O et une courbe C. Un point M est marqué sur la courbe. Au palier 2, des pointillés rouges descendent de M sur l'axe des abscisses, où l'on lit x, et vont de M à l'axe des ordonnées, où l'on lit f(x) : le point M a pour coordonnées x et f(x).

APPARTENIR À LA COURBE

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff x \in E \text{ et } y = f(x)$$

L'ÉQUATION DE LA COURBE

$$\mathcal{C} : \ y = f(x), \quad x \in E$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x$, et sa courbe représentative $\mathcal{C}$. Parmi les points $A(1; -1)$, $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $D(-2; 2)$, $E(\sqrt{2}; -0{,}23)$ et $F(-6; 90)$, lesquels appartiennent à $\mathcal{C}$? Quels sont les points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 5 ?

Le point A — On calcule l'image de l'abscisse, puis on la compare à l'ordonnée.

$f(1) = 2 - 3 = -1 \quad \text{donc} \quad A \in \mathcal{C}$

Les points B et F — Même calcul : chaque ordonnée est bien l'image de l'abscisse.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0 \quad ; \quad f(-6) = 72 + 18 = 90$

Le point D — L'image de -2 n'est pas 2.

$f(-2) = 8 + 6 = 14 \neq 2 \quad \text{donc} \quad D \notin \mathcal{C}$

Le point E — $-0{,}23$ n'est qu'une valeur approchée de l'image de $\sqrt{2}$.

$f(\sqrt{2}) = 4 - 3\sqrt{2} \neq -0{,}23 \quad \text{donc} \quad E \notin \mathcal{C}$

L'ordonnée 5 — On cherche les abscisses x telles que $f(x) = 5$.

$2x^2 - 3x - 5 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{5}{2}$

> les points A, B et F sont sur $\mathcal{C}$; ordonnée 5 : $x = -1$ ou $x = \frac{5}{2}$

À ne pas faire : $f(\sqrt{2}) \approx -0{,}24$, donc $E(\sqrt{2}; -0{,}23)$ est sur $\mathcal{C}$ — $f(\sqrt{2}) = 4 - 3\sqrt{2}$, qui n'est pas égal à $-0{,}23$: $E \notin \mathcal{C}$. Un point est sur la courbe quand son ordonnée est **exactement** l'image de son abscisse : une valeur approchée ne suffit pas.

À ne pas faire : $D(-2; 2) \in \mathcal{C}$ car $f(2) = 2$ — $f(-2) = 14$, donc $D(-2; 2) \notin \mathcal{C}$. On calcule l'image de l'**abscisse** du point, ici -2, et non celle de son ordonnée.

---

5. ACTIVITÉ

Pour comprendre : une courbe, une fonction ?

CE QU'IL DIT

Za3ma ay courbe hiya courbe mta3 fonction ? Le. La fonction ta3ti l koll x, image wa7da 3al akthar. Idhan 3la la courbe mte3ha, ma nal9awch zouz points wa7ed fou9 le5er, 3andhom nafs l'abscisse. Le test sehel : nmachiw droite verticale ; ken t9oss la courbe fi zouz points walla akthar, mouch fonction. Chouf le cercle : la verticale elli tet3adda men un t9ossou fi zouz points, M w N. Idhan le cercle ma ymathelch fonction, w la parabole couchée zeda le.

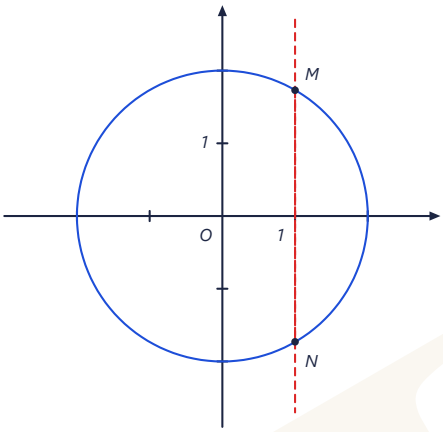
زعما أي courbe هي courbe متاع fonction ؟ لا . الـ fonction تعطي لكل x ، image وحدة على الأكثر . إذن على الـ courbe متاعها ، ما نلقاوش زوز points واحد فوق الآخر ، عندهم نفس l'abscisse ؛ كان تقصّ الـ courbe في زوز points ولّا أكثر ، موش fonction . شوف le cercle : الـ verticale اللي تتعدّى من un تقصّو في زوز M w N ، points . إذن le cercle ما يمثّلش fonction ، w la parabole couchée زادة لا .

Est-ce que n'importe quelle courbe est la courbe d'une fonction ? Non. Une fonction donne à chaque x une image au plus. Donc sur sa courbe, on ne trouve jamais deux points l'un au-dessus de l'autre, avec la même abscisse. Le test est simple : on promène une droite verticale ; si elle coupe la courbe en deux points ou plus, ce n'est pas une fonction. Regarde le cercle : la verticale qui passe par un le coupe en deux points, M et N. Donc le cercle ne représente pas une fonction, et la parabole couchée non plus.

On trace quatre courbes dans un repère : une courbe à deux bosses, qui monte puis redescend, un cercle de centre O, une courbe qui monte de gauche à droite par paliers, et une parabole couchée, ouverte vers la droite.

Parmi ces courbes, lesquelles représentent une fonction ?

Une fonction associe à chaque réel x **au plus une** image. Sur sa courbe, deux points différents ne peuvent donc pas avoir la même abscisse : toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en un point au plus.



Une verticale coupe le cercle en deux points : le cercle n'est pas la courbe d'une fonction.

Un repère orthonormé d'origine O et le cercle de centre O et de rayon 2. Au palier 2, la droite verticale rouge qui passe par le point d'abscisse 1 de l'axe des abscisses coupe le cercle en deux points, M au-dessus de l'axe et N au-dessous : ces deux points ont la même abscisse 1 et deux ordonnées différentes.

EXEMPLE TRAITÉ

Le cercle de centre O et de rayon 2 est-il la courbe d'une fonction ?

Une verticale — La droite parallèle à l'axe des ordonnées qui passe par l'abscisse 1 coupe le cercle en deux points M et N.

Deux ordonnées — Les deux points ont la même abscisse 1, mais des ordonnées opposées.

$M(1;\sqrt{3})$; $N(1;-\sqrt{3})$

La conclusion — Le réel 1 aurait deux images : c'est impossible pour une fonction.

Les autres courbes — La courbe à deux bosses et la courbe qui monte par paliers passent ce test : elles représentent une fonction. La parabole couchée, comme le cercle, ne le passe pas.

le cercle n’est pas la courbe d’une fonction

À ne pas faire : Toute courbe tracée dans un repère est la courbe d'une fonction — Une courbe représente une fonction quand chaque verticale la coupe en un point au plus. Sur un cercle ou sur une parabole couchée, une même abscisse donne deux points : elle aurait deux images.

6. MÉTHODE

Lire une courbe : images et antécédents

CE QU’IL DIT

La courbe tet9ra men zouz jihet. Bech nal9aw image, nabdew men l'axe des abscisses : natl3ou walla nahbtou 7atta lel courbe, w na9raw l'ordonnée. Houni, f de deux virgule cinq égale un virgule vingt-cinq. Bech nal9aw les antécédents, nabdew men l'axe des ordonnées : nrasmou l'horizontale, w na9raw les abscisses mta3 les points el koll elli t9oss fihom la courbe. Les antécédents de zéro houma moins deux, zéro w deux. W ki n7ellou f de x égale k, nlawjou 3la les antécédents de k. W f de x strictement inférieur à zéro, houma les abscisses mta3 les points elli ta7t l'axe des abscisses.

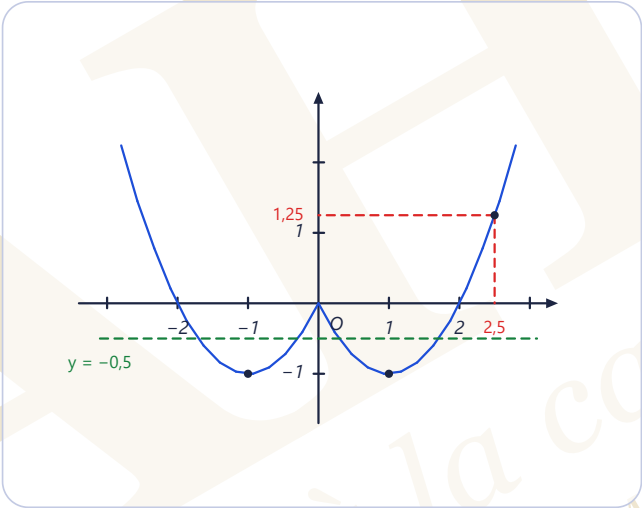
هنا . l'ordonnée نقراو courbe ، w لـ حتّى نهبطو ولّا نطلعو : l'axe des abscisses من نبداو ، image نلقاو باش . جهات من زوز تتقرا courbe الـ l'horizontale ، نرسمو : l'axe des ordonnées من نبداو ، les antécédents نلقاو باش . f de deux virgule cinq égale un virgule vingt-cinq ، كي moins deux ، zéro w deux . w هوما courbe . les antécédents de zéro الـ فيهم تقصّ اللي الكل les points متاع les abscisses نقراو w اللي les points متاع les abscisses هوما ، les antécédents de k . w f de x strictement inférieur à zéro على نلوّجو ، f de x égale k نحلّو . l'axe des abscisses تحت

Une courbe se lit dans deux sens. Pour trouver une image, on part de l'axe des abscisses : on monte ou on descend jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée. Ici, f de deux virgule cinq égale un virgule vingt-cinq. Pour trouver les antécédents, on part de l'axe des ordonnées : on trace l'horizontale, et on lit les abscisses de tous les points où elle coupe la courbe. Les antécédents de zéro sont moins deux, zéro et deux. Et quand on résout f de x égale k, on cherche les antécédents de k. Enfin, f de x strictement inférieur à zéro, ce sont les abscisses des points situés sous l'axe des abscisses.

La courbe de la figure est la représentation graphique d'une fonction f.

Lis sur ce graphique : 1. les images de 1, de 2 et de $\dfrac{5}{2}$ par f ; 2. les antécédents de 0 ; 3. la valeur minimale de $f(x)$; 4. le nombre de points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$; 5. l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

La méthode. L'image de a est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a. Les antécédents de k sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée k : ce sont les solutions de l'équation $f(x) = k$. Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de la droite d'équation $y = k$.



La courbe de la fonction f.

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe a la forme d'un W. Elle descend du point d'abscisse moins 2,8 jusqu'au point d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 1, remonte jusqu'à l'origine O où elle fait une pointe, redescend jusqu'au point d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 1, puis remonte. Elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses moins 2, 0 et 2, et elle passe par le point d'abscisse 2,5 et d'ordonnée 1,25. Au palier 2, des pointillés rouges lisent ce dernier point. Au palier 3, la droite horizontale verte d'équation y égale moins 0,5 coupe la courbe en quatre points.

IMAGE ET ANTÉCÉDENT

$f(a) = b \iff$ le point $(a\,;b)$ est sur la courbe

EXEMPLE TRAITÉ

Réponds aux cinq questions par lecture graphique.

Les images — On part de l'abscisse, on rejoint la courbe, puis on lit l'ordonnée.

$f(1) = -1 \quad ; \quad f(2) = 0 \quad ; \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}$

Les antécédents de 0 — La courbe coupe l'axe des abscisses en trois points.

$f(x) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 0$ ou $x = 2$

La valeur minimale — Les deux points les plus bas ont pour ordonnée -1 ; leurs abscisses sont -1 et 1.

$f(-1) = f(1) = -1$

Une droite horizontale — La droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ coupe la courbe en quatre points : l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ a quatre solutions.

L'inéquation — La courbe est au-dessous de l'axe des abscisses entre -2 et 2, sauf à l'origine, où $f(0) = 0$.

$f(x) < 0 \iff x \in]-2;0[\cup]0;2[$

À ne pas faire : Les antécédents de 0 : $f(0) = 0$, donc il n'y a que 0 — Les antécédents de 0 sont -2, 0 et 2. On ne calcule pas l'image de 0 : on cherche **toutes** les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 0.

À ne pas faire : $f(x) < 0 \iff x \in]-2;2[$ — $f(x) < 0 \iff x \in]-2;0[\cup]0;2[$. En 0, la courbe touche l'axe des abscisses : $f(0) = 0$ n'est pas strictement négatif, il faut donc retirer 0.

---

7. APPLICATION

Exemple : comparer deux fonctions sur un graphique

CE QU'IL DIT

Zouz courbes fi nafs le repère : C f bel a7mer, w C g bel azra9. Bech n7ellou f de x égale g de x, nlawjou 3la les points win ezzouz courbes yetle9aw, w na9raw les abscisses mte3hom : houni moins trois w un. Bech ncompariw f de x w g de x, nchoufou ana courbe el fou9. Bin moins trois w un, la courbe ezzar9a fou9 el 7amra : g de x supérieur ou égal à f de x. W rodd belek : g de x égale trois ma 3andhech 7atta solution, 5ater la courbe mta3 g ma tatla3ch akthar men deux virgule cinq.

زوز courbes في نفس الـ repère : C f بالأحمر ، C g w بالأزرق . باش نحلّو f de x égale g de x ، نلوّجو على les points وين الزوز courbes متاعهم : هنا moins trois w un ، les abscisses نقراو w يتلاقاو . بين moins trois الفوق courbe أنا نشوفو ، ncompariw f de x w g de x باش . moins trois w un ، الـ courbe الزرقاء فوق الحمراء : w un ، g de x supérieur ou égal à f de x ردّ بالك : g de x égale trois ما عندهاش حتّى solution ، خاطر la courbe متاع g ما تطلعش أكثر من deux virgule cinq .

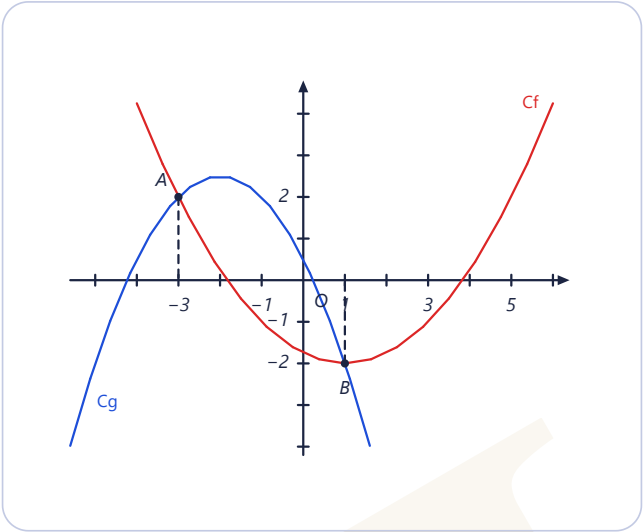
Deux courbes dans le même repère : C f en rouge, et C g en bleu. Pour résoudre f de x égale g de x, on cherche les points où les deux courbes se rencontrent, et on lit leurs abscisses : ici moins trois et un. Pour comparer f de x et g de x, on regarde quelle courbe est au-dessus. Entre moins trois et un, la courbe bleue est au-dessus de la rouge : g de x est supérieur ou égal à f de x. Et attention : g de x égale trois n'a aucune solution, parce que la courbe de g ne monte pas plus haut que deux virgule cinq.

Dans la figure, on a représenté deux fonctions f et g : $\mathcal{C}_f$ en rouge et $\mathcal{C}_g$ en bleu.

1. Lis l'image de -1 par f et par g.
2. Résous graphiquement : a) $f(x) = 2$; b) $g(x) = 3$; c) $f(x) = g(x)$; d) $f(x) < -1$.
3. Compare $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x est un réel de l'intervalle $[-3;1]$.

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points communs aux deux courbes. Là où $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$, on a $g(x) > f(x)$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Les courbes Cf et Cg des fonctions f et g.

Un repère orthonormé d'origine O et deux courbes. La courbe rouge Cf, celle de f, est une parabole tournée vers le haut : son point le plus bas a pour abscisse 1 et pour ordonnée moins 2 ; elle passe par les points d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 2, d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 1, d'abscisse 3 et d'ordonnée moins 1, d'abscisse 5 et d'ordonnée 2. La courbe bleue Cg, celle de g, est une parabole tournée vers le bas : son point le plus haut a pour abscisse moins 2 et pour ordonnée 2,5 ; elle passe par les points d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 2, d'abscisse moins 1 et d'ordonnée 2, d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 2. Les deux courbes se coupent en A, d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 2, et en B, d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 2. Entre A et B, la courbe bleue est au-dessus de la courbe rouge. Au palier 2, des pointillés joignent A et B à l'axe des abscisses, où l'on lit moins 3 et 1.

EXEMPLE TRAITÉ

Réponds aux trois questions par lecture graphique.

Les images de −1 — On lit l'ordonnée du point d'abscisse -1 sur chaque courbe.

$f(-1) = -1 \quad ; \quad g(-1) = 2$

$f(x) = 2$ **—** La droite horizontale de hauteur 2 coupe $\mathcal{C}_f$ en deux points.

$x = -3$ ou $x = 5$

$g(x) = 3$ **—** Le point le plus haut de $\mathcal{C}_g$ a pour ordonnée $2{,}5$: aucun point de cette courbe n'a pour ordonnée 3.

$S = \varnothing$

$f(x) = g(x)$ **—** Les deux courbes se coupent en A et en B : on lit leurs abscisses.

$x = -3$ ou $x = 1$

$f(x) < -1$ **—** $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la droite de hauteur -1 entre les abscisses -1 et 3.

$S =]-1\,;3[$

Sur [−3 ; 1] — Entre A et B, la courbe de g est au-dessus de celle de f.

$g(x) \geq f(x) \quad$ pour tout $x \in [-3\,;1]$

À ne pas faire : $f(x) = g(x)$ a pour solutions 2 et -2 **—** $f(x) = g(x) \iff x = -3$ ou $x = 1$. Les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection A et B, pas leurs ordonnées.

À ne pas faire : $g(x) = 3$: on lit $x = 3$ sur l'axe des abscisses **—** L'équation $g(x) = 3$ n'a pas de solution. Le nombre 3 est une ordonnée : on trace l'horizontale de hauteur 3, et elle ne rencontre pas $\mathcal{C}_g$.

8. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la plus petite valeur

CE QU'IL DIT

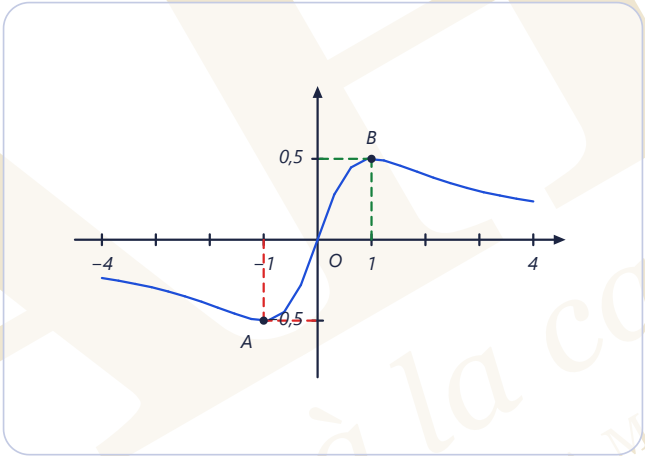
Chouf la courbe mta3 f de x égale x sur (x au carré plus un), bin moins quatre w quatre. Le point el awta fiha houwa le point A, l'abscisse mte3ou moins un w l'ordonnée mte3ou moins un demi. Idhan na9raw : asghar valeur mta3 f de x hiya moins un demi, w nal9awha ki x égale moins un. Ama le9raya wa7adha ma tekfich, lezem nthabbtouha bel calcul : f de x plus un demi égale (x plus un) au carré, sur deux fois (x au carré plus un). Hedha positif walla nul, idhan f de x dima supérieur ou égal à moins un demi.

شوف la courbe متاع (x au carré plus un) f de x égale x sur ، بين moins quatre w quatre . le point الأوطى فيها هو ، le point A
نلقاوها كي moins un demi ، w هي f de x متاع valeur أصغر : إذن نقراو . moins un demi متاعو moins un w l'ordonnée متاعو l'abscisse
calcul : f de x plus un demi égale (x plus un) au carré ، sur deux fois (x أما القراية وحدها ما تكفيش ، لازم نثبّتوها بالـ . x égale moins un
. supérieur ou égal à moins un demi ديما f de x إذن ، nul ولّا positif هذا . au carré plus un)

Regarde la courbe de f de x égale x sur (x au carré plus un), entre moins quatre et quatre. Son point le plus bas est le point A, d'abscisse moins un et d'ordonnée moins un demi. On lit donc : la plus petite valeur de f de x est moins un demi, et elle est atteinte quand x égale moins un. Mais une lecture seule ne suffit pas, il faut la vérifier par le calcul : f de x plus un demi égale (x plus un) au carré, sur deux fois (x au carré plus un). C'est positif ou nul, donc f de x est toujours supérieur ou égal à moins un demi.

La figure montre la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-4;4]$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Détermine graphiquement la valeur minimale de $f(x)$. Pour quelle valeur de x cette valeur minimale est-elle atteinte ?
2. Vérifie ce résultat par le calcul.



La courbe de f sur [−4 ; 4].

Un repère orthogonal d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 4 à l'abscisse 4. Elle part un peu au-dessous de l'axe des abscisses, descend doucement jusqu'au point A d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 0,5, son point le plus bas, remonte en passant par l'origine jusqu'au point B d'abscisse 1 et d'ordonnée 0,5, son point le plus haut, puis redescend doucement en restant au-dessus de l'axe. Au palier 2, des pointillés rouges lisent le point A ; au palier 3, des pointillés verts lisent le point B.

EXEMPLE TRAITÉ

Lis la valeur minimale sur la courbe, puis vérifie-la par le calcul.

La lecture — Le point le plus bas de la courbe est A, d'abscisse -1 et d'ordonnée $-\dfrac{1}{2}$.

$f(-1)=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

Une différence — Pour vérifier, on calcule $f(x)-f(-1)$, c'est-à-dire $f(x)+\dfrac{1}{2}$.

$f(x)+\frac{1}{2}=\frac{2x+x^2+1}{2(x^2+1)}=\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$

Le signe — Un carré est positif ou nul, et le dénominateur est strictement positif.

$f(x)+\frac{1}{2}\geq 0 \quad \text{donc} \quad f(x)\geq -\frac{1}{2}$

$$\text{pour tout } x \text{ de } [-4;4],\quad f(x)\geq f(-1)=-\frac{1}{2}$$

À ne pas faire : La valeur minimale de $f(x)$ est -1 — La valeur minimale est $f(-1) = -\frac{1}{2}$; elle est atteinte pour $x = -1$. La valeur minimale se lit sur l'axe des **ordonnées** ; -1 est seulement l'abscisse du point le plus bas.

9. DÉFINITION

Maximum et minimum

CE QU'IL DIT

Hedhi la définition. f mo3arrfa 3la intervalle I, w a réel men I. N9oulou f admet un minimum en a sur I, ki l koll x men I, f de x supérieur ou égal à f de a. El minimum houwa le nombre f de a. W kif kif, f admet un maximum en a, ki l koll x men I, f de x inférieur ou égal à f de a. 3la la courbe, el minimum houwa l'ordonnée mta3 le point el awta, w el maximum houwa l'ordonnée mta3 le point el a3la. W bech nbayynouh, na7sbou f de x moins f de a, w nlawjou 3la le signe mte3ou.

هاذي la définition . f معرّفة على a réel ، w intervalle I من . I نقولو f admet un minimum en a sur I ، كي لكل x من I ، f de x supérieur ou égal à f de a . ou égal à f de a . الـ minimum هو w . a de f nombre le كيف كيف ، f admet un maximum en a ، كي لكل x من I ، f de x inférieur ou égal à f de a . على الـ courbe ، الـ minimum هو l'ordonnée متاع le point الأوطى ، w الـ maximum هو l'ordonnée متاع le point الأعلى . باش نبيّنوه ، نحسبو w ، f de x moins f de a نلوّجو على le signe متاعو .

Voici la définition. f est définie sur un intervalle I, et a est un réel de I. On dit que f admet un minimum en a sur I quand, pour tout x de I, f de x est supérieur ou égal à f de a. Le minimum, c'est le nombre f de a. De même, f admet un maximum en a quand, pour tout x de I, f de x est inférieur ou égal à f de a. Sur la courbe, le minimum est l'ordonnée du point le plus bas, et le maximum l'ordonnée du point le plus haut. Et pour le démontrer, on calcule f de x moins f de a, et on cherche son signe.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

La fonction f admet un **minimum** en a sur l'intervalle I lorsque, pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est le minimum de f sur I.

La fonction f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I lorsque, pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est le maximum de f sur I.

Sur la courbe, le minimum est l'ordonnée du point le plus bas, le maximum celle du point le plus haut. Pour le prouver par le calcul, on étudie le signe de la différence $f(x) - f(a)$.

F(A) EST LE MINIMUM DE F SUR I

$$f(x) \geq f(a) \text{ pour tout } x \in I$$

F(A) EST LE MAXIMUM DE F SUR I

$$f(x) \leq f(a) \text{ pour tout } x \in I$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Calcule $f(-1)$, puis $f(x) - f(-1)$. Déduis-en que f admet un minimum, que l'on précisera.

L'image de −1 — On remplace x par -1.

$f(-1) = 1 - 2 - 3 = -4$

La différence — On reconnaît une identité remarquable.

$f(x) - f(-1) = x^2 + 2x - 3 + 4 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

Le signe — Un carré est positif ou nul : pour tout réel x, $f(x) - f(-1) \geq 0$.

$f(x) \geq f(-1)$

f admet un minimum en -1, égal à -4

À ne pas faire : Le minimum de f est -1 — Le minimum de f est $f(-1) = -4$; il est atteint en -1. Le minimum est une **valeur** de la fonction, le nombre $f(a)$; le réel a est seulement l'endroit où elle est atteinte.

À ne pas faire : $f(0) = -3 \geq -4$ et $f(1) = 0 \geq -4$, donc -4 est le minimum — $f(x) - (-4) = (x+1)^2 \geq 0$ pour **tout** réel x. Quelques valeurs ne prouvent rien : l'inégalité $f(x) \geq f(a)$ doit être vraie pour tous les réels x de l'intervalle.

10. APPLICATION

Exemple : un maximum sur un intervalle, pas sur R

CE QU'IL DIT

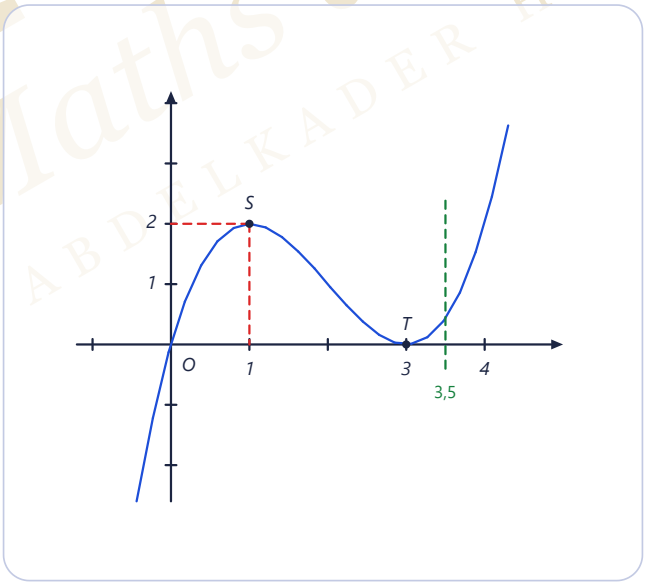
Thabbet fel courbe hedhi : la fonction mo3arrfa 3la R, ama nekhdmou 3liha ken 3la l'intervalle men zéro l sept demis. 3la l'intervalle hedha, le point el a3la 3andou ordonnée deux : le maximum houwa grand M égale deux, w nal9awh en un. Les points el awta 3andhom ordonnée zéro : le minimum houwa petit m égale zéro, w nal9awh en zéro w en trois. Ama 3la R el koll, hedha ma 3adech s7i7 : 3la imin quatre, la courbe tatla3 akthar men deux, w 3la isar zéro, tahbet ta7t zéro. El maximum w el minimum dima na3tiwhom m3a l'intervalle mte3hom.

ثبّت في الـ courbe هاذي : الـ fonction معرّفة على R ، أما نخدمو عليها كان على l'intervalle من zéro لـ sept demis . على الـ intervalle هذا ، الأعلى عندو le point الأعلى عندو le maximum هو w égale deux grand M نلقاوه les points . en un الأوطى عندهم ordonnée deux : le minimum هو w égale zéro petit m نلقاوه les points . en trois w en zéro أما على R الكل ، هذا ما عادش صحيح : على يمين quatre ، الـ courbe تطلع أكثر من w ، deux على يسار zéro ، تهبط تحت zéro . الـ maximum w الـ minimum ديما نعطيوهم مع الـ intervalle متاعهم .

Regarde bien cette courbe : la fonction est définie sur R, mais on ne l'étudie que sur l'intervalle de zéro à sept demis. Sur cet intervalle, le point le plus haut a pour ordonnée deux : le maximum est grand M égale deux, atteint en un. Les points les plus bas ont pour ordonnée zéro : le minimum est petit m égale zéro, atteint en zéro et en trois. Mais sur R tout entier, ce n'est plus vrai : à droite de quatre, la courbe monte plus haut que deux, et à gauche de zéro, elle descend sous zéro. Un maximum et un minimum se donnent toujours avec leur intervalle.

La figure montre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par une lecture graphique, détermine le maximum M et le minimum m de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{7}{2}\right]$.
2. A-t-on $f(x) \leq M$ pour tout réel x ? A-t-on $f(x) \geq m$ pour tout réel x ?



La courbe de f, définie sur R.

Un repère orthogonal d'origine O. La courbe de f monte de la gauche, passe par l'origine, monte jusqu'au point S d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, redescend jusqu'au point T d'abscisse 3 et d'ordonnée 0 où elle touche l'axe des abscisses, puis remonte : elle repasse à la hauteur 2 pour l'abscisse 4 et continue de monter. À gauche de l'origine, la courbe est au-dessous de l'axe des abscisses. Au palier 2, une verticale verte marque l'abscisse 3,5, la fin de l'intervalle étudié, et des pointillés rouges lisent le point S.

EXEMPLE TRAITÉ

Lis le maximum, noté grand M, et le minimum, noté petit m, sur l'intervalle, puis dis si ce sont encore le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Sur l'intervalle — Entre les abscisses 0 et $3{,}5$, le point le plus haut est S, d'ordonnée 2 ; les points les plus bas sont l'origine et T, d'ordonnée 0.

$M = f(1) = 2 \quad ; \quad m = f(0) = f(3) = 0$

Plus haut que grand M — À droite de l'abscisse 4, la courbe monte au-dessus de la hauteur 2 : l'inégalité $f(x) \leq M$ n'est pas vraie pour tout réel x.

Plus bas que petit m — À gauche de l'origine, la courbe passe au-dessous de l'axe des abscisses : l'inégalité $f(x) \geq m$ n'est pas vraie pour tout réel x.

$$\text{maximum } M = 2 \text{ et minimum } m = 0 \text{ sur } \left[0; \tfrac{7}{2}\right], \text{ mais pas sur } \mathbb{R}$$

À ne pas faire : 2 est le maximum de f — 2 est le maximum de f **sur l'intervalle** $\left[0; \frac{7}{2}\right]$. Un maximum ou un minimum dépend de l'intervalle : sur $\mathbb{R}$, 2 n'est plus le maximum, puisque la courbe monte plus haut.

---

11. ACTIVITÉ

Pour comprendre : monter, descendre, rester constante

CE QU'IL DIT

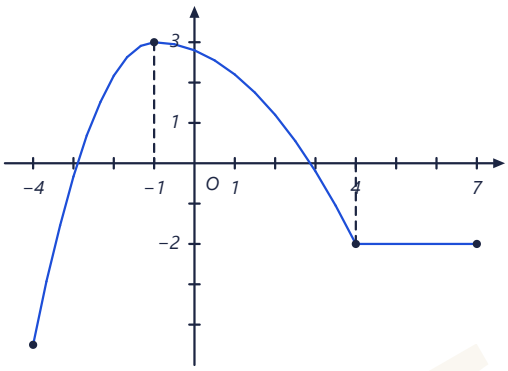
Netabb3ou la courbe hedhi men el isar lel imin. Men moins quatre l moins un, tal3a : ken a asghar men b, f de a asghar men f de b. Les images mrattbin kif les abscisses. Men moins un l quatre, habta : ken a asghar men b, f de a akber men f de b. L'ordre yetbaddel. W men quatre l sept, horizontale : les images el koll égales à moins deux. Tatla3, tahbet, to93od horizontale : hedhom les trois 7alet elli bech nsammiwhom.

نتبّعو الـ courbe هاذي من اليسار لليمين . من moins quatre لـ moins un ، طالعة : كان a أصغر من b ، f de a أصغر من f de b . les images
مرتّبين كيف les abscisses . من moins un لـ quatre ، هابطة : كان a أصغر من b ، f de a أكبر من f de b . l'ordre يتبدّل . w من quatre لـ sept
horizontale : les images . الكل égales à moins deux ، تطلع . تهبط ، تقعد horizontale : هاذم les trois حالات اللي باش نسمّيوهم .

Suivons cette courbe de gauche à droite. De moins quatre à moins un, elle monte : si a est plus petit que b, f de a est plus petit que f de b. Les images sont rangées comme les abscisses. De moins un à quatre, elle descend : si a est plus petit que b, f de a est plus grand que f de b. L'ordre change. Et de quatre à sept, elle est horizontale : toutes les images sont égales à moins deux. Monter, descendre, rester horizontale : ce sont les trois cas que nous allons nommer.

La courbe de la figure est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4; 7]$.

1. Soient a et b deux réels de l'intervalle $[-4; -1]$ tels que $a \leq b$. Compare $f(a)$ et $f(b)$.
2. Reprends la même question lorsque : a) a et b appartiennent à $[-1; 4]$ et $a \leq b$; b) a et b appartiennent à $[4; 7]$ et $a \leq b$.



La courbe de f sur [−4 ; 7].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 4 à l'abscisse 7. Elle monte du point d'abscisse moins 4 et d'ordonnée moins 4,5 jusqu'au point d'abscisse moins 1 et d'ordonnée 3, son point le plus haut. Elle descend ensuite jusqu'au point d'abscisse 4 et d'ordonnée moins 2. Enfin, de l'abscisse 4 à l'abscisse 7, elle est horizontale, à la hauteur moins 2. Au palier 2, des pointillés marquent les abscisses moins 1 et 4, où la courbe change d'allure.

EXEMPLE TRAITÉ

Compare $f(a)$ et $f(b)$ sur chacun des trois intervalles, avec $a \leq b$.

Sur [−4 ; −1] — La courbe monte : quand l'abscisse augmente, l'ordonnée augmente aussi.

$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

Sur [−1 ; 4] — La courbe descend : quand l'abscisse augmente, l'ordonnée diminue.

$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

Sur [4 ; 7] — La courbe est horizontale : tous ses points ont la même ordonnée -2.

$f(a) = f(b) = -2$

À ne pas faire : Sur $[-1;4]$, $a \leq b$ donc $f(a) \leq f(b)$ — Sur $[-1;4]$, $a \leq b$ donne $f(a) \geq f(b)$. Quand la courbe descend, les images sont rangées dans l'ordre **contraire** de celui des abscisses.

12. DÉFINITION

Sens de variation d'une fonction

CE QU'IL DIT

Tawa el kelmet. f croissante sur intervalle I, ki I koll a w b men I, a inférieur ou égal à b ta3tina f de a inférieur ou égal à f de b : la fonction t5alli l'ordre kima houwa. f décroissante sur I, ki a inférieur ou égal à b ta3tina f de a supérieur ou égal à f de b : la fonction tbaddel l'ordre. W f constante sur I, ki les images el koll yetsewew. Fonction croissante sur I, walla décroissante sur I, n9oulou 3liha monotone sur I. W bech nbayynouha bel calcul, ne5dhou a inférieur ou égal à b, w nlawjou 3la le signe mta3 f de b moins f de a.

الـ : f de a inférieur ou égal à f de b تعطينا I ، a inférieur ou égal à b من a w b لكل كي ، f croissante sur intervalle I . تو2ة الكلمات fonction الـ : f de a supérieur ou égal à f de b تعطينا a inférieur ou égal à b كي ، f décroissante sur I . كيما هو l'ordre تخلّي fonction نقولو عليها ، décroissante sur I ولّا ، fonction croissante sur I . الكل يتساواو les images كي ، l'ordre . w f constante sur I تبدّل . f de b moins f de a متاع le signe على نلوّجو a inférieur ou égal à b ، w ناخذو ، calcul باش نبيّنوها بالـ monotone sur I . w

Maintenant, les mots. f est croissante sur un intervalle I quand, pour tous a et b de I, a inférieur ou égal à b entraîne f de a inférieur ou égal à f de b : la fonction garde l'ordre. f est décroissante sur I quand a inférieur ou égal à b entraîne f de a supérieur ou égal à f de b : la fonction change l'ordre. Et f est constante sur I quand toutes les images sont égales. Une fonction croissante sur I, ou

décroissante sur I, est dite monotone sur I. Et pour le démontrer par le calcul, on prend a inférieur ou égal à b, et on cherche le signe de f de b moins f de a.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et I un intervalle inclus dans E.

La fonction f est **croissante** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.

La fonction f est **décroissante** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \geq f(b)$.

La fonction f est **constante** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.

Vocabulaire. Une fonction est dite **monotone** sur un intervalle I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Pour étudier le sens de variation par le calcul, on prend $a \leq b$ dans I et on cherche le signe de $f(b) - f(a)$.

F CROISSANTE SUR I

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

F DÉCROISSANTE SUR I

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

F CONSTANTE SUR I

$$f(a) = f(b)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Étudie le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$, puis sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

La différence — On prend deux réels $a \leq b$ et on factorise $f(b) - f(a)$.

$f(b) - f(a) = -(b^2 - a^2) + 4(b - a) = (b - a)(4 - a - b)$

Sur]−∞ ; 2] — $a \leq 2$ et $b \leq 2$ donnent $a + b \leq 4$: les deux facteurs sont positifs ou nuls.

$f(b) - f(a) \geq 0 \quad \text{donc} \quad f(a) \leq f(b)$

Sur [2 ; +∞[— $a \geq 2$ et $b \geq 2$ donnent $a + b \geq 4$: le facteur $4 - a - b$ est négatif ou nul.

$f(b) - f(a) \leq 0 \quad \text{donc} \quad f(a) \geq f(b)$

f est croissante sur $]-\infty ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$

À ne pas faire : $f(0) = 1$ et $f(1) = 4$: $f(0) \leq f(1)$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ — f est croissante sur $]-\infty ; 2]$ seulement : $f(2) = 5$ et $f(3) = 4$. Comparer deux images ne suffit pas : l'inégalité doit être vraie pour **tous** les réels $a \leq b$ de l'intervalle.

À ne pas faire : f est décroissante sur $[2 ; +\infty[$, donc $f(x) \leq 0$ sur cet intervalle — $f(2) = 5 > 0$: décroissante ne veut pas dire négative. Le sens de variation compare les images **entre elles** ; il ne dit rien de leur signe.

13. MÉTHODE

Décrire les variations à partir d'une courbe

CE QU'IL DIT

Bech nousfou les variations mta3 fonction men la courbe mte3ha, netabb3ouha men el isar lel imin, w n9ayydou les abscisses win tbaddel 7alha. Houni, la courbe tahbet men moins trois l moins un, tatla3 men moins un l zéro, w terja3 tahbet men zéro l trois. Idhan nektbou : f décroissante sur l'intervalle men moins trois l moins un, croissante sur l'intervalle men moins un l zéro, w décroissante sur l'intervalle men zéro l trois. Rodd belek, les intervalles hedhom dima na9rawhom 3la l'axe des abscisses, mouch 3la l'axe des ordonnées.

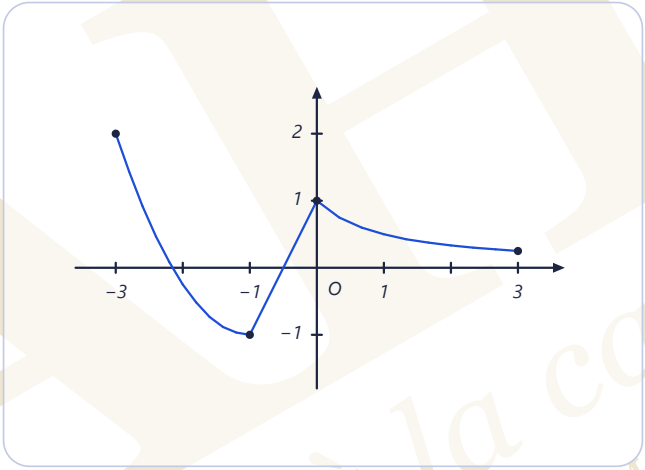
باش نوصفو les variations متاع fonction من la courbe متاعها ، نتبّعوها من اليسار لليمين ، نقيّدو les abscisses وين تبدّل حالها . هنا ، الـ courbe تهبط من moins trois لـ moins un ، تطلع من moins un لـ w ، ترجع تهبط من zéro لـ trois . إذن نكتبو : f décroissante sur l'intervalle من moins trois لـ moins un ، croissante sur l'intervalle من moins un لـ zéro ، w décroissante sur l'intervalle من zéro لـ trois . ردّ بالك ، les intervalles هاذم ديما نقراوهم على l'axe des abscisses ، موش على l'axe des ordonnées .

Pour décrire les variations d'une fonction à partir de sa courbe, on la suit de gauche à droite, et on note les abscisses où elle change d'allure. Ici, la courbe descend de moins trois à moins un, elle monte de moins un à zéro, puis elle redescend de zéro à trois. On écrit donc : f est décroissante sur l'intervalle de moins trois à moins un, croissante sur l'intervalle de moins un à zéro, et décroissante sur l'intervalle de zéro à trois. Attention, ces intervalles se lisent toujours sur l'axe des abscisses, pas sur l'axe des ordonnées.

Décris les variations de la fonction f dont la courbe est tracée sur la figure.

La méthode. On parcourt la courbe de gauche à droite et on repère les abscisses où elle change d'allure. Sur chaque intervalle ainsi délimité, on dit si la fonction est croissante (la courbe monte), décroissante (la courbe descend) ou constante (la courbe est horizontale). On donne toujours des intervalles de l'axe des **abscisses**.

Deux cas simples : une courbe qui monte sur tout l'ensemble de définition est celle d'une fonction croissante ; une droite parallèle à l'axe des abscisses est la courbe d'une fonction constante.



La courbe d'une fonction f définie sur [−3 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe est tracée de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 3. Elle descend du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 2 jusqu'au point d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas. Elle remonte ensuite en ligne droite jusqu'au point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, où elle fait une pointe. Puis elle redescend doucement jusqu'au point d'abscisse 3 et d'ordonnée 0,25, en restant au-dessus de l'axe des abscisses.

EXEMPLE TRAITÉ

Décris les variations de f sur $[-3;3]$.

Les changements d'allure — La courbe change de sens aux points d'abscisses -1 et 0 : on découpe en trois intervalles.
$[-3;-1]$; $[-1;0]$; $[0;3]$

De −3 à −1 — La courbe descend de l'ordonnée 2 à l'ordonnée -1 : f est décroissante sur $[-3;-1]$.

De −1 à 0 — La courbe monte de l'ordonnée -1 à l'ordonnée 1 : f est croissante sur $[-1;0]$.

De 0 à 3 — La courbe redescend : f est décroissante sur $[0;3]$.

$$f \text{ décroissante sur } [-3;-1],\ \text{croissante sur } [-1;0],\ \text{décroissante sur } [0;3]$$

À ne pas faire : f est décroissante sur $[-1;2]$ — f est décroissante sur $[-3;-1]$. L'intervalle se lit sur l'axe des abscisses : de -1 à 2, ce sont les ordonnées parcourues, pas les abscisses.

À ne pas faire : f est décroissante sur $[-3;-1]$ et sur $[0;3]$, donc f est décroissante sur $[-3;3]$ — f n'est pas monotone sur $[-3;3]$: elle est croissante sur $[-1;0]$. Le sens de variation se donne intervalle par intervalle ; ici $f(-1)=-1$ est plus petit que $f(0)=1$.

14. ACTIVITÉ

Pour comprendre : des aires qui varient dans un triangle

CE QU'IL DIT

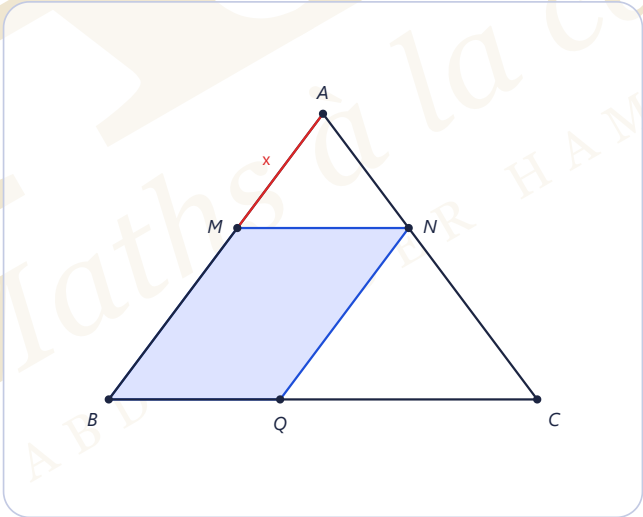
3andna triangle isocèle ABC, w point M yet7arrek 3la le côté AB, men A l B. N7ottou AM égale x : x yzid men zéro l cinq. Nchoufou quatre aires. L'aire mta3 le triangle el kbir ABC ma tetbaddelch : hiya douze, fonction constante. L'aire mta3 le triangle es-sghir AMN tekber ki M yahbet : fonction croissante. L'aire mta3 le triangle NCQ tesgher : fonction décroissante. W l'aire mta3 le parallélogramme MNQB, nulle au début w nulle à la fin : tzid, w ba3d ton9os. Quatre aires, quatre fonctions de x, w koll wa7da 3andha 7alha.

عندنا triangle isocèle ABC ، w point M يتحرّك على le côté AB ، من A لـ B . نحطّو x : x égale AM يزيد من zéro لـ cinq . نشوفو quatre aires . l'aire mta3 le triangle el kbir ABC ما تتبدّلش : هي douze ، fonction constante . l'aire mta3 le triangle es-sghir AMN تكبر كي M يهبط fonction croissante . l'aire mta3 le triangle NCQ تصغر : w l'aire fonction décroissante . mta3 متاع le parallélogramme MNQB ، nulle au début w nulle à la fin : tzid ، w ba3d ton9os . w ، x de fonctions quatre ، aires quatre كل وحدة عندها حالها .

On a un triangle isocèle ABC, et un point M qui se déplace sur le côté AB, de A vers B. On pose AM égale x : x augmente de zéro à cinq. Regardons quatre aires. L'aire du grand triangle ABC ne change pas : elle vaut douze, c'est une fonction constante. L'aire du petit triangle AMN grandit quand M descend : fonction croissante. L'aire du triangle NCQ diminue : fonction décroissante. Et l'aire du parallélogramme MNQB est nulle au début et nulle à la fin : elle augmente, puis elle diminue. Quatre aires, quatre fonctions de x, et chacune a son comportement.

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A, tel que $AB = 5$ et $BC = 6$. Le point M se déplace sur le segment $[AB]$, privé des deux points A et B. N et Q sont deux points, respectivement de $[AC]$ et de $[BC]$, tels que $MNQB$ soit un parallélogramme. On pose $AM = x$.

Lorsque M se déplace de A vers B, comment varient l'aire du triangle AMN, celle du triangle NCQ, celle du triangle ABC et celle du parallélogramme $MNQB$?



AB = AC = 5, BC = 6 et AM = x.

Un triangle ABC isocèle de sommet principal A : la base [BC] est en bas, B à gauche et C à droite, A en haut. Au palier 2, le point M est sur le côté [AB], le point N sur le côté [AC] et le point Q sur le côté [BC] ; le segment [MN] est parallèle à (BC) et le segment [NQ] est parallèle à (AB). Le parallélogramme MNQB est coloré en bleu. La longueur AM est notée x. On voit trois morceaux : le petit triangle AMN en haut, le parallélogramme MNQB à gauche, et le triangle NCQ en bas à droite.

EXEMPLE TRAITÉ

Dis comment varie chacune des quatre aires quand x augmente de 0 à 5.

Le triangle ABC — Il ne dépend pas de M. Sa hauteur issue de A vaut 4, car $3^2 + 4^2 = 5^2$: son aire est constante.
$\text{aire}(ABC) = \frac{6\times 4}{2} = 12$

Le triangle AMN — Quand M s'éloigne de A, le triangle AMN grandit : son aire est une fonction croissante de x.

Le triangle NCQ — Dans le même temps, N se rapproche de C et le triangle NCQ rétrécit : son aire est une fonction décroissante de x.

