— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Géométrie analytique

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum bech nfassrou m3a b3adhna le chapitre : géométrie analytique. El fekra mte3ou sehla w 9wiya : n7ellou des problèmes de géométrie bel 7seb. La droite twalli équation, w le cercle zeda. Bech nchoufou les coordonnées du barycentre, l'équation cartésienne d'une droite, le vecteur directeur w le vecteur normal, les droites parallèles w perpendiculaires, la distance d'un point à une droite, w l'équation d'un cercle. Yalla, nabdew.

عسلامة ! ليوم باش نفسّرو مع بعضنا le chapitre : géométrie analytique . الفكرة متاعو ساهلة w قويّة : نحلّو des problèmes de géométrie بالحساب . la droite تولّي équation ، w le cercle زادة . باش نشوفو les coordonnées du barycentre ، l'équation cartésienne d'une droite ، le vecteur directeur w le vecteur normal ، les droites parallèles w perpendiculaires ، la distance d'un point à une droite ، w l'équation d'un cercle . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Aujourd'hui, on va expliquer ensemble le chapitre : géométrie analytique. Son idée est simple et puissante : résoudre des problèmes de géométrie par le calcul. La droite devient une équation, et le cercle aussi. Nous allons voir les coordonnées du barycentre, l'équation cartésienne d'une droite, le vecteur directeur et le vecteur normal, les droites parallèles et perpendiculaires, la distance d'un point à une droite, et l'équation d'un cercle. Allez, on commence.

La géométrie analytique est l'art de résoudre les problèmes de géométrie **par le calcul** : une droite devient une équation, un cercle aussi, et un alignement, un parallélisme ou une perpendicularité se vérifient avec quelques multiplications.

On y apprend deux réflexes : **traduire** une figure en coordonnées et en équations, et **choisir le repère** qui rend les calculs simples.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Calculer les coordonnées d'un milieu ou d'un barycentre
  > Calculer les coordonnées d'un milieu ou d'un barycentre.
  > *Calculer les coordonnées d'un milieu ou d'un barycentre.*
- Écrire l'équation d'une droite et la tracer
  > Écrire l'équation d'une droite et la tracer.
  > *Écrire l'équation d'une droite et la tracer.*
- Reconnaître des droites parallèles ou perpendiculaires
  > Reconnaître des droites parallèles ou perpendiculaires.
  > *Reconnaître des droites parallèles ou perpendiculaires.*
- Calculer la distance d'un point à une droite
  > Calculer la distance d'un point à une droite.
  > *Calculer la distance d'un point à une droite.*
- Écrire et reconnaître l'équation d'un cercle
  > Écrire et reconnaître l'équation d'un cercle.
  > *Écrire et reconnaître l'équation d'un cercle.*
- Choisir un repère adapté à un problème
  > Choisir un repère adapté à un problème.
  > *Choisir un repère adapté à un problème.*

1. ACTIVITÉ

Rappels

CE QU'IL DIT

9bal ma nabdew, netfakkrou chwaya 7ajet na3rfouhom. Les composantes du vecteur AB : l'extrémité moins l'origine, ya3ni x B moins x A, w y B moins y A. Zouz vecteurs colinéaires ki x y prime moins x prime y égale zéro, w tletha points alignés ki le vecteur AB w le vecteur AC colinéaires. W fi repère orthonormé berk : la distance AB hiya la racine carrée de la somme des carrés de x B moins x A w de y B moins y A, w zouz vecteurs orthogonaux ki x x prime plus y y prime égale zéro. Bel 7ajet hedhi, bech n7ellou des problèmes de géométrie bel 7seb.

قُبَلْ ما نبداو ، نتفكّرو شويّة حاجات نعرفوهم . les composantes du vecteur A B : l'extrémité moins l'origine ، يعني x B moins x A ، w y B moins y A . زوز vecteurs colinéaires كي ، x y prime moins x prime y égale zéro la : برك repère orthonormé في le vecteur A B w le vecteur A C colinéaires . w كي points alignés ثلاثة w زوز la racine carrée de la somme des carrés de x B moins x A w de y B moins y A ، w هي distance A B des problèmes نحلّو باش ، بالحاجات هاذي . x x prime plus y y prime égale zéro كي vecteurs orthogonaux بالحساب de géométrie .

Avant de commencer, rappelons quelques résultats connus. Les composantes du vecteur A B : l'extrémité moins l'origine, c'est-à-dire x B moins x A, et y B moins y A. Deux vecteurs sont colinéaires quand x y prime moins x prime y égale zéro, et trois points sont alignés quand le vecteur A B et le vecteur A C sont

colinéaires. Et dans un repère orthonormé seulement : la distance A B est la racine carrée de la somme des carrés de x B moins x A et de y B moins y A, et deux vecteurs sont orthogonaux quand x x prime plus y y prime égale zéro. Avec ces outils, nous allons résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

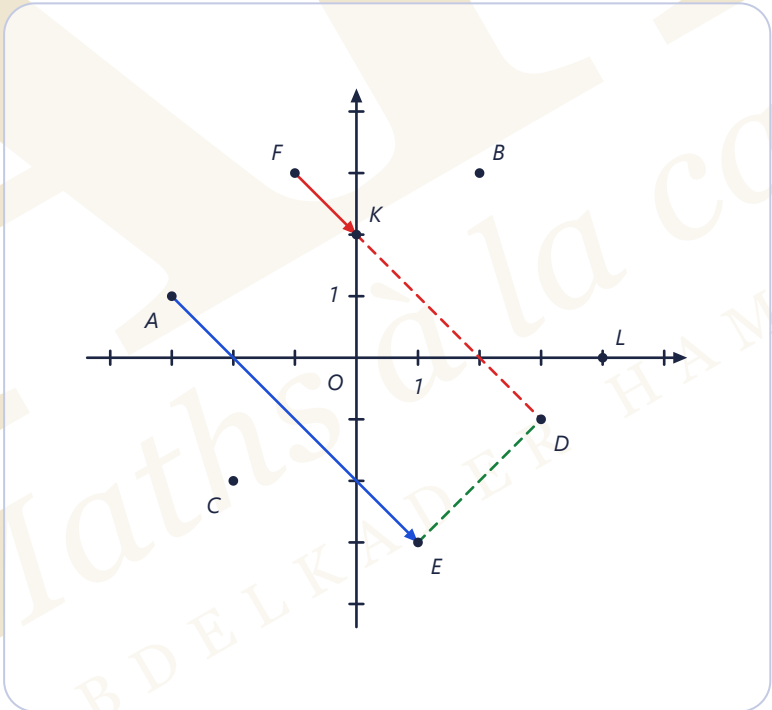
Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, pour deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$:

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$;
- deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si $xy' - x'y = 0$;
- trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Dans un repère **orthonormé**, on sait de plus que :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;
- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

La courbe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite de coefficient directeur a.



Les vecteurs AE et FK sont colinéaires ; (ED) est perpendiculaire à (FK).

Un repère orthonormé d'origine O. Huit points y sont placés : A de coordonnées −3 et 1, B de coordonnées 2 et 3, C de coordonnées −2 et −2, D de coordonnées 3 et −1, E de coordonnées 1 et −3, F de coordonnées −1 et 3, K de coordonnées 0 et 2, L de coordonnées 4 et 0. Au palier 2, le vecteur AE est tracé en bleu et le vecteur FK en rouge : ils ont la même direction. Au palier 3, en pointillés, le segment [KD] prolonge le vecteur FK, et le segment [ED] lui est perpendiculaire.

COMPOSANTES

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

VECTEURS COLINÉAIRES

$$xy' - x'y = 0$$

VECTEURS ORTHOGONAUX (REPÈRE ORTHONORMÉ)

$$xx' + yy' = 0$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3\,;1)$, $D(3\,;-1)$, $E(1\,;-3)$, $F(-1\,;3)$ et $K(0\,;2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont-ils colinéaires ? Les points F, K et D sont-ils alignés ? Les droites (ED) et (FK) sont-elles perpendiculaires ?

Les composantes — Pour chaque vecteur, on retranche les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité.

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Colinéaires ? — Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égal à 4 fois le vecteur $\overrightarrow{FK}$: ces deux vecteurs sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AE} = 4\,\overrightarrow{FK}$$

F, K et D alignés ? — Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ a pour composantes 4 et -4 : il est lui aussi égal à 4 fois le vecteur $\overrightarrow{FK}$. Les points F, K et D sont donc alignés.

$$\overrightarrow{FD} = 4\,\overrightarrow{FK}$$

Perpendiculaires ? — Le repère est orthonormé. Le vecteur $\overrightarrow{ED}$ a pour composantes 2 et 2, le vecteur $\overrightarrow{FK}$ a pour composantes 1 et -1 : on calcule $xx' + yy'$, et on trouve zéro. Les droites (ED) et (FK) sont perpendiculaires.

$$2 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$$

À ne pas faire : $A(-3\,;1)$ et $E(1\,;-3)$: le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour composantes $-3-1$ et $1-(-3)$ — Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour composantes $1-(-3) = 4$ et $-3-1 = -4$. On calcule toujours les coordonnées de l'extrémité moins celles de l'origine.

À ne pas faire : Dans un repère quelconque, $xx' + yy' = 0$ prouve que deux vecteurs sont orthogonaux — Le test $xx' + yy' = 0$ ne vaut que dans un repère orthonormé. La colinéarité se teste dans n'importe quel repère cartésien, mais l'orthogonalité et les distances demandent un repère orthonormé.

2. ACTIVITÉ

Pour comprendre : un repère dans la figure

CE QU'IL DIT

Bech tefhem 9owwet el méthode, ne5dhou triangle ABC, I le milieu de BC, w M elli le vecteur AM égale deux cinquièmes du vecteur AI. La parallèle à AB elli tet3adda men M t9oss BC fi P, w la parallèle à AC t9ossha fi Q. N7ebbou nthabtou elli I houwa le milieu de PQ. El fekra : ma 3andnech repère, donc ne5tarou wa7ed mel figure rou7ha : A, le vecteur AB, le vecteur AC. Tawa B 3andou un, zéro, C 3andou zéro, un, I 3andou un demi, un demi, w M 3andou un cinquième, un cinquième. W ma yo93ed ken el 7seb.

باش تفهم قوّة الـ méthode ، ناخذو w M le milieu de B C ، I le triangle A B C اللي le vecteur A M égale deux cinquièmes du vecteur A I . la parallèle à A B تقصّها P ، w la parallèle à A C في B C تقصّ M من اللي تتعدّى روحها figure الـ نختارو واحد من repère ، donc ما عندناش : الفكرة . le milieu de P Q هو I اللي نحبّو نثبتو في Q . un demi ، un demi ، w عندو zéro ، un ، I عندو un ، zéro ، C عندو B توّا . A ، le vecteur A B ، le vecteur A C : un cinquième ، un cinquième . w عندو M ما يقعد كان الحساب .

Pour comprendre la force de la méthode, prenons un triangle A B C, I le milieu de B C, et M tel que le vecteur A M égale deux cinquièmes du vecteur A I. La parallèle à A B passant par M coupe B C en P, et la parallèle à A C la coupe en Q. On veut prouver que I est le milieu de P Q. L'idée : nous n'avons pas de repère, donc nous en choisissons un dans la figure elle-même : A, le vecteur A B, le vecteur A C. Alors B a pour coordonnées un, zéro, C zéro, un, I un demi, un demi, et M un cinquième, un cinquième. Et il ne reste que le calcul.

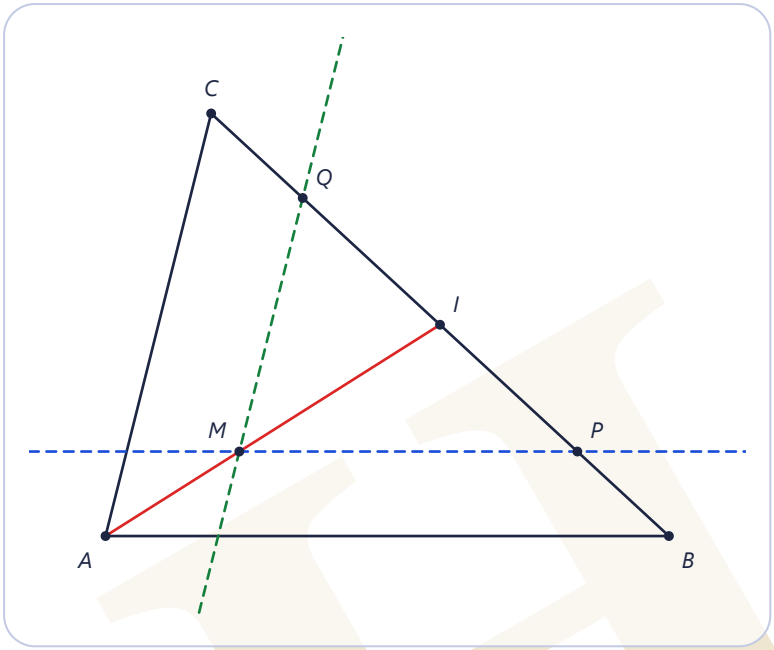
ABC est un triangle, I est le milieu du côté $[BC]$ et M est le point défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$. La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en P, et la parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en Q. On veut montrer que I est le milieu de $[PQ]$.

L'idée. Aucun repère n'est donné : on en choisit un, porté par la figure elle-même. On prend le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Alors :

- $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$ et $C(0\,;1)$;
- I est le milieu de $[BC]$, donc $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$;
- $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$, donc $M\left(\frac{1}{5}\,;\frac{1}{5}\right)$.

Dans ce repère, une parallèle à (AB) est l'ensemble des points qui ont une même ordonnée, et une parallèle à (AC) l'ensemble des points qui ont une même abscisse. Il ne reste qu'à calculer.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



I est le milieu de [PQ].

Un triangle ABC : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut. I est le milieu du côté [BC]. Le segment [AI] est tracé en rouge, et M est sur ce segment, aux deux cinquièmes à partir de A. Au palier 2, la parallèle à (AB) passant par M, en bleu, coupe le côté [BC] en P, près de B. Au palier 3, la parallèle à (AC) passant par M, en vert, coupe le côté [BC] en Q, près de C. Les points P et Q sont à égale distance de I.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a $B(1\,;0)$, $C(0\,;1)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $M\left(\frac{1}{5}\,;\frac{1}{5}\right)$. Calculer les coordonnées de P et de Q, puis montrer que I est le milieu de $[PQ]$.

L'ordonnée de P — Le point P est sur la parallèle à (AB) passant par M : il a la même ordonnée que M, c'est-à-dire $\frac{1}{5}$. On note x son abscisse.

$$P\left(x\,;\frac{1}{5}\right)$$

L'abscisse de P — Le point P est sur la droite (BC) : les vecteurs $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Le premier a pour composantes $x-1$ et $\frac{1}{5}$, le second -1 et 1.

$$(x-1)\times 1-(-1)\times\frac{1}{5}=0 \quad \text{donc} \quad x=\frac{4}{5}$$

Le point Q — De même, Q a la même abscisse que M, c'est-à-dire $\frac{1}{5}$, et il est sur la droite (BC) : on trouve son ordonnée, $\frac{4}{5}$.

$$P\left(\frac{4}{5}\,;\frac{1}{5}\right) \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{1}{5}\,;\frac{4}{5}\right)$$

Le milieu de $[PQ]$ — On calcule les coordonnées du milieu de $[PQ]$: la demi-somme des abscisses, puis celle des ordonnées. On retrouve les coordonnées de I.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{2}$$

I est le milieu de $[PQ]$

À ne pas faire : Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on calcule la distance PQ avec la formule de la racine carrée — Ce repère n'est pas orthonormé en général : on n'y calcule que des milieux, des alignements et des parallélismes. Les formules de distance et d'orthogonalité demandent un repère orthonormé ; le milieu et la colinéarité, eux, marchent dans tout repère cartésien.

---

3. PROPRIÉTÉ

Milieu et barycentre

CE QU'IL DIT

Tawa na7sbou les coordonnées. Le milieu I de AB : l'abscisse hiya x A plus x B, le tout sur deux, w l'ordonnée hiya y A plus y B, le tout sur deux. W le barycentre G mta3 A coefficient alpha w B coefficient bêta, ki alpha plus bêta différent de zéro : x G égale alpha x A plus bêta x B, le tout sur alpha plus bêta, w nafs echay l y G. Ya3ni koll coordonnée hiya moyenne pondérée. W ki yabdew tletha points, nzidou gamma fel fou9 w fel louta. Le milieu houwa le cas mta3 alpha égale bêta égale un, w le centre de gravité mta3 triangle : njam3ou etletha abscisses w ndiviser 3la trois.

x A plus x B, le tout sur deux ، w l'ordonnée هي les coordonnées . le milieu I de A B : l'abscisse توّا نحسبو A coefficient alpha w B coefficient bêta متاع y A plus y B, le tout sur deux . w le barycentre G هي كي ، alpha plus bêta différent de zéro : x G égale alpha x A plus bêta x B, le tout sur alpha plus bêta ، w نفس points ، نزيدو gamma في moyenne pondérée . w هي coordonnée كل . يعني y G لـ الشي كي يبداو ثلاثة le centre de gravité متاع le cas هو le milieu . الفوق w في اللوطة متاع alpha égale bêta égale un ، w abscisses w نجمعو الثلاثة diviser نـ على trois .

Calculons maintenant les coordonnées. Le milieu I de A B : son abscisse est x A plus x B, le tout sur deux, et son ordonnée est y A plus y B, le tout sur deux. Et le barycentre G de A coefficient alpha et B coefficient bêta, quand alpha plus bêta est différent de zéro : x G égale alpha x A plus bêta x B, le tout sur alpha plus bêta, et de même pour y G. Chaque coordonnée est donc une moyenne pondérée. Et avec trois points, on ajoute gamma en haut et en bas. Le milieu est le cas alpha égale bêta égale un, et pour le centre de gravité d'un triangle, on additionne les trois abscisses et on divise par trois.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$. On a $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$. - Soient α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$. Le barycentre G des points (A,α) et (B,β) a pour coordonnées $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\,;\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$. - Soient $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$, $C(x_C\,;y_C)$ trois points du plan et α, β, γ trois réels tels

que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Le barycentre G des points (A,α), (B,β) et (C,γ) a pour coordonnées $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\,;\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$.

Le milieu est le cas $\alpha=\beta=1$; le centre de gravité d'un triangle, le cas $\alpha=\beta=\gamma=1$.

MILIEU DE $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

BARYCENTRE DE (A, A) ET (B, B)

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\,;\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$$

CENTRE DE GRAVITÉ DE ABC

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\,;\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

DÉMONSTRATION

Pour l'origine O, on a $(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. On lit les composantes : $(\alpha+\beta)x_G=\alpha x_A+\beta x_B$, de même pour y_G, puis on divise par $\alpha+\beta$, qui n'est pas nul. Même calcul avec trois points.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient les points $P(2\,;-4)$ et $Q(1\,;5)$, et I le barycentre du point P affecté du coefficient -1 et du point Q affecté du coefficient 3. Déterminer les coordonnées du point I.

La somme des coefficients — On vérifie d'abord que la somme des coefficients n'est pas nulle : moins un plus trois égale deux.

$$-1+3=2\neq 0$$

L'abscisse — On multiplie chaque abscisse par son coefficient, on additionne, puis on divise par la somme des coefficients.

$$x_I=\frac{-1\times 2+3\times 1}{2}=\frac{1}{2}$$

L'ordonnée — Même calcul avec les ordonnées, en faisant attention au signe : moins un fois moins quatre donne plus quatre.

$$y_I=\frac{-1\times(-4)+3\times 5}{2}=\frac{19}{2}$$

$$I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{19}{2}\right)$$

À ne pas faire : Pour A affecté du coefficient 2 et B affecté du coefficient 3 : $x_G=\dfrac{2x_A+3x_B}{2}$, parce qu'il y a deux points — $x_G=\dfrac{2x_A+3x_B}{5}$: on divise par la somme des coefficients, $2+3$. Le dénominateur est la somme des coefficients, pas le nombre de points. Dans l'exemple du cours, la somme $-1+3$ vaut 2 : ce n'est qu'un hasard.

À ne pas faire : $x_I = \dfrac{1 \times 2 + 3 \times 1}{1 + 3}$ pour P affecté du coefficient -1 et Q affecté du coefficient 3 — $x_I = \dfrac{-1 \times 2 + 3 \times 1}{-1 + 3}$. Un coefficient négatif garde son signe partout : au numérateur comme dans la somme du dénominateur.

---

4. ACTIVITÉ

Pour comprendre : une droite, une équation

CE QU'IL DIT

Ne5dhou A deux, un w B moins deux, trois, w narsmou la droite AB. Tawa M x, y : wa9tech M ykoun 3la la droite ? Ki le vecteur AB w le vecteur AM colinéaires. Le vecteur AB 3andou moins quatre w deux, le vecteur AM 3andou x moins deux w y moins un. Nektbou le déterminant égale zéro, w nbassatou : nal9aw x plus deux y moins quatre égale zéro. Ya3ni M 3la la droite AB, ki les coordonnées mte3ou y7a99ou l'équation hedhi, w ken hakka berk. La droite wallet équation : bech ta3ref point 3liha walla le, t3awwedh x w y w tchouf.

la droite على يكون M وقتاش : M x ، y توّا . la droite A B نرسمو A deux ، un w B moins deux ، trois ، w ناخذو moins quatre w deux ، le vecteur A عندو le vecteur A B w le vecteur A M colinéaires . le vecteur A B كي ؟ x plus deux y نلقاو : نبسّطو le déterminant égale zéro ، w نكتبو . x moins deux w y moins un عندو M ، هاذي l'équation يحقّقو متاعو les coordonnées كي ، la droite A B على M يعني . moins quatre égale zéro ولّا la droite . w كان هكّا برك x w y w تشوف . باش تعرف point عليها ولّا لا ، تعوّض : équation

Prenons A deux, un et B moins deux, trois, et traçons la droite A B. Soit maintenant M x, y : quand M est-il sur la droite ? Quand le vecteur A B et le vecteur A M sont colinéaires. Le vecteur A B a pour composantes moins quatre et deux, le vecteur A M a pour composantes x moins deux et y moins un. On écrit que le déterminant égale zéro, et on simplifie : on trouve x plus deux y moins quatre égale zéro. Donc M est sur la droite A B quand ses coordonnées vérifient cette équation, et seulement dans ce cas. La droite est devenue une équation : pour savoir si un point est dessus, on remplace x et y et on regarde.

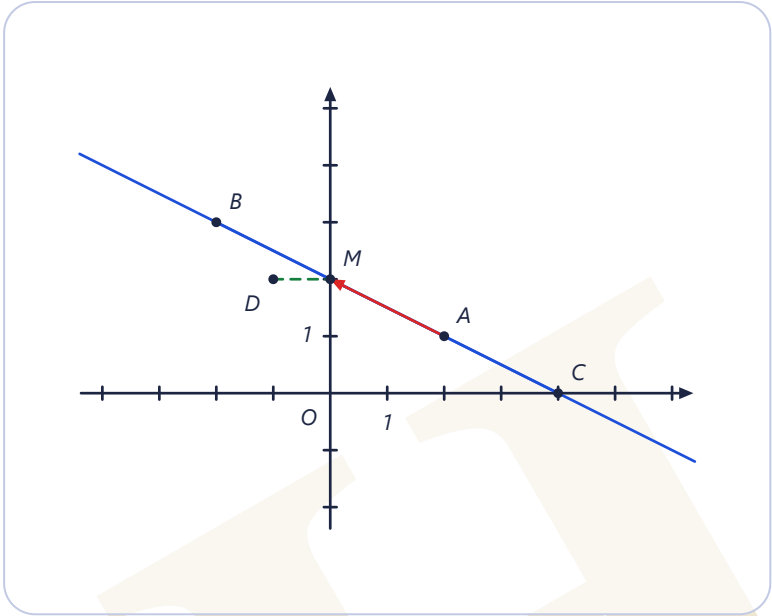
Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On place les points $A(2\,;1)$ et $B(-2\,;3)$ et on trace la droite (AB).

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Dire que M est sur la droite (AB), c'est dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$, donc :

$$-4(y-1) - 2(x-2) = 0, \text{ c'est-à-dire } x + 2y - 4 = 0.$$

> Le point M appartient à la droite (AB) **si et seulement si** les coordonnées x et y du point M vérifient l'équation $x + 2y - 4 = 0$.

La droite est ainsi remplacée par une **équation** : pour savoir si un point est sur la droite, on n'a plus besoin de la figure, il suffit de remplacer x et y par ses coordonnées.



C est sur la droite (AB), D ne l'est pas.

Un repère d'origine O. La droite (AB), en bleu, passe par A de coordonnées 2 et 1 et par B de coordonnées −2 et 3 ; elle descend de la gauche vers la droite. Au palier 2, un point M de la droite, de coordonnées 0 et 2, et le vecteur AM en rouge, porté par la droite. Au palier 3, le point C de coordonnées 4 et 0 est sur la droite, alors que le point D de coordonnées −1 et 2 est juste à côté, un peu en dessous : il n'est pas sur la droite.

$$M(x\,;y) \in (AB) \iff x + 2y - 4 = 0$$

EXEMPLE TRAITÉ

La droite (AB) a pour équation $x + 2y - 4 = 0$. Les points $C(4\,;0)$ et $D(-1\,;2)$ sont-ils sur la droite (AB) ?

Le point C — On remplace x par 4 et y par 0 dans l'expression $x + 2y - 4$: on trouve zéro, donc C est sur la droite.

$$4 + 2 \times 0 - 4 = 0$$

Le point D — On remplace x par -1 et y par 2 : on trouve -1, qui n'est pas nul. Le point D n'est pas sur la droite.

$$-1 + 2 \times 2 - 4 = -1 \neq 0$$

À ne pas faire : Sur le dessin, $D(-1\,;2)$ a l'air d'être sur la droite, donc il y est — $-1 + 2 \times 2 - 4 = -1 \neq 0$: D n'est pas sur la droite. Un dessin peut tromper d'un demi-carreau ; l'équation, elle, tranche sans hésiter.

5. THÉORÈME

Équation cartésienne

CE QU'IL DIT

Elli 3malneh m3a la droite AB, yet3mal m3a koll droite. En-natija : koll droite 3andha équation cartésienne mel chakl a x plus b y plus c égale zéro, w a w b mouch nuls ezzouz m3a b3adhhom. W el 3aks sa7i7 : koll équation mel chakl hedha, hiya équation mta3 droite. Nektbou D, deux points, a x plus b y plus c égale zéro. El méthode dima hiya hiya : ne5dhou M x, y, w nektbou elli le vecteur AB w le vecteur AM colinéaires. W rodd belek : la droite ma 3andhech équation wa7da, ki todhrob l'équation fi réel non nul, to93ed nafs la droite.

النتيجة : كل droite عندها équation cartésienne من الشكل ، يتعمل مع كل droite . la droite A B اللي عملناه مع
العكس صحيح : كل équation من الزوز مع بعضهم nuls موش a x plus b y plus c égale zéro ، w a w b . w
méthode الـ . D ، deux points ، a x plus b y plus c égale zéro نكتبو . droite متاع équation الشكل هذا ، هي
la droite : رد بالك le vecteur A B w le vecteur A M colinéaires . w نكتبو اللي M x ، y ، w ناخذو : ديما هي هي
ما عندهاش équation وحدة ، كي تضرب في l'équation réel non nul ، تقعد نفس la droite .

Ce que nous avons fait avec la droite A B se fait avec toute droite. Le résultat : toute droite a une équation cartésienne de la forme a x plus b y plus c égale zéro, où a et b ne sont pas nuls tous les deux. Et la réciproque est vraie : toute équation de cette forme est l'équation d'une droite. On écrit D, deux points, a x plus b y plus c égale zéro. La méthode est toujours la même : on prend M x, y, et on écrit que le vecteur A B et le vecteur A M sont colinéaires. Et attention : une droite n'a pas une seule équation ; quand on multiplie l'équation par un réel non nul, on garde la même droite.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Toute droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont trois réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. - Soient a, b et c trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. L'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite.

Vocabulaire. L'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, est appelée **équation cartésienne** de la droite D. On écrit $D : ax + by + c = 0$.

La méthode. Pour trouver une équation de la droite (AB), on prend un point $M(x\,;y)$ quelconque et on écrit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires :

$$(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0.$$

Une droite a **plusieurs** équations cartésiennes : en multipliant $x + 2y - 4 = 0$ par 2 ou par -1, on obtient $2x + 4y - 8 = 0$ ou $-x - 2y + 4 = 0$, qui décrivent la même droite.

ÉQUATION CARTÉSIENNE

$$D : ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

LA DROITE (AB)

$$(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

DÉMONSTRATION

Toute droite a une équation. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de la droite. Un point $M(x\,;y)$ est sur (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $(x_B-x_A)(y-y_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$. En développant, on obtient $ax+by+c=0$ avec $a=-(y_B-y_A)$ et $b=x_B-x_A$: comme $A\neq B$, a et b ne sont pas nuls tous les deux.

Toute équation $ax+by+c=0$ est celle d'une droite. Si $b\neq 0$, les points $I\left(0\,;-\dfrac{c}{b}\right)$ et $J\left(1\,;-\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b}\right)$ vérifient l'équation, et on montre que l'ensemble cherché est la droite (IJ). Si $b=0$, alors $a\neq 0$: les points $K\left(-\dfrac{c}{a}\,;0\right)$ et $L\left(-\dfrac{c}{a}\,;1\right)$ vérifient l'équation, et l'ensemble est la droite (KL).

EXEMPLE TRAITÉ

On considère le triangle ABC, où $A(-2\,;1)$, $B(0\,;3)$ et $C(4\,;2)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB), puis de la droite (BC).

La droite (AB) — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 2 et 2. Pour un point M de coordonnées x et y, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour composantes $x+2$ et $y-1$. On écrit que ces deux vecteurs sont colinéaires.

$$2(y-1)-2(x+2)=0$$

On simplifie — On développe, on regroupe, puis on divise tout par moins deux pour obtenir l'équation la plus simple.

$$-2x+2y-6=0 \quad \text{donc} \quad (AB)\,:\,x-y+3=0$$

La droite (BC) — Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour composantes 4 et -1, et le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour composantes x et $y-3$.

$$4(y-3)-(-1)\times x=0 \quad \text{donc} \quad (BC)\,:\,x+4y-12=0$$

On vérifie — Les coordonnées de C doivent vérifier l'équation de (BC) : quatre plus huit moins douze égale zéro. C'est bon.

$$4+4\times 2-12=0$$

À ne pas faire : $x-y+3=0$ et $-2x+2y-6=0$ sont les équations de deux droites différentes — C'est la même droite : la seconde équation est la première multipliée par -2. Multiplier une équation cartésienne par un réel non nul ne change pas l'ensemble de ses solutions : une droite a une infinité d'équations cartésiennes.

À ne pas faire : $0x+0y+3=0$ est l'équation d'une droite — Il faut $(a,b)\neq(0,0)$: au moins l'un des deux coefficients a et b n'est pas nul. Si a et b sont nuls tous les deux, l'équation devient $c=0$: elle n'est vérifiée par aucun point, ou par tous.

6. MÉTHODE

Tracer une droite

CE QU'IL DIT

Bech tarsem droite men l'équation mte3ha, yekfik zouz points. Te5tar valeur l x, w ta7seb y men l'équation. Mathalan D : deux x plus y moins trois égale zéro. Ki x égale zéro, y égale trois, w ki x égale un, y égale un. N7ottou ezzouz points w nwasslouhom. W famma tletha cas ta3refhom bel 3in : ki c égale zéro, la droite tet3adda men l'origine. Ki a égale zéro, l'équation twalli y égale k, w la droite parallèle à l'axe des abscisses. W ki b égale zéro, twalli x égale k, w la droite parallèle à l'axe des ordonnées.

باش ترسم droite من l'équation متاعها ، يكفيك زوج points . تختار valeur لـ x ، w تحسب y من l'équation . مثلا D : deux x plus y moins trois égale zéro . كي x égale zéro ، y égale trois ، w كي x égale un ، y égale un . نحطّو الزوج points w نوصلوهم . w فمّا ثلاثة cas تعرفهم بالعين : كي la droite ، c égale zéro تتعدّى من l'origine . كي l'équation ، a égale zéro تولّي w . la droite parallèle à l'axe des abscisses ، w كي y égale k ، b égale zéro ، تولّي la droite parallèle à l'axe des ordonnées ، w x égale k .

Pour tracer une droite à partir de son équation, deux points suffisent. On choisit une valeur de x, et on calcule y avec l'équation. Par exemple D : deux x plus y moins trois égale zéro. Quand x égale zéro, y égale trois, et quand x égale un, y égale un. On place les deux points et on les relie. Et il y a trois cas qu'on reconnaît d'un coup d'œil : quand c égale zéro, la droite passe par l'origine. Quand a égale zéro, l'équation devient y égale k, et la droite est parallèle à l'axe des abscisses. Et quand b égale zéro, elle devient x égale k, et la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour **tracer** une droite donnée par une équation cartésienne, il suffit d'en connaître **deux points** : on choisit une valeur de x (ou de y) et on calcule l'autre coordonnée avec l'équation.

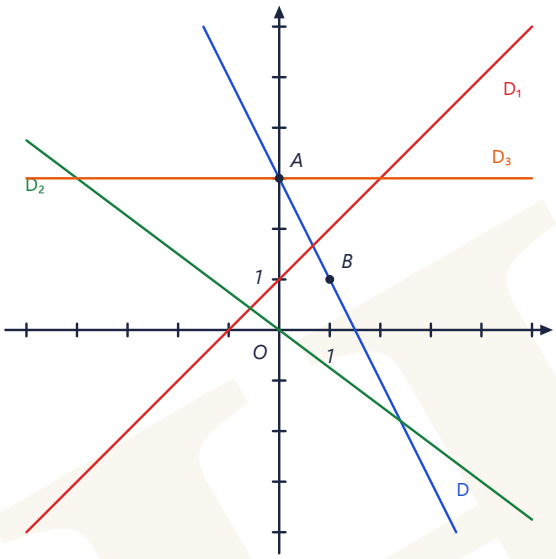
Pour la droite $D : 2x + y - 3 = 0$: avec $x = 0$ on trouve $y = 3$, avec $x = 1$ on trouve $y = 1$. La droite D passe par $A(0\,;3)$ et $B(1\,;1)$.

On trace de même, dans le même repère :

- $D_1 : x - y + 1 = 0$, qui passe par les points de coordonnées $(0\,;1)$ et $(-1\,;0)$;
- $D_2 : 3x + 4y = 0$, qui passe par l'origine O et par le point de coordonnées $(4\,;-3)$;
- $D_3 : y - 3 = 0$, formée des points d'ordonnée 3 : elle est parallèle à l'axe des abscisses.

On retient trois cas faciles à reconnaître : si $c = 0$, la droite passe par l'origine ; si $a = 0$, l'équation s'écrit $y = k$ et la droite est parallèle à l'axe des abscisses ; si $b = 0$, elle s'écrit $x = k$ et la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Deux points suffisent pour tracer chaque droite.

Un repère d'origine O avec quatre droites. La droite D, en bleu, d'équation 2x + y − 3 = 0, passe par A de coordonnées 0 et 3 et par B de coordonnées 1 et 1 : elle descend vite vers la droite. Au palier 2, la droite D_1, en rouge, d'équation x − y + 1 = 0, monte vers la droite en passant par le point d'ordonnée 1 sur l'axe vertical. Au palier 3, la droite D_2, en vert, d'équation 3x + 4y = 0, passe par l'origine et descend doucement vers la droite. Au palier 4, la droite D_3, en orange, d'équation y − 3 = 0, est horizontale à la hauteur 3 : elle passe aussi par A.

PARALLÈLE À L'AXE DES ABSCISSES

$y = k$

PARALLÈLE À L'AXE DES ORDONNÉES

$x = k$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit D la droite d'équation $2x + y - 3 = 0$. Vérifier que les points $A(0\,;3)$ et $B(1\,;1)$ appartiennent à D. Le point $C(-1\,;4)$ appartient-il à D ?

Le point A — On remplace x par 0 et y par 3 : on trouve zéro, donc A est sur D.

$2 \times 0 + 3 - 3 = 0$

Le point B — On remplace x par 1 et y par 1 : on trouve encore zéro, donc B est sur D. La droite D est la droite (AB).

$2 \times 1 + 1 - 3 = 0$

Le point C — On remplace x par -1 et y par 4 : on trouve -1, qui n'est pas nul. Le point C n'appartient pas à D.

$2 \times (-1) + 4 - 3 = -1 \neq 0$

À ne pas faire : D_3 : $y - 3 = 0$ est le seul point de coordonnées $(0\,;3)$ — D_3 est la droite formée de tous les points d'ordonnée 3, quelle que soit leur abscisse. Quand x n'apparaît pas dans l'équation, il est libre : il peut prendre toutes les valeurs.

À ne pas faire : $x - 2 = 0$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses — $x - 2 = 0$ est parallèle à l'axe des ordonnées : tous ses points ont pour abscisse 2. L'équation $x = 2$ fixe l'abscisse et laisse l'ordonnée libre : la droite est verticale.

7. APPLICATION

Exemple : la méthode analytique

CE QU'IL DIT

Mithel ybayyen el méthode analytique. ABCD parallélogramme, w E elli le vecteur AE égale un tiers du vecteur AC. N7ebbou nthabtou elli la droite DE tet3adda men le milieu de AB. Ne5dhou le repère A, le vecteur AB, le vecteur AD. Tawa A zéro, zéro, B un, zéro, D zéro, un, C un, un, w E un tiers, un tiers. Nektbou équation mta3 la droite DE, w ba3d n3awwdhou fiha les coordonnées mta3 le milieu de AB. W tnajjem tal9aha bel géométrie zeda : E houwa le centre de gravité mta3 le triangle ABD, donc DE médiane.

مثال يبيّن الـ E، w parallélogramme A B C D . méthode analytique اللي le vecteur A E égale un tiers du . vecteur A C نحبّو نثبتو اللي la droite D E تتعدّى من le milieu de A B . ناخذو le repère A، le vecteur A B، le vecteur A D . توّا un tiers، un tiers E un، w C un، un، D zéro، un، B zéro، un، A zéro . نكتبو équation متاع les coordonnées فيها نعوّضو بعد و ، la droite D E متاع تنجّم تلقاها بالـ le milieu de A B . w متاع géométrie زادة : E هو le centre de gravité متاع le triangle A B D، donc D E médiane .