Le parallélogramme — Il est aplati quand M est près de A, et aussi quand M est près de B : son aire augmente, puis diminue. $\text{aire}(MNQB) = 12 - \text{aire}(AMN) - \text{aire}(NCQ)$

À ne pas faire : Quand x augmente, toutes les aires augmentent — L'aire de AMN augmente, celle de NCQ diminue, celle de ABC reste égale à 12. Chaque aire est une fonction différente de x : il faut regarder comment chaque figure se déforme quand M descend vers B.

15. APPLICATION

Exemple : reconnaître la courbe de chaque aire

CE QU'IL DIT

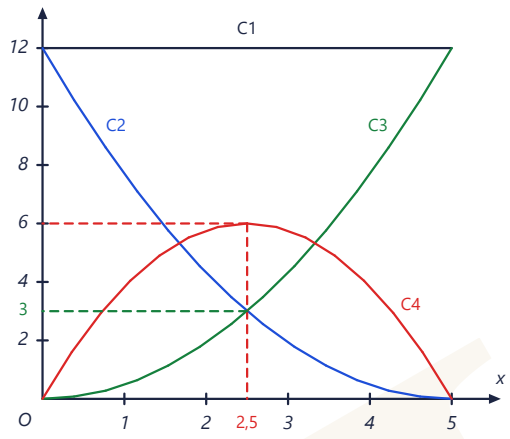
Hedhom el quatre aires marsoumin en fonction de x. Kifech na3rfou koll wa7da ? Le triangle ABC 3andou aire constante, douze : hedhi la courbe horizontale, C un. L'aire mta3 AMN croissante w tabda men zéro : hedhi C trois. L'aire mta3 NCQ décroissante w tabda men douze : hedhi C deux. To93od C quatre lel parallélogramme : tatla3, w ba3d tahbet. Le sommet mte3ha 3andou abscisse deux virgule cinq w ordonnée six. Idhan l'aire mta3 le parallélogramme maximale ki M fi le milieu de AB, w wa9tha tsewi six, ennoss mta3 l'aire du triangle ABC.

courbe الـ هاذي : aire constante ، douze عندو le triangle ABC ؟ كيفاش نعرفو كل وحدة . en fonction de x مرسومين quatre aires هاذم الـ
هاذي : douze تبدا من NCQ décroissante w متاع C trois . l'aire هاذي : zéro تبدا من AMN croissante w متاع horizontale ، C un . l'aire الـ
. abscisse deux virgule cinq w ordonnée six متاعها عندو le sommet . بعد تهبط w ، تطلع : parallélogramme للـ C quatre تقعد . C deux
. l'aire du triangle ABC متاع النصّ ، six وقتها تساوي le milieu de AB ، w في M كي le parallélogramme maximale متاع l'aire إذن

Voici les quatre aires tracées en fonction de x. Comment reconnaître chacune ? Le triangle ABC a une aire constante, douze : c'est la courbe horizontale, C un. L'aire de AMN est croissante et part de zéro : c'est C trois. L'aire de NCQ est décroissante et part de douze : c'est C deux. Il reste C quatre pour le parallélogramme : elle monte, puis elle descend. Son sommet a pour abscisse deux virgule cinq et pour ordonnée six. Donc l'aire du parallélogramme est maximale quand M est au milieu de AB, et elle vaut alors six, la moitié de l'aire du triangle ABC.

On reprend le triangle isocèle ABC ($AB = 5$, $BC = 6$), le point M de $[AB]$ avec $AM = x$, et le parallélogramme $MNQB$. Sur le graphique, les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ représentent, en fonction de x, les aires des triangles AMN, NCQ, ABC et celle du parallélogramme $MNQB$, lorsque M se déplace de A vers B.

1. Comment varie l'aire du triangle AMN ? Quelle est la courbe associée à cette aire ? Reprends ces deux questions pour les triangles NCQ et ABC.
2. a) Détermine graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire du parallélogramme est maximale.
3. b) Dans ce cas, que peut-on dire des aires des triangles AMN et NCQ ? Compare alors l'aire du parallélogramme $MNQB$ à celle du triangle ABC.



Les quatre aires en fonction de x.

Un repère : en abscisse x, de 0 à 5 ; en ordonnée une aire, graduée de 2 en 2 jusqu'à 12. Quatre courbes. C1, noire, est un segment horizontal à la hauteur 12. C2, bleue, descend du point d'abscisse 0 et d'ordonnée 12 au point d'abscisse 5 et d'ordonnée 0. C3, verte, monte de l'origine au point d'abscisse 5 et d'ordonnée 12. C4, rouge, part de l'origine, monte jusqu'au point d'abscisse 2,5 et d'ordonnée 6, puis redescend au point d'abscisse 5 et d'ordonnée 0. Les courbes C2 et C3 se coupent au point d'abscisse 2,5 et d'ordonnée 3. Au palier 2, des pointillés rouges lisent le sommet de C4 ; au palier 3, des pointillés verts lisent le point commun à C2 et C3.

EXEMPLE TRAITÉ

Associe chaque aire à sa courbe, puis étudie le parallélogramme d'aire maximale.

Les trois triangles — L'aire de ABC est constante : c'est $\mathcal{C}_1$. L'aire de AMN est croissante et part de 0 : c'est $\mathcal{C}_3$. L'aire de NCQ est décroissante et part de 12 : c'est $\mathcal{C}_2$.

Le parallélogramme — Il reste $\mathcal{C}_4$, qui monte puis descend. Son point le plus haut a pour abscisse $2{,}5$ et pour ordonnée 6.

$$x = 2{,}5 \quad ; \quad \text{aire maximale} = 6$$

Les deux triangles — Pour $x = 2{,}5$, les courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent : les triangles AMN et NCQ ont la même aire, 3.

$$\text{aire}(AMN) = \text{aire}(NCQ) = 3$$

La moitié — L'aire du parallélogramme est alors la moitié de celle du triangle ABC.

$$12 - 3 - 3 = 6 = \tfrac{12}{2}$$

À ne pas faire : L'aire du parallélogramme est maximale pour $x = 6$ — Elle est maximale pour $x = 2{,}5$, et ce maximum vaut 6. La valeur de x se lit sur l'axe des abscisses ; 6 est l'ordonnée du sommet de $\mathcal{C}_4$, c'est-à-dire l'aire maximale.

16. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

CE QU'IL DIT

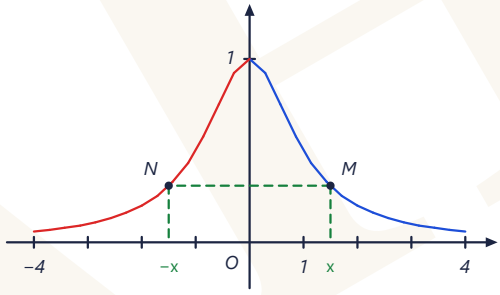
Ne5dhou f de x égale un sur (x au carré plus un), bin moins quatre w quatre. 9bal koll chay, ken x fel intervalle hedha, moins x zeda fih. W 5ater nombre w l'opposé mte3ou 3andhom nafs le carré, f de moins x égale f de x. Chouf tawa les points M w N men la courbe, les abscisses mte3hom x w moins x : 3andhom nafs l'ordonnée. Idhan houma symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. W 5ater hedha s7i7 l koll x, la courbe el koll symétrique par rapport à l'axe hedha : yekfi nrasmou ennoss, w nkamlou el be9i bel symétrie.

. هذا زادة فيه moins x ، هذا intervalle الـ في x كان ، شي كل قُبَيْل . moins quatre w quatre بين ، f de x égale un sur (x au carré plus un) ناخذو
courbe ، les من الـ les points M w N شوف توّة . le carré ، f de moins x égale f de x متاعو عندهم نفس nombre w l'opposé خاطر w
خاطر هذا صحيح symétriques par rapport à l'axe des ordonnées . w هوما إذن . l'ordonnée عندهم نفس : x w moins x متاعهم abscisses
. symétrie بالـ الباقي نكمّلو w ، النصّ نرسمو يكفي : هذا symétrique par rapport à l'axe الكل courbe الـ ، x لكل

Prenons f de x égale un sur (x au carré plus un), entre moins quatre et quatre. Avant tout, si x est dans cet intervalle, moins x y est aussi. Et comme un nombre et son opposé ont le même carré, f de moins x égale f de x. Regarde maintenant les points M et N de la courbe, d'abscisses x et moins x : ils ont la même ordonnée. Ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Et comme c'est vrai pour tout x, toute la courbe est symétrique par rapport à cet axe : il suffit d'en tracer la moitié, et de compléter le reste par symétrie.

Soit f la fonction définie sur $[-4;4]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1. a) Vérifie que si $x \in [-4;4]$, alors $-x \in [-4;4]$.
2. b) Compare $f(-x)$ et $f(x)$.
3. On munit le plan d'un repère orthogonal (O,I,J) et on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $-x$. Montre que les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
4. On a représenté une partie de la courbe $\mathcal{C}$. Complète la courbe $\mathcal{C}$.



M et N ont la même ordonnée : ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un repère orthogonal d'origine O. Au palier 1, la partie de la courbe pour les abscisses de 0 à 4 est tracée en bleu : elle part du point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1 et descend vers l'axe des abscisses sans le toucher. Au palier 2, un point M d'abscisse x est marqué sur cette partie, et le point N d'abscisse moins x est placé à la même hauteur, de l'autre côté de l'axe des ordonnées : le segment [MN] est horizontal et l'axe des ordonnées le coupe en son milieu. Au palier 3, l'autre moitié de la courbe est tracée en rouge : c'est le symétrique de la partie bleue par rapport à l'axe des ordonnées.

EXEMPLE TRAITÉ

Réponds aux trois questions.

L'intervalle — Si $-4 \leq x \leq 4$, alors, en multipliant par -1, on obtient $-4 \leq -x \leq 4$.
$x \in [-4;4] \;\Rightarrow\; -x \in [-4;4]$

Les images — Un réel et son opposé ont le même carré.
$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=f(x)$

Les points M et N — Ils ont des abscisses opposées et la même ordonnée : ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
$M(x;f(x)) \quad ; \quad N(-x;f(x))$

La courbe — On complète la partie connue par son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

À ne pas faire : $f(-x)=\dfrac{1}{-x^2+1}$ — $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}$. On remplace x par $-x$ **entre parenthèses** : $(-x)^2=x^2$, alors que $-x^2$ est l'opposé de x^2.

17. DÉFINITION

Fonction paire

CE QU'IL DIT

Hedhi la définition. f mo3arrfa 3la ensemble E. N9oulou f paire, ki l koll x men E, zouz 7ajet s7a7 : moins x zeda fi E, w f de moins x égale f de x. W la conséquence choftha tawa : fi repère orthogonal, la courbe mta3 fonction paire symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ma tensech la première condition : ken l'ensemble de définition ma fihech l'opposé mta3 koll élément mennou, la fonction ma tnajjemch tkoun paire.

هاذي f . la définition معرّفة على ensemble E . نقولو f paire ، كي لكل x من E ، زوز حاجات صحاح : moins x زادة في E ، w f de moins x
fonction paire symétrique par rapport à l'axe des متاع repère orthogonal ، la courbe في : شفتها تو2ّة égale f de x . w la conséquence
ما ordonnées . ما تنساش la première condition : كان l'ensemble de définition ما فيهش l'opposé متاع كل élément منّو ، الـ fonction ما
تنجّمش تكون paire .

Voici la définition. f est définie sur un ensemble E. On dit que f est paire quand, pour tout x de E, deux choses sont vraies : moins x est aussi dans E, et f de moins x égale f de x. Et la conséquence, tu viens de la voir : dans un repère orthogonal, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. N'oublie pas la première condition : si l'ensemble de définition ne contient pas l'opposé de chacun de ses éléments, la fonction ne peut pas être paire.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

> On dit que f est **paire** si, pour tout réel x de E, on a $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$.

Conséquence. Dans un repère orthogonal, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La définition porte deux conditions : l'ensemble de définition doit contenir l'opposé de chacun de ses éléments, et les images de x et de $-x$ doivent être égales.

F EST PAIRE

$$\text{pour tout } x \in E : \quad -x \in E \ \text{ et } \ f(-x) = f(x)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Détermine son ensemble de définition, puis montre que f est paire.

L'ensemble de définition — Il faut $1 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $x^2 \leq 1$.

$E = [-1; 1]$

Première condition — Si $-1 \leq x \leq 1$, alors $-1 \leq -x \leq 1$.

$x \in E \ \Rightarrow \ -x \in E$

Deuxième condition — On remplace x par $-x$, entre parenthèses.

$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$

f est paire

À ne pas faire : La fonction définie sur $[-2; 3]$ par $f(x) = x^2$ est paire, car $(-x)^2 = x^2$ — Elle n'est pas paire : 3 est dans $[-2; 3]$, mais -3 n'y est pas. La première condition porte sur l'ensemble de définition : il doit contenir $-x$ chaque fois qu'il contient x.

À ne pas faire : $f(2) = f(-2)$, donc f est paire — Il faut $f(-x) = f(x)$ pour **tout** réel x de E. Une seule égalité ne prouve rien ; en revanche, un seul réel x tel que $f(-x) \neq f(x)$ suffit à prouver que f n'est pas paire.

18. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la symétrie par rapport à l'origine

CE QU'IL DIT

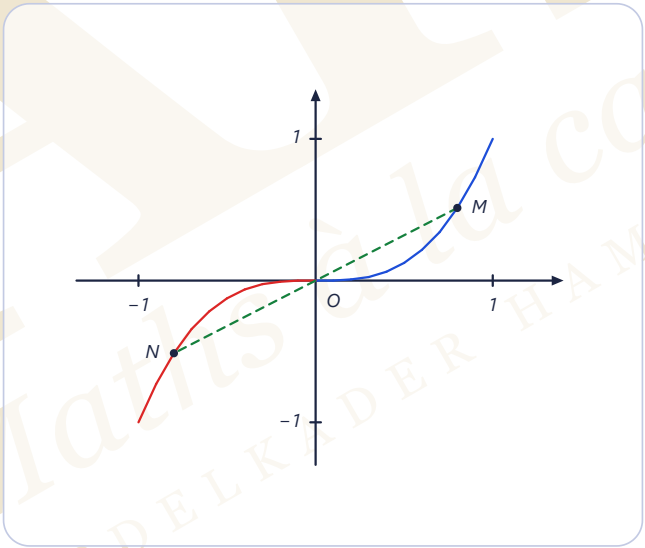
Nafs el 5edma m3a f de x égale x au cube, bin moins un w un. Ken x fel intervalle, moins x zeda fih. Ama el marra hedhi, f de moins x égale (moins x) au cube, ya3ni moins x au cube, ya3ni moins f de x : les images opposées. Les points M w N, elli les abscisses mte3hom x w moins x, 3andhom idhan abscisses opposées w ordonnées opposées. Le milieu du segment MN houwa l'origine O : M w N symétriques par rapport à O. Idhan la courbe el koll symétrique par rapport à l'origine du repère.

نفس الخدمة مع f de x égale x au cube ، بين moins un w un . كان x في الـ moins x ، زادة فيه intervalle . أما المرّة هاذي ، f de moins x égale (moins x) au cube ، يعني moins x au cube ، يعني les points M w N . les images opposées : moins f de x ، اللي les abscisses متاعهم x w moins x ، عندهم إذن abscisses opposées w ordonnées opposées . le milieu du segment MN هو l'origine O : M w N symétriques par rapport à O . إذن الـ courbe الكل symétrique par rapport à l'origine du repère .

Même travail avec f de x égale x au cube, entre moins un et un. Si x est dans l'intervalle, moins x y est aussi. Mais cette fois, f de moins x égale (moins x) au cube, donc moins x au cube, c'est-à-dire moins f de x : les images sont opposées. Les points M et N, d'abscisses x et moins x, ont donc des abscisses opposées et des ordonnées opposées. Le milieu du segment MN est l'origine O : M et N sont symétriques par rapport à O. Donc toute la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = x^3$.

1. a) Vérifie que si $x \in [-1;1]$, alors $-x \in [-1;1]$.
2. b) Compare $f(-x)$ et $f(x)$.
3. On munit le plan d'un repère orthogonal (O, I, J) et on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.
4. a) Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $-x$. Montre que les points M et N sont symétriques par rapport à l'origine O.
5. b) On a représenté une partie de la courbe $\mathcal{C}$. Complète cette courbe.



O est le milieu de [MN] : M et N sont symétriques par rapport à l'origine.

Un repère orthogonal d'origine O. Au palier 1, la partie de la courbe pour les abscisses de 0 à 1 est tracée en bleu : elle part de l'origine, d'abord presque à plat, puis monte jusqu'au point d'abscisse 1 et d'ordonnée 1. Au palier 2, un point M d'abscisse x est marqué sur cette partie, et le point N, d'abscisse moins x et d'ordonnée opposée, est placé de l'autre côté : le segment [MN] passe par l'origine O, qui est son milieu. Au palier 3, l'autre moitié de la courbe est tracée en rouge, du point d'abscisse moins 1 et d'ordonnée moins 1 jusqu'à l'origine : c'est le symétrique de la partie bleue par rapport à O.

EXEMPLE TRAITÉ

Réponds aux questions.

L'intervalle — Si $-1 \leq x \leq 1$, alors $-1 \leq -x \leq 1$.

$x \in [-1;1] \Rightarrow -x \in [-1;1]$

Les images — Le cube d'un opposé est l'opposé du cube.

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Les points M et N — Leurs abscisses sont opposées et leurs ordonnées aussi : le milieu du segment $[MN]$ est l'origine O.

$M(x;x^3) \quad ; \quad N(-x;-x^3)$

La courbe — On complète la partie connue par son symétrique par rapport à O.

À ne pas faire : $(-x)^3 = x^3$ — $(-x)^3 = -x^3$. Un exposant impair garde le signe : $(-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = -x^3$. C'est un exposant pair qui le fait disparaître.

---

19. DÉFINITION

Fonction impaire

CE QU'IL DIT

W tawa la deuxième définition. f mo3arrfa 3la ensemble E. N9oulou f impaire, ki l koll x men E, moins x fi E, w f de moins x égale moins f de x. Ya3ni zouz réels opposés 3andhom images opposées. W la conséquence : la courbe mta3 fonction impaire symétrique par rapport à l'origine du repère. W rodd belek : fonction mouch paire, mouch bedharoura impaire. Barcha fonctions ma houma la paires la impaires.

E ، w f de moins x égale في E ، moins x من x كل لكي ، f impaire نقولو . ensemble E على معرّفة la deuxième définition . f توّة w fonction impaire symétrique par متاع images opposées . w la conséquence : la courbe عندهم réels opposés زوز يعني . moins f de x . impaires لا paires لا هوما ما fonctions برشا . impaire بالضرورة موش ، paire موش fonction : بالك ردّ rapport à l'origine du repère . w

Et maintenant la deuxième définition. f est définie sur un ensemble E. On dit que f est impaire quand, pour tout x de E, moins x est dans E, et f de moins x égale moins f de x. Autrement dit, deux réels opposés ont des images opposées. Et la conséquence : la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère. Et attention : une fonction qui n'est pas paire n'est pas forcément impaire. Beaucoup de fonctions ne sont ni paires ni impaires.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

> On dit que f est **impaire** si, pour tout réel x de E, on a $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

F EST IMPAIRE

pour tout $x \in E$: $\quad -x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$: à x, on ajoute son inverse. Détermine son ensemble de définition, puis montre que f est impaire.

L'ensemble de définition — Le dénominateur x ne doit pas être nul.

$E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Première condition — Si $x \neq 0$, alors $-x \neq 0$: l'opposé d'un élément de E est dans E.

$x \neq 0 \;\Rightarrow\; -x \neq 0$

Deuxième condition — On remplace x par $-x$, puis on met le signe moins en facteur.

$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$

f est impaire

À ne pas faire : f n'est pas paire, donc f est impaire — Une fonction peut n'être ni paire ni impaire, comme $x \mapsto x^2 + x$. Paire et impaire ne sont pas des contraires : chacune se démontre avec sa propre égalité, $f(-x) = f(x)$ ou bien $f(-x) = -f(x)$.

À ne pas faire : $f(-x) = -f(x)$ signifie que les images sont négatives — $f(-x) = -f(x)$ signifie que x et $-x$ ont des images **opposées**. Avec $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, où l'on ajoute à x son inverse, on trouve $f(2) = 2{,}5$ et $f(-2) = -2{,}5$: l'une est positive, l'autre négative.

20. MÉTHODE

Étudier la parité d'une fonction

CE QU'IL DIT

Bech nedrsou la parité mta3 fonction, trois étapes. Un : nlawjou 3la l'ensemble de définition, w nthabbtou elli fih moins x koll ma fih x. Ken mouch hakka, wfet : la fonction ni paire ni impaire. Mathalan x sur (x moins deux) : moins deux 3andou image, ama deux le. Deux : na7sbou f de moins x. Ken l9ina f de x, la fonction paire ; ken l9ina moins f de x, hiya impaire. Trois : ken ma l9ina la hedhi la hedhika, na3tiw contre-exemple bel nombres.

باش ندرسو la parité متاع un . trois étapes ، fonction : نلوّجو على w ، l'ensemble de définition نثبّتو اللي فيه moins x كل ما فيه x . كان موش هكّا ، وفات : الـ fonction ni paire ni impaire . مثلا moins deux : x sur (x moins deux) عندو image ، أما deux لا deux : نحسبو f de . moins x كان لقينا f de x ، الـ fonction paire ؛ كان لقينا moins f de x ، هي trois . impaire : كان ما لقينا لا هاذي لا هاذيكا ، نعطيو contre-exemple بالـ nombres .

Pour étudier la parité d'une fonction, trois étapes. Un : on cherche l'ensemble de définition, et on vérifie qu'il contient moins x chaque fois qu'il contient x. Si ce n'est pas le cas, c'est terminé : la fonction n'est ni paire ni impaire. Par exemple x sur (x moins deux) : moins deux a une image, mais pas deux. Deux : on calcule f de moins x. Si on trouve f de x, la fonction est paire ; si on trouve moins f de x, elle est impaire. Trois : si on ne trouve ni l'un ni l'autre, on donne un contre-exemple avec des nombres.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble de définition de f, puis dis si la fonction est paire, impaire, ou ni paire ni impaire.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|-2}$; c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; e) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Dans le cas d), on ajoute à x son inverse ; dans le cas e), on ajoute à x^2 l'inverse de x.

La méthode. 1. On détermine l'ensemble de définition E et on regarde s'il contient l'opposé de chacun de ses éléments. Sinon, f n'est ni paire ni impaire. 2. On calcule $f(-x)$ et on le compare à $f(x)$ et à $-f(x)$. 3. Pour montrer que f n'est ni paire ni impaire, on donne un réel x pour lequel $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

EXEMPLE TRAITÉ

Étudie la parité dans les cas a), b) et e).

a) L'ensemble de définition — $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$: il contient -2, mais pas son opposé 2.

$-2 \in E$ et $2 \notin E$ donc f n'est ni paire ni impaire

b) L'ensemble de définition — Le dénominateur s'annule quand $|x| = 2$, c'est-à-dire pour $x = 2$ ou pour $x = -2$: E est $\mathbb{R}$ privé de -2 et de 2, et il contient l'opposé de chacun de ses éléments.

$E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

b) Le calcul — Un réel et son opposé ont la même valeur absolue.

$f(-x) = \frac{-x}{|-x|-2} = -\frac{x}{|x|-2} = -f(x)$ donc f est impaire

e) Un contre-exemple — $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ contient l'opposé de chacun de ses éléments, mais les images de 1 et de -1 ne sont ni égales ni opposées.

$f(1) = 2$; $f(-1) = 0$ donc f n'est ni paire ni impaire

a) ni paire ni impaire ; b) impaire ; c) paire ; d) impaire ; e) ni paire ni impaire

À ne pas faire : a) $f(-x) = \dfrac{-x}{-x-2}$: on ne sait pas conclure — a) $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ne contient pas l'opposé de -2 : f n'est ni paire ni impaire. On commence toujours par l'ensemble de définition : s'il ne contient pas $-x$ pour chaque x, la question est réglée sans calcul.

À ne pas faire : e) $f(-x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ ne ressemble pas à $f(x)$: on ne peut rien dire — e) $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$: f n'est ni paire ni impaire. Pour prouver qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, un contre-exemple avec des nombres suffit, et il est indiscutable.

21. APPLICATION

Exemple : compléter une courbe par symétrie

CE QU'IL DIT

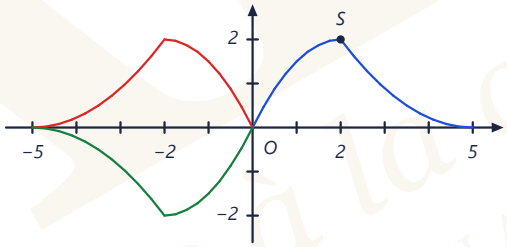
Na3rfou la courbe ken 3al imin, l x bin zéro w cinq, w n7ebbou nkamlouha 3al isar. Ken f paire, nrasmou le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : kif elli natwiw el war9a 3la l'axe. Le point S, elli l'abscisse mte3ou deux w l'ordonnée mte3ou deux, ya3tina le point d'abscisse moins deux et d'ordonnée deux. Ken f impaire, nrasmou le symétrique par rapport à l'origine : na3mlou demi-tour 7awl O. Wa9tha le point S ya3tina le point d'abscisse moins deux et d'ordonnée moins deux.

نعرفو الـ courbe كان على اليمين ، لـ x بين zéro w cinq ، w نحبّو نكمّلوها على اليسار . كان f paire ، نرسمو le symétrique par rapport à l'axe . le point S على كيف اللي نطويو الورقة : l'axe des ordonnées اللي ، l'abscisse متاعو deux w l'ordonnée متاعو deux ، يعطينا le point S وقتها . O حول demi-tour نعملو : le symétrique par rapport à l'origine نرسمو ، f impaire كان . point d'abscisse moins deux et d'ordonnée deux يعطينا le point d'abscisse moins deux et d'ordonnée moins deux .

On connaît la courbe seulement à droite, pour x entre zéro et cinq, et on veut la compléter à gauche. Si f est paire, on trace le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : comme si on pliait la feuille le long de l'axe. Le point S, d'abscisse deux et d'ordonnée deux, donne le point d'abscisse moins deux et d'ordonnée deux. Si f est impaire, on trace le symétrique par rapport à l'origine : on fait un demi-tour autour de O. Alors le point S donne le point d'abscisse moins deux et d'ordonnée moins deux.

La courbe tracée en bleu est une partie de la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5;5]$: on la connaît pour les abscisses de 0 à 5.

Complète cette représentation graphique dans chacun des cas suivants : a) f est paire ; b) f est impaire.



En bleu la partie donnée ; en rouge si f est paire ; en vert si f est impaire.

Un repère orthonormé d'origine O. Au palier 1, la partie connue de la courbe, en bleu, pour les abscisses de 0 à 5 : elle part de l'origine, monte jusqu'au point S d'abscisse 2 et d'ordonnée 2, puis redescend jusqu'au point d'abscisse 5 et d'ordonnée 0. Au palier 2, en rouge, la courbe complétée quand f est paire : le symétrique de la partie bleue par rapport à l'axe des ordonnées, qui monte du point d'abscisse moins 5 et d'ordonnée 0 jusqu'au point d'abscisse moins 2 et d'ordonnée 2, puis redescend à l'origine. Au palier 3, en vert, la courbe complétée quand f est impaire : le symétrique de la partie bleue par rapport à l'origine, qui descend du point d'abscisse moins 5 et d'ordonnée 0 jusqu'au point d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 2, puis remonte à l'origine.

EXEMPLE TRAITÉ

Complète la courbe dans les deux cas, en t'aidant du point $S(2;2)$.

Si f est paire — La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : le point S donne le point d'abscisse -2 et de même ordonnée.

$f(-2) = f(2) = 2$

Si f est impaire — La courbe est symétrique par rapport à l'origine : le point S donne le point d'abscisse -2 et d'ordonnée opposée.

$f(-2) = -f(2) = -2$

Toute la courbe — On fait de même pour chaque point de la partie connue : on obtient la courbe rouge si f est paire, la courbe verte si f est impaire.

À ne pas faire : f est impaire : on trace le symétrique par rapport à l'axe des abscisses — f est impaire : on trace le symétrique par rapport à l'**origine** O. Le symétrique par rapport à l'axe des abscisses garderait les mêmes abscisses que la partie connue : chaque x aurait deux images.

---

22. ACTIVITÉ

Un problème pour aller plus loin : quatre récipients

CE QU'IL DIT

Hedha problème. Quatre récipients 3andhom nafs la hauteur w nafs la capacité, vingt litres, w n3abbiwhom b nafs le robinet, b débit constant. L koll wa7ed, rsamna la hauteur mta3 el ma en fonction du temps. El quatre courbes yabdew men l'origine w youfew fi nafs le point, d'abscisse cinq et d'ordonnée quarante. Idhan na9raw elli les récipients toulhom quarante centimètres, w yelzemhom cinq minutes bech yet3abbew. Vingt litres fi cinq minutes : le débit mta3 le robinet houwa quatre litres par minute. Ama bin le début w la fin, el quatre courbes ma yatl3ouch b nafs ettari9a.

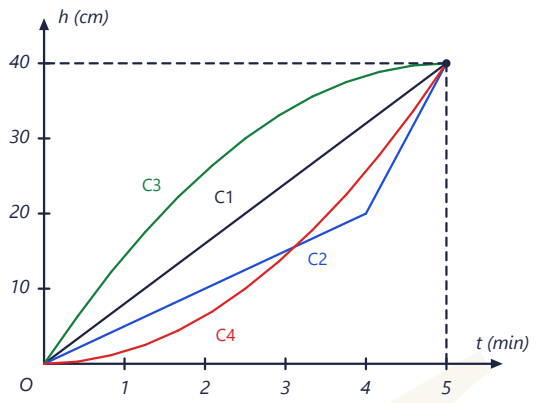
هاذا problème . quatre récipients عندهم نفس la hauteur w نفس ، vingt litres ، la capacité نعبّيوهم بنفس الـ robinet ، بـ débit constant . لكل واحد ، رسمنا la hauteur متاع الماء en fonction du temps . الـ quatre courbes يبداو من l'origine w يوفاو في نفس le point ، d'abscisse cinq et d'ordonnée quarante . إذن نقراو اللي les récipients طولهم w ، quarante centimètres يلزمهم cinq minutes باش يتعبّاو . vingt litres في cinq minutes : le débit متاع الـ robinet هو quatre litres par minute . أما بين le début w la fin ، الـ quatre courbes ما يطلعوش بنفس الطريقة .

Voici un problème. Quatre récipients ont la même hauteur et la même capacité, vingt litres, et on les remplit avec le même robinet, à débit constant. Pour chacun, on a tracé la hauteur de l'eau en fonction du temps. Les quatre courbes partent de l'origine et finissent au même point, d'abscisse cinq et d'ordonnée quarante. On lit donc que les récipients mesurent quarante centimètres de haut, et qu'il leur faut cinq minutes pour se remplir. Vingt litres en cinq minutes : le débit du robinet est de quatre litres par minute. Mais entre le début et la fin, les quatre courbes ne montent pas de la même façon.

Quatre récipients A, B, C et D ont la même hauteur et la même capacité de 20 litres. On les remplit un à un à l'aide d'un robinet à débit constant. On a représenté, pour chaque récipient, la hauteur de l'eau (en centimètres) dans le récipient en fonction du temps de remplissage écoulé (en minutes) : ce sont les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.

1. Détermine la hauteur de ces récipients.
2. Quel est le débit du robinet, en litres par minute ?

Maths à la carte
ABDELKADER MAMMAMI



La hauteur de l'eau dans chaque récipient en fonction du temps.

Un repère : en abscisse le temps t en minutes, gradué de 1 en 1 jusqu'à 5 ; en ordonnée la hauteur h de l'eau en centimètres, graduée de 10 en 10 jusqu'à 40. Quatre courbes partent de l'origine et arrivent toutes au point d'abscisse 5 et d'ordonnée 40. C1, noire, est un segment de droite. C2, bleue, est faite de deux segments : elle monte lentement jusqu'au point d'abscisse 4 et d'ordonnée 20, puis très vite. C3, verte, monte vite au début puis de plus en plus lentement. C4, rouge, monte lentement au début puis de plus en plus vite. Au palier 2, des pointillés lisent le point d'arrivée commun.

EXEMPLE TRAITÉ

Lis sur le graphique la hauteur des récipients, puis calcule le débit du robinet.

La hauteur — Les quatre courbes s'arrêtent au même point, d'ordonnée 40 : quand un récipient est plein, l'eau est à 40 centimètres.

$h = 40 \text{ cm}$

La durée — Ce point a pour abscisse 5 : chaque récipient est rempli en 5 minutes.

$t = 5 \text{ min}$

Le débit — Le robinet verse 20 litres en 5 minutes, toujours à la même vitesse.

$\frac{20}{5} = 4 \text{ litres par minute}$

À ne pas faire : Le débit est $\frac{40}{5} = 8$ litres par minute — Le débit est $\frac{20}{5} = 4$ litres par minute. 40 est une hauteur en centimètres, pas un volume : le débit compare le **volume** versé, 20 litres, à la durée.

23. APPLICATION

Exemple : à chaque récipient sa courbe

CE QU'IL DIT

Kifech nal9aw le récipient men la courbe mte3ou ? Fekra wa7da : le robinet ysobb dima nafs la quantité mta3 el ma fel minute. Win le récipient wese3, el ma yetfarrech, w le niveau yatla3 bechwaya. Win dhayya9, le niveau yatla3 fisa3. Le cylindre B 3andou nafs la largeur el koll : la courbe mte3ou droite, C un. Le récipient C wese3 louta w dhayya9 el fou9 : bechwaya w ba3d fisa3, hedhi C deux. Le récipient A yedhya9 chwaya chwaya : le niveau yatla3 asra3 w asra3, hedhi C quatre. W le récipient D yousa3 : le niveau yatla3 abta w abta, hedhi C trois.

كيفاش نلقاو الـ récipient من la courbe متاعو ؟ فكرة وحدة : الـ robinet يصبّ ديما نفس la quantité متاع الماء في الـ minute . وين الـ récipient واسع ، الماء يتفرّش ، w le niveau يطلع بالشويّة . وين ضيّق ، le niveau يطلع فيسع . le cylindre B عندو نفس la largeur الكل : la courbe متاعو C un . le récipient C droite ، w واسع لوطة w ضيّق الفوق : بالشويّة w بعد فيسع ، هاذي A le récipient . C deux يضياق شويّة le niveau : يوساع C quatre . w le récipient D هاذي ، أسرع w يطلع أسرع le niveau : شويّة w يطلع أبطى ، هاذي C trois .

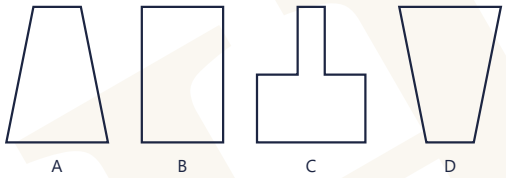
Comment retrouver le récipient à partir de sa courbe ? Une seule idée : le robinet verse toujours la même quantité d'eau par minute. Là où le récipient est large, l'eau s'étale, et le niveau monte lentement. Là où il est étroit, le niveau monte vite. Le cylindre B a la

même largeur partout : sa courbe est une droite, C un. Le récipient C est large en bas et étroit en haut : lentement puis vite, c'est C deux. Le récipient A se resserre peu à peu : le niveau monte de plus en plus vite, c'est C quatre. Et le récipient D s'élargit : le niveau monte de plus en plus lentement, c'est C trois.

On reprend les quatre récipients de 20 litres et les courbes $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_4$: $\mathcal{C}_1$ est un segment de droite ; $\mathcal{C}_2$ est faite de deux segments, le premier montant lentement, le second très vite ; $\mathcal{C}_3$ monte vite au début, puis de plus en plus lentement ; $\mathcal{C}_4$ monte lentement au début, puis de plus en plus vite.

Associe chaque récipient à la courbe qui lui correspond.

Le robinet verse toujours le même volume par minute. Là où le récipient est **large**, ce volume s'étale : le niveau monte lentement. Là où il est **étroit**, le niveau monte vite.



Les quatre récipients : même hauteur, même capacité de 20 litres.

Quatre récipients de même hauteur, vus de face. Le récipient A est large en bas et se resserre vers le haut. Le récipient B est un cylindre : il a la même largeur partout. Le récipient C est fait de deux cylindres posés l'un sur l'autre : un cylindre large pour la moitié du bas, un cylindre étroit pour la moitié du haut. Le récipient D est étroit en bas et s'élargit vers le haut.

EXEMPLE TRAITÉ

Associe chacun des récipients A, B, C et D à sa courbe.

Le récipient B — Il a la même largeur partout : le niveau monte toujours à la même vitesse, la hauteur est proportionnelle au temps.

récipient B : courbe $\mathcal{C}_1$

Le récipient C — Large en bas, étroit en haut : le niveau monte lentement pendant 4 minutes, puis vite pendant la dernière minute.

récipient C : courbe $\mathcal{C}_2$

Le récipient A — Il se resserre vers le haut : le niveau monte de plus en plus vite.

récipient A : courbe $\mathcal{C}_4$

Le récipient D — Il s'élargit vers le haut : le niveau monte de plus en plus lentement.

récipient D : courbe $\mathcal{C}_3$

À ne pas faire : Le récipient D, large en haut, va avec $\mathcal{C}_4$, la courbe qui monte le plus vite à la fin — Le récipient D va avec $\mathcal{C}_3$: en haut il est large, donc le niveau monte lentement à la fin. La courbe donne la **hauteur** de l'eau, pas la largeur du récipient : plus le récipient est large, plus la courbe est plate.

24. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : un maximum par le calcul

CE QU'IL DIT

Problème bech nemchiw ab3ed, w el marra hedhi blech courbe : nlawjou 3la le maximum w le minimum mta3 f de x égale x sur (x au carré plus un), 3la R. Ettari9a : ne5dhou a w b positifs, a inférieur à b, w nfactorisiw f de b moins f de a. Nal9aw nafs le signe

mta3 un moins a b. Bin zéro w un, le produit a b asghar men un : f croissante. Ba3d un, a b akber men un : f décroissante. Idhan le maximum houwa f de un, ya3ni un demi. W 5ater f impaire, le minimum houwa f de moins un, ya3ni moins un demi.

f de x égale x sur (x au carré plus متاع le maximum w le minimum على نلوّجو : courbe هاذي بلاش المرّة w ، أبعد نمشيو باش problème . un moins a b متاع le signe نفس نلقاو . a w b positifs ، a inférieur à b ، w nfactorisiw f de b moins f de a ناخذو : الطريقة . R على ، un) بين le produit a b ، zéro w un أصغر من un ، a b بعد . un : f croissante من un أكبر من f décroissante : un . إذن le maximum هو f de un ، يعني . moins un demi يعني ، f de moins un هو f impaire ، le minimum خاطر un demi . w

Un problème pour aller plus loin, et cette fois sans courbe : on cherche le maximum et le minimum de f de x égale x sur (x au carré plus un), sur R. La méthode : on prend a et b positifs, a inférieur à b, et on factorise f de b moins f de a. On trouve le même signe que un moins a b. Entre zéro et un, le produit a b est plus petit que un : f est croissante. Après un, a b est plus grand que un : f est décroissante. Donc le maximum est f de un, c'est-à-dire un demi. Et comme f est impaire, le minimum est f de moins un, c'est-à-dire moins un demi.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. On se propose de déterminer, si elles existent, la valeur maximale et la valeur minimale de f.

1. Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$.
2. a) Montre que $f(b) - f(a)$ a le même signe que $1 - ab$.
3. b) Déduis-en le sens de variation de f sur $[0;1]$ et sur $[1;+\infty[$.
4. c) Détermine alors la valeur maximale de f sur $[0;+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$.
5. Détermine la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$.

LA DIFFÉRENCE, FACTORISÉE

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Résous le problème, question par question.

Factoriser la différence — On réduit au même dénominateur, puis on met $b - a$ en facteur au numérateur.

$$b(a^2+1) - a(b^2+1) = (b-a) - ab(b-a) = (b-a)(1-ab)$$

Le signe — $b - a > 0$ et le dénominateur $(a^2+1)(b^2+1)$ est strictement positif : $f(b) - f(a)$ a le signe de $1 - ab$.

Sur [0 ; 1] — Si $0 \leq a < b \leq 1$, alors $ab < 1$: la différence est positive, f est croissante sur $[0;1]$.

$$1 - ab > 0 \quad \text{donc} \quad f(a) < f(b)$$

Sur [1 ; +∞[— Si $1 \leq a < b$, alors $ab > 1$: la différence est négative, f est décroissante sur $[1;+\infty[$.

$$1 - ab < 0 \quad \text{donc} \quad f(a) > f(b)$$

Le maximum — Sur $[0;+\infty[$, f est croissante jusqu'à 1, puis décroissante : son maximum est $f(1)$. Et si $x \leq 0$, alors $f(x) \leq 0$: $f(1)$ est aussi le maximum sur $\mathbb{R}$.

$$f(1) = \tfrac{1}{2}$$

Le minimum — f est impaire : $f(-x) = -f(x)$. Comme $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout réel x, on a $f(-x) \geq -\dfrac{1}{2}$ pour tout réel x.

$$f(-1) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{maximum } \tfrac{1}{2} \text{ en } 1 \quad ; \quad \text{minimum } -\tfrac{1}{2} \text{ en } -1$$

À ne pas faire : f est croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$, donc $f(1)$ est le maximum sur $\mathbb{R}$ — Il faut encore regarder les réels négatifs : si $x \leq 0$, alors $f(x) \leq 0$, qui est plus petit que $\dfrac{1}{2}$. Les variations sur $[0;+\infty[$ ne disent rien de ce qui se passe sur $]-\infty;0]$: on traite cet intervalle à part.

À ne pas faire : $f(b) - f(a)$ a le signe de $1 - ab$, donc f est croissante dès que $a < 1$ — Il faut le signe de $1 - ab$ pour **tous** les réels $a < b$ de l'intervalle étudié. Le produit ab dépend des deux réels : avec $a = 0{,}5$ et $b = 4$, on a bien $a < 1$, mais $ab = 2$ est plus grand que 1.

25. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : une aire dans un trapèze

CE QU'IL DIT

E5er problème. Trapèze rectangle ABCD, w point M yatla3 3la le côté BC. La parallèle à CD elli tet3adda men M t9oss AD fi N, w nchoufou l'aire mta3 le polygone MNDC. N7ottou CM égale x. La base ellouteniya fiha trois, la base el fou9aniya MN fiha trois moins x, w la hauteur hiya x. Idhan l'aire hiya g de x égale x fois (six moins x), le tout sur deux. Ki M yatla3 men C l B, x yzid men zéro l deux w l'aire tzid : g croissante. Le maximum mte3ha houwa g de deux, ya3ni quatre : l'aire mta3 le trapèze el koll.

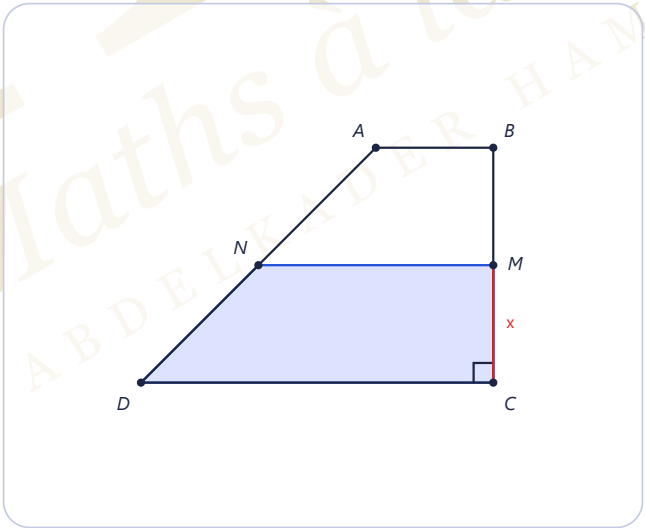
آخر M ، w point M ، trapèze rectangle ABCD . problème يطلع على le côté BC . la parallèle à CD اللي تتعدّى من M تقصّ في AD ، w N
نشوفو l'aire متاع le polygone MNDC . نحطّو la base ، la base اللوطانية فيها CM égale x . la base الفوقانية MN فيها ، w la trois moins x
هي hauteur x . إذن هي l'aire ، le tout sur deux ، g de x égale x fois (six moins x) . كي M يطلع من C لـ B ، x يزيد من zéro لـ deux w
تزيد l'aire : le maximum . g croissante متاعها هو g de deux ، يعني l'aire : quatre متاع الـ trapèze الكل .

Dernier problème. Un trapèze rectangle ABCD, et un point M qui monte le long du côté BC. La parallèle à CD passant par M coupe AD en N, et on regarde l'aire du polygone MNDC. On pose CM égale x. La base du bas mesure trois, la base du haut, MN, mesure trois moins x, et la hauteur est x. Donc l'aire est g de x égale x fois (six moins x), le tout sur deux. Quand M monte de C vers B, x augmente de zéro à deux et l'aire augmente : g est croissante. Son maximum est g de deux, c'est-à-dire quatre : l'aire du trapèze tout entier.

$ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$, tel que $AB = 1$, $BC = 2$ et $CD = 3$; le côté $[BC]$ est perpendiculaire aux bases. M est un point du segment $[BC]$. La parallèle à (CD) passant par M coupe $[AD]$ en N.

On se propose d'étudier la variation de l'aire du polygone $MNDC$ lorsque le point M varie sur le segment $[BC]$. On pose $CM = x$ et on note $g(x)$ cette aire.

1. Exprime MN en fonction de x, puis $g(x)$.
2. Avec un logiciel de géométrie, on a mesuré $CM = 0{,}66$ et une aire de $1{,}76$. Vérifie cette mesure.
3. Comment varie g sur $[0; 2]$? Quelle est sa valeur maximale ?



AB = 1, BC = 2, CD = 3 et CM = x.

Un trapèze rectangle ABCD. La grande base [DC] est en bas, D à gauche et C à droite ; la petite base [AB] est en haut ; le côté [BC], à droite, est perpendiculaire aux deux bases ; le côté [AD], à gauche, est oblique. Au palier 2, le point M est sur le côté [BC] et le point N sur le côté [AD], avec (MN) parallèle à (DC). Le polygone MNDC, la partie du bas, est coloré en bleu. La longueur CM est notée x.

EXEMPLE TRAITÉ

Réponds aux trois questions.

La longueur MN — Soit H le pied de la hauteur issue de A : $DH = 3 - 1 = 2$ et $AH = 2$. Le triangle ADH est rectangle et isocèle : à la hauteur x, le point N est décalé de x par rapport à D.

$MN = 3 - x$

L'aire — $MNDC$ est un trapèze de bases $CD = 3$ et $MN = 3 - x$, et de hauteur x.

$g(x) = \frac{(3+3-x)\times x}{2} = \frac{x(6-x)}{2}$

La mesure — Pour $x = 0{,}66$, on retrouve bien l'aire mesurée, arrondie au centième.

$g(0{,}66) = \frac{0{,}66\times 5{,}34}{2} \approx 1{,}76$

Les variations — Pour $0 \leq a < b \leq 2$, on a $a + b < 6$: la différence est positive, g est croissante sur $[0;2]$.

$g(b) - g(a) = \frac{(b-a)(6-a-b)}{2} > 0$

Le maximum — Il est atteint quand M est en B : c'est l'aire du trapèze $ABCD$ tout entier.

$g(2) = \frac{2\times 4}{2} = 4$

À ne pas faire : $g(x) = 3x$, l'aire d'un rectangle de côtés 3 et x — $g(x) = \dfrac{x(6-x)}{2}$: $MNDC$ est un trapèze, et sa petite base MN vaut $3 - x$. Le côté $[AD]$ est oblique : quand M monte, le segment $[MN]$ raccourcit, et l'aire augmente de moins en moins vite.

---

26. REMARQUE

Pour la culture : le partage des onze chevaux

CE QU'IL DIT

W fel e5er, 7keya. Rajel 5alla onze chevaux l trois wled : la moitié lel kbir, le quart lel wastani, w le sixième les-sghir. Ma tjich : el 7san ma yet9assech ! Wa7ed mel 3ayla sallefhom 7san. B douze chevaux, koll chay yji mrigel : six, trois w deux. El majmou3 onze : yo93od 7san, w moulah yrajj3ou. Esserr ? Un demi plus un quart plus un sixième égale onze douzièmes, mouch un. El wsiya ma farr9etch koll chay.

w في الآخر ، حكاية . راجل خلّى onze chevaux لـ trois أولاد : la moitié للكبير ، le quart للوسطاني ، w le sixième للصغير . ما تجيش : الحصان ما يتقصّش ! واحد من العايلة سلّفهم حصان . بـ douze chevaux ، كل شي يجي مريقل : six ، trois w deux . المجموع : onze يقعد حصان ، w مولاه يرجّعو . السرّ ؟ un demi plus un quart plus un sixième égale onze douzièmes ، موش un . الوصيّة ما فرّقتش كل شي .

Et pour finir, une histoire. Un homme laisse onze chevaux à ses trois fils : la moitié pour l'aîné, le quart pour le deuxième, et le sixième pour le plus jeune. Impossible : on ne coupe pas un cheval ! Un parent leur prête alors un cheval. Avec douze chevaux, tout tombe juste : six, trois et deux. Le total fait onze : il reste un cheval, et son propriétaire le reprend. Le secret ? Un demi plus un quart plus un sixième égale onze douzièmes, et non un. Le testament ne partageait pas tout.

Un casse-tête arabe très ancien. Un homme veut qu'à sa mort on partage ses 11 chevaux entre ses trois héritiers : l'aîné en aura la moitié, le deuxième le quart, le cadet le sixième. Le notaire est bien embarrassé : un cheval ne se coupe pas en morceaux !

Un parent résout le problème en **prêtant** un de ses chevaux. Les 12 chevaux sont alors répartis selon le testament : les trois fils reçoivent 6, 3 et 2 chevaux. Il en reste un : le parent récupère le sien.

L'explication tient dans une addition de fractions de numérateur 1, que l'on appelle des **fractions égyptiennes** : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$, et non 1. Le testament ne partageait pas tout l'héritage.

Avec trois héritiers et un cheval prêté, on démontre qu'il n'existe que sept partages de ce genre : ils correspondent à 7, 11 (de deux façons), 17, 19, 23 et 41 chevaux.

LE TESTAMENT NE PARTAGE QUE ONZE DOUZIÈMES

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$

EXEMPLE TRAITÉ

Vérifie le partage des 12 chevaux, puis fais de même avec 17 chevaux à partager en une moitié, un tiers et un neuvième.

Avec 12 chevaux — La moitié, le quart et le sixième de 12 tombent juste.

$6 + 3 + 2 = 11$

La somme des parts — On réduit au même dénominateur 12.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2}{12} = \frac{11}{12}$

Avec 17 chevaux — On prête un cheval : la moitié, le tiers et le neuvième de 18 sont 9, 6 et 2, et il reste le cheval prêté.

$9 + 6 + 2 = 17 \quad ; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. La courbe $\mathcal{C}$ de f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$, avec $x \in E$: $M(x; y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $x \in E$ et $y = f(x)$.

   > La courbe mta3 f hiya l'ensemble des points de coordonnées x et f de x. Le point de coordonnées x et y appartient à la courbe si et seulement si x est dans l'ensemble de définition et y égale f de x.
   > *La courbe de f est l'ensemble des points de coordonnées x et f de x. Le point de coordonnées x et y appartient à la courbe si et seulement si x est dans l'ensemble de définition et y égale f de x.*

2. L'image de a est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a ; les antécédents de k sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée k.

   > L'image de a hiya l'ordonnée mta3 le point d'abscisse a, w les antécédents de k houma les abscisses mta3 les points d'ordonnée k.
   > *L'image de a est l'ordonnée du point d'abscisse a, et les antécédents de k sont les abscisses des points d'ordonnée k.*

3. Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$; $f(x) < k$ là où $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la droite d'équation $y = k$.

   > Les solutions mta3 f de x égale g de x houma les abscisses mta3 les points win ezzouz courbes yetle9aw, w f de x inférieur à k win la courbe ta7t la droite y égale k.
   > *Les solutions de f de x égale g de x sont les abscisses des points où les deux courbes se rencontrent, et f de x est inférieur à k là où la courbe est sous la droite y égale k.*

4. $f(a)$ est le minimum de f sur I si $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I ; c'est le maximum si $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I.

   > f de a houwa le minimum sur I ki f de x supérieur ou égal à f de a l koll x men I, w houwa le maximum ki f de x inférieur ou égal à f de a l koll x men I.
   > *f de a est le minimum sur I quand f de x est supérieur ou égal à f de a pour tout x de I, et c'est le maximum quand f de x est inférieur ou égal à f de a pour tout x de I.*

5. f est croissante sur I si $a \leq b$ entraîne $f(a) \leq f(b)$; décroissante si $a \leq b$ entraîne $f(a) \geq f(b)$; monotone si elle est l'une ou l'autre.

   > Croissante t5alli l'ordre, décroissante tbaddlou, w monotone ma3neha wa7da mel zouz 3la l'intervalle el koll.
   > *Croissante garde l'ordre, décroissante le change, et monotone veut dire l'une des deux sur tout l'intervalle.*

6. Par le calcul : le signe de $f(x) - f(a)$ pour un maximum ou un minimum, le signe de $f(b) - f(a)$ pour le sens de variation.

   > Bel calcul : nlawjou 3la le signe mta3 f de x moins f de a lel maximum walla el minimum, w 3la le signe mta3 f de b moins f de a lel sens de variation.
   > *Par le calcul : on cherche le signe de f de x moins f de a pour un maximum ou un minimum, et le signe de f de b moins f de a pour le sens de variation.*

7. f est paire si, pour tout x de E, $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$: sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

   > f paire ki moins x fi l'ensemble de définition w f de moins x égale f de x : la courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   > *f est paire quand moins x est dans l'ensemble de définition et que f de moins x égale f de x : la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

8. f est impaire si, pour tout x de E, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$: sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

   > f impaire ki moins x fi l'ensemble de définition w f de moins x égale moins f de x : la courbe symétrique par rapport à l'origine du repère.
   > *f est impaire quand moins x est dans l'ensemble de définition et que f de moins x égale moins f de x : la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna généralités sur les fonctions. Tfakker : l'image na9rawha 3la l'axe des ordonnées, w l'antécédent 3la l'axe des abscisses. Le maximum w le minimum houma valeurs f de a, w dima 3la intervalle. Croissante t5alli l'ordre, w décroissante tbaddlou. W lel parité, nchoufou 9bal l'ensemble de définition, w ba3d f de moins x. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا généralités sur les fonctions . تفكّر : l'image نقراوها على l'antécédent ، w l'axe des ordonnées على l'axe des abscisses . le
minimum w le maximum هوما ، w valeurs f de a ديما على croissante . intervalle تخلّي décroissante ، w l'ordre تبدّلو . لل w parité ،
نشوفو قُبَلْ ، w l'ensemble de définition بعد f de moins x . exercices لل يالله .

Voilà, nous avons terminé les généralités sur les fonctions. Retiens : une image se lit sur l'axe des ordonnées, et un antécédent sur l'axe des abscisses. Le maximum et le minimum sont des valeurs f de a, et toujours sur un intervalle. Croissante garde l'ordre, et décroissante le change. Et pour la parité, on regarde d'abord l'ensemble de définition, puis f de moins x. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · POUR COMPRENDRE : L'ENSEMBLE DE DÉFINITION

kifech nal9a l'ensemble de définition | comment trouver l'ensemble de définition d'une fonction | chnowa l'ensemble de définition | domaine de définition kifech nal9ah

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$\frac{1}{u}$: $u \neq 0$; $\sqrt{u}$: $u \geq 0$

CE QU'IL RÉPOND

L'ensemble de définition houwa les réels x el koll elli f de x mawjoud fihom. Zouz 7ajet nthabbtou fihom : le dénominateur ma yelzemch ykoun nul, w elli ta7t racine carrée lezem ykoun positif walla nul. Nabdew men l'ensemble de départ, w nna77iw les réels el koll elli fihom mochkel.

l'ensemble de définition هو les réels x الكل اللي f de x موجود فيهم . زوز حاجات نثبّتو فيهم : le dénominateur ما يلزمش يكون nul ، w
اللي تحت racine carrée لازم يكون positif ولّا nul . نبداو من ، w l'ensemble de départ ننحّيو les réels الكل اللي فيهم مشكل .

L'ensemble de définition, ce sont tous les réels x pour lesquels f de x existe. Deux choses à surveiller : un dénominateur ne doit pas être nul, et ce qui est sous une racine carrée doit être positif ou nul. On part de l'ensemble de départ, et on retire tous les réels qui posent problème.

QUESTION 2 · POUR COMPRENDRE : L'ENSEMBLE DE DÉFINITION

3lech le dénominateur ma ynajjemch ykoun zéro | pourquoi le dénominateur ne doit pas être nul | dénominateur nul chnowa na3mel | valeur interdite c'est quoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x - 3 = 0 \iff x = 3$$

CE QU'IL RÉPOND

Ma najjmouch ndivisiw 3la zéro. Idhan win le dénominateur ysewi zéro, la fonction ma 3andhech image : hedhi valeur interdite, w nna77iwha men l'ensemble de définition. Mathalan, fi $\dfrac{x}{x - 3}$, n7ellou $x - 3 = 0$: la valeur interdite hiya 3.

ما نجّموش ndivisiw على zéro . إذن وين le dénominateur يساوي zéro ، الـ fonction ما عندهاش image : هاذي w ، valeur interdite ننحّيوها من l'ensemble de définition . مثلا ، في x sur (x moins trois) ، نحلّو x moins trois égale zéro : la valeur interdite هي trois .

On ne peut pas diviser par zéro. Donc là où le dénominateur vaut zéro, la fonction n'a pas d'image : c'est une valeur interdite, et on la retire de l'ensemble de définition. Par exemple, dans x sur (x moins trois), on résout x moins trois égale zéro : la valeur interdite est trois.

QUESTION 3 · REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

chnowa la courbe représentative mta3 fonction | c'est quoi la représentation graphique d'une fonction | courbe représentative c'est quoi | définition de la représentation graphique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$M(x; f(x)), \quad x \in E$$

CE QU'IL RÉPOND

La courbe représentative mta3 fonction f, hiya l'ensemble mta3 les points el koll de coordonnées $(x ; f(x))$, ki x yet3adda 3la l'ensemble de définition. Koll point men la courbe ya3tina réel w l'image mte3ou : l'abscisse hiya x, w l'ordonnée hiya f(x). W nsammiwha zeda la représentation graphique de f.

la courbe représentative متاع fonction f ، هي l'ensemble متاع les points الكل de coordonnées x et f de x ، كي x يتعدّى على l'ensemble de définition . كل point من الـ courbe يعطينا réel w l'image متاعو : l'abscisse هي x ، w هي l'ordonnée . f de x نسمّيوها la représentation graphique de f زادة .

La courbe représentative d'une fonction f, c'est l'ensemble de tous les points de coordonnées x et f de x, quand x parcourt l'ensemble de définition. Chaque point de la courbe donne un réel et son image : l'abscisse est x, et l'ordonnée est f de x. On l'appelle aussi la représentation graphique de f.

QUESTION 4 · REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

kifech na3ref point 3la la courbe walla le | comment savoir si un point appartient à la courbe | point appartient à la courbe kifech nthabbet | vérifier qu'un point est sur la courbe

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(1) = 2 - 3 = -1 \;\Rightarrow\; A(1; -1) \in \mathcal{C}$$

CE QU'IL RÉPOND

Na7sbou l'image mta3 l'abscisse mta3 le point, w nchoufouha m3a l'ordonnée mte3ou. Ken yetsewew, le point 3la la courbe ; ken le, mouch 3liha. Mathalan, m3a $f(x) = 2x^{2} - 3x$, le point $A(1 ; -1)$ 3la la courbe, 5ater $f(1) = -1$. W rodd belek : valeur approchée ma tekfich, lezem l'égalité tkoun exacte.

نحسبو l'image متاع l'abscisse متاع الـ w ، point نشوفوها مع l'ordonnée متاعو . كان يتساواو ، الـ point على الـ courbe ؛ كان لا ، موش عليها . مثلا ، مع le point de coordonnées un et moins un ، f de x égale deux x au carré moins trois x ، على الـ courbe ، خاطر f de un égale moins un . w ردّ بالك : valeur approchée ما تكفيش ، لازم l'égalité تكون exacte .

On calcule l'image de l'abscisse du point, et on la compare à son ordonnée. Si elles sont égales, le point est sur la courbe ; sinon, il n'y est pas. Par exemple, avec f de x égale deux x au carré moins trois x, le point de coordonnées un et moins un est sur la courbe, car f de un égale moins un. Et attention : une valeur approchée ne suffit pas, il faut que l'égalité soit exacte.

QUESTION 5 · POUR COMPRENDRE : UNE COURBE, UNE FONCTION ?

3lech le cercle mouch courbe mta3 fonction | pourquoi un cercle ne représente pas une fonction | est-ce que toute courbe représente une fonction | le cercle courbe mta3 fonction walla le

CE QU'IL RÉPOND

Mouch koll courbe hiya courbe mta3 fonction, w le cercle mouch courbe mta3 fonction, 5ater la fonction ta3ti l koll x, image wa7da 3al akthar. 3la cercle, droite verticale t9oss la courbe fi zouz points : nafs l'abscisse ywalli 3andha zouz ordonnées, ya3ni zouz images. Hedha ma yjich. Le test : ken verticale t9oss la courbe fi akthar men point, mouch courbe mta3 fonction.

موش كل courbe هي courbe متاع le cercle ، w موش fonction courbe متاع fonction ، خاطر الـ fonction تعطي لكل image ، x وحدة على الأكثر . هذا يعني زوز images ، ordonnées زوز عندها يولّي l'abscisse نفس : points في زوز courbe الـ تقصّ cercle ، droite verticale على . ما يجيش الـ test : كان verticale تقصّ الـ courbe في أكثر من point ، موش courbe متاع fonction .

Une courbe n'est pas toujours la courbe d'une fonction, et le cercle n'en est pas une, parce qu'une fonction donne à chaque x une image au plus. Sur un cercle, une droite verticale coupe la courbe en deux points : la même abscisse aurait deux ordonnées, donc deux images. C'est impossible. Le test : si une verticale coupe la courbe en plus d'un point, ce n'est pas la courbe d'une fonction.

QUESTION 6 · LIRE UNE COURBE : IMAGES ET ANTÉCÉDENTS

chnowa el far9 bin image w antécédent | quelle est la différence entre image et antécédent | image w antécédent kifech nfar9 binethom | image et antécédent c'est quoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(x) = k : \quad k \text{ est l'image de } x, \quad x \text{ est un antécédent de } k$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image hiya ennatija : nabdew men x w na7sbou f(x). L'antécédent houwa ettri9 bel 3aks : nabdew men nombre k, w nlawjou 3la les x elli $f(x) = k$. Koll réel men l'ensemble de définition 3andou image wa7da berk, ama nombre ynajjem ykoun 3andou barcha antécédents, walla 7atta wa7ed. 3la la courbe, l'image na9rawha 3la l'axe des ordonnées, w les antécédents 3la l'axe des abscisses.

l'image هي النتيجة : نبداو من x w نحسبو f de x . l'antécédent هو الطريق بالعكس : نبداو من w ، nombre k نلوّجو على les x اللي f de x égale k متاعهم . كل réel من l'ensemble de définition عندو image وحدة برك ، أما nombre ينجّم يكون عندو برشا antécédents ، ولّا حتّى واحد . على الـ l'image ، courbe نقراوها على les antécédents ، w l'axe des ordonnées على l'axe des abscisses .

L'image, c'est le résultat : on part de x et on calcule f de x. L'antécédent, c'est le chemin inverse : on part d'un nombre k, et on cherche les x tels que f de x égale k. Un réel de l'ensemble de définition a une seule image, mais un nombre peut avoir plusieurs antécédents, ou aucun. Sur la courbe, l'image se lit sur l'axe des ordonnées, et les antécédents sur l'axe des abscisses.

QUESTION 7 · LIRE UNE COURBE : IMAGES ET ANTÉCÉDENTS

kifech na9ra l'image 3la la courbe | comment lire l'image d'un nombre sur le graphique | lire une image graphiquement | image mta3 nombre 3la la courbe kifech nal9aha

CE QU'IL RÉPOND

Nal9aw le nombre 3la l'axe des abscisses. Natl3ou, walla nahbtou, à la verticale 7atta lel courbe. W ba3d nemchiw à l'horizontale l l'axe des ordonnées, w na9raw l'image ghadi. Dima nabdew men l'axe des abscisses, w noufew 3la l'axe des ordonnées.

نلقاو الـ nombre على l'axe des abscisses . نطلعو ، ولّا نهبطو ، à la verticale حتّى للـ w . courbe بعد نمشيو à l'horizontale لـ l'axe des ordonnées ، w نقراو l'image غادي . ديما نبداو من w ، l'axe des abscisses نوفاو على l'axe des ordonnées .

On repère le nombre sur l'axe des abscisses. On monte, ou on descend, à la verticale jusqu'à la courbe. Puis on part à l'horizontale vers l'axe des ordonnées, et on y lit l'image. On part toujours de l'axe des abscisses, et on finit sur l'axe des ordonnées.

QUESTION 8 · LIRE UNE COURBE : IMAGES ET ANTÉCÉDENTS

kifech nal9a les antécédents 3la la courbe | comment lire les antécédents sur le graphique | antécédents graphiquement kifech | antécédent mta3 nombre 3la la courbe

CE QU'IL RÉPOND

Nal9aw le nombre k 3la l'axe des ordonnées, w nrasmou la droite horizontale elli tet3adda men k. Nchoufou les points el koll win t9oss la courbe, w na9raw les abscisses mte3hom : hedhom les antécédents de k. Ynajjem ykoun famma wa7ed, barcha, walla 7atta wa7ed ken l'horizontale ma tetle9ech m3a la courbe.

نلقاو الـ nombre k على l'axe des ordonnées ، w نرسمو la droite horizontale اللي تتعدّى من k . نشوفو les points الكل وين تقصّ الـ courbe ، w نقراو les abscisses متاعهم : هاذم les antécédents de k . ينجّم يكون فمّا واحد ، برشا ، ولّا حتّى واحد كان الـ horizontale ما تتلاقاش مع الـ courbe .

On repère le nombre k sur l'axe des ordonnées, et on trace la droite horizontale qui passe par k. On regarde tous les points où elle coupe la courbe, et on lit leurs abscisses : ce sont les antécédents de k. Il peut y en avoir un, plusieurs, ou aucun si l'horizontale ne rencontre pas la courbe.

QUESTION 9 · LIRE UNE COURBE : IMAGES ET ANTÉCÉDENTS

kifech n7ell équation graphiquement | comment résoudre graphiquement l'équation f(x) = k | résoudre une équation avec la courbe | résolution graphique d'une équation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(x) = k \iff x \text{ est l'abscisse d'un point de la courbe d'ordonnée } k$$

CE QU'IL RÉPOND

Bech n7ellou graphiquement $f(x) = k$, nlawjou 3la les antécédents de k. Nrasmou la droite horizontale de hauteur k, w na9raw les abscisses mta3 les points win t9oss la courbe. Ken ma fammech 7atta point commun, l'équation ma 3andhech solution. W rodd belek : les solutions houma abscisses, mouch ordonnées.

باش نحلّو graphiquement f de x égale k ، نلوّجو على les antécédents de k . نرسمو la droite horizontale de hauteur k ، w نقراو les abscisses متاع les points وين تقصّ الـ courbe . كان ما فمّاش حتّى point commun ، l'équation ما عندهاش w . solution ردّ بالك : les abscisses هوما solutions ، موش ordonnées .

Résoudre graphiquement f de x égale k, c'est chercher les antécédents de k. On trace la droite horizontale de hauteur k, et on lit les abscisses des points où elle coupe la courbe. S'il n'y a aucun point commun, l'équation n'a pas de solution. Et attention : les solutions sont des abscisses, pas des ordonnées.

QUESTION 10 · LIRE UNE COURBE : IMAGES ET ANTÉCÉDENTS

kifech n7ell inéquation graphiquement | comment résoudre graphiquement l'inéquation f(x) < 0 | résoudre une inéquation avec la courbe | résolution graphique d'une inéquation

CE QU'IL RÉPOND

Nchoufou la position mta3 la courbe par rapport à droite horizontale. L $f(x) < 0$, nlawjou 3la les parties mta3 la courbe elli ta7t l'axe des abscisses, w na9raw les abscisses mte3hom : ya3tina intervalle, walla réunion d'intervalles. W ken l'inégalité stricte, nna77iw les abscisses win la courbe tmess la droite.

نشوفو la position متاع الـ courbe par rapport à droite horizontale . لـ f de x strictement inférieur à zéro ، نلوّجو على les parties متاع الـ courbe اللي تحت l'axe des abscisses ، w نقراو les abscisses متاعهم : يعطينا intervalle ، ولّا w . réunion d'intervalles كان l'inégalité ، ننحّيو les abscisses وين الـ courbe تمسّ الـ droite .

On regarde la position de la courbe par rapport à une droite horizontale. Pour f de x strictement inférieur à zéro, on cherche les parties de la courbe situées sous l'axe des abscisses, et on lit leurs abscisses : cela donne un intervalle, ou une réunion d'intervalles. Et si l'inégalité est stricte, on enlève les abscisses où la courbe touche la droite.

QUESTION 11 · EXEMPLE : COMPARER DEUX FONCTIONS SUR UN GRAPHIQUE

kifech n7ell f(x) = g(x) graphiquement | comment résoudre f(x) égale g(x) avec les deux courbes | les points d'intersection des courbes de f et g chnowa ma3nehom | f(x) = g(x) 3la le graphique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(x) = g(x) \iff x \text{ est l'abscisse d'un point commun à } \mathcal{C}_f \text{ et } \mathcal{C}_g$$

CE QU'IL RÉPOND

Les solutions mta3 $f(x) = g(x)$, houma les abscisses mta3 les points win ezzouz courbes yetle9aw. W bin les points hedhom, ncompariw : win la courbe mta3 f fou9 la courbe mta3 g, f(x) akber men g(x) ; w win hiya ta7tha, f(x) asghar men g(x).

ncompariw ، هاذم les points بين w . يتلاقاو courbes وين الزوز les points متاع les abscisses هوما ، f de x égale g de x متاع les solutions وين : la courbe f متاع la courbe فوق f de x متاع la courbe ، g أكبر من g de x ؛ w وين هي تحتها ، f de x أصغر من g de x .

Les solutions de f de x égale g de x sont les abscisses des points où les deux courbes se rencontrent. Et entre ces points, on compare : là où la courbe de f est au-dessus de la courbe de g, f de x est plus grand que g de x ; et là où elle est au-dessous, f de x est plus petit que g de x.

QUESTION 12 · MAXIMUM ET MINIMUM

chnowa le maximum mta3 fonction | c'est quoi le maximum d'une fonction | définition du maximum | maximum d'une fonction chnowa ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(x) \leq f(a) \text{ pour tout } x \in I$$

CE QU'IL RÉPOND

f(a) houwa le maximum mta3 f 3la intervalle I, ki l koll x men I, $f(x) \le f(a)$. Hiya akber valeur te5edhha la fonction 3la l'intervalle hedha. 3la la courbe, hiya l'ordonnée mta3 le point el a3la.

على fonction الـ تاخذها valeur أكبر هي . I ، f de x inférieur ou égal à f de a من x لكل كي ، intervalle I على f متاع le maximum هو f de a الـ intervalle هذا . على الـ courbe ، هي l'ordonnée متاع le point الأعلى .

f de a est le maximum de f sur un intervalle I quand, pour tout x de I, f de x est inférieur ou égal à f de a. C'est la plus grande valeur que prend la fonction sur cet intervalle. Sur la courbe, c'est l'ordonnée du point le plus haut.

QUESTION 13 · MAXIMUM ET MINIMUM

chnowa le minimum mta3 fonction | c'est quoi le minimum d'une fonction | définition du minimum | minimum d'une fonction chnowa ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(x) \geq f(a) \text{ pour tout } x \in I$$

CE QU'IL RÉPOND

f(a) houwa le minimum mta3 f 3la intervalle I, ki l koll x men I, $f(x) \ge f(a)$. Hiya asghar valeur te5edhha la fonction 3la l'intervalle hedha. 3la la courbe, hiya l'ordonnée mta3 le point el awta.

fonction الـ تاخذها valeur أصغر هي . I ، f de x supérieur ou égal à f de a من x لكل كي ، intervalle I على f متاع le minimum هو f de a على الـ intervalle هذا . على الـ courbe ، هي l'ordonnée متاع le point الأوطى .

f de a est le minimum de f sur un intervalle I quand, pour tout x de I, f de x est supérieur ou égal à f de a. C'est la plus petite valeur que prend la fonction sur cet intervalle. Sur la courbe, c'est l'ordonnée du point le plus bas.

QUESTION 14 · MAXIMUM ET MINIMUM

le maximum houwa a walla f(a) | le minimum est-ce a ou f(a) | maximum : l'abscisse ou l'ordonnée

le minimum yet9ra 3la l'axe des abscisses walla des ordonnées

CE QU'IL RÉPOND

Le maximum, walla le minimum, houwa dima valeur mta3 la fonction : houwa le nombre f(a), w na9rawh 3la l'axe des ordonnées. Ama le réel a, houwa el blasa win nal9aw la valeur hedhi : na9rawh 3la l'axe des abscisses. N9oulou : f admet un maximum en a, égal à f(a).

le réel a أما . l'axe des ordonnées على نقراوه le nombre f de a ، w هو : fonction متاع الـ valeur هو ديما ، le minimum ولّا ، le maximum هو البلاصة وين نلقاو الـ valeur هاذي : نقراوه على . l'axe des abscisses نقولو : f admet un maximum en a ، égal à f de a .

Le maximum, ou le minimum, est toujours une valeur de la fonction : c'est le nombre f de a, et on le lit sur l'axe des ordonnées. Le réel a, lui, est l'endroit où cette valeur est atteinte : on le lit sur l'axe des abscisses. On dit : f admet un maximum en a, égal à f de a.

QUESTION 15 · MAXIMUM ET MINIMUM

kifech nbayyen elli f(a) minimum bel calcul | comment démontrer qu'une fonction admet un minimum | prouver un maximum par le calcul | kifech nthabbet le maximum bel calcul

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(x) - f(-1) = (x+1)^2 \geq 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Na7sbou la différence $f(x) - f(a)$, w nlawjou 3la le signe mte3ha. Ken positive walla nulle l koll x men l'intervalle, f(a) houwa le minimum. Ken négative walla nulle, f(a) houwa le maximum. Mathalan, l $f(x) = x^{2} + 2x - 3$, $f(x) - f(-1) = (x + 1)^{2}$, dima positif walla nul : le minimum houwa $f(-1) = -4$.

نحسبو w ، f de a la différence f de x moins f de a نلوّجو على le signe متاعها . كان positive ولّا nulle لكل x من الـ ، f de a هو intervalle le . minimum كان négative ولّا nulle ، f de a هو le maximum . مثلا ، لـ f de x moins f de f de x égale x au carré plus deux x moins trois ، يعني moins quatre ، f de moins un هو nul : le minimum ولّا positif ديما ، moins un égale (x plus un) au carré .

On calcule la différence f de x moins f de a, et on cherche son signe. Si elle est positive ou nulle pour tout x de l'intervalle, f de a est le minimum. Si elle est négative ou nulle, f de a est le maximum. Par exemple, pour f de x égale x au carré plus deux x moins trois, f de x moins f de moins un égale (x plus un) au carré, toujours positif ou nul : le minimum est f de moins un, c'est-à-dire moins quatre.

QUESTION 16 · EXEMPLE : UN MAXIMUM SUR UN INTERVALLE, PAS SUR R

le maximum sur un intervalle houwa le maximum sur R | maximum 3la intervalle w maximum 3la R kif kif | pourquoi préciser l'intervalle pour un maximum | le minimum yetbaddel ki nbaddlou l'intervalle

CE QU'IL RÉPOND

Le maximum sur un intervalle mouch bedharoura le maximum sur R : le maximum walla le minimum yet3alle9 bel intervalle elli nchoufou fih la fonction. 3la intervalle sghir, le point el a3la ynajjem ykoun 3andou ordonnée deux, w ab3ed chwaya la courbe tatla3 akthar barcha. 3la hedheka dima n9oulou : le maximum de f sur l'intervalle I.

le maximum sur un intervalle موش بالضرورة le maximum sur R : le maximum ولّا le minimum يتعلّق بالـ intervalle اللي نشوفو فيه الـ . fonction على intervalle صغير ، le point الأعلى ينجّم يكون عندو w ، ordonnée deux أبعد شويّة الـ courbe تطلع أكثر برشا . على هذاكا ديما نقولو : le maximum de f sur l'intervalle I .

Le maximum sur un intervalle n'est pas forcément le maximum sur R : un maximum ou un minimum dépend de l'intervalle sur lequel on regarde la fonction. Sur un petit intervalle, le point le plus haut peut avoir pour ordonnée deux, alors qu'un peu plus loin la courbe monte beaucoup plus haut. C'est pour cela qu'on dit toujours : le maximum de f sur l'intervalle I.

QUESTION 17 · SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

chnowa fonction croissante | c'est quoi une fonction croissante | définition d'une fonction croissante | fonction croissante chnowa ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

CE QU'IL RÉPOND

f croissante sur intervalle I, ki t5alli l'ordre kima houwa : l koll a w b men I, ken $a \le b$, $f(a) \le f(b)$. Koll ma x yekber, l'image mte3ou tekber. 3la la courbe nchoufouha : tatla3 ki nemchiw men el isar lel imin.

f croissante sur intervalle I ، كي تخلّي l'ordre كيما هو : لكل a w b من I ، كان f de a inférieur ou égal à f de b ، a inférieur ou égal à b . كل x يكبر ، l'image متاعو تكبر . على الـ courbe نشوفوها : تطلع كي نمشيو من اليسار لليمين .

f est croissante sur un intervalle I quand elle garde l'ordre : pour tous a et b de I, si a est inférieur ou égal à b, alors f de a est inférieur ou égal à f de b. Plus x est grand, plus son image est grande. Sur la courbe, on le voit : elle monte quand on va de gauche à droite.

QUESTION 18 · SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

chnowa fonction décroissante | c'est quoi une fonction décroissante | définition d'une fonction décroissante | fonction décroissante chnowa ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

CE QU'IL RÉPOND

f décroissante sur intervalle I, ki tbaddel l'ordre : l koll a w b men I, ken $a \le b$, $f(a) \ge f(b)$. Koll ma x yekber, l'image mte3ou tesgher. 3la la courbe nchoufouha : tahbet ki nemchiw men el isar lel imin.

f décroissante sur intervalle I ، كي تبدّل l'ordre : لكل a w b من I ، كان f de a supérieur ou égal à f de b ، a inférieur ou égal à b . كل x يكبر ، l'image متاعو تصغر . على الـ courbe نشوفوها : تهبط كي نمشيو من اليسار لليمين .

f est décroissante sur un intervalle I quand elle change l'ordre : pour tous a et b de I, si a est inférieur ou égal à b, alors f de a est supérieur ou égal à f de b. Plus x est grand, plus son image est petite. Sur la courbe, on le voit : elle descend quand on va de gauche à droite.

QUESTION 19 · SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

chnowa fonction monotone | c'est quoi une fonction monotone | monotone chnowa ma3neha | fonction monotone sur un intervalle

CE QU'IL RÉPOND

Fonction monotone sur intervalle, hiya fonction ma tbaddelch le sens mte3ha 3la l'intervalle hedha : ya croissante 3lih, ya décroissante 3lih. Fonction tatla3 w ba3d tahbet 3la l'intervalle, mouch monotone 3lih.

fonction monotone sur intervalle ، هي fonction ما تبدّلش le sens متاعها على الـ intervalle هذا : يا croissante عليه ، يا décroissante عليه . fonction تطلع w بعد تهبط على الـ intervalle ، موش monotone عليه .

Une fonction est monotone sur un intervalle quand elle ne change pas de sens sur cet intervalle : ou bien elle y est croissante, ou bien elle y est décroissante. Une fonction qui monte puis descend sur l'intervalle n'y est pas monotone.

QUESTION 20 · SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

chnowa fonction constante | c'est quoi une fonction constante | fonction constante kifech la courbe mte3ha | constante chnowa ma3neha

CE QU'IL RÉPOND

Fonction constante sur intervalle, hiya fonction les réels el koll mta3 l'intervalle 3andhom fiha nafs l'image : $f(a) = f(b)$ l koll a w b. La courbe mte3ha horizontale, parallèle à l'axe des abscisses. Mathalan, fonction les images mte3ha el koll ysewiw moins deux.

fonction constante sur intervalle ، هي fonction les réels الكل متاع الـ intervalle عندهم فيها نفس l'image : f de a égale f de b لكل a w b . la courbe متاعها b ، parallèle à l'axe des abscisses ، horizontale . مثلا ، fonction les images متاعها الكل يساويو moins deux .

Une fonction est constante sur un intervalle quand tous les réels de cet intervalle ont la même image : f de a égale f de b pour tous a et b. Sa courbe est alors horizontale, parallèle à l'axe des abscisses. Par exemple, une fonction dont toutes les images valent moins deux.

QUESTION 21 · SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

kifech nbayyen elli fonction croissante bel calcul | comment démontrer qu'une fonction est décroissante | étudier le sens de variation par le calcul | kifech nal9a le signe de f(b) - f(a)

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(b) - f(a) \geq 0 \Rightarrow f \text{ croissante}$$
$$f(b) - f(a) \leq 0 \Rightarrow f \text{ décroissante}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ne5dhou zouz réels a w b men l'intervalle, $a \le b$, w nlawjou 3la le signe mta3 $f(b) - f(a)$. Ken la différence hedhi dima positive walla nulle, f croissante. Ken dima négative walla nulle, f décroissante. Fi aghlab el wa9t, nfactorisiw b $b - a$, elli houwa positif, w nlawjou 3la le signe mta3 le facteur le5er.

ناخذو زوز réels a w b من الـ a inférieur ou égal à b ، w نلوّجو على signe متاع le intervalle ، كان la différence هاذي . f de b moins f de a
اللي هو b moins a بـ nfactorisiw ، في أغلب الوقت . nulle ، f décroissante ولّا négative كان ديما . nulle ، f croissante ولّا positive ديما
w ، positif نلوّجو على signe متاع le facteur le الآخر .

On prend deux réels a et b de l'intervalle, avec a inférieur ou égal à b, et on cherche le signe de f de b moins f de a. Si cette différence est toujours positive ou nulle, f est croissante. Si elle est toujours négative ou nulle, f est décroissante. Le plus souvent, on factorise par b moins a, qui est positif, et on cherche le signe de l'autre facteur.

QUESTION 22 · SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

fonction croissante ma3neha positive | est-ce qu'une fonction décroissante est négative | croissante w positive kif kif | décroissante ma3neha f(x) négatif

CE QU'IL RÉPOND

Le, hedhom zouz afkar mo5talfin. Croissante walla décroissante, tchouf les images m3a b3adhhom : yzidou walla yon9sou. Positive walla négative, tchouf les images m3a zéro. Fonction tnajjem tkoun décroissante w positive : mathalan, $-x^{2} + 4x + 1$, décroissante ba3d 2, w m3a hedha $f(2) = 5$.

لا ، هاذم زوز أفكار مختلفين . croissante ولّا décroissante ، تشوف les images مع بعضهم : يزيدو ولّا ينقصو . positive ولّا négative ، تشوف
بعد moins x au carré plus quatre x plus un ، décroissante ، مثلا : décroissante w positive تنجّم تكون zéro . fonction مع les images
w ، deux مع هذا cinq égale deux de f .

Non, ce sont deux idées différentes. Croissante ou décroissante, cela compare les images entre elles : est-ce qu'elles augmentent ou qu'elles diminuent. Positive ou négative, cela compare les images à zéro. Une fonction peut être décroissante et positive : par exemple, moins x au carré plus quatre x plus un est décroissante après deux, et pourtant f de deux égale cinq.

QUESTION 23 · DÉCRIRE LES VARIATIONS À PARTIR D'UNE COURBE

kifech na9ra les variations 3la la courbe | comment décrire les variations d'une fonction à partir de sa courbe | sens de variation graphiquement | les variations mta3 fonction men le graphique

CE QU'IL RÉPOND

Netabb3ou la courbe men el isar lel imin. Ma demha tatla3, la fonction croissante ; ma demha tahbet, décroissante ; w ken horizontale, la fonction constante. N9ayydou les abscisses win la courbe tbaddel 7alha, w na3tiw el jaweb intervalle par intervalle, dima bel abscisses.

نتبّعو الـ courbe من اليسار لليمين . ما دامها تطلع ، الـ fonction croissante ؛ ما دامها تهبط ، décroissante ؛ w كان horizontale ، الـ fonction constante . نقيّدو les abscisses وين الـ courbe تبدّل حالها ، w نعطيو الجواب intervalle par intervalle ، ديما بالـ abscisses .

On suit la courbe de gauche à droite. Tant qu'elle monte, la fonction est croissante ; tant qu'elle descend, elle est décroissante ; et si elle est horizontale, la fonction est constante. On note les abscisses où la courbe change d'allure, et on donne la réponse intervalle par intervalle, toujours avec des abscisses.

QUESTION 24 · FONCTION PAIRE

chnowa fonction paire | c'est quoi une fonction paire | définition d'une fonction paire | fonction paire chnowa ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(-x) = f(x)$$

CE QU'IL RÉPOND

Fonction f paire, ki zouz conditions s7a7 l koll x men l'ensemble de définition mte3ha : moins x zeda fi l'ensemble de définition, w $f(-x) = f(x)$. Ya3ni zouz réels opposés 3andhom nafs l'image. W la courbe mte3ha symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Mathalan : x^{2}.

fonction f paire ، كي زوز conditions صحاح لكل x من l'ensemble de définition متاعها : moins x زادة في f ، w l'ensemble de définition . de moins x égale f de x يعني زوز réels opposés عندهم نفس ordonnées . مثلا : x au carré . w la courbe symétrique par rapport à l'axe des متاعها l'image .

Une fonction f est paire quand deux conditions sont vraies pour tout x de son ensemble de définition : moins x est aussi dans l'ensemble de définition, et f de moins x égale f de x. Autrement dit, deux réels opposés ont la même image. Sa courbe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Exemple : x au carré.

QUESTION 25 · FONCTION IMPAIRE

chnowa fonction impaire | c'est quoi une fonction impaire | définition d'une fonction impaire | fonction impaire chnowa ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(-x) = -f(x)$$

CE QU'IL RÉPOND

Fonction f impaire, ki zouz conditions s7a7 l koll x men l'ensemble de définition mte3ha : moins x zeda fi l'ensemble de définition, w $f(-x) = -f(x)$. Ya3ni zouz réels opposés 3andhom images opposées. W la courbe mte3ha symétrique par rapport à l'origine du repère. Mathalan : x^{3}.

fonction f impaire ، كي زوز conditions صحاح لكل x من l'ensemble de définition متاعها : moins x زادة في f ، w l'ensemble de définition . f de moins x égale moins f de x يعني زوز réels opposés عندهم images opposées . w la courbe symétrique par rapport à متاعها l'origine du repère . مثلا : x au cube .

Une fonction f est impaire quand deux conditions sont vraies pour tout x de son ensemble de définition : moins x est aussi dans l'ensemble de définition, et f de moins x égale moins f de x. Autrement dit, deux réels opposés ont des images opposées. Sa courbe est alors symétrique par rapport à l'origine du repère. Exemple : x au cube.

QUESTION 26 · ÉTUDIER LA PARITÉ D'UNE FONCTION

fonction tnajjem tkoun ni paire ni impaire | est-ce que toute fonction est paire ou impaire | fonction mouch paire lezem tkoun impaire | ni paire ni impaire kifech nbayyenha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(1) = 2 \quad ; \quad f(-1) = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Fonction tnajjem tkoun ni paire ni impaire, w hedha ysir barcha : paire w impaire mouch contraires. Mathalan, $f(x) = x^{2} + x$: $f(1) = 2$ w $f(-1) = 0$. Ezzouz images hedhom la égales la opposées, idhan f ni paire ni impaire. Contre-exemple wa7ed yekfi

bech nbayynouha.

f de x égale x au carré plus x : f de ، مثلا . contraires موش paire w impaire : هذا يصير برشا ni paire ni impaire ، w تنجّم تكون fonction واحد f ni paire ni impaire . contre-exemple إذن ، opposées لا égales هاذم لا images الزوز . un égale deux w f de moins un égale zéro يكفي باش نبيّنوها .

Une fonction peut n'être ni paire ni impaire, et cela arrive souvent : paire et impaire ne sont pas des contraires. Par exemple, f de x égale x au carré plus x : f de un égale deux et f de moins un égale zéro. Ces deux images ne sont ni égales ni opposées, donc f n'est ni paire ni impaire. Un seul contre-exemple suffit pour le montrer.

QUESTION 27 · ÉTUDIER LA PARITÉ D'UNE FONCTION

kifech nedres la parité mta3 fonction | comment étudier la parité d'une fonction | méthode pour la parité | parité kifech nal9aha

CE QU'IL RÉPOND

Trois étapes. 9bal, l'ensemble de définition : lezem ykoun fih moins x koll ma fih x ; ken le, la fonction ni paire ni impaire. Ba3d na7sbou $f(-x)$. Ken l9ina $f(x)$, la fonction paire ; ken l9ina $-f(x)$, hiya impaire. W ken la hedhi la hedhika, na3tiw contre-exemple bel nombres.

f بعد نحسبو . fonction ni paire ni impaire الـ ، كان لا ؛ x كل ما فيه moins x لازم يكون فيه : l'ensemble de définition ، قُبَلْ . trois étapes . de moins x كان لقينا f de x ، الـ fonction paire ؛ كان لقينا moins f de x ، هي . w impaire كان لا هاذي لا هاذيكا ، نعطيو contre-exemple بالـ nombres .

Trois étapes. D'abord l'ensemble de définition : il doit contenir moins x chaque fois qu'il contient x ; sinon, la fonction n'est ni paire ni impaire. Ensuite on calcule f de moins x. Si on trouve f de x, la fonction est paire ; si on trouve moins f de x, elle est impaire. Et si ce n'est ni l'un ni l'autre, on donne un contre-exemple avec des nombres.

QUESTION 28 · FONCTION PAIRE

la courbe mta3 fonction paire symétrique par rapport à quoi | fonction paire : quelle symétrie pour la courbe | symétrie de la courbe d'une fonction paire | courbe fonction paire kifech tji

CE QU'IL RÉPOND

Par rapport à l'axe des ordonnées. Ken f paire, les points elli les abscisses mte3hom x w moins x 3andhom nafs l'ordonnée : houma symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Idhan yekfi nrasmou la courbe l les x positifs, w nkamlouha bel symétrie, kif elli natwiw el war9a 3la l'axe.

هوما : l'ordonnée عندهم نفس x w moins x متاعهم les abscisses اللي f paire ، les points كان . par rapport à l'axe des ordonnées les x positifs ، w courbe لـ الـ إذن يكفي نرسمو . symétriques par rapport à l'axe des ordonnées symétrie بالـ نكمّلوها ، كيف اللي نطويو الورقة على l'axe .

Par rapport à l'axe des ordonnées. Si f est paire, les points d'abscisses x et moins x ont la même ordonnée : ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc de tracer la courbe pour les x positifs, puis de la compléter par symétrie, comme si on pliait la feuille le long de l'axe.

QUESTION 29 · FONCTION IMPAIRE

la courbe mta3 fonction impaire symétrique par rapport à quoi | fonction impaire : quelle symétrie pour la courbe | symétrie de la courbe d'une fonction impaire | courbe fonction impaire kifech tji

CE QU'IL RÉPOND

Par rapport à l'origine du repère. Ken f impaire, les points elli les abscisses mte3hom x w moins x 3andhom ordonnées opposées : l'origine hiya le milieu mta3 le segment elli yorbothom. Idhan yekfi nrasmou la courbe l les x positifs, w ba3d na3mloulha demi-tour 7awl l'origine.

ordonnées opposées : عندهم x w moins x متاعهم les abscisses اللي f impaire ، les points كان . par rapport à l'origine du repère
حول demi-tour بعد نعملولها les x positifs ، w لـ courbe الـ إذن يكفي نرسمو . اللي يربطهم le segment متاع le milieu هي l'origine
. l'origine

Par rapport à l'origine du repère. Si f est impaire, les points d'abscisses x et moins x ont des ordonnées opposées : l'origine est le milieu du segment qui les joint. Il suffit donc de tracer la courbe pour les x positifs, puis de lui faire faire un demi-tour autour de l'origine.

QUESTION 30 · EXEMPLE : COMPLÉTER UNE COURBE PAR SYMÉTRIE

kifech nkammel la courbe ki na3ref ennoss berk | comment compléter une courbe par symétrie | compléter la courbe à gauche | nkammel la courbe kifech

CE QU'IL RÉPOND

Ken la fonction paire, nrasmou le symétrique mta3 la partie elli na3rfouha par rapport à l'axe des ordonnées : koll point d'abscisse x ya3tina le point d'abscisse moins x, fi nafs la hauteur. Ken hiya impaire, nrasmou le symétrique par rapport à l'origine : koll point ya3tina le point d'abscisse opposée et d'ordonnée opposée.

point d'abscisse x كل : par rapport à l'axe des ordonnées اللي نعرفوها la partie متاع le symétrique نرسمو ، fonction paire الـ كان
point كل : le symétrique par rapport à l'origine نرسمو ، impaire هي كان . la hauteur نفس في ، le point d'abscisse moins x يعطينا
. le point d'abscisse opposée et d'ordonnée opposée يعطينا

Si la fonction est paire, on trace le symétrique de la partie connue par rapport à l'axe des ordonnées : chaque point d'abscisse x donne le point d'abscisse moins x, à la même hauteur. Si elle est impaire, on trace le symétrique par rapport à l'origine : chaque point donne le point d'abscisse opposée et d'ordonnée opposée.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **L'ensemble de définition d'une racine**

Détermine l'ensemble de définition de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x-4}$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;+inf[».

Réponse attendue : `[4;+inf[` — aussi acceptées : [4;+∞[· D=[4;+inf[· Dh=[4;+inf[· D_h=[4;+inf[· [4,+inf[· [4;+oo[· [4,+oo[· D=[4;+oo[· Dh=[4;+oo[· D_h=[4;+oo[· [4;oo[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une racine carrée n'existe que si ce qu'elle contient est positif ou nul.
2. Résous l'inéquation :
   $x - 4 \geq 0$
3. La borne convient-elle ? Calcule $h(4)$.

CORRECTION

La condition — Ce qui est sous la racine doit être positif ou nul.

$x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4$

L'ensemble —

$D_h = [4; +\infty[$

La borne 4 est comprise : $h(4) = \sqrt{0} = 0$ existe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]4;+inf[ / ]4,+inf[ / ]4;+oo[ / ]4,+oo[` → Le réel 4 a une image : $h(4) = \sqrt{0} = 0$. Le crochet doit être fermé en 4.

`]-inf;4] / ]-inf,4] / ]-oo;4] / ]-oo,4]` → Pour $x < 4$, le nombre $x - 4$ est négatif : sa racine carrée n'existe pas.

EXERCICE 2 · BASE

Une valeur interdite

Soit k la fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $x \mapsto \dfrac{x}{x-3}$. Quel réel de $[0;5]$ n'a pas d'image par k ?

Donne ce réel.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un quotient n'existe pas quand son dénominateur est nul.
2. Résous l'équation :

$$x - 3 = 0$$

CORRECTION

Le dénominateur — Il s'annule pour une seule valeur.

$$x - 3 = 0 \iff x = 3$$

L'ensemble de définition — 3 est bien dans $[0;5]$: on le retire.

$$D_k = [0;3[\cup]3;5]$$

On enlève de l'ensemble de départ les réels qui annulent le dénominateur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → En 0, c'est le **numérateur** qui est nul : $\dfrac{0}{-3} = 0$ existe. Cherche plutôt où le dénominateur s'annule.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Deux conditions à la fois

On considère la fonction l qui, à tout réel x de $[0;+\infty[$, associe $\sqrt{1-x^2}$. Détermine son ensemble de définition.

Écris l'intervalle, par exemple « [2;5] ».

Réponse attendue : `[0;1]` — aussi acceptées : D=[0;1] · Dl=[0;1] · D_l=[0;1]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il y a deux conditions : x doit être dans l'ensemble de départ, et la racine doit exister.
2. La racine existe quand $1 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire quand $-1 \leq x \leq 1$.
3. Garde les réels qui vérifient les deux conditions à la fois.