Un exemple qui montre la méthode analytique. A B C D est un parallélogramme, et E est le point tel que le vecteur A E égale un tiers du vecteur A C. On veut prouver que la droite D E passe par le milieu de A B. On prend le repère A, le vecteur A B, le vecteur A D. Alors A a pour coordonnées zéro, zéro, B un, zéro, D zéro, un, C un, un, et E un tiers, un tiers. On écrit une équation de la droite D E, puis on y remplace les coordonnées du milieu de A B. Et on peut aussi le trouver par la géométrie : E est le centre de gravité du triangle A B D, donc D E est une médiane.

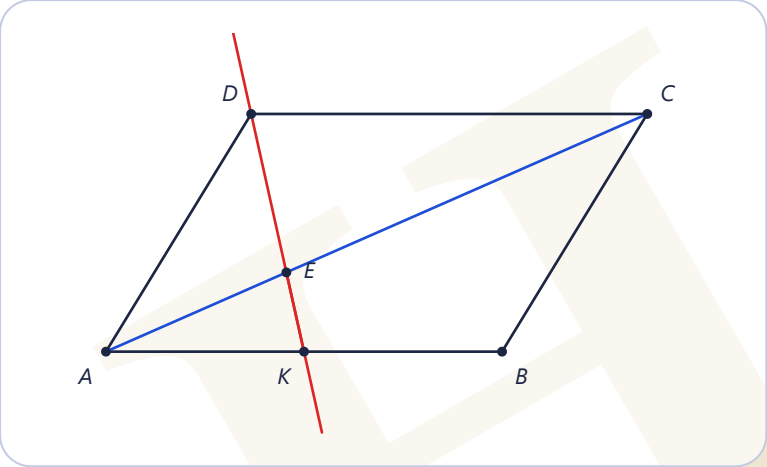
$ABCD$ est un parallélogramme et E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On veut montrer que la droite (DE) passe par le milieu du segment $[AB]$.

Méthode analytique. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Dans ce repère :

$$A(0\,;0) \quad ; \quad B(1\,;0) \text{ et } D(0\,;1) \qquad C(1\,;1) \qquad E\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right).$$

On écrit une équation cartésienne de la droite (DE), puis on vérifie que les coordonnées du milieu de $[AB]$ la satisfont.

Géométriquement. On retrouve le résultat sans calcul : les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu O, donc (AO) est une médiane du triangle ABD, et $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$. Le point E est donc le centre de gravité du triangle ABD : la droite (DE) est la médiane issue de D, elle passe par le milieu de $[AB]$.



La droite (DE) passe par le milieu K de [AB].

Un parallélogramme ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. La diagonale [AC] est tracée en bleu, et E est sur cette diagonale, au tiers à partir de A. Au palier 2, la droite (DE), en rouge, descend de D, passe par E et coupe le côté [AB] en son milieu, noté K.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a $D(0\,;1)$ et $E\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$. Écrire une équation cartésienne de la droite (DE), puis conclure.

Les vecteurs — Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour composantes $\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{3}$. Pour un point M de coordonnées x et y, le vecteur $\overrightarrow{DM}$ a pour composantes x et $y-1$.

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x\\ y-1\end{pmatrix}$$

L'équation de (DE) — On écrit que ces deux vecteurs sont colinéaires, puis on multiplie par trois pour chasser les fractions.

$$\frac{1}{3}(y-1)+\frac{2}{3}x=0 \quad \text{donc} \quad (DE) : 2x+y-1=0$$

Le milieu de $[AB]$ — Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\frac{1}{2}$ et 0. On les remplace dans l'équation : on trouve zéro.

$$2\times\frac{1}{2}+0-1=0$$

(DE) passe par le milieu de $[AB]$

8. DÉFINITION

Vecteur directeur

CE QU'IL DIT

Tawa et-ta3rif. Ne5dhou point A w vecteur u non nul. Les points M elli le vecteur AM colinéaire m3a u, ykawnou droite : nsammiwha la droite elli tet3adda men A w le vecteur directeur mte3ha u. Ya3ni le vecteur directeur ya3ti la direction mta3 la droite. W koll vecteur non nul colinéaire m3a u, houwa zeda vecteur directeur. 7ajtin testa3melhom dima : ki A w B zouz points 3la la droite, le vecteur AB vecteur directeur. W ki la droite 3andha l'équation a x plus b y plus c égale zéro, le vecteur elli les composantes mte3ou moins b w a, vecteur directeur.

تو̈ا التعريف . ناخذو les points M colinéaire اللي point A w vecteur u non nul . مع u ، يكوّنو le vecteur A M
نسمّيوها : droite la droite اللي تتعدّى من A w le vecteur directeur متاعها u . يعني le vecteur directeur
يعطي la direction متاع w . la droite كل vecteur non nul colinéaire مع u ، هو زادة vecteur directeur . حاجتين
تستعملهم ديما : كي A w B زوز points على w . le vecteur A B vecteur directeur ، la droite كي la droite عندها
moins b w a ، vecteur متاعو les composantes اللي l'équation a x plus b y plus c égale zéro ، le vecteur
. directeur

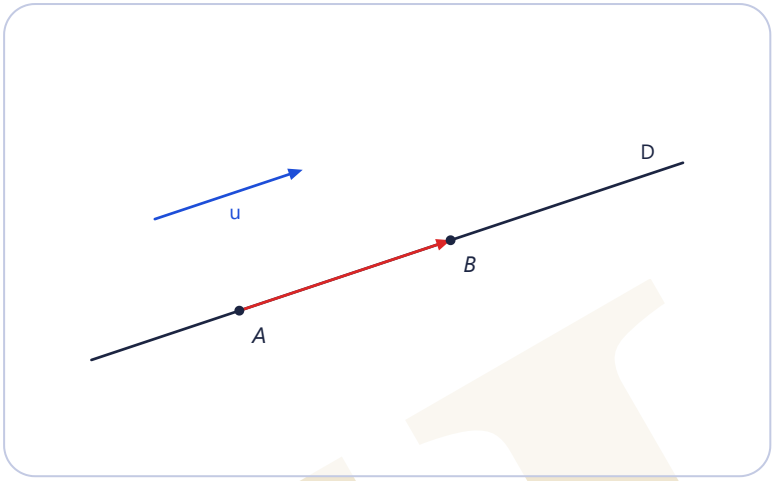
Voici la définition. On prend un point A et un vecteur u non nul. Les points M tels que le vecteur A M est colinéaire à u forment une droite : on l'appelle la droite passant par A et de vecteur directeur u. Le vecteur directeur donne donc la direction de la droite. Et tout vecteur non nul colinéaire à u est aussi un vecteur directeur. Deux résultats servent tout le temps : quand A et B sont deux points de la droite, le vecteur A B est un vecteur directeur. Et quand la droite a pour équation a x plus b y plus c égale zéro, le vecteur de composantes moins b et a est un vecteur directeur.

Définition. Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite, appelée la **droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$**.

Remarque. Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D.

Deux conséquences servent tout le temps.

- Soit D une droite et A, B deux points distincts de cette droite. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite D. - Dans un repère cartésien, soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.



u et le vecteur AB dirigent la droite D.

Une droite D qui monte doucement de la gauche vers la droite. Deux points A et B sont marqués sur D. Le vecteur AB, en rouge, est porté par la droite. Au palier 2, un vecteur u, en bleu, est dessiné à côté de la droite, au-dessus d'elle : il a la même direction que la droite, c'est un vecteur directeur de D.

UN VECTEUR DIRECTEUR

$$D : ax + by + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

DÉMONSTRATION

Soit $D : ax + by + c = 0$, et $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de D. En retranchant les deux égalités $ax_B + by_B + c = 0$ et $ax_A + by_A + c = 0$, on obtient $a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0$. C'est exactement dire que le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est nul : $(x_B - x_A) \times a - (-b) \times (y_B - y_A) = 0$. Le vecteur $\vec{u}$, qui n'est pas nul, est colinéaire au vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$: c'est un vecteur directeur de D.

EXEMPLE TRAITÉ

On considère la droite D d'équation $x + 3y + 2 = 0$. Déterminer un vecteur directeur de D à partir de deux de ses points, puis vérifier que le vecteur $\vec{u}$ de composantes -3 et 1 est un vecteur directeur de D.

Deux points de D — Avec $y = 0$ on trouve $x = -2$; avec $y = -1$ on trouve $x = 1$. On note A et B ces deux points.

$$A(-2\,;0) \quad \text{et} \quad B(1\,;-1)$$

Un vecteur directeur — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 3 et -1 : c'est un vecteur directeur de D.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur u — Le vecteur $\vec{u}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$: il lui est colinéaire et il n'est pas nul, c'est donc aussi un vecteur directeur de D. On le lit directement sur l'équation : moins b, puis a.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{AB}$$

À ne pas faire : Pour $D : x + 3y + 2 = 0$, un vecteur directeur a pour composantes 1 et 3 — Un vecteur directeur a pour composantes -3 et 1, c'est-à-dire $-b$ et a. Le vecteur de composantes a et b n'est pas directeur : dans un repère orthonormé, il est au contraire perpendiculaire à la droite.

À ne pas faire : Une droite a un seul vecteur directeur — Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi directeur : $2\vec{u}$, $-\vec{u}$, $\frac{1}{3}\vec{u}$.... Ce qui compte, c'est la direction du vecteur, pas sa longueur ni son sens.

9. THÉORÈME

Droites parallèles

CE QU'IL DIT

Zouz droites D w D prime, 3andhom vecteurs directeurs u w u prime. D w D prime parallèles, ki u w u prime colinéaires, w ken hakka berk. Tawa bel équations : D 3andha a x plus b y plus c égale zéro, w D prime 3andha a prime x plus b prime y plus c prime égale zéro. Les vecteurs directeurs houma moins b, a, w moins b prime, a prime. Na7sbou le déterminant, w nal9aw ech-chart : D parallèle à D prime, si et seulement si a b prime moins a prime b égale zéro. W ken mouch zéro, ezzouz droites sécantes : yet9ablou fi point wa7ed.

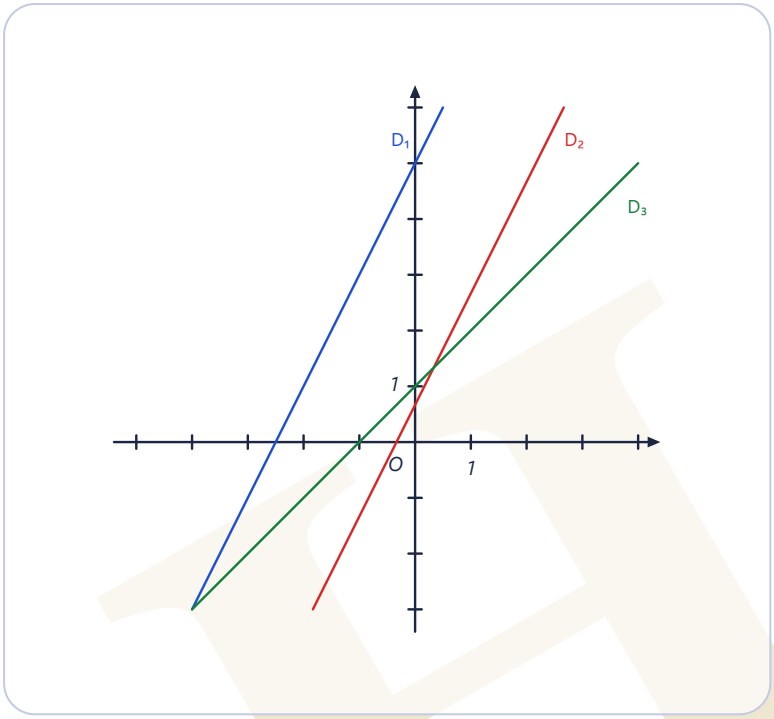
زوز droites D w D prime عندهم ، parallèles D w D prime vecteurs directeurs u w u prime . u w u كي ،
équations : D عندها w ، prime colinéaires كان هكّا برك . توّا بالـ D
a x plus b y plus c égale zéro ، w D prime
a prime x plus b prime y plus c prime égale zéro . les vecteurs directeurs عندها
moins b ، a ، w هوما
D parallèle à D prime ، si et seulement si : نلقاو الشرط le déterminant ، w نحسبو . moins b prime ، a prime
droites sécantes : الزوج ، zéro كان موش a b prime moins a prime b égale zéro . w
point يتقابلو في واحد .

Deux droites D et D prime ont pour vecteurs directeurs u et u prime. D et D prime sont parallèles quand u et u prime sont colinéaires, et seulement dans ce cas. Avec les équations maintenant : D a pour équation a x plus b y plus c égale zéro, et D prime a prime x plus b prime y plus c prime égale zéro. Leurs vecteurs directeurs sont moins b, a, et moins b prime, a prime. On calcule le déterminant, et on trouve la condition : D est parallèle à D prime si et seulement si a b prime moins a prime b égale zéro. Et si ce n'est pas zéro, les deux droites sont sécantes : elles se coupent en un seul point.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soient D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. Les droites D et D' sont parallèles **si et seulement si** les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires. - Soient D et D' deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. $D \parallel D'$ **si et seulement si** $ab' - a'b = 0$.

Deux droites qui ne sont pas parallèles sont **sécantes** : elles ont un seul point commun.



D₁ et D₂ sont parallèles ; D₃ les coupe.

Un repère d'origine O avec trois droites. La droite D₁, en bleu, d'équation 2x − y + 5 = 0, monte fortement vers la droite. Au palier 2, la droite D₂, en rouge, d'équation 6x − 3y + 2 = 0, a exactement la même inclinaison : elle est parallèle à D₁, un peu plus à droite. Au palier 3, la droite D₃, en vert, d'équation −x + y − 1 = 0, monte moins vite : elle coupe D₁ et D₂.

CONDITION ANALYTIQUE DE PARALLÉLISME

$$D \parallel D' \iff ab' - a'b = 0$$

DÉMONSTRATION

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ dirigent D et D'. Ils sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul : $(-b)\times a' - (-b')\times a = 0$, c'est-à-dire $ab' - a'b = 0$.

EXEMPLE TRAITÉ

On considère les droites D_1 d'équation $2x - y + 5 = 0$, D_2 d'équation $6x - 3y + 2 = 0$ et D_3 d'équation $-x + y - 1 = 0$. Les droites D_1 et D_2 sont-elles parallèles ? Et les droites D_1 et D_3 ?

D_1 et D_2 — Pour D_1, $a = 2$ et $b = -1$; pour D_2, $a' = 6$ et $b' = -3$. On calcule $ab' - a'b$: on trouve zéro, donc les deux droites sont parallèles.

$$2\times(-3) - 6\times(-1) = -6 + 6 = 0$$

D_1 et D_3 — Pour D_3, $a' = -1$ et $b' = 1$. Cette fois $ab' - a'b$ vaut 1, qui n'est pas nul : les droites D_1 et D_3 ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.

$$2\times 1 - (-1)\times(-1) = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

À ne pas faire : $2x - y + 5 = 0$ et $6x - 3y + 2 = 0$: $ab' - a'b = 0$, donc c'est la même droite — Elles sont parallèles, mais distinctes : $6x - 3y + 15 = 0$ serait la même droite que D_1, pas $6x - 3y + 2 = 0$. La condition $ab' - a'b = 0$ ne regarde que a et b : elle dit que les directions sont les mêmes, elle ne dit rien de c.

À ne pas faire : $ab' + a'b = 0$ pour tester le parallélisme — $ab' - a'b = 0$. C'est un déterminant : un produit en croix, avec un signe moins entre les deux produits.

10. MÉTHODE

Droites sécantes

CE QU'IL DIT

Ki zouz droites mouch parallèles, yet9ablou fi point wa7ed. Kifech nal9aweh ? Le point d'intersection mawjoud 3la ezzouz droites, ya3ni les coordonnées mte3ou y7a99ou ezzouz équations m3a b3adhhom. Donc n7ellou système. Et-tari9a : ntall3ou y men équation, w n3awwdhouh fel o5ra. Nal9aw x, w ba3d narj3ou na7sbou y. W fel e5er, thabbet : 3awwedh les coordonnées fel zouz équations, lezem yotla3 zéro fel zouz.

كي زوز droites موش parallèles ، يتقابلو في point واحد . كيفاش نلقاوه ؟ le point d'intersection موجود على الزوز droites ، يعني les coordonnées متاعو يحقّقو الزوز équations مع بعضهم . donc نحلّو système . الطريقة : نطلّعو y من équation ، w نعوّضوه في الأخرى . نلقاو x ، و بعد نرجعو نحسبو y في الآخر ، ثبّت : عوّض les coordonnées في الزوز équations ، لازم يطلع zéro في الزوز .

Quand deux droites ne sont pas parallèles, elles se coupent en un seul point. Comment le trouver ? Le point d'intersection est sur les deux droites : ses coordonnées vérifient donc les deux équations à la fois. On résout alors un système. La méthode : on tire y d'une équation, et on le remplace dans l'autre. On trouve x, puis on revient calculer y. Et à la fin, on vérifie : on remplace les coordonnées dans les deux équations, on doit trouver zéro dans les deux.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $D : ax + by + c = 0$ et $D' : a'x + b'y + c' = 0$.

1. On calcule $ab' - a'b$. S'il n'est **pas nul**, les droites sont **sécantes**.
2. Leur point d'intersection est le point dont les coordonnées vérifient **les deux équations à la fois** : on résout le système formé par les deux équations.

Pour résoudre, on peut exprimer y en fonction de x dans une équation, puis remplacer dans l'autre (substitution).

LE POINT D'INTERSECTION VÉRIFIE LES DEUX ÉQUATIONS

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère les droites D et D' d'équations respectives $3x - y + 5 = 0$ et $2x + 2y - 1 = 0$. Montrer que D et D' sont sécantes, puis déterminer leur point d'intersection.

Sécantes — On calcule $ab' - a'b$ avec $a = 3, b = -1, a' = 2$ et $b' = 2$: on trouve 8, qui n'est pas nul.

$3 \times 2 - 2 \times (-1) = 8 \neq 0$

On exprime y — Dans la première équation, on isole y.

$y = 3x + 5$

On remplace — On remplace y par trois x plus cinq dans la seconde équation, et on résout.

$2x + 2(3x + 5) - 1 = 0 \quad \text{donc} \quad 8x + 9 = 0 \quad \text{donc} \quad x = -\frac{9}{8}$

L'ordonnée — On revient à y égale trois x plus cinq.

$y = 3 \times \left(-\frac{9}{8}\right) + 5 = \frac{13}{8}$

$$\left(-\frac{9}{8} ; \frac{13}{8}\right)$$

À ne pas faire : On trouve $x = -\frac{9}{8}$ et on s'arrête là — Un point a deux coordonnées : il faut encore calculer $y = \frac{13}{8}$. Le point d'intersection est un point du plan : on donne son abscisse et son ordonnée, puis on vérifie dans l'équation qui n'a pas servi à la fin.

11. APPLICATION

Exemple : deux dépenses, deux droites

CE QU'IL DIT

Mithel mel 7ayet. Entreprise tasna3 des objets A w des objets B. Objet A yetkallef trois dinars matière première w douze virgule cinq dinars main-d'œuvre, w objet B yetkallef sept dinars w sept virgule cinq dinars. Nsammiw x 3adad les objets A, w y 3adad les objets B fen-nhar. Ki el masarif bedhabt cinquante-six dinars w cent vingt-cinq dinars, nal9aw zouz équations, ya3ni zouz droites : trois x plus sept y égale cinquante-six, w cinq x plus trois y égale cinquante. Le point elli nlawjou 3lih houwa le point d'intersection mte3hom. W ki el masarif ma yelzemch tfout, el égalités ywalliw inégalités, w nal9aw région kemla, mouch point wa7ed.

trois dinars matière يتكلّف des objets A w des objets B . objet A تصنع entreprise . مثال من الحياة sept dinars w sept virgule cinq يتكلّف première w douze virgule cinq dinars main-d'œuvre ، w objet B cinquante-six بالضبط المصاريف كي . في النهار les objets B عدد les objets A ، w y عدد x نسمّيو . dinars droites : trois x plus sept y égale يعني زوز ، équations نلقاو زوز ، dinars w cent vingt-cinq dinars le point d'intersection هو عليه نلوّجو اللي cinquante-six ، w cinq x plus trois y égale cinquante . le point point موش ، كاملة région نلقاو inégalités ، w يولّيو égalités الـ ، تفوت يلزمش ما المصاريف كي . w متاعهم واحد .

Un exemple de la vie courante. Une entreprise fabrique des objets A et des objets B. Un objet A coûte trois dinars de matière première et douze virgule cinq dinars de main-d'œuvre, et un objet B coûte sept dinars et sept virgule cinq dinars. On note x le nombre d'objets A, et y le nombre d'objets B fabriqués dans la journée. Quand les dépenses sont exactement de cinquante-six dinars et de cent vingt-cinq dinars, on obtient deux équations, donc deux droites : trois x plus sept y égale cinquante-six, et cinq x plus trois y

égale cinquante. Le point cherché est leur point d'intersection. Et quand les dépenses ne doivent pas être dépassées, les égalités deviennent des inégalités, et on obtient toute une région, pas un seul point.

Une entreprise fabrique des objets A et des objets B. Un objet A coûte 3 dinars de matière première et $12{,}5$ dinars de main-d'œuvre ; un objet B coûte 7 dinars de matière première et $7{,}5$ dinars de main-d'œuvre. On note x le nombre d'objets A et y le nombre d'objets B fabriqués en une journée.

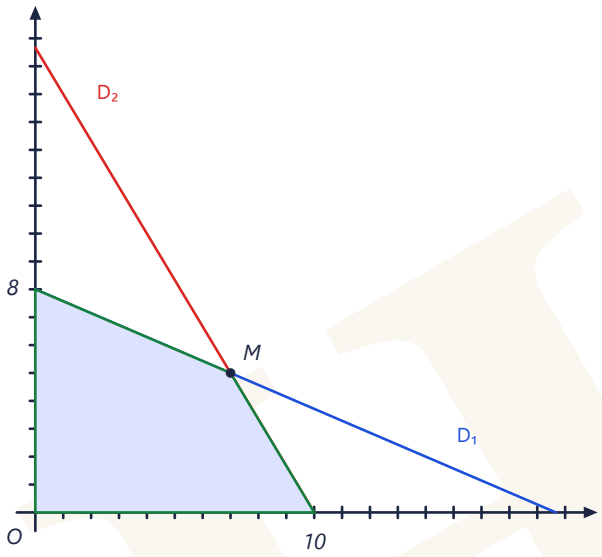
Deux égalités, deux droites. Si les dépenses de la journée sont exactement de 56 dinars de matière première et de 125 dinars de main-d'œuvre, alors :

$$3x + 7y = 56 \text{ et } 12{,}5x + 7{,}5y = 125.$$

Chaque égalité est l'équation d'une droite : $D_1 : 3x + 7y - 56 = 0$ et $D_2 : 5x + 3y - 50 = 0$ (on a divisé la seconde par $2{,}5$). Le point $M(x\,;y)$ cherché est sur les deux droites : c'est leur **point d'intersection**.

Deux contraintes, une région. Pour une bonne gestion, les dépenses ne doivent pas **dépasser** 56 et 125 dinars : $3x + 7y \leq 56$ et $5x + 3y \leq 50$. Chaque droite partage le plan en deux demi-plans ; l'origine vérifie les deux inégalités, donc on garde, pour chaque droite, le côté qui contient O. Comme x et y sont des entiers naturels, les points qui conviennent sont les points à coordonnées entières du quadrilatère grisé de la figure.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



M(7 ; 5) : les deux dépenses sont atteintes. La région grisée respecte les deux contraintes.

Un repère d'origine O : le nombre x d'objets A en abscisse, le nombre y d'objets B en ordonnée. La droite D_1, en bleu, d'équation 3x + 7y = 56, descend doucement du point d'ordonnée 8 sur l'axe vertical jusqu'à l'axe horizontal, un peu avant 19. Au palier 2, la droite D_2, en rouge, d'équation 5x + 3y = 50, descend plus vite, depuis le haut de l'axe vertical jusqu'au point d'abscisse 10. Les deux droites se coupent au point M de coordonnées 7 et 5. Au palier 3, le quadrilatère de sommets O, le point d'abscisse 10 sur l'axe horizontal, M et le point d'ordonnée 8 sur l'axe vertical est grisé : c'est la région située sous les deux droites.

EXEMPLE TRAITÉ

On fabrique en une journée x objets A et y objets B, avec $3x + 7y = 56$ et $5x + 3y = 50$. Déterminer x et y.

On exprime x — Dans la première égalité, on isole x.

$$x = \frac{56 - 7y}{3}$$

On remplace — On remplace x dans la seconde égalité, puis on multiplie tout par trois.

$$5(56 - 7y) + 9y = 150 \quad \text{donc} \quad 280 - 26y = 150$$

On résout — On trouve y, puis on revient à x.

$$y = 5 \quad ; \quad x = \frac{56 - 35}{3} = 7$$

On vérifie — Sept objets A et cinq objets B : trois fois sept plus sept fois cinq donne bien cinquante-six, et cinq fois sept plus trois fois cinq donne bien cinquante.

$$3 \times 7 + 7 \times 5 = 56 \quad ; \quad 5 \times 7 + 3 \times 5 = 50$$

$$x = 7 \quad \text{et} \quad y = 5$$

12. DÉFINITION

Vecteur normal

CE QU'IL DIT

Tawa le vecteur normal. Et-ta3rif : vecteur normal à une droite, houwa koll vecteur non nul orthogonal m3a vecteur directeur mte3ha. Ya3ni le vecteur directeur yemchi m3a la droite, w le vecteur normal we9ef 3liha. W ki ne5dhou point A w vecteur n non nul, les points M elli le vecteur AM orthogonal m3a n, ykawnou droite tet3adda men A. Tawa fi repère orthonormé : la droite a x plus b y plus c égale zéro, le vecteur normal mte3ha houwa a, b. Ta9rah toul men l'équation. W bech tekteb équation mta3 droite tet3adda men A w 3andha vecteur normal a, b : a fois (x moins x A) plus b fois (y moins y A) égale zéro.

التعريف : vecteur normal à une droite ، هو كل vecteur non nul orthogonal مع le vecteur normal توّا . متاعها vecteur directeur يعني . le vecteur directeur يمشي مع le vecteur normal w ، la droite واقف عليها . w كي ناخذو les points M ، le vecteur A M orthogonal اللي point A w vecteur n non nul ، n مع يكوّنو droite تتعدّى من A . توّا في le vecteur normal ، la droite a x plus b y plus c égale zéro repère orthonormé : متاعها هو a ، b . تقراه طول من w . باش تكتب l'équation متاع droite تتعدّى من A w عندها vecteur normal a ، b : a fois (x moins x A) plus b fois (y moins y A) égale zéro .

Passons au vecteur normal. La définition : un vecteur normal à une droite est tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite. Le vecteur directeur suit donc la droite, et le vecteur normal lui est perpendiculaire. Et quand on prend un point A et un vecteur n non nul, les points M tels que le vecteur A M est orthogonal à n forment une droite passant par A. Maintenant, dans un repère orthonormé : pour la droite a x plus b y plus c égale zéro, le vecteur de composantes a et b est normal. On le lit directement sur l'équation. Et pour écrire une équation de la droite passant par A et de vecteur normal a, b : a fois (x moins x A) plus b fois (y moins y A) égale zéro.

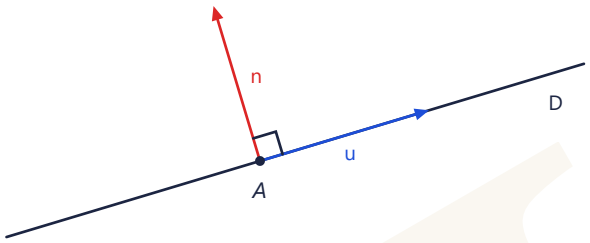
Définition. On appelle **vecteur normal** à une droite tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

Soit A un point du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux est une droite passant par A : $\vec{n}$ est un vecteur normal à cette droite. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est encore normal à la même droite.

Le plan est muni d'un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.

La méthode. La droite passant par $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.



Le vecteur normal n est orthogonal au vecteur directeur u.

Une droite D qui monte doucement de la gauche vers la droite, et un point A sur cette droite. Un vecteur u, en bleu, part de A le long de la droite : c'est un vecteur directeur. Au palier 2, un vecteur n, en rouge, part de A et monte vers la gauche, perpendiculairement à la droite : un petit carré marque l'angle droit entre u et n. C'est un vecteur normal à D.

UN VECTEUR NORMAL (REPÈRE ORTHONORMÉ)

$$D : ax + by + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

DROITE PASSANT PAR A, DE VECTEUR NORMAL N

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

DÉMONSTRATION

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux car $(-b) \times a + a \times b = 0$. Comme $\vec{n}$ n'est pas nul, c'est un vecteur normal à D.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, montrer que le vecteur $\vec{n}$ de composantes 3 et -2 est normal à la droite d'équation $3x - 2y + 5 = 0$. Puis déterminer une équation cartésienne de la droite D' passant par $A(2\,;3)$ et de vecteur normal le vecteur de composantes 1 et $\sqrt{2}$.

Un vecteur directeur — Pour la droite d'équation $3x - 2y + 5 = 0$, le vecteur directeur de composantes $-b$ et a a pour composantes 2 et 3.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Orthogonaux — On calcule $xx' + yy'$ pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$: on trouve zéro. Le vecteur $\vec{n}$ est bien normal à la droite.

$$2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$$

La droite D' — Un point M de coordonnées x et y est sur D' quand le vecteur $\overrightarrow{AM}$, de composantes $x - 2$ et $y - 3$, est orthogonal au vecteur normal.

$$1 \times (x - 2) + \sqrt{2} \times (y - 3) = 0$$

On développe — On reconnaît les coefficients 1 et $\sqrt{2}$ du vecteur normal devant x et y.
$D' : x + \sqrt{2}\,y - 2 - 3\sqrt{2} = 0$

À ne pas faire : Pour $D : 3x - 2y + 5 = 0$, le vecteur de composantes 3 et -2 est un vecteur directeur — Le vecteur de composantes 3 et -2 est normal à D ; un vecteur directeur a pour composantes 2 et 3. Les coefficients a et b se lisent tels quels pour le vecteur normal ; pour le vecteur directeur, on échange et on change un signe : $-b$ et a.

À ne pas faire : Dans un repère cartésien quelconque, le vecteur de composantes a et b est normal à D — Ce résultat demande un repère orthonormé. L'orthogonalité se teste avec $xx' + yy' = 0$, une formule qui n'est vraie que dans un repère orthonormé.

---

13. THÉORÈME

Droites perpendiculaires

CE QU'IL DIT

Fi repère orthonormé, zouz droites D w D prime perpendiculaires, ki les vecteurs directeurs mte3hom orthogonaux, w ken hakka berk. Tawa bel équations : D 3andha a x plus b y plus c égale zéro, w D prime 3andha a prime x plus b prime y plus c prime égale zéro. Na7sbou x x prime plus y y prime lel vecteurs directeurs, w nal9aw ech-chart : D perpendiculaire à D prime, si et seulement si a a prime plus b b prime égale zéro. W ma t5alletch bin ezzouz : a b prime moins a prime b égale zéro lel parallèles, w a a prime plus b b prime égale zéro lel perpendiculaires.

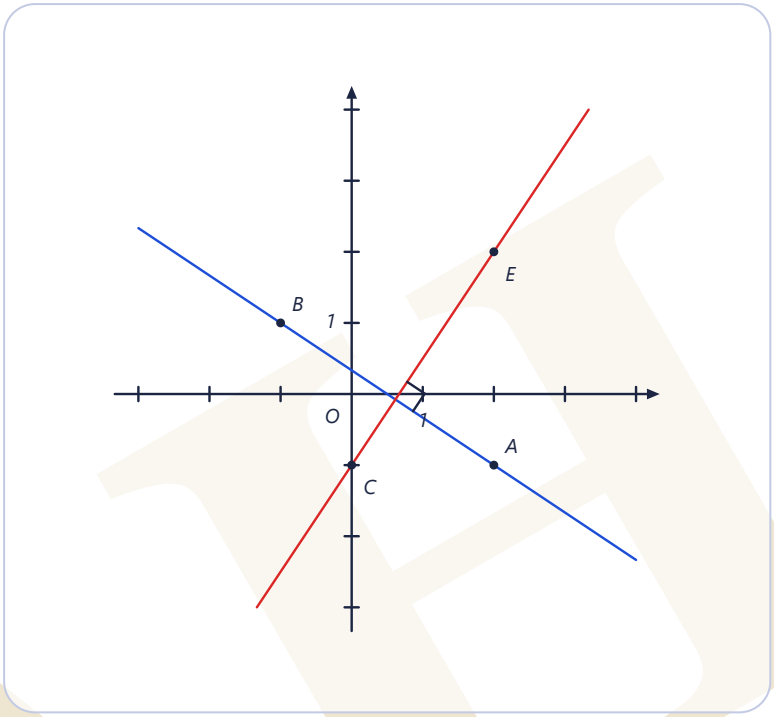
متاعهم les vecteurs directeurs كي ، droites D w D prime perpendiculaires زوز ، repère orthonormé في
عندها a x plus b y plus c égale zéro ، w D prime عندها équations : D توّا بالـ . orthogonaux كان هكّا برك ، w
vecteurs directeurs ، للـ x x prime plus y y prime نحسبو . a prime x plus b prime y plus c prime égale zéro
D perpendiculaire à D prime ، si et seulement si a a prime plus b b prime égale zéro . w : نلقاو الشرط w
parallèles ، w a a prime plus b b prime للـ a b prime moins a prime b égale zéro : ما تخلّطش بين الزوز
. perpendiculaires للـ égale zéro

Dans un repère orthonormé, deux droites D et D prime sont perpendiculaires quand leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, et seulement dans ce cas. Avec les équations maintenant : D a pour équation a x plus b y plus c égale zéro, et D prime a prime x plus b prime y plus c prime égale zéro. On calcule x x prime plus y y prime pour les vecteurs directeurs, et on trouve la condition : D est perpendiculaire à D prime si et seulement si a a prime plus b b prime égale zéro. Et ne confonds pas les deux : a b prime moins a prime b égale zéro pour les parallèles, et a a prime plus b b prime égale zéro pour les perpendiculaires.

Le plan est muni d'un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soient D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. $D \perp D'$ **si et seulement si** $\vec{u} \perp \vec{u'}$. - Soient D et D' deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. $D \perp D'$ **si et seulement si** $aa' + bb' = 0$.

On retient les deux tests côte à côte : $ab' - a'b = 0$ pour des droites **parallèles**, $aa' + bb' = 0$ pour des droites **perpendiculaires**.



Les droites (AB) et (CE) sont perpendiculaires.

Un repère orthonormé d'origine O avec quatre points : A de coordonnées 2 et −1, B de coordonnées −1 et 1, C de coordonnées 0 et −1, E de coordonnées 2 et 2. La droite (AB), en bleu, descend vers la droite. Au palier 2, la droite (CE), en rouge, monte vers la droite et coupe (AB) à angle droit : un petit carré marque l'angle droit à leur point d'intersection.

CONDITION ANALYTIQUE D'ORTHOGONALITÉ

$$D \perp D' \iff aa' + bb' = 0$$

DÉMONSTRATION

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ dirigent D et D'. Dans un repère orthonormé, ils sont orthogonaux si et seulement si $(-b)\times(-b') + a \times a' = 0$, c'est-à-dire $aa' + bb' = 0$.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2\,;-1)$, $B(-1\,;1)$, $C(0\,;-1)$ et $E(2\,;2)$. Montrer que les droites (AB) et (CE) sont perpendiculaires. Les droites d'équations $6x - 5y + 3\sqrt{2} = 0$ et $5x + 6y - 2 = 0$ sont-elles perpendiculaires ?

Les vecteurs directeurs — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes -3 et 2 ; le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a pour composantes 2 et 3.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

(AB) et (CE) — On calcule $xx' + yy'$: on trouve zéro. Les vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (CE) sont perpendiculaires.

$$-3 \times 2 + 2 \times 3 = 0$$

Avec les équations — Pour les deux droites données par leurs équations, on calcule $aa' + bb'$ avec $a = 6, b = -5, a' = 5$ et $b' = 6$: on trouve zéro, elles sont perpendiculaires. Le terme constant ne joue aucun rôle.

$$6 \times 5 + (-5) \times 6 = 0$$

À ne pas faire : $D \perp D'$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$ — $D \perp D'$ si et seulement si $aa' + bb' = 0$. $ab' - a'b = 0$ est le test du parallélisme. Pour l'orthogonalité, on multiplie les coefficients de même rang et on additionne.

À ne pas faire : $x - 2y + \dfrac{5}{4} = 0$ et $-8x + 4y - 1 = 0$ sont perpendiculaires car les coefficients sont « inversés » — $1 \times (-8) + (-2) \times 4 = -16 \neq 0$: elles ne sont pas perpendiculaires. On ne juge pas à l'œil : on calcule $aa' + bb'$, et seul le résultat zéro prouve l'orthogonalité.

---

14. APPLICATION

Exemple : choisir un bon repère

CE QU'IL DIT

Mithel e5er 3la e5tiyar el repère. OBC triangle rectangle isocèle en O, w OB égale OC égale un. A 3la la demi-droite OB, w D 3la la demi-droite OC, w OA égale OD. I le milieu de AC. N7ebbou nthabtou elli la droite OI perpendiculaire à la droite BD. 5ater na7kiw 3la perpendicularité, yelzemna repère orthonormé. El figure ta3tihoulna : O, le vecteur OC, le vecteur OB. Nsammiw a la longueur OA. Tawa A zéro, a, D a, zéro, w I un demi, a sur deux. Na7sbou x x prime plus y y prime lel vecteurs OI w BD : a sur deux moins a sur deux, ya3ni zéro.