CORRECTION

La racine —

$$1 - x^2 \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 1$$

L'ensemble de départ — Il faut aussi $x \geq 0$.

$$D_l = [0;1]$$

L'ensemble de définition est toujours contenu dans l'ensemble de départ.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-1;1]` → Tu as bien résolu $1 - x^2 \geq 0$, mais la fonction ne part que des réels positifs : il faut retirer les négatifs.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

Une racine au numérateur, un dénominateur

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

Réponse attendue : `[2;3[U]3;+inf[` — aussi acceptées : [2;3[∪]3;+∞[· [2;3[∪]3;+inf[· [2;3[U]3;+∞[· D=[2;3[U]3;+inf[· Df=[2;3[U]3;+inf[· [2,3[U]3,+inf[· [2,3[∪]3,+inf[·]3;+inf[U[2;3[·]3;+inf[∪[2;3[·]3,+inf[U[2,3[·]3,+inf[∪[2,3[· D=[2;3[∪]3;+inf[· Df=

[2;3[∪]3;+inf[· D_f=[2;3[U]3;+inf[· D_f=[2;3[∪]3;+inf[· [2;+inf[\{3} · [2,+inf[\{3} · [2;+inf[privé de 3 · [2,+inf[privé de 3 · [2;3[U]3;+oo[·]3;+oo[U[2;3[· [2,3[U]3,+oo[·]3,+oo[U[2,3[· [2;3[∪]3;+oo[·]3;+oo[∪[2;3[· [2,3[∪]3,+oo[·]3,+oo[∪[2,3[· [2;3[union]3;+inf[·]3;+inf[union [2;3[· [2,3[union]3,+inf[·]3,+inf[union [2,3[· [2;3[union]3;+oo[·]3;+oo[union [2;3[· [2,3[union]3,+oo[·]3,+oo[union [2,3[· D=[2;3[U]3;+oo[· D=[2;3[∪]3;+oo[· D=[2;3[union]3;+inf[· D=[2;3[union]3;+oo[· Df=[2;3[U]3;+oo[· Df=[2;3[∪]3;+oo[· Df=[2;3[union]3;+inf[· Df=[2;3[union]3;+oo[· D_f=[2;3[U]3;+oo[· D_f=[2;3[∪]3;+oo[· D_f=[2;3[union]3;+inf[· D_f=[2;3[union]3;+oo[· [2;3[ou]3;+inf[· [2,3[ou]3,+inf[· [2;3[ou]3;+oo[· [2,3[ou]3,+oo[· [2;+inf[-{3} · [2;+oo[-{3} · [2,+inf[-{3} · [2,+oo[-{3} · [2;+oo[\{3} · [2,+oo[\{3} · [2;+oo[privé de 3 · [2,+oo[privé de 3 · [2;+inf[sauf 3 · [2;+oo[sauf 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux conditions : la racine doit exister, et le dénominateur ne doit pas être nul.
2. La racine existe pour $x \geq 2$; le dénominateur s'annule pour $x = 3$.
3. Retire 3 de l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 2.

CORRECTION

La racine —

$$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$$

Le dénominateur —

$$x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3$$

L'ensemble —

$$D_f = [2;3[\cup]3;+\infty[$$

On garde les réels qui vérifient les deux conditions : supérieurs ou égaux à 2, et différents de 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[2;+inf[ / [2,+inf[ / [2;+oo[ / [2,+oo[` → La racine existe bien pour $x \geq 2$, mais en 3 le dénominateur est nul : il faut retirer 3.

`]-inf;3[U]3;+inf[/]-inf;3[∪]3;+inf[/]-inf,3[U]3,+inf[/]-inf,3[∪]3,+inf[/ R\{3} / R privé de 3 /]3;+inf[U]-inf;3[/]3,+inf[U]-inf,3[/]-oo;3[U]3;+oo[/]3;+oo[U]-oo;3[/]-oo,3[U]3,+oo[/]3,+oo[U]-oo,3[/]3;+inf[∪]-inf;3[/]3,+inf[∪]-inf,3[/]-oo;3[∪]3;+oo[/]3;+oo[∪]-oo;3[/]-oo,3[∪]3,+oo[/]3,+oo[∪]-oo,3[/]-inf;3[union]3;+inf[/]3;+inf[union]-inf;3[/]-inf,3[union]3,+inf[/]3,+inf[union]-inf,3[/]-oo;3[union]3;+oo[/]3;+oo[union]-oo;3[/]-oo,3[union]3,+oo[/]3,+oo[union]-oo,3[/]-inf;3[ou]3;+inf[/]-inf,3[ou]3,+inf[/]-oo;3[ou]3;+oo[/]-oo,3[ou]3,+oo[` → Tu as retiré 3, mais il faut aussi que $\sqrt{x-2}$ existe : $x \geq 2$.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Une valeur absolue sous la racine

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$: sous la racine, on retranche 1 à la valeur absolue de x. Détermine l'ensemble de définition de f.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$.

Réponse attendue : `]-inf;-1]U[1;+inf[` — aussi acceptées :]-∞;-1]∪[1;+∞[·]-inf;-1]∪[1;+inf[·]-∞;-1]U[1;+∞[· x<=-1 ou x>=1 · x≤-1 ou x≥1 · [1;+inf[U]-inf;-1] · [1;+inf[∪]-inf;-1] · D=]-inf;-1]U[1;+inf[· Df=]-inf;-1]U[1;+inf[· E=]-inf;-1]U[1;+inf[·]-inf,-1]U[1,+inf[·]-inf,-1]∪[1,+inf[· [1,+inf[U]-inf,-1] · [1,+inf[∪]-inf,-1] · x>=1 ou x<=-1 · x≥1 ou x≤-1 · R\]-1;1[· R\]-1,1[·]-oo;-1]U[1;+oo[· [1;+oo[U]-oo;-1] ·]-oo,-1]U[1,+oo[· [1,+oo[U]-oo,-1] ·]-oo;-1]∪[1;+oo[· [1;+oo[∪]-oo;-1] ·]-oo,-1]∪[1,+oo[· [1,+oo[∪]-oo,-1] ·]-inf;-1] union [1;+inf[· [1;+inf[union]-inf;-1] ·]-inf,-1] union [1,+inf[· [1,+inf[union]-inf,-1] ·]-oo;-1] union [1;+oo[· [1;+oo[union]-oo;-1] ·]-oo,-1] union [1,+oo[· [1,+oo[union]-oo,-1] · D=]-oo;-1]U[1;+oo[· D=]-inf;-1]∪[1;+inf[· D=]-oo;-1]∪[1;+oo[· D=]-inf;-1] union [1;+inf[· D=]-oo;-1] union [1;+oo[· Df=]-oo;-1]U[1;+oo[· Df=]-inf;-1]∪[1;+inf[· Df=]-oo;-1]∪[1;+oo[· Df=]-inf;-1] union [1;+inf[· Df=]-oo;-1] union [1;+oo[· E=]-oo;-1]U[1;+oo[· E=]-inf;-1]∪[1;+inf[· E=]-oo;-1]∪[1;+oo[· E=]-inf;-1] union [1;+inf[· E=]-oo;-1] union [1;+oo[·]-inf;-1] ou [1;+inf[·]-inf,-1] ou [1,+inf[·]-oo;-1] ou [1;+oo[·]-oo,-1] ou [1,+oo[· |x|>=1 · |x|≥1 · x<=-1 ou 1<=x · x≤-1 ou 1≤x

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ce qui est sous la racine doit être positif ou nul : il faut $|x| \geq 1$.
2. $|x| \geq 1$ signifie que la distance de x à 0 est au moins 1 : il y a deux cas.

CORRECTION

La condition — Sous la racine, on retranche 1 à la valeur absolue de x : le résultat doit être positif ou nul.

$$|x| - 1 \geq 0 \iff |x| \geq 1$$

Deux cas —

$x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1$

L'ensemble —

$E =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

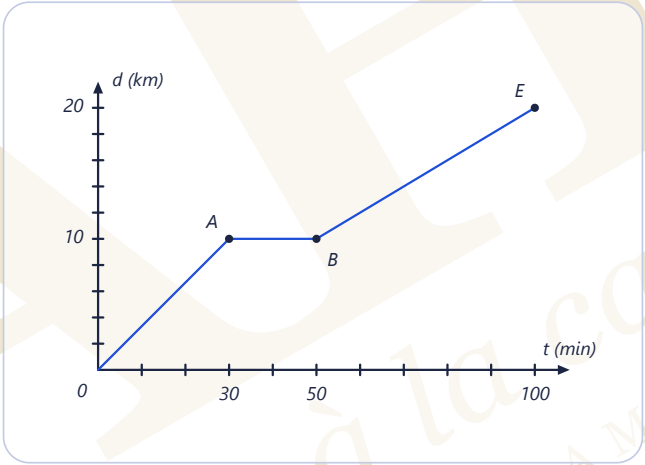
Cet ensemble contient l'opposé de chacun de ses éléments, et un réel et son opposé ont la même valeur absolue, donc $f(-x) = f(x)$: la fonction f est paire.

> PIÈGES ANTICIPÉS
>
> `[1;+inf[ / [1,+inf[ / [1;+oo[ / [1,+oo[` → Tu as oublié les réels négatifs : pour $x = -3$, $|x| = 3$, et $3 - 1 = 2$ est positif.
>
> `[-1;1]` → Strictement entre -1 et 1, $|x|$ est plus petite que 1 : la racine n'existe pas. C'est l'extérieur qu'il faut garder, bornes comprises.

EXERCICE 6 · BASE

Le cycliste : lire un instant

Le graphique donne la distance d (en kilomètres) parcourue par un cycliste en fonction du temps t (en minutes). La courbe est faite de trois segments : elle relie l'origine aux points $A(30 ; 10)$, $B(50 ; 10)$ et $E(100 ; 20)$. Au bout de combien de minutes le cycliste a-t-il parcouru 16 kilomètres ?



La distance parcourue par le cycliste en fonction du temps.

Un repère : en abscisse le temps t en minutes, gradué de 10 en 10 jusqu'à 100 ; en ordonnée la distance parcourue d en kilomètres, graduée de 2 en 2 jusqu'à 20. La courbe est faite de trois segments. Le premier monte de l'origine au point d'abscisse 30 et d'ordonnée 10. Le deuxième est horizontal, à la hauteur 10, de l'abscisse 30 à l'abscisse 50. Le troisième monte du point d'abscisse 50 et d'ordonnée 10 au point d'abscisse 100 et d'ordonnée 20. Les points A, d'abscisse 30 et d'ordonnée 10, B, d'abscisse 50 et d'ordonnée 10, et E, d'abscisse 100 et d'ordonnée 20, sont marqués.

Donne le temps en minutes, le nombre seul.

> **Réponse attendue :** `80`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. 16 kilomètres, c'est plus que 10 : le point cherché est sur le dernier segment.
2. Sur ce segment, le cycliste parcourt 10 kilomètres en 50 minutes : combien de minutes pour 1 kilomètre ?
3. Après la 50^{e} minute, il lui reste 6 kilomètres à parcourir.

CORRECTION

Le bon segment — De 50 à 100 minutes, la distance passe de 10 à 20 kilomètres : il faut 5 minutes par kilomètre.

Les 6 kilomètres —

$6 \times 5 = 30 \text{ minutes}$

L'instant —

$50 + 30 = 80 \text{ minutes}$

Chercher quand la distance vaut 16, c'est chercher l'antécédent de 16 : on part de l'axe des ordonnées.

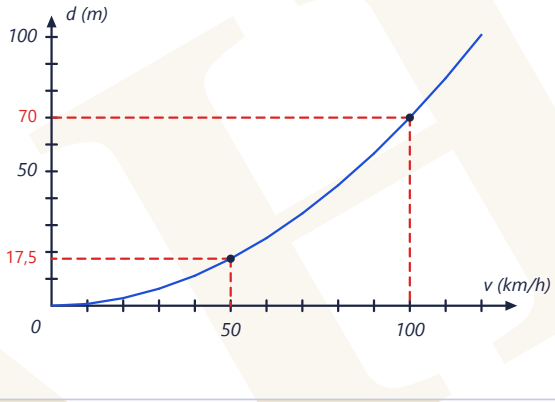
PIÈGES ANTICIPÉS

48 → Tu as gardé la vitesse du départ, 10 kilomètres en 30 minutes. Après son arrêt, le cycliste roule moins vite : 10 kilomètres en 50 minutes.

30 → 30 minutes, c'est le temps qu'il met pour les 6 derniers kilomètres. Il faut l'ajouter aux 50 minutes déjà écoulées.

EXERCICE 7 · BASE **La distance de freinage**

Sur une route sèche, on a testé la distance de freinage d'une voiture, notée d (en mètres), en fonction de sa vitesse v (en kilomètres par heure). Sur le graphique, on lit qu'à 50 kilomètres par heure la distance de freinage est d'environ $17{,}5$ mètres, et qu'à 100 kilomètres par heure elle est d'environ 70 mètres. La distance de freinage est-elle proportionnelle à la vitesse ?



La distance de freinage en fonction de la vitesse, sur route sèche.

Un repère : en abscisse la vitesse v en kilomètres par heure, graduée de 10 en 10 jusqu'à 120 ; en ordonnée la distance de freinage d en mètres, graduée de 10 en 10 jusqu'à 100. La courbe part de l'origine, monte d'abord très doucement, puis de plus en plus vite : ce n'est pas une droite. Des pointillés rouges lisent deux points : à 50 kilomètres par heure, la distance est 17,5 mètres ; à 100 kilomètres par heure, elle est 70 mètres.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non, elle n'est pas proportionnelle · non elle n'est pas proportionnelle · elle n'est pas proportionnelle · pas proportionnelle · non proportionnelle · non, pas proportionnelle · non pas proportionnelle · non, ce n'est pas proportionnel · non ce n'est pas proportionnel · ce n'est pas proportionnel · pas proportionnel · non, elle n'est pas proportionnelle à la vitesse · non elle n'est pas proportionnelle à la vitesse · elle n'est pas proportionnelle à la vitesse · pas proportionnelle à la vitesse · non, la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse · la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse · non, la distance n'est pas proportionnelle à la vitesse · la distance n'est pas proportionnelle à la vitesse · ce n'est pas une situation de proportionnalité · non, ce n'est pas une situation de proportionnalité · non elle ne l'est pas · non, elle ne l'est pas · elle ne l'est pas · non, pas du tout · non pas du tout · non proportionnel · non, pas proportionnel · non pas proportionnel · non, pas proportionnelle à la vitesse · non proportionnelle à la vitesse · non, la distance n'est pas proportionnelle · la distance n'est pas proportionnelle · non la distance n'est pas proportionnelle à la vitesse · non, car 70 n'est pas le double de 17,5 · non car 70 n'est pas le double de 17,5 · non, 70 n'est pas le double de 17,5 · non, car 70 n'est pas égal à 35 · non car 70 n'est pas égal à 35 · non, car la distance ne double pas · non car la distance ne double pas · non, car la distance est multipliée par 4 · non car la distance est multipliée par 4 · non, car la courbe n'est pas une droite · non car la courbe n'est pas une droite · non, la courbe n'est pas une droite · non, car ce n'est pas une droite · non car ce n'est pas une droite · non, ce n'est pas une droite · non ce n'est pas une droite · ce n'est pas une droite · la courbe n'est pas une droite · non ce n'est pas une situation de proportionnalité · pas de proportionnalité · non, pas de proportionnalité · non, il n'y a pas proportionnalité · il n'y a pas proportionnalité

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si deux grandeurs sont proportionnelles, doubler l'une double l'autre.
2. Compare la distance lue à 100 kilomètres par heure avec le double de la distance lue à 50 kilomètres par heure.

CORRECTION

Le double — Si la distance était proportionnelle à la vitesse, elle doublerait quand la vitesse double.

$2 \times 17{,}5 = 35$

La lecture — À 100 kilomètres par heure, on lit 70 mètres, et non 35 : la distance est multipliée par 4 quand la vitesse est multipliée par 2.

$70 \neq 35$

La courbe passe par l'origine, mais ce n'est pas une droite : la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui, elle est proportionnelle / oui elle est proportionnelle / elle est proportionnelle / oui, elle est proportionnelle à la vitesse / elle est proportionnelle à la vitesse / oui elle est proportionnelle à la vitesse / oui elle l'est / oui, elle l'est / elle l'est / proportionnelle / oui, proportionnelle / oui proportionnelle` → Vérifie avec les deux lectures : quand la vitesse double, de 50 à 100, la distance est-elle seulement doublée ?

EXERCICE 8 · PRATIQUE

L'ordonnée d'un point de la courbe

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$. Le point $D(4; y)$ est sur la courbe de f. Calcule son ordonnée y.

Donne la valeur exacte de y.

Réponse attendue : `sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point est sur la courbe quand son ordonnée est l'image de son abscisse.
2. Remplace x par 4 :

$f(4) = \frac{\sqrt{4-2}}{4-3}$

CORRECTION

L'image de 4 —

$f(4) = \frac{\sqrt{4-2}}{4-3} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

Le point $D(4; \sqrt{2})$ est sur la courbe. En revanche, le point $B(3; 1)$ ne peut pas y être : 3 n'a pas d'image par f.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1.41 / 1.414 / 1.4` → Garde la valeur exacte : $1{,}41$ n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

`2` → Au numérateur, il reste une racine : $\sqrt{4-2} = \sqrt{2}$, et non 2.

EXERCICE 9 · BASE

L'image de racine de 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Calcule l'image de $\sqrt{3}$ par f.

Donne l'image, un nombre.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace x par $\sqrt{3}$ dans l'expression.
2. Le carré de $\sqrt{3}$ est 3.

CORRECTION

Le calcul —

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{4 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$

De même $f(-2) = 0$ et $f(0) = 2$: ces images existent car -2, 0 et $\sqrt{3}$ sont dans l'ensemble de définition $[-2; 2]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2-sqrt(3)` → La racine d'une différence n'est pas la différence des racines : calcule d'abord $4 - (\sqrt{3})^2$.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

Les antécédents de 2

Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par $f(x)=\sqrt{4-x^2}$. Détermine le ou les antécédents de 2 par f.

Donne le ou les antécédents.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un antécédent de 2 est un réel x tel que $f(x)=2$.
2. Élève les deux membres au carré :
$$4-x^2=4$$

CORRECTION

L'équation —

$$\sqrt{4-x^2}=2 \iff 4-x^2=4$$

La solution —

$$x^2=0 \iff x=0$$

Le réel 2 a un seul antécédent, 0 ; 2 est d'ailleurs la plus grande valeur que prend f. Ne confonds pas avec l'image de 2 : $f(2)=0$. Ici, on a résolu $f(x)=2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` / `-2` → $f(2)=\sqrt{4-4}=0$, pas 2. Résous l'équation $\sqrt{4-x^2}=2$ en élevant au carré.

EXERCICE 11 · PRATIQUE

Combien d'antécédents ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Combien le réel 1 a-t-il d'antécédents par f ?

Donne le nombre d'antécédents.

Réponse attendue : `0` — aussi acceptées : aucun · zéro · aucun antécédent · 0 antécédent · pas d'antécédent · il n'y en a pas · 0 antécédents · zéro antécédent · pas d'antécédents · il n'a pas d'antécédent · il n'a aucun antécédent · il n'y a pas d'antécédent · il n'y a aucun antécédent · 1 n'a pas d'antécédent · 1 n'a aucun antécédent · il n'en a pas · il n'en a aucun

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un antécédent de 1 est une solution de l'équation $f(x)=1$.
2. Ramène cette équation à une équation du second degré, puis calcule son discriminant.

CORRECTION

L'équation —

$$\frac{x}{x^2+1}=1 \iff x=x^2+1 \iff x^2-x+1=0$$

Le discriminant — Il est négatif.

$$(-1)^2-4\times1\times1=-3$$

La conclusion — L'équation n'a pas de solution.

Le réel 1 n'a aucun antécédent par f : la courbe ne monte jamais jusqu'à la hauteur 1, son maximum est $\dfrac{1}{2}$. En revanche, 0 a un seul antécédent, qui est 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

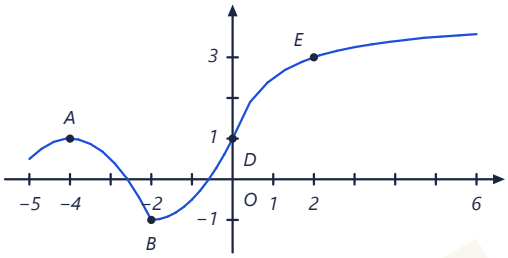
`1` / `un` / `un seul` → $f(1)=\dfrac{1}{2}$, et non 1. Résous l'équation $f(x)=1$ et regarde son discriminant.

`2` / `deux` → Le discriminant de x^2-x+1 vaut -3 : il est négatif, l'équation n'a aucune solution.

EXERCICE 12 · BASE

Lire une image

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-5;6]$; quatre de ses points sont marqués, A, B, D et E, d'abscisses -4, -2, 0 et 2. Lis l'image de 2 par f.



La courbe de f sur [−5 ; 6].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 5 à l'abscisse 6. Elle part du point d'abscisse moins 5 et d'ordonnée 0,5, monte jusqu'au point d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 1, descend jusqu'au point d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, puis remonte sans s'arrêter : elle passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 3, et finit un peu au-dessus de la hauteur 3,5 pour l'abscisse 6. Quatre points sont marqués : A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 1, B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, D d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, E d'abscisse 2 et d'ordonnée 3.

Donne l'image.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pars de l'abscisse 2 sur l'axe horizontal et monte jusqu'à la courbe.
2. Lis ensuite l'ordonnée du point atteint, sur l'axe vertical.

CORRECTION

La lecture — Le point de la courbe d'abscisse 2 a pour ordonnée 3.

$f(2) = 3$

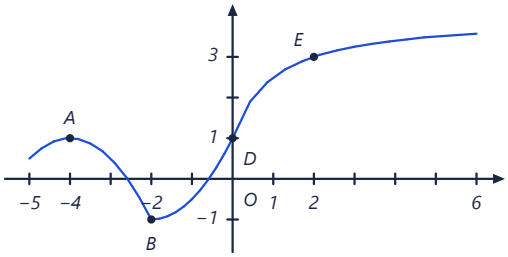
De la même façon, on lit $f(-2) = -1$ et $f(0) = 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

$2 \to 2$ est l'abscisse de départ. L'image est l'**ordonnée** du point de la courbe : lis-la sur l'axe vertical.

EXERCICE 13 · PRATIQUE **Lire des antécédents**

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-5;6]$; elle passe par les points $A(-4;1)$, $B(-2;-1)$, $D(0;1)$ et $E(2;3)$. Quels sont les antécédents de 1 par f, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = 1$?



La courbe de f sur [−5 ; 6].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 5 à l'abscisse 6. Elle part du point d'abscisse moins 5 et d'ordonnée 0,5, monte jusqu'au point d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 1, descend jusqu'au point d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, puis remonte sans s'arrêter : elle passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 3, et finit un peu au-dessus de la hauteur 3,5 pour l'abscisse 6. Quatre points sont marqués : A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 1, B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, D d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, E d'abscisse 2 et d'ordonnée 3.

Écris l'ensemble des antécédents, par exemple « {-1;5} ».

Réponse attendue : `{-4;0}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trace la droite horizontale de hauteur 1.
2. Elle rencontre la courbe en deux points : lis leurs abscisses.

CORRECTION

L'horizontale — La droite d'équation $y = 1$ touche la courbe au point d'abscisse -4 et la coupe au point d'abscisse 0.

Les antécédents —

$f(-4) = 1 \quad ; \quad f(0) = 1$

Un réel peut avoir plusieurs antécédents : ici 1 en a deux, -4 et 0.

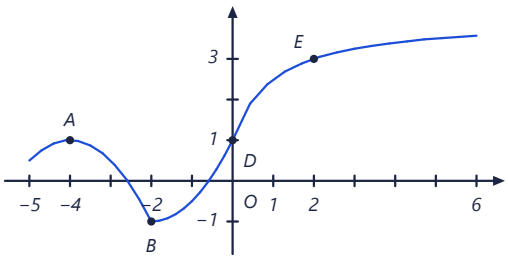
PIÈGES ANTICIPÉS

`{0}` → Il y en a un autre : au point d'abscisse -4, la courbe touche aussi la hauteur 1.

`{2.5}` / `{5/2}` → Tu as lu l'image de 1. Ici on part de l'axe des ordonnées : on cherche les abscisses des points d'ordonnée 1.

EXERCICE 14 · BASE **La valeur minimale sur un graphique**

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-5; 6]$; elle passe par les points $A(-4; 1)$, $B(-2; -1)$, $D(0; 1)$ et $E(2; 3)$, et son point le plus bas est B. Quelle est la valeur minimale de $f(x)$?



La courbe de f sur [−5 ; 6].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 5 à l'abscisse 6. Elle part du point d'abscisse moins 5 et d'ordonnée 0,5, monte jusqu'au point d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 1, descend jusqu'au point d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, puis remonte sans s'arrêter : elle passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 3, et finit un peu au-dessus de la hauteur 3,5 pour l'abscisse 6. Quatre points sont marqués : A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 1, B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, D d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, E d'abscisse 2 et d'ordonnée 3.

Donne la valeur minimale.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Repère le point le plus bas de la courbe.
2. La valeur minimale est son ordonnée : lis-la sur l'axe vertical.

CORRECTION

Le point le plus bas — Il a pour abscisse -2 et pour ordonnée -1.

$f(-2) = -1$

Le minimum de f sur $[-5;6]$ est -1 ; il est atteint en -2.

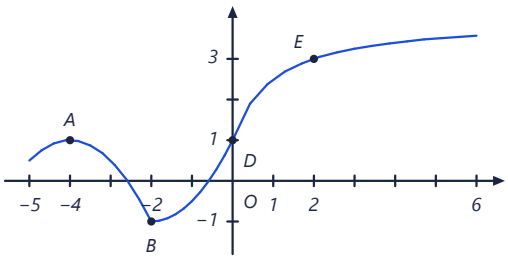
PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → -2 est l'abscisse du point le plus bas. La valeur minimale est son **ordonnée**.

EXERCICE 15 · PRATIQUE **Résoudre une inéquation sur un graphique**

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-5;6]$; elle passe par les points $A(-4;1)$, $B(-2;-1)$, $D(0;1)$ et $E(2;3)$. Elle ne dépasse la hauteur 1 qu'à droite de l'abscisse 0. Résous graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$.

Maths à la carte
ABDELKADER MAMI



La courbe de f sur [−5 ; 6].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 5 à l'abscisse 6. Elle part du point d'abscisse moins 5 et d'ordonnée 0,5, monte jusqu'au point d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 1, descend jusqu'au point d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, puis remonte sans s'arrêter : elle passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 3, et finit un peu au-dessus de la hauteur 3,5 pour l'abscisse 6. Quatre points sont marqués : A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 1, B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, D d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, E d'abscisse 2 et d'ordonnée 3.

Écris l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle, par exemple «]1;4] ».

Réponse attendue : `]0;6]`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés **strictement au-dessus** de la droite de hauteur 1.
2. Au point d'abscisse -4, la courbe touche la hauteur 1 sans la dépasser.
3. Après l'abscisse 0, la courbe reste au-dessus de la hauteur 1 jusqu'à la fin de l'ensemble de définition.

CORRECTION

Au-dessus de la hauteur 1 — La courbe dépasse la hauteur 1 seulement à droite de l'abscisse 0, et jusqu'à l'abscisse 6.

Les bornes — En 0, $f(0) = 1$ n'est pas strictement supérieur à 1 : crochet ouvert. En 6, la courbe existe encore : crochet fermé.

$S =]0; 6]$

Une inégalité stricte exclut les abscisses où la courbe est exactement à la hauteur 1.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[0;6]` → $f(0) = 1$, et 1 n'est pas strictement supérieur à 1 : le crochet est ouvert en 0.

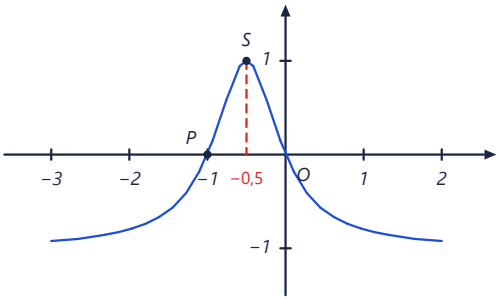
`]0;6[` → La fonction est définie en 6, et sa courbe y est au-dessus de la hauteur 1 : 6 est une solution.

`]0;+inf[ / ]0,+inf[ / ]0;+oo[ / ]0,+oo[` → La fonction n'est définie que jusqu'à 6 : il n'y a pas de solution au-delà.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Une cloche : résoudre f(x) = 0

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-3; 2]$. Elle passe par les points $P(-1; 0)$ et $S(-0{,}5; 1)$, et par l'origine O. Résous graphiquement l'équation $f(x) = 0$.



La courbe de f sur [−3 ; 2].

Un repère orthogonal d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 2 ; elle a la forme d'une cloche. Elle part un peu au-dessus de la hauteur moins 1, monte, coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse moins 1, atteint son point le plus haut S, d'abscisse moins 0,5 et d'ordonnée 1, redescend en passant par l'origine, puis continue de descendre vers la hauteur moins 1 sans l'atteindre. Un pointillé rouge descend de S jusqu'à l'axe des abscisses, où l'on lit moins 0,5. À gauche de l'abscisse moins 1 et à droite de l'origine, la courbe est au-dessous de l'axe des abscisses.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {2;5} ».

Réponse attendue : `{-1;0}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points de la courbe situés sur l'axe des abscisses.
2. Parmi les points P, S et O, lesquels ont pour ordonnée 0 ?

CORRECTION

Sur l'axe des abscisses — La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points, d'abscisses -1 et 0.

$f(-1) = 0 \quad ; \quad f(0) = 0$

Résoudre $f(x) = 0$, c'est chercher les antécédents de 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

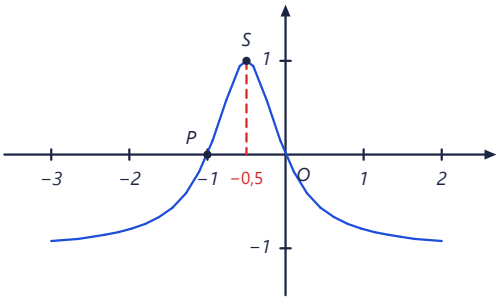
`{0}` / `{-1}` → La courbe coupe l'axe des abscisses en **deux** points : donne les deux abscisses.

`{-0.5}` / `{-1/2}` → $-0{,}5$ est l'abscisse du point le plus haut, où $f(x) = 1$. On cherche les points d'ordonnée 0.

EXERCICE 17 · RAISONNEMENT

Une cloche : résoudre f(x) < 0

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-3;2]$. Elle passe par les points $P(-1;0)$ et $S(-0{,}5;1)$, et par l'origine O ; à gauche de -1 et à droite de 0, elle est au-dessous de l'axe des abscisses. Résous graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.



La courbe de f sur [−3 ; 2].

Un repère orthogonal d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 2 ; elle a la forme d'une cloche. Elle part un peu au-dessus de la hauteur moins 1, monte, coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse moins 1, atteint son point le plus haut S, d'abscisse moins 0,5 et d'ordonnée 1, redescend en passant par l'origine, puis continue de descendre vers la hauteur moins 1 sans l'atteindre. Un pointillé rouge descend de S jusqu'à l'axe des abscisses, où l'on lit moins 0,5. À gauche de l'abscisse moins 1 et à droite de l'origine, la courbe est au-dessous de l'axe des abscisses.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple $[-4;0[\cup]1;3]$.

Réponse attendue : `[-3;-1[U]0;2]` — aussi acceptées : [-3;-1[∪]0;2] ·]0;2]U[-3;-1[·]0;2]∪[-3;-1[· [-3,-1[U]0,2] · [-3,-1[∪]0,2] ·]0,2]U[-3,-1[·]0,2]∪[-3,-1[· [-3;-1[union]0;2] ·]0;2] union [-3;-1[· [-3,-1[union]0,2] ·]0,2] union [-3,-1[· [-3;-1[ou]0;2] · [-3,-1[ou]0,2]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés strictement au-dessous de l'axe des abscisses.
2. Il y a deux morceaux : un à gauche de -1, un à droite de 0.
3. Aux abscisses -1 et 0, $f(x)=0$: ces deux réels sont exclus. Les extrémités de l'ensemble de définition sont-elles des solutions ?

CORRECTION

À gauche — De -3 à -1, la courbe est sous l'axe ; en -1, $f(-1)=0$: crochet ouvert.

$[-3;-1[$

À droite — De 0 à 2, la courbe est sous l'axe ; en 0, $f(0)=0$: crochet ouvert.

$]0;2]$

L'ensemble des solutions —

$S=[-3;-1[\cup]0;2]$

Quand la courbe passe sous l'axe en deux endroits, l'ensemble des solutions est une réunion de deux intervalles.

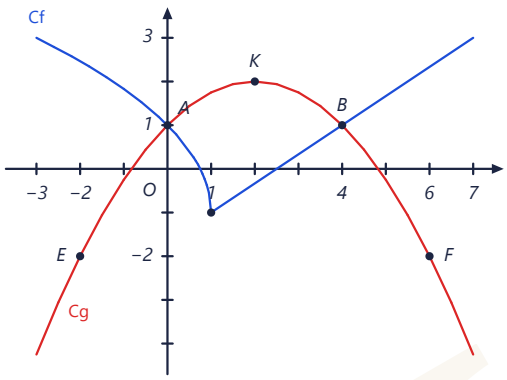
PIÈGES ANTICIPÉS

`]-1;0[` → Entre -1 et 0, la courbe est **au-dessus** de l'axe : c'est là que $f(x)>0$.

`[-3;-1]U[0;2] / [-3;-1]∪[0;2] / [-3,-1]U[0,2] / [-3,-1]∪[0,2] / [0;2]U[-3;-1] / [0,2]U[-3,-1] / [0;2]∪[-3;-1] / [0,2]∪[-3,-1] / [-3;-1] union [0;2] / [0;2] union [-3;-1] / [-3,-1] union [0,2] / [0,2] union [-3,-1] / [-3;-1] ou [0;2] / [-3,-1] ou [0,2]` → En -1 et en 0, $f(x)=0$, qui n'est pas strictement négatif : ces deux crochets sont ouverts.

EXERCICE 18 · PRATIQUE **Deux courbes : résoudre f(x) = g(x)**

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de la figure sont celles de deux fonctions f et g définies sur $[-3;7]$. Elles se coupent aux points $A(0;1)$ et $B(4;1)$. Résous graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.



Les courbes Cf et Cg sur [−3 ; 7].

Un repère orthonormé d'origine O et deux courbes tracées de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 7. La courbe bleue Cf, celle de f, descend du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 3, passe par le point A d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, atteint son point le plus bas d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 1, puis remonte en ligne droite en passant par le point B d'abscisse 4 et d'ordonnée 1, jusqu'au point d'abscisse 7 et d'ordonnée 3. La courbe rouge Cg, celle de g, est une parabole tournée vers le bas : elle monte du point d'abscisse moins 3, passe par le point E d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 2, par A, atteint son point le plus haut K d'abscisse 2 et d'ordonnée 2, redescend en passant par B, par le point F d'abscisse 6 et d'ordonnée moins 2, et finit au point d'abscisse 7. Les deux courbes se coupent en A et en B ; entre A et B, la courbe rouge est au-dessus de la courbe bleue ; avant A et après B, c'est la courbe bleue qui est au-dessus.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;3} ».

Réponse attendue : `{0;4}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les solutions sont les abscisses des points communs aux deux courbes.
2. Lis l'abscisse de A, puis celle de B.

CORRECTION

Les points communs — Les deux courbes se coupent en A et en B.

$f(0) = g(0) = 1 \quad ; \quad f(4) = g(4) = 1$

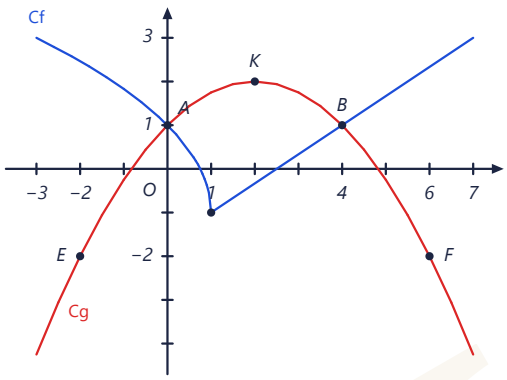
Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection : 0 et 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1}` → 1 est l'ordonnée commune de A et de B. Les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection.

EXERCICE 19 · PRATIQUE **Deux courbes : résoudre g(x) = −2**

La courbe rouge $\mathcal{C}_g$ de la figure est celle d'une fonction g définie sur $[-3;7]$. Elle passe par les points $E(-2;-2)$, $A(0;1)$, $K(2;2)$, $B(4;1)$ et $F(6;-2)$. Résous graphiquement l'équation $g(x) = -2$.



Les courbes Cf et Cg sur [−3 ; 7].

Un repère orthonormé d'origine O et deux courbes tracées de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 7. La courbe bleue Cf, celle de f, descend du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 3, passe par le point A d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, atteint son point le plus bas d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 1, puis remonte en ligne droite en passant par le point B d'abscisse 4 et d'ordonnée 1, jusqu'au point d'abscisse 7 et d'ordonnée 3. La courbe rouge Cg, celle de g, est une parabole tournée vers le bas : elle monte du point d'abscisse moins 3, passe par le point E d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 2, par A, atteint son point le plus haut K d'abscisse 2 et d'ordonnée 2, redescend en passant par B, par le point F d'abscisse 6 et d'ordonnée moins 2, et finit au point d'abscisse 7. Les deux courbes se coupent en A et en B ; entre A et B, la courbe rouge est au-dessus de la courbe bleue ; avant A et après B, c'est la courbe bleue qui est au-dessus.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;3} ».

Réponse attendue : `{-2;6}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trace l'horizontale de hauteur -2 et cherche ses points communs avec $\mathcal{C}_g$.
2. Parmi les cinq points nommés, deux ont pour ordonnée -2 : lis leurs abscisses.

CORRECTION

Les points d'ordonnée −2 —

$g(-2) = -2 \quad ; \quad g(6) = -2$

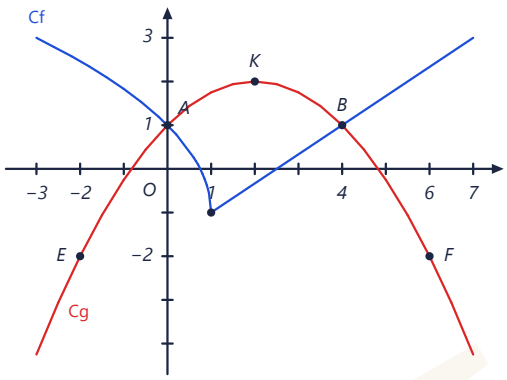
L'équation $g(x) = -2$ a deux solutions, -2 et 6 : ce sont les antécédents de -2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2}` / `{6}` → L'horizontale de hauteur -2 coupe la courbe en **deux** points : il y a deux solutions.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT **Deux courbes : résoudre f(x) ≥ g(x)**

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de la figure sont celles de deux fonctions f et g définies sur $[-3;7]$. Elles se coupent aux points $A(0;1)$ et $B(4;1)$; entre A et B, c'est $\mathcal{C}_g$ qui est au-dessus. Résous graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.



Les courbes Cf et Cg sur [−3 ; 7].

Un repère orthonormé d'origine O et deux courbes tracées de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 7. La courbe bleue Cf, celle de f, descend du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 3, passe par le point A d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, atteint son point le plus bas d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 1, puis remonte en ligne droite en passant par le point B d'abscisse 4 et d'ordonnée 1, jusqu'au point d'abscisse 7 et d'ordonnée 3. La courbe rouge Cg, celle de g, est une parabole tournée vers le bas : elle monte du point d'abscisse moins 3, passe par le point E d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 2, par A, atteint son point le plus haut K d'abscisse 2 et d'ordonnée 2, redescend en passant par B, par le point F d'abscisse 6 et d'ordonnée moins 2, et finit au point d'abscisse 7. Les deux courbes se coupent en A et en B ; entre A et B, la courbe rouge est au-dessus de la courbe bleue ; avant A et après B, c'est la courbe bleue qui est au-dessus.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple $[-5;1] \cup [2;6]$.

Réponse attendue : `[-3;0]U[4;7]` — aussi acceptées : [-3;0]∪[4;7] · [4;7]U[-3;0] · [4;7]∪[-3;0] · [-3,0]U[4,7] · [-3,0]∪[4,7] · [4,7]U[-3,0] · [4,7]∪[-3,0] · [-3;0] union [4;7] · [4;7] union [-3;0] · [-3,0] union [4,7] · [4,7] union [-3,0] · [-3;0] ou [4;7] · [-3,0] ou [4,7]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $f(x) \geq g(x)$ là où la courbe de f est au-dessus de celle de g, ou la touche.
2. Avant A et après B, c'est la courbe de f qui est au-dessus.
3. L'inégalité est large : les abscisses de A et de B sont des solutions. N'oublie pas les extrémités de l'ensemble de définition.

CORRECTION

Avant A — De -3 à 0, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$, et elles se rejoignent en A.

$[-3;0]$

Après B — De 4 à 7, $\mathcal{C}_f$ est de nouveau au-dessus.

$[4;7]$

L'ensemble des solutions —

$S = [-3;0] \cup [4;7]$

Avec une inégalité large, les abscisses des points d'intersection font partie des solutions.

PIÈGES ANTICIPÉS

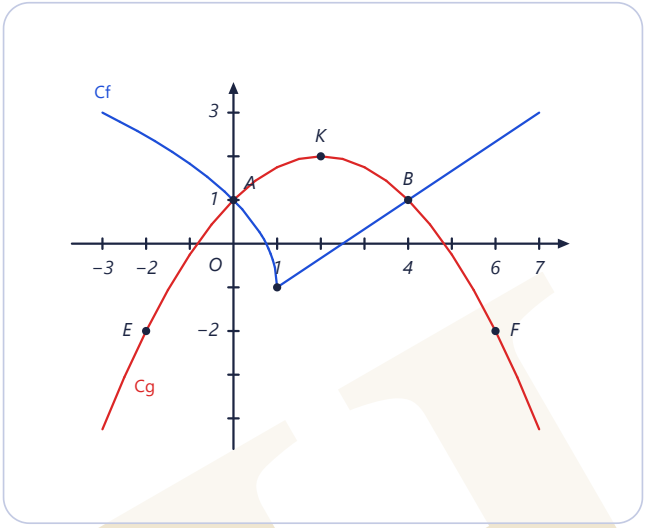
`[0;4]` → Entre A et B, c'est la courbe de g qui est au-dessus : sur $[0;4]$, on a $f(x) \leq g(x)$.

`[-3;0[U]4;7]` / `[-3;0[∪]4;7]` / `[-3,0[U]4,7]` / `[-3,0[∪]4,7]` / `]4;7]U[-3;0[` / `]4,7]U[-3,0[` / `]4;7]∪[-3;0[` / `]4,7]∪[-3,0[` / `[-3;0[ union ]4;7]` / `]4;7] union [-3;0[` / `[-3,0[ union ]4,7]` / `]4,7] union [-3,0[` / `[-3;0[ ou ]4;7]` / `[-3,0[ ou ]4,7]` → L'inégalité est large : en 0 et en 4, $f(x) = g(x)$, donc ces deux réels sont des solutions.

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

Deux courbes : un encadrement

La courbe rouge $\mathcal{C}_g$ de la figure est celle d'une fonction g définie sur $[-3;7]$. Elle monte jusqu'à son sommet $K(2;2)$, puis redescend ; elle passe par les points $E(-2;-2)$, $A(0;1)$, $B(4;1)$ et $F(6;-2)$. Résous graphiquement la double inéquation $-2 < g(x) < 1$.



Les courbes Cf et Cg sur [−3 ; 7].

Un repère orthonormé d'origine O et deux courbes tracées de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 7. La courbe bleue Cf, celle de f, descend du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 3, passe par le point A d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, atteint son point le plus bas d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 1, puis remonte en ligne droite en passant par le point B d'abscisse 4 et d'ordonnée 1, jusqu'au point d'abscisse 7 et d'ordonnée 3. La courbe rouge Cg, celle de g, est une parabole tournée vers le bas : elle monte du point d'abscisse moins 3, passe par le point E d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 2, par A, atteint son point le plus haut K d'abscisse 2 et d'ordonnée 2, redescend en passant par B, par le point F d'abscisse 6 et d'ordonnée moins 2, et finit au point d'abscisse 7. Les deux courbes se coupent en A et en B ; entre A et B, la courbe rouge est au-dessus de la courbe bleue ; avant A et après B, c'est la courbe bleue qui est au-dessus.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple $]-5;1[\cup]2;6[$.

Réponse attendue : `]-2;0[U]4;6[` — aussi acceptées :]-2;0[∪]4;6[·]4;6[U]-2;0[·]4;6[∪]-2;0[·]-2,0[U]4,6[·]-2,0[∪]4,6[·]4,6[U]-2,0[·]4,6[∪]-2,0[·]-2;0[union]4;6[·]4;6[union]-2;0[·]-2,0[union]4,6[·]4,6[union]-2,0[·]-2;0[ou]4;6[·]-2,0[ou]4,6[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On cherche les abscisses des points de la courbe situés strictement entre les hauteurs -2 et 1.
2. Regarde d'abord la partie qui monte, puis la partie qui descend.
3. Les inégalités sont strictes : les quatre bornes sont exclues.

CORRECTION

En montant — La courbe passe de la hauteur -2 à la hauteur 1 entre les abscisses -2 et 0.

$]-2;0[$

En descendant — Elle repasse de la hauteur 1 à la hauteur -2 entre les abscisses 4 et 6.

$]4;6[$

L'ensemble des solutions —

$S =]-2;0[\cup]4;6[$

Une double inégalité se lit entre deux droites horizontales : ici, la courbe traverse cette bande deux fois.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-2;0[` → C'est juste pour la partie qui monte. Mais la courbe redescend : elle repasse entre les hauteurs 1 et -2.

`]-2;6[` → Entre 0 et 4, la courbe est au-dessus de la hauteur 1 : ces abscisses ne conviennent pas.

EXERCICE 22 · PRATIQUE Le minimum d'une valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = |x| - 2$: on prend la valeur absolue de x, puis on retranche 2. Quelle est la valeur minimale de $f(x)$?

Donne la valeur minimale.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.
2. La plus petite valeur de $|x|$ est 0, atteinte pour $x = 0$.

CORRECTION

La valeur absolue — Une valeur absolue est positive ou nulle ; on retranche 2 aux deux membres.

$|x| \geq 0 \quad \text{donc} \quad |x| - 2 \geq -2$

Elle est atteinte —

$f(0) = 0 - 2 = -2$

f est décroissante sur $[-5;0]$, où $f(x) = -x - 2$, et croissante sur $[0;5]$, où $f(x) = x - 2$: le minimum est atteint en 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

-7 → $|-5| = 5$, donc $f(-5) = 5 - 2 = 3$: une valeur absolue ne devient jamais négative.

0 → 0 est le réel où le minimum est atteint. La valeur minimale est $f(0)$.

EXERCICE 23 · DEFI

La valeur maximale sur R

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. On sait que f est croissante sur $[0;1]$, décroissante sur $[1;+\infty[$, et que $f(x) \leq 0$ pour tout réel $x \leq 0$. Quelle est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$?

Donne la valeur maximale.

Réponse attendue : 1/2 — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur les réels positifs, une fonction croissante puis décroissante atteint son maximum là où elle change de sens.
2. Calcule $f(1)$, puis compare-le aux images des réels négatifs.

CORRECTION

Sur [0 ; +∞[— f est croissante jusqu'à 1, puis décroissante : son maximum est $f(1)$.

$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Les réels négatifs — Si $x \leq 0$, alors $f(x) \leq 0$, donc $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

Pour tout réel x, $f(x) \leq f(1)$: le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{2}$. Comme f est impaire, son minimum est $-\dfrac{1}{2}$, atteint en -1.

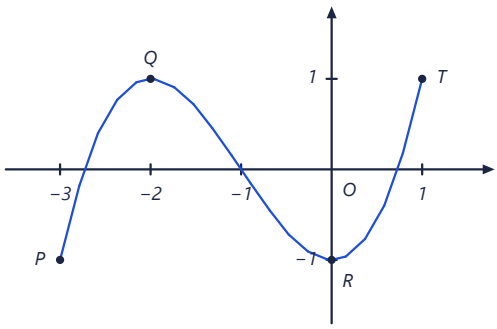
PIÈGES ANTICIPÉS

1 → 1 est le réel où le maximum est atteint. La valeur maximale est $f(1)$.

EXERCICE 24 · PRATIQUE

Les variations sur une courbe

La courbe de la figure est celle d'une fonction g définie sur $[-3;1]$; elle passe par les points $P(-3;-1)$, $Q(-2;1)$, $R(0;-1)$ et $T(1;1)$. Sur quel intervalle la fonction g est-elle décroissante ?



La courbe de g sur [−3 ; 1].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de g est tracée de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 1. Elle monte du point P d'abscisse moins 3 et d'ordonnée moins 1 jusqu'au point Q d'abscisse moins 2 et d'ordonnée 1, descend jusqu'au point R d'abscisse 0 et d'ordonnée moins 1, puis remonte jusqu'au point T d'abscisse 1 et d'ordonnée 1.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;3] ».

Réponse attendue : `[-2;0]` — aussi acceptées : sur [-2;0] · décroissante sur [-2;0] · g est décroissante sur [-2;0] · I=[-2;0] · l'intervalle [-2;0] · sur l'intervalle [-2;0] · g est décroissante sur l'intervalle [-2;0] · sur [-2,0] · décroissante sur [-2,0] · g est décroissante sur [-2,0] · I=[-2,0]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Parcours la courbe de gauche à droite et cherche la partie qui descend.
2. La courbe descend entre son point le plus haut et son point le plus bas : lis leurs **abscisses**.

CORRECTION

De gauche à droite — La courbe monte de l'abscisse -3 à l'abscisse -2, descend de -2 à 0, puis remonte de 0 à 1.

L'intervalle —

$[-2;0]$

g est croissante sur $[-3;-2]$, décroissante sur $[-2;0]$ et croissante sur $[0;1]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-1;1]` → De -1 à 1, ce sont les ordonnées parcourues. Le sens de variation se donne avec des **abscisses**.

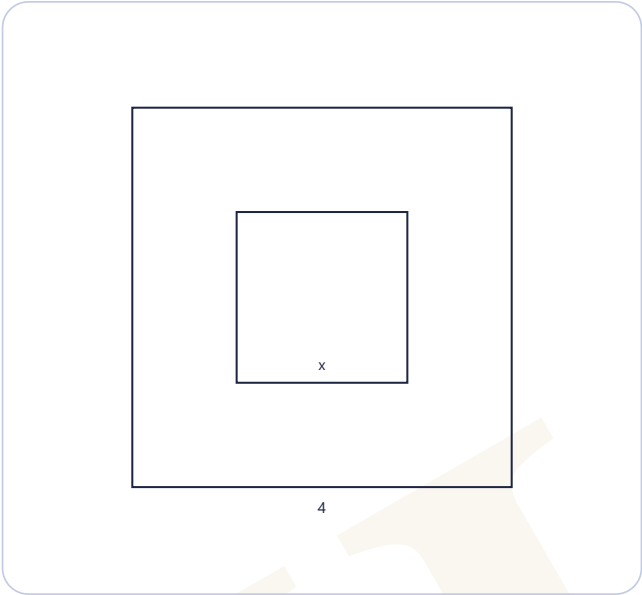
`[-3;-2] / [0;1]` → Sur cet intervalle, la courbe monte : g y est croissante. Cherche la partie qui descend.

`]-2;0[ / [-2;0[ / ]-2;0]` → g est bien décroissante entre -2 et 0, mais les bornes en font partie : ferme les crochets en -2 et en 0.

EXERCICE 25 · BASE

Deux carrés, sans calcul

Deux carrés ont le même centre, et pour côtés 4 et x, où x est un réel de l'intervalle $]0;4[$. On désigne par $A(x)$ l'aire de la région comprise entre les deux carrés. Sans effectuer de calcul, donne le sens de variation de la fonction A sur $]0;4[$.



Deux carrés de même centre, de côtés 4 et x.

Un grand carré de côté 4 et, à l'intérieur, un petit carré de côté x qui a le même centre et des côtés parallèles à ceux du grand. Aucune région n'est colorée : A(x) est l'aire de la bande comprise entre les deux carrés.

Réponds par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : strictement décroissante · fonction décroissante · A est décroissante · la fonction A est décroissante · décroissante sur]0;4[· décroissante sur]0,4[· décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle]0;4[· décroissante sur l'intervalle]0,4[· elle est décroissante · elle est décroissante sur]0;4[· elle est décroissante sur]0,4[· elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle]0;4[· elle est décroissante sur l'intervalle]0,4[· A est décroissante sur]0;4[· A est décroissante sur]0,4[· A est décroissante sur cet intervalle · A est décroissante sur l'intervalle]0;4[· A est décroissante sur l'intervalle]0,4[· la fonction A est décroissante sur]0;4[· la fonction A est décroissante sur]0,4[· la fonction A est décroissante sur cet intervalle · la fonction A est décroissante sur l'intervalle]0;4[· la fonction A est décroissante sur l'intervalle]0,4[· la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur]0;4[· la fonction est décroissante sur]0,4[· la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle]0;4[· la fonction est décroissante sur l'intervalle]0,4[· c'est décroissante · c'est décroissante sur]0;4[· c'est décroissante sur]0,4[· c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle]0;4[· c'est décroissante sur l'intervalle]0,4[· fonction décroissante sur]0;4[· fonction décroissante sur]0,4[· fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle]0;4[· fonction décroissante sur l'intervalle]0,4[· est décroissante · est décroissante sur]0;4[· est décroissante sur]0,4[· est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle]0;4[· est décroissante sur l'intervalle]0,4[· strictement décroissante sur]0;4[· strictement décroissante sur]0,4[· strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle]0;4[· strictement décroissante sur l'intervalle]0,4[· elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur]0;4[· elle est strictement décroissante sur]0,4[· elle est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle]0;4[· elle est strictement décroissante sur l'intervalle]0,4[· A est strictement décroissante · A est strictement décroissante sur]0;4[· A est strictement décroissante sur]0,4[· A est strictement décroissante sur cet intervalle · A est strictement décroissante sur l'intervalle]0;4[· A est strictement décroissante sur l'intervalle]0,4[· décroît · décroît sur]0;4[· décroît sur]0,4[· décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur]0;4[· elle décroît sur]0,4[· elle décroît sur cet intervalle · A décroît · A décroît sur]0;4[· A décroît sur]0,4[· A décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur]0;4[· la fonction décroît sur]0,4[· la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction A décroît · la fonction A décroît sur]0;4[· la fonction A décroît sur]0,4[· la fonction A décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · A est décroissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Imagine que x augmente : que devient le petit carré ?
2. Si le petit carré grandit, la région qui reste entre les deux carrés devient-elle plus grande ou plus petite ?

CORRECTION

Quand x augmente — Le petit carré grandit, sans jamais sortir du grand.

La région — Ce qui reste entre les deux carrés diminue : plus x est grand, plus l'aire est petite.

$$A(x) = 16 - x^2$$

A est décroissante sur $]0;4[$. Au contraire, le périmètre $P(x) = 4x$ du petit carré est une fonction croissante.

PIÈGES ANTICIPÉS

croissante / strictement croissante / croissante sur]0;4[/ croissante sur]0,4[/ croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle]0;4[/ croissante sur l'intervalle]0,4[/ elle est croissante / elle est croissante sur]0;4[/ elle est croissante sur]0,4[/ elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle]0;4[/ elle est croissante sur l'intervalle]0,4[/ A est croissante / A est croissante sur]0;4[/ A est croissante sur]0,4[/ A est croissante sur cet intervalle / A est croissante sur l'intervalle]0;4[/ A est croissante sur l'intervalle]0,4[/ la fonction A est croissante / la fonction A est croissante sur]0;4[/ la fonction A est croissante sur]0,4[/ la fonction A est croissante sur cet intervalle / la fonction A est croissante sur l'intervalle]0;4[/ la fonction A est croissante sur l'intervalle]0,4[/ la fonction est croissante / la fonction est croissante sur]0;4[/ la fonction est croissante sur]0,4[/ la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle]0;4[/ la fonction est croissante sur l'intervalle]0,4[/ c'est croissante / c'est croissante sur]0;4[/ c'est croissante sur]0,4[/ c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle]0;4[/ c'est croissante sur l'intervalle]0,4[/ fonction croissante / fonction croissante sur]0;4[/ fonction croissante sur]0,4[/ fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle]0;4[/ fonction croissante sur l'intervalle]0,4[/ est croissante / est croissante sur]0;4[/ est croissante sur]0,4[/ est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle]0;4[/ est croissante sur l'intervalle]0,4[/ strictement croissante sur]0;4[/ strictement croissante sur]0,4[/ strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur l'intervalle]0;4[/ strictement croissante sur l'intervalle]0,4[/ elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur]0;4[/ elle est strictement croissante sur]0,4[/ elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle]0;4[/ elle est strictement croissante sur l'intervalle]0,4[/ A est strictement croissante / A est strictement croissante sur]0;4[/ A est strictement croissante sur]0,4[/ A est strictement croissante sur cet intervalle / A est strictement croissante sur l'intervalle]0;4[/ A est strictement croissante sur l'intervalle]0,4[/ croît / croît sur]0;4[/ croît sur]0,4[/ croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur]0;4[/ elle croît sur]0,4[/ elle croît sur cet intervalle / A croît / A croît sur]0;4[/ A croît sur]0,4[/ A croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur]0;4[/ la fonction croît sur]0,4[/ la fonction croît sur cet intervalle / la fonction A croît / la fonction A croît sur]0;4[/ la fonction A croît sur]0,4[/ la fonction A croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / A est croissant → Quand x augmente, le petit carré grandit : la région entre les deux carrés rétrécit.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

Enlever la valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $[0;5[$ par $f(x) = |x-2|$. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[0;2]$?

Réponds par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : strictement décroissante · fonction décroissante · f est décroissante · la fonction f est décroissante · décroissante sur [0;2] · décroissante sur [0,2] · décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle [0;2] · décroissante sur l'intervalle [0,2] · elle est décroissante · elle est décroissante sur [0;2] · elle est décroissante sur [0,2] · elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle [0;2] · elle est décroissante sur l'intervalle [0,2] · f est décroissante sur [0;2] · f est décroissante sur [0,2] · f est décroissante sur cet intervalle · f est décroissante sur l'intervalle [0;2] · f est décroissante sur l'intervalle [0,2] · la fonction f est décroissante sur [0;2] · la fonction f est décroissante sur [0,2] · la fonction f est décroissante sur cet intervalle · la fonction f est décroissante sur l'intervalle [0;2] · la fonction f est décroissante sur l'intervalle [0,2] · la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur [0;2] · la fonction est décroissante sur [0,2] · la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle [0;2] · la fonction est décroissante sur l'intervalle [0,2] · c'est décroissante · c'est décroissante sur [0;2] · c'est décroissante sur [0,2] · c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle [0;2] · c'est décroissante sur l'intervalle [0,2] · fonction décroissante sur [0;2] · fonction décroissante sur [0,2] · fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle [0;2] · fonction décroissante sur l'intervalle [0,2] · est décroissante · est décroissante sur [0;2] · est décroissante sur [0,2] · est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle [0;2] · est décroissante sur l'intervalle [0,2] · strictement décroissante sur [0;2] · strictement décroissante sur [0,2] · strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle [0;2] · strictement décroissante sur l'intervalle [0,2] · elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur [0;2] · elle est strictement décroissante sur [0,2] · elle est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle [0;2] · elle est strictement décroissante sur l'intervalle [0,2] · f est strictement décroissante · f est strictement décroissante sur [0;2] · f est strictement décroissante sur [0,2] · f est strictement décroissante sur cet intervalle · f est strictement décroissante sur l'intervalle [0;2] · f est strictement décroissante sur l'intervalle [0,2] · décroît · décroît sur [0;2] · décroît sur [0,2] · décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur [0;2] · elle décroît sur [0,2] · elle décroît sur cet intervalle · f décroît · f décroît sur [0;2] · f décroît sur [0,2] · f décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur [0;2] · la fonction décroît sur [0,2] · la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction f décroît · la fonction f décroît sur [0;2] · la fonction f décroît sur [0,2] · la fonction f décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · f est décroissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur $[0;2]$, le nombre $x-2$ est négatif ou nul : enlève la valeur absolue.
2. Sur cet intervalle, $f(x)=2-x$. Prends $a \leq b$ et compare $f(a)$ et $f(b)$.

CORRECTION

Sans valeur absolue — Pour $0 \leq x \leq 2$, on a $x-2 \leq 0$.

$f(x)=-(x-2)=2-x$

Comparer — Si $a \leq b$, alors $-a \geq -b$.

$f(a)=2-a \geq 2-b=f(b)$

f est décroissante sur $[0;2]$. Sur $[2;5[$, $f(x)=x-2$ et f est croissante.

PIÈGES ANTICIPÉS

croissante / strictement croissante / croissante sur [0;2] / croissante sur [0,2] / croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle [0;2] / croissante sur l'intervalle [0,2] / elle est croissante / elle est croissante sur [0;2] / elle est croissante sur [0,2] / elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle [0;2] / elle est croissante sur l'intervalle [0,2] / f est croissante / f est croissante sur [0;2] / f est croissante sur [0,2] / f est croissante sur cet intervalle / f est croissante sur l'intervalle [0;2] / f est croissante sur l'intervalle [0,2] / la fonction f est croissante / la fonction f est croissante sur [0;2] / la fonction f est croissante sur [0,2] / la fonction f est croissante sur cet intervalle / la fonction f est croissante sur l'intervalle [0;2] / la fonction f est croissante sur l'intervalle [0,2] / la fonction est croissante / la fonction est croissante sur [0;2] / la fonction est croissante sur [0,2] / la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle [0;2] / la fonction est croissante sur l'intervalle [0,2] / c'est croissante / c'est croissante sur [0;2] / c'est croissante sur [0,2] / c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle [0;2] / c'est croissante sur l'intervalle [0,2] / fonction croissante / fonction croissante sur [0;2] / fonction croissante sur [0,2] / fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle [0;2] / fonction croissante sur l'intervalle [0,2] / est croissante / est croissante sur [0;2] / est croissante sur [0,2] / est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle [0;2] / est croissante sur l'intervalle [0,2] / strictement croissante sur [0;2] / strictement croissante sur [0,2] / strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur l'intervalle [0;2] / strictement croissante sur l'intervalle [0,2] / elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur [0;2] / elle est strictement croissante sur [0,2] / elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle [0;2] / elle est strictement croissante sur l'intervalle [0,2] / f est strictement croissante / f est strictement croissante sur [0;2] / f est strictement croissante sur [0,2] / f est strictement croissante sur cet intervalle / f est strictement croissante sur l'intervalle [0;2] / f est strictement croissante sur l'intervalle [0,2] / croît / croît sur [0;2] / croît sur [0,2] / croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur [0;2] / elle croît sur [0,2] / elle croît sur cet intervalle / f croît / f croît sur [0;2] / f croît sur [0,2] / f croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur [0;2] / la fonction croît sur [0,2] / la fonction croît sur cet intervalle / la fonction f croît / la fonction f croît sur [0;2] / la fonction f croît sur [0,2] / la fonction f croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / f est croissant → Sur $[0;2]$, $f(x)=2-x$: quand x augmente, $2-x$ diminue.

EXERCICE 27 · BASE

L'opposé d'une fonction croissante

Soit f une fonction croissante sur $[-1;5]$, et h la fonction définie sur $[-1;5]$ par $h(x)=-f(x)$. Quel est le sens de variation de h sur $[-1;5]$?

Réponds par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : strictement décroissante · fonction décroissante · h est décroissante · la fonction h est décroissante · décroissante sur [-1;5] · décroissante sur [-1,5] · décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle [-1;5] · décroissante sur l'intervalle [-1,5] · elle est décroissante · elle est décroissante sur [-1;5] · elle est décroissante sur [-1,5] · elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle [-1;5] · elle est décroissante sur l'intervalle [-1,5] · h est décroissante sur [-1;5] · h est décroissante sur [-1,5] · h est décroissante sur cet intervalle · h est décroissante sur l'intervalle [-1;5] · h est décroissante sur l'intervalle [-1,5] · la fonction h est décroissante sur [-1;5] · la fonction h est décroissante sur [-1,5] · la fonction h est décroissante sur cet intervalle · la fonction h est décroissante sur l'intervalle [-1;5] · la fonction h est décroissante sur l'intervalle [-1,5] · la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur [-1;5] · la fonction est décroissante sur [-1,5] · la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle [-1;5] · la fonction est décroissante sur l'intervalle [-1,5] · c'est décroissante · c'est décroissante sur [-1;5] · c'est décroissante sur [-1,5] · c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle [-1;5] · c'est décroissante sur l'intervalle [-1,5] · fonction décroissante sur [-1;5] · fonction

décroissante sur [-1,5] · fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle [-1;5] · fonction décroissante sur l'intervalle [-1,5] · est décroissante · est décroissante sur [-1;5] · est décroissante sur [-1,5] · est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle [-1;5] · est décroissante sur l'intervalle [-1,5] · strictement décroissante sur [-1;5] · strictement décroissante sur [-1,5] · strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle [-1;5] · strictement décroissante sur l'intervalle [-1,5] · elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur [-1;5] · elle est strictement décroissante sur [-1,5] · elle est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle [-1;5] · elle est strictement décroissante sur l'intervalle [-1,5] · h est strictement décroissante · h est strictement décroissante sur [-1;5] · h est strictement décroissante sur [-1,5] · h est strictement décroissante sur cet intervalle · h est strictement décroissante sur l'intervalle [-1;5] · h est strictement décroissante sur l'intervalle [-1,5] · décroît · décroît sur [-1;5] · décroît sur [-1,5] · décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur [-1;5] · elle décroît sur [-1,5] · elle décroît sur cet intervalle · h décroît · h décroît sur [-1;5] · h décroît sur [-1,5] · h décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur [-1;5] · la fonction décroît sur [-1,5] · la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction h décroît · la fonction h décroît sur [-1;5] · la fonction h décroît sur [-1,5] · la fonction h décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · h est décroissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends $a \leq b$ dans $[-1;5]$: que sais-tu de $f(a)$ et de $f(b)$?
2. Multiplie l'inégalité $f(a) \leq f(b)$ par -1.

CORRECTION

Pour f — f est croissante : si $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$.

Pour h — On multiplie par -1 : le sens de l'inégalité change.

$$-f(a) \geq -f(b) \quad \text{donc} \quad h(a) \geq h(b)$$

La fonction h est décroissante sur $[-1;5]$. En revanche, la fonction g définie par $g(x) = f(x) + 1$ reste croissante : ajouter 1 garde l'ordre.

PIÈGES ANTICIPÉS

croissante / strictement croissante / croissante sur [-1;5] / croissante sur [-1,5] / croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle [-1;5] / croissante sur l'intervalle [-1,5] / elle est croissante / elle est croissante sur [-1;5] / elle est croissante sur [-1,5] / elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle [-1;5] / elle est croissante sur l'intervalle [-1,5] / h est croissante / h est croissante sur [-1;5] / h est croissante sur [-1,5] / h est croissante sur cet intervalle / h est croissante sur l'intervalle [-1;5] / h est croissante sur l'intervalle [-1,5] / la fonction h est croissante / la fonction h est croissante sur [-1;5] / la fonction h est croissante sur [-1,5] / la fonction h est croissante sur cet intervalle / la fonction h est croissante sur l'intervalle [-1;5] / la fonction h est croissante sur l'intervalle [-1,5] / la fonction est croissante / la fonction est croissante sur [-1;5] / la fonction est croissante sur [-1,5] / la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle [-1;5] / la fonction est croissante sur l'intervalle [-1,5] / c'est croissante / c'est croissante sur [-1;5] / c'est croissante sur [-1,5] / c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle [-1;5] / c'est croissante sur l'intervalle [-1,5] / fonction croissante / fonction croissante sur [-1;5] / fonction croissante sur [-1,5] / fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle [-1;5] / fonction croissante sur l'intervalle [-1,5] / est croissante / est croissante sur [-1;5] / est croissante sur [-1,5] / est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle [-1;5] / est croissante sur l'intervalle [-1,5] / strictement croissante sur [-1;5] / strictement croissante sur [-1,5] / strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur l'intervalle [-1;5] / strictement croissante sur l'intervalle [-1,5] / elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur [-1;5] / elle est strictement croissante sur [-1,5] / elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle [-1;5] / elle est strictement croissante sur l'intervalle [-1,5] / h est strictement croissante / h est strictement croissante sur [-1;5] / h est strictement croissante sur [-1,5] / h est strictement croissante sur cet intervalle / h est strictement croissante sur l'intervalle [-1;5] / h est strictement croissante sur l'intervalle [-1,5] / croît / croît sur [-1;5] / croît sur [-1,5] / croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur [-1;5] / elle croît sur [-1,5] / elle croît sur cet intervalle / h croît / h croît sur [-1;5] / h croît sur [-1,5] / h croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur [-1;5] / la fonction croît sur [-1,5] / la fonction croît sur cet intervalle / la fonction h croît / la fonction h croît sur [-1;5] / la fonction h croît sur [-1,5] / la fonction h croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / h est croissant → Multiplier par -1 change le sens des inégalités : si $f(a) \leq f(b)$, alors $-f(a) \geq -f(b)$.

EXERCICE 28 · RAISONNEMENT Comparer deux images sans les connaître

Soit f une fonction croissante sur $[3;7]$ et décroissante sur $[7;10]$, telle que $f(3)=1$ et $f(8)=0$. Compare $f(4)$ et $f(10)$: $f(4)$ est-il supérieur ou inférieur à $f(10)$?

Réponds par « supérieur » ou « inférieur ».

Réponse attendue : `supérieur` — aussi acceptées : plus grand · strictement supérieur · f(4) est supérieur · f(4) est supérieur à f(10) · supérieur à f(10) · f(4)>f(10) · f(4)≥f(10) · f(4)>=f(10) · f(4) est plus grand · f(4) est plus grand que f(10) · f(10)<f(4) · f(10) est inférieur à f(4) · f(10) inférieur à f(4) · f(10) est plus petit que f(4) · f(10) plus petit que f(4) · f(4) supérieur à f(10) · f(4) plus grand que f(10) · f(4) est strictement supérieur à f(10) · f(10)≤f(4) · f(10)<=f(4) · supérieure · plus grande · strictement supérieure · f(4) est supérieure · f(4) est supérieure à f(10) · supérieure à f(10) · f(4) est plus grande · f(4) est plus grande que f(10) · f(4) supérieure à f(10) · f(4) plus grande que f(10) · f(4) est strictement supérieure à f(10) · il est supérieur · il est supérieur à f(10) · elle est supérieure · elle est supérieure à f(10) · il est plus grand · elle est plus grande · plus grand que f(10) · plus grande que f(10) · c'est supérieur

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la croissance sur $[3;7]$ pour situer $f(4)$ par rapport à $f(3)=1$.
2. Utilise la décroissance sur $[7;10]$ pour situer $f(10)$ par rapport à $f(8)=0$.
3. Tu obtiens $f(4)\geq 1$ et $f(10)\leq 0$: conclus.

CORRECTION

Avec la croissance — $3\leq 4$ dans $[3;7]$, où f est croissante.

$$f(4)\geq f(3)=1$$

Avec la décroissance — $8\leq 10$ dans $[7;10]$, où f est décroissante.

$$f(10)\leq f(8)=0$$

La comparaison —

$$f(4)\geq 1>0\geq f(10)$$

$f(4)$ est strictement supérieur à $f(10)$: le sens de variation permet de comparer des images sans les calculer.

PIÈGES ANTICIPÉS

`inférieur / plus petit / f(4) est inférieur / f(4) est inférieur à f(10) / f(4)<f(10) / f(4) est plus petit / f(4) est plus petit que f(10) / f(4) inférieur à f(10) / f(10) est supérieur à f(4) / f(10) est plus grand que f(4) / f(10)>f(4) / inférieure / plus petite / f(4) est inférieure / f(4) est inférieure à f(10) / f(4) est plus petite / f(4) est plus petite que f(10) / f(4) inférieure à f(10) / il est inférieur / elle est inférieure / inférieur à f(10) / inférieure à f(10) / f(4)≤f(10) / f(4)<=f(10)` → Reprends : $f(4)\geq f(3)=1$ car f est croissante sur $[3;7]$, et $f(10)\leq f(8)=0$ car f est décroissante sur $[7;10]$.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

Le sens de variation par le calcul

Soit f la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=\sqrt{9-x^2}$. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[0;3]$?

Réponds par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : strictement décroissante · fonction décroissante · f est décroissante · la fonction f est décroissante · décroissante sur [0;3] · décroissante sur [0,3] · décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle [0;3] · décroissante sur l'intervalle [0,3] · elle est décroissante · elle est décroissante sur [0;3] · elle est décroissante sur [0,3] · elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle [0;3] · elle est décroissante sur l'intervalle [0,3] · f est décroissante sur [0;3] · f est décroissante sur [0,3] · f est décroissante sur cet intervalle · f est décroissante sur l'intervalle [0;3] · f est décroissante sur l'intervalle [0,3] · la fonction f est décroissante sur [0;3] · la fonction f est décroissante sur [0,3] · la fonction f est décroissante sur cet intervalle · la fonction f est décroissante sur l'intervalle [0;3] · la fonction f est décroissante sur l'intervalle [0,3] · la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur [0;3] · la fonction est décroissante sur [0,3] · la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle [0;3] · la fonction est décroissante sur l'intervalle [0,3] · c'est décroissante · c'est décroissante sur [0;3] · c'est décroissante sur [0,3] · c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle [0;3] · c'est décroissante sur l'intervalle [0,3] · fonction décroissante sur [0;3] · fonction décroissante sur [0,3] · fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle [0;3] · fonction décroissante sur l'intervalle [0,3] · est décroissante · est décroissante sur [0;3] · est décroissante sur [0,3] · est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle [0;3] · est décroissante sur l'intervalle [0,3] · strictement décroissante sur [0;3] · strictement décroissante sur [0,3] · strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle [0;3] · strictement décroissante sur l'intervalle [0,3] · elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur [0;3] · elle est strictement décroissante sur [0,3] · elle

est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle [0;3] · elle est strictement décroissante sur l'intervalle [0,3] · f est strictement décroissante · f est strictement décroissante sur [0;3] · f est strictement décroissante sur [0,3] · f est strictement décroissante sur cet intervalle · f est strictement décroissante sur l'intervalle [0;3] · f est strictement décroissante sur l'intervalle [0,3] · décroît · décroît sur [0;3] · décroît sur [0,3] · décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur [0;3] · elle décroît sur [0,3] · elle décroît sur cet intervalle · f décroît · f décroît sur [0;3] · f décroît sur [0,3] · f décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur [0;3] · la fonction décroît sur [0,3] · la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction f décroît · la fonction f décroît sur [0;3] · la fonction f décroît sur [0,3] · la fonction f décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · f est décroissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends $0 \leq a \leq b \leq 3$ et compare d'abord a^2 et b^2.
2. Passe ensuite à $9 - a^2$ et $9 - b^2$: attention au signe moins.
3. Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

CORRECTION

Les carrés — Pour des réels positifs, $a \leq b$ donne $a^2 \leq b^2$.

$0 \leq a \leq b \leq 3 \;\Rightarrow\; a^2 \leq b^2$

Le signe moins — Il renverse l'ordre.

$9 - a^2 \geq 9 - b^2$

Les racines — Elles gardent l'ordre.

$\sqrt{9 - a^2} \geq \sqrt{9 - b^2} \quad \text{donc} \quad f(a) \geq f(b)$

f est décroissante sur $[0;3]$. Comme elle est paire, sa courbe se complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

croissante / strictement croissante / croissante sur [0;3] / croissante sur [0,3] / croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle [0;3] / croissante sur l'intervalle [0,3] / elle est croissante / elle est croissante sur [0;3] / elle est croissante sur [0,3] / elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle [0;3] / elle est croissante sur l'intervalle [0,3] / f est croissante / f est croissante sur [0;3] / f est croissante sur [0,3] / f est croissante sur cet intervalle / f est croissante sur l'intervalle [0;3] / f est croissante sur l'intervalle [0,3] / la fonction f est croissante / la fonction f est croissante sur [0;3] / la fonction f est croissante sur [0,3] / la fonction f est croissante sur cet intervalle / la fonction f est croissante sur l'intervalle [0;3] / la fonction f est croissante sur l'intervalle [0,3] / la fonction est croissante / la fonction est croissante sur [0;3] / la fonction est croissante sur [0,3] / la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle [0;3] / la fonction est croissante sur l'intervalle [0,3] / c'est croissante / c'est croissante sur [0;3] / c'est croissante sur [0,3] / c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle [0;3] / c'est croissante sur l'intervalle [0,3] / fonction croissante / fonction croissante sur [0;3] / fonction croissante sur [0,3] / fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle [0;3] / fonction croissante sur l'intervalle [0,3] / est croissante / est croissante sur [0;3] / est croissante sur [0,3] / est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle [0;3] / est croissante sur l'intervalle [0,3] / strictement croissante sur [0;3] / strictement croissante sur [0,3] / strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur l'intervalle [0;3] / strictement croissante sur l'intervalle [0,3] / elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur [0;3] / elle est strictement croissante sur [0,3] / elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle [0;3] / elle est strictement croissante sur l'intervalle [0,3] / f est strictement croissante / f est strictement croissante sur [0;3] / f est strictement croissante sur [0,3] / f est strictement croissante sur cet intervalle / f est strictement croissante sur l'intervalle [0;3] / f est strictement croissante sur l'intervalle [0,3] / croît / croît sur [0;3] / croît sur [0,3] / croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur [0;3] / elle croît sur [0,3] / elle croît sur cet intervalle / f croît / f croît sur [0;3] / f croît sur [0,3] / f croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur [0;3] / la fonction croît sur [0,3] / la fonction croît sur cet intervalle / la fonction f croît / la fonction f croît sur [0;3] / la fonction f croît sur [0,3] / la fonction f croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / f est croissant → Le signe moins devant x^2 renverse l'ordre : plus x est grand, plus $9 - x^2$ est petit.

EXERCICE 30 · PRATIQUE **Un demi-cercle caché**

Soit f la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'origine O. Soit M un point de $\mathcal{C}$, d'abscisse x. Calcule la distance OM.

Donne la distance OM.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point M a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$. Dans un repère orthonormé, OM^2 est la somme des carrés des coordonnées de M.
2. Calcule le carré de $f(x)$: c'est le carré d'une racine carrée.

CORRECTION

Les coordonnées de M —

$M(x; \sqrt{9-x^2})$

Le carré de la distance —

$OM^2 = x^2 + (9-x^2) = 9$

La distance —

$OM = \sqrt{9} = 3$

Tous les points de $\mathcal{C}$ sont à la distance 3 de O, et leurs ordonnées sont positives : $\mathcal{C}$ est le demi-cercle de centre O et de rayon 3 situé au-dessus de l'axe des abscisses.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → 9 est le carré de la distance, OM^2. La distance est sa racine carrée.

EXERCICE 31 · BASE

Vrai ou faux : une fonction paire ?

Vrai ou faux ? La fonction f définie sur $[-2; 3]$ par $f(x) = x^2$ est paire.

Réponds par « vrai » ou « faux ».

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : elle n'est pas paire · f n'est pas paire · fausse · non · pas paire · non paire · n'est pas paire · faux elle n'est pas paire · faux, elle n'est pas paire · faux car elle n'est pas paire · faux, car elle n'est pas paire · faux, f n'est pas paire · faux f n'est pas paire · faux car f n'est pas paire · faux, car f n'est pas paire · non, elle n'est pas paire · non elle n'est pas paire · non, f n'est pas paire · non f n'est pas paire · la fonction n'est pas paire · la fonction f n'est pas paire · faux, car -3 n'est pas dans l'ensemble · faux car -3 n'est pas dans l'ensemble · faux, -3 n'est pas dans l'ensemble · faux, car -3 n'est pas dans l'ensemble de définition · faux car -3 n'est pas dans l'ensemble de définition · faux, -3 n'est pas dans l'ensemble de définition · faux, car -3 n'appartient pas à l'ensemble de définition · faux car -3 n'appartient pas à l'ensemble de définition · faux, car -3 n'est pas dans [-2;3] · faux car -3 n'est pas dans [-2;3] · faux, car -3 n'appartient pas à [-2;3] · faux car -3 n'appartient pas à [-2;3] · faux, car l'ensemble de définition n'est pas symétrique · faux car l'ensemble de définition n'est pas symétrique · faux, l'ensemble de définition n'est pas symétrique · faux, car l'ensemble n'est pas symétrique · faux car l'ensemble n'est pas symétrique · c'est faux · elle est fausse · c'est fausse · la réponse est faux · la réponse est fausse · donc faux · donc c'est faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une fonction paire vérifie deux conditions : la première porte sur l'ensemble de définition.
2. Le réel 3 est dans $[-2; 3]$. Son opposé y est-il ?

CORRECTION

L'ensemble de définition — Il ne contient pas l'opposé de chacun de ses éléments.

$3 \in [-2; 3] \quad \text{mais} \quad -3 \notin [-2; 3]$

La fonction n'est pas paire, même si $(-x)^2 = x^2$: c'est l'ensemble de définition qui l'en empêche. Définie sur $[-3; 3]$, elle le serait.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / vraie / oui / c'est vrai / elle est vraie / la réponse est vrai / la réponse est vraie / donc vrai / elle est paire / f est paire / vrai, elle est paire / vrai elle est paire / vrai car elle est paire / oui, elle est paire / oui elle est paire / paire` → Le calcul $(-x)^2 = x^2$ est juste, mais regarde l'ensemble de définition : 3 y est, son opposé -3 n'y est pas.

EXERCICE 32 · PRATIQUE

Vrai ou faux : ni paire ni impaire ?

Vrai ou faux ? La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \times |x|$ n'est ni paire ni impaire.

Réponds par « vrai » ou « faux ».

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : elle est impaire · f est impaire · fausse · non · faux elle est impaire · faux car elle est impaire · faux car f est impaire · faux f est impaire · faux car la fonction est impaire · faux la fonction f est impaire · non elle est impaire · non f est impaire · non car elle est impaire · non car f est impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $f(-x)$, en te souvenant que $|-x| = |x|$.
2. Compare le résultat à $f(x)$, puis à $-f(x)$.

CORRECTION

Le calcul — Un réel et son opposé ont la même valeur absolue.

$f(-x) = (-x) \times |-x| = -x \times |x| = -f(x)$

La fonction f est impaire : l'affirmation est fausse. Par exemple $f(2) = 4$ et $f(-2) = -4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / vraie / oui` → Calcule $f(-x)$: comme $|-x| = |x|$, on trouve $f(-x) = -x \times |x|$. Compare avec $-f(x)$.

EXERCICE 33 · PRATIQUE

La parité d'un polynôme

Étudie la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

Réponds par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `ni paire ni impaire` — aussi acceptées : ni paire, ni impaire · ni impaire ni paire · ni l'une ni l'autre · ni l'un ni l'autre · aucune des deux · elle n'est ni paire ni impaire · f n'est ni paire ni impaire · ni pair ni impair · ni impair ni pair · ni impaire, ni paire · ni pair, ni impair · ni impair, ni pair · elle n'est ni impaire ni paire · f n'est ni impaire ni paire · elle n'est ni paire, ni impaire · f n'est ni paire, ni impaire · la fonction n'est ni paire ni impaire · la fonction f n'est ni paire ni impaire · ni l'une, ni l'autre · ni paire et ni impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$: la première condition est vérifiée. Calcule $f(-x)$.
2. $f(-x) = x^2 - x$. Est-ce $f(x)$? Est-ce $-f(x)$? Teste avec $x = 1$.

CORRECTION

Le calcul —

$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$

Un contre-exemple — Les images de 1 et de -1 ne sont ni égales ni opposées.

$f(1) = 2 \quad ; \quad f(-1) = 0$

La fonction f n'est ni paire ni impaire : un seul contre-exemple suffit à le prouver.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire / pair` → $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$: les images de deux réels opposés ne sont pas égales.

`impaire / impair` → $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$: les images de deux réels opposés ne sont pas opposées.

EXERCICE 34 · PRATIQUE

La parité d'un quotient

Étudie la parité de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{|x| - 2}$: au dénominateur, on retranche 2 à la valeur absolue de x.

Réponds par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `impaire` — aussi acceptées : fonction impaire · elle est impaire · g est impaire · la fonction g est impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche d'abord l'ensemble de définition : pour quels réels a-t-on $|x| = 2$?
2. Calcule $g(-x)$, en te souvenant que $|-x| = |x|$.
3. Compare $g(-x)$ à $g(x)$ et à $-g(x)$.

CORRECTION

Le dénominateur — Il s'annule quand la valeur absolue de x vaut 2.

$$|x| = 2 \iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

L'ensemble de définition — E est $\mathbb{R}$ privé de -2 et de 2 : il contient l'opposé de chacun de ses éléments.

Le calcul — Un réel et son opposé ont la même valeur absolue : le dénominateur ne change pas.

$$g(-x) = \frac{-x}{|-x|-2} = -\frac{x}{|x|-2} = -g(x)$$

La fonction g est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire` → Au numérateur, x devient $-x$: on trouve $g(-x) = -g(x)$, et non $g(x)$.

`ni paire ni impaire / ni pair ni impair` → L'ensemble de définition contient l'opposé de chacun de ses éléments : calcule $g(-x)$ avant de conclure.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

La parité commence par l'ensemble de définition

Étudie la parité de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x-1}$.

Réponds par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `ni paire ni impaire` — aussi acceptées : ni paire, ni impaire · ni impaire ni paire · ni l'une ni l'autre · ni l'un ni l'autre · aucune des deux · elle n'est ni paire ni impaire · h n'est ni paire ni impaire · ni pair ni impair · ni impair ni pair · ni impaire, ni paire · ni pair, ni impair · ni impair, ni pair · elle n'est ni impaire ni paire · h n'est ni impaire ni paire · elle n'est ni paire, ni impaire · h n'est ni paire, ni impaire · la fonction n'est ni paire ni impaire · la fonction h n'est ni paire ni impaire · ni l'une, ni l'autre · ni paire et ni impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avant tout calcul, détermine l'ensemble de définition.
2. h est définie pour $x \geq 1$. Cet ensemble contient 2 ; contient-il -2 ?

CORRECTION

L'ensemble de définition —

$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1 \quad ; \quad E = [1; +\infty[$$

Les opposés —

$$2 \in E \quad \text{mais} \quad -2 \notin E$$

L'ensemble de définition ne contient pas l'opposé de ses éléments : h n'est ni paire ni impaire, sans aucun calcul d'image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire / pair` → $h(2) = 1$ existe, mais $h(-2)$ n'existe pas : on ne peut même pas comparer $h(-x)$ et $h(x)$.

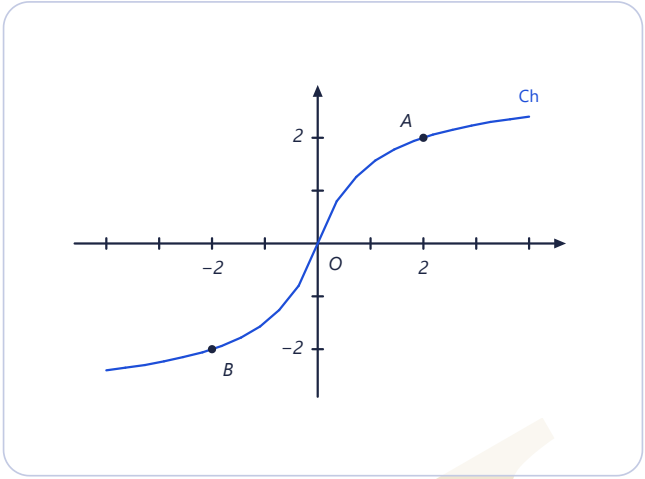
`impaire / impair` → $h(2) = 1$ existe, mais $h(-2)$ n'existe pas : -2 n'est pas dans l'ensemble de définition.

EXERCICE 36 · PRATIQUE

Lire la parité sur une courbe

La courbe $\mathcal{C}_h$ de la figure est celle d'une fonction h définie sur $[-4; 4]$; elle passe par l'origine et par les points $A(2; 2)$ et $B(-2; -2)$. D'après sa courbe, la fonction h est-elle paire, impaire, ou ni paire ni impaire ?

Maths à la carte BOUELKADER HAMMAM



La courbe Ch de la fonction h.

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe Ch a la forme d'un S couché : elle monte de la gauche vers la droite en passant par l'origine. Elle passe par le point B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 2 et par le point A d'abscisse 2 et d'ordonnée 2. Toute la partie de gauche est au-dessous de l'axe des abscisses, toute la partie de droite au-dessus, et l'origine O est le milieu de tout segment qui joint deux points de la courbe d'abscisses opposées.

Réponds par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `impaire` — aussi acceptées : fonction impaire · elle est impaire · h est impaire · la fonction h est impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche une symétrie de la courbe : par rapport à l'axe des ordonnées, ou par rapport à l'origine ?
2. Les points A et B ont des abscisses opposées, 2 et -2. Compare leurs ordonnées.

CORRECTION

La symétrie — La courbe est symétrique par rapport à l'origine O : deux points d'abscisses opposées ont des ordonnées opposées.

$h(-2) = -2 = -h(2)$

Une courbe symétrique par rapport à l'origine est celle d'une fonction impaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

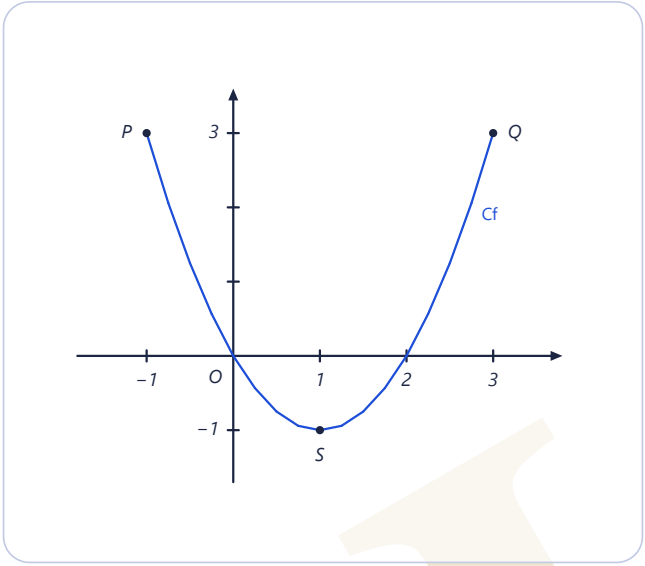
`paire` → Si h était paire, les points d'abscisses 2 et -2 auraient la même ordonnée. Ici, ce sont 2 et -2.

`ni paire ni impaire / ni pair ni impair` → Regarde la symétrie par rapport à l'origine : le point A a pour symétrique le point B, qui est aussi sur la courbe.

EXERCICE 37 · RAISONNEMENT

Un axe de symétrie qui trompe

La courbe $\mathcal{C}_f$ de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-1;3]$; elle passe par les points $P(-1;3)$, $S(1;-1)$ et $Q(3;3)$, et elle coupe l'axe des abscisses à l'origine et au point d'abscisse 2. La fonction f est-elle paire, impaire, ou ni paire ni impaire ?



La courbe Cf de la fonction f, définie sur [−1 ; 3].

Un repère orthogonal d'origine O. La courbe Cf est tracée de l'abscisse moins 1 à l'abscisse 3. Elle descend du point P d'abscisse moins 1 et d'ordonnée 3, passe par l'origine, atteint son point le plus bas S d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 1, remonte en coupant l'axe des abscisses au point d'abscisse 2, et finit au point Q d'abscisse 3 et d'ordonnée 3. La courbe a un axe de symétrie : la droite verticale qui passe par l'abscisse 1, et non l'axe des ordonnées.

Réponds par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `ni paire ni impaire` — aussi acceptées : ni paire, ni impaire · ni impaire ni paire · ni l'une ni l'autre · ni l'un ni l'autre · aucune des deux · elle n'est ni paire ni impaire · f n'est ni paire ni impaire · ni pair ni impair · ni impair ni pair · ni impaire, ni paire · ni pair, ni impair · ni impair, ni pair · elle n'est ni impaire ni paire · f n'est ni impaire ni paire · elle n'est ni paire, ni impaire · f n'est ni paire, ni impaire · la fonction n'est ni paire ni impaire · la fonction f n'est ni paire ni impaire · ni l'une, ni l'autre · ni paire et ni impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde d'abord l'ensemble de définition : contient-il l'opposé de 3 ?
2. Compare aussi $f(1)$ et $f(-1)$.

CORRECTION

L'ensemble de définition —

$3 \in [-1;3] \quad \text{mais} \quad -3 \notin [-1;3]$

Les images — Elles ne sont ni égales ni opposées.

$f(1) = -1 \quad ; \quad f(-1) = 3$

La courbe est symétrique par rapport à la droite verticale qui passe par l'abscisse 1, pas par rapport à l'axe des ordonnées : f n'est ni paire ni impaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire / pair` → La courbe a bien un axe de symétrie, mais c'est la verticale qui passe par l'abscisse 1, pas l'axe des ordonnées. Et 3 est dans l'ensemble de définition, pas -3.

`impaire / impair` → $f(1) = -1$ et $f(-1) = 3$: ces deux images ne sont pas opposées.

EXERCICE 38 · BASE

Compléter grâce à la parité

Une fonction f est impaire sur $[-5;5]$ et sa courbe passe par le point $S(2;2)$. Calcule $f(-2)$.

Donne cette image.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour une fonction impaire, deux réels opposés ont des images opposées.

2. Écris l'égalité de la définition avec $x = 2$:

$$f(-2) = -f(2)$$

CORRECTION

Le point S —

$f(2) = 2$

L'imparité —

$f(-2) = -f(2) = -2$

La courbe passe donc aussi par le point d'abscisse -2 et d'ordonnée -2, symétrique de S par rapport à l'origine. Si f était paire, on aurait $f(-2) = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $f(-2) = f(2)$, c'est la règle des fonctions **paires**. Pour une fonction impaire, les images sont opposées.

EXERCICE 39 · BASE **Le périmètre d'un rectangle d'aire 4**

Un rectangle a pour aire 4 centimètres carrés. On désigne par x la longueur d'un de ses côtés, en centimètres, et par $f(x)$ son périmètre. Calcule $f(1)$.

Donne le périmètre en centimètres, le nombre seul.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si un côté mesure x, l'autre mesure $\frac{4}{x}$, puisque l'aire vaut 4.
2. Le périmètre est deux fois la somme des deux côtés.

CORRECTION

L'autre côté — L'aire est le produit des deux côtés.

$\frac{4}{x}$

Le périmètre —

$f(x) = 2\left(x + \frac{4}{x}\right) = 2x + \frac{8}{x}$

Pour $x = 1$ —

$f(1) = 2 + 8 = 10$

Le rectangle de côtés 1 et 4 a pour périmètre 10 centimètres.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → 5 est la somme des deux côtés, $1 + 4$. Le périmètre compte chaque côté deux fois.

4 → 4 est l'aire. Le périmètre est $2 \times (1 + 4)$.

EXERCICE 40 · RAISONNEMENT **Le signe de f(b) − f(a)**

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$: à $2x$, on ajoute le quotient de 8 par x. Pour $0 < a < b$, on a $f(b) - f(a) = \frac{2(b-a)(ab-4)}{ab}$. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; 2]$?

Réponds par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : strictement décroissante · fonction décroissante · f est décroissante · la fonction f est décroissante · décroissante sur]0;2] · décroissante sur]0,2] · décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle]0;2] · décroissante sur l'intervalle]0,2] · elle est décroissante · elle est décroissante sur]0;2] · elle est décroissante sur]0,2] · elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle]0;2] · elle est décroissante sur l'intervalle]0,2] · f est décroissante sur]0;2] · f est décroissante sur]0,2] · f est décroissante sur cet intervalle · f est décroissante sur l'intervalle]0;2] · f est décroissante sur l'intervalle]0,2] · la fonction f est décroissante sur]0;2] · la fonction f est décroissante sur]0,2] · la fonction f

est décroissante sur cet intervalle · la fonction f est décroissante sur l'intervalle]0;2] · la fonction f est décroissante sur l'intervalle]0,2] · la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur]0;2] · la fonction est décroissante sur]0,2] · la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle]0;2] · la fonction est décroissante sur l'intervalle]0,2] · c'est décroissante · c'est décroissante sur]0;2] · c'est décroissante sur]0,2] · c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle]0;2] · c'est décroissante sur l'intervalle]0,2] · fonction décroissante sur]0;2] · fonction décroissante sur]0,2] · fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle]0;2] · fonction décroissante sur l'intervalle]0,2] · est décroissante · est décroissante sur]0;2] · est décroissante sur]0,2] · est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle]0;2] · est décroissante sur l'intervalle]0,2] · strictement décroissante sur]0;2] · strictement décroissante sur]0,2] · strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle]0;2] · strictement décroissante sur l'intervalle]0,2] · elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur]0;2] · elle est strictement décroissante sur]0,2] · elle est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle]0;2] · elle est strictement décroissante sur l'intervalle]0,2] · f est strictement décroissante · f est strictement décroissante sur]0;2] · f est strictement décroissante sur]0,2] · f est strictement décroissante sur cet intervalle · f est strictement décroissante sur l'intervalle]0;2] · f est strictement décroissante sur l'intervalle]0,2] · décroît · décroît sur]0;2] · décroît sur]0,2] · décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur]0;2] · elle décroît sur]0,2] · elle décroît sur cet intervalle · f décroît · f décroît sur]0;2] · f décroît sur]0,2] · f décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur]0;2] · la fonction décroît sur]0,2] · la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction f décroît · la fonction f décroît sur]0;2] · la fonction f décroît sur]0,2] · la fonction f décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · f est décroissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur $]0;2]$, on a $a<b\leq 2$: compare le produit ab à 4.
2. $b-a$ et ab sont strictement positifs : le signe de $f(b)-f(a)$ est celui de $ab-4$.

CORRECTION

Le produit ab — Si $0<a<b\leq 2$, alors $ab<2\times 2$.

$$ab<4 \quad \text{donc} \quad ab-4<0$$

La différence — $b-a$ et ab sont strictement positifs.

$$f(b)-f(a)<0 \quad \text{donc} \quad f(a)>f(b)$$

La fonction f est décroissante sur $]0;2]$. Sur $[2;+\infty[$, on a $ab>4$: elle y est croissante.