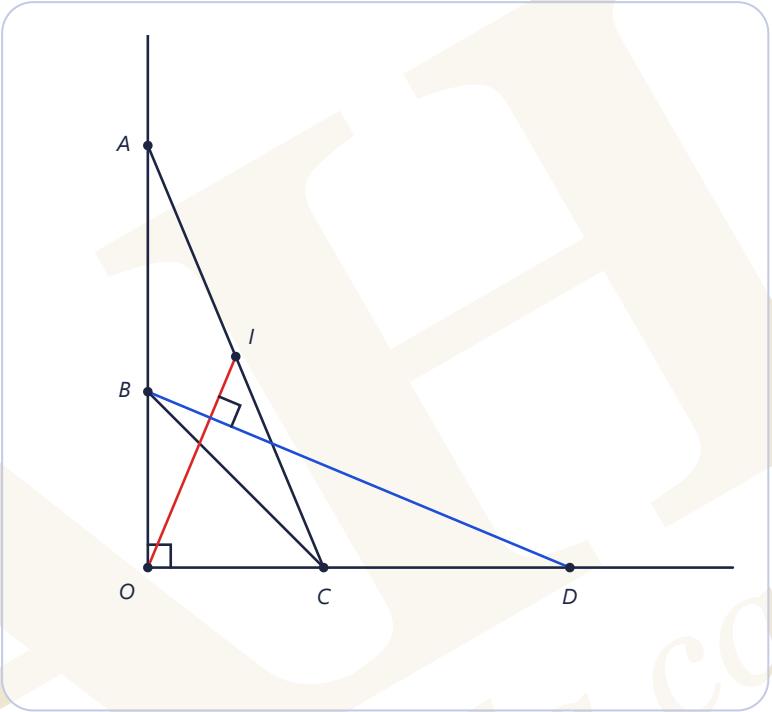
مثال آخر على اختيار الـ A . la على repère . O B C triangle rectangle isocèle en O ، w O B égale O C égale un
نحبّو نثبتو اللي . la demi-droite O C ، w O A égale O D . I le milieu de A C على demi-droite O B ، w D
. repère orthonormé يلزمنا ، perpendicularité خاطر نحكيو على . droite O I perpendiculaire à la droite B D
A zéro ، a ، D a ، توّا . a la longueur O A نسمّيو . O ، le vecteur O C ، le vecteur O B : تعطيهولنا الـ figure
vecteurs O I w B D : a sur deux moins للـ x x prime plus y y prime نحسبو . zéro ، w I un demi ، a sur deux
. zéro يعني ، a sur deux

Un autre exemple sur le choix du repère. O B C est un triangle rectangle isocèle en O, avec O B égale O C égale un. A est sur la demi-droite O B, D sur la demi-droite O C, et O A égale O D. I est le milieu de A C. On veut prouver que la droite O I est perpendiculaire à la droite B D. Comme il s'agit de perpendicularité, il nous faut un repère orthonormé. La figure nous le donne : O, le vecteur O C, le vecteur O B. On note a la longueur O A. Alors A a pour coordonnées zéro, a, D a, zéro, et I un demi, a sur deux. On calcule x x prime plus y y prime pour les vecteurs O I et B D : a sur deux moins a sur deux, c'est-à-dire zéro.

OBC est un triangle rectangle isocèle en O, tel que $OB = OC = 1$. A est un point de la demi-droite $[OB)$ et D un point de la demi-droite $[OC)$ tels que $OA = OD$, et I est le milieu du segment $[AC]$. On veut montrer que les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.

Le choix du repère. Il s'agit de perpendicularité : il faut un repère **orthonormé**. La figure en offre un : les droites (OC) et (OB) sont perpendiculaires et $OC = OB = 1$, donc $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé.

Dans ce repère, $C(1\,;0)$ et $B(0\,;1)$. On pose $OA = OD = a$, avec $a > 0$: alors $A(0\,;a)$ et $D(a\,;0)$, et le milieu de $[AC]$ est $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{a}{2}\right)$.



(OI) et (BD) sont perpendiculaires.

Un angle droit de sommet O, en bas à gauche : une demi-droite horizontale vers la droite, une demi-droite verticale vers le haut. Sur l'horizontale, C puis, plus loin, D. Sur la verticale, B à la même distance de O que C, puis, plus haut, A à la même distance de O que D. Le triangle OBC est tracé. Au palier 2, le segment [AC] et son milieu I. Au palier 3, la droite (OI), en rouge, et la droite (BD), en bleu : elles se coupent à angle droit.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$, on a $B(0\,;1)$, $D(a\,;0)$ et $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{a}{2}\right)$. Montrer que les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.

Les vecteurs directeurs — Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ a pour composantes $\frac{1}{2}$ et $\frac{a}{2}$; le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour composantes a et -1.

$$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{a}{2}\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}a\\ -1\end{pmatrix}$$

Le calcul — Le repère est orthonormé : on calcule $xx' + yy'$. Les deux termes s'annulent, quelle que soit la valeur de a.

$$\frac{1}{2} \times a + \frac{a}{2} \times (-1) = 0$$

(OI) et (BD) sont perpendiculaires

À ne pas faire : On prend le repère $(O, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ et on teste $xx' + yy' = 0$ — On prend $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$, qui est orthonormé car $OC = OB = 1$ et $(OC) \perp (OB)$. Dans le repère $(O, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$, les deux vecteurs de base n'ont pas, en général, la même longueur ($OD = a$ et $OB = 1$) : il n'est pas orthonormé, et le test d'orthogonalité n'y est plus valable.

---

15. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : la droite d'Euler

CE QU'IL DIT

Mas2la bech nemchiw ab3ed : la droite d'Euler. Ne5dhou A zéro, cinq, B trois, quatre, w C quatre, moins trois. Fi koll triangle, famma tletha points mach-hourin : G le centre de gravité, I le centre du cercle circonscrit, w H l'orthocentre, win yet9ablou les hauteurs. Na7sbouhom bel coordonnées. G sehel : sept tiers, deux. I : nle7dhou elli OA, OB w OC el koll ysewiw cinq, donc I houwa l'origine. W H : nektbou équations mta3 zouz hauteurs, w n7ellou système : nal9aw sept, six. W el mofej2a : le vecteur IH égale trois fois le vecteur IG. Etletha points alignés, w la droite elli tjma3hom esmha la droite d'Euler.

. A zéro ، cinq ، B trois ، quatre ، w C quatre ، moins trois ناخذو . la droite d'Euler : مسألة باش نمشيو أبعد
G le centre de gravité ، I le centre du cercle circonscrit ، w H : مشهورين points فمّا ثلاثة ، triangle في كل
نلاحظو : sept tiers ، deux . I : ساهل coordonnées . G نحسبوهم بالـ . les hauteurs وين يتقابلو ، l'orthocentre
hauteurs ، w زوز متاع équations نكتبو : l'origine . w H هو cinq ، donc I الكل يساويو O A ، O B w O C اللي
points الثلاثة . le vecteur I H égale trois fois le vecteur I G : المفاجأة sept ، six . w نلقاو : système نحلّو
. la droite d'Euler اسمها اللي تجمعهم alignés ، w la droite

Un problème pour aller plus loin : la droite d'Euler. Prenons A zéro, cinq, B trois, quatre, et C quatre, moins trois. Dans tout triangle, il y a trois points célèbres : G le centre de gravité, I le centre du cercle circonscrit, et H l'orthocentre, où se coupent les hauteurs. Calculons-les avec les coordonnées. G est facile : sept tiers, deux. Pour I : on remarque que O A, O B et O C valent tous cinq, donc I est l'origine. Et pour H : on écrit les équations de deux hauteurs, et on résout le système : on trouve sept, six. Et la surprise : le vecteur I H égale trois fois le vecteur I G. Les trois points sont alignés, et la droite qui les contient s'appelle la droite d'Euler.

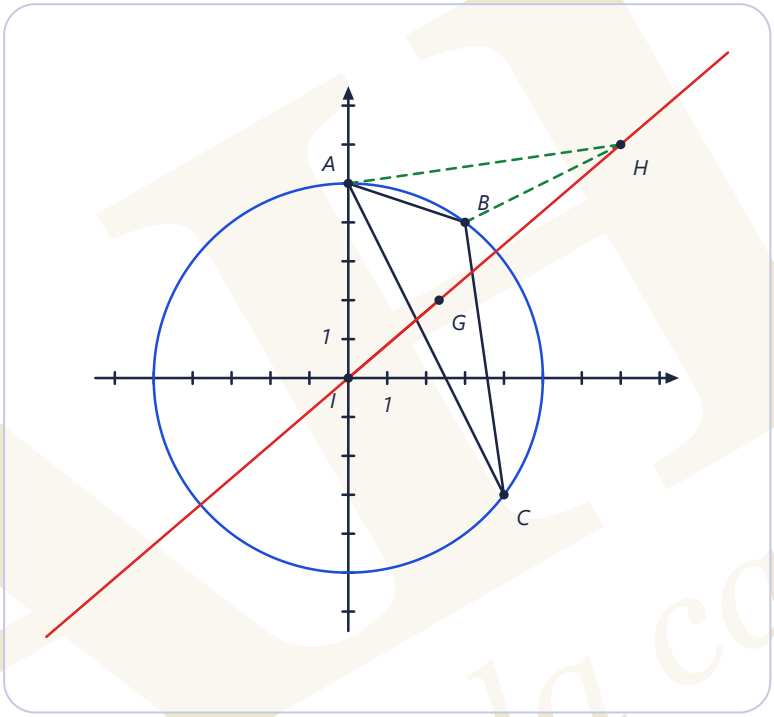
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(0\,;5)$, $B(3\,;4)$ et $C(4\,;-3)$. On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC, par I le centre de son cercle circonscrit et par G son centre de gravité.

Le centre de gravité. $G\left(\dfrac{0+3+4}{3}\,;\dfrac{5+4-3}{3}\right)$, soit $G\left(\dfrac{7}{3}\,;2\right)$.

Le centre du cercle circonscrit. On remarque que $OA = \sqrt{0+25} = 5$, $OB = \sqrt{9+16} = 5$ et $OC = \sqrt{16+9} = 5$: l'origine est à la même distance des trois sommets. Donc $I = O$, et $I(0\,;0)$.

L'orthocentre. C'est le point d'intersection des hauteurs. La hauteur issue de A passe par A et a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$; la hauteur issue de B passe par B et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$. On écrit leurs équations et on résout le système : $H(7\,;6)$.

On constate alors que $\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG}$: les points I, G et H sont **alignés**. La droite qui les contient est appelée la **droite d'Euler** du triangle ABC.



I, G et H sont alignés : c'est la droite d'Euler.

Un repère orthonormé. Le triangle ABC a pour sommets A de coordonnées 0 et 5, B de coordonnées 3 et 4, C de coordonnées 4 et −3. Au palier 2, le cercle circonscrit, en bleu, passe par A, B et C : son centre I est à l'origine du repère. Au palier 3, deux hauteurs du triangle sont prolongées en pointillés verts à partir de A et de B : elles se coupent en H, de coordonnées 7 et 6, à l'extérieur du triangle. Au palier 4, la droite d'Euler, en rouge, passe par I, par le centre de gravité G, de coordonnées sept tiers et 2, et par H.

LA DROITE D'EULER

$$\overrightarrow{IH}=3\,\overrightarrow{IG}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on donne $A(0\,;5)$, $B(3\,;4)$ et $C(4\,;-3)$. On sait que $G\left(\frac{7}{3}\,;2\right)$ et que I est l'origine du repère. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H, montrer que le vecteur $\overrightarrow{IH}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{IG}$, puis donner une équation de la droite (IG).

La hauteur issue de A — Elle passe par A et elle est perpendiculaire à (BC) : le vecteur $\overrightarrow{BC}$, de composantes 1 et -7, lui est normal.

$1\times(x-0)-7\times(y-5)=0\quad\text{donc}\quad x-7y+35=0$

La hauteur issue de B — Elle passe par B et le vecteur $\overrightarrow{AC}$, de composantes 4 et -8, lui est normal. On divise par quatre.

$$(x-3)-2(y-4)=0 \quad \text{donc} \quad x-2y+5=0$$

L'orthocentre — On retranche les deux équations : il reste moins cinq y plus trente égale zéro. On trouve y, puis x.

$$-5y+30=0 \quad \text{donc} \quad y=6 \quad \text{et} \quad x=2\times 6-5=7$$

Les trois points alignés — Le vecteur $\overrightarrow{IH}$ a pour composantes 7 et 6 ; le vecteur $\overrightarrow{IG}$ a pour composantes $\frac{7}{3}$ et 2. Le premier est bien le triple du second.

$$\overrightarrow{IH}=3\,\overrightarrow{IG}$$

La droite (IG) — Elle passe par l'origine et le vecteur $\overrightarrow{IH}$, de composantes 7 et 6, la dirige : un point de coordonnées x et y est sur cette droite quand $6x-7y=0$.

$$(IG)\,:\,6x-7y=0$$

16. DÉFINITION

Équation réduite

CE QU'IL DIT

Ne5dhou droite a x plus b y plus c égale zéro, w b différent de zéro. Ntall3ou y wa7dou : y égale moins a sur b fois x, moins c sur b. Ya3ni l'équation tetekteb y égale m x plus p. Hedhi nsammiwha l'équation réduite. m houwa le coefficient directeur, walla la pente, w p hiya l'ordonnée à l'origine. W koll droite mouch parallèle à l'axe des ordonnées, 3andha équation réduite wa7da. Kifech na7sbou m ? Men l'équation cartésienne : moins a sur b. Walla men zouz points A w B : y B moins y A, sur x B moins x A. W zid tfakker : le vecteur un, m houwa vecteur directeur. Ki x yzid b un, y yzid b m.

y égale moins a sur b : وحدو y نطلّعو . droite a x plus b y plus c égale zéro ، w b différent de zéro ناخذو هو l'équation réduite . m هاذي نسمّيوها . y égale m x plus p تتكتب l'équation يعني . fois x ، moins c sur b parallèle à l'axe موش droite كل l'ordonnée à l'origine . w هي la pente ، w p ولّا ، le coefficient directeur l'équation cartésienne : moins a sur من ؟ m كيفاش نحسبو . وحدة équation réduite عندها ، des ordonnées vecteur هو le vecteur un ، m : زيد تفكّر points A w B : y B moins y A ، sur x B moins x A . w ولّا من زوز . b . m يزيد بـ un ، y يزيد بـ x كي . directeur

Prenons une droite a x plus b y plus c égale zéro, avec b différent de zéro. On isole y : y égale moins a sur b fois x, moins c sur b. L'équation s'écrit donc y égale m x plus p. C'est ce qu'on appelle l'équation réduite. m est le coefficient directeur, ou la pente, et p est l'ordonnée à l'origine. Et toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une seule équation réduite. Comment calculer m ? À partir de l'équation cartésienne : moins a sur b. Ou à partir de deux points A et B : y B moins y A, sur x B moins x A. Et retiens aussi : le vecteur de composantes un et m est un vecteur directeur. Quand x augmente de un, y augmente de m.

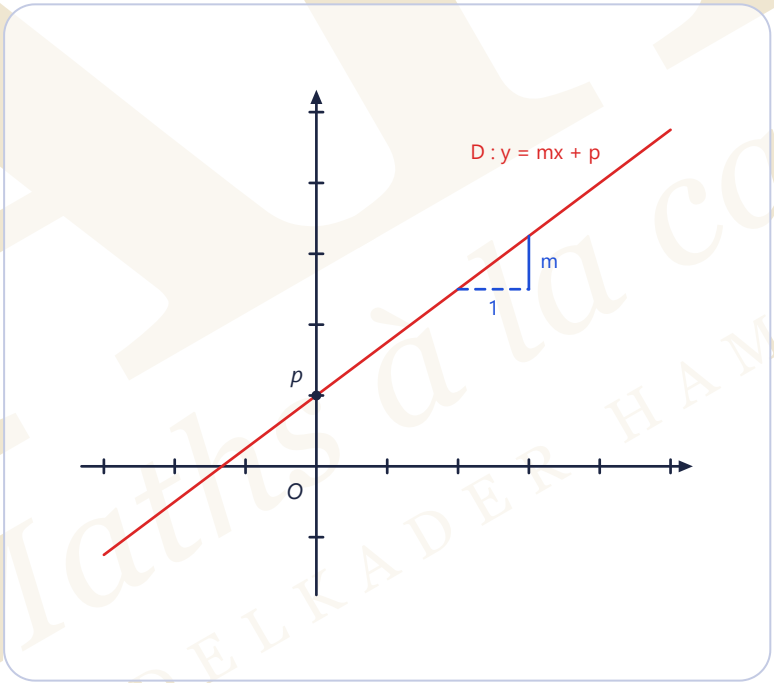
Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$ telle que $b \neq 0$. En isolant y, on voit que cette équation est équivalente à $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, c'est-à-dire à une équation de la forme $y = mx + p$.

Vocabulaire. - L'équation $y = mx + p$ est appelée l'**équation réduite** de la droite D. - m est appelé le **coefficient directeur** de la droite D, ou la **pente** de la droite D. - p est l'**ordonnée à l'origine**.

Toute droite **non parallèle à l'axe des ordonnées** admet ainsi une équation réduite, et une seule.

- Si A et B sont deux points distincts de D, alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. - Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

Quand x augmente de 1, y augmente de m : c'est ce que dit le vecteur directeur de composantes 1 et m.



p se lit sur l'axe des ordonnées ; quand x augmente de 1, y augmente de m.

Un repère d'origine O. Une droite D, en rouge, d'équation y = mx + p, monte vers la droite. Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée p. Au palier 2, un petit triangle en bleu est posé sur la droite : on avance de 1 horizontalement, en pointillés, puis on monte de m verticalement pour retrouver la droite.

ÉQUATION RÉDUITE

$y = mx + p$

À PARTIR DE AX + BY + C = 0, AVEC B ≠ 0

$$m = -\frac{a}{b} \quad ; \quad p = -\frac{c}{b}$$

COEFFICIENT DIRECTEUR PAR DEUX POINTS

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer l'équation réduite et le coefficient directeur : de la droite D d'équation $5x + 4y - 12 = 0$; de la droite (AB), où $A(2\,;-3)$ et $B(0\,;5)$; de la droite passant par $C(-1\,;2)$ et dont un vecteur directeur a pour composantes 2 et $-\frac{3}{4}$.

La droite D — On isole y : quatre y égale moins cinq x plus douze, puis on divise par quatre. Le coefficient directeur est moins cinq quarts.

$$y = -\frac{5}{4}x + 3$$

La pente de (AB) — On divise la différence des ordonnées par la différence des abscisses, dans le même ordre.

$$m = \frac{5 - (-3)}{0 - 2} = -4$$

L'équation de (AB) — Le point B a pour abscisse zéro : son ordonnée, 5, est l'ordonnée à l'origine.

$$y = -4x + 5$$

La troisième droite — On ramène le vecteur directeur à la forme de composantes 1 et m en divisant par 2 : la pente est $-\frac{3}{8}$. Puis on écrit que C est sur la droite pour trouver p.

$$2 = -\frac{3}{8} \times (-1) + p \quad \text{donc} \quad p = \frac{13}{8}$$

Son équation réduite — On rassemble la pente et l'ordonnée à l'origine.

$$y = -\frac{3}{8}x + \frac{13}{8}$$

À ne pas faire : Pour $5x + 4y - 12 = 0$, le coefficient directeur est 5 — Le coefficient directeur est $-\frac{5}{4}$: il faut d'abord isoler y. Le coefficient directeur se lit devant x seulement quand l'équation est sous la forme $y = mx + p$; sinon $m = -\frac{a}{b}$.

À ne pas faire : $m = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ — $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. La pente compare la montée à l'avancée : la différence des ordonnées est en haut, celle des abscisses en bas.

À ne pas faire : La droite d'équation $x = 2$ a pour coefficient directeur 2 — Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'a ni équation réduite ni coefficient directeur. Dans $x = 2$, le coefficient b de y est nul : on ne peut pas isoler y.

17. PROPRIÉTÉ

Parallèles et pentes

CE QU'IL DIT

Tawa nchoufou les droites parallèles bel équations réduites. Nabdew bel droite elli parallèle à l'axe des ordonnées : l'équation mte3ha mel chakl x égale k, w ma 3andhech pente. W zouz droites y égale m x plus p, w y égale m prime x plus p prime : parallèles, si et seulement si m égale m prime. Ya3ni nafs la pente. 3lech ? 5ater les vecteurs directeurs houma un, m, w un, m prime, w le déterminant mte3hom m prime moins m. W ken zeda p égale p prime, ezzouz droites houma nafs la droite.

تو نشوفو les droites parallèles بالـ équations réduites . نبداو بالـ droite اللي parallèle à l'axe des ordonnées : l'équation متاعها من الشكل ، w x égale k ما عندهاش pente . w زوز droites y égale m x plus p . w y égale m prime x plus p prime : parallèles ، si et seulement si m égale m prime . la pente يعني نفس علاش ؟ خاطر les vecteurs directeurs هوما un ، m ، w un ، m prime ، w le déterminant m prime متاعهم moins m . w كان زادة p égale p prime ، الزوز droites هوما نفس la droite .

Voyons maintenant les droites parallèles avec les équations réduites. D'abord : une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme x égale k, et elle n'a pas de pente. Et deux droites y égale m x plus p, et y égale m prime x plus p prime, sont parallèles si et seulement si m égale m prime. Autrement dit, elles ont la même pente. Pourquoi ? Parce que leurs vecteurs directeurs sont un, m, et un, m prime, et leur déterminant vaut m prime moins m. Et si de plus p égale p prime, les deux droites sont une seule et même droite.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Une droite D est parallèle à l'axe des ordonnées **si et seulement si** D a une équation cartésienne de la forme $x = k$, où k est un réel. - Soient D et D' deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$. $D \parallel D'$ **si et seulement si** $m = m'$.

Deux droites parallèles ont donc la **même pente**. Si de plus $p = p'$, les deux équations sont les mêmes : les droites sont confondues.

AVEC LES ÉQUATIONS RÉDUITES

$$D \parallel D' \iff m = m'$$

DÉMONSTRATION

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ dirigent D et D'. Ils sont colinéaires si et seulement si $1 \times m' - 1 \times m = 0$, c'est-à-dire $m = m'$.

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer l'équation réduite de la droite D' passant par le point $A\left(\frac{2}{3}\,;-1\right)$ et parallèle à la droite D d'équation $y = 4x + 2$.

La pente — D' est parallèle à D : elle a la même pente, 4. Son équation réduite est de la forme $y = 4x + p$.

$D' : y = 4x + p$

L'ordonnée à l'origine — Le point A est sur D' : on remplace x par $\frac{2}{3}$ et y par -1.

$$-1 = 4 \times \frac{2}{3} + p \quad \text{donc} \quad p = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$y = 4x - \frac{11}{3}$$

À ne pas faire : $y = 3x + 2$ et $y = 3x$ ont la même pente, donc c'est la même droite — Elles sont parallèles et distinctes : les ordonnées à l'origine, 2 et 0, sont différentes. La pente donne la direction, l'ordonnée à l'origine donne la position. Il faut les deux pour que les droites soient confondues.

---

18. PROPRIÉTÉ

La pente et l'angle

CE QU'IL DIT

3lech nsammiw m la pente ? 5ater t9is 9addech la droite mayla. Fi repère orthonormé, ne5dhou la droite y égale m x plus p, w m différent de zéro. I houwa le point win la droite t9oss l'axe des abscisses, M point e5er 3la la droite, w H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle MIH rectangle en H. W en-natija : tangente de l'angle MIH égale valeur absolue de m. Koll ma valeur absolue de m tekber, la droite twalli we9fa akther. W ki la pente un walla moins un, l'angle ysewi quarante-cinq degrés.

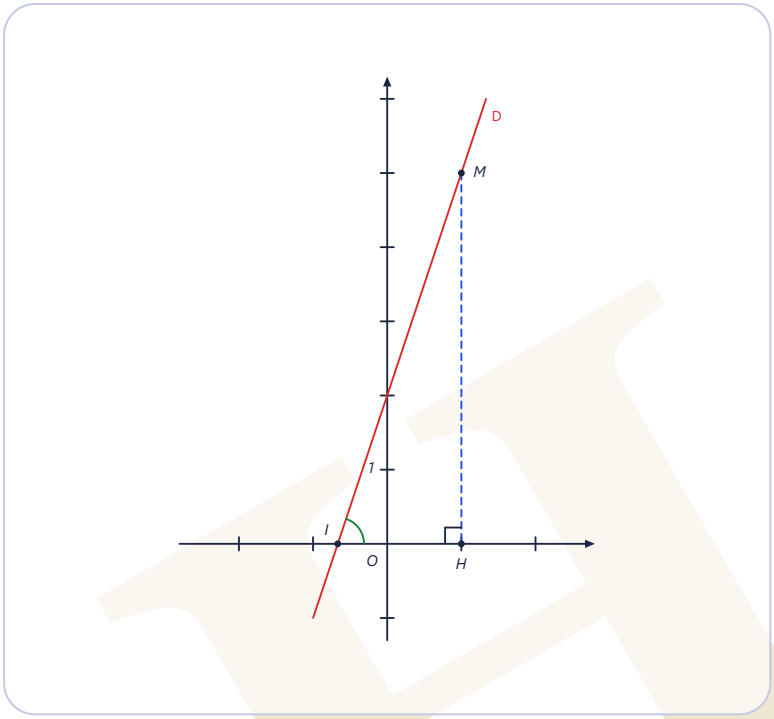
علاش نسمّيو m la pente ؟ خاطر تقيس قدّاش مايلة la droite في repère orthonormé ، ناخذو la droite y égale m x plus p ، w m différent de zéro . I هو le point وين تقصّ la droite M point ، w H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses . le triangle M I H rectangle en آخر على النتيجة : tangente de l'angle M I H égale valeur absolue de m . كل ما m تكبر valeur absolue de ، la droite تولّي واقفة أكثر . w كي la pente un ولّا l'angle ، moins un يساوي quarante-cinq degrés .

Pourquoi appelle-t-on m la pente ? Parce qu'elle mesure l'inclinaison de la droite. Dans un repère orthonormé, prenons la droite y égale m x plus p, avec m différent de zéro. I est le point où la droite coupe l'axe des abscisses, M un autre point de la droite, et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle M I H est rectangle en H. Et le résultat : tangente de l'angle M I H égale valeur absolue de m. Plus la valeur absolue de m est grande, plus la droite est raide. Et quand la pente vaut un ou moins un, l'angle mesure quarante-cinq degrés.

Le plan est muni d'un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D la droite d'équation $y = mx + p$, avec $m \neq 0$, et I le point d'intersection de D avec l'axe des abscisses. Soit M un point de D distinct de I, et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

> Dans le triangle MIH, rectangle en H : $\tan \widehat{MIH} = |m|$.

La pente mesure donc l'**inclinaison** de la droite : plus $|m|$ est grand, plus la droite est raide. Une pente 1 ou -1 correspond à un angle de 45° avec l'axe des abscisses.



tan de l'angle MIH = MH / IH = 3.

Un repère orthonormé d'origine O. La droite D, en rouge, d'équation y = 3x + 2, monte très vite vers la droite ; elle coupe l'axe des abscisses au point I, d'abscisse moins deux tiers. Au palier 2, un point M de la droite, de coordonnées 1 et 5, et son projeté H sur l'axe des abscisses, de coordonnées 1 et 0 : le segment [MH] est vertical, en pointillés bleus, et un petit carré marque l'angle droit en H. Au palier 3, l'angle MIH, en vert, entre l'axe des abscisses et la droite.

PENTE ET ANGLE (REPÈRE ORTHONORMÉ)

$$\tan \widehat{MIH} = |m|$$

DÉMONSTRATION

Le point I a pour coordonnées $\left(-\frac{p}{m}\,;0\right)$. Si M a pour abscisse x, alors $M(x\,;mx+p)$ et $H(x\,;0)$.

Donc $MH = |mx+p|$ et $IH = \left|x+\frac{p}{m}\right| = \frac{|mx+p|}{|m|}$. Dans le triangle MIH rectangle en H, $\tan\widehat{MIH} = \frac{MH}{IH} = |m|$.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, soit D la droite d'équation $y = 3x + 2$. On note I son point d'intersection avec l'axe des abscisses, M un point de D d'abscisse x, distinct de I, et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Calculer la tangente de l'angle $\widehat{MIH}$.

Le point I — Sur l'axe des abscisses, $y = 0$: on résout $3x + 2 = 0$.

$$I\left(-\frac{2}{3}\,;0\right)$$

Les points M et H — M est sur D, donc son ordonnée est $3x + 2$; H a la même abscisse que M et une ordonnée nulle.

$$M(x\,;3x+2) \quad \text{et} \quad H(x\,;0)$$

Les deux côtés — MH est la valeur absolue de l'ordonnée de M, et IH la distance entre les abscisses de I et de H. On met 3 en facteur dans MH.

$$MH = |3x+2| = 3\left|x+\frac{2}{3}\right| \quad ; \quad IH = \left|x+\frac{2}{3}\right|$$

La tangente — Dans le triangle MIH, rectangle en H, la tangente de l'angle en I est le côté opposé sur le côté adjacent : on trouve 3, la pente de la droite.

$$\tan\widehat{MIH} = \frac{MH}{IH} = 3$$

À ne pas faire : Pour la droite $y = -2x+1$, la tangente de l'angle $\widehat{MIH}$ vaut -2 — Elle vaut $|-2| = 2$. L'angle $\widehat{MIH}$ est un angle aigu d'un triangle rectangle : sa tangente est un quotient de longueurs, donc positive. D'où la valeur absolue.

---

19. PROPRIÉTÉ

Perpendiculaires et pentes

CE QU'IL DIT

W les droites perpendiculaires bel équations réduites ? Dima fi repère orthonormé. Zouz droites y égale m x plus p, w y égale m prime x plus p prime : perpendiculaires, si et seulement si m fois m prime égale moins un. 3lech ? Les vecteurs directeurs houma un, m, w un, m prime, w x x prime plus y y prime ya3ti un plus m m prime. Ya3ni ki droite 3andha pente m, la perpendiculaire mte3ha 3andha pente moins un sur m : l'opposé de l'inverse. Rodd belek, mouch moins m. W 7aja o5ra : le vecteur m, moins un, houwa vecteur normal lel droite y égale m x plus p.

droites y égale زوز . repère orthonormé فيما ديما ؟ équations réduites بالـ w les droites perpendiculaires m x plus p ، w y égale m prime x plus p prime : perpendiculaires ، si et seulement si m fois m prime un ، m ، w un ، m prime ، w x x prime plus y y هوما les vecteurs directeurs ؟ علاش . égale moins un pente متاعها عندها pente m ، la perpendiculaire عندها droite يعني كي . un plus m m prime يعطي prime ، le vecteur m ، moins un : حاجة أخرى moins m . w موش ، رد بالك . moins un sur m : l'opposé de l'inverse droite y égale m x plus p للـ vecteur normal هو .

Et les droites perpendiculaires avec les équations réduites ? Toujours dans un repère orthonormé. Deux droites y égale m x plus p, et y égale m prime x plus p prime, sont perpendiculaires si et seulement si m fois m prime égale moins un. Pourquoi ? Leurs vecteurs directeurs sont un, m, et un, m prime, et x x prime plus y y prime donne un plus m m prime. Donc quand une droite a pour pente m, sa perpendiculaire a pour pente moins un sur m : l'opposé de l'inverse. Attention, pas moins m. Et autre chose : le vecteur de composantes m et moins un est un vecteur normal à la droite y égale m x plus p.

Le plan est muni d'un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soient D et D' deux droites d'équations réduites respectives $y = mx+p$ et $y = m'x+p'$. $D \perp D'$ **si et seulement si** $mm' = -1$. - Soit D la droite d'équation réduite $y = mx+$

p. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.

Si D a pour pente $m \neq 0$, toute droite perpendiculaire à D a pour pente $-\dfrac{1}{m}$: l'opposé de l'inverse.

AVEC LES ÉQUATIONS RÉDUITES (REPÈRE ORTHONORMÉ)

$$D \perp D' \iff mm' = -1$$

DÉMONSTRATION

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ dirigent D et D'. Dans un repère orthonormé, ils sont orthogonaux si et seulement si $1 \times 1 + m \times m' = 0$, c'est-à-dire $mm' = -1$. De même, $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux car $1 \times m + m \times (-1) = 0$.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, déterminer l'équation réduite de la droite D' passant par le point $A(0\,;2)$ et perpendiculaire à la droite D d'équation $y = 4x + 3$. Les droites d'équations $y = x$ et $y = -x - 5$ sont-elles perpendiculaires ?

La pente de D' — La pente de D est 4. Celle de D' est le nombre m' tel que $4m' = -1$.

$$m' = -\frac{1}{4}$$

L'équation de D' — Le point A a pour abscisse zéro : son ordonnée, 2, est l'ordonnée à l'origine de D'.

$$D' : y = -\frac{1}{4}x + 2$$

Les deux autres droites — Leurs pentes sont un et moins un : le produit vaut moins un, elles sont perpendiculaires.

$$1 \times (-1) = -1$$

À ne pas faire : Une droite perpendiculaire à $y = 4x + 3$ a pour pente -4 — Elle a pour pente $-\dfrac{1}{4}$, car $4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1$. Changer le signe ne suffit pas : il faut l'opposé de l'inverse. Des droites de pentes 4 et -4 ont des directions symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ; elles ne sont pas perpendiculaires, car $4 \times (-4) = -16 \neq -1$.

À ne pas faire : $y = 7x - 2$ et $y = -\sqrt{3}\,x$ sont perpendiculaires car les pentes sont de signes contraires — $7 \times (-\sqrt{3}) = -7\sqrt{3} \neq -1$: elles ne sont pas perpendiculaires. Des pentes de signes contraires sont nécessaires, mais c'est le produit égal à -1 qui prouve l'orthogonalité.

20. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la fonction x ↦ |ax + b|

CE QU'IL DIT

Bech tefhem la courbe mta3 valeur absolue, ne5dhou f de x égale deux x plus trois, w la droite D mte3ha. W ne5dhou g de x égale moins deux x moins trois, w la droite D prime. g de x hiya moins f de x, donc D w D prime symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Tawa la fonction h : ki f de x positif, ya3ni x supérieur ou égal à moins trois demis, h de x hiya f de x. W ki f de x négatif, h de x hiya g de x. Ya3ni h de x égale valeur absolue de deux x plus trois. W la courbe mte3ha : ne5dhou men koll droite el joz2 elli fou9 l'axe des abscisses. Totla3 zouz demi-droites 3la chakl V, w le sommet fi le point elli l'abscisse mte3ou moins trois demis.

باش تفهم la courbe متاع valeur absolue ، ناخذو D la droite w ، f de x égale deux x plus trois متاعها . w
ناخذو g de x égale moins deux x moins trois ، w la droite D prime . g de x هي D w D ، donc f de x moins
x يعني ، f de x positif كي : la fonction h تولّا . prime symétriques par rapport à l'axe des abscisses
h يعني . g de x هي f de x négatif ، h de x كي f de x . w هي supérieur ou égal à moins trois demis ، h de x
ناخذو من كل droite الجزء اللي فوق : متاعها de x égale valeur absolue de deux x plus trois . w la courbe
متاعو l'abscisse اللي le point في V ، w le sommet على شكل demi-droites تطلع زوز . l'axe des abscisses
. moins trois demis

Pour comprendre la courbe d'une valeur absolue, prenons f de x égale deux x plus trois, et sa droite D. Et prenons g de x égale moins deux x moins trois, et sa droite D prime. g de x est moins f de x, donc D et D prime sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Maintenant la fonction h : quand f de x est positif, c'est-à-dire x supérieur ou égal à moins trois demis, h de x vaut f de x. Et quand f de x est négatif, h de x vaut g de x. Donc h de x égale valeur absolue de deux x plus trois. Et sa courbe : on prend de chaque droite la partie située au-dessus de l'axe des abscisses. On obtient deux demi-droites en forme de V, dont le sommet est le point d'abscisse moins trois demis.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

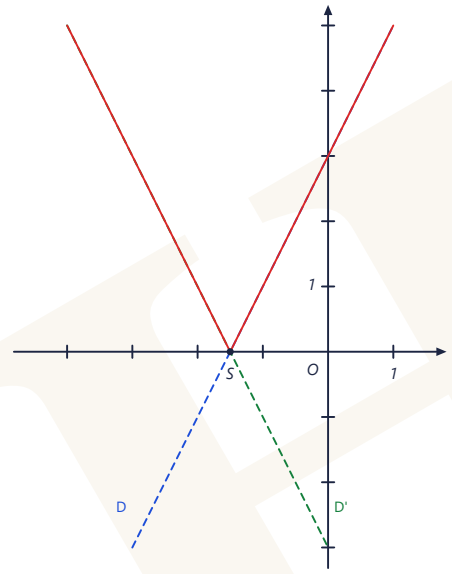
Une courbe en forme de V. La courbe formée des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, avec $A(1\,;1)$ et $B(-1\,;1)$, représente $g(x) = |x|$: ce n'est pas une droite, g n'est pas affine.

Le cas général sur un exemple. Soit $f(x) = 2x + 3$, de courbe la droite D, et $g(x) = -2x - 3$, de courbe la droite D'.

- $f(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq -\dfrac{3}{2}$: au-dessus de l'axe des abscisses, D est une demi-droite d'origine $S\left(-\dfrac{3}{2}\,;0\right)$.
- Pour tout x, $g(x) = -f(x)$: les droites D et D' sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses**.
- La fonction h qui vaut $f(x)$ si $x \geq -\dfrac{3}{2}$ et $g(x)$ si $x < -\dfrac{3}{2}$ est $h(x) = |2x + 3|$.

La courbe de h est formée des deux demi-droites situées **au-dessus** de l'axe des abscisses. De même, pour $a \neq 0$, la courbe de la fonction $x \mapsto |ax + b|$ est formée de deux demi-droites

d'origine le point d'abscisse $-\dfrac{b}{a}$ de l'axe des abscisses, portées par les droites d'équations $y = ax + b$ et $y = -ax - b$.



La courbe de h(x) = |2x + 3| : un V de sommet S.

Un repère orthonormé d'origine O. La droite D, en pointillés bleus, d'équation y = 2x + 3, monte vers la droite et coupe l'axe des abscisses au point S d'abscisse moins trois demis. Au palier 2, la droite D', en pointillés verts, d'équation y = −2x − 3, descend vers la droite en passant aussi par S : elle est la symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Au palier 3, en rouge, la courbe de la fonction h : les deux demi-droites d'origine S situées au-dessus de l'axe des abscisses, qui forment un V.