PIÈGES ANTICIPÉS

croissante / strictement croissante / croissante sur]0;2] / croissante sur]0,2] / croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle]0;2] / croissante sur l'intervalle]0,2] / elle est croissante / elle est croissante sur]0;2] / elle est croissante sur]0,2] / elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle]0;2] / elle est croissante sur l'intervalle]0,2] / f est croissante / f est croissante sur]0;2] / f est croissante sur]0,2] / f est croissante sur cet intervalle / f est croissante sur l'intervalle]0;2] / f est croissante sur l'intervalle]0,2] / la fonction f est croissante / la fonction f est croissante sur]0;2] / la fonction f est croissante sur]0,2] / la fonction f est croissante sur cet intervalle / la fonction f est croissante sur l'intervalle]0;2] / la fonction f est croissante sur l'intervalle]0,2] / la fonction est croissante / la fonction est croissante sur]0;2] / la fonction est croissante sur]0,2] / la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle]0;2] / la fonction est croissante sur l'intervalle]0,2] / c'est croissante / c'est croissante sur]0;2] / c'est croissante sur]0,2] / c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle]0;2] / c'est croissante sur l'intervalle]0,2] / fonction croissante / fonction croissante sur]0;2] / fonction croissante sur]0,2] / fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle]0;2] / fonction croissante sur l'intervalle]0,2] / est croissante / est croissante sur]0;2] / est croissante sur]0,2] / est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle]0;2] / est croissante sur l'intervalle]0,2] / strictement croissante sur]0;2] / strictement croissante sur]0,2] / strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur l'intervalle]0;2] / strictement croissante sur l'intervalle]0,2] / elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur]0;2] / elle est strictement croissante sur]0,2] / elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle]0;2] / elle est strictement croissante sur l'intervalle]0,2] / f est strictement croissante / f est strictement croissante sur]0;2] / f est strictement croissante sur]0,2] / f est strictement croissante sur cet intervalle / f est strictement croissante sur l'intervalle]0;2] / f est strictement croissante sur l'intervalle]0,2] / croît / croît sur]0;2] / croît sur]0,2] / croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur]0;2] / elle croît sur]0,2] / elle croît sur cet intervalle / f croît / f croît sur]0;2] / f croît sur]0,2] / f croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur]0;2] / la fonction croît sur]0,2] / la fonction croît sur cet intervalle / la fonction f croît / la fonction f croît sur]0;2] / la fonction f croît sur]0,2] / la fonction f croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / f est croissant → Sur $]0;2]$, $ab<4$: le facteur $ab-4$ est négatif, donc $f(b)<f(a)$.

EXERCICE 41 · DEFI

Le rectangle de plus petit périmètre

Parmi tous les rectangles d'aire 4 centimètres carrés, on cherche celui qui a le plus petit périmètre. Si x est la longueur d'un côté, le périmètre est $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$: à $2x$, on ajoute le quotient de 8 par x. La fonction f est décroissante sur $]0;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$. Quel est ce plus petit périmètre, en centimètres ?

Donne le périmètre minimal en centimètres, le nombre seul.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une fonction décroissante puis croissante atteint son minimum là où elle change de sens.
2. Calcule $f(2)$.

CORRECTION

Le minimum — f décroît jusqu'à 2, puis croît : pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(2)$.

$f(2) = 4 + \frac{8}{2} = 8$

Le rectangle — Pour $x = 2$, l'autre côté vaut aussi 2 : c'est un carré.

Parmi les rectangles d'aire 4 centimètres carrés, celui de plus petit périmètre est le carré de côté 2 centimètres : son périmètre est 8 centimètres.

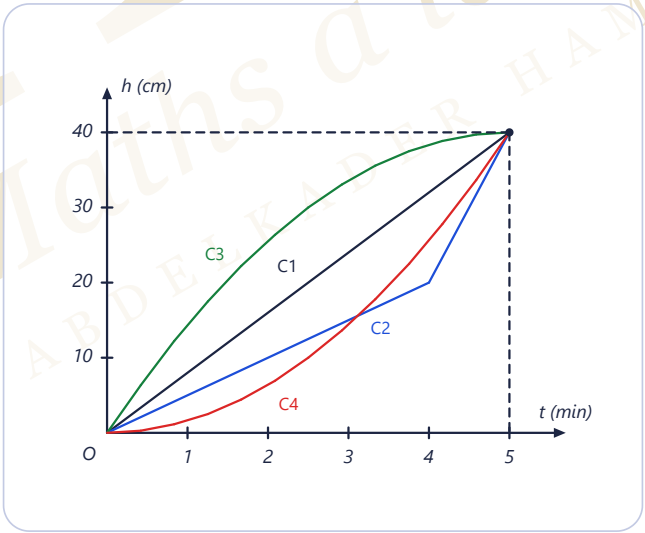
PIÈGES ANTICIPÉS

$2 \to 2$ est la longueur du côté pour laquelle le minimum est atteint. Le périmètre minimal est $f(2)$.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

Le volume après quatre minutes

Un robinet à débit constant remplit en 5 minutes un récipient de 20 litres. La hauteur de l'eau dans ce récipient est donnée par la courbe bleue $\mathcal{C}_2$: elle atteint 20 centimètres au bout de 4 minutes, puis 40 centimètres au bout de 5 minutes. Quel volume d'eau, en litres, le récipient contient-il au bout de 4 minutes ?



La hauteur de l'eau dans chaque récipient en fonction du temps.

Un repère : en abscisse le temps t en minutes, gradué de 1 en 1 jusqu'à 5 ; en ordonnée la hauteur h de l'eau en centimètres, graduée de 10 en 10 jusqu'à 40. Quatre courbes partent de l'origine et arrivent toutes au point d'abscisse 5 et d'ordonnée 40. C1, noire, est un segment de droite. C2, bleue, est faite de deux segments : elle monte lentement jusqu'au point d'abscisse 4 et d'ordonnée 20, puis très vite. C3, verte, monte vite au début puis de plus en plus lentement. C4, rouge, monte lentement au début puis de plus en plus vite. Au palier 2, des pointillés lisent le point d'arrivée commun.

Donne le volume en litres, le nombre seul.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le débit est constant : calcule d'abord le nombre de litres versés par minute.
2. 20 litres en 5 minutes, cela fait 4 litres par minute.

CORRECTION

Le débit —

$\frac{20}{5} = 4 \text{ litres par minute}$

Après 4 minutes —

$4 \times 4 = 16 \text{ litres}$

Le volume versé est proportionnel au temps, même si la hauteur ne l'est pas : la moitié basse du récipient, large, contient 16 litres ; la moitié haute, étroite, n'en contient que 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

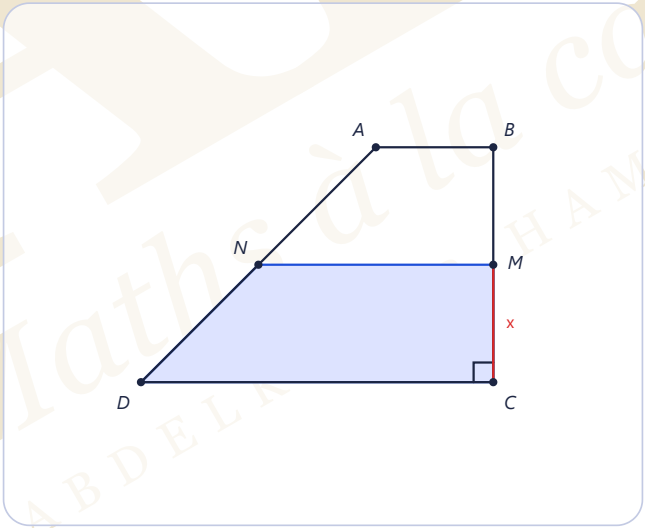
`10` → Au bout de 4 minutes, l'eau est à mi-hauteur, mais le récipient n'est pas à moitié plein : il est plus large en bas. Utilise le débit.

`20` → 20 est la hauteur de l'eau, en centimètres. On demande un volume : utilise le débit du robinet.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

L'aire dans le trapèze

$ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$, avec $AB = 1$, $BC = 2$ et $CD = 3$. Pour un point M de $[BC]$ tel que $CM = x$, la parallèle à (CD) passant par M coupe $[AD]$ en N, et l'aire du polygone $MNDC$ est $g(x) = \dfrac{x(6-x)}{2}$. Calcule cette aire lorsque M est le milieu de $[BC]$.



AB = 1, BC = 2, CD = 3 et CM = x.

Un trapèze rectangle ABCD. La grande base [DC] est en bas, D à gauche et C à droite ; la petite base [AB] est en haut ; le côté [BC], à droite, est perpendiculaire aux deux bases ; le côté [AD], à gauche, est oblique. Au palier 2, le point M est sur le côté [BC] et le point N sur le côté [AD], avec (MN) parallèle à (DC). Le polygone MNDC, la partie du bas, est coloré en bleu. La longueur CM est notée x.

Donne l'aire, le nombre seul.

Réponse attendue : `5/2` — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le milieu de $[BC]$ est à la distance 1 de C, puisque $BC = 2$.
2. Remplace x par 1 dans l'expression de $g(x)$.

CORRECTION

La valeur de x —

$CM = \frac{BC}{2} = 1$

L'aire —

$g(1) = \frac{1\times(6-1)}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Le trapèze entier a pour aire 4 : quand M est au milieu de $[BC]$, le polygone $MNDC$ en occupe plus de la moitié.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est la moitié de l'aire du trapèze. Mais la partie du bas est plus large que celle du haut : calcule $g(1)$.

4 → $x = 2$ correspond à M en B. Le milieu de $[BC]$ donne $x = 1$.

EXERCICE 44 · BASE

Un quotient et sa valeur interdite

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$.

Écrire la réunion d'intervalles, par exemple $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

Réponse attendue : `]-inf;-5[U]-5;+inf[` — aussi acceptées :]-inf;-5[∪]-5;+inf[·]-inf;-5[union]-5;+inf[·]-inf;-5[ou]-5;+inf[·]-5;+inf[U]-inf;-5[·]-5;+inf[∪]-inf;-5[·]-5;+inf[union]-inf;-5[·]-5;+inf[ou]-inf;-5[·]-inf,-5[U]-5,+inf[·]-inf,-5[∪]-5,+inf[·]-inf,-5[union]-5,+inf[·]-inf,-5[ou]-5,+inf[·]-5,+inf[U]-inf,-5[·]-5,+inf[∪]-inf,-5[·]-5,+inf[union]-inf,-5[·]-5,+inf[ou]-inf,-5[· D=]-inf;-5[U]-5;+inf[· D=]-inf;-5[∪]-5;+inf[· D=]-inf;-5[union]-5;+inf[· D=]-inf;-5[ou]-5;+inf[· D=]-5;+inf[U]-inf;-5[· D=]-5;+inf[∪]-inf;-5[· Df=]-inf;-5[U]-5;+inf[· Df=]-inf;-5[∪]-5;+inf[· Df=]-inf;-5[union]-5;+inf[· Df=]-inf;-5[ou]-5;+inf[· Df=]-5;+inf[U]-inf;-5[· Df=]-5;+inf[∪]-inf;-5[· D_f=]-inf;-5[U]-5;+inf[· D_f=]-inf;-5[∪]-5;+inf[· D_f=]-inf;-5[union]-5;+inf[· D_f=]-inf;-5[ou]-5;+inf[· D_f=]-5;+inf[U]-inf;-5[· D_f=]-5;+inf[∪]-inf;-5[· R\{-5} · IR\{-5} · R-{-5} · IR-{-5} · R privé de -5 · IR privé de -5 · R sauf -5 · IR sauf -5 · ℝ\{-5} · ℝ-{-5} · ℝ privé de -5 · ℝ sauf -5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un quotient n'existe que si son dénominateur n'est pas nul.
2. Cherche la valeur de x qui annule le dénominateur :

$$x + 5 = 0$$

CORRECTION

Le dénominateur — Il s'annule pour une seule valeur.

$x + 5 = 0 \iff x = -5$

L'ensemble — Tous les réels sauf -5.

$D_f =]-\infty;-5[\cup]-5;+\infty[$

Pour un quotient, on n'exclut que les valeurs qui annulent le **dénominateur** ; le numérateur peut s'annuler.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;-1/2[U]-1/2;+inf[/]-inf;-1/2[∪]-1/2;+inf[/]-inf;-1/2[union]-1/2;+inf[/]-inf;-1/2[ou]-1/2;+inf[/]-1/2;+inf[U]-inf;-1/2[/]-1/2;+inf[∪]-inf;-1/2[/]-1/2;+inf[union]-inf;-1/2[/]-1/2;+inf[ou]-inf;-1/2[/]-inf,-1/2[U]-1/2,+inf[/]-inf,-1/2[∪]-1/2,+inf[/]-inf,-1/2[union]-1/2,+inf[/]-inf,-1/2[ou]-1/2,+inf[/]-1/2,+inf[U]-inf,-1/2[/]-1/2,+inf[∪]-inf,-1/2[/]-1/2,+inf[union]-inf,-1/2[/]-1/2,+inf[ou]-inf,-1/2[/ R\{-1/2} / IR\{-1/2} / ℝ\{-1/2}` → Tu as exclu la valeur qui annule le numérateur. Or $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ existe : c'est le dénominateur qu'on regarde.

`]-inf;5[U]5;+inf[/]-inf;5[∪]5;+inf[/]-inf;5[union]5;+inf[/]-inf;5[ou]5;+inf[/]5;+inf[U]-inf;5[/]5;+inf[∪]-inf;5[/]5;+inf[union]-inf;5[/]5;+inf[ou]-inf;5[/]-inf,5[U]5,+inf[/]-inf,5[∪]5,+inf[/]-inf,5[union]5,+inf[/]-inf,5[ou]5,+inf[/]5,+inf[U]-inf,5[/]5,+inf[∪]-inf,5[/]5,+inf[union]-inf,5[/]5,+inf[ou]-inf,5[/ R\{5} / IR\{5} / ℝ\{5}` → $x + 5 = 0$ donne $x = -5$, pas 5.

EXERCICE 45 · BASE

Une racine qui contient -2x

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$.

Écrire l'intervalle, par exemple «]-inf;1] ».

Réponse attendue : `]-inf;3]` — aussi acceptées :]-inf,3] · D=]-inf;3] · D=]-inf,3] · Dg=]-inf;3] · Dg=]-inf,3] · D_g=]-inf;3] · D_g=]-inf,3]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ce qui est sous la racine doit être positif ou nul.
2. Résous l'inéquation suivante ; attention au sens si tu divises par un nombre négatif :
   $6 - 2x \geq 0$

CORRECTION

La condition —

$6 - 2x \geq 0 \iff -2x \geq -6$

Diviser par -2 — On divise par un nombre négatif : le sens de l'inégalité change.

$x \leq 3$

L'ensemble —

$D_g =]-\infty; 3]$

La borne 3 est comprise : $g(3) = \sqrt{0} = 0$. Diviser par un négatif renverse l'inégalité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[3;+inf[` / `[3,+inf[` → En divisant $-2x \geq -6$ par -2, le sens de l'inégalité change : on obtient $x \leq 3$. Teste $x = 4$: $6 - 8 < 0$.

`]-inf;3[` / `]-inf,3[` → Le réel 3 a une image : $g(3) = \sqrt{0} = 0$. Le crochet doit être fermé en 3.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Deux valeurs interdites

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 9}$. Déterminer l'ensemble des réels qui n'ont pas d'image par f.

Écrire l'ensemble, par exemple « {1;2} ».

Réponse attendue : `{-3;3}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un réel n'a pas d'image quand il annule le dénominateur.
2. Résous l'équation :
   $x^2 - 9 = 0$
3. Un carré égal à 9 : combien de nombres ont ce carré ?

CORRECTION

Le dénominateur nul —

$x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9$

Deux solutions — Deux nombres opposés ont pour carré 9.

$x = -3 \text{ ou } x = 3$

$\{-3; 3\}$

Les réels sans image sont les solutions de « dénominateur $= 0$ » : ici $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{3}` / `3` → $(-3)^2 = 9$ aussi : -3 annule le dénominateur.

`{9}` / `9` / `{-9;9}` → $x^2 = 9$ ne donne pas $x = 9$: il faut prendre la racine carrée, $x = 3$ ou $x = -3$.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Un dénominateur qui ne s'annule jamais

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

Écrire l'ensemble, par exemple « IR » ou « [0;+inf[».

Réponse attendue : `IR` — aussi acceptées : R · ℝ ·]-inf;+inf[·]-inf,+inf[· tout R · tout IR · l'ensemble des réels · tous les réels · D=R · D=IR · Df=R · Df=IR · D_f=R · D_f=IR · D=]-inf;+inf[· Df=]-inf;+inf[· tout ℝ · D=ℝ · Df=ℝ · D_f=ℝ

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche les réels qui annulent le dénominateur $x^2 + 4$.
2. Un carré est toujours positif ou nul. Que peut-on dire de $x^2 + 4$?

CORRECTION

Le dénominateur — Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$.

$$x^2 + 4 \geq 4 > 0$$

L'ensemble — Le dénominateur ne s'annule jamais.

$$D_f = \mathbb{R}$$

L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution : aucun réel n'est exclu.

PIÈGES ANTICIPÉS

`R\{-2;2} / IR\{-2;2} / ]-inf;-2[U]-2;2[U]2;+inf[ / ]-inf;-2[∪]-2;2[∪]2;+inf[ / ]-inf;-2[ union ]-2;2[ union ]2;+inf[ / ]-inf;-2[ ou ]-2;2[ ou ]2;+inf[ / R\{-2;2}` → $x^2 + 4 = 0$ donnerait $x^2 = -4$: impossible, un carré n'est jamais négatif. Rien n'est exclu.

`R\{0} / IR\{0} / R* / IR* / R\{0} / R*` → 0 annule le numérateur, pas le dénominateur : $f(0) = \dfrac{0}{4} = 0$ existe.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

Deux racines à la fois

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}$.

Écrire l'intervalle, par exemple « [0;3] ».

Réponse attendue : `[-2;5]` — aussi acceptées : [-2,5] · D=[-2;5] · D=[-2,5] · Dh=[-2;5] · Dh=[-2,5] · D_h=[-2;5] · D_h=[-2,5]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chacune des deux racines impose sa condition : il faut les deux en même temps.
2. Résous séparément :
   $x + 2 \geq 0 \quad$ et $\quad 5 - x \geq 0$
3. Les réels qui conviennent sont ceux qui vérifient les deux conditions : l'intersection.

CORRECTION

Première racine —

$$x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

Seconde racine —

$$5 - x \geq 0 \iff x \leq 5$$

Les deux à la fois —

$$D_h = [-2; 5]$$

Quand une expression contient plusieurs racines, l'ensemble de définition est l'**intersection** des conditions.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-2;+inf[ / [-2,+inf[` → C'est la condition de la première racine seulement. Pour $x = 6$, $\sqrt{5-6}$ n'existe pas.

`]-inf;5] / ]-inf,5]` → C'est la condition de la seconde racine seulement. Pour $x = -3$, $\sqrt{-3+2}$ n'existe pas.

`]-2;5[ / ]-2,5[` → Les bornes conviennent : $h(-2) = \sqrt{7}$ et $h(5) = \sqrt{7}$ existent.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Une racine au dénominateur

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Écrire l'intervalle, par exemple « [1;+inf[».

Réponse attendue : `]1;+inf[` — aussi acceptées :]1,+inf[· D=]1;+inf[· D=]1,+inf[· Df=]1;+inf[· Df=]1,+inf[· D_f=]1;+inf[· D_f=]1,+inf[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux conditions : la racine doit exister, et le dénominateur ne doit pas être nul.
2. La racine existe si $x - 1 \geq 0$. Pour quelle valeur vaut-elle 0 ?

CORRECTION

La racine existe —

$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$$

Elle n'est pas nulle — Pour $x = 1$, le dénominateur vaut $\sqrt{0} = 0$.

$$x \neq 1$$

L'ensemble — On garde $x > 1$.

$$D_f =]1; +\infty[$$

Sous une racine placée au dénominateur, l'expression doit être **strictement** positive.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[1;+inf[ / [1,+inf[` → Pour $x = 1$, le dénominateur vaut $\sqrt{0} = 0$: on ne divise pas par zéro. Le crochet est ouvert en 1.

EXERCICE 50 · RAISONNEMENT

Une racine qui cache un carré

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

Écrire l'ensemble, par exemple « IR » ou « [0;+inf[».

Réponse attendue : `IR` — aussi acceptées : R · ℝ ·]-inf;+inf[·]-inf,+inf[· tout R · tout IR · l'ensemble des réels · tous les réels · D=R · D=IR · Df=R · Df=IR · D_f=R · D_f=IR · D=]-inf;+inf[· Df=]-inf;+inf[· tout ℝ · D=ℝ · Df=ℝ · D_f=ℝ

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ce qui est sous la racine doit être positif ou nul. Reconnais-tu une identité remarquable ?
2. Compare avec :
   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

CORRECTION

Une identité remarquable —

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Toujours positif — Un carré est positif ou nul pour tout réel x.

$$(x - 3)^2 \geq 0$$

L'ensemble —

$$D_f = \mathbb{R}$$

Avant de résoudre une inéquation sous une racine, factorise : un carré ne pose aucune condition.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[3;+inf[ / [3,+inf[` → Pour $x = 0$, $x^2 - 6x + 9 = 9 \geq 0$: 0 a une image. L'expression est le carré $(x - 3)^2$, positif partout.

`R\{3} / IR\{3} / ℝ\{3}` → Pour $x = 3$, on obtient $\sqrt{0} = 0$: la racine existe. Aucun réel n'est exclu.

EXERCICE 51 · DEFI

Une racine sur un quotient

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}$.

Écrire la réunion d'intervalles, par exemple $[0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Réponse attendue : `[0;2[U]2;+inf[` — aussi acceptées : [0;2[∪]2;+inf[· [0;2[union]2;+inf[· [0;2[ou]2;+inf[·]2;+inf[U[0;2[·]2;+inf[∪[0;2[·]2;+inf[union [0;2[·]2;+inf[ou [0;2[· [0,2[U]2,+inf[· [0,2[∪]2,+inf[· [0,2[union]2,+inf[· [0,2[ou]2,+inf[·]2,+inf[U[0,2[·]2,+inf[∪[0,2[·]2,+inf[union [0,2[·]2,+inf[ou [0,2[· D=[0;2[U]2;+inf[· D=[0;2[∪]2;+inf[· D=[0;2[union]2;+inf[· D=[0;2[ou]2;+inf[· D=]2;+inf[U[0;2[· D=]2;+inf[∪[0;2[· Df=[0;2[U]2;+inf[· Df=[0;2[∪]2;+inf[· Df=[0;2[union]2;+inf[· Df=[0;2[ou]2;+inf[· Df=]2;+inf[U[0;2[· Df=]2;+inf[∪[0;2[· D_f=[0;2[U]2;+inf[· D_f=[0;2[∪]2;+inf[· D_f=[0;2[union]2;+inf[· D_f=[0;2[ou]2;+inf[· D_f=]2;+inf[U[0;2[· D_f=]2;+inf[∪[0;2[· [0;+inf[\{2} · [0,+inf[\{2} · [0;+inf[-{2} · [0;+inf[privé de 2 · [0;+inf[sauf 2 · R+\{2} · IR+\{2} · ℝ+\{2} · R+-{2} · IR+-{2}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux conditions : la racine du numérateur doit exister, et le dénominateur ne doit pas s'annuler.
2. Le dénominateur s'annule pour deux réels :
   $x^2 - 4 = 0$
3. Parmi ces deux réels, lequel appartient à l'intervalle permis par la racine ?

CORRECTION

La racine —

$x \geq 0$

Le dénominateur —

$x^2 - 4 = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = 2$

Les deux conditions — -2 est déjà exclu par la racine ; il reste à retirer 2.

$D_f = [0;2[\cup]2;+\infty[$

On écrit chaque condition, puis on les réunit : la valeur -2 n'a pas à être retirée, elle n'était pas dans $[0;+\infty[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[0;+inf[ / [0,+inf[` → Pour $x = 2$, le dénominateur vaut $4 - 4 = 0$: 2 n'a pas d'image.

`]0;2[U]2;+inf[/]0;2[∪]2;+inf[/]0;2[union]2;+inf[/]0;2[ou]2;+inf[/]2;+inf[U]0;2[/]2;+inf[∪]0;2[/]2;+inf[union]0;2[/]2;+inf[ou]0;2[/]0,2[U]2,+inf[/]0,2[∪]2,+inf[/]0,2[union]2,+inf[/]0,2[ou]2,+inf[/]2,+inf[U]0,2[/]2,+inf[∪]0,2[/]2,+inf[union]0,2[/]2,+inf[ou]0,2[` → Pour $x = 0$: $f(0) = \dfrac{\sqrt{0}}{-4} = 0$ existe. 0 est dans l'ensemble.

`R\{-2;2} / IR\{-2;2} / ℝ\{-2;2}` → La racine de x n'existe que pour $x \geq 0$: les réels négatifs sont exclus.

EXERCICE 52 · DEFI **Retrouver la seconde valeur interdite**

Soit m un réel et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + mx - 3}$. On sait que -1 n'a pas d'image par f. Déterminer l'autre réel qui n'a pas d'image par f.

Donner ce réel.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si -1 n'a pas d'image, il annule le dénominateur : remplace x par -1 et trouve m.
2. Écris ensuite le dénominateur avec la valeur de m trouvée, et factorise-le par $(x + 1)$.

CORRECTION

Trouver m —

$(-1)^2 + m \times (-1) - 3 = 0 \iff -m - 2 = 0 \iff m = -2$

Le dénominateur —

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

L'autre valeur — Le produit est nul pour $x = -1$ ou $x = 3$.

$x = 3$

Une valeur interdite connue fixe le paramètre ; la factorisation donne ensuite toutes les autres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → -2 est la valeur de m. On demande l'autre réel qui annule $x^2 - 2x - 3$.

`1 / -3` → Avec $x = -1$: $1 - m - 3 = 0$ donne $m = -2$, pas 2. Le dénominateur est $x^2 - 2x - 3$.

EXERCICE 53 · DEFI

La racine d'un quotient

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$.

Écrire la réunion d'intervalles, par exemple $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

Réponse attendue : `]-inf;-3[U[1;+inf[` — aussi acceptées :]-inf;-3[∪[1;+inf[·]-inf;-3[union [1;+inf[·]-inf;-3[ou [1;+inf[· [1;+inf[U]-inf;-3[· [1;+inf[∪]-inf;-3[· [1;+inf[union]-inf;-3[· [1;+inf[ou]-inf;-3[·]-inf,-3[U[1,+inf[·]-inf,-3[∪[1,+inf[·]-inf,-3[union [1,+inf[·]-inf,-3[ou [1,+inf[· [1,+inf[U]-inf,-3[· [1,+inf[∪]-inf,-3[· [1,+inf[union]-inf,-3[· [1,+inf[ou]-inf,-3[· D=]-inf;-3[U[1;+inf[· D=]-inf;-3[∪[1;+inf[· D=]-inf;-3[union [1;+inf[· D=]-inf;-3[ou [1;+inf[· D=[1;+inf[U]-inf;-3[· D=[1;+inf[∪]-inf;-3[· Df=]-inf;-3[U[1;+inf[· Df=]-inf;-3[∪[1;+inf[· Df=]-inf;-3[union [1;+inf[· Df=]-inf;-3[ou [1;+inf[· Df=[1;+inf[U]-inf;-3[· Df=[1;+inf[∪]-inf;-3[· D_f=]-inf;-3[U[1;+inf[· D_f=]-inf;-3[∪[1;+inf[· D_f=]-inf;-3[union [1;+inf[· D_f=]-inf;-3[ou [1;+inf[· D_f=[1;+inf[U]-inf;-3[· D_f=[1;+inf[∪]-inf;-3[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux conditions : le quotient doit exister, et il doit être positif ou nul.
2. Fais un tableau de signes de $x - 1$ et de $x + 3$, puis du quotient.
3. Que se passe-t-il pour $x = -3$? Et pour $x = 1$?

CORRECTION

Les valeurs clés —

$x - 1 = 0 \iff x = 1 \quad ; \quad x + 3 = 0 \iff x = -3$

Le signe du quotient — Il est positif à l'extérieur des valeurs -3 et 1, négatif entre elles.

$\dfrac{x-1}{x+3} \geq 0 \iff x < -3 \text{ ou } x \geq 1$

Les bornes — En 1, le quotient vaut 0 : on garde 1. En -3, il n'existe pas : on exclut -3.

$D_f =]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

La racine d'un quotient : un tableau de signes, puis on regarde chaque borne — celle du numérateur est permise, celle du dénominateur jamais.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;-3]U[1;+inf[/]-inf;-3]∪[1;+inf[/]-inf;-3] union [1;+inf[/]-inf;-3] ou [1;+inf[/ [1;+inf[U]-inf;-3] / [1;+inf[∪]-inf;-3] / [1;+inf[union]-inf;-3] / [1;+inf[ou]-inf;-3] /]-inf,-3]U[1,+inf[/]-inf,-3]∪[1,+inf[/]-inf,-3] union [1,+inf[/]-inf,-3] ou [1,+inf[/ [1,+inf[U]-inf,-3] / [1,+inf[∪]-inf,-3] / [1,+inf[union]-inf,-3] / [1,+inf[ou]-inf,-3]` → Pour $x = -3$, le dénominateur est nul : le quotient n'existe pas. Le crochet est ouvert en -3.

`[1;+inf[ / [1,+inf[` → Pour $x = -4$: $\dfrac{-5}{-1} = 5 \geq 0$. Un quotient de deux négatifs est positif : les réels inférieurs à -3 conviennent aussi.

`]-3;1] / ]-3,1]` → Entre -3 et 1, le numérateur est négatif et le dénominateur positif : le quotient est négatif. C'est l'inverse.

EXERCICE 54 · BASE

L'ordonnée d'un point de la courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Le point $M(-2; y)$ est sur la courbe de f. Calculer son ordonnée y.

Donner l'ordonnée y.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point de la courbe a pour ordonnée l'image de son abscisse : $y = f(-2)$.

2. Mets -2 entre parenthèses : $(-2)^2$, puis $-4 \times (-2)$.

CORRECTION

L'ordonnée est l'image —

$y = f(-2) = (-2)^2 - 4 \times (-2) + 1$

Calculer —

$y = 4 + 8 + 1$

$y = 13$

$M(x;y)$ est sur la courbe de f si et seulement si $y = f(x)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → $(-2)^2 = 4$, pas -4 : le carré d'un nombre négatif est positif.

-3 → $-4 \times (-2) = +8$: moins par moins donne plus.

EXERCICE 55 · BASE **Un point sur la courbe ?**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Le point $B(-2;5)$ appartient-il à la courbe de f ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui B appartient à la courbe · B appartient à la courbe · oui il appartient à la courbe · il appartient à la courbe · oui la courbe passe par B · la courbe passe par B · oui il appartient · oui B est sur la courbe · B est sur la courbe · oui il est sur la courbe

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B est sur la courbe si et seulement si son ordonnée est l'image de son abscisse.
2. Calcule $f(-2)$: attention aux signes au numérateur et au dénominateur.

CORRECTION

L'image de l'abscisse —

$f(-2) = \dfrac{2 \times (-2) - 1}{-2 + 1} = \dfrac{-5}{-1}$

Comparer — On trouve l'ordonnée de B.

$f(-2) = 5$

Pour savoir si un point est sur la courbe, on calcule l'image de son abscisse et on la compare à son ordonnée.

PIÈGES ANTICIPÉS

non → $\dfrac{-5}{-1} = 5$: un quotient de deux négatifs est positif. On trouve bien l'ordonnée de B.

EXERCICE 56 · BASE **L'image par une valeur absolue**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x+1| - 4$: on prend la valeur absolue de $2x+1$, puis on retranche 4. Calculer l'image de -3 par f.

Donner l'image.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord $2 \times (-3) + 1$, puis sa valeur absolue.
2. La valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé.

CORRECTION

L'intérieur —

$2 \times (-3) + 1 = -5$

La valeur absolue —

$|-5| = 5$

$f(-3) = 5 - 4 = 1$

On calcule l'intérieur de la valeur absolue en entier, puis on prend sa valeur absolue.

PIÈGES ANTICIPÉS

-9 → $|-5| = 5$: une valeur absolue n'est jamais négative.

3 → La valeur absolue porte sur $2x + 1$ tout entier : $|2 \times (-3) + 1| = |-5|$, pas $|-6| + 1$.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Les antécédents par le calcul

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3$. Déterminer les antécédents de 15 par f.

Écrire l'ensemble des antécédents, par exemple « {1;2} ».

Réponse attendue : `{-3;3}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les antécédents de 15 sont les solutions de l'équation $f(x) = 15$.
2. Isole x^2 :

$2x^2 - 3 = 15$

CORRECTION

L'équation —

$2x^2 - 3 = 15 \iff 2x^2 = 18 \iff x^2 = 9$

Deux solutions —

$x = -3$ ou $x = 3$

$S = \{-3; 3\}$

Chercher les antécédents de k, c'est résoudre $f(x) = k$; un réel peut en avoir plusieurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

{3} / 3 → $f(-3) = 2 \times 9 - 3 = 15$ aussi : 15 a deux antécédents.

{9} / 9 / {-9;9} → $x^2 = 9$: il reste à prendre la racine, $x = 3$ ou $x = -3$.

{447} / 447 → 447 est l'image de 15. On cherche les réels dont l'image est 15.

EXERCICE 58 · PRATIQUE

L'antécédent par un quotient

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$. Déterminer l'antécédent de 1 par f.

Donner l'antécédent.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Résous $f(x) = 1$, pour $x \neq -4$.
2. Multiplie les deux membres par $x + 4$, puis isole x.

CORRECTION

L'équation — Pour $x \neq -4$:

$\dfrac{3x - 2}{x + 4} = 1 \iff 3x - 2 = x + 4$

Isoler x —

$2x = 6$

Vérifier — $3 \neq -4$, et $f(3) = \dfrac{7}{7} = 1$.

$x = 3$

On chasse le dénominateur, on résout, puis on vérifie que la solution n'est pas une valeur interdite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/5 / 0.2` → $\dfrac{1}{5}$ est l'image de 1. On cherche le réel dont l'image est 1.

`1` → De $3x - 2 = x + 4$, on obtient $2x = 6$: le -2 passe de l'autre côté en $+2$.

EXERCICE 59 · PRATIQUE

Un coefficient pour passer par un point

Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 - x + 1$. Sa courbe passe par le point $A(2;7)$. Déterminer le réel a.

Donner la valeur de a.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A est sur la courbe : son ordonnée est l'image de son abscisse, $f(2) = 7$.
2. Remplace x par 2 et résous l'équation d'inconnue a.

CORRECTION

Traduire —

$f(2) = 7 \iff a \times 2^2 - 2 + 1 = 7$

Résoudre —

$4a - 1 = 7 \iff 4a = 8$

$a = 2$

« La courbe passe par $A(x_A; y_A)$ » se traduit par l'équation $f(x_A) = y_A$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → x^2 vaut $2^2 = 4$ en $x = 2$: l'équation est $4a - 1 = 7$.

`1` → $-x$ vaut -2 en $x = 2$, pas $+2$: on obtient $4a - 2 + 1 = 7$, donc $4a = 8$.

`3/2 / 1.5` → Le terme $-x$ a disparu : en $x = 2$ il vaut -2, et l'équation est $4a - 2 + 1 = 7$.

EXERCICE 60 · RAISONNEMENT

Une courbe et une droite qui se touchent

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$, et Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminer l'ensemble des abscisses des points communs à la courbe de f et à Δ.

Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {2;5} ».

Réponse attendue : `{2}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point commun a une ordonnée égale à $f(x)$ et à x : résous $f(x) = x$.
2. Ramène tout dans un membre : reconnais-tu une identité remarquable ?

CORRECTION

L'équation —

$x^2 - 3x + 4 = x \iff x^2 - 4x + 4 = 0$

Factoriser —

$(x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$

$S = \{2\}$

Les points communs à deux courbes ont pour abscisses les solutions de l'équation obtenue en égalant leurs ordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2;2}` → $(x-2)^2=0$ n'a qu'une solution : $x-2=0$. Un seul point commun.

`{-2}` → $(x-2)^2=0$ donne $x=2$. Vérifie : $f(2)=4-6+4=2$.

EXERCICE 61 · RAISONNEMENT

Un antécédent impossible

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Combien le réel -1 a-t-il d'antécédents par f ?

Donner le nombre d'antécédents.

Réponse attendue : `0` — aussi acceptées : aucun · zéro · aucun antécédent · 0 antécédent · pas d'antécédent · il n'y en a pas · 0 antécédents · zéro antécédent · pas d'antécédents · il n'a pas d'antécédent · il n'a aucun antécédent · il n'y a pas d'antécédent · il n'y a aucun antécédent · -1 n'a pas d'antécédent · -1 n'a aucun antécédent · il n'en a pas · il n'en a aucun

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avant de résoudre, regarde le signe de $f(x)$.
2. Le numérateur et le dénominateur sont-ils positifs ? Que peut-on en dire de $f(x)$?

CORRECTION

Le signe — Pour tout réel x, $x^2\geq 0$ et $x^2+1>0$.

$f(x)\geq 0$

Conclure — Un nombre positif ou nul ne vaut jamais -1.

0 antécédent

Le signe de $f(x)$ suffit parfois à montrer qu'une équation $f(x)=k$ n'a pas de solution.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2 / deux` → $f(x)$ est toujours positif ou nul : aucun réel n'a pour image -1.

`1 / un / un seul` → $f(x)$ est toujours positif ou nul : aucun réel n'a pour image -1.

EXERCICE 62 · DEFI

Ne pas simplifier trop vite

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$, et Δ la droite d'équation $y=x+3$. Déterminer l'ensemble des abscisses des points communs à la courbe de f et à Δ.

Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {2;5} ».

Réponse attendue : `{-3;2}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Résous $f(x)=x+3$ pour $x\neq 1$.
2. Ne divise pas par $x+3$: il peut être nul. Multiplie par $x-1$ puis factorise par $(x+3)$.
3. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

CORRECTION

Chasser le dénominateur — Pour $x\neq 1$:

$x+3=(x+3)(x-1)$

Factoriser —

$(x+3)(x-1)-(x+3)=0 \iff (x+3)(x-2)=0$

Les solutions — Ni -3 ni 2 ne vaut 1.

$S=\{-3;2\}$

Diviser par une expression qui peut s'annuler fait perdre des solutions : on factorise plutôt.

PIÈGES ANTICIPÉS

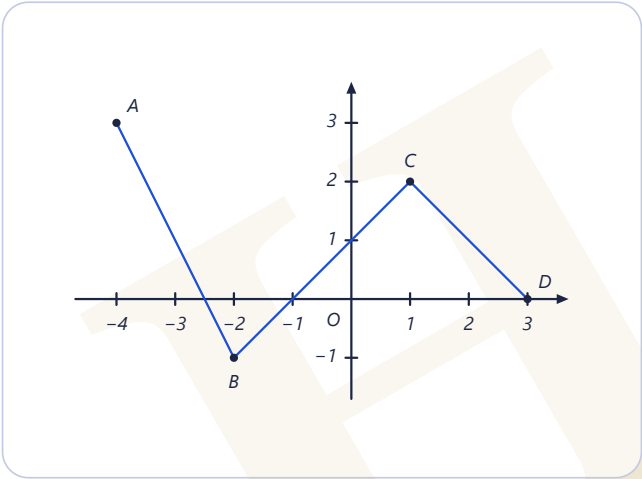
`{2} / 2` → Tu as divisé par $x+3$, qui est nul pour $x=-3$. Or $f(-3)=0$ et $-3+3=0$: -3 est aussi solution.

`{-3;1} / {1}` → 1 annule le dénominateur : ce n'est jamais une solution.

EXERCICE 63 · BASE

Lire une image sur une ligne brisée

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-4;3]$: elle est formée de trois segments, qui joignent les points $A(-4;3)$, $B(-2;-1)$, $C(1;2)$ et $D(3;0)$. Lire l'image de 0 par f.



La courbe de f sur [−4 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 4 à l'abscisse 3 ; elle est formée de trois segments. Elle part du point A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 3, descend en ligne droite jusqu'au point B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, remonte en ligne droite jusqu'au point C d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, puis redescend en ligne droite jusqu'au point D d'abscisse 3 et d'ordonnée 0, sur l'axe des abscisses. Le segment de B à C coupe l'axe des abscisses en moins 1 et l'axe des ordonnées en 1.

Donner l'image.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de 0 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0.
2. Ce point est sur l'axe des ordonnées, sur le segment $[BC]$.

CORRECTION

Le point d'abscisse 0 — La courbe coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;1)$.

$f(0)=1$

L'image se lit sur l'axe des **ordonnées**, à la verticale de l'abscisse donnée.

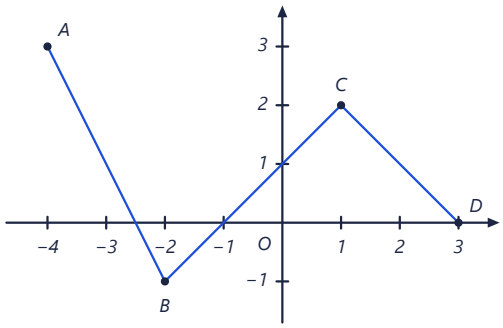
PIÈGES ANTICIPÉS

`-1` → -1 est l'abscisse où la courbe coupe l'axe des abscisses : c'est un antécédent de 0, pas l'image de 0.

EXERCICE 64 · BASE

Lire le maximum

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-4;3]$: elle est formée de trois segments, qui joignent les points $A(-4;3)$, $B(-2;-1)$, $C(1;2)$ et $D(3;0)$. Lire le maximum de f sur $[-4;3]$.



La courbe de f sur [−4 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 4 à l'abscisse 3 ; elle est formée de trois segments. Elle part du point A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 3, descend en ligne droite jusqu'au point B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, remonte en ligne droite jusqu'au point C d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, puis redescend en ligne droite jusqu'au point D d'abscisse 3 et d'ordonnée 0, sur l'axe des abscisses. Le segment de B à C coupe l'axe des abscisses en moins 1 et l'axe des ordonnées en 1.

Donner le maximum.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le maximum est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe.
2. Compare les ordonnées des sommets A et C.

CORRECTION

Le point le plus haut — C'est A, d'ordonnée 3 ; C n'est qu'à la hauteur 2.

$f(x) \leq 3 = f(-4)$

3

Le maximum est une **ordonnée** : 3, atteint en -4. Un sommet de la courbe n'est pas forcément le point le plus haut.

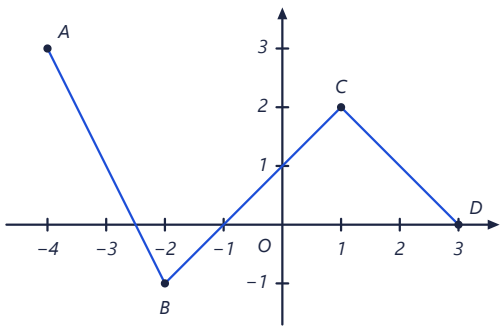
PIÈGES ANTICIPÉS

2 → C est un sommet, mais A est plus haut : $f(-4) = 3 > 2$.

-4 → -4 est l'abscisse où le maximum est atteint. Le maximum est la valeur $f(-4)$.

EXERCICE 65 · PRATIQUE **Résoudre f(x) = 1 sur la figure**

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-4; 3]$: elle est formée de trois segments, qui joignent les points $A(-4; 3)$, $B(-2; -1)$, $C(1; 2)$ et $D(3; 0)$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$.



La courbe de f sur [−4 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 4 à l'abscisse 3 ; elle est formée de trois segments. Elle part du point A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 3, descend en ligne droite jusqu'au point B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, remonte en ligne droite jusqu'au point C d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, puis redescend en ligne droite jusqu'au point D d'abscisse 3 et d'ordonnée 0, sur l'axe des abscisses. Le segment de B à C coupe l'axe des abscisses en moins 1 et l'axe des ordonnées en 1.

Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {2;5} ».

Réponse attendue : `{-3;0;2}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 1.
2. Imagine la droite horizontale d'équation $y = 1$: combien de fois coupe-t-elle la courbe ?
3. Chaque segment est traversé : cherche un point d'abscisse entière sur chacun.

CORRECTION

Sur [AB] — Le segment descend de 3 à -1 en deux unités : il passe par $(-3;1)$.

$f(-3) = 1$

Sur [BC] et sur [CD] —

$f(0) = 1 \quad ; \quad f(2) = 1$

$S = \{-3; 0; 2\}$

Résoudre $f(x) = k$: tracer la droite $y = k$ et lire les abscisses de **tous** les points d'intersection.

PIÈGES ANTICIPÉS

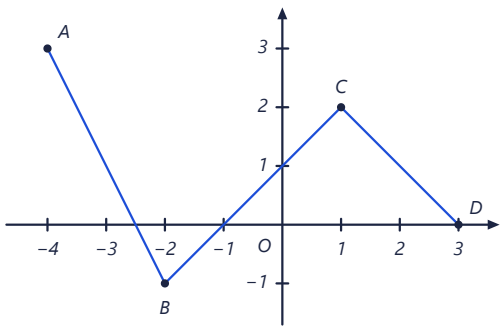
`{0}` / `{-3}` / `{2}` → La droite $y = 1$ coupe la courbe en trois points : un sur chaque segment.

`{0;2}` / `{-3;0}` / `{-3;2}` → Il manque une solution : la droite $y = 1$ coupe chacun des trois segments.

EXERCICE 66 · RAISONNEMENT **Résoudre f(x) < 0 sur la figure**

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-4;3]$: elle est formée de trois segments, qui joignent les points $A(-4;3)$, $B(-2;-1)$, $C(1;2)$ et $D(3;0)$. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.

Maths à la carte
KADER HAMMAMI



La courbe de f sur [−4 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 4 à l'abscisse 3 ; elle est formée de trois segments. Elle part du point A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 3, descend en ligne droite jusqu'au point B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, remonte en ligne droite jusqu'au point C d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, puis redescend en ligne droite jusqu'au point D d'abscisse 3 et d'ordonnée 0, sur l'axe des abscisses. Le segment de B à C coupe l'axe des abscisses en moins 1 et l'axe des ordonnées en 1.

Écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle, par exemple «]1;4] ».

Réponse attendue : `]-2.5;-1[` — aussi acceptées :]-2,5;-1[·]-5/2;-1[· S=]-2.5;-1[· S=]-2,5;-1[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés **strictement au-dessous** de l'axe des abscisses.
2. Le segment $[AB]$ coupe l'axe des abscisses au milieu de deux graduations : lesquelles ?
3. Et le point D, sur l'axe : convient-il pour une inégalité stricte ?

CORRECTION

Les points sur l'axe — $[AB]$ descend de 3 à -1 entre -4 et -2 : il coupe l'axe en $-2{,}5$; $[BC]$ le coupe en -1.

$f(-2{,}5) = 0 \quad ; \quad f(-1) = 0$

Au-dessous de l'axe — Seule la partie de la courbe entre ces deux points est au-dessous ; en D, $f(3) = 0$ n'est pas strictement négatif.

$S =]-2{,}5\,;-1[$

Pour $f(x) < 0$: la partie de la courbe sous l'axe des abscisses, bornes exclues puisque l'inégalité est stricte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-2.5;-1] / [-2,5;-1]` → En $-2{,}5$ et en -1, $f(x) = 0$: ce n'est pas strictement négatif. Les crochets sont ouverts.

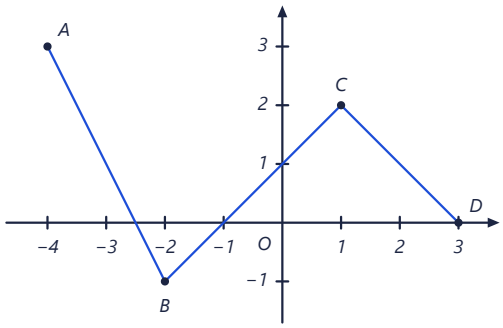
`]-4;-2.5[U]-1;3] / [-4;-2.5[U]-1;3[ / [-4;-2,5[U]-1;3[` → C'est là que la courbe est au-dessus de l'axe : $f(x) > 0$. On cherche la partie au-dessous.

`[-1;0[ / ]-1;0[` → On répond par des **abscisses** : l'intervalle où la courbe est sous l'axe, pas les valeurs de f.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Où la courbe monte-t-elle ?

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-4;3]$: elle est formée de trois segments, qui joignent les points $A(-4;3)$, $B(-2;-1)$, $C(1;2)$ et $D(3;0)$. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est croissante.



La courbe de f sur [−4 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 4 à l'abscisse 3 ; elle est formée de trois segments. Elle part du point A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 3, descend en ligne droite jusqu'au point B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, remonte en ligne droite jusqu'au point C d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, puis redescend en ligne droite jusqu'au point D d'abscisse 3 et d'ordonnée 0, sur l'axe des abscisses. Le segment de B à C coupe l'axe des abscisses en moins 1 et l'axe des ordonnées en 1.

Écrire l'intervalle, par exemple « [1;3] ».

Réponse attendue : `[-2;1]` — aussi acceptées : sur [-2;1] · croissante sur [-2;1] · f est croissante sur [-2;1] · I=[-2;1] · l'intervalle [-2;1] · sur l'intervalle [-2;1] · f est croissante sur l'intervalle [-2;1] · [-2,1] · sur [-2,1] · croissante sur [-2,1] · f est croissante sur [-2,1] · I=[-2,1]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Parcours la courbe de gauche à droite : sur quel segment monte-t-elle ?
2. Donne les **abscisses** des extrémités de ce segment.