DEUX EXPRESSIONS AFFINES

$$|ax+b| = \begin{cases} ax+b & \text{si } ax+b \geq 0 \\ -(ax+b) & \text{si } ax+b < 0 \end{cases}$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = -2x - 3$, et la fonction h qui à tout réel x associe $f(x)$ si $x \geq -\dfrac{3}{2}$ et $g(x)$ si $x < -\dfrac{3}{2}$. Écrire $h(x)$ à l'aide d'une valeur absolue, puis décrire sa courbe.

Le signe de f(x) — On résout $2x + 3 \geq 0$: on trouve $x \geq -\dfrac{3}{2}$. Donc $f(x)$ est positif à droite de $-\dfrac{3}{2}$ et strictement négatif à gauche.

$$2x + 3 \geq 0 \iff x \geq -\frac{3}{2}$$

La fonction h — Quand $2x + 3$ est positif, $h(x)$ vaut $2x + 3$; quand il est négatif, $h(x)$ vaut son opposé. C'est exactement la définition de la valeur absolue.

$$h(x) = |2x + 3|$$

Le sommet — La courbe touche l'axe des abscisses quand $h(x) = 0$, c'est-à-dire au point S d'abscisse $-\frac{3}{2}$.

$S\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)$

Les deux demi-droites — À droite de S, on trace la demi-droite portée par D : elle passe par le point de coordonnées 0 et 3. À gauche, la demi-droite portée par D' : elle passe par le point de coordonnées -3 et 3.

$h(0) = 3 \quad ; \quad h(-3) = 3$

À ne pas faire : $|2x+3| = 2x+3$ pour tout réel x — $|2x+3| = 2x+3$ seulement si $x \geq -\frac{3}{2}$; sinon $|2x+3| = -2x-3$. Une valeur absolue n'est jamais négative : là où $2x+3$ est négatif, il faut prendre son opposé.

À ne pas faire : La courbe de $x \mapsto |2x+3|$ est une droite — C'est la réunion de deux demi-droites de même origine, en forme de V. La fonction n'est pas affine : elle est affine sur chacun des deux intervalles séparés par $-\frac{3}{2}$, avec deux pentes opposées, 2 et -2.

---

21. DÉFINITION

Distance d'un point à une droite

CE QU'IL DIT

9addech yeb3ed point 3la droite ? Ne5dhou la droite D : y égale moins deux x plus un, w le point A deux, un. Ne5dhou M 3la D, l'abscisse mte3ou x. Na7sbou AM au carré : nal9aw cinq x au carré moins quatre x plus quatre. Bel forme canonique, nchoufou elli asghar valeur tji ki x égale deux cinquièmes. Nsammiw H le point hedha. W nthabtou elli la droite AH perpendiculaire à D : ya3ni H houwa le projeté orthogonal de A sur D. Menha yji et-ta3rif : la distance du point A à la droite D, hiya la distance AH, w H le projeté orthogonal de A sur D. Hiya a9sar masefa bin A w ayy point men D.

. la droite D : y égale moins deux x plus un ، w le point A deux ، un ناخذو ؟ droite على point يبعد قدّاش
cinq x au carré moins quatre x plus quatre نلقاو : A M au carré نحسبو . x متاعو D ، l'abscisse على M ناخذو
. هذا H le point نسمّيو . x égale deux cinquièmes تجي كي valeur أصغر اللي نشوفو ، forme canonique بالـ
منها يجي . le projeté orthogonal de A sur D هو H يعني : la droite A H perpendiculaire à D نثبتو اللي w
la distance A H ، w H le projeté orthogonal de A sur D هي ، la distance du point A à la droite D : التعريف
. D من point أيّ A w بين مسافة أقصر هي .

À quelle distance un point est-il d'une droite ? Prenons la droite D : y égale moins deux x plus un, et le point A deux, un. Prenons M sur D, d'abscisse x. On calcule A M au carré : on trouve cinq x au carré moins quatre x plus quatre. Avec la forme canonique, on voit que la plus petite valeur est atteinte quand x égale deux cinquièmes. On appelle H ce point. Et on prouve que la droite A H est perpendiculaire à D : H est donc le projeté orthogonal de A sur D. D'où la définition : la distance du point A à la droite D est la distance A H, où H est le projeté orthogonal de A sur D. C'est la plus courte distance entre A et un point de D.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la droite D d'équation $y = -2x + 1$ et le point $A(2\,;1)$.

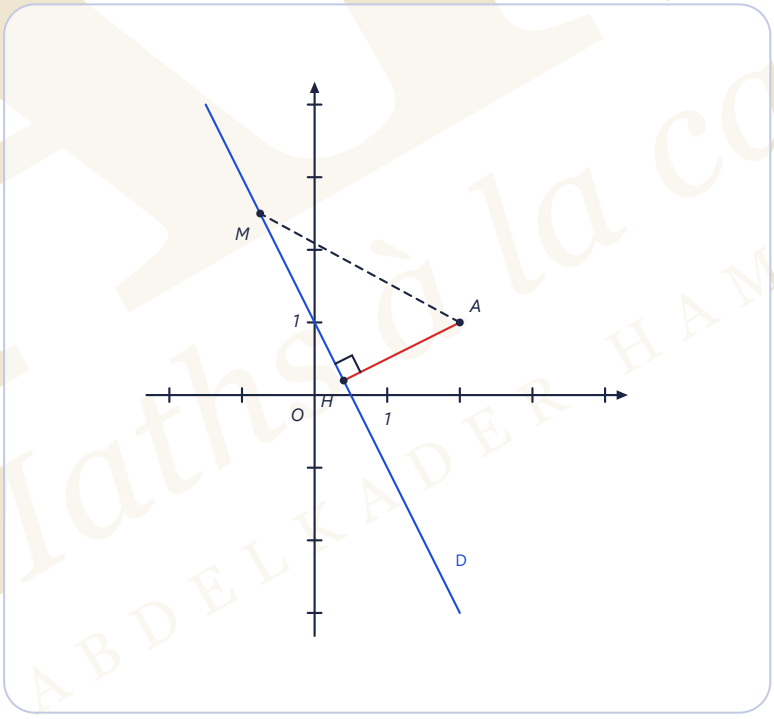
Chercher le plus court chemin. Soit M un point de D d'abscisse x : $M(x\,;-2x+1)$. Alors

$$AM^2 = (x-2)^2 + (-2x)^2 = 5x^2 - 4x + 4 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}.$$

La distance AM est **minimale** pour $x = \dfrac{2}{5}$, c'est-à-dire au point $H\left(\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{1}{5}\right)$, et elle vaut alors $\sqrt{\dfrac{16}{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. On vérifie que la droite (AH) est perpendiculaire à D : le point H est le **projeté orthogonal** de A sur D.

Définition. Soit D une droite et A un point du plan. On appelle **distance du point A à la droite D**, et on note $d(A, D)$, la distance du point A au point H, projeté orthogonal de A sur la droite D.

C'est la plus courte distance entre A et un point de D.



AH est la plus courte distance de A à un point de D.

Un repère orthonormé d'origine O. La droite D, en bleu, d'équation y = −2x + 1, descend vers la droite. Le point A, de coordonnées 2 et 1, est à droite de la droite. Au palier 2, un point M quelconque de D, relié à A par un segment en pointillés. Au palier 3, le point H de D, de coordonnées deux cinquièmes et un cinquième, relié à A par un segment rouge plus court : un petit carré marque l'angle droit en H entre (AH) et D.

H PROJETÉ ORTHOGONAL DE A SUR D

$$d(A, D) = AH$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $y = -2x + 1$ et le point $A(2\,;1)$. Soit M un point de D d'abscisse x. Exprimer AM^2 en fonction de x, trouver le point H de D pour lequel la distance est minimale, puis montrer que la droite (AH) est perpendiculaire à D.

Le carré de la distance — Le point M a pour ordonnée $-2x + 1$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a donc pour composantes $x - 2$ et $-2x$.

$$AM^2 = (x-2)^2 + (-2x)^2 = 5x^2 - 4x + 4$$

La forme canonique — On met le trinôme sous forme canonique : un carré, toujours positif ou nul, plus une constante.

$$AM^2 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}$$

Le minimum — Le carré est nul pour $x = \dfrac{2}{5}$: c'est là que la distance est la plus petite. L'ordonnée de H est $-2 \times \dfrac{2}{5} + 1$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{5}$.

$$H\left(\frac{2}{5}\,;\frac{1}{5}\right) \quad \text{et} \quad AH = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Perpendiculaires — Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour composantes $-\dfrac{8}{5}$ et $-\dfrac{4}{5}$; un vecteur directeur de D a pour composantes 1 et -2. On calcule $xx' + yy'$: on trouve zéro.

$$-\frac{8}{5} \times 1 + \left(-\frac{4}{5}\right) \times (-2) = 0$$

À ne pas faire : La distance de A à D est la distance de A à n'importe quel point de D — C'est la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur D. Tous les autres points de la droite sont plus loin de A : dans le triangle AHM, rectangle en H, l'hypoténuse AM est plus longue que le côté AH.

22. THÉORÈME

La formule de la distance

CE QU'IL DIT

Ma no93douch koll marra nlawjou 3la H. Famma formule ta3tina la distance toul. Fi repère orthonormé, la droite D : a x plus b y plus c égale zéro, w le point A. La distance du point A à la droite D, hiya valeur absolue de (a fois l'abscisse de A, plus b fois l'ordonnée de A, plus c), sur racine carrée de la somme a au carré plus b au carré. Ya3ni fel fou9 : n3awwdhou les coordonnées mta3 A fi l'équation w ne5dhou la valeur absolue. W fel louta : la longueur mta3 le vecteur normal a, b. Rodd belek : l'équation lezem tkoun mel chakl a x plus b y plus c égale zéro 9bal ma tabda. W el formule hedhi ta3tik la hauteur mta3 triangle, w menha l'aire.

repère orthonormé ، la droite D في . طول la distance تعطينا formule فمّا . H على ما نقعدوش كل مرّة نلوّجو valeur absolue de هي ، : a x plus b y plus c égale zéro ، w le point A . la distance du point A à la droite D (a fois l'abscisse de A, plus b fois l'ordonnée de A, plus c) ، sur racine carrée de la somme a au carré la valeur absolue . ناخذو l'équation w في A متاع les coordonnées نعوّضو : يعني في الفوق . plus b au carré

a x plus b لازم تكون من الشكل l'équation : رد بالك . le vecteur normal a ، b متاع la longueur : في اللوطة w
. l'aire منها triangle ، w متاع la hauteur هاذي تعطيك formule الـ w . قُبْلْ ما تبدا y plus c égale zéro

On ne va pas chercher H à chaque fois. Il existe une formule qui donne directement la distance. Dans un repère orthonormé, soit la droite D : a x plus b y plus c égale zéro, et le point A. La distance du point A à la droite D est valeur absolue de (a fois l'abscisse de A, plus b fois l'ordonnée de A, plus c), sur racine carrée de la somme a au carré plus b au carré. Donc en haut : on remplace les coordonnées de A dans l'équation et on prend la valeur absolue. Et en bas : la longueur du vecteur normal a, b. Attention : l'équation doit être sous la forme a x plus b y plus c égale zéro avant de commencer. Et cette formule te donne la hauteur d'un triangle, et donc son aire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$. La distance d'un point $A(x_A\,;y_A)$ à la droite D est

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pour l'utiliser, on écrit d'abord la droite sous la forme $ax + by + c = 0$. Au numérateur, on remplace x et y par les coordonnées du point dans le premier membre de l'équation, et on prend la valeur absolue ; au dénominateur, on met la longueur du vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Cette formule donne par exemple la **hauteur** d'un triangle, donc son aire, sans construire le pied de la hauteur.

DISTANCE DU POINT A À LA DROITE D (REPÈRE ORTHONORMÉ)

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

DÉMONSTRATION

Soit $H(x_H\,;y_H)$ le projeté orthogonal de A sur D et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, qui est normal à D. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont tous deux orthogonaux à D, donc colinéaires : il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$. Alors $AH = |k|\sqrt{a^2 + b^2}$.

Le point H est sur D : $ax_H + by_H + c = 0$, donc $a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) = -(ax_A + by_A + c)$. Or $x_H - x_A = ka$ et $y_H - y_A = kb$, d'où $k(a^2 + b^2) = -(ax_A + by_A + c)$, puis $|k|(a^2 + b^2) = |ax_A + by_A + c|$.

Finalement $AH = |k|\sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on considère le triangle ABC de sommets $A(-2\,;-1)$, $B(2\,;2)$ et $C(-1\,;4)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB), calculer la distance du point C à la droite (AB), puis en déduire l'aire du triangle ABC.

La droite (AB) — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 4 et 3. On écrit qu'il est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AM}$, de composantes $x+2$ et $y+1$.

$$4(y+1)-3(x+2)=0 \quad \text{donc} \quad (AB)\,:\,3x-4y+2=0$$

La distance de C à (AB) — On remplace x par -1 et y par 4 dans $3x-4y+2$, on prend la valeur absolue, et on divise par la racine carrée de la somme 3 au carré plus 4 au carré, c'est-à-dire par 5.

$$\frac{|3\times(-1)-4\times 4+2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{17}{5}$$

La base AB — La longueur AB est la racine carrée de la somme 4 au carré plus 3 au carré.

$$AB=\sqrt{16+9}=5$$

L'aire — La distance de C à (AB) est la hauteur issue de C : l'aire est la moitié du produit de la base par la hauteur.

$$\frac{1}{2}\times 5\times\frac{17}{5}=\frac{17}{2}$$

À ne pas faire : Pour $D\,:\,y=-x+5$ et $A(0\,;1)$, on prend $a=-1$, $b=5$ — On écrit d'abord $D\,:\,x+y-5=0$, donc $a=1$, $b=1$ et $c=-5$. La formule suppose l'équation sous la forme $ax+by+c=0$, avec tout dans le même membre.

À ne pas faire : $\dfrac{3\times(-1)-4\times 4+2}{5}=-\dfrac{17}{5}$, donc la distance vaut $-\dfrac{17}{5}$ — La distance vaut $\dfrac{|-17|}{5}=\dfrac{17}{5}$. Une distance n'est jamais négative : c'est le rôle de la valeur absolue au numérateur.

À ne pas faire : Au dénominateur, on écrit a^2+b^2 — Au dénominateur, on écrit $\sqrt{a^2+b^2}$. On divise par la longueur du vecteur normal, pas par son carré.

---

23. DÉFINITION

Équation d'un cercle

CE QU'IL DIT

Net3addew lel cercle. Fi repère orthonormé, ne5dhou cercle : le centre I a, b, w le rayon R. Point M x, y mawjoud 3la le cercle, ki la distance IM égale R, ya3ni IM au carré égale R au carré. W IM au carré hiya (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré. Donc l'équation mta3 le cercle hiya : (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré. W bel 3aks, ki tal9a équation mel chakl hedha, ta9ra menha le centre w le rayon. Rodd belek 3la zouz 7ajet : le signe mta3 les coordonnées du centre yetbaddel, w elli fel imin houwa R au carré, mouch R.

نتعدّاو للـ cercle . في repère orthonormé ، ناخذو x ، y point M . le rayon R ، b ، w le centre I a : cercle
موجود على le cercle ، كي R égale la distance I M ، يعني I M au carré ، w I M au carré égale R au carré . هي
au carré (x moins a) : هي le cercle متاع au carré plus (y moins b) au carré . donc l'équation (x moins a)
بالعكس ، كي تلقى équation من الشكل هذا ، تقرا منها le plus (y moins b) au carré égale R au carré . w

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

رد بالك على زوز حاجات : le signe متاع les coordonnées du centre يتبدّل ، w اللي في centre w le rayon . اليمين هو R au carré ، موش R .

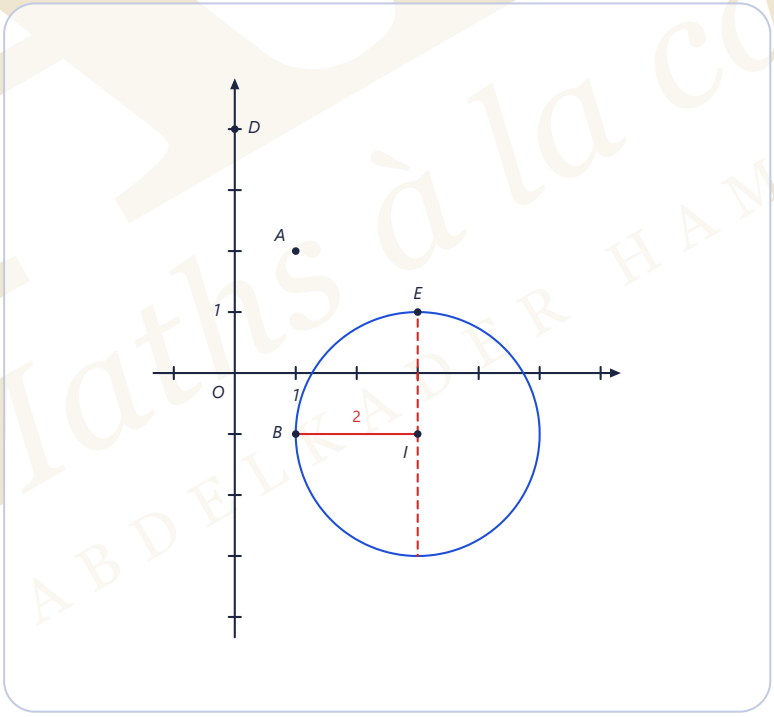
Passons au cercle. Dans un repère orthonormé, prenons un cercle de centre I a, b, et de rayon R. Un point M x, y est sur le cercle quand la distance I M égale R, c'est-à-dire I M au carré égale R au carré. Et I M au carré vaut (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré. L'équation du cercle est donc : (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré. Et inversement, quand tu rencontres une équation de cette forme, tu y lis le centre et le rayon. Attention à deux choses : le signe des coordonnées du centre s'inverse, et ce qui est à droite est R au carré, pas R.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $I(a\,;b)$ un point du plan et R un réel strictement positif. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon R.

Un point $M(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $IM = R$, c'est-à-dire $IM^2 = R^2$ (les deux nombres sont positifs). Or $IM^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

Définition. L'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ est appelée **équation cartésienne** du cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(a\,;b)$ et de rayon R.

Dans l'autre sens, sur une équation de cette forme, on **lit** le centre et le rayon : pour $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$, le centre est $I(3\,;-1)$ et le rayon est $\sqrt{4} = 2$.



B et E sont sur le cercle ; A et D n'y sont pas.

Un repère orthonormé d'origine O. Le cercle de centre I, de coordonnées 3 et −1, et de rayon 2 est tracé en bleu. Le point B, de coordonnées 1 et −1, est sur le cercle, à gauche du centre ; le point E, de coordonnées 3 et 1, est sur le cercle, au-dessus du centre. Le point A, de coordonnées 1 et 2, et le point D, de coordonnées 0 et 4, sont à l'extérieur du cercle. Au palier 2, les rayons [IB] et [IE] en rouge, de longueur 2. Au palier 3, un troisième rayon, vertical, descend de I jusqu'au point du cercle de coordonnées 3 et −3.

CERCLE DE CENTRE I(A ; B) ET DE RAYON R

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de centre $I(3\,;-1)$ et de rayon 2. Écrire son équation. Parmi les points $A(1\,;2)$, $B(1\,;-1)$, $D(0\,;4)$ et $E(3\,;1)$, lesquels sont sur le cercle ? Déterminer les points du cercle d'abscisse 3. Existe-t-il des points du cercle d'abscisse 0 ?

L'équation — On remplace a par 3, b par -1 et R par 2 : attention, $y-(-1)$ s'écrit $y+1$.

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4$$

Les points A et B — Pour A, on trouve $4+9$, c'est-à-dire 13 : A n'est pas sur le cercle. Pour B, on trouve $4+0$, c'est-à-dire 4 : B est sur le cercle.

$$(1-3)^2+(2+1)^2=13 \quad ; \quad (1-3)^2+(-1+1)^2=4$$

Les points D et E — Pour D, on trouve $9+25$, c'est-à-dire 34 : D n'est pas sur le cercle. Pour E, on trouve $0+4$: E est sur le cercle.

$$(0-3)^2+(4+1)^2=34 \quad ; \quad (3-3)^2+(1+1)^2=4$$

L'abscisse 3 — On remplace x par 3 : il reste $(y+1)^2=4$, donc $y+1$ vaut 2 ou -2. On trouve deux points, d'ordonnées 1 et -3.

$$(y+1)^2=4 \iff y=1 \text{ ou } y=-3$$

L'abscisse 0 — On remplace x par 0 : on obtient $9+(y+1)^2=4$, donc un carré égal à -5. C'est impossible : aucun point du cercle n'a pour abscisse 0.

$$(y+1)^2=-5$$

À ne pas faire : $(x-3)^2+(y+1)^2=4$: le centre est $(-3\,;1)$ — Le centre est $(3\,;-1)$: on lit $x-a$ et $y-b$, et $y+1=y-(-1)$. Les coordonnées du centre sont les nombres qui annulent chaque parenthèse : elles ont le signe contraire de celui qu'on voit.

À ne pas faire : $(x-3)^2+(y+1)^2=4$: le rayon est 4 — Le rayon est $\sqrt{4}=2$. Le second membre est le carré du rayon, pas le rayon.

24. MÉTHODE

Reconnaître un cercle

CE QU'IL DIT

Ki ndévelopper l'équation mta3 cercle, nal9aw x au carré plus y au carré plus a x plus b y plus c égale zéro. Ama bel 3aks : équation mel chakl hedha, mouch dima cercle. Kifech na3rfou ? Bel forme canonique. x au carré plus a x, nektbouha (x plus a sur deux) au carré, moins a au carré sur quatre. W nafs echay l y. Ba3d n3addiw les constantes lel imin, w nchoufou le signe. Ken elli fel imin strictement positif, 3andna cercle, w le rayon houwa la racine carrée mte3ou. Ken nul, point wa7ed. W ken négatif, l'ensemble vide, 5ater somme mta3 zouz carrés 3omrha ma tkoun négative.

كي نـ développer l'équation متاع cercle ، نلقاو x au carré plus y au carré plus a x plus b y plus c égale zéro . أما بالعكس : équation من الشكل هذا ، موش ديما cercle . كيفاش نعرفو ؟ بالـ forme canonique . x au

نكتبوها (x plus a sur deux) au carré ، moins a au carré sur quatre . w carré plus a x بعد . y نفس الشي لـ
نعدّيو les constantes لليمين ، w نشوفو le signe . كان اللي في اليمين strictement positif ، عندنا le cercle ، w
rayon هو la racine carrée متاعو . كان point ، nul واحد . w كان l'ensemble vide ، négatif ، خاطر somme متاع
زوز carrés عمرها ما تكون négative .

Quand on développe l'équation d'un cercle, on obtient x au carré plus y au carré plus a x plus b y plus c égale zéro. Mais dans l'autre sens, une équation de cette forme n'est pas toujours un cercle. Comment le savoir ? Avec la forme canonique. x au carré plus a x s'écrit (x plus a sur deux) au carré, moins a au carré sur quatre. Et de même pour y. Ensuite on passe les constantes à droite, et on regarde le signe. Si le second membre est strictement positif, on a un cercle, dont le rayon est sa racine carrée. S'il est nul, un seul point. Et s'il est négatif, l'ensemble est vide, car une somme de deux carrés n'est jamais négative.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En développant $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Mais, dans l'autre sens, une telle équation n'est **pas toujours** celle d'un cercle.

La méthode. Soient a, b et c trois réels et E l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. On utilise la forme canonique d'un trinôme, pour x puis pour y :

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \qquad y^2 + by = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}.$$

L'équation devient $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$. On discute suivant le signe du second membre :

- si $a^2 + b^2 - 4c > 0$, E est le **cercle** de centre $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$;
- si $a^2 + b^2 - 4c = 0$, E est réduit à **un seul point** ;
- si $a^2 + b^2 - 4c < 0$, E est **vide** : une somme de deux carrés n'est jamais négative.

FORME CANONIQUE

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer l'ensemble C_1 des points de coordonnées x et y vérifiant $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, puis l'ensemble C_2 des points vérifiant $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 34 = 0$.

Les carrés pour C_1 — On regroupe les termes en x, puis les termes en y, et on complète chaque carré : $x^2 - 2x$ est le début de $(x - 1)^2$, et $y^2 - 4y$ le début de $(y - 2)^2$.

$(x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + 1 = 0$

L'ensemble C_1 — On passe les constantes à droite : on trouve 4, qui est strictement positif. C_1 est le cercle de centre le point de coordonnées 1 et 2, et de rayon 2.

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

Les carrés pour C_2 — De même, x^2-6x est le début de $(x-3)^2$, et y^2+8y le début de $(y+4)^2$.

$$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+34=0$$

L'ensemble C_2 — Cette fois le second membre vaut -9 : une somme de deux carrés ne peut pas être négative. Aucun point ne convient, l'ensemble C_2 est vide.

$$(x-3)^2+(y+4)^2=-9$$

À ne pas faire : $x^2-6x=(x-3)^2$ — $x^2-6x=(x-3)^2-9$. En développant $(x-3)^2$ on obtient x^2-6x+9 : il faut retrancher le 9 qu'on a ajouté.

À ne pas faire : Toute équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est l'équation d'un cercle — Seulement si $a^2+b^2-4c>0$; sinon l'ensemble est un point ou il est vide. Le second membre de la forme canonique doit être le carré d'un rayon, donc strictement positif.

---

25. APPLICATION

Exemple : un cercle et deux tangentes

CE QU'IL DIT

Mithel yjma3 barcha 7ajet mel chapitre. 3andna l'ensemble mta3 les points elli y7a99ou x au carré plus y au carré moins deux x plus quatre y égale trois. Première étape : bel forme canonique, nal9aw cercle, le centre mte3ou I un, moins deux, w le rayon deux racine de deux. Deuxième étape : bech nal9aw win y9oss l'axe des abscisses, n7ottou y égale zéro, w n7ellou équation du second degré : nal9aw A w B. Troisième étape : la tangente en A. La tangente perpendiculaire 3la le rayon, donc le vecteur IA houwa vecteur normal liha. W nektbou l'équation kima t3allemna m3a le vecteur normal.

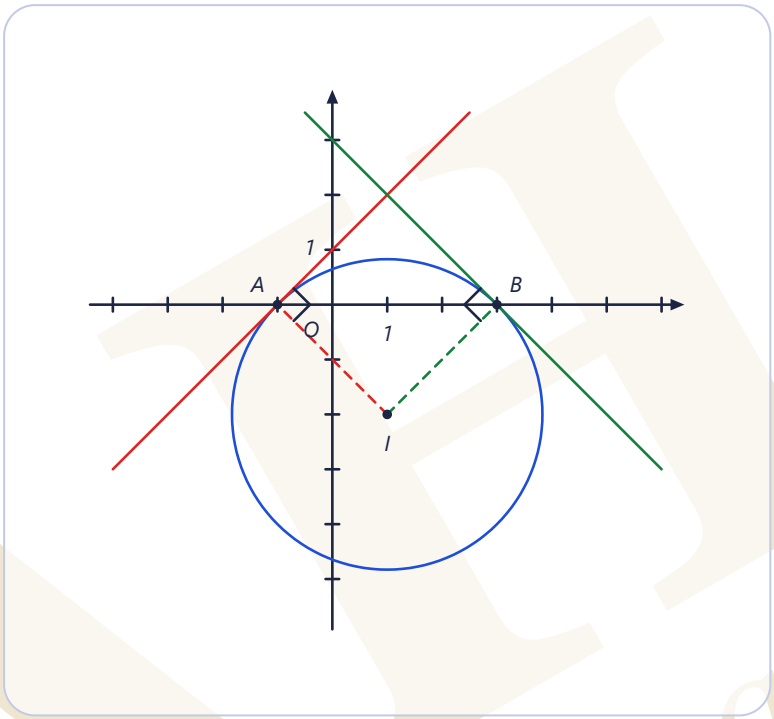
مثال يجمع برشا حاجات من الـ chapitre . عندنا l'ensemble متاع les points اللي يحقّقو x au carré plus y au carré : moins deux x plus quatre y égale trois . première étape بالـ forme canonique ، نلقاو le centre ، cercle l'axe des يقصّ وين نلقاو باش : I un ، moins deux ، w le rayon deux racine de deux . deuxième étape متاعو : équation du second degré نحلّو y égale zéro ، w نحطّو ، abscisses A w B . troisième étape : la نلقاو : tangente en A . la tangente perpendiculaire على I A donc le vecteur ، le rayon هو vecteur normal ليها . w نكتبو l'équation كيما تعلّمنا مع le vecteur normal .

Un exemple qui rassemble plusieurs idées du chapitre. On a l'ensemble des points qui vérifient x au carré plus y au carré moins deux x plus quatre y égale trois. Première étape : avec la forme canonique, on trouve un cercle de centre I un, moins deux, et de rayon deux racine de deux. Deuxième étape : pour trouver où il coupe l'axe des abscisses, on pose y égale zéro, et on résout une équation du second degré : on trouve A et B. Troisième étape : la tangente en A. La tangente est perpendiculaire au rayon, donc le vecteur I A lui est normal. Et on écrit l'équation comme on l'a appris avec le vecteur normal.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(x\,;y)$ du plan vérifiant $x^2+y^2-2x+4y=3$.

On enchaîne ici trois gestes du chapitre :

1. **reconnaître le cercle** par la forme canonique : centre et rayon ;
2. **couper** le cercle par l'axe des abscisses, en faisant $y = 0$ dans l'équation ;
3. écrire l'équation de la **tangente** en un point A du cercle : c'est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[IA]$. Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est donc un **vecteur normal** à la tangente.



En A et en B, la tangente est perpendiculaire au rayon.

Un repère orthonormé d'origine O. Le cercle, en bleu, a pour centre I, de coordonnées 1 et −2, situé sous l'axe des abscisses ; il coupe l'axe des abscisses en A, d'abscisse −1, et en B, d'abscisse 3. Au palier 2, le rayon [IA] en pointillés rouges et la tangente au cercle en A, en rouge, qui monte vers la droite : un petit carré marque l'angle droit en A. Au palier 3, le rayon [IB] en pointillés verts et la tangente en B, en vert, qui descend vers la droite, avec son angle droit en B. Les deux tangentes se coupent au-dessus de l'axe, à la verticale de I.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble des points de coordonnées x et y vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$. Montrer que c'est un cercle, déterminer ses points d'intersection A et B avec l'axe des abscisses, puis une équation de la tangente au cercle en chacun de ces points.

Le cercle — On complète les carrés : $x^2 - 2x$ donne $(x-1)^2 - 1$, et $y^2 + 4y$ donne $(y+2)^2 - 4$. On obtient un cercle de centre I, de coordonnées 1 et -2, et de rayon $2\sqrt{2}$.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$$

L'axe des abscisses — On fait $y = 0$ dans l'équation de départ : il reste une équation du second degré en x, dont les solutions sont -1 et 3.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 3$$

Les deux points — Le cercle coupe l'axe des abscisses en deux points, qu'on note A et B.

$$A(-1\,;0) \quad \text{et} \quad B(3\,;0)$$

La tangente en A — Le vecteur $\overrightarrow{IA}$, de composantes -2 et 2, est normal à la tangente, qui passe par A. On simplifie par -2.

$$-2(x+1)+2(y-0)=0 \quad \text{donc} \quad x-y+1=0$$

La tangente en B — Le vecteur $\overrightarrow{IB}$, de composantes 2 et 2, est normal à la tangente, qui passe par B. On simplifie par 2.

$$2(x-3)+2(y-0)=0 \quad \text{donc} \quad x+y-3=0$$

À ne pas faire : Pour la tangente en A, on prend le vecteur $\overrightarrow{IA}$ comme vecteur directeur — Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est un vecteur normal à la tangente. La tangente est perpendiculaire au rayon : si on prenait le rayon comme direction, on obtiendrait la droite (IA) elle-même.

---

26. THÉORÈME

Droite et cercle

CE QU'IL DIT

Droite w cercle, kifech yjiw l b3adhhom ? Famma tletha cas, w el koll yet7all b la distance. Ne5dhou cercle : le centre I w le rayon R, w droite D. Na7sbou la distance du point I à la droite D. Ken asghar men R, la droite t9oss le cercle fi zouz points : sécants. Ken tsewi R bedhabt, la droite tmess le cercle fi point wa7ed : tangente. W ken akbar men R, ma yet9ablouch jemla : extérieurs. Ya3ni ma yelzemnech nlawjou 3la les points communs : na7sbou la distance, nchoufouha m3a le rayon, w njewbou.

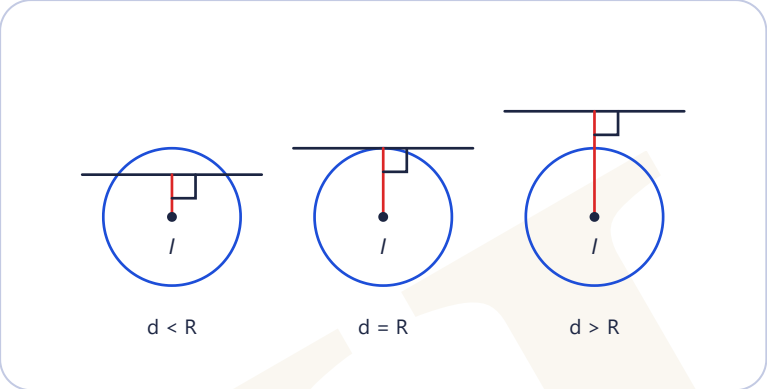
cercle : le centre I w ناخذو . la distance بـ يتحلّ الكل cas ، w ثلاثة ؟ فمّا لبعضهم يجيو كيفاش ، droite w cercle le تقصّ R ، la droite من أصغر كان . la distance du point I à la droite D نحسبو . le rayon R ، w droite D tangente . w : واحد point في le cercle تمسّ la droite ، بالضبط R كان تساوي . points : sécants زوز في cercle la نحسبو : les points communs على نلوّجو يلزمناش ما يعني . extérieurs : جملة ما ، يتقابلوش R من أكبر كان distance ، نشوفوها مع w ، le rayon نجاوبو .

Une droite et un cercle : comment se placent-ils l'un par rapport à l'autre ? Il y a trois cas, et tout se décide avec la distance. Prenons un cercle de centre I et de rayon R, et une droite D. On calcule la distance du point I à la droite D. Si elle est plus petite que R, la droite coupe le cercle en deux points : ils sont sécants. Si elle est exactement égale à R, la droite touche le cercle en un seul point : elle est tangente. Et si elle est plus grande que R, ils ne se rencontrent pas du tout : ils sont extérieurs. On n'a donc pas besoin de chercher les points communs : on calcule la distance, on la confronte au rayon, et on répond.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et de rayon R, et D une droite. On a : - $d(I,D)<R$ si et seulement si D et $\mathscr{C}$ sont **sécants** (deux points communs) ; - $d(I,D)=R$ si et seulement si D est **tangente** à $\mathscr{C}$ (un seul point commun) ; - $d(I,D)>R$ si et seulement si D et $\mathscr{C}$ sont **extérieurs** (aucun point commun).

Pour étudier la position d'une droite et d'un cercle, on n'a donc pas besoin de chercher leurs points communs : il suffit de **comparer** la distance du centre à la droite avec le rayon.



Sécants, tangents, extérieurs : on compare d(I, D) et R.

Trois cercles de même rayon, côte à côte, chacun avec son centre I et une droite D horizontale. À gauche, la droite traverse le cercle en deux points : la distance du centre à la droite, marquée par un segment rouge perpendiculaire à la droite, est plus petite que le rayon. Au palier 2, au milieu, la droite touche le cercle en un seul point, tout en haut : la distance est égale au rayon. Au palier 3, à droite, la droite passe au-dessus du cercle sans le toucher : la distance est plus grande que le rayon.

$$d(I, D) < R \iff D \text{ et } \mathscr{C} \text{ sécants}$$

$$d(I, D) = R \iff D \text{ tangente à } \mathscr{C}$$

$$d(I, D) > R \iff D \text{ et } \mathscr{C} \text{ extérieurs}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, soit le cercle de centre $I(3\,;-2)$ et de rayon 5. Montrer que la droite D d'équation $4x-3y+7=0$ est tangente à ce cercle. Montrer ensuite que toute droite passant par l'origine O coupe le cercle en deux points.

La distance de I à D — On applique la formule de la distance avec $a=4$, $b=-3$ et $c=7$, et les coordonnées 3 et -2 du centre.

$$\frac{|4\times 3-3\times(-2)+7|}{\sqrt{16+9}}=\frac{25}{5}=5$$

Tangente — La distance du centre à la droite est égale au rayon : la droite D est tangente au cercle.

Le point O — On calcule la distance IO : racine carrée de la somme $9+4$. Elle est plus petite que le rayon : le point O est à l'intérieur du cercle.

$$IO=\sqrt{13}<5$$

Une droite passant par O — La distance du centre à une droite passant par O est la plus courte distance de I à un point de cette droite : elle est inférieure ou égale à IO, donc strictement inférieure au rayon. La droite et le cercle sont sécants.

À ne pas faire : $d(I, D) = 5$ et $R = 5$: la droite coupe le cercle en deux points — Quand $d(I, D) = R$, la droite est tangente : un seul point commun. Deux points communs demandent une distance strictement plus petite que le rayon.

À ne pas faire : On compare $d(I, D)$ avec le second membre R^2 de l'équation du cercle — On compare $d(I, D)$ avec le rayon R. Une distance se compare à une longueur : dans $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$, le rayon est 5, pas 25.

---

27. APPLICATION

Exemple : les points communs d'une droite et d'un cercle

CE QU'IL DIT

W ken n7ebbou les points communs b rou7hom ? La distance t9ollek berk 9addech men point famma. Houni, l'ensemble x au carré plus y au carré moins x plus deux y égale zéro houwa cercle, le centre mte3ou I un demi, moins un, w le rayon mte3ou la moitié de racine de cinq. La distance de I à la droite y égale deux x moins un, tsewi un sur racine de cinq : asghar men le rayon, donc la droite t9oss le cercle fi zouz points. Bech nal9awhom, n3awwdhou y b deux x moins un fi l'équation mta3 le cercle. Nal9aw équation du second degré en x : cinq x au carré moins x moins un égale zéro. Ezzouz solutions mte3ha ya3tiw les abscisses mta3 A w B, w l koll wa7da, l'ordonnée hiya deux x moins un.

l'ensemble x au ، هوني . فمّا point من تقلّك برك قدّاش la distance ؟ بروحهم les points communs نحبّو كان w l un demi ، moins un ، w متاعو cercle ، le centre هو carré plus y au carré moins x plus deux y égale zéro تساوي ، la moitié de racine de cinq . la distance de I à la droite y égale deux x moins un متاعو le rayon باش نلقاوهم ، points زوز في le cercle تقصّ le rayon ، donc la droite أصغر من : un sur racine de cinq équation du second degré en x : cinq x au نلقاو . le cercle متاع l'équation في deux x moins un بـ y نعوّضو لكل وحدة ، A w B ، w متاع les abscisses متاعها يعطيو solutions الزوز . carré moins x moins un égale zéro . deux x moins un هي l'ordonnée

Et si on veut les points communs eux-mêmes ? La distance dit seulement combien il y en a. Ici, l'ensemble x au carré plus y au carré moins x plus deux y égale zéro est un cercle de centre I un demi, moins un, et son rayon est la moitié de racine de cinq. La distance de I à la droite y égale deux x moins un vaut un sur racine de cinq : elle est plus petite que le rayon, donc la droite coupe le cercle en deux points. Pour les trouver, on remplace y par deux x moins un dans l'équation du cercle. On obtient une équation du second degré en x : cinq x au carré moins x moins un égale zéro. Ses deux solutions donnent les abscisses de A et de B, et pour chacune, l'ordonnée est deux x moins un.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la droite D d'équation $y = 2x - 1$ et l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(x\,;y)$ du plan vérifiant $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$.

La distance du centre à la droite dit **combien** il y a de points communs. Pour les **trouver**, on revient aux équations :

1. un point commun est sur D : ses coordonnées vérifient $y = 2x - 1$;
2. il est aussi sur $\mathscr{C}$: on **remplace** y par $2x - 1$ dans l'équation du cercle ;

3. on obtient une **équation du second degré** en x : ses solutions sont les abscisses des points communs, et l'ordonnée de chacun se calcule avec $y = 2x - 1$.

Le nombre de solutions confirme la position : deux solutions pour une droite sécante, une seule pour une tangente, aucune pour une droite extérieure.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $y = 2x - 1$ et l'ensemble $\mathscr{C}$ des points vérifiant $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre I et le rayon R. Calculer la distance du point I à la droite D, en déduire que D coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B, puis déterminer les coordonnées de A et de B.

Le cercle — On complète les carrés : $x^2 - x$ donne $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, et $y^2 + 2y$ donne $(y+1)^2 - 1$. Le second membre devient cinq quarts, qui est positif : c'est un cercle de centre $I\left(\frac{1}{2} ; -1\right)$, et son rayon est la moitié de racine de cinq.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4} \quad \text{donc} \quad R = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

La distance de I à D — On écrit D sous la forme $2x - y - 1 = 0$, puis on applique la formule de la distance avec les coordonnées du centre.

$$\frac{\left|2 \times \frac{1}{2} - (-1) - 1\right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Sécants — Le cinquième de racine de cinq est plus petit que sa moitié : la distance est plus petite que le rayon, donc la droite coupe le cercle en deux points A et B.

$$\frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

On remplace y — Les points communs vérifient les deux équations : on remplace y par $2x - 1$ dans l'équation du cercle, partout où il apparaît, et on développe.

$$x^2 + (2x-1)^2 - x + 2(2x-1) = 0 \quad \text{donc} \quad 5x^2 - x - 1 = 0$$

Les abscisses — Le discriminant vaut un plus vingt, c'est-à-dire vingt et un : il est positif, l'équation a deux solutions.

$$x = \frac{1 - \sqrt{21}}{10} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 + \sqrt{21}}{10}$$

Les deux points — Pour chaque abscisse, on calcule l'ordonnée avec $y = 2x - 1$.

$$A\left(\frac{1 - \sqrt{21}}{10} ; \frac{-4 - \sqrt{21}}{5}\right) \quad \text{et} \quad B\left(\frac{1 + \sqrt{21}}{10} ; \frac{-4 + \sqrt{21}}{5}\right)$$

À ne pas faire : On remplace y par $2x - 1$ dans y^2 seulement — On remplace y partout : dans y^2 et dans $2y$. Un point commun vérifie l'équation du cercle tout entière : si on oublie un terme, l'équation obtenue n'est plus celle des points communs.

28. VOCABULAIRE

Points cocycliques

CE QU'IL DIT

Kelma jdida : cocycliques. Des points cocycliques, ma3neha el koll 3la nafs le cercle. Tletha points mouch alignés, dima cocycliques : famma le cercle circonscrit. Ama arb3a points, mouch dima, yelzem tthabbetha. Kifech ? Nlawjou 3la le centre mta3 le cercle elli yet3adda men tletha menhom : houwa win yet9ablou zouz médiatrices. Ba3d na7sbou le rayon au carré, w fel e5er nthabtou elli le quatrième point 3la nafs la distance men le centre. Fel mithel, les médiatrices sehlin barcha : wa7da y égale trois, w lo5ra x égale moins deux.

كلمة جديدة : cocycliques . des points cocycliques ، معناها الكل على نفس le cercle . ثلاثة points موش alignés ، ديما cocycliques : فمّا le cercle circonscrit . أما أربعة points ، موش ديما ، يلزم تثبتها . كيفاش ؟ نلوّجو على le centre le cercle متاع اللي يتعدّى من ثلاثة منهم : هو وين يتقابلو زوز médiatrices . بعد نحسبو le rayon au carré ، w في الآخر نثبتو اللي le quatrième point على نفس la distance من le centre . في المثال ، les médiatrices ساهلين برشا : وحدة w ، y égale trois الأخرى x égale moins deux .

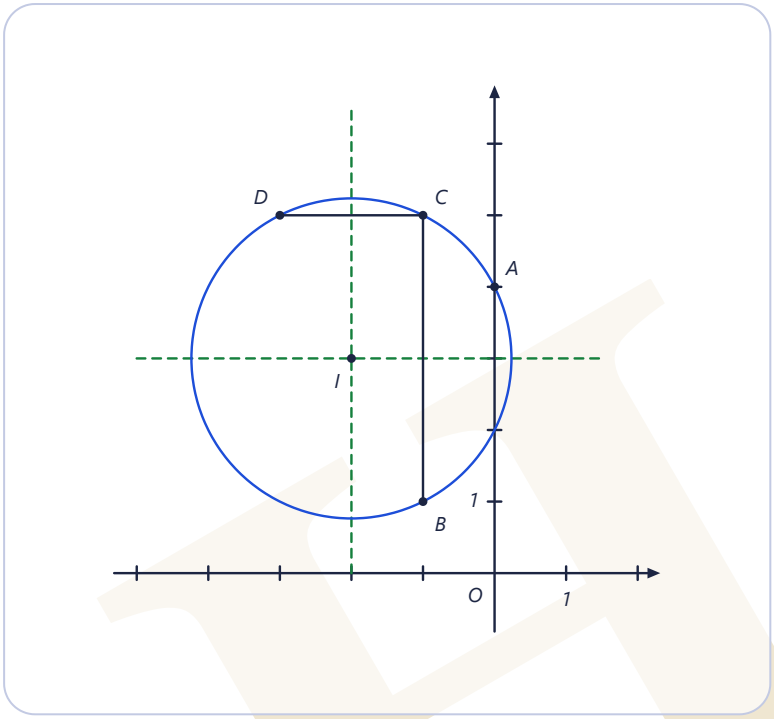
Un mot nouveau : cocycliques. Des points cocycliques sont des points situés sur un même cercle. Trois points non alignés sont toujours cocycliques : il y a le cercle circonscrit. Mais quatre points ne le sont pas toujours, il faut le prouver. Comment ? On cherche le centre du cercle qui passe par trois d'entre eux : c'est le point où se coupent deux médiatrices. Ensuite on calcule le carré du rayon, et à la fin on vérifie que le quatrième point est à la même distance du centre. Dans l'exemple, les médiatrices sont très simples : l'une est y égale trois, et l'autre x égale moins deux.

Vocabulaire. Des points du plan sont dits **cocycliques** lorsqu'ils sont sur un même cercle.

Trois points non alignés sont toujours cocycliques : ils sont sur le cercle circonscrit au triangle qu'ils forment. Pour **quatre** points, ce n'est plus automatique : il faut le prouver.

La méthode. Dans un repère orthonormé, pour montrer que quatre points sont cocycliques :

1. on cherche le centre I du cercle passant par trois d'entre eux — c'est le point d'intersection de deux médiatrices ;
2. on calcule le carré du rayon ;
3. on vérifie que le quatrième point est à la même distance de I.



A, B, C et D sont cocycliques.

Un repère orthonormé d'origine O avec quatre points : A de coordonnées 0 et 4, B de coordonnées −1 et 1, C de coordonnées −1 et 5, D de coordonnées −3 et 5. Le segment [BC] est vertical ; sa médiatrice, en pointillés verts, est la droite horizontale d'équation y = 3. Au palier 2, le segment [CD] est horizontal ; sa médiatrice, en pointillés verts, est la droite verticale d'équation x = −2. Les deux médiatrices se coupent en I, de coordonnées −2 et 3. Au palier 3, le cercle de centre I, en bleu, passe par les quatre points A, B, C et D.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, montrer que les points $A(0\,;4)$, $B(-1\,;1)$, $C(-1\,;5)$ et $D(-3\,;5)$ sont sur un même cercle.

La médiatrice de $[BC]$ — B et C ont la même abscisse : le segment $[BC]$ est parallèle à l'axe des ordonnées, et son milieu a pour ordonnée 3. Sa médiatrice est la droite d'équation $y = 3$.

$$y = 3$$

La médiatrice de $[CD]$ — C et D ont la même ordonnée : le segment $[CD]$ est parallèle à l'axe des abscisses, et son milieu a pour abscisse -2. Sa médiatrice est la droite d'équation $x = -2$.

$$x = -2$$

Le centre et le rayon — Les deux médiatrices se coupent au point I de coordonnées -2 et 3 : c'est le centre du cercle passant par B, C et D. On calcule le carré du rayon avec le point C.

$$IC^2 = (-1+2)^2 + (5-3)^2 = 5$$

Le point A — On calcule IA^2 : on trouve aussi 5. Le point A est sur le même cercle.

$$IA^2 = (0+2)^2 + (4-3)^2 = 5$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

À ne pas faire : Quatre points sont toujours sur un même cercle — Trois points non alignés le sont toujours ; pour le quatrième, il faut vérifier. Par trois points non alignés passe un seul cercle : le quatrième point y est,

ou n'y est pas.

29. PROPRIÉTÉ

Intérieur et extérieur

CE QU'IL DIT

Le cercle y5alli le plan tletha parties : les points elli 3lih, elli fi dekhlou, w elli el barra. W l'équation t9oul lna koll point win. Ne5dhou cercle : (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré, w point M x, y. Elli fel isar houwa IM au carré. Ken ysewi R au carré, M 3la le cercle. Ken asghar men R au carré, M à l'intérieur, 5ater a9rab lel centre men le rayon. W ken akbar men R au carré, M à l'extérieur. Rodd belek : nchoufou m3a R au carré, mouch m3a R.

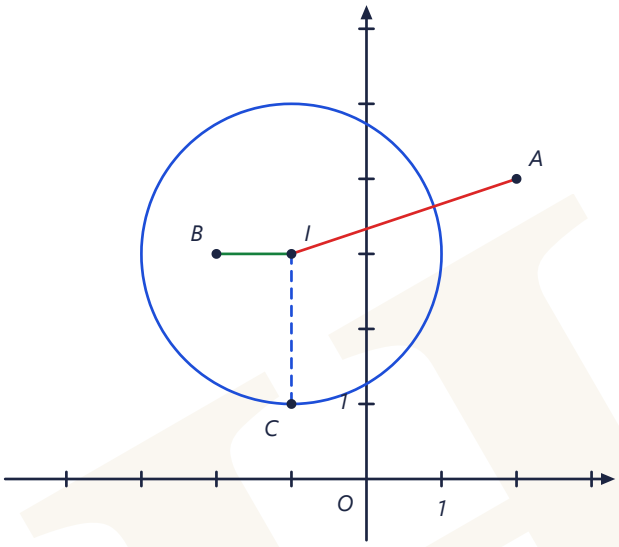
يخلّي le cercle le plan ثلاثة parties : les points اللي عليه ، اللي في داخلو ، w اللي البرّا . تقول لنا w l'équation cercle : (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré ، w point M x . وين point كل ناخذو y ، . اللي في اليسار هو I M au carré . كان يساوي M ، R au carré على le cercle . كان أصغر من M à R au carré ، خاطر أقرب لـ l'intérieur ، M à l'extérieur كان أكبر من le rayon . w من centre . رد بالك : نشوفو مع R au carré ، موش مع R au carré .

Le cercle partage le plan en trois parties : les points qui sont dessus, ceux qui sont à l'intérieur, et ceux qui sont à l'extérieur. Et l'équation nous dit où se trouve chaque point. Prenons un cercle : (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré, et un point M x, y. Le premier membre est I M au carré. S'il est égal à R au carré, M est sur le cercle. S'il est plus petit que R au carré, M est à l'intérieur, car il est plus près du centre que le rayon. Et s'il est plus grand que R au carré, M est à l'extérieur. Attention : on compare avec R au carré, pas avec R.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle d'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ et $M(x\,;y)$ un point du plan. - $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ si et seulement si M est **sur** le cercle $\mathscr{C}$; - $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$ si et seulement si M est **à l'intérieur** du cercle $\mathscr{C}$; - $(x-a)^2+(y-b)^2>R^2$ si et seulement si M est **à l'extérieur** du cercle $\mathscr{C}$.

Le premier membre est IM^2, le carré de la distance du point M au centre I : on compare simplement IM au rayon.



B à l'intérieur, C sur le cercle, A à l'extérieur.

Un repère orthonormé d'origine O. Le cercle de centre I, de coordonnées −1 et 3, et de rayon 2 est tracé en bleu. Le point C, de coordonnées −1 et 1, est sur le cercle, juste en dessous du centre : le rayon [IC] est en pointillés. Au palier 2, le point B, de coordonnées −2 et 3, est à l'intérieur du cercle : le segment [IB], en vert, est plus court que le rayon. Au palier 3, le point A, de coordonnées 2 et 4, est à l'extérieur du cercle : le segment [IA], en rouge, est plus long que le rayon.

$IM^2 < R^2 \iff M$ à l'intérieur

$IM^2 > R^2 \iff M$ à l'extérieur

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un repère orthonormé, soit le cercle de centre $I(-1\,;3)$ et de rayon 2. Écrire son équation, puis situer les points $A(2\,;4)$, $B(-2\,;3)$ et $C(-1\,;1)$ par rapport à ce cercle.

L'équation — Le centre a pour coordonnées -1 et 3, et le carré du rayon vaut 4.

$(x+1)^2+(y-3)^2=4$

Le point A — On remplace x par 2 et y par 4 : on trouve 10, qui est plus grand que 4. Le point A est à l'extérieur du cercle.

$(2+1)^2+(4-3)^2=10>4$

Le point B — On remplace x par -2 et y par 3 : on trouve 1, qui est plus petit que 4. Le point B est à l'intérieur du cercle.

$(-2+1)^2+(3-3)^2=1<4$

Le point C — On remplace x par -1 et y par 1 : on trouve exactement 4. Le point C est sur le cercle.

$(-1+1)^2+(1-3)^2=4$

À ne pas faire : $(2+1)^2+(4-3)^2=10$ et le rayon vaut 2 : on compare 10 et 2 — On compare 10 avec $R^2=4$, ou bien $\sqrt{10}$ avec $R=2$. Le premier membre est le carré de la distance au centre : on compare des carrés entre eux, ou des longueurs entre elles.

---

30. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : droites concourantes

CE QU'IL DIT

Mas2la o5ra bech nemchiw ab3ed. 3andna zouz carrés : OABC el kbir, w ADEF es-sghir, lese9 fih, w OA égale trois, w AD égale un. N7ebbou nthabtou elli les droites OF, BD w CE concourantes, ya3ni etletha yet3addew men nafs le point. Ne5dhou le repère O, le vecteur OA, le vecteur OC. El méthode : nektbou équation l koll droite, nlawjou 3la le point d'intersection mta3 zouz menhom, w ba3d nthabtou elli houwa 3la la troisième. Nal9aw le point six cinquièmes, deux cinquièmes, w etletha équations yotl3ou zéro fih.

مسألة أخرى باش نمشيو أبعد . عندنا زوز carrés : O A B C الكبير ، w A D E F الصغير ، لاصق فيه ، w O A égale trois ، w A D égale un . نحبّو نثبتو اللي les droites O F ، B D w C E concourantes ، يعني الثلاثة يتعدّاو من le repère O ، le vecteur O A ، le vecteur O C ناخذو . le point نفس : méthode الـ . droite لكل équation نكتبو ، نلوّجو على le point d'intersection متاع زوز منهم ، و بعد نثبتو اللي هو على la troisième . نلقاو le point six cinquièmes ، deux cinquièmes ، w équations الثلاثة يطلعو zéro فيه .

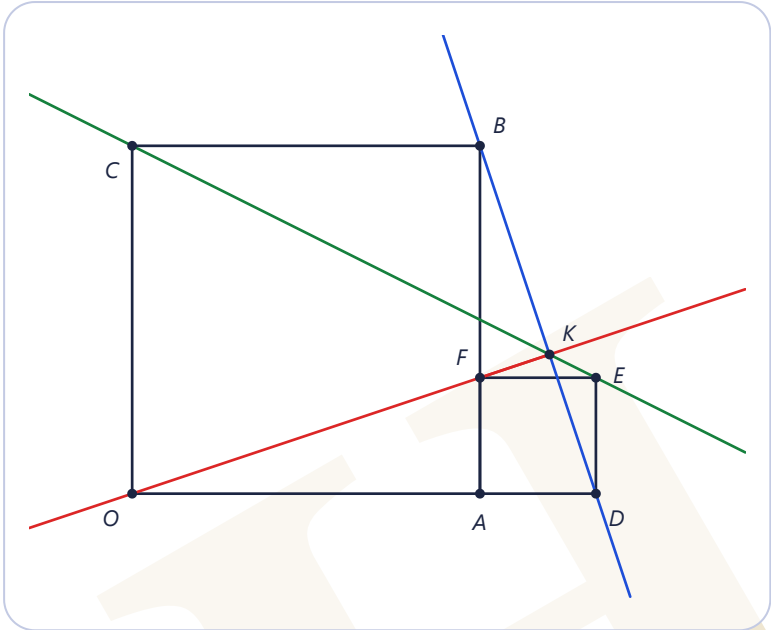
Un autre problème pour aller plus loin. On a deux carrés : le grand, O A B C, et le petit, A D E F, collé contre lui, avec O A égale trois et A D égale un. On veut prouver que les droites O F, B D et C E sont concourantes, c'est-à-dire qu'elles passent toutes les trois par le même point. On prend le repère O, le vecteur O A, le vecteur O C. La méthode : on écrit une équation de chaque droite, on cherche le point d'intersection de deux d'entre elles, puis on vérifie qu'il est sur la troisième. On trouve le point de coordonnées six cinquièmes et deux cinquièmes, et les trois équations y donnent zéro.

$OABC$ et $ADEF$ sont deux carrés tels que $OA=3$ et $AD=1$: D est sur la demi-droite $[OA)$, au-delà de A, et F est sur le côté $[AB]$. On veut montrer que les droites (OF), (BD) et (CE) sont **concourantes**, c'est-à-dire qu'elles passent par un même point.

Le repère. On considère le repère cartésien $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$. Comme $AD=\frac{1}{3}OA$, on lit :

$$A(1\,;0)\qquad C(0\,;1)\qquad B(1\,;1)\qquad D\left(\frac{4}{3}\,;0\right)\qquad E\left(\frac{4}{3}\,;\frac{1}{3}\right)\qquad F\left(1\,;\frac{1}{3}\right).$$

La méthode. On détermine une équation cartésienne de chacune des trois droites, on calcule le point d'intersection de deux d'entre elles, puis on vérifie qu'il appartient à la troisième.



(OF), (BD) et (CE) passent par le même point K.

Un grand carré OABC : O en bas à gauche, A en bas à droite, B en haut à droite, C en haut à gauche. Collé à droite du côté [AB], en bas, un petit carré ADEF trois fois plus petit : D à droite de A sur le prolongement de [OA], E au-dessus de D, F sur le côté [AB] au-dessus de A. Au palier 2, la droite (OF) en rouge et la droite (BD) en bleu se coupent en un point K, à droite du grand carré, juste au-dessus du petit. Au palier 3, la droite (CE), en vert, passe elle aussi par K.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, on a $B(1\,;1)$, $C(0\,;1)$, $D\left(\frac{4}{3}\,;0\right)$, $E\left(\frac{4}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ et $F\left(1\,;\frac{1}{3}\right)$.

Montrer que les droites (OF), (BD) et (CE) sont concourantes.

La droite (OF) — Elle passe par l'origine et le vecteur $\overrightarrow{OF}$, de composantes 1 et $\frac{1}{3}$, la dirige.

$(OF) : x - 3y = 0$

La droite (BD) — Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour composantes $\frac{1}{3}$ et -1. On écrit qu'il est colinéaire au vecteur de composantes $x - 1$ et $y - 1$, puis on multiplie par 3.

$(BD) : 3x + y - 4 = 0$

La droite (CE) — Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a pour composantes $\frac{4}{3}$ et $-\frac{2}{3}$; il est colinéaire au vecteur de composantes 2 et -1.

$(CE) : x + 2y - 2 = 0$

Le point commun à (OF) et (BD) — Sur (OF), $x = 3y$. On remplace dans l'équation de (BD) : $10y - 4 = 0$.

$y = \frac{2}{5} \quad ; \quad x = \frac{6}{5}$

Il est sur (CE) — On remplace ces coordonnées dans l'équation de (CE) : on trouve zéro. Les trois droites passent par le même point.

$\frac{6}{5} + 2 \times \frac{2}{5} - 2 = 0$

31. REMARQUE

Pour la culture : se repérer autrement

CE QU'IL DIT

Fel e5er, chwaya tha9afa. Les coordonnées elli 5demna bihom, x w y, mouch et-tari9a el wa7ida bech t7added blasset point. Men 9dim ez-zmen, en-nes 7abbou y7addedou el bleyes fes-sme w fel b7ar, w Ératosthène 3mal carte du monde fiha des coordonnées géographiques. Famma zeda les coordonnées polaires : ne5dhou demi-droite Ox, w koll point M na3rfouh b zouz nombres : la distance OM, w l'angle xOM. Hakka ye5dem le radar : ydour 3la rou7ou, yeb3ath des ondes, w ki yarj3ou, ya3ref la distance w l'angle mta3 el 7aja elli 9oddemou. W fi plan mta3 mdina, nal9aw el blasa b 7arf w ra9m.

في الآخر ، شويّة ثقافة . les coordonnées اللي خدمنا بيهم ، x w y ، موش الطريقة الوحيدة باش تحدّد بلاصة point . من قديم الزمان ، الناس حبّو يحدّدو البلايص في السماء w في البحر ، carte du عمل w Ératosthène monde فيها des coordonnées géographiques . فمّا زادة les coordonnées polaires : ناخذو demi-droite O x nombres : la distance O M ، w l'angle x O M نعرفوه بزوز point M كل ، w يدور على روحو : le radar هكّا يخدم . متاع الحاجة اللي قدّامو la distance w l'angle يعرف ، كي يرجعو des ondes ، w يبعث ، في plan متاع مدينة ، نلقاو البلاصة بحرف w رقم .

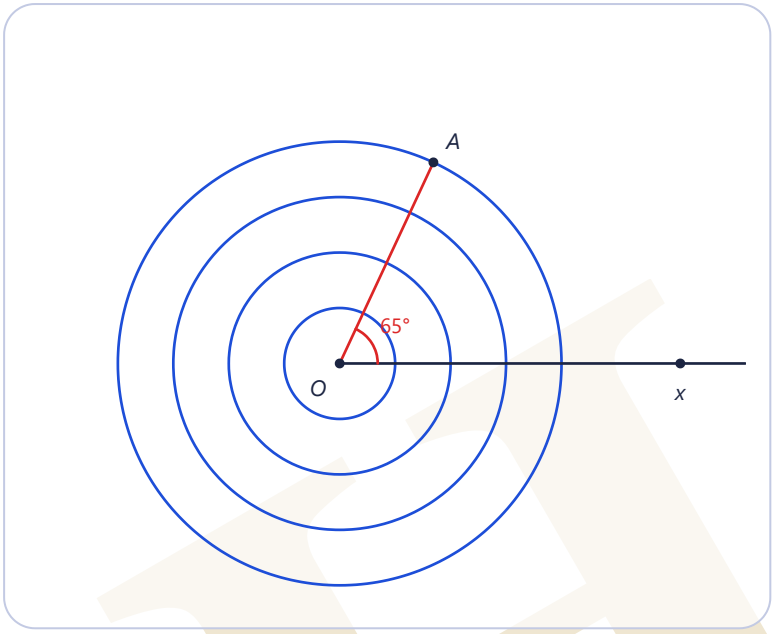
Pour finir, un peu de culture. Les coordonnées que nous avons utilisées, x et y, ne sont pas la seule façon de repérer la position d'un point. Depuis l'Antiquité, on a voulu repérer des positions dans le ciel et en mer, et Ératosthène a dressé une carte du monde qui portait déjà des coordonnées géographiques. Il existe aussi les coordonnées polaires : on fixe une demi-droite O x, et chaque point M est repéré par deux nombres : la distance O M, et l'angle x O M. C'est ainsi que fonctionne le radar : il tourne sur lui-même, envoie des ondes, et quand elles reviennent, il connaît la distance et l'angle de l'objet qui est devant lui. Et sur le plan d'une ville, on trouve un endroit avec une lettre et un numéro.

Dès l'Antiquité, les problèmes de repérage se sont posés dans les domaines de l'astronomie et de la navigation. **Ératosthène** (de -276 à -195) a confectionné une carte du monde qui contenait déjà un réseau de coordonnées géographiques.

Les coordonnées polaires. Une demi-droite $[Ox)$ étant fixée dans le plan, un point M peut être repéré par un couple de deux nombres : la distance OM et l'angle $\widehat{xOM}$, mesuré en tournant toujours dans le sens direct. Ce couple est appelé couple de **coordonnées polaires** du point M. Par exemple, $A(4\,;65^\circ)$ signifie que $OA = 4$ et que l'angle $\widehat{xOA}$ mesure 65°.

Le radar. C'est un instrument de détection et de repérage qui utilise les coordonnées polaires. Il tourne autour de lui-même en envoyant un rayon d'ondes : si ce rayon rencontre un obstacle, il est réfléchi vers sa source, ce qui signale l'existence d'un objet et donne sa position. Le temps mis par le rayon pour faire l'aller-retour renseigne sur la distance du radar à l'objet.

Le plan d'une ville. Sur un plan de ville, on se repère autrement encore : par des **cases**, une lettre pour la colonne et un numéro pour la ligne.



A(4 ; 65°) : OA = 4 et l'angle xOA mesure 65°.

Un écran de radar : quatre cercles de même centre O, de rayons 1, 2, 3 et 4, et une demi-droite horizontale [Ox) qui part de O vers la droite. Au palier 2, un point A est placé sur le plus grand cercle : le segment [OA], en rouge, fait un angle de 65 degrés avec la demi-droite [Ox).

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Le barycentre G de (A, α) et (B, β) : $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$ et $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$; le milieu est le cas $\alpha = \beta = 1$.

   > Les coordonnées du barycentre : koll coordonnée hiya moyenne pondérée. x G égale alpha x A plus bêta x B, le tout sur alpha plus bêta, w nafs echay l y G. W le milieu houwa le cas mta3 alpha égale bêta égale un.
   > *Les coordonnées du barycentre : chaque coordonnée est une moyenne pondérée. x G égale alpha x A plus bêta x B, le tout sur alpha plus bêta, et de même pour y G. Et le milieu est le cas alpha égale bêta égale un.*

2. Toute droite a une équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$; le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ la dirige.

   > Koll droite 3andha équation cartésienne : a x plus b y plus c égale zéro, w a w b mouch nuls ezzouz. W le vecteur moins b, a houwa vecteur directeur mte3ha.
   > *Toute droite a une équation cartésienne : a x plus b y plus c égale zéro, où a et b ne sont pas nuls tous les deux. Et le vecteur de composantes moins b et a la dirige.*

3. $D \parallel D'$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$; sinon les droites sont sécantes, et leur point d'intersection vérifie les deux équations.

> D parallèle à D prime, si et seulement si a b prime moins a prime b égale zéro. W ken le, ezzouz droites sécantes, w le point d'intersection y7a99a9 ezzouz équations.
> *D est parallèle à D prime si et seulement si a b prime moins a prime b égale zéro. Sinon, les deux droites sont sécantes, et leur point d'intersection vérifie les deux équations.*

4. Dans un repère orthonormé, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à D, et $D \perp D'$ si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

> Fi repère orthonormé, le vecteur a, b houwa vecteur normal à D, w D perpendiculaire à D prime, si et seulement si a a prime plus b b prime égale zéro.
> *Dans un repère orthonormé, le vecteur de composantes a et b est normal à D, et D est perpendiculaire à D prime si et seulement si a a prime plus b b prime égale zéro.*

5. Équation réduite $y = mx + p$: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; $D \parallel D'$ si et seulement si $m = m'$; dans un repère orthonormé, $D \perp D'$ si et seulement si $mm' = -1$.

> L'équation réduite : y égale m x plus p, w m hiya la pente : y B moins y A, sur x B moins x A. Les parallèles : m égale m prime. Les perpendiculaires, fi repère orthonormé : m fois m prime égale moins un.
> *L'équation réduite : y égale m x plus p, où m est la pente : y B moins y A, sur x B moins x A. Pour les parallèles : m égale m prime. Pour les perpendiculaires, dans un repère orthonormé : m fois m prime égale moins un.*

6. Distance d'un point à une droite : $d(A, D) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

> La distance du point A à la droite D : valeur absolue de (a fois l'abscisse de A, plus b fois l'ordonnée de A, plus c), sur racine carrée de la somme a au carré plus b au carré.
> *La distance du point A à la droite D : valeur absolue de (a fois l'abscisse de A, plus b fois l'ordonnée de A, plus c), sur racine carrée de la somme a au carré plus b au carré.*

7. Le cercle de centre $I(a\,;b)$ et de rayon R a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

> Le cercle elli le centre mte3ou I a, b w le rayon R, l'équation mte3ou : (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré.
> *Le cercle de centre I a, b et de rayon R a pour équation : (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré.*

8. D et $\mathscr{C}$ sont sécants, tangents ou extérieurs selon que $d(I, D)$ est inférieure, égale ou supérieure à R.

> Droite w cercle : na7sbou la distance du centre à la droite. Asghar men le rayon : sécants. Tsewi le rayon : tangente. Akbar men le rayon : extérieurs.
> *Une droite et un cercle : on calcule la distance du centre à la droite. Plus petite que le rayon : sécants. Égale au rayon : tangente. Plus grande que le rayon : extérieurs.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna géométrie analytique. Tfakker : la droite hiya équation, a x plus b y plus c égale zéro ; moins b, a ya3tik le vecteur directeur, w a, b ya3tik le vecteur normal. Les parallèles : a b prime moins a prime b égale zéro ; les perpendiculaires : a a prime plus b b prime égale zéro. W 9bal ma ta7seb distance walla orthogonalité, thabbet elli le repère orthonormé. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا géométrie analytique . تفكّر : la droite هي égale zéro ، a x plus b y plus c équation ؛ a ، b moins . le vecteur normal يعطيك b ، a ، w le vecteur directeur يعطيك b a prime moins a prime b . les parallèles : a a prime plus b b prime égale zéro . les perpendiculaires قْبَلْ ما تحسب distance ولّا orthogonalité ، ثبّت اللي le repère orthonormé . يالله للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé la géométrie analytique. Retiens : une droite est une équation, a x plus b y plus c égale zéro ; moins b, a te donne le vecteur directeur, et a, b le vecteur normal. Les parallèles : a b prime moins a prime b égale zéro ; les perpendiculaires : a a prime plus b b prime égale zéro. Et avant de calculer une distance ou une orthogonalité, vérifie que le repère est orthonormé. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · RAPPELS

c'est quoi la géométrie analytique | chnowa la géométrie analytique | géométrie analytique ma3neha chnowa | à quoi sert la géométrie analytique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D : ax + by + c = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

La géométrie analytique hiya annek t7ell des problèmes de géométrie bel 7seb. T7ott repère, koll point ywalli 3andou coordonnées, w koll droite walla cercle ywalli 3andou équation. W ba3d, bech tethbet alignement walla parallélisme walla perpendicularité, ta7seb berk, ma 3adech tlawwej fel figure.

هي أنّك تحلّ des problèmes de géométrie بالحساب . تحطّ repère ، كل point يولّي عندو w ، coordonnées كل droite ولّا cercle يولّي عندو équation . و بعد ، باش تثبت ولّا alignement ولّا parallélisme ولّا perpendicularité ، تحسب برك ، ما عادش تلوّج في الـ figure .

La géométrie analytique consiste à résoudre des problèmes de géométrie par le calcul. On place un repère, chaque point reçoit des coordonnées, et chaque droite ou chaque cercle reçoit une équation. Ensuite, pour prouver un alignement, un parallélisme ou une perpendicularité, il suffit de calculer, sans chercher dans la figure.

QUESTION 2 · MILIEU ET BARYCENTRE

comment calculer les coordonnées du barycentre | kifech na7seb les coordonnées du barycentre

formule des coordonnées du barycentre | coordonnées du barycentre de deux points

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

CE QU'IL RÉPOND

Koll coordonnée mta3 le barycentre hiya moyenne pondérée. Lel abscisse : todhrob koll abscisse fi le coefficient mte3ha, tjma3, w tdiviser 3la la somme des coefficients. Ya3ni $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$. W nafs el 7seb lel ordonnée. Rodd belek : coefficient négatif yo93ed b le signe mte3ou fel fou9 w fel louta.

كل coordonnée متاع le barycentre هي moyenne pondérée . للـ abscisse : تضرب كل abscisse في coefficient متاعها ، تجمع w تـ diviser على la somme des coefficients . يعني alpha x A plus bêta x G égale le tout sur alpha plus bêta . w x B, نفس الحساب للـ ordonnée . رد بالك : coefficient négatif يقعد بـ le signe متاعو في الفوق w في اللوطة .

Chaque coordonnée du barycentre est une moyenne pondérée. Pour l'abscisse : on multiplie chaque abscisse par son coefficient, on additionne, et on divise par la somme des coefficients. Donc x G égale alpha x A plus bêta x B, le tout sur alpha plus bêta. Et le même calcul pour l'ordonnée. Attention : un coefficient négatif garde son signe en haut et en bas.

QUESTION 3 · ÉQUATION CARTÉSIENNE

c'est quoi une équation cartésienne | chnowa l'équation cartésienne d'une droite | équation cartésienne ma3neha chnowa | définition de l'équation cartésienne d'une droite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D : ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

CE QU'IL RÉPOND

L'équation cartésienne mta3 droite hiya relation bin x w y, mel chakl $ax + by + c = 0$, w a w b mouch nuls ezzouz. Point mawjoud 3la la droite, ki les coordonnées mte3ou y7a99ou l'équation, w ken hakka berk. Ya3ni l'équation t3awwedh la droite : t3awwedh x w y, w ta3ref toul le point 3liha walla le.

l'équation cartésienne متاع droite هي relation بين x w y ، من الشكل a x plus b y plus c égale zéro ، w a w b موش nuls الزوز . point موجود على la droite ، كي les coordonnées متاعو يحقّقو l'équation ، w كان هكّا برك : la droite تعوّض l'équation يعني تعوّض x w y ، w تعرف طول le point عليها ولّا لا .

L'équation cartésienne d'une droite est une relation entre x et y, de la forme a x plus b y plus c égale zéro, où a et b ne sont pas nuls tous les deux. Un point est sur la droite quand ses coordonnées vérifient l'équation, et seulement dans ce cas. L'équation remplace donc la droite : on remplace x et y, et on sait tout de suite si le point est dessus ou non.

QUESTION 4 · ÉQUATION CARTÉSIENNE

une droite a une seule équation ? | la droite 3andha équation wa7da walla barcha

pourquoi une droite a plusieurs équations | est-ce que l'équation d'une droite est unique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x - y + 3 = 0 \iff -2x + 2y - 6 = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Le, la droite 3andha barcha équations cartésiennes. Ki todhrob l'équation el koll fi réel non nul, tal9a équation o5ra, ama nafs la droite. Mathalan $x - y + 3 = 0$ w $-2x + 2y - 6 = 0$ houma nafs la droite. Ama l'équation réduite, $y = mx + p$, ki tkoun mawjouda, ya3ni l droite mouch parallèle à l'axe des ordonnées, hiya wa7da berk.

لا ، la droite عندها برشا équations cartésiennes . كي تضرب l'équation الكل في réel non nul ، تلقى
équation أخرى ، أما نفس la droite . مثلا y x moins y plus trois égale zéro ، w moins deux x plus deux
، l'équation réduite ، y égale m x plus p . أما la droite ، هوما نفس moins six égale zéro ، كي تكون موجودة
. هي وحدة برك ، parallèle à l'axe des ordonnées موش droite يعني لـ

Non, une droite a une infinité d'équations cartésiennes. Quand on multiplie toute l'équation par un réel non nul, on obtient une autre équation, mais la même droite. Par exemple x moins y plus trois égale zéro, et moins deux x plus deux y moins six égale zéro, décrivent la même droite. En revanche l'équation réduite, y égale m x plus p, quand elle existe, c'est-à-dire pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, est unique.

QUESTION 5 · POUR COMPRENDRE : UNE DROITE, UNE ÉQUATION

comment savoir si un point appartient à une droite | kifech na3ref point 3la la droite walla le | comment vérifier qu'un point est sur une droite | le point appartient à la droite ou pas

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$4 + 2 \times 0 - 4 = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Sehla : t3awwedh les coordonnées mta3 le point fi l'équation mta3 la droite. Ken yotla3 zéro, le point 3la la droite. Ken yotla3 nombre e5er, mouch 3liha. Mathalan la droite $x + 2y - 4 = 0$ w le point $(4\,;0)$: $4 + 0 - 4 = 0$, donc le point 3liha.