CORRECTION

Le segment qui monte — De B à C, la courbe monte : les abscisses vont de -2 à 1.

$[-2;1]$

Le sens de variation se décrit par des intervalles d'**abscisses** : f décroît sur $[-4;-2]$, croît sur $[-2;1]$, décroît sur $[1;3]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-1;2]` → $[-1;2]$ est l'intervalle des **ordonnées** parcourues. Les variations se décrivent avec les abscisses.

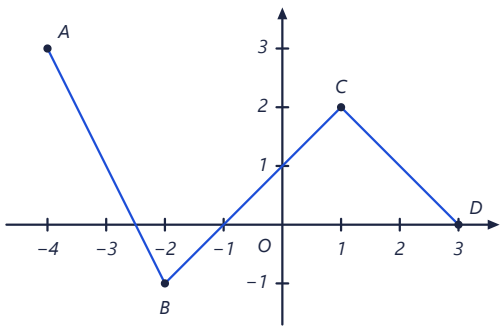
`[-4;-2] / [1;3]` → Sur cet intervalle la courbe descend : f y est décroissante.

`]-2;1[ / [-2;1[ / ]-2;1]` → Les extrémités B et C appartiennent au segment qui monte : les crochets sont fermés.

EXERCICE 68 · DEFI

Combien de solutions selon m ?

La courbe de la figure est celle d'une fonction f définie sur $[-4;3]$: elle est formée de trois segments, qui joignent les points $A(-4;3)$, $B(-2;-1)$, $C(1;2)$ et $D(3;0)$. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels l'équation $f(x) = m$ admet exactement trois solutions.



La courbe de f sur [−4 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O. La courbe de f est tracée de l'abscisse moins 4 à l'abscisse 3 ; elle est formée de trois segments. Elle part du point A d'abscisse moins 4 et d'ordonnée 3, descend en ligne droite jusqu'au point B d'abscisse moins 2 et d'ordonnée moins 1, son point le plus bas, remonte en ligne droite jusqu'au point C d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, puis redescend en ligne droite jusqu'au point D d'abscisse 3 et d'ordonnée 0, sur l'axe des abscisses. Le segment de B à C coupe l'axe des abscisses en moins 1 et l'axe des ordonnées en 1.

Écrire l'intervalle, par exemple «]1;4] ».

Réponse attendue : `[0;2[` — aussi acceptées : [0,2[· m∈[0;2[· m∈[0,2[· 0<=m<2 · 0≤m<2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais glisser une droite horizontale $y = m$ de bas en haut et compte ses points d'intersection avec la courbe.
2. Le segment $[CD]$ ne couvre que les hauteurs de 0 à 2 : hors de là, au plus deux points.
3. Regarde à part les hauteurs 0 et 2 : combien de points pour chacune ?

CORRECTION

Les hauteurs de chaque segment —
$[AB] : [-1;3]$; $[BC] : [-1;2]$; $[CD] : [0;2]$

Trois points — Pour $0 < m < 2$, la droite coupe les trois segments. Pour $m = 0$ aussi : en $-2{,}5$, en -1 et en D.

La hauteur 2 — Pour $m = 2$, la droite passe par le sommet C, commun à $[BC]$ et $[CD]$: deux points seulement.

$m \in [0;2[$

Le nombre de solutions de $f(x) = m$ se lit en déplaçant la droite $y = m$; aux hauteurs des sommets, on compte à part.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]0;2[ / ]0,2[` → Pour $m = 0$, la droite $y = 0$ passe par $D(3;0)$: avec $-2{,}5$ et -1, cela fait trois solutions.

`[0;2] / [0,2]` → Pour $m = 2$, la droite touche C, qui ne compte qu'une fois : deux solutions seulement, $-3{,}5$ et 1.

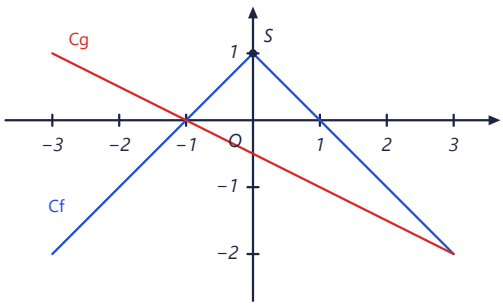
`]-1;2[ / ]-1;3] / [-1;3]` → Pour $m = -0{,}5$, le segment $[CD]$ n'est pas atteint : deux solutions seulement.

EXERCICE 69 · PRATIQUE

Les points où les courbes se croisent

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de la figure sont celles de deux fonctions f et g définies sur $[-3;3]$. $\mathcal{C}_f$ est formée de deux segments, qui joignent les points $(-3;-2)$, $S(0;1)$ et $(3;-2)$; $\mathcal{C}_g$ est le segment qui joint les points $(-3;1)$ et $(3;-2)$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

AF Maths à la carte KADER HAMMAMI



Les courbes Cf et Cg sur [−3 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O et deux courbes tracées de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 3. La courbe bleue Cf, celle de f, est formée de deux segments : elle monte en ligne droite du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée moins 2 jusqu'au point S d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, puis redescend en ligne droite jusqu'au point d'abscisse 3 et d'ordonnée moins 2. La courbe rouge Cg, celle de g, est un segment qui descend du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 1 jusqu'au point d'abscisse 3 et d'ordonnée moins 2. Les deux courbes se croisent sur l'axe des abscisses au point d'abscisse moins 1, et se rejoignent à leur extrémité droite, au point d'abscisse 3 et d'ordonnée moins 2. Entre ces deux points, la courbe bleue est au-dessus de la rouge ; à gauche du point d'abscisse moins 1, c'est la rouge qui est au-dessus.

Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {2;5} ».

Réponse attendue : `{-1;3}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les solutions sont les abscisses des points communs aux deux courbes.
2. Les courbes se croisent en un point de l'axe des abscisses... et ont-elles un autre point commun ?

CORRECTION

Le croisement — Les deux courbes passent par le point $(-1; 0)$.

$f(-1) = g(-1) = 0$

L'extrémité commune — Elles se rejoignent en $(3; -2)$.

$f(3) = g(3) = -2$

$S = \{-1; 3\}$

Résoudre $f(x) = g(x)$: lire les **abscisses** des points d'intersection des deux courbes, extrémités comprises.

PIÈGES ANTICIPÉS

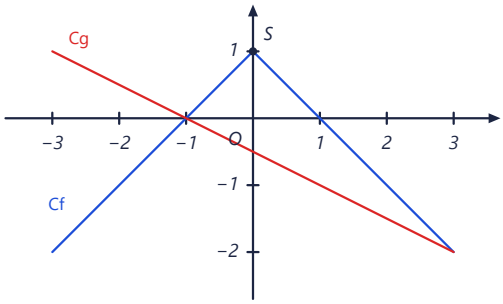
`{-1}` → Le point $(3; -2)$ est sur les deux courbes : $f(3) = g(3)$. C'est aussi une solution.

`{0;-2}` / `{-2;0}` → 0 et -2 sont les **ordonnées** des points communs. On demande leurs abscisses.

EXERCICE 70 · RAISONNEMENT

Quand f dépasse g

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de la figure sont celles de deux fonctions f et g définies sur $[-3; 3]$. $\mathcal{C}_f$ est formée de deux segments, qui joignent les points $(-3; -2)$, $S(0; 1)$ et $(3; -2)$; $\mathcal{C}_g$ est le segment qui joint les points $(-3; 1)$ et $(3; -2)$. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$.



Les courbes Cf et Cg sur [−3 ; 3].

Un repère orthonormé d'origine O et deux courbes tracées de l'abscisse moins 3 à l'abscisse 3. La courbe bleue Cf, celle de f, est formée de deux segments : elle monte en ligne droite du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée moins 2 jusqu'au point S d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, puis redescend en ligne droite jusqu'au point d'abscisse 3 et d'ordonnée moins 2. La courbe rouge Cg, celle de g, est un segment qui descend du point d'abscisse moins 3 et d'ordonnée 1 jusqu'au point d'abscisse 3 et d'ordonnée moins 2. Les deux courbes se croisent sur l'axe des abscisses au point d'abscisse moins 1, et se rejoignent à leur extrémité droite, au point d'abscisse 3 et d'ordonnée moins 2. Entre ces deux points, la courbe bleue est au-dessus de la rouge ; à gauche du point d'abscisse moins 1, c'est la rouge qui est au-dessus.

Écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle, par exemple «]1;4] ».

Réponse attendue : `]-1;3[` — aussi acceptées :]-1,3[· S=]-1;3[· S=]-1,3[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les solutions sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est **strictement au-dessus** de $\mathcal{C}_g$.
2. Repère d'abord les points communs : la courbe bleue passe-t-elle au-dessus ou au-dessous entre eux ?

CORRECTION

Les points communs —

$f(-1) = g(-1) \quad ; \quad f(3) = g(3)$

Au-dessus — Entre -1 et 3, la courbe bleue est au-dessus de la rouge ; avant -1, elle est au-dessous.

$S =]-1;3[$

$f(x) > g(x)$: là où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$, sans les points communs puisque l'inégalité est stricte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-1;3] / [-1,3] / [-1;3[ / ]-1;3]` → En -1 et en 3, $f(x) = g(x)$: l'inégalité stricte n'y est pas vérifiée.

`[-3;-1[ / ]-3;-1[ / [-3,-1[` → Sur cet intervalle, c'est $\mathcal{C}_g$ qui est au-dessus : $f(x) < g(x)$.

EXERCICE 71 · BASE **Le minimum d'un carré plus 3**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2 + 3$. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Donner le minimum.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un carré est toujours positif ou nul. Que peut-on dire de $f(x)$?
2. Pour quelle valeur de x le carré est-il nul ?

CORRECTION

Minorer — Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geq 0$.

$f(x) \geq 3$

Atteint —

$f(2) = 0 + 3 = 3$

3

Le minimum est la valeur $f(a) = 3$; il est atteint en $a = 2$. Ne pas confondre la valeur et l'endroit.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est le réel où le minimum est atteint. Le minimum est la valeur $f(2)$.

-2 → Le carré s'annule pour $x - 2 = 0$, soit $x = 2$; le minimum vaut $f(2)$.

EXERCICE 72 · BASE

Le maximum de 5 moins un carré

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - (x + 1)^2$. Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Donner le maximum.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On retranche un carré à 5 : le résultat peut-il dépasser 5 ?
2. Pour quelle valeur de x retranche-t-on 0 ?

CORRECTION

Majorer — Pour tout réel x, $(x + 1)^2 \geq 0$.

$f(x) \leq 5$

Atteint —

$f(-1) = 5 - 0 = 5$

5

Retrancher une quantité positive ou nulle donne un maximum, atteint quand cette quantité est nulle.

PIÈGES ANTICIPÉS

-1 → -1 est le réel où le maximum est atteint. Le maximum est la valeur $f(-1)$.

1 → $(x + 1)^2 = 0$ pour $x = -1$; mais on demande la valeur du maximum, $f(-1)$.

EXERCICE 73 · BASE

Le minimum sur un intervalle fermé

Soit f la fonction définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = 3 - x$. On admet que f est décroissante sur $[0; 4]$. Déterminer le minimum de f sur $[0; 4]$.

Donner le minimum.

Réponse attendue : -1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une fonction décroissante prend ses plus petites valeurs à droite de l'intervalle.
2. Calcule l'image de la borne de droite.

CORRECTION

Décroissante — Pour tout x de $[0; 4]$, $x \leq 4$ donne $f(x) \geq f(4)$.

$f(x) \geq f(4)$

$f(4) = 3 - 4 = -1$

Sur un intervalle fermé, une fonction décroissante atteint son minimum à la borne de droite, son maximum à celle de gauche.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $3 = f(0)$ est la plus grande valeur : c'est le maximum. Le minimum est à l'autre bout.

4 → 4 est le réel où le minimum est atteint ; le minimum est $f(4)$.

EXERCICE 74 · PRATIQUE

Le minimum lu dans les variations

Une fonction f est définie sur $[-2; 6]$. Elle est croissante sur $[-2; 1]$ et décroissante sur $[1; 6]$, avec $f(-2) = -3$, $f(1) = 4$ et $f(6) = -1$. Déterminer le minimum de f sur $[-2; 6]$.

Donner le minimum.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur chacun des deux intervalles, où se trouve la plus petite valeur ?
2. Compare les deux candidates : $f(-2)$ et $f(6)$.

CORRECTION

Sur [-2 ; 1] — f croît : la plus petite valeur est au départ.

$f(x) \geq f(-2) = -3$

Sur [1 ; 6] — f décroît : la plus petite valeur est à l'arrivée.

$f(x) \geq f(6) = -1$

Comparer —

$-3 < -1$

-3

Le minimum se cherche parmi les valeurs aux endroits où la fonction cesse de descendre : ici les deux bornes.

PIÈGES ANTICIPÉS

-1 → $f(6) = -1$, mais $f(-2) = -3$ est plus petit.

4 → $4 = f(1)$ est le maximum : f monte jusqu'à 1 puis redescend.

EXERCICE 75 · PRATIQUE

Un minimum par la différence

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Calculer $f(3)$, puis montrer que $f(x) - f(3) = (x - 3)^2$. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Donner le minimum.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par calculer $f(3)$ en remplaçant x par 3.
2. Développe $(x - 3)^2$ et compare avec $f(x) - f(3)$.
3. Quel est le signe de $f(x) - f(3)$?

CORRECTION

La valeur en 3 —

$f(3) = 9 - 18 + 11 = 2$

La différence —

$f(x) - 2 = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

Le signe — Un carré est positif ou nul.

$f(x) - f(3) \geq 0 \iff f(x) \geq f(3)$

2

Pour montrer que $f(a)$ est un minimum : étudier le signe de $f(x) - f(a)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est le réel où le minimum est atteint ; le minimum est $f(3)$.

11 → $11 = f(0)$. Or $f(3) = 2 < 11$: ce n'est pas le minimum.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Un maximum par la différence

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$. Vérifier que $f(x) - f(2) = -2(x-2)^2$. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Donner le maximum.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par calculer $f(2)$, puis développe $-2(x-2)^2$.
2. Quel est le signe de $-2(x-2)^2$?

CORRECTION

La valeur en 2 —

$f(2) = -8 + 16 - 5 = 3$

La différence —

$f(x) - 3 = -2x^2 + 8x - 8 = -2(x^2 - 4x + 4) = -2(x-2)^2$

Le signe — -2 fois un carré est négatif ou nul.

$f(x) - f(2) \leq 0 \iff f(x) \leq f(2)$

3

$f(x) - f(a) \leq 0$ pour tout x : $f(a)$ est le maximum.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est le réel où le maximum est atteint ; le maximum est $f(2)$.

-5 → $-5 = f(0)$. Le maximum est $f(2) = 3$.

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Le maximum d'une valeur absolue sur un intervalle

Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ par $f(x) = |x-3| + 2$: on prend la valeur absolue de $x - 3$, puis on ajoute 2. Déterminer le maximum de f sur $[0;5]$.

Donner le maximum.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. f décroît tant que $x - 3$ est négatif, puis croît. Où est le plus grand écart à 3 ?
2. Calcule $f(0)$ et $f(5)$, puis compare-les.

CORRECTION

Les variations — f est décroissante sur $[0;3]$ et croissante sur $[3;5]$.

Les candidates —

$f(0) = |-3| + 2 = 5 \quad ; \quad f(5) = |2| + 2 = 4$

Comparer — Pour tout x de $[0;5]$, $|x-3| \leq 3$.

$f(x) \leq 5 = f(0)$

5

Une fonction qui descend puis remonte a son maximum à l'une des deux bornes : on compare les deux images.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $f(5) = 4$, mais $f(0) = 5$ est plus grand : 0 est plus loin de 3 que 5.

2 → $2 = f(3)$ est le **minimum** de f.

-1 → $|0 - 3| = 3$, pas -3 : $f(0) = 3 + 2 = 5$.

EXERCICE 78 · RAISONNEMENT **Le maximum d'un quotient**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2}$. Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Donner le maximum.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le numérateur est fixe : le quotient est le plus grand quand le dénominateur est le plus petit.
2. Quelle est la plus petite valeur de $x^2 + 2$?

CORRECTION

Le dénominateur — Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$.

$x^2 + 2 \geq 2$

Le quotient — Diviser 4 par un nombre plus grand que 2 donne moins que 2.

$f(x) \leq \dfrac{4}{2} = 2 = f(0)$

2

Pour $\dfrac{k}{u}$ avec $k > 0$ et $u > 0$: u minimal donne le quotient maximal.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $f(x) = 4$ demanderait $x^2 + 2 = 1$: impossible. Le dénominateur vaut au moins 2.

0 → 0 est le réel où le maximum est atteint ; le maximum est $f(0)$.

EXERCICE 79 · DEFI **Un minimum en dehors de l'intervalle**

Soit f la fonction définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = x^2 + 4x$. Montrer que $f(x) - f(-1) = (x + 1)(x + 3)$, puis déterminer le minimum de f sur $[-1; 3]$.

Donner le minimum.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par calculer $f(-1)$, en mettant -1 entre parenthèses.
2. Développe $(x + 1)(x + 3)$ et compare.
3. Pour $x \geq -1$, quel est le signe de chacun des deux facteurs ?

CORRECTION

La valeur en -1 —

$f(-1) = 1 - 4 = -3$

La différence —

$f(x) + 3 = x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

Le signe sur [-1 ; 3] — $x + 1 \geq 0$ et $x + 3 > 0$.

$f(x) - f(-1) \geq 0$

-3

Le minimum dépend de l'intervalle : sur $\mathbb{R}$, f descend jusqu'à $f(-2) = -4$; mais -2 n'est pas dans $[-1;3]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4` → $-4 = f(-2)$, mais -2 n'appartient pas à $[-1;3]$: ce n'est pas une valeur prise sur l'intervalle.

`-1` → -1 est le réel où le minimum est atteint ; le minimum est $f(-1)$.

`0` → $f(0) = 0$, mais $f(-1) = -3$ est plus petit.

EXERCICE 80 · DEFI

Le plus grand enclos contre un mur

Un jardinier dispose de 40 mètres de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire adossé à un mur : le mur forme un côté, le grillage les trois autres. On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur, et $A(x)$ l'aire de l'enclos. Déterminer l'aire maximale de l'enclos, en mètres carrés, sans écrire l'unité.

Donner l'aire maximale.

Réponse attendue : `200`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le côté parallèle au mur mesure ce qui reste du grillage : $40 - 2x$. Exprime $A(x)$.
2. Développe et compare : quelle valeur x annule le carré dans la forme suivante ?
   $A(x) = A(10) - 2(x-10)^2$
3. Quel est le signe de $-2(x-10)^2$?

CORRECTION

L'aire — Pour $0 < x < 20$:

$A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$

La forme utile —

$200 - 2(x-10)^2 = 200 - 2x^2 + 40x - 200 = A(x)$

Majorer —

$A(x) \leq 200 = A(10)$

200

Côtés de 10 m perpendiculaires au mur, 20 m le long du mur : le maximum se prouve par le signe de $A(x) - A(10)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100` → Un carré de 10 m de côté n'utiliserait que 30 m de grillage ici. Avec $x = 10$, le côté le long du mur mesure 20 m.

`10` → 10 m est la longueur x qui donne le maximum. On demande l'aire $A(10)$.

EXERCICE 81 · DEFI

Un maximum qui ne se voit pas

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$. Montrer que $f(x) - 1 = -\dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$, puis déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Donner le maximum.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $f(x) - 1$ au même dénominateur $x^2 + 4$.
2. Le numérateur obtenu est l'opposé d'un carré : quel est le signe de la différence ?
3. Pour quelle valeur de x la différence est-elle nulle ?

CORRECTION

Même dénominateur —

$$f(x) - 1 = \frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + 4} = -\frac{(x-2)^2}{x^2 + 4}$$

Le signe — Un carré au numérateur, un dénominateur strictement positif.

$$f(x) - 1 \leq 0$$

Atteint —

$$f(2) = \frac{8}{8} = 1$$

1

Majorer $f(x)$ par 1 ne suffit pas : il faut aussi un réel où la valeur 1 est atteinte, ici $x = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est le réel où le maximum est atteint ; le maximum est $f(2)$.

4 → $f(x) - 1 \leq 0$: f ne dépasse jamais 1.

EXERCICE 82 · DEFI

Le minimum d'une somme et d'un quotient

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$: au carré de x, on ajoute le quotient de 16 par x^2. Montrer que $f(x) - 8 = \dfrac{(x^2-4)^2}{x^2}$, puis déterminer le minimum de f sur $]0;+\infty[$.

Donner le minimum.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $f(x) - 8$ au même dénominateur x^2.
2. Au numérateur, reconnais une identité remarquable :
   $x^4 - 8x^2 + 16$
3. Pour quel réel positif x a-t-on $x^2 = 4$?

CORRECTION

Même dénominateur —

$$f(x) - 8 = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2} = \frac{(x^2-4)^2}{x^2}$$

Le signe — Un carré sur un nombre strictement positif.

$$f(x) - 8 \geq 0$$

Atteint —

$$f(2) = 4 + \frac{16}{4} = 8$$

8

La différence $f(x) - m$ écrite comme un carré sur un positif prouve le minimum ; reste à trouver où elle s'annule.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est le réel où le minimum est atteint ; le minimum est $f(2)$.

17 → $17 = f(1)$. Or $f(2) = 8$ est plus petit.

EXERCICE 83 · BASE

Le sens d'une fonction affine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 2$. Pour deux réels $a \leq b$, calculer $f(b) - f(a)$, puis déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Répondre par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : décroissante sur IR · décroissante sur R · décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle IR · décroissante sur l'intervalle R · strictement décroissante · strictement décroissante sur IR · strictement décroissante sur R · strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle IR · strictement décroissante sur l'intervalle R · elle est décroissante · elle est décroissante sur IR · elle est décroissante sur R · elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle IR · elle est décroissante sur l'intervalle R · elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur IR · elle est strictement décroissante sur R · elle est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle IR · elle est strictement décroissante sur l'intervalle R · f est décroissante · f est décroissante sur IR · f est décroissante sur R · f est décroissante sur cet intervalle · f est décroissante sur l'intervalle IR · f est décroissante sur l'intervalle R · f est strictement décroissante · f est strictement décroissante sur IR · f est strictement décroissante sur R · f est strictement décroissante sur cet intervalle · f est strictement décroissante sur l'intervalle IR · f est strictement décroissante sur l'intervalle R · la fonction f est décroissante · la fonction f est décroissante sur IR · la fonction f est décroissante sur R · la fonction f est décroissante sur cet intervalle · la fonction f est décroissante sur l'intervalle IR · la fonction f est décroissante sur l'intervalle R · la fonction f est strictement décroissante · la fonction f est strictement décroissante sur IR · la fonction f est strictement décroissante sur R · la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle · la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle IR · la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle R · la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur IR · la fonction est décroissante sur R · la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle IR · la fonction est décroissante sur l'intervalle R · la fonction est strictement décroissante · la fonction est strictement décroissante sur IR · la fonction est strictement décroissante sur R · la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle · la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle IR · la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle R · c'est décroissante · c'est décroissante sur IR · c'est décroissante sur R · c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle IR · c'est décroissante sur l'intervalle R · c'est strictement décroissante · c'est strictement décroissante sur IR · c'est strictement décroissante sur R · c'est strictement décroissante sur cet intervalle · c'est strictement décroissante sur l'intervalle IR · c'est strictement décroissante sur l'intervalle R · fonction décroissante · fonction décroissante sur IR · fonction décroissante sur R · fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle IR · fonction décroissante sur l'intervalle R · fonction strictement décroissante · fonction strictement décroissante sur IR · fonction strictement décroissante sur R · fonction strictement décroissante sur cet intervalle · fonction strictement décroissante sur l'intervalle IR · fonction strictement décroissante sur l'intervalle R · est décroissante · est décroissante sur IR · est décroissante sur R · est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle IR · est décroissante sur l'intervalle R · est strictement décroissante · est strictement décroissante sur IR · est strictement décroissante sur R · est strictement décroissante sur cet intervalle · est strictement décroissante sur l'intervalle IR · est strictement décroissante sur l'intervalle R · décroît · décroît sur IR · décroît sur R · décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur IR · elle décroît sur R · elle décroît sur cet intervalle · f décroît · f décroît sur IR · f décroît sur R · f décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur IR · la fonction décroît sur R · la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction f décroît · la fonction f décroît sur IR · la fonction f décroît sur R · la fonction f décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · f est décroissant · décroissante sur $\mathbb{R}$ · décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ · strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ · elle est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ · elle est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · f est décroissante sur $\mathbb{R}$ · f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ · f est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ · la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ · la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$ · la fonction est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ · la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · c'est décroissante sur $\mathbb{R}$ · c'est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · c'est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ · c'est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ · fonction décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ · fonction strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · est décroissante sur $\mathbb{R}$ · est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ · est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ · décroît sur $\mathbb{R}$ · elle décroît sur $\mathbb{R}$ · f décroît sur $\mathbb{R}$ · la fonction décroît sur $\mathbb{R}$ · la fonction f décroît sur $\mathbb{R}$

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule et factorise :
   $$f(b) - f(a) = (-3b + 2) - (-3a + 2)$$
2. Si $a \leq b$, quel est le signe de $b - a$? Et celui de $-3(b - a)$?

CORRECTION

La différence —

$$f(b) - f(a) = -3b + 3a = -3(b - a)$$

Le signe — $b - a \geq 0$, multiplié par -3 : négatif ou nul.

$$f(b) - f(a) \leq 0$$

Donc $f(a) \geq f(b)$: f est décroissante.

$$f(b) - f(a) = -3(b - a) \leq 0$$

Étudier le sens de variation : prendre $a \leq b$ et chercher le signe de $f(b) - f(a)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

croissante / croissante sur IR / croissante sur R / croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle IR / croissante sur l'intervalle R / strictement croissante / strictement croissante sur IR / strictement croissante sur R / strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur l'intervalle IR / strictement croissante sur l'intervalle R / elle est croissante / elle est croissante sur IR / elle est croissante sur R / elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle IR / elle est croissante sur l'intervalle R / elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur IR / elle est strictement croissante sur R / elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle IR / elle est strictement croissante sur l'intervalle R / f est croissante / f est croissante sur IR / f est croissante sur R / f est croissante sur cet intervalle / f est croissante sur l'intervalle IR / f est croissante sur l'intervalle R / f est strictement croissante / f est strictement croissante sur IR / f est strictement croissante sur R / f est strictement croissante sur cet intervalle / f est strictement croissante sur l'intervalle IR / f est strictement croissante sur l'intervalle R / la fonction f est croissante / la fonction f est croissante sur IR / la fonction f est croissante sur R / la fonction f est croissante sur cet intervalle / la fonction f est croissante sur l'intervalle IR / la fonction f est croissante sur l'intervalle R / la fonction f est strictement croissante / la fonction f est strictement croissante sur IR / la fonction f est strictement croissante sur R / la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle / la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle IR / la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle R / la fonction est croissante / la fonction est croissante sur IR / la fonction est croissante sur R / la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle IR / la fonction est croissante sur l'intervalle R / la fonction est strictement croissante / la fonction est strictement croissante sur IR / la fonction est strictement croissante sur R / la fonction est strictement croissante sur cet intervalle / la fonction est strictement croissante sur l'intervalle IR / la fonction est strictement croissante sur l'intervalle R / c'est croissante / c'est croissante sur IR / c'est croissante sur R / c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle IR / c'est croissante sur l'intervalle R / c'est strictement croissante / c'est strictement croissante sur IR / c'est strictement croissante sur R / c'est strictement croissante sur cet intervalle / c'est strictement croissante sur l'intervalle IR / c'est strictement croissante sur l'intervalle R / fonction croissante / fonction croissante sur IR / fonction croissante sur R / fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle IR / fonction croissante sur l'intervalle R / fonction strictement croissante / fonction strictement croissante sur IR / fonction strictement croissante sur R / fonction strictement croissante sur cet intervalle / fonction strictement croissante sur l'intervalle IR / fonction strictement croissante sur l'intervalle R / est croissante / est croissante sur IR / est croissante sur R / est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle IR / est croissante sur l'intervalle R / est strictement croissante / est strictement croissante sur IR / est strictement croissante sur R / est strictement croissante sur cet intervalle / est strictement croissante sur l'intervalle IR / est strictement croissante sur l'intervalle R / croît / croît sur IR / croît sur R / croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur IR / elle croît sur R / elle croît sur cet intervalle / f croît / f croît sur IR / f croît sur R / f croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur IR / la fonction croît sur R / la fonction croît sur cet intervalle / la fonction f croît / la fonction f croît sur IR / la fonction f croît sur R / la fonction f croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / f est croissant / croissante sur $\mathbb{R}$ / croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / strictement croissante sur $\mathbb{R}$ / strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / elle est croissante sur $\mathbb{R}$ / elle est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ / elle est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / f est croissante sur $\mathbb{R}$ / f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ / f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ / la fonction f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ / la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ / la fonction est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ / la fonction est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / c'est croissante sur $\mathbb{R}$ / c'est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / c'est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ / c'est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / fonction croissante sur $\mathbb{R}$ / fonction croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ / fonction strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / est croissante sur $\mathbb{R}$ / est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ / est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ / croît sur $\mathbb{R}$ / elle croît sur $\mathbb{R}$ / f croît sur $\mathbb{R}$ / la fonction croît sur $\mathbb{R}$ / la fonction f croît sur $\mathbb{R}$ → $f(b) - f(a) = -3(b-a)$ est négatif quand $a \leq b$: les images vont dans le sens contraire.

EXERCICE 84 · PRATIQUE

Un carré à droite de son sommet

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$. Pour deux réels a et b de $[1;+\infty[$ tels que $a \leq b$, étudier le signe de $f(b) - f(a)$. Déterminer le sens de variation de f sur $[1;+\infty[$.

Répondre par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `croissante` — aussi acceptées : croissante sur [1;+inf[· croissante sur [1,+inf[· croissante sur cet intervalle · croissante sur l'intervalle [1;+inf[· croissante sur l'intervalle [1,+inf[· strictement croissante · strictement croissante sur [1;+inf[· strictement croissante sur [1,+inf[· strictement croissante sur cet intervalle · strictement croissante sur l'intervalle [1;+inf[· strictement croissante sur l'intervalle [1,+inf[· elle est croissante · elle est croissante sur [1;+inf[· elle est croissante sur [1,+inf[· elle est croissante sur cet intervalle · elle est croissante sur l'intervalle [1;+inf[· elle est croissante sur l'intervalle [1,+inf[· elle est strictement croissante · elle est strictement croissante sur [1;+inf[· elle est strictement croissante sur [1,+inf[· elle est strictement croissante sur cet intervalle · elle est strictement croissante sur l'intervalle [1;+inf[· elle est strictement croissante sur l'intervalle [1,+inf[· f est croissante · f est croissante sur [1;+inf[· f est croissante sur [1,+inf[· f est croissante sur cet intervalle · f est croissante sur l'intervalle [1;+inf[· f est croissante sur l'intervalle [1,+inf[· f est strictement croissante · f est strictement croissante sur [1;+inf[· f est strictement croissante sur [1,+inf[· f est strictement croissante sur cet intervalle · f est strictement croissante sur l'intervalle [1;+inf[· f est strictement croissante sur l'intervalle [1,+inf[· la fonction f est croissante · la fonction f est croissante sur [1;+inf[· la fonction f est croissante sur [1,+inf[· la fonction f est croissante sur cet intervalle · la fonction f est croissante sur l'intervalle [1;+inf[· la fonction f est croissante sur l'intervalle [1,+inf[· la fonction f est strictement croissante · la fonction f est strictement croissante sur [1;+inf[· la fonction f est strictement croissante sur [1,+inf[· la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle · la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [1;+inf[· la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [1,+inf[· la fonction est croissante · la fonction est croissante sur [1;+inf[· la fonction est croissante sur [1,+inf[· la fonction est croissante sur cet intervalle · la fonction est croissante sur l'intervalle [1;+inf[· la fonction est croissante sur l'intervalle [1,+inf[· la fonction est strictement croissante · la fonction est strictement croissante sur [1;+inf[· la fonction est strictement croissante sur [1,+inf[· la fonction est strictement croissante sur cet intervalle · la fonction est strictement croissante sur l'intervalle [1;+inf[· la fonction est strictement croissante sur l'intervalle [1,+inf[· c'est croissante · c'est croissante sur [1;+inf[· c'est croissante sur [1,+inf[· c'est croissante sur cet intervalle · c'est croissante sur l'intervalle [1;+inf[· c'est croissante sur l'intervalle [1,+inf[· c'est strictement croissante · c'est strictement croissante sur [1;+inf[· c'est strictement croissante sur [1,+inf[· c'est strictement croissante sur cet intervalle · c'est strictement croissante sur l'intervalle [1;+inf[· c'est strictement croissante sur l'intervalle [1,+inf[· fonction croissante · fonction croissante sur [1;+inf[· fonction croissante sur [1,+inf[· fonction croissante sur cet intervalle · fonction croissante sur l'intervalle [1;+inf[· fonction croissante sur l'intervalle [1,+inf[· fonction strictement croissante · fonction strictement croissante sur [1;+inf[· fonction strictement croissante sur [1,+inf[· fonction strictement croissante sur cet intervalle · fonction strictement croissante sur l'intervalle [1;+inf[· fonction strictement croissante sur l'intervalle [1,+inf[· est croissante · est croissante sur [1;+inf[· est croissante sur [1,+inf[· est croissante sur cet intervalle · est croissante sur l'intervalle [1;+inf[· est croissante sur l'intervalle [1,+inf[· est strictement croissante · est strictement croissante sur [1;+inf[· est strictement croissante sur [1,+inf[· est strictement croissante sur cet intervalle · est strictement croissante sur l'intervalle [1;+inf[· est strictement croissante sur l'intervalle [1,+inf[· croît · croît sur [1;+inf[· croît sur [1,+inf[· croît sur cet intervalle · elle croît · elle croît sur [1;+inf[· elle croît sur [1,+inf[· elle croît sur cet intervalle · f croît · f croît sur [1;+inf[· f croît sur [1,+inf[· f croît sur cet intervalle · la fonction croît · la fonction croît sur [1;+inf[· la fonction croît sur [1,+inf[· la fonction croît sur cet intervalle · la fonction f croît · la fonction f croît sur [1;+inf[· la fonction f croît sur [1,+inf[· la fonction f croît sur cet intervalle · croissant · croissantes · elle est croissant · f est croissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise une différence de deux carrés :
   $(b-1)^2-(a-1)^2=(b-a)(a+b-2)$
2. Si $a \geq 1$ et $b \geq 1$, quel est le signe de $a+b-2$?

CORRECTION

La différence —

$f(b)-f(a)=(b-1)^2-(a-1)^2=(b-a)(a+b-2)$

Les signes — $b-a \geq 0$; et $a+b \geq 2$ puisque $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

$f(b)-f(a) \geq 0$

Donc $f(a) \leq f(b)$: f est croissante.

$f(b)-f(a)=(b-a)(a+b-2) \geq 0$

Une différence de carrés se factorise : $B^2-A^2=(B-A)(B+A)$; le signe de chaque facteur se lit sur l'intervalle.

PIÈGES ANTICIPÉS

décroissante / décroissante sur [1;+inf[/ décroissante sur [1,+inf[/ décroissante sur cet intervalle / décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ strictement décroissante / strictement décroissante sur [1;+inf[/ strictement décroissante sur [1,+inf[/ strictement décroissante sur cet intervalle / strictement décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ strictement décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ elle est décroissante / elle est décroissante sur [1;+inf[/ elle est décroissante sur [1,+inf[/ elle est décroissante sur cet intervalle / elle est décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ elle est décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ elle est strictement décroissante / elle est strictement décroissante sur [1;+inf[/ elle est strictement décroissante sur [1,+inf[/ elle est strictement décroissante sur cet intervalle / elle est strictement décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ elle est

strictement décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ f est décroissante / f est décroissante sur [1;+inf[/ f est décroissante sur [1,+inf[/ f est décroissante sur cet intervalle / f est décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ f est décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ f est strictement décroissante / f est strictement décroissante sur [1;+inf[/ f est strictement décroissante sur [1,+inf[/ f est strictement décroissante sur cet intervalle / f est strictement décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ f est strictement décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ la fonction f est décroissante / la fonction f est décroissante sur [1;+inf[/ la fonction f est décroissante sur [1,+inf[/ la fonction f est décroissante sur cet intervalle / la fonction f est décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ la fonction f est décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ la fonction f est strictement décroissante / la fonction f est strictement décroissante sur [1;+inf[/ la fonction f est strictement décroissante sur [1,+inf[/ la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle / la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ la fonction est décroissante / la fonction est décroissante sur [1;+inf[/ la fonction est décroissante sur [1,+inf[/ la fonction est décroissante sur cet intervalle / la fonction est décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ la fonction est décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ la fonction est strictement décroissante / la fonction est strictement décroissante sur [1;+inf[/ la fonction est strictement décroissante sur [1,+inf[/ la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle / la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ c'est décroissante / c'est décroissante sur [1;+inf[/ c'est décroissante sur [1,+inf[/ c'est décroissante sur cet intervalle / c'est décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ c'est décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ c'est strictement décroissante / c'est strictement décroissante sur [1;+inf[/ c'est strictement décroissante sur [1,+inf[/ c'est strictement décroissante sur cet intervalle / c'est strictement décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ c'est strictement décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ fonction décroissante / fonction décroissante sur [1;+inf[/ fonction décroissante sur [1,+inf[/ fonction décroissante sur cet intervalle / fonction décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ fonction décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ fonction strictement décroissante / fonction strictement décroissante sur [1;+inf[/ fonction strictement décroissante sur [1,+inf[/ fonction strictement décroissante sur cet intervalle / fonction strictement décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ fonction strictement décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ est décroissante / est décroissante sur [1;+inf[/ est décroissante sur [1,+inf[/ est décroissante sur cet intervalle / est décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ est décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ est strictement décroissante / est strictement décroissante sur [1;+inf[/ est strictement décroissante sur [1,+inf[/ est strictement décroissante sur cet intervalle / est strictement décroissante sur l'intervalle [1;+inf[/ est strictement décroissante sur l'intervalle [1,+inf[/ décroît / décroît sur [1;+inf[/ décroît sur [1,+inf[/ décroît sur cet intervalle / elle décroît / elle décroît sur [1;+inf[/ elle décroît sur [1,+inf[/ elle décroît sur cet intervalle / f décroît / f décroît sur [1;+inf[/ f décroît sur [1,+inf[/ f décroît sur cet intervalle / la fonction décroît / la fonction décroît sur [1;+inf[/ la fonction décroît sur [1,+inf[/ la fonction décroît sur cet intervalle / la fonction f décroît / la fonction f décroît sur [1;+inf[/ la fonction f décroît sur [1,+inf[/ la fonction f décroît sur cet intervalle / décroissant / décroissantes / elle est décroissant / f est décroissant → Teste : $f(2) = 1$ et $f(3) = 4$. Les images augmentent quand x augmente.

EXERCICE 85 · PRATIQUE

Le sens d'un inverse décalé

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Pour deux réels $-2 < a \leq b$, étudier le signe de $f(b) - f(a)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]-2;+\infty[$.

Répondre par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : décroissante sur]-2;+inf[· décroissante sur]-2,+inf[· décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· strictement décroissante · strictement décroissante sur]-2;+inf[· strictement décroissante sur]-2,+inf[· strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· strictement décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· elle est décroissante · elle est décroissante sur]-2;+inf[· elle est décroissante sur]-2,+inf[· elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· elle est décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur]-2;+inf[· elle est strictement décroissante sur]-2,+inf[· elle est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· elle est strictement décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· f est décroissante · f est décroissante sur]-2;+inf[· f est décroissante sur]-2,+inf[· f est décroissante sur cet intervalle · f est décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· f est décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· f est strictement décroissante · f est strictement décroissante sur]-2;+inf[· f est strictement décroissante sur]-2,+inf[· f est strictement décroissante sur cet intervalle · f est strictement décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· f est strictement décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· la fonction f est décroissante · la fonction f est décroissante sur]-2;+inf[· la fonction f est décroissante sur]-2,+inf[· la fonction f est décroissante sur cet intervalle · la fonction f est décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· la fonction f est décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· la fonction f est strictement décroissante · la fonction f est strictement décroissante sur]-2;+inf[· la fonction f est strictement décroissante sur]-2,+inf[· la fonction f est strictement décroissante sur cet

intervalle · la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur]-2;+inf[· la fonction est décroissante sur]-2,+inf[· la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· la fonction est décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· la fonction est strictement décroissante · la fonction est strictement décroissante sur]-2;+inf[· la fonction est strictement décroissante sur]-2,+inf[· la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle · la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· c'est décroissante · c'est décroissante sur]-2;+inf[· c'est décroissante sur]-2,+inf[· c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· c'est décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· c'est strictement décroissante · c'est strictement décroissante sur]-2;+inf[· c'est strictement décroissante sur]-2,+inf[· c'est strictement décroissante sur cet intervalle · c'est strictement décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· c'est strictement décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· fonction décroissante · fonction décroissante sur]-2;+inf[· fonction décroissante sur]-2,+inf[· fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· fonction décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· fonction strictement décroissante · fonction strictement décroissante sur]-2;+inf[· fonction strictement décroissante sur]-2,+inf[· fonction strictement décroissante sur cet intervalle · fonction strictement décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· fonction strictement décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· est décroissante · est décroissante sur]-2;+inf[· est décroissante sur]-2,+inf[· est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· est décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· est strictement décroissante · est strictement décroissante sur]-2;+inf[· est strictement décroissante sur]-2,+inf[· est strictement décroissante sur cet intervalle · est strictement décroissante sur l'intervalle]-2;+inf[· est strictement décroissante sur l'intervalle]-2,+inf[· décroît · décroît sur]-2;+inf[· décroît sur]-2,+inf[· décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur]-2;+inf[· elle décroît sur]-2,+inf[· elle décroît sur cet intervalle · f décroît · f décroît sur]-2;+inf[· f décroît sur]-2,+inf[· f décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur]-2;+inf[· la fonction décroît sur]-2,+inf[· la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction f décroît · la fonction f décroît sur]-2;+inf[· la fonction f décroît sur]-2,+inf[· la fonction f décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · f est décroissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $\dfrac{1}{b+2} - \dfrac{1}{a+2}$ au même dénominateur.
2. Sur $]-2;+\infty[$, quel est le signe de $a+2$ et de $b+2$? Et celui de $a-b$?

CORRECTION

Même dénominateur —

$$f(b) - f(a) = \frac{(a+2)-(b+2)}{(a+2)(b+2)} = \frac{a-b}{(a+2)(b+2)}$$

Les signes — $a-b \leq 0$; $a+2>0$ et $b+2>0$.

$f(b) - f(a) \leq 0$

Donc $f(a) \geq f(b)$: f est décroissante.

$$f(b) - f(a) = \frac{a-b}{(a+2)(b+2)} \leq 0$$

Pour un quotient, on réduit $f(b) - f(a)$ au même dénominateur, puis on lit le signe de chaque morceau.

PIÈGES ANTICIPÉS

croissante / croissante sur]-2;+inf[/ croissante sur]-2,+inf[/ croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ strictement croissante / strictement croissante sur]-2;+inf[/ strictement croissante sur]-2,+inf[/ strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ strictement croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ elle est croissante / elle est croissante sur]-2;+inf[/ elle est croissante sur]-2,+inf[/ elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ elle est croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur]-2;+inf[/ elle est strictement croissante sur]-2,+inf[/ elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ elle est strictement croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ f est croissante / f est croissante sur]-2;+inf[/ f est croissante sur]-2,+inf[/ f est croissante sur cet intervalle / f est croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ f est croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ f est strictement croissante / f est strictement croissante sur]-2;+inf[/ f est strictement croissante sur]-2,+inf[/ f est strictement croissante sur cet intervalle / f est strictement croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ f est strictement croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ la fonction f est croissante / la fonction f est croissante sur]-2;+inf[/ la fonction f est croissante sur]-2,+inf[/ la fonction f est croissante sur cet intervalle / la fonction f est croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ la fonction f est croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ la fonction f est strictement croissante / la fonction f est strictement croissante sur]-2;+inf[/ la fonction f est strictement croissante sur]-2,+inf[/ la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle / la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ la fonction est croissante

/ la fonction est croissante sur]-2;+inf[/ la fonction est croissante sur]-2,+inf[/ la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ la fonction est croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ la fonction est strictement croissante / la fonction est strictement croissante sur]-2;+inf[/ la fonction est strictement croissante sur]-2,+inf[/ la fonction est strictement croissante sur cet intervalle / la fonction est strictement croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ la fonction est strictement croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ c'est croissante / c'est croissante sur]-2;+inf[/ c'est croissante sur]-2,+inf[/ c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ c'est croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ c'est strictement croissante / c'est strictement croissante sur]-2;+inf[/ c'est strictement croissante sur]-2,+inf[/ c'est strictement croissante sur cet intervalle / c'est strictement croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ c'est strictement croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ fonction croissante / fonction croissante sur]-2;+inf[/ fonction croissante sur]-2,+inf[/ fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ fonction croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ fonction strictement croissante / fonction strictement croissante sur]-2;+inf[/ fonction strictement croissante sur]-2,+inf[/ fonction strictement croissante sur cet intervalle / fonction strictement croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ fonction strictement croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ est croissante / est croissante sur]-2;+inf[/ est croissante sur]-2,+inf[/ est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ est croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ est strictement croissante / est strictement croissante sur]-2;+inf[/ est strictement croissante sur]-2,+inf[/ est strictement croissante sur cet intervalle / est strictement croissante sur l'intervalle]-2;+inf[/ est strictement croissante sur l'intervalle]-2,+inf[/ croît / croît sur]-2;+inf[/ croît sur]-2,+inf[/ croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur]-2;+inf[/ elle croît sur]-2,+inf[/ elle croît sur cet intervalle / f croît / f croît sur]-2;+inf[/ f croît sur]-2,+inf[/ f croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur]-2;+inf[/ la fonction croît sur]-2,+inf[/ la fonction croît sur cet intervalle / la fonction f croît / la fonction f croît sur]-2;+inf[/ la fonction f croît sur]-2,+inf[/ la fonction f croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / f est croissant → Teste : $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(2) = \frac{1}{4}$. Quand x augmente, le dénominateur grandit et le quotient diminue.

EXERCICE 86 · PRATIQUE

Où une valeur absolue décroît

Soit f la fonction définie sur $[-4;2]$ par $f(x) = |x+1| - 3$: on prend la valeur absolue de $x+1$, puis on retranche 3. Déterminer l'intervalle sur lequel f est décroissante.

Écrire l'intervalle, par exemple « [1;3] ».

Réponse attendue : `[-4;-1]` — aussi acceptées : sur [-4;-1] · décroissante sur [-4;-1] · f est décroissante sur [-4;-1] · I=[-4;-1] · l'intervalle [-4;-1] · sur l'intervalle [-4;-1] · [-4,-1] · sur [-4,-1] · décroissante sur [-4,-1] · f est décroissante sur [-4,-1] · I=[-4,-1]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $x \leq -1$, $x+1$ est négatif : écris $f(x)$ sans valeur absolue.
2. Sur $[-4;-1]$, $f(x) = -x - 4$. Quand x augmente, que fait $-x-4$?

CORRECTION

Sans valeur absolue — Pour $-4 \leq x \leq -1$, $|x+1| = -(x+1)$.

$f(x) = -x - 1 - 3 = -x - 4$

Le sens — Pour $a \leq b$ dans $[-4;-1]$: $f(b) - f(a) = -(b-a) \leq 0$.

$[-4;-1]$

Une valeur absolue $|x-c|$ décroît jusqu'à c, puis croît : sur $[-1;2]$, $f(x) = x - 2$ est croissante.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-1;2]` / `[-1,2]` → Sur $[-1;2]$, $f(x) = x - 2$: f y est croissante.

`[-4;1]` / `[1;2]` → La valeur absolue change d'expression là où $x + 1 = 0$, soit en $x = -1$.

`[-3;0]` → On répond par un intervalle d'**abscisses** : là où la courbe descend.

EXERCICE 87 · RAISONNEMENT

Le sens d'une racine

Soit f la fonction définie sur $[-4;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+4}$. Pour deux réels $-4\le a<b$, montrer que $f(b)-f(a)=\dfrac{b-a}{\sqrt{b+4}+\sqrt{a+4}}$. Déterminer le sens de variation de f sur $[-4;+\infty[$.