ساهلة : تعوّض les coordonnées متاع le point في l'équation متاع la droite . كان يطلع le point ، zéro على la
droite . كان يطلع nombre آخر ، موش عليها . مثلا w le ، la droite x plus deux y moins quatre égale zéro
. عليها point quatre ، zéro : quatre plus zéro moins quatre égale zéro ، donc le point

C'est simple : on remplace les coordonnées du point dans l'équation de la droite. Si on trouve zéro, le point est sur la droite. Si on trouve un autre nombre, il n'y est pas. Par exemple, pour la droite x plus deux y moins quatre égale zéro et le point de coordonnées quatre et zéro : quatre plus zéro moins quatre égale zéro, donc le point est dessus.

QUESTION 6 · ÉQUATION CARTÉSIENNE

comment trouver l'équation d'une droite qui passe par deux points

kifech nal9a l'équation mta3 droite men zouz points | équation de la droite passant par deux points A et B | comment déterminer l'équation d'une droite avec deux points

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Te5ou point $M(x\,;y)$, w tekteb elli le vecteur AB w le vecteur AM colinéaires, ya3ni le déterminant mte3hom égale zéro. Ta7seb les composantes du vecteur AB, w les composantes du vecteur AM houma $x - x_A$ w $y - y_A$. Tdévelopper w tbassat, tal9a $ax + by + c = 0$. W fel e5er thabbet b le point B.

تاخو x ، y ، w point M تكتب اللي le vecteur A M colinéaires ، يعني le déterminant متاعهم . égale zéro تحسب les composantes du vecteur A M ، w les composantes du vecteur A B هوما x moins x . A w y moins y A تـ développer w ، تبسّط ، تلقى . w a x plus b y plus c égale zéro في الآخر ثبّت بـ le point B .

On prend un point M de coordonnées x et y, et on écrit que le vecteur A B et le vecteur A M sont colinéaires, c'est-à-dire que leur déterminant est nul. On calcule les composantes du vecteur A B, et celles du vecteur A M sont x moins x A et y moins y A. On développe et on simplifie : on obtient a x plus b y plus c égale zéro. Et à la fin, on vérifie avec le point B.

QUESTION 7 · TRACER UNE DROITE

comment tracer une droite à partir de son équation | kifech narsem droite men l'équation mte3ha | comment représenter une droite donnée par son équation | tracer une droite avec son équation cartésienne

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D : 2x + y - 3 = 0 \quad ; \quad A(0\,;3) \quad \text{et} \quad B(1\,;1)$$

CE QU'IL RÉPOND

Yekfik zouz points. Te5tar valeur l x, mathalan zéro, w ta7seb y men l'équation : hedha point. T3awed b valeur o5ra, mathalan un : hedha point e5er. T7otthom fi le repère w twassel binethom. W ken t7eb tethbet, a7seb point theleth : lezem yji 3la nafs la droite.

يكفيك زوج points . تختار valeur لـ x ، مثلا w ، zéro تحسب y من l'équation : هذا point . تعاود بـ valeur أخرى ، مثلا un : هذا point آخر . تحطّهم في le repère w توصل بيناتهم . w كان تحبّ تثبت ، احسب point ثالث : لازم يجي على نفس la droite .

Deux points suffisent. On choisit une valeur de x, par exemple zéro, et on calcule y avec l'équation : cela donne un point. On recommence avec une autre valeur, par exemple un : cela donne un second point. On les place dans le repère et on les relie. Et pour vérifier, on calcule un troisième point : il doit tomber sur la même droite.

QUESTION 8 · VECTEUR DIRECTEUR

c'est quoi un vecteur directeur | chnowa le vecteur directeur | vecteur directeur ma3neha chnowa

définition du vecteur directeur d'une droite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$M \in D \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le vecteur directeur mta3 droite houwa vecteur non nul ya3ti la direction mte3ha. Bedhabt : la droite elli tet3adda men A w le vecteur directeur mte3ha $\vec{u}$, hiya les points M elli le vecteur AM colinéaire m3a $\vec{u}$. W ki te5ou zouz points A w B 3la la droite, le vecteur AB houwa vecteur directeur.

le vecteur directeur متاع droite هو vecteur non nul يعطي la direction متاعها . بالضبط : la droite اللي تتعدّى من A w le vecteur directeur متاعها u ، هي les points M اللي colinéaire le vecteur A M مع u . w كي تاخو زوز points A w B على le vecteur A B ، la droite هو vecteur directeur .

Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur non nul qui donne sa direction. Précisément : la droite passant par A et de vecteur directeur u est l'ensemble des points M tels que le vecteur A M est colinéaire à u. Et quand on prend deux points A et B de la droite, le vecteur A B est un vecteur directeur.

QUESTION 9 · VECTEUR DIRECTEUR

comment trouver un vecteur directeur à partir de l'équation

kifech nal9a le vecteur directeur men l'équation

le vecteur directeur se lit comment sur l'équation cartésienne

vecteur directeur d'une droite donnée par son équation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D : ax + by + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ta9rah toul men l'équation. La droite $ax + by + c = 0$, le vecteur directeur mte3ha 3andou les composantes $-b$ w a : tbaddel blaset a w b, w tbaddel le signe mta3 b. Mathalan $x + 3y + 2 = 0$ ya3ti -3 w 1. W rodd belek : le vecteur $(a\,;b)$ mouch directeur, houwa normal.

les متاعها عندو l'équation . la droite a x plus b y plus c égale zéro ، le vecteur directeur من تقراه طول composantes : تبدّل بلاصة a w b ، w تبدّل le signe متاع b . مثلا x plus trois y plus deux égale zéro ، يعطي w . moins trois w un : رد بالك b ، a le vecteur موش directeur ، هو normal .

On le lit directement sur l'équation. Pour la droite a x plus b y plus c égale zéro, un vecteur directeur a pour composantes moins b et a : on échange les places de a et b, et on change le signe de b. Par exemple x plus trois y plus deux égale zéro donne moins trois et un. Et attention : le vecteur de composantes a et b n'est pas directeur, il est normal.

QUESTION 10 · DROITES PARALLÈLES

comment savoir si deux droites sont parallèles

kifech na3ref zouz droites parallèles

condition de parallélisme de deux droites | quelle est la condition pour que deux droites soient parallèles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D \parallel D' \iff ab' - a'b = 0$$
$$D \parallel D' \iff m = m'$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz droites parallèles ki les vecteurs directeurs mte3hom colinéaires. Bel équations cartésiennes : ta7seb $ab' - a'b$. Ken yotla3 zéro, parallèles. Ken le, sécantes. W bel équations réduites as-hel : parallèles ki 3andhom nafs la pente, $m = m'$.

زوز droites parallèles كي les vecteurs directeurs متاعهم colinéaires . بالـ équations cartésiennes : تحسب a . b prime moins a prime b كان يطلع parallèles ، zéro . كان لا ، w sécantes . بالـ équations réduites أسهل : parallèles كي عندهم نفس m prime égale m ، la pente .

Deux droites sont parallèles quand leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Avec les équations cartésiennes : on calcule a b prime moins a prime b. Si on trouve zéro, elles sont parallèles. Sinon, elles sont sécantes. Et avec les équations réduites, c'est encore plus simple : elles sont parallèles quand elles ont la même pente, m égale m prime.

QUESTION 11 · DROITES SÉCANTES

comment trouver le point d'intersection de deux droites | kifech nal9a le point d'intersection mta3 zouz droites | calculer l'intersection de deux droites | point d'intersection de deux droites méthode

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le point d'intersection mawjoud 3la ezzouz droites, donc les coordonnées mte3ou y7a99ou ezzouz équations m3a b3adhhom. T7ell système : ttalla3 y men équation, t3awwdhou fel o5ra, tal9a x, w ba3d tarja3 ta7seb y. W 9bal koll chay, thabbet elli ezzouz droites mouch parallèles : $ab' - a'b \neq 0$.

le point d'intersection موجود على الزوز ، donc les coordonnées متاعو droites ، équations مع يحقّقو الزوز . تحلّ système : تطلّع y من équation ، تعوّضو في الأخرى ، تلقى x ، و بعد ترجع تحسب y . w قُبَلْ كل شي بعضهم ، ثبّت اللي الزوز droites موش parallèles : a b prime moins a prime b différent de zéro .

Le point d'intersection est sur les deux droites, donc ses coordonnées vérifient les deux équations à la fois. On résout un système : on tire y d'une équation, on le remplace dans l'autre, on trouve x, puis on revient calculer y. Et avant tout, on vérifie que les deux droites ne sont pas parallèles : a b prime moins a prime b différent de zéro.

QUESTION 12 · VECTEUR NORMAL

c'est quoi un vecteur normal | chnowa le vecteur normal | vecteur normal ma3neha chnowa

définition du vecteur normal à une droite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D : ax + by + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le vecteur normal à une droite houwa vecteur non nul orthogonal m3a vecteur directeur mte3ha. Ya3ni we9ef 3la la droite. W fi repère orthonormé, ta9rah toul men l'équation : la droite $ax + by + c = 0$, le vecteur normal mte3ha 3andou les composantes a w b.

le vecteur normal هو vecteur non nul orthogonal مع vecteur directeur متاعها . يعني واقف على la droite . w في repère orthonormé ، تقراه طول من l'équation : la droite a x plus b y plus c égale zéro ، le vecteur normal متاعها عندو les composantes a w b .

Un vecteur normal à une droite est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite. Il est donc perpendiculaire à la droite. Et dans un repère orthonormé, on le lit directement sur l'équation : pour la droite a x plus b y plus c égale zéro, un vecteur normal a pour composantes a et b.

QUESTION 13 · VECTEUR NORMAL

quelle est la différence entre vecteur normal et vecteur directeur

chnowa el far9 bin vecteur normal w vecteur directeur

normal ou directeur comment ne pas confondre

le vecteur de composantes a et b est normal ou directeur

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ directeur} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ normal}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le vecteur directeur yemchi m3a la droite, w le vecteur normal we9ef 3liha : houma orthogonaux. Bech ma t5alletch, fi repère orthonormé : fi l'équation $ax + by + c = 0$, les coefficients kima houma, a w b, ya3tiw le vecteur normal. W le vecteur directeur houwa $-b$ w a. Tnajjem tethbet : $-b \times a + a \times b = 0$.

le vecteur directeur يمشي مع le vecteur normal w ، la droite واقف عليها : هوما orthogonaux . باش ما تخلّطش ، في repère orthonormé : في les coefficients ، a x plus b y plus c égale zéro l'équation كيما هوما يعطيو ، a w b . w le vecteur directeur هو le vecteur normal . moins b w a تنجّم تثبت : ، moins b fois a . plus a fois b ، égale zéro

Le vecteur directeur suit la droite, et le vecteur normal lui est perpendiculaire : ils sont orthogonaux. Pour ne pas les confondre, dans un repère orthonormé : dans l'équation a x plus b y plus c égale zéro, les coefficients tels quels, a et b, donnent le vecteur normal. Et le vecteur directeur a pour composantes moins b et a. On peut vérifier : moins b fois a, plus a fois b, égale zéro.

QUESTION 14 · DROITES PERPENDICULAIRES

comment savoir si deux droites sont perpendiculaires | kifech na3ref zouz droites perpendiculaires | condition d'orthogonalité de deux droites | quelle est la condition pour que deux droites soient perpendiculaires

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D \perp D' \iff aa' + bb' = 0$$
$$D \perp D' \iff mm' = -1$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi repère orthonormé, zouz droites perpendiculaires ki les vecteurs directeurs mte3hom orthogonaux. Bel équations cartésiennes : ta7seb $aa' + bb'$. Ken yotla3 zéro, perpendiculaires. W bel équations réduites : perpendiculaires ki $mm' = -1$.

في repère orthonormé ، زوز droites perpendiculaires كي les vecteurs directeurs متاعهم orthogonaux . بالـ
équations cartésiennes : تحسب a a prime plus b b prime . w كان يطلع zéro بالـ ، perpendiculaires
équations réduites : perpendiculaires كي m fois m prime égale moins un .

Dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires quand leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Avec les équations cartésiennes : on calcule a a prime plus b b prime. Si on trouve zéro, elles sont perpendiculaires. Et avec les équations réduites : elles sont perpendiculaires quand m fois m prime égale moins un.

QUESTION 15 · VECTEUR NORMAL

pourquoi il faut un repère orthonormé | 3lech lezem repère orthonormé | quand est-ce qu'on a besoin d'un repère orthonormé | repère orthonormé ou repère cartésien quelle différence

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$xx' + yy' = 0 \quad ; \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi repère cartésien 3adi, tnajjem ta7seb les milieux, les barycentres, l'alignement w le parallélisme. Ama koll ma y5oss les distances w la perpendicularité, yelzmou repère orthonormé : les axes perpendiculaires w nafs l'unité. 5ater el formules mta3 la distance w mta3 $xx' + yy' = 0$, ma ysa77ouch ken fih.

أما . les milieux ، les barycentres ، l'alignement w le parallélisme تحسب ، تنجّم عادي repère cartésien في
repère orthonormé : les axes perpendiculaires w يلزمو ، les distances w la perpendicularité كل ما يخصّ
نفس l'unité . خاطر الـ formules متاع la distance w متاع x x prime plus y y prime égale zéro ، ما يصحّوش كان
فيه .

Dans un repère cartésien quelconque, on peut calculer les milieux, les barycentres, l'alignement et le parallélisme. Mais tout ce qui touche aux distances et à la perpendicularité demande un repère orthonormé : des axes perpendiculaires et la même unité. Car les formules de la distance et de x x prime plus y y prime égale zéro ne sont vraies que dans un tel repère.

QUESTION 16 · ÉQUATION RÉDUITE

c'est quoi l'équation réduite | chnowa l'équation réduite d'une droite | équation réduite ma3neha chnowa | définition de l'équation réduite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$y = mx + p$$

CE QU'IL RÉPOND

L'équation réduite mta3 droite hiya $y = mx + p$. m houwa le coefficient directeur, walla la pente, w p hiya l'ordonnée à l'origine, ya3ni l'ordonnée mta3 le point elli l'abscisse mte3ou zéro. Koll droite mouch parallèle à l'axe des ordonnées 3andha équation réduite wa7da.

l'équation réduite متاع droite هي m . le coefficient directeur هو y égale m x plus p ، la pente ، w p ولّا
هي l'ordonnée à l'origine ، يعني l'ordonnée متاع le point اللي l'abscisse متاعو zéro . كل droite موش
parallèle à l'axe des ordonnées عندها équation réduite وحدة .

L'équation réduite d'une droite est y égale m x plus p. m est le coefficient directeur, ou la pente, et p est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'abscisse zéro. Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une seule équation réduite.

QUESTION 17 · ÉQUATION RÉDUITE

comment passer de l'équation cartésienne à l'équation réduite | kifech nal9a l'équation réduite men l'équation cartésienne | comment isoler y pour avoir l'équation réduite | comment trouver l'équation réduite d'une droite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$ax + by + c = 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (b \neq 0)$$

CE QU'IL RÉPOND

Ttalla3 y wa7dou. Men $ax + by + c = 0$, t3addi ax w c lel jiha lo5ra : $by = -ax - c$. Ba3d tdiviser el koll 3la b : $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$. Ya3ni $m = -\dfrac{a}{b}$. W hedha yet3mal ken ki $b \neq 0$.

. b y égale moins a x moins c : للجهة الأخرى a x w c تعدّي ، a x plus b y plus c égale zéro من . وحدو y تطلّع
m égale moins a sur b . w يعني . b : y égale moins a sur b fois x ، moins c sur b على الكل diviser تـ بعد
. b différent de zéro كي يتعمل كان هذا

On isole y. À partir de a x plus b y plus c égale zéro, on passe a x et c de l'autre côté : b y égale moins a x moins c. Puis on divise tout par b : y égale moins a sur b fois x, moins c sur b. Donc m égale moins a sur b. Et cela ne se fait que si b est différent de zéro.

QUESTION 18 · ÉQUATION RÉDUITE

comment calculer le coefficient directeur | kifech na7seb le coefficient directeur | c'est quoi la pente d'une droite

formule du coefficient directeur

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le coefficient directeur, walla la pente, y9oul 9addech y yzid ki x yzid b un. Ta7sbou men zouz points A w B 3la la droite : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Walla men l'équation cartésienne : $m = -\dfrac{a}{b}$. Ken positif, la droite totla3, w ken négatif, tahbet.

le coefficient directeur ، وﻷا la pente ، يقول قدّاش y يزيد كي x يزيد بـ un . تحسبو من زوز points A w B على la droite : y B moins y A ، sur x B moins x A . وﻷا من moins a sur b : l'équation cartésienne . la كان positif ، droite تطلع w كان négatif ، تهبط .

Le coefficient directeur, ou la pente, dit de combien y augmente quand x augmente de un. On le calcule à partir de deux points A et B de la droite : y B moins y A, sur x B moins x A. Ou à partir de l'équation cartésienne : moins a sur b. S'il est positif, la droite monte, et s'il est négatif, elle descend.

QUESTION 19 · PERPENDICULAIRES ET PENTES

pourquoi le produit des pentes vaut -1 | produit des pentes égal à moins un ça veut dire quoi | comment trouver la pente d'une droite perpendiculaire | 3lech la pente mta3 la perpendiculaire hiya moins un sur m

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 + mm' = 0 \iff mm' = -1$$

CE QU'IL RÉPOND

La droite $y = mx + p$ 3andha vecteur directeur $(1\,;m)$. W la droite lo5ra 3andha $(1\,;m')$. Fi repère orthonormé, ezzouz vecteurs orthogonaux ki $1 + mm' = 0$, ya3ni $mm' = -1$. Donc, ki $m \neq 0$, la pente mta3 la perpendiculaire hiya $-\dfrac{1}{m}$: l'opposé de l'inverse.

في . un ، m prime عندها الأخرى vecteur directeur un ، m . w la droite عندها la droite y égale m x plus p m يعني ، un fois un plus m fois m prime égale zéro كي vecteurs orthogonaux الزوز ، repère orthonormé moins un هي la perpendiculaire متاع m différent de zéro ، la pente كي ، m prime égale moins un . donc . sur m : l'opposé de l'inverse

La droite y égale m x plus p a pour vecteur directeur un, m. Et l'autre droite un, m prime. Dans un repère orthonormé, ces deux vecteurs sont orthogonaux quand un fois un plus m fois m prime égale zéro, c'est-à-dire m m prime égale moins un. Quand m est différent de zéro, la pente de la perpendiculaire est donc moins un sur m : l'opposé de l'inverse.

QUESTION 20 · POUR COMPRENDRE : LA FONCTION X ↦ |AX + B|

pourquoi la courbe de la valeur absolue est en V | comment tracer la courbe de |ax + b| | 3lech la courbe mta3 valeur absolue 3la chakl V | courbe de la fonction valeur absolue

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$|ax+b| = ax+b$ ou $-(ax+b)$

CE QU'IL RÉPOND

5ater $|ax + b|$ 3andha zouz expressions. Ki $ax + b$ positif, hiya $ax + b$: joz2 men droite. W ki négatif, hiya $-ax - b$: joz2 men droite o5ra, symétrique m3a la première par rapport à l'axe des abscisses. Ne5dhou men koll wa7da el joz2 elli fou9 l'axe : yotl3ou zouz demi-droites 3la chakl V, w le sommet houwa le point de l'axe des abscisses d'abscisse $-\dfrac{b}{a}$.

خاطر valeur absolue de (a x plus b) عندها زوز expressions . كي a x plus b positif ، هي a x plus b : جزء من droite . w كي négatif ، هي moins a x moins b : جزء من droite أخرى ، symétrique مع la première par rapport à l'axe des abscisses . ناخذو من كل وحدة الجزء اللي فوق l'axe : يطلعو زوز demi-droites على شكل V . w le sommet ، هو a sur moins b d'abscisse l'axe des abscisses le point de .

Parce que valeur absolue de (a x plus b) a deux expressions. Quand a x plus b est positif, elle vaut a x plus b : un morceau de droite. Et quand il est négatif, elle vaut moins a x moins b : un morceau d'une autre droite, symétrique de la première par rapport à l'axe des abscisses. On garde de chacune la partie située au-dessus de l'axe : on obtient deux demi-droites en forme de V, dont le sommet est le point de l'axe des abscisses d'abscisse moins b sur a.

QUESTION 21 · DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

c'est quoi la distance d'un point à une droite | chnowa la distance mta3 point l droite | définition de la distance d'un point à une droite | la distance d'un point à une droite ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$d(A, D) = AH$$

CE QU'IL RÉPOND

La distance du point A à la droite D hiya la distance AH, w H houwa le projeté orthogonal de A sur D. Ya3ni tahbbet perpendiculaire men A 3la la droite, w t9is. Hiya a9sar masefa bin A w ayy point men la droite : koll point e5er M ya3ti AM atwel, 5ater AM hiya l'hypoténuse fi le triangle AHM.

يعني . le projeté orthogonal de A sur D هو la distance A H ، w H هي la distance du point A à la droite D تهبّط perpendiculaire من A على ، w la droite تقيس . هي أقصر مسافة بين A w أيّ point من كل : la droite . le triangle A H M في l'hypoténuse هي A M خاطر ، A M أطول A M يعطي M آخر point .

La distance du point A à la droite D est la distance A H, où H est le projeté orthogonal de A sur D. Autrement dit, on abaisse la perpendiculaire de A sur la droite, et on mesure. C'est la plus courte distance entre A et un point de la droite : tout autre point M donne une distance A M plus grande, car A M est l'hypoténuse du triangle A H M.

QUESTION 22 · LA FORMULE DE LA DISTANCE

comment calculer la distance d'un point à une droite | kifech na7seb la distance bin point w droite | formule de la distance d'un point à une droite | pourquoi la valeur absolue dans la formule de la distance

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi repère orthonormé, tekteb la droite mel chakl $ax + by + c = 0$. Ba3d : fel fou9, t3awwedh les coordonnées mta3 le point fi $ax + by + c$, w te5ou la valeur absolue, 5ater distance 3omrha ma tkoun négative. W fel louta, $\sqrt{a^{2} + b^{2}}$. W tdiviser.

في repère orthonormé ، تكتب la droite من الشكل a x plus b y plus c égale zéro . بعد : في الفوق ، تعوّض les coordonnées متاع le point في ، w تاخو la valeur absolue ، خاطر distance عمرها ما تكون négative . w في اللوطة ، racine carrée de la somme a au carré plus b au carré . w تـ diviser .

Dans un repère orthonormé, on écrit la droite sous la forme a x plus b y plus c égale zéro. Ensuite : en haut, on remplace les coordonnées du point dans a x plus b y plus c, et on prend la valeur absolue, car une distance n'est jamais négative. Et en bas, racine carrée de la somme a au carré plus b au carré. Puis on divise.

QUESTION 23 · ÉQUATION D'UN CERCLE

c'est quoi l'équation d'un cercle | chnowa l'équation mta3 cercle | comment écrire l'équation d'un cercle | équation d'un cercle de centre I et de rayon R

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi repère orthonormé, le cercle elli le centre mte3ou $I(a\;;b)$ w le rayon R, l'équation mte3ou : $(x - a)^{2} + (y - b)^{2} = R^{2}$. 3lech ? 5ater M 3la le cercle ki $IM = R$, w elli fel isar houwa bedhabt IM^{2}.

في repère orthonormé ، le cercle اللي le centre متاعو I a ، b w le rayon R ، l'équation متاعو (x moins a) : متاعو au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré . علاش ؟ خاطر M على le cercle كي w ، I M égale R اللي في اليسار هو بالضبط I M au carré .

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre I a, b et de rayon R a pour équation : (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré. Pourquoi ? Parce que M est sur le cercle quand I M égale R, et le premier membre est exactement I M au carré.

QUESTION 24 · RECONNAÎTRE UN CERCLE

comment trouver le centre et le rayon d'un cercle | kifech nal9a le centre w le rayon | lire le centre et le rayon sur l'équation | comment trouver le centre avec la forme canonique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken l'équation maktouba $(x - a)^{2} + (y - b)^{2} = R^{2}$, ta9ra toul : le centre $(a\,;b)$, w le rayon racine carrée de elli fel imin. W ken maktouba $x^{2} + y^{2} + ax + by + c = 0$, ta3mel la forme canonique : tkammel le carré l x, w le carré l y, w t3addi les constantes lel imin.

كان l'équation مكتوبة (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré ، تقرا طول : le centre
x au carré plus y au carré plus a x plus b كان مكتوبة w . اللي في اليمين a ، b ، w le rayon racine carrée de
les constantes تعدّي y ، w لـ x ، w le carré لـ le carré تكمّل : la forme canonique تعمل ، y plus c égale zéro
لليمين .

Si l'équation est écrite (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré égale R au carré, on lit directement : le centre a, b, et le rayon est la racine carrée du second membre. Et si elle est écrite x au carré plus y au carré plus a x plus b y plus c égale zéro, on passe par la forme canonique : on complète le carré en x, puis le carré en y, et on passe les constantes à droite.

QUESTION 25 · RECONNAÎTRE UN CERCLE

est-ce que l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est toujours un cercle | pourquoi l'ensemble est vide | l'équation dima cercle walla le | quand est-ce que l'ensemble des points est vide

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le, mouch dima. Ba3d la forme canonique, tal9a fel isar somme mta3 zouz carrés, w fel imin nombre. Ken strictement positif, cercle. Ken nul, point wa7ed. W ken négatif, 7atta point ma y7a99a9 l'équation, 5ater zouz carrés ma ynajjmouch ya3tiw somme négative : l'ensemble vide.

لا ، موش ديما . بعد la forme canonique ، تلقى في اليسار somme متاع زوز w ، carrés في اليمين . nombre كان
، خاطر زوز l'équation ما يحقّق point حتّى ، négatif كان w . واحد nul ، point كان . strictement positif ، cercle
. somme négative : l'ensemble vide ما ينجّموش يعطيو carrés

Non, pas toujours. Après la forme canonique, on a à gauche une somme de deux carrés, et à droite un nombre. S'il est strictement positif, c'est un cercle. S'il est nul, un seul point. Et s'il est négatif, aucun point ne vérifie l'équation, car deux carrés ne peuvent pas avoir une somme négative : l'ensemble est vide.

QUESTION 26 · EXEMPLE : UN CERCLE ET DEUX TANGENTES

comment trouver l'équation de la tangente à un cercle | kifech nal9a l'équation mta3 la tangente | c'est quoi une tangente à un cercle | tangente en un point du cercle méthode

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

La tangente à un cercle en A hiya la droite elli tet3adda men A w perpendiculaire 3la le rayon $[IA]$. Donc le vecteur IA houwa vecteur normal liha. Ta7seb les composantes mte3ou, nsammiwhom a w b, w tekteb : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$. W tbassat.

la tangente à un cercle en A هي la droite اللي تتعدّى من A w perpendiculaire على A le rayon I A . donc le vecteur normal ليها هو vecteur I A . تحسب les composantes متاعو ، نسمّيوهم a w b ، w تكتب : a fois (x moins x A) plus b fois (y moins y A) égale zéro . w تبسّط .

La tangente à un cercle en A est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon I A. Le vecteur I A est donc un vecteur normal à cette tangente. On calcule ses composantes, qu'on note a et b, et on écrit : a fois (x moins x A) plus b fois (y moins y A) égale zéro. Puis on simplifie.

QUESTION 27 · DROITE ET CERCLE

comment savoir si une droite coupe un cercle | position d'une droite et d'un cercle | kifech na3ref la droite t9oss le cercle walla le | droite sécante ou extérieure à un cercle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$d(I, D) < R \quad ; \quad d(I, D) = R \quad ; \quad d(I, D) > R$$

CE QU'IL RÉPOND

Ta7seb la distance du centre I à la droite, w tchoufha m3a le rayon R. Ken asghar men R, la droite t9oss le cercle fi zouz points : sécants. Ken tsewi R, tmessou fi point wa7ed : tangente. W ken akbar men R, ma yet9ablouch : extérieurs. Ma yelzmekch t7ell système.

تحسب w la distance du centre I à la droite . le rayon R تشوفها مع la droite كان أصغر من ، le R تقصّ cercle في زوز points : sécants . كان تساوي R ، تمسّو في point واحد : w . tangente كان أكبر من R ، ما يتقابلوش : extérieurs . ما يلزمكش تحلّ système .

On calcule la distance du centre I à la droite, et on la confronte au rayon R. Si elle est plus petite que R, la droite coupe le cercle en deux points : ils sont sécants. Si elle est égale à R, elle le touche en un seul point : elle est tangente. Et si elle est plus grande que R, ils ne se rencontrent pas : ils sont extérieurs. On n'a pas besoin de résoudre un système.

QUESTION 28 · INTÉRIEUR ET EXTÉRIEUR

comment savoir si un point est à l'intérieur d'un cercle | kifech na3ref point dekhel le cercle walla el barra | point à l'extérieur du cercle comment vérifier | intérieur ou extérieur d'un cercle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$IM^2 < R^2 \quad ; \quad IM^2 = R^2 \quad ; \quad IM^2 > R^2$$

CE QU'IL RÉPOND

Ta7seb IM^{2}, ya3ni t3awwedh les coordonnées mta3 le point fi $(x - a)^{2} + (y - b)^{2}$, w tchoufou m3a R^{2}. Ken asghar, le point à l'intérieur. Ken ysewih, 3la le cercle. W ken akbar, à l'extérieur. Rodd belek : tchouf m3a R^{2}, mouch m3a R.

au carré plus (y moins b) (x moins a) في le point متاع les coordonnées يعني تعوّض ، I M au carré تحسب
w ، au carré تشوفو مع R au carré . كان أصغر ، le point à l'intérieur . كان يساويه ، على w . le cercle كان أكبر ،
. à l'extérieur . رد بالك : تشوف مع R au carré ، موش مع R .

On calcule I M au carré, c'est-à-dire qu'on remplace les coordonnées du point dans (x moins a) au carré plus (y moins b) au carré, et on confronte le résultat à R au carré. S'il est plus petit, le point est à l'intérieur. S'il lui est égal, il est sur le cercle. Et s'il est plus grand, il est à l'extérieur. Attention : on confronte à R au carré, pas à R.

QUESTION 29 · POINTS COCYCLIQUES

c'est quoi des points cocycliques | chnowa points cocycliques | comment montrer que quatre points sont cocycliques | cocycliques ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$IA = IB = IC = ID$$

CE QU'IL RÉPOND

Des points cocycliques houma points el koll 3la nafs le cercle. Bech tthabbetha l arb3a points : tlawwej 3la le centre mta3 le cercle elli yet3adda men tletha menhom, b zouz médiatrices. Ta7seb le rayon au carré, w ba3d tethbet elli le quatrième point 3la nafs la distance men le centre.

le centre على تلوّج : points لأربعة تثبتها باش . le cercle نفس على الكل points هوما des points cocycliques
le ، le rayon au carré تحسب . médiatrices بزوج ، منهم ثلاثة من يتعدّى اللي le cercle متاع
. le centre من la distance نفس على quatrième point

Des points cocycliques sont des points situés sur un même cercle. Pour le prouver avec quatre points : on cherche le centre du cercle passant par trois d'entre eux, à l'aide de deux médiatrices. On calcule le carré du rayon, puis on vérifie que le quatrième point est à la même distance du centre.

QUESTION 30 · POUR COMPRENDRE : UN REPÈRE DANS LA FIGURE

comment choisir un repère dans une figure | kifech ne5tar le repère | quel repère choisir pour un parallélogramme | pourquoi on choisit un repère porté par la figure

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \quad ; \quad B(1\,;0) \quad \text{et} \quad D(0\,;1)$$

CE QU'IL RÉPOND

Te5tar repère y5alli les coordonnées sehlin : l'origine fi sommet, w les vecteurs de base 3la zouz côtés. Mathalan fi parallélogramme ABCD : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Hakka B 3andou $(1\,;0)$ w D 3andou $(0\,;1)$. W ken el mas2la fiha perpendicularité walla distance, lezem te5tar repère orthonormé.

. côtés على زوج sommet ، w les vecteurs de base في l'origine : ساهلين les coordonnées يخلّي repère تختار
عندو un ، zéro ، w D عندو B هكّا . parallélogramme A B C D : A ، le vecteur A B ، le vecteur A D مثلا في

. repère orthonormé لازم تختار ، distance ولّا perpendicularité فيها المسألة كان zéro ، un . w

On choisit un repère qui rend les coordonnées simples : l'origine en un sommet, et les vecteurs de base sur deux côtés. Par exemple dans un parallélogramme A B C D : A, le vecteur A B, le vecteur A D. Ainsi B a pour coordonnées un, zéro, et D zéro, un. Et si le problème parle de perpendicularité ou de distance, il faut choisir un repère orthonormé.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE Le milieu d'un segment

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(-2\,;9)$ et $B(2\,;0)$. Calculer l'ordonnée du milieu I du segment $[AB]$.

Donne l'ordonnée du milieu I.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ordonnée du milieu est la demi-somme des ordonnées des deux extrémités.
2. Les ordonnées de A et de B sont 9 et 0 : additionne-les, puis divise.
3. La formule du milieu, pour les ordonnées.

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

CORRECTION

La formule — L'ordonnée du milieu est la demi-somme des ordonnées des extrémités.

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Le calcul — On remplace par neuf et zéro.

$$y_I = \frac{9 + 0}{2} = \frac{9}{2}$$

De même, l'abscisse du milieu vaut $\frac{-2+2}{2}$, c'est-à-dire zéro : le point I est sur l'axe des ordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → Tu as additionné les ordonnées, mais il faut encore diviser par 2.

`0` → Zéro, c'est l'abscisse du milieu. On demande son ordonnée.

`-9/2` → On additionne les ordonnées, on ne les soustrait pas : la différence sert pour les composantes d'un vecteur, pas pour un milieu.

EXERCICE 2 · BASE Barycentre de deux points

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(2\,;3)$ et $B(1\,;-6)$. Soit G le barycentre du point A affecté du coefficient -1 et du point B affecté du coefficient 4. Calculer l'abscisse du point G.

Donne l'abscisse du point G, sous forme de fraction.

Réponse attendue : `2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'abscisse du barycentre est la moyenne pondérée des abscisses.
2. Multiplie chaque abscisse par son coefficient, additionne, puis divise par la somme des coefficients.
3. La somme des coefficients vaut moins un plus quatre.

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$$

CORRECTION

La somme des coefficients — Elle n'est pas nulle : le barycentre existe.

$-1 + 4 = 3$

L'abscisse — On multiplie chaque abscisse par son coefficient, on additionne, puis on divise par trois.

$$x_G = \frac{-1 \times 2 + 4 \times 1}{3} = \frac{2}{3}$$

Avec les ordonnées, on trouverait $\dfrac{-1 \times 3 + 4 \times (-6)}{3}$, c'est-à-dire -9.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu as bien calculé le numérateur, $-2 + 4$. Il reste à diviser par la somme des coefficients.

`2/5` → Le coefficient -1 garde son signe dans la somme : $-1 + 4$ vaut 3, pas 5.

`-9` → Moins neuf, c'est l'ordonnée de G. On demande son abscisse.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Barycentre de trois points

Dans un repère cartésien, on donne les points $A\left(-7\,;-\dfrac{1}{4}\right)$, $B(0\,;5)$ et $C(6\,;2)$. Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 3, -2 et 1. Calculer l'abscisse du point G.

Donne l'abscisse du point G.

Réponse attendue : `-15/2` — aussi acceptées : -7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par la somme des trois coefficients : est-elle différente de zéro ?
2. Multiplie chaque abscisse par son coefficient : 3 pour A, -2 pour B et 1 pour C.
3. Divise le résultat par la somme des coefficients, qui vaut deux.

CORRECTION

La somme des coefficients — Trois moins deux plus un.

$3 - 2 + 1 = 2$

Le numérateur — On multiplie chaque abscisse par son coefficient.

$$3 \times (-7) + (-2) \times 0 + 1 \times 6 = -15$$

L'abscisse — On divise par la somme des coefficients.

$$x_G = -\frac{15}{2}$$

Pour l'ordonnée, le même calcul donne $-\frac{35}{8}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-15 → C'est le numérateur. Il reste à diviser par la somme des coefficients, qui vaut 2.

-5/2 → On divise par $3 - 2 + 1$, c'est-à-dire par 2 : le coefficient -2 garde son signe.

-5 → On ne divise pas par le nombre de points, mais par la somme des coefficients.

EXERCICE 4 · BASE

Centre de gravité

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(2\,;3)$, $B(-1\,;4)$ et $C(-3\,;-1)$. Calculer l'abscisse du centre de gravité G du triangle ABC.

Donne l'abscisse du point G, sous forme de fraction.

Réponse attendue : `-2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de gravité est le barycentre des trois sommets, tous avec le coefficient 1.
2. Additionne les trois abscisses.
3. Divise la somme par trois.

CORRECTION

La formule — L'abscisse du centre de gravité est la moyenne des trois abscisses.

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Le calcul — Deux moins un moins trois donne moins deux.

$$x_G = \frac{2 - 1 - 3}{3} = -\frac{2}{3}$$

Pour l'ordonnée : $\frac{3 + 4 - 1}{3}$, c'est-à-dire 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → Tu as additionné les trois abscisses. Il reste à diviser par 3.

-1 → Il y a trois sommets : on divise par 3, pas par 2.

2 → Deux, c'est l'ordonnée de G. On demande son abscisse.

EXERCICE 5 · BASE

Un point sur la droite ?

Soit D la droite d'équation $3x - 2y + 1 = 0$. Le point $C(4\,;2)$ appartient-il à la droite D ?

Réponds par « oui » ou par « non ».

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non, il n'appartient pas à D · il n'appartient pas à D · C n'appartient pas à D · il n'appartient pas · n'appartient pas · non il n'appartient pas · il appartient pas · non, C n'appartient pas à D

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point est sur la droite quand ses coordonnées vérifient l'équation.
2. Remplace x par 4 et y par 2 dans l'expression $3x - 2y + 1$.
3. Le résultat est-il égal à zéro ?

CORRECTION

On remplace — On remplace x par quatre et y par deux.

$$3 \times 4 - 2 \times 2 + 1 = 9$$

On conclut — Le résultat n'est pas nul : les coordonnées de C ne vérifient pas l'équation.

Le point C n'appartient pas à D. En revanche, le point de coordonnées -1 et -1 lui appartient, car $-3 + 2 + 1$ vaut zéro.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui il appartient / il appartient à D` → Refais le calcul : $3 \times 4 - 2 \times 2 + 1$ vaut 9, pas zéro.

EXERCICE 6 · BASE

Trouver le coefficient c

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(-2\,;1)$ et $C(4\,;2)$. La droite (AC) a une équation de la forme $x - 6y + c = 0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point A est sur la droite : ses coordonnées vérifient l'équation.
2. Remplace x par -2 et y par 1 dans l'équation, et garde c comme inconnue.
3. Tu obtiens une équation du premier degré en c. Tu pourras vérifier ta réponse avec le point C.

CORRECTION

Avec le point A — Les coordonnées de A vérifient l'équation.

$$-2 - 6 \times 1 + c = 0$$

On résout — Moins huit plus c égale zéro.

$$c = 8$$

On vérifie avec C — Les coordonnées de l'autre point doivent aussi convenir.

$$4 - 6 \times 2 + 8 = 0$$

La droite (AC) a pour équation $x - 6y + 8 = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-8 → On a $-2-6+c=0$, donc $-8+c=0$: c est l'opposé de -8.

-4 → Attention au signe : -6×1 vaut -6, donc $-2-6$ donne -8, pas 4.

EXERCICE 7 · PRATIQUE

L'équation d'une médiane

Dans un repère cartésien, on considère le triangle ABC, où $A(-2\,;1)$, $B(0\,;3)$ et $C(4\,;2)$. On désigne par I le milieu du côté $[BC]$. Déterminer l'équation réduite de la médiane (AI).

Donne l'expression de y en fonction de x.

Réponse attendue : `3x/8+7/4` — aussi acceptées : (3x+14)/8 · 0.375x+1.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord les coordonnées du milieu I de $[BC]$.
2. Le coefficient directeur de (AI) est la différence des ordonnées divisée par la différence des abscisses.
3. Pour l'ordonnée à l'origine, écris que les coordonnées de A vérifient $y=mx+p$.

CORRECTION

Le milieu I — On prend la demi-somme des coordonnées de B et de C.

$$I\left(2\,;\frac{5}{2}\right)$$

La pente — On divise la différence des ordonnées par la différence des abscisses.

$$m=\frac{\frac{5}{2}-1}{2-(-2)}=\frac{3}{8}$$

L'ordonnée à l'origine — On écrit que A est sur la droite.

$$1=\frac{3}{8}\times(-2)+p \quad \text{donc} \quad p=\frac{7}{4}$$

L'équation réduite — On rassemble la pente et l'ordonnée à l'origine.

$$y=\frac{3}{8}x+\frac{7}{4}$$

On vérifie avec I : $\frac{3}{8}\times 2+\frac{7}{4}$ vaut bien $\frac{5}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

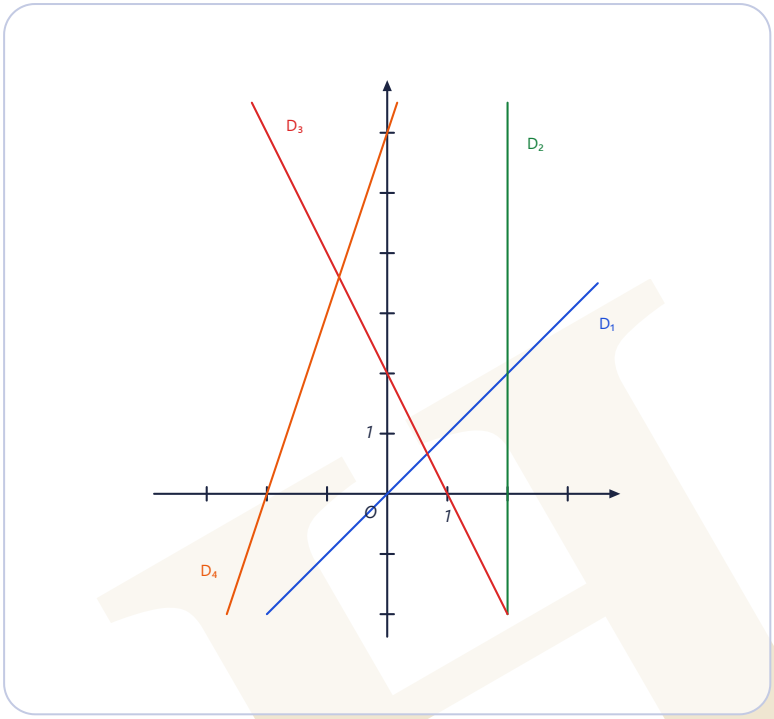
`8x/3+19/3` → La pente est la différence des ordonnées sur la différence des abscisses : $\frac{3}{2}$ divisé par 4, et non l'inverse.

`3x/8+1` → L'ordonnée à l'origine n'est pas l'ordonnée de A : c'est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse zéro.

EXERCICE 8 · BASE

À chaque droite son équation

Sur la figure, quatre droites D_1, D_2, D_3 et D_4 sont tracées dans un repère cartésien. L'une d'elles a pour équation $2x+y-2=0$. Laquelle ?



Quatre droites, quatre équations.

Un repère d'origine O avec quatre droites. La droite D_1, en bleu, passe par l'origine et monte vers la droite. La droite D_2, en vert, est verticale et passe par le point d'abscisse 2 de l'axe horizontal. La droite D_3, en rouge, descend vers la droite : elle passe par le point d'ordonnée 2 de l'axe vertical et par le point d'abscisse 1 de l'axe horizontal. La droite D_4, en orange, monte fortement vers la droite : elle passe par le point d'abscisse -2 de l'axe horizontal et par le point d'ordonnée 6 de l'axe vertical.

Écris le nom de la droite, par exemple D1.

Réponse attendue : D3 — aussi acceptées : D_3 · D_3 · la droite D3 · c'est D3 · droite D3 · c'est la droite D3 · D 3 · D3 (rouge) · la droite rouge · rouge

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche deux points faciles de la droite d'équation $2x + y - 2 = 0$.
2. Fais $x = 0$: quelle ordonnée trouves-tu ? Puis fais $y = 0$.
3. La droite cherchée passe par le point d'ordonnée 2 sur l'axe des ordonnées et par le point d'abscisse 1 sur l'axe des abscisses.

CORRECTION

Avec x égal à zéro — On trouve y égale deux : la droite passe par le point de coordonnées zéro et deux.

$$2 \times 0 + y - 2 = 0 \quad \text{donc} \quad y = 2$$

Avec y égal à zéro — On trouve x égale un : la droite passe par le point de coordonnées un et zéro.

$$2x + 0 - 2 = 0 \quad \text{donc} \quad x = 1$$

On lit la figure — La seule droite qui passe par ces deux points est la droite rouge, D trois.

Les autres équations se reconnaissent de même : D_1 a pour équation $x - y = 0$, D_2 a pour équation $x - 2 = 0$ et D_4 a pour équation $-3x + y - 6 = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`D4 / D_4 / la droite D4` → D_4 passe par le point de coordonnées 0 et 6 : or $2 \times 0 + 6 - 2$ ne vaut pas zéro.

`D1 / D_1 / la droite D1` → D_1 passe par l'origine : or $2 \times 0 + 0 - 2$ ne vaut pas zéro.

`D2 / D_2 / la droite D2` → D_2 est verticale : son équation ne contient pas y. Ici, y apparaît dans l'équation.

EXERCICE 9 · BASE

Un vecteur directeur

Soit D la droite d'équation $\frac{5}{2}x + 4y - 3 = 0$. Le vecteur $\vec{u}$ de composantes -8 et k est un vecteur directeur de D. Déterminer le réel k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour la droite d'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur de composantes $-b$ et a est un vecteur directeur.
2. Ici, cela donne le vecteur de composantes -4 et $\frac{5}{2}$.
3. Le vecteur $\vec{u}$ doit lui être colinéaire : par combien multiplie-t-on -4 pour obtenir -8 ?

CORRECTION

Un vecteur directeur — On lit moins b et a sur l'équation : moins quatre et cinq demis.

Le vecteur u — Sa première composante est moins huit, le double de moins quatre : on double aussi la seconde.

$$k = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur est encore un vecteur directeur : on peut ainsi choisir des composantes entières.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/2` → Le vecteur de composantes -4 et $\frac{5}{2}$ est bien directeur, mais ici la première composante est -8 : il faut doubler aussi la seconde.

`-5` → Le vecteur directeur est de composantes $-b$ et a : seul b change de signe.

`-64/5` → Tu as pris le vecteur de composantes a et b : celui-là est normal à la droite, pas directeur.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

Deux droites parallèles

Dans un repère cartésien, on considère la droite D d'équation $2x - y + 5 = 0$ et la droite D' d'équation $6x + ky + 2 = 0$, où k est un réel. Pour quelle valeur de k les droites D et D' sont-elles parallèles ?

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites sont parallèles quand $ab' - a'b = 0$.
2. Ici $a = 2$, $b = -1$, $a' = 6$ et $b' = k$.
3. Écris l'égalité et résous l'équation en k.

$$2 \times k - 6 \times (-1) = 0$$

CORRECTION

La condition — On écrit que a b prime moins a prime b égale zéro.

$$2 \times k - 6 \times (-1) = 0$$

On résout — Deux k plus six égale zéro.

$$k = -3$$

On retrouve la droite d'équation $6x - 3y + 2 = 0$: ses coefficients 6 et -3 sont le triple de 2 et -1.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Attention au double signe moins : $-6 \times (-1)$ vaut $+6$, donc $2k = -6$.

12 → Tu as écrit $aa' + bb' = 0$: c'est la condition pour des droites perpendiculaires.

EXERCICE 11 · PRATIQUE

Le point d'intersection

Dans un repère cartésien, on considère la droite D d'équation $x - y + 1 = 0$ et la droite D' d'équation $y = 2x - 5$. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Écris les coordonnées sous la forme « (x;y) », par exemple « (2;3) ».

Réponse attendue : `(6;7)` — aussi acceptées : (6,7) · 6;7 · x=6;y=7 · x=6 et y=7 · (x;y)=(6;7) · I(6;7) · I(6,7) · 6 et 7 · x=6 y=7 · x=6, y=7 · K(6;7) · K(6,7) · M(6;7) · M(6,7) · A(6;7) · A(6,7) · P(6;7) · P(6,7) · J(6;7) · J(6,7) · N(6;7) · N(6,7) · E(6;7) · E(6,7) · H(6;7) · H(6,7) · S(6;7) · S(6,7) · Ω(6;7) · Ω(6,7)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point d'intersection vérifie les deux équations à la fois.
2. Remplace y par $2x - 5$ dans l'équation de D.
3. Tu obtiens une équation en x seulement. N'oublie pas de calculer ensuite y.

CORRECTION

On remplace — On remplace y par deux x moins cinq dans la première équation.

$$x - (2x - 5) + 1 = 0$$

On résout — Moins x plus six égale zéro.

$$x = 6$$

L'ordonnée — On revient à la seconde équation.

$$y = 2 \times 6 - 5 = 7$$

On vérifie dans la première équation : $6 - 7 + 1$ vaut bien zéro.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(7;6) / (7,6) / 7;6` → L'abscisse s'écrit en premier : $x = 6$ et $y = 7$.

`(-4;-13) / (-4,-13)` → Attention au signe devant la parenthèse : $-(2x - 5)$ donne $-2x + 5$.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Une parallèle passant par un point

Dans un repère cartésien, on considère la droite D d'équation $2x - 4y = 0$ et le point $A(5\,;-3)$. Soit D' la droite passant par A et parallèle à D. Calculer l'ordonnée à l'origine de D'.

Donne l'ordonnée à l'origine p.

Réponse attendue : `-11/2` — aussi acceptées : -5.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mets d'abord D sous forme réduite pour lire sa pente.
2. Deux droites parallèles ont la même pente : D' a une équation de la forme $y = \frac{1}{2}x + p$.
3. Écris que les coordonnées de A vérifient cette équation.

CORRECTION

La pente de D — On isole y : quatre y égale deux x.

$$y = \frac{1}{2}x$$

La forme de D' — Elle a la même pente, un demi.

Avec le point A — On remplace x par cinq et y par moins trois.

$$-3 = \frac{1}{2} \times 5 + p \quad \text{donc} \quad p = -\frac{11}{2}$$

La droite D' a pour équation réduite $y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$, ou encore $x - 2y - 11 = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/2` → On a $p = -3 - \frac{5}{2}$: les deux termes sont négatifs.

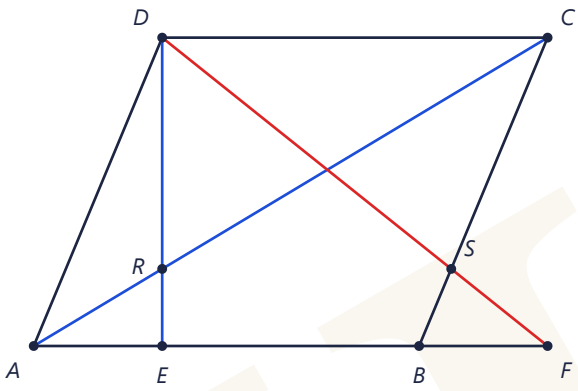
`11/2` → Le signe est faux : $-3 - \frac{5}{2}$ est négatif.

`-11` → Moins onze est le coefficient c de l'équation cartésienne $x - 2y - 11 = 0$. L'ordonnée à l'origine se lit sur l'équation réduite.

EXERCICE 13 · RAISONNEMENT

Deux intersections dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont tels que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont tous deux égaux au tiers du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le point S est l'intersection des droites (BC) et (DF). Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, calculer l'ordonnée du point S.



R sur (AC) et (DE), S sur (BC) et (DF).

Un parallélogramme ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. Sur la droite (AB), le point E est au tiers de [AB] à partir de A, et le point F est au-delà de B, à un tiers de AB après B. La diagonale [AC] et la droite (DE) se coupent en R. La droite (DF) coupe le côté [BC] en S. Les points R et S semblent à la même hauteur.

Donne l'ordonnée du point S.

Réponse attendue : 1/4 — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, B a pour coordonnées 1 et 0, D a pour coordonnées 0 et 1. Quelles sont celles de F ?
2. La droite (BC) est l'ensemble des points d'abscisse 1 : c'est l'abscisse de S.
3. Écris une équation de la droite (DF), puis remplace x par 1.

CORRECTION

Les coordonnées — A est l'origine, B a pour coordonnées un et zéro, D zéro et un. Le point F est à un tiers au-delà de B.

$$F\left(\frac{4}{3}\,;0\right)$$

L'abscisse de S — S est sur la droite B C, formée des points d'abscisse un.

$$x_S = 1$$

La droite (DF) — Le vecteur D F a pour composantes quatre tiers et moins un. On écrit qu'il est colinéaire au vecteur de composantes x et y moins un, puis on multiplie par trois.

$$3x + 4y - 4 = 0$$

L'ordonnée de S — On remplace x par un.

$$3 + 4y - 4 = 0 \quad \text{donc} \quad y = \frac{1}{4}$$

On montre de même que R a pour coordonnées $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$: les points R et S ont la même ordonnée, donc la droite (RS) est parallèle à la droite (AB).

PIÈGES ANTICIPÉS

1/3 → Un tiers, c'est le rapport donné dans l'énoncé, pas l'ordonnée de S : il faut passer par l'équation de (DF).

3/4 → Tu as trouvé $4y = 3$: relis le calcul, $3 + 4y - 4 = 0$ donne $4y = 1$.

EXERCICE 14 · DEFI

Une homothétie dans un trapèze

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(1\,;0)$, $B(5\,;0)$, $C(4\,;3)$ et $D(2\,;3)$. Le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze. Soit h l'homothétie qui envoie A en C et B en D. Déterminer le rapport k de l'homothétie h.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-1/2` — aussi acceptées : -0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une homothétie de rapport k transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en k fois ce vecteur.
2. L'image de A est C et l'image de B est D : le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Calcule les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, et fais attention au sens.

CORRECTION

La propriété — L'image du vecteur A B est le vecteur C D, et il vaut k fois le vecteur A B.

Les composantes — Le vecteur A B a pour composantes quatre et zéro ; le vecteur C D a pour composantes moins deux et zéro.

Le rapport — Moins deux égale k fois quatre.

$$k = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Le rapport est négatif : le centre de l'homothétie est entre A et C. C'est le point de coordonnées 3 et 2, intersection des diagonales du trapèze.

PIÈGES ANTICIPÉS

1/2 → Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires : le rapport est négatif.

-2 → Tu as divisé dans le mauvais sens : c'est le vecteur image $\overrightarrow{CD}$ qui vaut k fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2 → Le rapport est $\overrightarrow{CD}$ sur $\overrightarrow{AB}$, et les deux vecteurs sont de sens contraires.

EXERCICE 15 · BASE

Une droite donnée par un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, soit D la droite passant par le point $A(7\,;0)$ et dont un vecteur normal a pour composantes 1 et 1. La droite D a une équation de la forme $x + y + c = 0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : -7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les composantes du vecteur normal sont les coefficients de x et de y : c'est pour cela que l'équation commence par $x + y$.
2. Le point A est sur la droite : remplace x par 7 et y par 0.
3. Résous l'équation en c que tu obtiens.

CORRECTION

La forme de l'équation — Le vecteur normal donne les coefficients de x et de y : un et un.

Avec le point A — On remplace x par sept et y par zéro.

$$7 + 0 + c = 0 \quad \text{donc} \quad c = -7$$

La droite D a pour équation $x + y - 7 = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → On a $7 + c = 0$: c est l'opposé de 7.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Deux droites perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $6x - 5y + 1 = 0$ et la droite D' d'équation $5x + ky - 2 = 0$, où k est un réel. Pour quelle valeur de k les droites D et D' sont-elles perpendiculaires ?

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires quand $aa' + bb' = 0$.
2. Ici $a = 6$, $b = -5$, $a' = 5$ et $b' = k$.
3. Écris l'égalité et résous l'équation en k.
   $6 \times 5 + (-5) \times k = 0$

CORRECTION

La condition — On écrit que a a prime plus b b prime égale zéro.

$$6 \times 5 + (-5) \times k = 0$$

On résout — Trente moins cinq k égale zéro.

$$k = 6$$

Les droites d'équations $6x - 5y + 1 = 0$ et $5x + 6y - 2 = 0$ sont perpendiculaires : on a échangé les coefficients et changé un signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

-6 → Le produit bb' vaut $-5k$: on a $30 - 5k = 0$, donc k est positif.

-25/6 → Tu as écrit $ab' - a'b = 0$: c'est la condition pour des droites parallèles.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Une perpendiculaire passant par un point

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $3x + y - 5 = 0$ et le point $A(1\,;-2)$. Soit D' la droite passant par A et perpendiculaire à D. Déterminer le coefficient directeur de D'.

Donne le coefficient directeur de la perpendiculaire.

Réponse attendue : 1/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mets D sous forme réduite pour lire sa pente.
2. Deux droites sont perpendiculaires quand le produit de leurs pentes vaut -1.
3. La pente de D est -3 : quel nombre, multiplié par -3, donne -1 ?

CORRECTION

La pente de D — On isole y.

$y = -3x + 5$

La condition — Le produit des deux pentes vaut moins un.

$-3 \times m' = -1$

La pente de D' — On divise moins un par moins trois.

$m' = \dfrac{1}{3}$

Avec le point A, on trouve ensuite l'équation réduite de D' : $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → Moins trois est la pente de D. Celle de D' est le nombre dont le produit avec -3 vaut -1.

3 → Changer le signe ne suffit pas : il faut l'opposé de l'inverse.

-1/3 → -3 multiplié par $-\dfrac{1}{3}$ donne $+1$, pas -1.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

La médiatrice d'un segment

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3\,;5)$ et $B(-2\,;1)$. La médiatrice du segment $[AB]$ coupe l'axe des ordonnées en un point K. Calculer l'ordonnée du point K.

Donne l'ordonnée du point K.

Réponse attendue : 29/8 — aussi acceptées : 3.625

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La médiatrice passe par le milieu de $[AB]$ et elle est perpendiculaire à (AB).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc un vecteur normal à la médiatrice.
3. Écris l'équation de la médiatrice, puis remplace x par zéro.

CORRECTION

Le milieu — On prend la demi-somme des coordonnées.

$$\left(\frac{1}{2}\,;3\right)$$

Un vecteur normal — Le vecteur A B a pour composantes moins cinq et moins quatre ; on peut prendre son opposé, de composantes cinq et quatre.

L'équation — On écrit que le vecteur qui va du milieu au point M est orthogonal au vecteur normal, on développe, puis on multiplie par deux.

$$5x - \frac{5}{2} + 4y - 12 = 0 \quad \text{donc} \quad 10x + 8y - 29 = 0$$

Sur l'axe des ordonnées — On remplace x par zéro.

$$8y - 29 = 0 \quad \text{donc} \quad y = \frac{29}{8}$$

On peut vérifier que K est à la même distance de A et de B : c'est la propriété de la médiatrice.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Trois est l'ordonnée du milieu de $[AB]$, qui n'est pas sur l'axe des ordonnées : son abscisse vaut $\frac{1}{2}$.

`29/10` → Tu as remplacé y par zéro : c'est le point d'intersection avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 19 · BASE

Lire un coefficient directeur

Dans un repère cartésien, soit D la droite d'équation $3x - 2y + 1 = 0$. Déterminer le coefficient directeur de D.

Donne le coefficient directeur m.

Réponse attendue : `3/2` — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient directeur se lit sur l'équation réduite, de la forme $y = mx + p$.
2. Isole y : commence par écrire $2y$ en fonction de x.
3. Divise ensuite tous les termes par deux.

CORRECTION

On isole y — On passe moins deux y dans l'autre membre.

$$2y = 3x + 1$$

L'équation réduite — On divise par deux.

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Le coefficient directeur est $\frac{3}{2}$ et l'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{2}$. On retrouve la formule $m = -\frac{a}{b}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3/2 → Ici $b = -2$: $-\dfrac{a}{b}$ vaut $-\dfrac{3}{-2}$, qui est positif.

3 → Le coefficient 3 se lit devant x dans l'équation cartésienne, mais il faut d'abord isoler y.

2/3 → La pente est $-\dfrac{a}{b}$, pas $-\dfrac{b}{a}$.

1/2 → Un demi est l'ordonnée à l'origine. Le coefficient directeur est le nombre qui multiplie x.

EXERCICE 20 · BASE

La pente par deux points

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(3\,;0)$ et $B(-4\,;5)$. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

Donne le coefficient directeur, sous forme de fraction.

Réponse attendue : `-5/7`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient directeur est la différence des ordonnées divisée par la différence des abscisses.
2. Garde le même ordre en haut et en bas : B moins A dans les deux cas.
3. La formule de la pente.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

CORRECTION

La formule — La différence des ordonnées sur la différence des abscisses.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Le calcul — Cinq moins zéro en haut, moins quatre moins trois en bas.

$$m = \frac{5 - 0}{-4 - 3} = -\frac{5}{7}$$

La pente est négative : la droite (AB) descend quand on avance vers la droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

-7/5 → Les ordonnées vont au numérateur et les abscisses au dénominateur, pas l'inverse.

5/7 → $-4 - 3$ vaut -7 : le dénominateur est négatif, donc la pente aussi.

EXERCICE 21 · PRATIQUE

Un point et une pente

Dans un repère cartésien, déterminer l'équation réduite de la droite D passant par le point $A(1\,;-3)$ et de coefficient directeur -6.

Écris seulement l'expression en x, sans « $y =$ ».

Réponse attendue : `-6x+3` — aussi acceptées : 3-6x

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'équation réduite est de la forme $y = -6x + p$.
2. Le point A est sur la droite : remplace x par 1 et y par -3.
3. Tu obtiens $-3 = -6 + p$: isole p.

CORRECTION

La forme — La pente est moins six.

$$y = -6x + p$$

Avec le point A — On remplace x par un et y par moins trois.

$$-3 = -6 \times 1 + p \quad \text{donc} \quad p = 3$$

L'équation réduite — On remplace p par trois.

$$y = -6x + 3$$

On vérifie : pour $x = 1$, on trouve $-6 + 3$, c'est-à-dire -3, l'ordonnée de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-6x-3` → L'ordonnée à l'origine n'est pas l'ordonnée de A : A a pour abscisse 1, pas zéro.

`-6x-9` → De $-3 = -6 + p$, on tire $p = -3 + 6$, c'est-à-dire 3.

EXERCICE 22 · PRATIQUE Le sommet du V

Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction f définie par $f(x) = |4x + 2|$ est formée de deux demi-droites de même origine S, située sur l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse du point S.

Donne l'abscisse du point S.

Réponse attendue : `-1/2` — aussi acceptées : -0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point S est sur l'axe des abscisses : son ordonnée $f(x)$ est nulle.
2. Une valeur absolue est nulle seulement quand ce qu'elle contient est nul.
3. Résous l'équation $4x + 2 = 0$.

CORRECTION

La condition — La courbe touche l'axe des abscisses quand f de x égale zéro, c'est-à-dire quand quatre x plus deux égale zéro.

On résout — Quatre x égale moins deux.

$$x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

À droite de S, la courbe est portée par la droite d'équation $y = 4x + 2$; à gauche, par la droite d'équation $y = -4x - 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → On résout $4x + 2 = 0$: $4x = -2$, donc x est négatif.

-2 → $4x = -2$ donne $x = -\frac{2}{4}$, pas $-\frac{4}{2}$.

2 → Deux est la valeur de f en zéro, c'est-à-dire l'ordonnée du point de la courbe situé sur l'axe des ordonnées.

EXERCICE 23 · BASE

Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé, calculer la distance du point $A(0\,;1)$ à la droite D d'équation $y = -x + 5$.

Donne la valeur exacte de la distance.

Réponse attendue : `2*sqrt(2)` — aussi acceptées : 4/sqrt(2) · sqrt(8)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris d'abord l'équation de D sous la forme $ax + by + c = 0$.
2. On obtient $x + y - 5 = 0$: donc $a = 1, b = 1$ et $c = -5$.
3. Applique la formule : la valeur absolue de a fois l'abscisse de A, plus b fois son ordonnée, plus c, divisée par la racine carrée de la somme $a^2 + b^2$.

CORRECTION

L'équation cartésienne — On ramène tout dans le même membre.

$$x + y - 5 = 0$$

Le numérateur — On remplace x par zéro et y par un, et on prend la valeur absolue.

$$|0 + 1 - 5| = 4$$

Le dénominateur — La racine carrée de la somme un au carré plus un au carré.

$$\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

La distance — On divise, puis on simplifie.

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

La distance vaut $2\sqrt{2}$, soit environ $2{,}83$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Quatre est le numérateur. Il reste à diviser par $\sqrt{a^2 + b^2}$, c'est-à-dire par $\sqrt{2}$.

`3*sqrt(2) / 6/sqrt(2)` → L'équation s'écrit $x + y - 5 = 0$: c'est -5, et non $+5$, qu'il faut mettre dans la formule.

2 → On divise par la racine carrée de la somme $a^2 + b^2$, pas par $a^2 + b^2$.

EXERCICE 24 · PRATIQUE

L'aire d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé d'origine O, la droite D d'équation $x + y - 1 = 0$ coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B. La droite D' d'équation $2x + y - 4 = 0$ coupe l'axe des abscisses en E et l'axe des ordonnées en C. Calculer l'aire du quadrilatère $ABCE$.

Donne l'aire, en unités d'aire.

Réponse attendue : `7/2` — aussi acceptées : 3.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trouve les quatre points : sur l'axe des abscisses $y = 0$, sur l'axe des ordonnées $x = 0$.
2. Le quadrilatère $ABCE$ est ce qui reste du triangle OEC quand on lui enlève le triangle OAB.
3. Ces deux triangles sont rectangles en O : leur aire est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit.

CORRECTION

Les points de D — Avec y égal à zéro on trouve A, avec x égal à zéro on trouve B.

$$A(1\,;0) \quad \text{et} \quad B(0\,;1)$$

Les points de D' — De même pour la seconde droite.

$$E(2\,;0) \quad \text{et} \quad C(0\,;4)$$

Le grand triangle — Le triangle O E C est rectangle en O.

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

Le petit triangle — Le triangle O A B est rectangle en O.

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

L'aire du quadrilatère — On retranche le petit triangle du grand.

$$4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Les axes du repère sont perpendiculaires et gradués avec la même unité : c'est ce qui permet de calculer ces aires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → Quatre est l'aire du triangle OEC. Il faut lui enlever le triangle OAB.

`9/2` → On retranche le petit triangle du grand, on ne l'ajoute pas.

`1/2` → Un demi est l'aire du triangle OAB, la partie qu'on enlève.

EXERCICE 25 · BASE

Lire le rayon

Dans un repère orthonormé, un cercle a pour équation $(x-7)^2 + (y-8)^2 = \dfrac{3}{4}$. Déterminer son rayon.

Donne la valeur exacte du rayon.

Réponse attendue : `sqrt(3)/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'équation est de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.
2. Le second membre est le carré du rayon.
3. Prends la racine carrée du second membre : celle du numérateur, puis celle du dénominateur.

CORRECTION

Le carré du rayon — On le lit dans le second membre.

$$R^2 = \frac{3}{4}$$

Le rayon — On prend la racine carrée : le rayon est la moitié de racine de trois.

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Le centre de ce cercle est le point de coordonnées 7 et 8.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/4` → Trois quarts est le carré du rayon. Le rayon est sa racine carrée.

`3/8` → On ne divise pas par deux : on prend la racine carrée.

EXERCICE 26 · PRATIQUE

Reconnaître un cercle

Dans un repère orthonormé, l'ensemble des points de coordonnées x et y vérifiant $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 5 = 0$ est un cercle. Déterminer les coordonnées de son centre.

Écris les coordonnées sous la forme « (x;y) », par exemple « (2;3) ».

Réponse attendue : `(4;-2)` — aussi acceptées : (4,-2) · 4;-2 · I(4;-2) · I(4,-2) · x=4;y=-2 · x=4 et y=-2 · centre (4;-2) · le centre (4;-2) · centre I(4;-2) · x=4 y=-2 · x=4, y=-2 · 4 et -2 · Ω(4;-2) · Ω(4,-2) · O(4;-2) · O(4,-2) · C(4;-2) · C(4,-2) · K(4;-2) · K(4,-2) · M(4;-2) · M(4,-2) · A(4;-2) · A(4,-2) · J(4;-2) · J(4,-2) · S(4;-2) · S(4,-2) · E(4;-2) · E(4,-2) · H(4;-2) · H(4,-2) · 4,-2 · centre Ω(4;-2) · le centre est Ω(4;-2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe les termes en x, puis les termes en y, et complète les carrés.
2. $x^2 - 8x$ est le début de $(x-4)^2$; $y^2 + 4y$ est le début de $(y+2)^2$.
3. Dans $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, le centre a pour coordonnées a et b : attention aux signes.

CORRECTION

Les termes en x — On complète le carré.

$$x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$$

Les termes en y — De même pour y.

$$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$$

La forme canonique — On remplace, et on passe les constantes à droite : seize plus quatre moins cinq.

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 15$$

Le centre — On lit les nombres qui annulent chaque parenthèse : quatre et moins deux.

C'est le cercle de centre le point de coordonnées 4 et -2, et de rayon $\sqrt{15}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-4;2)` / `(-4,2)` / `-4;2` → Le centre annule les parenthèses : $x - 4 = 0$ donne 4, et $y + 2 = 0$ donne -2.

`(8;-4)` / `(8,-4)` / `8;-4` → Il faut prendre la moitié des coefficients de x et de y : $x^2 - 8x$ est le début de $(x-4)^2$.

`(-8;4)` / `(-8,4)` / `-8;4` → Ce sont les coefficients de x et de y dans l'équation. Le centre s'obtient avec leurs moitiés, changées de signe.

EXERCICE 27 · RAISONNEMENT

Un cercle, vraiment ?

Dans un repère orthonormé, déterminer l'ensemble E des points de coordonnées x et y vérifiant $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x + y + 2 = 0$.

Décris l'ensemble E en un ou deux mots : un cercle, un point, vide…

Réponse attendue : `vide` — aussi acceptées : l'ensemble vide · ensemble vide · ∅ · E est vide · c'est l'ensemble vide · E = ∅ · aucun point · aucun · E={} · E = {} · il n'y a aucun point · pas de point · aucun point ne convient · E=∅ · E est l'ensemble vide · E = ensemble vide · E = l'ensemble vide · E=l'ensemble vide · E=ensemble vide · c'est vide

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Complète les carrés, pour x puis pour y.
2. On obtient $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$ et $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2$. Que vaut le second membre ?
3. Regarde le signe du second membre : une somme de deux carrés peut-elle être négative ?

CORRECTION

Les termes en x — On complète le carré.

$$x^2 - \frac{4}{3}x = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$$

Les termes en y — De même pour y.

$$y^2 + y = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Le second membre — On passe les constantes à droite : quatre neuvièmes plus un quart moins deux.

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{4} - 2 = -\frac{47}{36}$$

On conclut — Le second membre est strictement négatif, alors qu'une somme de deux carrés est toujours positive ou nulle. Aucun point ne convient.

L'ensemble E est vide : une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ n'est pas toujours celle d'un cercle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`cercle` / `un cercle` / `c'est un cercle` → Pour que ce soit un cercle, le second membre de la forme canonique doit être strictement positif. Calcule-le.

`un point` / `point` → Ce serait un seul point si le second membre était nul. Ici, il est strictement négatif.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

Un cercle tangent à une droite

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $2x + 3y - 1 = 0$ et le point $A(-1\,;2)$. Calculer le rayon du cercle de centre A et tangent à la droite D.

Donne la valeur exacte du rayon.

Réponse attendue : `3/sqrt(13)` — aussi acceptées : 3*sqrt(13)/13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un cercle est tangent à une droite quand la distance de son centre à la droite est égale à son rayon.
2. Calcule la distance du point A à la droite D avec la formule.
3. Au numérateur : la valeur absolue de $2 \times (-1) + 3 \times 2 - 1$. Au dénominateur : la racine carrée de la somme $4 + 9$.

CORRECTION

La condition — Le cercle est tangent à la droite : son rayon est la distance du centre A à la droite D.

Le numérateur — On remplace x par moins un et y par deux.

$$|2 \times (-1) + 3 \times 2 - 1| = 3$$

Le dénominateur — La racine carrée de la somme quatre plus neuf.

$$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Le rayon — On divise.

$$R = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Le cercle a pour équation $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{13}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Trois est le numérateur. Il reste à diviser par $\sqrt{13}$.

`9/13` → Neuf treizièmes est le carré du rayon, celui qu'on écrit dans l'équation du cercle.

`3/13` → On divise par la racine carrée de la somme $a^2 + b^2$, pas par $a^2 + b^2$.

EXERCICE 29 · PRATIQUE

Sécante, tangente ou extérieure ?

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $y = x + 3$ et le cercle d'équation $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Quelle est la position de la droite D par rapport au cercle : sécante, tangente ou extérieure ?

Réponds par un mot : sécante, tangente ou extérieure.

Réponse attendue : `secante` — aussi acceptées : sécante · elle est sécante · sécants · D est sécante au cercle · la droite est sécante au cercle · sécante au cercle · D est sécante · elle coupe le cercle en deux points · coupe le cercle en deux points · elle coupe le cercle en 2 points · deux points communs · la droite est sécante · sécant · secant · D est sécante au cercle · D et le cercle sont sécants · elle est sécante au cercle · la droite D est sécante

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lis le centre et le rayon du cercle sur son équation.

2. Écris la droite sous la forme $x - y + 3 = 0$, puis calcule la distance du centre à la droite.
3. Compare cette distance au rayon, qui vaut 5.

CORRECTION

Le cercle — Son centre a pour coordonnées trois et quatre, et son rayon vaut cinq.

La droite — On ramène tout dans le même membre.

$$x - y + 3 = 0$$

La distance — On applique la formule avec les coordonnées du centre.

$$\frac{|3 - 4 + 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

On compare — Racine de deux est plus petit que cinq : la distance du centre à la droite est inférieure au rayon.

La droite D est sécante au cercle : elle le coupe en deux points.

PIÈGES ANTICIPÉS

`tangente / elle est tangente` → La droite serait tangente si la distance du centre à la droite était égale au rayon. Ici elle vaut $\sqrt{2}$, et le rayon vaut 5.

`extérieure / exterieure / elle est extérieure` → La droite serait extérieure si la distance était plus grande que le rayon. Compare $\sqrt{2}$ et 5.

EXERCICE 30 · BASE

Intérieur ou extérieur ?

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de centre $I(2\,;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$, et le point $A(-2\,;3)$. Le point A est-il à l'intérieur du cercle, sur le cercle ou à l'extérieur du cercle ?

Réponds par : à l'intérieur, sur le cercle ou à l'extérieur.

Réponse attendue : `à l'extérieur` — aussi acceptées : extérieur · exterieur · il est à l'extérieur · A est à l'extérieur · à l'extérieur du cercle · A est à l'extérieur du cercle · a l exterieur · il est à l'extérieur du cercle · A est extérieur au cercle · extérieur au cercle · A est extérieur · il est extérieur · il est extérieur au cercle · le point A est à l'extérieur du cercle · A est à l'extérieur du cercle C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule le carré de la distance IA.
2. Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ a pour composantes -4 et 2.
3. Compare IA^2 avec le carré du rayon, qui vaut 2.

CORRECTION

Le carré de la distance — On additionne les carrés des composantes du vecteur I A.

$$IA^2 = (-2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 = 20$$

Le carré du rayon — Racine de deux, au carré.

$$R^2 = 2$$

On compare — Vingt est plus grand que deux : le point A est plus loin du centre que le rayon.

Le point A est à l'extérieur du cercle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`à l'intérieur / intérieur / interieur / il est à l'intérieur` → Le point serait à l'intérieur si IA^2 était plus petit que R^2. Or 20 est plus grand que 2.

`sur le cercle / il est sur le cercle` → Le point serait sur le cercle si IA^2 était égal à R^2. Or 20 n'est pas égal à 2.

EXERCICE 31 · RAISONNEMENT

Deux équations, une seule droite

Les équations $3x + by + c = 0$ et $cx - 2y + 12 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite. Combien y a-t-il de couples de réels b et c qui conviennent ?

Donne le nombre de couples.