Répondre par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `croissante` — aussi acceptées : croissante sur [-4;+inf[· croissante sur [-4,+inf[· croissante sur cet intervalle · croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· strictement croissante · strictement croissante sur [-4;+inf[· strictement croissante sur [-4,+inf[· strictement croissante sur cet intervalle · strictement croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· strictement croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· elle est croissante · elle est croissante sur [-4;+inf[· elle est croissante sur [-4,+inf[· elle est croissante sur cet intervalle · elle est croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· elle est croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· elle est strictement croissante · elle est strictement croissante sur [-4;+inf[· elle est strictement croissante sur [-4,+inf[· elle est strictement croissante sur cet intervalle · elle est strictement croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· elle est strictement croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· f est croissante · f est croissante sur [-4;+inf[· f est croissante sur [-4,+inf[· f est croissante sur cet intervalle · f est croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· f est croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· f est strictement croissante · f est strictement croissante sur [-4;+inf[· f est strictement croissante sur [-4,+inf[· f est strictement croissante sur cet intervalle · f est strictement croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· f est strictement croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· la fonction f est croissante · la fonction f est croissante sur [-4;+inf[· la fonction f est croissante sur [-4,+inf[· la fonction f est croissante sur cet intervalle · la fonction f est croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· la fonction f est croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· la fonction f est strictement croissante · la fonction f est strictement croissante sur [-4;+inf[· la fonction f est strictement croissante sur [-4,+inf[· la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle · la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· la fonction est croissante · la fonction est croissante sur [-4;+inf[· la fonction est croissante sur [-4,+inf[· la fonction est croissante sur cet intervalle · la fonction est croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· la fonction est croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· la fonction est strictement croissante · la fonction est strictement croissante sur [-4;+inf[· la fonction est strictement croissante sur [-4,+inf[· la fonction est strictement croissante sur cet intervalle · la fonction est strictement croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· la fonction est strictement croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· c'est croissante · c'est croissante sur [-4;+inf[· c'est croissante sur [-4,+inf[· c'est croissante sur cet intervalle · c'est croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· c'est croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· c'est strictement croissante · c'est strictement croissante sur [-4;+inf[· c'est strictement croissante sur [-4,+inf[· c'est strictement croissante sur cet intervalle · c'est strictement croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· c'est strictement croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· fonction croissante · fonction croissante sur [-4;+inf[· fonction croissante sur [-4,+inf[· fonction croissante sur cet intervalle · fonction croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· fonction croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· fonction strictement croissante · fonction strictement croissante sur [-4;+inf[· fonction strictement croissante sur [-4,+inf[· fonction strictement croissante sur cet intervalle · fonction strictement croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· fonction strictement croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· est croissante · est croissante sur [-4;+inf[· est croissante sur [-4,+inf[· est croissante sur cet intervalle · est croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· est croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· est strictement croissante · est strictement croissante sur [-4;+inf[· est strictement croissante sur [-4,+inf[· est strictement croissante sur cet intervalle · est strictement croissante sur l'intervalle [-4;+inf[· est strictement croissante sur l'intervalle [-4,+inf[· croît · croît sur [-4;+inf[· croît sur [-4,+inf[· croît sur cet intervalle · elle croît · elle croît sur [-4;+inf[· elle croît sur [-4,+inf[· elle croît sur cet intervalle · f croît · f croît sur [-4;+inf[· f croît sur [-4,+inf[· f croît sur cet intervalle · la fonction croît · la fonction croît sur [-4;+inf[· la fonction croît sur [-4,+inf[· la fonction croît sur cet intervalle · la fonction f croît · la fonction f croît sur [-4;+inf[· la fonction f croît sur [-4,+inf[· la fonction f croît sur cet intervalle · croissant · croissantes · elle est croissant · f est croissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie $\sqrt{b+4}-\sqrt{a+4}$ par l'expression conjuguée $\sqrt{b+4}+\sqrt{a+4}$.
2. Utilise l'identité :
$$(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})=B-A$$
3. Quel est le signe du numérateur ? Du dénominateur ?

CORRECTION

L'expression conjuguée — Le dénominateur est strictement positif, car $b+4>0$.

$$f(b)-f(a)=\frac{(b+4)-(a+4)}{\sqrt{b+4}+\sqrt{a+4}}=\frac{b-a}{\sqrt{b+4}+\sqrt{a+4}}$$

Le signe — $b-a>0$ et le dénominateur est positif.

$$f(b)-f(a)>0$$

Donc $f(a)<f(b)$: f est croissante.

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{\sqrt{b+4}+\sqrt{a+4}}>0$$

Pour une différence de racines, l'expression conjuguée fait apparaître $b-a$, dont le signe est connu.

PIÈGES ANTICIPÉS

décroissante / décroissante sur [-4;+inf[/ décroissante sur [-4,+inf[/ décroissante sur cet intervalle / décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ strictement décroissante / strictement décroissante sur [-4;+inf[/ strictement décroissante sur [-4,+inf[/ strictement décroissante sur cet intervalle / strictement décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ strictement décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ elle est décroissante / elle est décroissante sur [-4;+inf[/ elle est décroissante sur [-4,+inf[/ elle est décroissante sur cet intervalle / elle est décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ elle est décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ elle est strictement décroissante / elle est strictement décroissante sur [-4;+inf[/ elle est strictement décroissante sur [-4,+inf[/ elle est strictement décroissante sur cet intervalle / elle est strictement décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ elle est strictement décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ f est décroissante / f est décroissante sur [-4;+inf[/ f est décroissante sur [-4,+inf[/ f est décroissante sur cet intervalle / f est décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ f est décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ f est strictement décroissante / f est strictement décroissante sur [-4;+inf[/ f est strictement décroissante sur [-4,+inf[/ f est strictement décroissante sur cet intervalle / f est strictement décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ f est strictement décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ la fonction f est décroissante / la fonction f est décroissante sur [-4;+inf[/ la fonction f est décroissante sur [-4,+inf[/ la fonction f est décroissante sur cet intervalle / la fonction f est décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ la fonction f est décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ la fonction f est strictement décroissante / la fonction f est strictement décroissante sur [-4;+inf[/ la fonction f est strictement décroissante sur [-4,+inf[/ la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle / la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ la fonction est décroissante / la fonction est décroissante sur [-4;+inf[/ la fonction est décroissante sur [-4,+inf[/ la fonction est décroissante sur cet intervalle / la fonction est décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ la fonction est décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ la fonction est strictement décroissante / la fonction est strictement décroissante sur [-4;+inf[/ la fonction est strictement décroissante sur [-4,+inf[/ la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle / la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ c'est décroissante / c'est décroissante sur [-4;+inf[/ c'est décroissante sur [-4,+inf[/ c'est décroissante sur cet intervalle / c'est décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ c'est décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ c'est strictement décroissante / c'est strictement décroissante sur [-4;+inf[/ c'est strictement décroissante sur [-4,+inf[/ c'est strictement décroissante sur cet intervalle / c'est strictement décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ c'est strictement décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ fonction décroissante / fonction décroissante sur [-4;+inf[/ fonction décroissante sur [-4,+inf[/ fonction décroissante sur cet intervalle / fonction décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ fonction décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ fonction strictement décroissante / fonction strictement décroissante sur [-4;+inf[/ fonction strictement décroissante sur [-4,+inf[/ fonction strictement décroissante sur cet intervalle / fonction strictement décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ fonction strictement décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ est décroissante / est décroissante sur [-4;+inf[/ est décroissante sur [-4,+inf[/ est décroissante sur cet intervalle / est décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ est décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ est strictement décroissante / est strictement décroissante sur [-4;+inf[/ est strictement décroissante sur [-4,+inf[/ est strictement décroissante sur cet intervalle / est strictement décroissante sur l'intervalle [-4;+inf[/ est strictement décroissante sur l'intervalle [-4,+inf[/ décroît / décroît sur [-4;+inf[/ décroît sur [-4,+inf[/ décroît sur cet intervalle / elle décroît / elle décroît sur [-4;+inf[/ elle décroît sur [-4,+inf[/ elle décroît sur cet intervalle / f décroît / f décroît sur [-4;+inf[/ f décroît sur [-4,+inf[/ f décroît sur cet intervalle / la fonction décroît / la fonction décroît sur [-4;+inf[/ la fonction décroît sur [-4,+inf[/ la fonction décroît sur cet intervalle / la fonction f décroît / la fonction f décroît sur [-4;+inf[/ la fonction f décroît sur [-4,+inf[/ la fonction f décroît sur cet intervalle / décroissant / décroissantes / elle est décroissant / f est décroissant → Teste : $f(0) = 2$ et $f(5) = 3$. La racine augmente quand ce qu'elle contient augmente.

EXERCICE 88 · RAISONNEMENT

Retourner et décaler une fonction

Une fonction f est décroissante sur $[-2;3]$. Soit g la fonction définie sur $[-2;3]$ par $g(x) = 5 - 2f(x)$. Déterminer le sens de variation de g sur $[-2;3]$.

Répondre par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `croissante` — aussi acceptées : croissante sur [-2;3] · croissante sur [-2,3] · croissante sur cet intervalle · croissante sur l'intervalle [-2;3] · croissante sur l'intervalle [-2,3] · strictement croissante · strictement croissante sur [-2;3] · strictement croissante sur [-2,3] · strictement croissante sur cet intervalle · strictement croissante sur l'intervalle [-2;3] · strictement croissante sur l'intervalle [-2,3] · elle est croissante · elle est croissante sur [-2;3] · elle est croissante sur [-2,3] · elle est croissante sur cet intervalle · elle est croissante sur l'intervalle [-2;3] · elle est croissante sur l'intervalle [-2,3] · elle est strictement croissante ·

elle est strictement croissante sur [-2;3] · elle est strictement croissante sur [-2,3] · elle est strictement croissante sur cet intervalle · elle est strictement croissante sur l'intervalle [-2;3] · elle est strictement croissante sur l'intervalle [-2,3] · g est croissante · g est croissante sur [-2;3] · g est croissante sur [-2,3] · g est croissante sur cet intervalle · g est croissante sur l'intervalle [-2;3] · g est croissante sur l'intervalle [-2,3] · g est strictement croissante · g est strictement croissante sur [-2;3] · g est strictement croissante sur [-2,3] · g est strictement croissante sur cet intervalle · g est strictement croissante sur l'intervalle [-2;3] · g est strictement croissante sur l'intervalle [-2,3] · la fonction g est croissante · la fonction g est croissante sur [-2;3] · la fonction g est croissante sur [-2,3] · la fonction g est croissante sur cet intervalle · la fonction g est croissante sur l'intervalle [-2;3] · la fonction g est croissante sur l'intervalle [-2,3] · la fonction g est strictement croissante · la fonction g est strictement croissante sur [-2;3] · la fonction g est strictement croissante sur [-2,3] · la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle · la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle [-2;3] · la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle [-2,3] · la fonction est croissante · la fonction est croissante sur [-2;3] · la fonction est croissante sur [-2,3] · la fonction est croissante sur cet intervalle · la fonction est croissante sur l'intervalle [-2;3] · la fonction est croissante sur l'intervalle [-2,3] · la fonction est strictement croissante · la fonction est strictement croissante sur [-2;3] · la fonction est strictement croissante sur [-2,3] · la fonction est strictement croissante sur cet intervalle · la fonction est strictement croissante sur l'intervalle [-2;3] · la fonction est strictement croissante sur l'intervalle [-2,3] · c'est croissante · c'est croissante sur [-2;3] · c'est croissante sur [-2,3] · c'est croissante sur cet intervalle · c'est croissante sur l'intervalle [-2;3] · c'est croissante sur l'intervalle [-2,3] · c'est strictement croissante · c'est strictement croissante sur [-2;3] · c'est strictement croissante sur [-2,3] · c'est strictement croissante sur cet intervalle · c'est strictement croissante sur l'intervalle [-2;3] · c'est strictement croissante sur l'intervalle [-2,3] · fonction croissante · fonction croissante sur [-2;3] · fonction croissante sur [-2,3] · fonction croissante sur cet intervalle · fonction croissante sur l'intervalle [-2;3] · fonction croissante sur l'intervalle [-2,3] · fonction strictement croissante · fonction strictement croissante sur [-2;3] · fonction strictement croissante sur [-2,3] · fonction strictement croissante sur cet intervalle · fonction strictement croissante sur l'intervalle [-2;3] · fonction strictement croissante sur l'intervalle [-2,3] · est croissante · est croissante sur [-2;3] · est croissante sur [-2,3] · est croissante sur cet intervalle · est croissante sur l'intervalle [-2;3] · est croissante sur l'intervalle [-2,3] · est strictement croissante · est strictement croissante sur [-2;3] · est strictement croissante sur [-2,3] · est strictement croissante sur cet intervalle · est strictement croissante sur l'intervalle [-2;3] · est strictement croissante sur l'intervalle [-2,3] · croît · croît sur [-2;3] · croît sur [-2,3] · croît sur cet intervalle · elle croît · elle croît sur [-2;3] · elle croît sur [-2,3] · elle croît sur cet intervalle · g croît · g croît sur [-2;3] · g croît sur [-2,3] · g croît sur cet intervalle · la fonction croît · la fonction croît sur [-2;3] · la fonction croît sur [-2,3] · la fonction croît sur cet intervalle · la fonction g croît · la fonction g croît sur [-2;3] · la fonction g croît sur [-2,3] · la fonction g croît sur cet intervalle · croissant · croissantes · elle est croissant · g est croissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends $a \leq b$ dans $[-2;3]$. Que sais-tu du signe de $f(b) - f(a)$?
2. Exprime :
$$g(b) - g(a) = -2\big(f(b) - f(a)\big)$$

CORRECTION

L'hypothèse — f décroissante et $a \leq b$:
$$f(b) - f(a) \leq 0$$

La différence pour g — Le 5 disparaît dans la différence.
$$g(b) - g(a) = -2f(b) + 2f(a) = -2\big(f(b) - f(a)\big)$$

Un négatif multiplié par -2 est positif : g est croissante.
$$g(b) - g(a) = -2\big(f(b) - f(a)\big) \geq 0$$

Ajouter une constante ne change pas le sens de variation ; multiplier par un nombre négatif l'inverse.

PIÈGES ANTICIPÉS

décroissante / décroissante sur [-2;3] / décroissante sur [-2,3] / décroissante sur cet intervalle / décroissante sur l'intervalle [-2;3] / décroissante sur l'intervalle [-2,3] / strictement décroissante / strictement décroissante sur [-2;3] / strictement décroissante sur [-2,3] / strictement décroissante sur cet intervalle / strictement décroissante sur l'intervalle [-2;3] / strictement décroissante sur l'intervalle [-2,3] / elle est décroissante / elle est décroissante sur [-2;3] / elle est décroissante sur [-2,3] / elle est décroissante sur cet intervalle / elle est décroissante sur l'intervalle [-2;3] / elle est décroissante sur l'intervalle [-2,3] / elle est strictement décroissante / elle est strictement décroissante sur [-2;3] / elle est strictement décroissante sur [-2,3] / elle est strictement décroissante sur cet intervalle / elle est strictement décroissante sur l'intervalle [-2;3] / elle est strictement décroissante sur l'intervalle [-2,3] / g est décroissante / g est décroissante sur [-2;3] / g est décroissante sur [-2,3] / g est décroissante sur cet intervalle / g est décroissante sur l'intervalle [-2;3] / g est décroissante sur l'intervalle [-2,3] / g est strictement décroissante / g est strictement décroissante sur [-2;3] / g est strictement décroissante sur [-2,3] / g est strictement décroissante sur cet intervalle / g est strictement décroissante sur l'intervalle [-2;3] / g est strictement décroissante sur l'intervalle [-2,3] / la fonction g est décroissante / la fonction g est décroissante sur [-2;3] / la fonction g est décroissante sur [-2,3] / la fonction g est décroissante sur cet intervalle / la fonction g est

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

décroissante sur l'intervalle [-2;3] / la fonction g est décroissante sur l'intervalle [-2,3] / la fonction g est strictement décroissante / la fonction g est strictement décroissante sur [-2;3] / la fonction g est strictement décroissante sur [-2,3] / la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle / la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [-2;3] / la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [-2,3] / la fonction est décroissante / la fonction est décroissante sur [-2;3] / la fonction est décroissante sur [-2,3] / la fonction est décroissante sur cet intervalle / la fonction est décroissante sur l'intervalle [-2;3] / la fonction est décroissante sur l'intervalle [-2,3] / la fonction est strictement décroissante / la fonction est strictement décroissante sur [-2;3] / la fonction est strictement décroissante sur [-2,3] / la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle / la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle [-2;3] / la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle [-2,3] / c'est décroissante / c'est décroissante sur [-2;3] / c'est décroissante sur [-2,3] / c'est décroissante sur cet intervalle / c'est décroissante sur l'intervalle [-2;3] / c'est décroissante sur l'intervalle [-2,3] / c'est strictement décroissante / c'est strictement décroissante sur [-2;3] / c'est strictement décroissante sur [-2,3] / c'est strictement décroissante sur cet intervalle / c'est strictement décroissante sur l'intervalle [-2;3] / c'est strictement décroissante sur l'intervalle [-2,3] / fonction décroissante / fonction décroissante sur [-2;3] / fonction décroissante sur [-2,3] / fonction décroissante sur cet intervalle / fonction décroissante sur l'intervalle [-2;3] / fonction décroissante sur l'intervalle [-2,3] / fonction strictement décroissante / fonction strictement décroissante sur [-2;3] / fonction strictement décroissante sur [-2,3] / fonction strictement décroissante sur cet intervalle / fonction strictement décroissante sur l'intervalle [-2;3] / fonction strictement décroissante sur l'intervalle [-2,3] / est décroissante / est décroissante sur [-2;3] / est décroissante sur [-2,3] / est décroissante sur cet intervalle / est décroissante sur l'intervalle [-2;3] / est décroissante sur l'intervalle [-2,3] / est strictement décroissante / est strictement décroissante sur [-2;3] / est strictement décroissante sur [-2,3] / est strictement décroissante sur cet intervalle / est strictement décroissante sur l'intervalle [-2;3] / est strictement décroissante sur l'intervalle [-2,3] / décroît / décroît sur [-2;3] / décroît sur [-2,3] / décroît sur cet intervalle / elle décroît / elle décroît sur [-2;3] / elle décroît sur [-2,3] / elle décroît sur cet intervalle / g décroît / g décroît sur [-2;3] / g décroît sur [-2,3] / g décroît sur cet intervalle / la fonction décroît / la fonction décroît sur [-2;3] / la fonction décroît sur [-2,3] / la fonction décroît sur cet intervalle / la fonction g décroît / la fonction g décroît sur [-2;3] / la fonction g décroît sur [-2,3] / la fonction g décroît sur cet intervalle / décroissant / décroissantes / elle est décroissant / g est décroissant →

Multiplier par -2 renverse l'ordre : si $f(a) \geq f(b)$, alors $-2f(a) \leq -2f(b)$.

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

Comparer sans calculatrice

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6}{x+1}$. On admet que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Comparer $f(\sqrt{3})$ et $f\left(\dfrac{7}{4}\right)$.

Répondre par « supérieur » ou « inférieur » : $f(\sqrt{3})$ est-il supérieur ou inférieur à $f\left(\dfrac{7}{4}\right)$?

Réponse attendue : `supérieur` — aussi acceptées : plus grand · strictement supérieur · supérieure · plus grande · strictement supérieure · f(√3)>f(7/4) · f(√3)>=f(7/4) · f(√3)≥f(7/4) · f(7/4)<f(√3) · f(√3) est supérieur à f(7/4) · f(√3) est plus grand que f(7/4) · f(√3) est supérieur · f(√3) est plus grand · il est supérieur · il est plus grand · elle est supérieure · elle est plus grande · c'est supérieur · f(rac(3))>f(7/4) · f(racine(3))>f(7/4) · f(sqrt(3))>f(7/4) · f(sqrt3)>f(7/4) · f(√3)>f(1.75) · f(√3)>f(1,75)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Inutile de calculer les images : compare d'abord $\sqrt{3}$ et $\dfrac{7}{4}$.
2. Deux nombres positifs se rangent comme leurs carrés :
   $(\sqrt{3})^2 = 3 \quad ; \quad \left(\dfrac{7}{4}\right)^2 = \dfrac{49}{16}$
3. Une fonction décroissante renverse l'ordre.

CORRECTION

Comparer les antécédents — $3 = \dfrac{48}{16} < \dfrac{49}{16}$; les deux nombres sont positifs.

$\sqrt{3} < \dfrac{7}{4}$

Appliquer f — f est strictement décroissante : l'ordre est renversé.

$f(\sqrt{3}) > f\left(\frac{7}{4}\right)$

Avec le sens de variation, on compare deux images en comparant seulement les antécédents.

PIÈGES ANTICIPÉS

`inférieur / plus petit / inférieure / plus petite / strictement inférieur / f(√3)<f(7/4) / f(√3)<=f(7/4) / f(√3)≤f(7/4) / f(√3) est inférieur à f(7/4) / f(√3) est plus petit que f(7/4) / il est inférieur / il est plus petit / f(sqrt(3))<f(7/4) / f(√3)<f(1.75)` → $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$, mais f est décroissante : elle renverse l'ordre, $f(\sqrt{3}) > f\left(\frac{7}{4}\right)$.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Le sens à gauche du sommet

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 7$. Pour deux réels $a \leq b$, vérifier que $f(b) - f(a) = (b - a)(a + b - 4)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty ; 2]$.

Répondre par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : décroissante sur]-inf;2] · décroissante sur]-inf,2] · décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · strictement décroissante · strictement décroissante sur]-inf;2] · strictement décroissante sur]-inf,2] · strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · elle est décroissante · elle est décroissante sur]-inf;2] · elle est décroissante sur]-inf,2] · elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · elle est décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur]-inf;2] · elle est strictement décroissante sur]-inf,2] · elle est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · elle est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · f est décroissante · f est décroissante sur]-inf;2] · f est décroissante sur]-inf,2] · f est décroissante sur cet intervalle · f est décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · f est décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · f est strictement décroissante · f est strictement décroissante sur]-inf;2] · f est strictement décroissante sur]-inf,2] · f est strictement décroissante sur cet intervalle · f est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · f est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · la fonction f est décroissante · la fonction f est décroissante sur]-inf;2] · la fonction f est décroissante sur]-inf,2] · la fonction f est décroissante sur cet intervalle · la fonction f est décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · la fonction f est décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · la fonction f est strictement décroissante · la fonction f est strictement décroissante sur]-inf;2] · la fonction f est strictement décroissante sur]-inf,2] · la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle · la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur]-inf;2] · la fonction est décroissante sur]-inf,2] · la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · la fonction est décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · la fonction est strictement décroissante · la fonction est strictement décroissante sur]-inf;2] · la fonction est strictement décroissante sur]-inf,2] · la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle · la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · c'est décroissante · c'est décroissante sur]-inf;2] · c'est décroissante sur]-inf,2] · c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · c'est décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · c'est strictement décroissante · c'est strictement décroissante sur]-inf;2] · c'est strictement décroissante sur]-inf,2] · c'est strictement décroissante sur cet intervalle · c'est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · c'est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · fonction décroissante · fonction décroissante sur]-inf;2] · fonction décroissante sur]-inf,2] · fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · fonction décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · fonction strictement décroissante · fonction strictement décroissante sur]-inf;2] · fonction strictement décroissante sur]-inf,2] · fonction strictement décroissante sur cet intervalle · fonction strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · fonction strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · est décroissante · est décroissante sur]-inf;2] · est décroissante sur]-inf,2] · est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · est décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · est strictement décroissante · est strictement décroissante sur]-inf;2] · est strictement décroissante sur]-inf,2] · est strictement décroissante sur cet intervalle · est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;2] · est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,2] · décroît · décroît sur]-inf;2] · décroît sur]-inf,2] · décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur]-inf;2] · elle décroît sur]-inf,2] · elle décroît sur cet intervalle · f décroît · f décroît sur]-inf;2] · f décroît sur]-inf,2] · f décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur]-inf;2] · la fonction décroît sur]-inf,2] · la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction f décroît · la fonction f décroît sur]-inf;2] · la fonction f décroît sur]-inf,2] · la fonction f décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · f est décroissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe $(b - a)(a + b - 4)$ et compare à $b^2 - 4b - a^2 + 4a$.
2. Si $a \leq b \leq 2$, que peut-on dire de $a + b$? Et du signe de $a + b - 4$?

CORRECTION

La différence —

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 - 4(b-a) = (b-a)(a+b-4)$

Les signes — $b - a \geq 0$; $a \leq 2$ et $b \leq 2$ donnent $a + b \leq 4$.

$a + b - 4 \leq 0$

Donc $f(a) \geq f(b)$: f est décroissante.

$f(b) - f(a) = (b-a)(a+b-4) \leq 0$

Le facteur $a + b - 4$ change de signe autour de 2 : f décroît sur $]-\infty;2]$ et croît sur $[2;+\infty[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

croissante / croissante sur]-inf;2] / croissante sur]-inf,2] / croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle]-inf;2] / croissante sur l'intervalle]-inf,2] / strictement croissante / strictement croissante sur]-inf;2] / strictement croissante sur]-inf,2] / strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur l'intervalle]-inf;2] / strictement croissante sur l'intervalle]-inf,2] / elle est croissante / elle est croissante sur]-inf;2] / elle est croissante sur]-inf,2] / elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle]-inf;2] / elle est croissante sur l'intervalle]-inf,2] / elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur]-inf;2] / elle est strictement croissante sur]-inf,2] / elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;2] / elle est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,2] / f est croissante / f est croissante sur]-inf;2] / f est croissante sur]-inf,2] / f est croissante sur cet intervalle / f est croissante sur l'intervalle]-inf;2] / f est croissante sur l'intervalle]-inf,2] / f est strictement croissante / f est strictement croissante sur]-inf;2] / f est strictement croissante sur]-inf,2] / f est strictement croissante sur cet intervalle / f est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;2] / f est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,2] / la fonction f est croissante / la fonction f est croissante sur]-inf;2] / la fonction f est croissante sur]-inf,2] / la fonction f est croissante sur cet intervalle / la fonction f est croissante sur l'intervalle]-inf;2] / la fonction f est croissante sur l'intervalle]-inf,2] / la fonction f est strictement croissante / la fonction f est strictement croissante sur]-inf;2] / la fonction f est strictement croissante sur]-inf,2] / la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle / la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;2] / la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,2] / la fonction est croissante / la fonction est croissante sur]-inf;2] / la fonction est croissante sur]-inf,2] / la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle]-inf;2] / la fonction est croissante sur l'intervalle]-inf,2] / la fonction est strictement croissante / la fonction est strictement croissante sur]-inf;2] / la fonction est strictement croissante sur]-inf,2] / la fonction est strictement croissante sur cet intervalle / la fonction est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;2] / la fonction est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,2] / c'est croissante / c'est croissante sur]-inf;2] / c'est croissante sur]-inf,2] / c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle]-inf;2] / c'est croissante sur l'intervalle]-inf,2] / c'est strictement croissante / c'est strictement croissante sur]-inf;2] / c'est strictement croissante sur]-inf,2] / c'est strictement croissante sur cet intervalle / c'est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;2] / c'est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,2] / fonction croissante / fonction croissante sur]-inf;2] / fonction croissante sur]-inf,2] / fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle]-inf;2] / fonction croissante sur l'intervalle]-inf,2] / fonction strictement croissante / fonction strictement croissante sur]-inf;2] / fonction strictement croissante sur]-inf,2] / fonction strictement croissante sur cet intervalle / fonction strictement croissante sur l'intervalle]-inf;2] / fonction strictement croissante sur l'intervalle]-inf,2] / est croissante / est croissante sur]-inf;2] / est croissante sur]-inf,2] / est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle]-inf;2] / est croissante sur l'intervalle]-inf,2] / est strictement croissante / est strictement croissante sur]-inf;2] / est strictement croissante sur]-inf,2] / est strictement croissante sur cet intervalle / est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;2] / est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,2] / croît / croît sur]-inf;2] / croît sur]-inf,2] / croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur]-inf;2] / elle croît sur]-inf,2] / elle croît sur cet intervalle / f croît / f croît sur]-inf;2] / f croît sur]-inf,2] / f croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur]-inf;2] / la fonction croît sur]-inf,2] / la fonction croît sur cet intervalle / la fonction f croît / la fonction f croît sur]-inf;2] / la fonction f croît sur]-inf,2] / la fonction f croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / f est croissant → Teste : $f(0) = 7$ et $f(1) = 4$. Les images diminuent quand x augmente vers 2.

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT **Une fonction paire et son sens**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+9}$. On admet que f est croissante sur $[0;+\infty[$. En utilisant la parité de f, déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty;0]$.

Répondre par « croissante » ou « décroissante ».

Réponse attendue : `décroissante` — aussi acceptées : décroissante sur]-inf;0] · décroissante sur]-inf,0] · décroissante sur cet intervalle · décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · strictement décroissante · strictement décroissante sur]-inf;0] · strictement décroissante sur]-inf,0] · strictement décroissante sur cet intervalle · strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · elle est décroissante · elle est décroissante sur]-inf;0] · elle est décroissante sur]-inf,0] · elle est décroissante sur cet intervalle · elle est décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · elle est décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · elle est strictement décroissante · elle est strictement décroissante sur]-inf;0] · elle est strictement décroissante sur]-inf,0] · elle est strictement décroissante sur cet intervalle · elle est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · elle est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · f est décroissante · f est décroissante sur]-inf;0] · f est décroissante sur]-inf,0] · f est décroissante sur cet intervalle · f est décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · f est décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · f est strictement décroissante · f est strictement décroissante sur]-inf;0] · f est strictement décroissante sur]-inf,0] · f est strictement décroissante sur cet intervalle · f est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · f est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · la fonction f est décroissante · la fonction f est décroissante sur]-inf;0] · la fonction f est décroissante sur]-inf,0] · la fonction f est décroissante sur cet intervalle · la fonction f est décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · la fonction f est décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · la fonction f est strictement décroissante · la fonction f est strictement décroissante sur]-inf;0] · la fonction f est strictement décroissante sur]-inf,0] · la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle · la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · la fonction est décroissante · la fonction est décroissante sur]-inf;0] · la fonction est décroissante sur]-inf,0] · la fonction est décroissante sur cet intervalle · la fonction est décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · la fonction est décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · la fonction est strictement décroissante · la fonction est strictement décroissante sur]-inf;0] · la fonction est strictement décroissante sur]-inf,0] · la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle · la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · c'est décroissante · c'est décroissante sur]-inf;0] · c'est décroissante sur]-inf,0] · c'est décroissante sur cet intervalle · c'est décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · c'est décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · c'est strictement décroissante · c'est strictement décroissante sur]-inf;0] · c'est strictement décroissante sur]-inf,0] · c'est strictement décroissante sur cet intervalle · c'est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · c'est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · fonction décroissante · fonction décroissante sur]-inf;0] · fonction décroissante sur]-inf,0] · fonction décroissante sur cet intervalle · fonction décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · fonction décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · fonction strictement décroissante · fonction strictement décroissante sur]-inf;0] · fonction strictement décroissante sur]-inf,0] · fonction strictement décroissante sur cet intervalle · fonction strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · fonction strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · est décroissante · est décroissante sur]-inf;0] · est décroissante sur]-inf,0] · est décroissante sur cet intervalle · est décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · est décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · est strictement décroissante · est strictement décroissante sur]-inf;0] · est strictement décroissante sur]-inf,0] · est strictement décroissante sur cet intervalle · est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf;0] · est strictement décroissante sur l'intervalle]-inf,0] · décroît · décroît sur]-inf;0] · décroît sur]-inf,0] · décroît sur cet intervalle · elle décroît · elle décroît sur]-inf;0] · elle décroît sur]-inf,0] · elle décroît sur cet intervalle · f décroît · f décroît sur]-inf;0] · f décroît sur]-inf,0] · f décroît sur cet intervalle · la fonction décroît · la fonction décroît sur]-inf;0] · la fonction décroît sur]-inf,0] · la fonction décroît sur cet intervalle · la fonction f décroît · la fonction f décroît sur]-inf;0] · la fonction f décroît sur]-inf,0] · la fonction f décroît sur cet intervalle · décroissant · décroissantes · elle est décroissant · f est décroissant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Vérifie d'abord que f est paire : $f(-x) = f(x)$.
2. Si $a \leq b \leq 0$, compare $-a$ et $-b$: ils sont positifs.
3. Applique la croissance de f sur $[0;+\infty[$ à $-b$ et $-a$.

CORRECTION

La parité —

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+9} = \sqrt{x^2+9} = f(x)$$

Passer aux opposés — Si $a \leq b \leq 0$, alors $0 \leq -b \leq -a$.

$$f(-b) \leq f(-a)$$

Par parité, $f(-b) = f(b)$ et $f(-a) = f(a)$: f est décroissante.

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

Une fonction paire a des variations contraires de part et d'autre de 0 : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`croissante / croissante sur]-inf;0] / croissante sur]-inf,0] / croissante sur cet intervalle / croissante sur l'intervalle]-inf;0] / croissante sur l'intervalle]-inf,0] / strictement croissante / strictement croissante sur]-inf;0] / strictement croissante sur]-inf,0] / strictement croissante sur cet intervalle / strictement croissante sur`

l'intervalle]-inf;0] / strictement croissante sur l'intervalle]-inf,0] / elle est croissante / elle est croissante sur]-inf;0] / elle est croissante sur]-inf,0] / elle est croissante sur cet intervalle / elle est croissante sur l'intervalle]-inf;0] / elle est croissante sur l'intervalle]-inf,0] / elle est strictement croissante / elle est strictement croissante sur]-inf;0] / elle est strictement croissante sur]-inf,0] / elle est strictement croissante sur cet intervalle / elle est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;0] / elle est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,0] / f est croissante / f est croissante sur]-inf;0] / f est croissante sur]-inf,0] / f est croissante sur cet intervalle / f est croissante sur l'intervalle]-inf;0] / f est croissante sur l'intervalle]-inf,0] / f est strictement croissante / f est strictement croissante sur]-inf;0] / f est strictement croissante sur]-inf,0] / f est strictement croissante sur cet intervalle / f est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;0] / f est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,0] / la fonction f est croissante / la fonction f est croissante sur]-inf;0] / la fonction f est croissante sur]-inf,0] / la fonction f est croissante sur cet intervalle / la fonction f est croissante sur l'intervalle]-inf;0] / la fonction f est croissante sur l'intervalle]-inf,0] / la fonction f est strictement croissante / la fonction f est strictement croissante sur]-inf;0] / la fonction f est strictement croissante sur]-inf,0] / la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle / la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;0] / la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,0] / la fonction est croissante / la fonction est croissante sur]-inf;0] / la fonction est croissante sur]-inf,0] / la fonction est croissante sur cet intervalle / la fonction est croissante sur l'intervalle]-inf;0] / la fonction est croissante sur l'intervalle]-inf,0] / la fonction est strictement croissante / la fonction est strictement croissante sur]-inf;0] / la fonction est strictement croissante sur]-inf,0] / la fonction est strictement croissante sur cet intervalle / la fonction est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;0] / la fonction est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,0] / c'est croissante / c'est croissante sur]-inf;0] / c'est croissante sur]-inf,0] / c'est croissante sur cet intervalle / c'est croissante sur l'intervalle]-inf;0] / c'est croissante sur l'intervalle]-inf,0] / c'est strictement croissante / c'est strictement croissante sur]-inf;0] / c'est strictement croissante sur]-inf,0] / c'est strictement croissante sur cet intervalle / c'est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;0] / c'est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,0] / fonction croissante / fonction croissante sur]-inf;0] / fonction croissante sur]-inf,0] / fonction croissante sur cet intervalle / fonction croissante sur l'intervalle]-inf;0] / fonction croissante sur l'intervalle]-inf,0] / fonction strictement croissante / fonction strictement croissante sur]-inf;0] / fonction strictement croissante sur]-inf,0] / fonction strictement croissante sur cet intervalle / fonction strictement croissante sur l'intervalle]-inf;0] / fonction strictement croissante sur l'intervalle]-inf,0] / est croissante / est croissante sur]-inf;0] / est croissante sur]-inf,0] / est croissante sur cet intervalle / est croissante sur l'intervalle]-inf;0] / est croissante sur l'intervalle]-inf,0] / est strictement croissante / est strictement croissante sur]-inf;0] / est strictement croissante sur]-inf,0] / est strictement croissante sur cet intervalle / est strictement croissante sur l'intervalle]-inf;0] / est strictement croissante sur l'intervalle]-inf,0] / croît / croît sur]-inf;0] / croît sur]-inf,0] / croît sur cet intervalle / elle croît / elle croît sur]-inf;0] / elle croît sur]-inf,0] / elle croît sur cet intervalle / f croît / f croît sur]-inf;0] / f croît sur]-inf,0] / f croît sur cet intervalle / la fonction croît / la fonction croît sur]-inf;0] / la fonction croît sur]-inf,0] / la fonction croît sur cet intervalle / la fonction f croît / la fonction f croît sur]-inf;0] / la fonction f croît sur]-inf,0] / la fonction f croît sur cet intervalle / croissant / croissantes / elle est croissant / f est croissant → Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, la montée à droite devient une descente à gauche : $f(-3) = \sqrt{18} > f(0) = 3$.

EXERCICE 92 · DEFI

Placer le changement de sens

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2mx + 1$. Pour $a \leq b$, on a $f(b) - f(a) = (b - a)(a + b - 2m)$. Déterminer le réel m pour que f soit décroissante sur $]-\infty;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$.

Donner la valeur de m.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur $]-\infty;3]$, il faut $a + b - 2m \leq 0$ pour tous $a \leq b \leq 3$: prends a et b proches de 3.
2. Sur $[3;+\infty[$, il faut $a + b - 2m \geq 0$ pour tous $3 \leq a \leq b$.
3. Les deux conditions donnent une inégalité dans chaque sens sur $2m$.

CORRECTION

À gauche de 3 — $a + b$ prend toutes les valeurs proches de 6 par en dessous : il faut $6 \leq 2m$.

$m \geq 3$

À droite de 3 — $a + b$ prend toutes les valeurs à partir de 6 : il faut $2m \leq 6$.

$m \leq 3$

Vérifier — Pour $m = 3$: $f(x) = x^2 - 6x + 1$ et le facteur est $a + b - 6$.

$m = 3$

Le changement de sens de $x^2 - 2mx + 1$ a lieu en $x = m$: le facteur $a + b - 2m$ change de signe quand a et b passent m.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → C'est $2m$ qui vaut 6 ; donc $m = 3$.

`3/2 / 1.5` → Le changement de sens a lieu en $x = m$, pas en $x = 2m$: avec $a = b = 3$, il faut $6 - 2m = 0$, soit $m = 3$.

`-3` → Avec $a = b = 3$, $a + b - 2m = 6 - 2m$ doit s'annuler : $m = 3$.

EXERCICE 93 · BASE

La parité d'un polynôme de degré 4

Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - x^2 + 2$.

Répondre par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `paire` — aussi acceptées : fonction paire · elle est paire · f est paire · la fonction f est paire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\mathbb{R}$ contient l'opposé de chacun de ses éléments. Calcule $f(-x)$.
2. $(-x)^4 = x^4$ et $(-x)^2 = x^2$: les exposants pairs effacent le signe.

CORRECTION

L'ensemble — Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$.

Le calcul —

$f(-x) = 3(-x)^4 - (-x)^2 + 2 = 3x^4 - x^2 + 2 = f(x)$

Un polynôme qui ne contient que des puissances paires de x définit une fonction paire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`impaire / impair / f est impaire / la fonction f est impaire / elle est impaire` → $f(-x) = f(x)$, pas $-f(x)$: par exemple $f(1) = f(-1) = 4$.

`ni paire ni impaire / ni pair ni impair / f n'est ni paire ni impaire / elle n'est ni paire ni impaire` → Calcule $f(-x)$: chaque puissance est paire, on retrouve exactement $f(x)$.

EXERCICE 94 · BASE

La parité d'un polynôme de degré 3

Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x$.

Répondre par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `impaire` — aussi acceptées : fonction impaire · elle est impaire · f est impaire · la fonction f est impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\mathbb{R}$ contient l'opposé de chacun de ses éléments. Calcule $f(-x)$.
2. $(-x)^3 = -x^3$: compare $f(-x)$ à $-f(x)$.

CORRECTION

L'ensemble — Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$.

Le calcul —

$f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -(x^3 - 5x) = -f(x)$

Un polynôme qui ne contient que des puissances impaires de x définit une fonction impaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire / pair / f est paire / la fonction f est paire / elle est paire` → $f(1) = -4$ et $f(-1) = 4$: les images sont opposées, pas égales.

`ni paire ni impaire / ni pair ni impair / f n'est ni paire ni impaire / elle n'est ni paire ni impaire` → $f(-x) = -x^3 + 5x$, qui est exactement $-f(x)$.

EXERCICE 95 · BASE **L'image de 0 par une fonction impaire**

Une fonction f est impaire et définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(0)$.

Donner $f(0)$.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la définition d'une fonction impaire avec $x = 0$.
2. $-0 = 0$: quel nombre est égal à son opposé ?

CORRECTION

La définition en 0 —

$$f(-0) = -f(0) \iff f(0) = -f(0)$$

Résoudre —

$$2f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

La courbe d'une fonction impaire définie en 0 passe toujours par l'origine du repère.

EXERCICE 96 · RAISONNEMENT **La parité d'un quotient**

Étudier la parité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

Répondre par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `impaire` — aussi acceptées : fonction impaire · elle est impaire · f est impaire · la fonction f est impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par l'ensemble de définition : quels réels annulent $x^2 - 4$? Cet ensemble contient-il l'opposé de chacun de ses éléments ?
2. Calcule $f(-x)$ et compare-le à $f(x)$ et à $-f(x)$.

CORRECTION

L'ensemble — Les valeurs exclues sont -2 et 2, opposées l'une de l'autre.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Le calcul — Pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et :

$$f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 4} = \frac{-2x}{x^2 - 4} = -f(x)$$

Avant de calculer $f(-x)$, on vérifie que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire / pair / f est paire / la fonction f est paire / elle est paire` → Le dénominateur ne change pas, mais le numérateur change de signe : $f(-x) = -f(x)$.

`ni paire ni impaire / ni pair ni impair / f n'est ni paire ni impaire / elle n'est ni paire ni impaire` → D_f est symétrique : -2 et 2 sont exclus tous les deux. Et $f(-x) = -f(x)$.

EXERCICE 97 · PRATIQUE **La parité d'une somme**

Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} + |x|$.

Répondre par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `paire` — aussi acceptées : fonction paire · elle est paire · f est paire · la fonction f est paire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $f(-x)$: que deviennent $(-x)^2$ et $|-x|$?

CORRECTION

L'ensemble — Pour tout réel x, $x^2+1>0$: $D_f = \mathbb{R}$, qui contient $-x$.

Le calcul —

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} + |-x| = \sqrt{x^2+1} + |x| = f(x)$$

Le carré et la valeur absolue effacent le signe : une expression construite avec eux seuls est paire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`impaire / impair / f est impaire / la fonction f est impaire / elle est impaire` → $f(x)$ est toujours positif : $f(-x)$ ne peut pas valoir $-f(x)$. Et $f(-1) = f(1)$.

`ni paire ni impaire / ni pair ni impair / f n'est ni paire ni impaire / elle n'est ni paire ni impaire` → $|-x| = |x|$ et $(-x)^2 = x^2$: on retrouve $f(x)$.

EXERCICE 98 · DEFI

Deux quotients qui s'échangent

Étudier la parité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$.

Répondre par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `impaire` — aussi acceptées : fonction impaire · elle est impaire · f est impaire · la fonction f est impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$: contient-il l'opposé de chacun de ses éléments ?
2. Calcule $f(-x)$ et sors un signe moins de chaque dénominateur.
3. Les deux termes s'échangent : compare avec $-f(x)$.

CORRECTION

L'ensemble — -3 et 3 sont exclus tous les deux.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$

Le calcul —

$$f(-x) = \frac{1}{-x-3} + \frac{1}{-x+3} = -\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3}$$

Conclure —

$f(-x) = -f(x)$

On peut aussi réduire : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$, quotient d'un terme impair par un terme pair.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire / pair / f est paire / la fonction f est paire / elle est paire` → $f(1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ et $f(-1) = \frac{1}{4}$: les images sont opposées.

`ni paire ni impaire / ni pair ni impair / f n'est ni paire ni impaire / elle n'est ni paire ni impaire` → En sortant le signe moins des dénominateurs, on retrouve les deux termes de $f(x)$, changés de signe.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

Un ensemble qui n'est pas symétrique

Étudier la parité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Répondre par « paire », « impaire » ou « ni paire ni impaire ».

Réponse attendue : `ni paire ni impaire` — aussi acceptées : ni paire, ni impaire · ni impaire ni paire · ni l'une ni l'autre · ni l'un ni l'autre · aucune des deux · elle n'est ni paire ni impaire · f n'est ni paire ni impaire · ni pair ni impair · ni impair ni pair · ni impaire, ni paire · ni pair, ni impair · ni impair, ni pair · elle n'est ni impaire ni paire · f n'est ni impaire ni paire · elle n'est ni paire, ni impaire · f n'est ni paire, ni impaire · la fonction n'est ni paire ni impaire · la fonction f n'est ni paire ni impaire · ni l'une, ni l'autre · ni paire et ni impaire

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par l'ensemble de définition : quel réel est exclu ?
2. Son opposé est-il exclu aussi ? Que peut-on en conclure ?

CORRECTION

L'ensemble —

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Pas symétrique — $-1 \in D_f$ mais son opposé $1 \notin D_f$: la première condition n'est pas remplie.

$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$; $f(1)$ n'existe pas

Si l'ensemble de définition ne contient pas l'opposé de chacun de ses éléments, f n'est ni paire ni impaire — inutile de calculer $f(-x)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`paire / pair / f est paire / la fonction f est paire / elle est paire` → Le numérateur est pair, mais $f(1)$ n'existe pas alors que $f(-1)$ existe.

`impaire / impair / f est impaire / la fonction f est impaire / elle est impaire` → -1 a une image, 1 n'en a pas : l'ensemble de définition n'est pas symétrique.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT

Compléter grâce à la parité

Une fonction f est paire et définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x \geq 0$, on a $f(x) = x^2 - 4x$. Calculer $f(-1)$.

Donner $f(-1)$.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'expression n'est donnée que pour $x \geq 0$: on ne peut pas y remplacer x par -1.
2. f est paire : $f(-1) = f(1)$.

CORRECTION

La parité —

$f(-1) = f(1)$

Calculer — $1 \geq 0$: l'expression s'applique.

$f(1) = 1 - 4 = -3$

$f(-1) = -3$

Une expression valable pour $x \geq 0$ suffit à connaître une fonction paire partout : $f(-x) = f(x)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → $f(x) = x^2 - 4x$ n'est valable que pour $x \geq 0$. Pour -1, on passe par la parité : $f(-1) = f(1)$.

`3` → f est **paire** : $f(-1) = f(1)$, pas $-f(1)$.

EXERCICE 101 · DEFI

Choisir le paramètre pour une fonction impaire

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + x$. Déterminer le réel m pour que f soit impaire.

Donner la valeur de m.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $f(-x)$ et $-f(x)$, puis écris qu'ils sont égaux pour tout x.
2. Le terme en x^2 est le seul qui ne change pas de signe. Que doit valoir son coefficient ?

CORRECTION

Calculer —

$f(-x) = -x^3 + (m-1)x^2 - x \quad ; \quad -f(x) = -x^3 - (m-1)x^2 - x$

Égaler pour tout x —

$2(m-1)x^2 = 0 \text{ pour tout } x \iff m - 1 = 0$

$m = 1$

Pour qu'un polynôme définisse une fonction impaire, les coefficients des puissances paires doivent être nuls.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → C'est $m - 1$ qui doit être nul, pas m : avec $m = 0$, il reste $-x^2$, et $f(1) = 1 \neq -f(-1) = 3$.

`-1` → Avec $m = -1$, le terme $-2x^2$ reste. Il faut $m - 1 = 0$.

EXERCICE 102 · DEFI

Prolonger une fonction impaire

Une fonction f est impaire et définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x \geq 0$, on a $f(x) = x^2 - 2x$. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x < 0$, sous forme développée.

Écrire seulement l'expression de $f(x)$ pour $x < 0$, sous forme développée.

Réponse attendue : `-x^2-2x`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si $x < 0$, alors $-x > 0$: l'expression donnée s'applique à $-x$.
2. Calcule d'abord :
   $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x)$
3. f est impaire : $f(x) = -f(-x)$.

CORRECTION

En -x — Pour $x < 0$, on a $-x > 0$:

$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) = x^2 + 2x$

L'imparité —

$f(x) = -f(-x) = -(x^2 + 2x)$

$f(x) = -x^2 - 2x$

Pour prolonger une fonction impaire aux réels négatifs : calculer $f(-x)$ avec l'expression connue, puis prendre l'opposé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`x^2+2x` → $x^2 + 2x$ est $f(-x)$. Une fonction impaire vérifie $f(x) = -f(-x)$: il manque le signe moins.

`x^2-2x` → L'expression $x^2 - 2x$ n'est valable que pour $x \geq 0$. Pour $x < 0$, passe par $-x$.

`-x^2+2x` → Tu as pris $-(x^2 - 2x)$ sans remplacer x par $-x$: on calcule d'abord $f(-x) = x^2 + 2x$.