Réponse attendue : 2 — aussi acceptées : deux · 2 couples · deux couples · il y a 2 couples · il y a deux couples · il y en a 2 · il y en a deux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux équations décrivent la même droite quand leurs coefficients sont proportionnels.
2. Les coefficients 3, b et c sont proportionnels à c, -2 et 12.
3. Avec le premier et le dernier coefficient, tu obtiens $c^2 = 36$. Combien de valeurs pour c ?

CORRECTION

La proportionnalité — Les coefficients trois, b, c sont proportionnels à c, moins deux, douze.

Le coefficient c — On égale les produits en croix du premier et du dernier coefficient.

$3 \times 12 = c \times c \quad \text{donc} \quad c = 6 \text{ ou } c = -6$

Le coefficient b — On égale les produits en croix des deux premiers coefficients.

$b \times c = -6$

Les couples — Si c vaut six, b vaut moins un. Si c vaut moins six, b vaut un.

Il y a exactement deux couples : $b = -1$ et $c = 6$, ou bien $b = 1$ et $c = -6$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / un seul / 1 couple / un couple` → L'équation $c^2 = 36$ a deux solutions : 6 et -6. Chacune donne un couple.

`0 / aucun / zéro` → Il y en a : essaie $c = 6$ et cherche b.

EXERCICE 32 · DEFI

Un ensemble de points

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$. On choisit un repère orthonormé d'origine A dans lequel $B(4\,;0)$ et $C(0\,;3)$. L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 66$ est un cercle. Déterminer son rayon.

Donne la valeur exacte du rayon.

Réponse attendue : `3*sqrt(5)/2` — aussi acceptées : sqrt(45)/2 · sqrt(45/4)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note x et y les coordonnées de M, et écris MA^2, MB^2 et MC^2.
2. Développe et regroupe : tu obtiens $4x^2 + 4y^2 - 8x - 12y + 34 = 66$. Divise tout par 4.
3. Complète les carrés dans $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 8 = 0$.

CORRECTION

Les trois carrés — On écrit chaque carré de distance avec les coordonnées x et y de M.

$$MA^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad MB^2 = (x-4)^2 + y^2 \quad ; \quad MC^2 = x^2 + (y-3)^2$$

On développe — On additionne, en comptant deux fois le troisième.

$$4x^2 + 4y^2 - 8x - 12y + 34 = 66$$

On simplifie — On passe soixante-six à gauche et on divise par quatre.

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y - 8 = 0$$

La forme canonique — On complète les deux carrés : huit plus un plus neuf quarts.

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

Le rayon — On prend la racine carrée de quarante-cinq quarts : la moitié de racine de quarante-cinq, et racine de quarante-cinq vaut trois racine de cinq.

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{45} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

C'est le cercle de centre le point de coordonnées 1 et $\frac{3}{2}$: ce centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 1 et 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`45/4` → Quarante-cinq quarts est le carré du rayon. Le rayon est sa racine carrée.

`sqrt(66)` → Le second membre 66 n'est pas le carré du rayon : il faut d'abord développer et mettre l'équation sous forme canonique.

EXERCICE 33 · BASE

La chasse aux entiers

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le rectangle $OABC$ avec $A(100\,;0)$, $B(100\,;30)$ et $C(0\,;30)$. Combien y a-t-il de points à coordonnées entières dans ce rectangle, bords compris ?

Donne le nombre de points.

Réponse attendue : `3131` — aussi acceptées : 3131 points · il y a 3131 points · 3 131

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point à coordonnées entières du rectangle a une abscisse entière entre 0 et 100, et une ordonnée entière entre 0 et 30.
2. Combien y a-t-il d'entiers de 0 à 100, en comptant le zéro ?

3. Chaque abscisse possible se combine avec chaque ordonnée possible : multiplie les deux nombres.

CORRECTION

Les abscisses — Les entiers de zéro à cent, bords compris.

$$100 + 1 = 101$$

Les ordonnées — Les entiers de zéro à trente, bords compris.

$$30 + 1 = 31$$

Le nombre de points — Chaque abscisse va avec chaque ordonnée.

$$101 \times 31 = 3131$$

Le piège est d'oublier le zéro : de 0 à 100, il y a 101 entiers.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3000` → De 0 à 100 il y a 101 entiers, et de 0 à 30 il y en a 31 : n'oublie pas le zéro.

`3100 / 3030` → Le zéro compte dans les deux directions : 101 abscisses et 31 ordonnées.

`2871` → Bords compris : on compte aussi les points situés sur les côtés du rectangle. Les abscisses vont de 0 à 100, et les ordonnées de 0 à 30.

EXERCICE 34 · BASE

Le symétrique d'un point

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(3\,;-5)$ et $I(-1\,;2)$. Le point B est le symétrique de A par rapport à I. Soit x l'abscisse du point B. Calculer x.

Donne l'abscisse du point B.

Réponse attendue : `-5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dire que B est le symétrique de A par rapport à I, c'est dire que I est le milieu du segment $[AB]$.
2. L'abscisse de I est la demi-somme des abscisses de A et de B : écris l'égalité, l'inconnue est x_B.
3. Multiplie par 2, puis isole x_B.

   $$x_B = 2x_I - x_A$$

CORRECTION

Le milieu — Le point I est le milieu du segment $[AB]$.

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$$

On isole x_B — On multiplie par deux, puis on retranche l'abscisse de A.

$$x_B = 2x_I - x_A$$

Le calcul — On remplace par moins un et trois.

$$x_B = 2 \times (-1) - 3 = -5$$

De même, $y_B = 2 \times 2 - (-5) = 9$: le point B a pour coordonnées -5 et 9. Pour un symétrique, on part toujours du milieu.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Tu as calculé l'abscisse du milieu de $[AI]$. Ici, c'est I qui est le milieu, et B l'extrémité inconnue.

-4 → $x_I - x_A$ donne la composante du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Il faut encore l'ajouter à x_I : B est au-delà de I.

9 → 9 est l'ordonnée de B. On demande son abscisse.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

Le quatrième sommet

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(1\,;2)$, $B(4\,;-1)$ et $C(6\,;3)$. Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, et soit y l'ordonnée du point D. Calculer y.

Donne l'ordonnée du point D.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un parallélogramme, les diagonales ont le même milieu.
2. Les diagonales de $ABCD$ sont $[AC]$ et $[BD]$: calcule d'abord l'ordonnée du milieu de $[AC]$.
3. Ce milieu est aussi celui de $[BD]$: écris l'égalité et isole y_D.

$$y_D = y_A + y_C - y_B$$

CORRECTION

Les diagonales — Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2}$$

On isole y_D — On multiplie par deux et on retranche l'ordonnée de B.

$$y_D = y_A + y_C - y_B$$

Le calcul — On remplace par deux, trois et moins un.

$$y_D = 2 + 3 - (-1) = 6$$

De même $x_D = 1 + 6 - 4 = 3$: $D(3\,;6)$. Attention à l'ordre des lettres : dans $ABCD$, les sommets opposés sont A et C, puis B et D.

PIÈGES ANTICIPÉS

0 → Tu as pris $[AD]$ et $[BC]$ comme diagonales : c'est le parallélogramme $ABDC$. Dans $ABCD$, les diagonales sont $[AC]$ et $[BD]$.

-2 → Tu as calculé $y_A + y_B - y_C$: les diagonales seraient $[AB]$ et $[CD]$, c'est le parallélogramme $ACBD$. Dans $ABCD$, le sommet opposé à D est B.

4 → Attention au signe : on retranche y_B, qui vaut -1. Moins moins un fait plus un.

EXERCICE 36 · RAISONNEMENT

Retrouver un coefficient

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(1\,;1)$, $B(7\,;4)$ et $M(5\,;3)$. On cherche un réel α tel que M soit le barycentre du point A affecté du coefficient α et du point B affecté du coefficient 1. Déterminer le réel α.

Donne la valeur de alpha, sous forme de fraction ou de nombre décimal.

Réponse attendue : `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'abscisse du barycentre avec la formule : la somme des abscisses pondérées, divisée par la somme des coefficients.
2. Tu obtiens une équation en α : $\dfrac{\alpha+7}{\alpha+1}=5$. Fais les produits en croix.
3. Une fois α trouvé, vérifie qu'il donne aussi la bonne ordonnée.

CORRECTION

L'abscisse — On écrit l'abscisse du barycentre, qui doit valoir cinq.

$$\frac{\alpha\times 1+1\times 7}{\alpha+1}=5$$

On résout — On multiplie par alpha plus un.

$$\alpha+7=5\alpha+5 \quad \text{donc} \quad 4\alpha=2$$

On vérifie l'ordonnée — Avec un demi, l'ordonnée vaut bien trois.

$$\frac{\frac{1}{2}\times 1+4}{\frac{1}{2}+1}=\frac{4{,}5}{1{,}5}=3$$

La valeur —

$$\alpha=\frac{1}{2}$$

La vérification sur l'ordonnée n'est pas une formalité : si elle avait échoué, M n'aurait été le barycentre de A et B pour aucun coefficient. On peut aussi raisonner avec les vecteurs : $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Tu as trouvé l'inverse. Reprends l'équation : $\alpha+7=5\alpha+5$ donne $4\alpha=2$.

`-1/2 / -0.5` → Attention au signe : $\alpha+7=5\alpha+5$ donne $2=4\alpha$, donc α est positif.

`2/3` → $\dfrac{2}{3}$ est le rapport de $\overrightarrow{AM}$ à $\overrightarrow{AB}$. On demande le coefficient de A.

EXERCICE 37 · RAISONNEMENT

Un centre de gravité sur la diagonale

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(1\,;4)$ et $B(5\,;-2)$, et le point $C(t\,;2t)$, où t est un réel. Déterminer le réel t pour lequel le centre de gravité G du triangle ABC appartient à la droite d'équation $y=x$.

Donne la valeur de t.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les coordonnées de G en fonction de t : chacune est la moyenne des trois coordonnées correspondantes.

2. Le point G est sur la droite d'équation $y = x$ quand son ordonnée est égale à son abscisse.
3. Écris cette égalité : c'est une équation du premier degré en t.

$$\frac{2+2t}{3} = \frac{6+t}{3}$$

CORRECTION

Les coordonnées de G — On fait la moyenne des abscisses, puis celle des ordonnées.

$$x_G = \frac{1+5+t}{3} = \frac{6+t}{3} \quad ; \quad y_G = \frac{4-2+2t}{3} = \frac{2+2t}{3}$$

La condition — Le point G est sur la droite quand son ordonnée égale son abscisse.

$$2+2t = 6+t$$

La valeur —

$$t = 4$$

Pour $t = 4$, $C(4\,;8)$ et $G\left(\frac{10}{3}\,;\frac{10}{3}\right)$: ses deux coordonnées sont bien égales. Traduire « un point est sur une droite » par une équation, c'est la méthode du chapitre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → Tu as oublié le point A dans les sommes. L'abscisse de G est $\frac{1+5+t}{3}$, l'ordonnée $\frac{4-2+2t}{3}$.

`0` → Attention : l'ordonnée de B est -2. La somme des ordonnées vaut $4-2+2t$, c'est-à-dire $2+2t$.

EXERCICE 38 · BASE

Où la droite coupe l'axe des ordonnées

Dans un repère cartésien, la droite D d'équation $4x - 3y + 12 = 0$ coupe l'axe des ordonnées en un point B. Soit y l'ordonnée du point B. Calculer y.

Donne l'ordonnée du point B.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point de l'axe des ordonnées a pour abscisse zéro.
2. Remplace x par 0 dans l'équation de D : il reste une équation en y.

CORRECTION

Sur l'axe des ordonnées — Le point B a pour abscisse zéro.

$$4 \times 0 - 3y + 12 = 0$$

On résout — Moins trois y plus douze égale zéro.

$$3y = 12 \quad \text{donc} \quad y = 4$$

$B(0\,;4)$. De même, avec $y = 0$, on trouve le point de l'axe des abscisses : $4x + 12 = 0$, donc $x = -3$. Deux points : de quoi tracer la droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → -3 est l'abscisse du point où D coupe l'axe des **abscisses**. Sur l'axe des ordonnées, c'est x qui vaut zéro.

-4 → Attention au signe : $-3y + 12 = 0$ donne $3y = 12$, donc y est positif.

12 → Douze est le terme constant de l'équation. Il faut encore résoudre $-3y + 12 = 0$.

EXERCICE 39 · PRATIQUE

Compléter les coordonnées

Dans un repère cartésien, soit D la droite d'équation $5x + 2y - 7 = 0$. Le point E d'abscisse 3 appartient à la droite D. Soit y l'ordonnée du point E. Calculer y.

Donne l'ordonnée du point E.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point E est sur la droite : ses coordonnées vérifient l'équation.
2. Remplace x par 3 dans l'équation, puis résous l'équation en y obtenue.

CORRECTION

On remplace — On remplace x par trois.

$5 \times 3 + 2y - 7 = 0$

On réduit — Quinze moins sept font huit.

$2y + 8 = 0$

L'ordonnée —

$y = -4$

On vérifie : $5 \times 3 + 2 \times (-4) - 7 = 15 - 8 - 7 = 0$. Le point $E(3\,;-4)$ est bien sur D.

PIÈGES ANTICIPÉS

-8 → Tu as trouvé $2y = -8$: il reste à diviser par 2.

11 → Attention aux signes : $15 + 2y - 7 = 0$ donne $2y = -8$, pas $2y = 22$.

4 → Attention au signe : $2y + 8 = 0$ donne $y = -4$.

EXERCICE 40 · PRATIQUE

Une droite horizontale

Dans un repère cartésien, pour tout réel k, on considère la droite D_k d'équation $(2k - 6)x + (k + 1)y + 4 = 0$. Déterminer le réel k pour lequel la droite D_k est parallèle à l'axe des abscisses.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation de la forme $y =$ constante : le coefficient de x y est nul.

2. Écris que le coefficient de x est nul, et vérifie que celui de y ne l'est pas.

CORRECTION

La condition — Le coefficient de x doit être nul.

$$2k - 6 = 0$$

La valeur — On résout.

$$k = 3$$

On vérifie — Le coefficient de y vaut alors quatre, il n'est pas nul : on a bien une droite.

$$4y + 4 = 0 \iff y = -1$$

Pour $k = 3$, D_3 est la droite d'équation $y = -1$. Retenir : $ax + by + c = 0$ est parallèle à l'axe des abscisses quand $a = 0$, et à l'axe des ordonnées quand $b = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-1 → Pour $k = -1$, c'est le coefficient de y qui s'annule : la droite D_{-1} est parallèle à l'axe des **ordonnées**.

-3 → Attention au signe : $2k - 6 = 0$ donne $2k = 6$.

EXERCICE 41 · PRATIQUE

Trois points alignés

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;-4)$ et $C(m\,;-7)$, où m est un réel. Déterminer le réel m pour lequel les points A, B et C sont alignés.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les trois points sont alignés quand C appartient à la droite (AB).
2. Cherche une équation de (AB) : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 2 et -6, donc une équation est de la forme $3x + y + c = 0$.
3. Calcule c avec le point A, puis écris que les coordonnées de C vérifient l'équation.

CORRECTION

Une équation de (AB) — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes deux et moins six ; il est colinéaire au vecteur de composantes moins un et trois.

$$(AB) : 3x + y + c = 0$$

Le réel c — Le point A est sur la droite.

$$3 \times 1 + 2 + c = 0 \quad \text{donc} \quad c = -5$$

Le point C — On remplace x par m et y par moins sept.

$$3m - 7 - 5 = 0 \quad \text{donc} \quad m = 4$$

$C(4\,;-7)$. On peut aussi écrire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : $2 \times (-9) - (-6)(m-1) = 0$ donne la même valeur.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → Attention au signe : $3m - 12 = 0$ donne $m = 4$.

2/3 → Le réel c vaut -5 : avec A, $3 + 2 + c = 0$. Tu as pris $c = 5$.

EXERCICE 42 · RAISONNEMENT

La droite des milieux, par le calcul

Soit ABC un triangle, I le milieu du côté $[AB]$ et J le milieu du côté $[AC]$. On travaille dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{BC}$.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 1/2 — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, A est l'origine, B a pour coordonnées 1 et 0, et C a pour coordonnées 0 et 1.
2. Calcule les coordonnées des milieux I et J, puis les composantes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Compare les composantes : par quel nombre faut-il multiplier celles de $\overrightarrow{BC}$?

CORRECTION

Les points — Dans le repère choisi, on lit les coordonnées des sommets.

$A(0\,;0) \quad ; \quad B(1\,;0) \quad ; \quad C(0\,;1)$

Les milieux — On fait les demi-sommes.

$I\left(\frac{1}{2}\,;0\right) \quad ; \quad J\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$

Les vecteurs — On calcule les composantes.

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

Le réel k —

$k = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: la droite (IJ) est parallèle à (BC) et $IJ = \frac{BC}{2}$. Ce repère n'est pas orthonormé, mais on n'y calcule aucune distance : la longueur se déduit de l'égalité de vecteurs. Un repère bien choisi transforme un théorème de géométrie en un calcul de coordonnées.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Tu as calculé le rapport de $\overrightarrow{BC}$ à $\overrightarrow{IJ}$. On cherche k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{BC}$.

-1/2 / -0.5 → Compare composante par composante : $-\frac{1}{2} = k \times (-1)$, donc k est positif.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Deux achats, deux droites

Dans une librairie, Yasmine paie 31 dinars pour 2 stylos et 3 cahiers. Son frère paie 27 dinars pour 4 stylos et 1 cahier, aux mêmes prix. On note x le prix d'un stylo et y celui d'un cahier, en dinars. Le point de coordonnées x et y est le point d'intersection des droites $D_1 : 2x + 3y - 31 = 0$ et $D_2 : 4x + y - 27 = 0$. Calculer le prix d'un cahier, en dinars.

Donne le prix d'un cahier, en dinars.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point cherché est sur les deux droites : ses coordonnées vérifient les deux équations à la fois.
2. De l'équation de D_2, tire y en fonction de x.
3. Remplace y par $27 - 4x$ dans l'équation de D_1. N'oublie pas qu'on demande y, le prix du cahier.

CORRECTION

On isole y — Dans la seconde équation.

$$y = 27 - 4x$$

On remplace — Dans la première équation.

$$2x + 3(27 - 4x) - 31 = 0 \quad \text{donc} \quad -10x + 50 = 0$$

Le prix du stylo —

$$x = 5$$

Le prix du cahier — On revient à l'expression de y.

$$y = 27 - 4 \times 5 = 7$$

Un stylo coûte 5 dinars et un cahier 7 dinars. On vérifie : $2 \times 5 + 3 \times 7 = 31$ et $4 \times 5 + 7 = 27$. Deux contraintes, deux droites : la solution est leur point commun.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Cinq dinars, c'est le prix d'un **stylo**, l'abscisse du point. On demande le prix d'un cahier.

EXERCICE 44 · RAISONNEMENT

Deux contraintes à respecter

Un atelier fabrique en un jour x tables et y chaises, x et y étant des entiers naturels. Les contraintes de la journée s'écrivent $2x + 3y \leq 60$ et $4x + y \leq 50$: le point de coordonnées x et y doit se trouver du côté de l'origine par rapport à chacune des deux droites $2x + 3y - 60 = 0$ et $4x + y - 50 = 0$. L'atelier fabrique 10 tables aujourd'hui. Déterminer le plus grand nombre de chaises qu'il peut fabriquer.

Donne le nombre de chaises.

Réponse attendue : 10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace x par 10 dans chacune des deux inégalités.
2. Tu obtiens deux conditions sur y : y doit les respecter **toutes les deux**.

3. Le nombre de chaises est un entier : prends le plus grand entier qui vérifie les deux conditions.

CORRECTION

Première contrainte — On remplace x par dix.

$$20 + 3y \leq 60 \iff y \leq \frac{40}{3}$$

Seconde contrainte — On remplace x par dix.

$$40 + y \leq 50 \iff y \leq 10$$

Les deux à la fois — Il faut $y \leq 13{,}33\ldots$ et $y \leq 10$: c'est la plus forte qui compte.

$$y = 10$$

Le point $(10\,;10)$ est sur la droite $4x + y - 50 = 0$, et du bon côté de l'autre. Une contrainte d'inégalité, c'est un demi-plan ; plusieurs contraintes, c'est l'intersection des demi-plans.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → Treize respecte la première contrainte, mais pas la seconde : $40 + 13 = 53$ dépasse 50.

`40/3` → On fabrique un nombre entier de chaises, et la seconde contrainte impose de plus $y \leq 10$.

EXERCICE 45 · BASE

Compléter un vecteur directeur

Dans un repère cartésien, soit D la droite d'équation $-3x + 5y + 2 = 0$. Le vecteur $\vec{u}$ de composantes k et 6 est un vecteur directeur de D. Déterminer le réel k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour la droite $ax + by + c = 0$, le vecteur de composantes $-b$ et a est un vecteur directeur.
2. Ici, ce vecteur a pour composantes -5 et -3. Le vecteur $\vec{u}$ doit lui être colinéaire.
3. Par quel nombre faut-il multiplier -3 pour obtenir 6 ? Fais de même avec -5.

CORRECTION

Un vecteur directeur — On lit moins b, puis a.

$$\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$$

La colinéarité — Pour passer de moins trois à six, on multiplie par moins deux.

$$\vec{u} = -2\,\vec{v}$$

Le réel k —

$$k = -2 \times (-5) = 10$$

On vérifie avec le déterminant : $10 \times (-3) - 6 \times (-5) = -30 + 30 = 0$. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$ dirige D.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-10` → Attention aux signes : le vecteur directeur lu sur l'équation est $(-5\,;-3)$, et on le multiplie par -2.

-18/5 / -3.6 → Tu as utilisé $(a\,;b) = (-3\,;5)$: c'est un vecteur **normal**. Le vecteur directeur est $(-b\,;a)$.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Une droite, un point, une direction

Dans un repère cartésien, soit D la droite passant par le point $A(2\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de composantes 3 et 4. La droite D a une équation de la forme $4x - 3y + c = 0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : `-11`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Vérifie d'abord que la forme proposée convient : le vecteur de composantes $-b$ et a, ici 3 et 4, est bien $\vec{u}$.
2. Le point A est sur la droite : remplace x par 2 et y par -1.

CORRECTION

La direction — Pour quatre x moins trois y, moins b vaut trois et a vaut quatre : c'est le vecteur $\vec{u}$.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Avec le point A — On remplace x par deux et y par moins un.

$$4 \times 2 - 3 \times (-1) + c = 0$$

Le réel c — Huit plus trois font onze.

$$c = -11$$

Une équation de D est $4x - 3y - 11 = 0$. Méthode : la direction donne a et b, un point donne c.

PIÈGES ANTICIPÉS

11 → On a $11 + c = 0$: c'est $c = -11$.

-5 → Attention : $-3 \times (-1)$ vaut $+3$. On obtient $8 + 3 + c = 0$.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Parallèles ou confondues ?

Dans un repère cartésien, on considère les droites $D : 4x - 10y + 6 = 0$ et $D' : -6x + 15y - 9 = 0$. Les droites D et D' sont-elles sécantes, strictement parallèles ou confondues ?

Réponds par : sécantes, strictement parallèles ou confondues.

Réponse attendue : `confondues` — aussi acceptées : confondue · elles sont confondues · D et D' sont confondues · les droites sont confondues · parallèles confondues · elles sont parallèles et confondues · parallèles et confondues · D = D' · D=D'

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord $ab' - a'b$: s'il est nul, les droites sont parallèles.
2. Pour trancher entre les deux cas de parallélisme, cherche un point de D, par exemple celui d'abscisse 1, et regarde s'il est sur D'.
3. Tu peux aussi diviser chaque équation par un nombre bien choisi et comparer.

CORRECTION

Le déterminant — On calcule a b prime moins a prime b.

$$4 \times 15 - (-6) \times (-10) = 60 - 60 = 0$$

Un point de D — Pour $x = 1$, on trouve $-10y + 10 = 0$, donc $y = 1$.

$$A(1\,;1) \in D$$

Le point dans D' — On remplace dans l'équation de D'.

$$-6 + 15 - 9 = 0 \quad \text{donc} \quad A \in D'$$

Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont confondues. D'ailleurs, les deux équations s'écrivent $2(2x - 5y + 3) = 0$ et $-3(2x - 5y + 3) = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`strictement parallèles / strictement parallèle` → Elles sont parallèles, mais elles ont un point commun : le point de coordonnées 1 et 1 est sur les deux.

`sécantes / secantes / sécante` → Calcule $ab' - a'b$: $4 \times 15 - (-6) \times (-10)$ est nul, donc elles sont parallèles.

`parallèles / parallele` → Elles sont bien parallèles, mais on peut en dire plus : ont-elles un point commun ?

EXERCICE 48 · PRATIQUE

La parallèle par un point

Dans un repère cartésien, on considère la droite D d'équation $5x + 2y - 1 = 0$ et le point $A(-3\,;4)$. Soit D' la droite passant par A et parallèle à D. La droite D' a une équation de la forme $5x + 2y + c = 0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites parallèles ont le même vecteur directeur : on peut garder les mêmes a et b.
2. Le point A est sur D' : remplace x par -3 et y par 4 dans $5x + 2y + c = 0$.

CORRECTION

La forme — La droite D' a les mêmes coefficients a et b que D.

$$D' : 5x + 2y + c = 0$$

Avec le point A — On remplace x par moins trois et y par quatre.

$$5 \times (-3) + 2 \times 4 + c = 0 \quad \text{donc} \quad -7 + c = 0$$

Le réel c —

$$c = 7$$

Une équation de D' est $5x + 2y + 7 = 0$. Seul c change entre deux droites parallèles écrites ainsi.

PIÈGES ANTICIPÉS

-7 → On a $-7 + c = 0$: c'est $c = 7$.

-1 → Avec $c = -1$, c'est la droite D elle-même : elle ne passe pas par A.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Une famille de droites

Dans un repère cartésien, pour tout réel m, on considère la droite D_m d'équation $mx + (m + 2)y - 1 = 0$, et la droite D d'équation $3x + y + 5 = 0$. Déterminer le réel m pour lequel la droite D_m est parallèle à la droite D.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour D_m, $a = m$ et $b = m + 2$; pour D, $a' = 3$ et $b' = 1$.
2. Les droites sont parallèles quand $ab' - a'b = 0$: écris cette condition, c'est une équation en m.
3. Attention à la parenthèse quand tu multiplies 3 par $m + 2$.

CORRECTION

La condition — On écrit a b prime moins a prime b égale zéro.

$$m \times 1 - 3(m + 2) = 0$$

On résout — On développe.

$$-2m - 6 = 0$$

La valeur —

$$m = -3$$

Pour $m = -3$, D_{-3} a pour équation $-3x - y - 1 = 0$, c'est-à-dire $3x + y + 1 = 0$: elle est parallèle à D, et distincte. La condition $ab' - a'b = 0$ transforme le parallélisme en équation.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3/2 / -1.5 → Le critère est une **différence** : $ab' - a'b = 0$, et non $ab' + a'b = 0$.

-1 → Attention à la parenthèse : $3(m + 2)$ vaut $3m + 6$, et non $3m + 2$.

EXERCICE 50 · DEFI

Deux valeurs pour un parallélisme

Dans un repère cartésien, pour tout réel m, on considère les droites D_m : $(m + 1)x + 2y - 4 = 0$ et D'_m : $3x + my + 1 = 0$. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels les droites D_m et D'_m sont parallèles.

Écris l'ensemble des valeurs de m entre accolades, par exemple « {1;5} ».

Réponse attendue : `{-3;2}` — aussi acceptées : m=-3 ou m=2 · m=2 ou m=-3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la condition de parallélisme $ab' - a'b = 0$ avec $a = m+1$, $b = 2$, $a' = 3$ et $b' = m$.
2. Tu obtiens une équation du second degré en m.
3. Résous-la, par le discriminant ou en factorisant.

CORRECTION

La condition — On écrit a b prime moins a prime b égale zéro.

$$(m+1) \times m - 3 \times 2 = 0$$

L'équation — On développe.

$$m^2 + m - 6 = 0$$

On factorise — Le produit des racines vaut moins six et leur somme moins un.

$$(m+3)(m-2) = 0$$

L'ensemble —

$$S = \{-3; 2\}$$

Pour $m = 2$: $3x + 2y - 4 = 0$ et $3x + 2y + 1 = 0$. Pour $m = -3$: $x - y + 2 = 0$ et $x - y + \frac{1}{3} = 0$. Dans les deux cas, les droites sont strictement parallèles. Un paramètre dans les deux équations peut donner une équation du second degré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2}` / `{-3}` → Il y a deux valeurs : l'équation $m^2 + m - 6 = 0$ a deux solutions.

`{-2;3}` → Vérifie en remplaçant : pour $m = 3$, $(m+1)m - 6$ vaut 6, pas zéro. La factorisation est $(m+3)(m-2)$.

EXERCICE 51 · PRATIQUE Le point commun de deux droites

Dans un repère cartésien, on considère les droites $D : 3x + 2y - 1 = 0$ et $D' : x - y - 7 = 0$. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Écris les coordonnées sous la forme « (x;y) », par exemple « (2;3) ».

Réponse attendue : `(3;-4)` — aussi acceptées : (3,-4) · 3;-4 · x=3;y=-4 · x=3 et y=-4 · (x;y)=(3;-4) · x=3 y=-4 · x=3, y=-4 · 3 et -4 · I(3;-4) · I(3,-4) · K(3;-4) · K(3,-4) · M(3;-4) · M(3,-4) · A(3;-4) · A(3,-4) · P(3;-4) · P(3,-4) · J(3;-4) · J(3,-4) · N(3;-4) · N(3,-4) · E(3;-4) · E(3,-4) · H(3;-4) · H(3,-4) · S(3;-4) · S(3,-4) · Ω(3;-4) · Ω(3,-4)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Vérifie d'abord que les droites sont sécantes : $ab' - a'b$ n'est pas nul.
2. De l'équation de D', tire x en fonction de y.
3. Remplace x par $y + 7$ dans l'équation de D, puis calcule l'autre coordonnée.

CORRECTION

Sécantes — a b prime moins a prime b vaut moins cinq, qui n'est pas nul.

$3 \times (-1) - 1 \times 2 = -5 \neq 0$

On isole x — Dans l'équation de D'.

$x = y + 7$

On remplace — Dans l'équation de D.

$3(y + 7) + 2y - 1 = 0 \quad \text{donc} \quad 5y + 20 = 0$

Les coordonnées — On trouve y égale moins quatre, puis x égale trois.

$y = -4 \quad ; \quad x = -4 + 7 = 3$

On vérifie dans D : $9 - 8 - 1 = 0$. Pour deux droites sécantes, on résout le système formé par leurs équations, par substitution.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-4;3)` / `(-4,3)` / `-4;3` → L'abscisse s'écrit en premier : $x = 3$ et $y = -4$.

`(11;4)` / `(11,4)` → Attention : $5y + 20 = 0$ donne $y = -4$.

EXERCICE 52 · RAISONNEMENT

Choisir le point de rencontre

Dans un repère cartésien, pour tout réel m, on considère la droite D_m d'équation $mx - y + 2 = 0$, et la droite D d'équation $3x + y - 7 = 0$. Déterminer le réel m pour lequel les droites D_m et D se coupent en un point d'abscisse 1.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point d'intersection est sur D : avec son abscisse, calcule son ordonnée.
2. Ce même point doit être sur D_m : remplace ses coordonnées dans l'équation de D_m.
3. Tu obtiens une équation du premier degré en m.

CORRECTION

Le point sur D — Pour x égale un, l'équation de D donne y égale quatre.

$3 + y - 7 = 0 \quad \text{donc} \quad y = 4$

Le point sur D_m — Le point de coordonnées un et quatre est sur D_m.

$m \times 1 - 4 + 2 = 0$

La valeur —

$m = 2$

Pour $m = 2$, D_2 : $2x - y + 2 = 0$ et D se coupent bien au point de coordonnées 1 et 4. Le point commun est sur chacune des deux droites : on l'utilise dans les deux équations.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 est l'ordonnée du point d'intersection. Il faut encore l'utiliser dans l'équation de D_m.

`-6` → Attention : $-y$ avec $y = 4$ donne -4. On obtient $m - 4 + 2 = 0$.

EXERCICE 53 · BASE

Compléter un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, soit D la droite d'équation $7x - 2y + 3 = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ de composantes k et -6 est un vecteur normal à D. Déterminer le réel k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : 21

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour la droite $ax + by + c = 0$, le vecteur de composantes a et b est un vecteur normal.
2. Ici, ce vecteur a pour composantes 7 et -2. Le vecteur $\vec{n}$ doit lui être colinéaire.
3. Par quel nombre faut-il multiplier -2 pour obtenir -6 ?

CORRECTION

Un vecteur normal — On lit a, puis b.

$$\vec{v}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$$

La colinéarité — Pour passer de moins deux à moins six, on multiplie par trois.

$$\vec{n} = 3\,\vec{v}$$

Le réel k —

$$k = 3 \times 7 = 21$$

Tout vecteur non nul colinéaire à $(a\,;b)$ est normal à la droite $ax + by + c = 0$. Ne pas confondre avec le vecteur directeur $(-b\,;a)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-21 → Pour passer de -2 à -6, on multiplie par $+3$: $k = 3 \times 7$.

-12/7 → Tu as utilisé le vecteur directeur $(2\,;7)$. Un vecteur normal a pour composantes a et b.

EXERCICE 54 · PRATIQUE

Une droite par son vecteur normal

Dans un repère orthonormé, soit D la droite passant par le point $A(-2\,;5)$ et dont un vecteur normal $\vec{n}$ a pour composantes 3 et -1. La droite D a une équation de la forme $3x - y + c = 0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec un vecteur normal de composantes a et b, une équation est de la forme $ax + by + c = 0$: c'est la forme proposée.
2. Le point A est sur D : remplace x par -2 et y par 5.

CORRECTION

La forme — Le vecteur normal donne a égale trois et b égale moins un.

$$D : 3x - y + c = 0$$

Avec le point A — On remplace x par moins deux et y par cinq.

$$3 \times (-2) - 5 + c = 0 \quad \text{donc} \quad -11 + c = 0$$

Le réel c —

$$c = 11$$

Une équation de D est $3x - y + 11 = 0$. Le vecteur normal donne a et b directement, sans échange ni changement de signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

-11 → On a $-11 + c = 0$: c'est $c = 11$.

1 → Attention : $-y$ avec $y = 5$ donne -5. On obtient $-6 - 5 + c = 0$.

EXERCICE 55 · RAISONNEMENT

Un point de la médiatrice

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3\,;2)$ et $B(5\,;-4)$, et le point $P(m\,;3)$, où m est un réel. Déterminer le réel m pour lequel le point P appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes 8 et -6 : on peut prendre comme vecteur normal celui de composantes 4 et -3.
3. Écris une équation de la médiatrice avec le milieu, puis remplace par les coordonnées de P.

CORRECTION

Le milieu — Le milieu I de $[AB]$.

$$I(1\,;-1)$$

Une équation — Vecteur normal de composantes quatre et moins trois, et passage par I.

$$4x - 3y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 4 + 3 + c = 0 \quad \text{donc} \quad 4x - 3y - 7 = 0$$

Le point P — On remplace x par m et y par trois.

$$4m - 9 - 7 = 0$$

La valeur —

$$m = 4$$

On vérifie : $PA^2 = 49 + 1 = 50$ et $PB^2 = 1 + 49 = 50$. Le point $P(4\,;3)$ est bien à égale distance de A et de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-9/4` → Ta droite passe par A, pas par le milieu de $[AB]$. La médiatrice passe par $I(1\,;-1)$.

`1/2` → Attention au signe de c : avec $I(1\,;-1)$, $4\times 1-3\times(-1)+c=0$ donne $c=-7$.

EXERCICE 56 · BASE

Perpendiculaires ?

Dans un repère orthonormé, on considère les droites $D : 2x+5y-1=0$ et $D' : 10x-4y+3=0$. Les droites D et D' sont-elles perpendiculaires ?

Réponds par « oui » ou par « non ».

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles sont perpendiculaires · elles sont perpendiculaires · perpendiculaires · oui, elles sont perpendiculaires · oui perpendiculaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un repère orthonormé, D et D' sont perpendiculaires quand $aa'+bb'=0$.
2. Ici $a=2$, $b=5$, $a'=10$ et $b'=-4$.

CORRECTION

Le calcul — On calcule a a prime plus b b prime.

$2\times 10+5\times(-4)=20-20=0$

On conclut — La somme est nulle : les vecteurs normaux sont orthogonaux.

Les droites sont perpendiculaires. Attention : la condition $aa'+bb'=0$ demande un repère **orthonormé**.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elles ne sont pas perpendiculaires` → Refais le calcul : $2\times 10+5\times(-4)$ vaut zéro.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Une hauteur du triangle

Dans un repère orthonormé, on considère le triangle ABC avec $A(1\,;2)$, $B(4\,;-2)$ et $C(-3\,;0)$. La hauteur du triangle issue de A a une équation de la forme $7x-2y+c=0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) : le vecteur $\overrightarrow{BC}$ lui est normal.
2. $\overrightarrow{BC}$ a pour composantes -7 et 2 : il est colinéaire au vecteur de composantes 7 et -2, d'où la forme proposée.
3. La hauteur passe par A : remplace ses coordonnées.

CORRECTION

Le vecteur normal — On calcule les composantes de $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$

Avec le point A — La hauteur passe par A.

$7 \times 1 - 2 \times 2 + c = 0$

Le réel c —

$c = -3$

La hauteur issue de A a pour équation $7x - 2y - 3 = 0$. Une hauteur : le sommet donne le point, le côté opposé donne le vecteur normal.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → On a $3 + c = 0$: c'est $c = -3$.

-32 → La hauteur issue de A passe par A, pas par B.

EXERCICE 58 · PRATIQUE

La perpendiculaire par un point

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $4x + y - 2 = 0$ et le point $A(3\,;-1)$. Soit D' la droite passant par A et perpendiculaire à D. La droite D' a une équation de la forme $x - 4y + c = 0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : -7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un vecteur directeur de D est normal à D'.
2. Le vecteur de composantes -1 et 4 dirige D ; celui de composantes 1 et -4 aussi, d'où la forme proposée.
3. Remplace x par 3 et y par -1.

CORRECTION

La direction de D — Moins b et a.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

Normal à D' — Le vecteur $-\vec{u}$, de composantes un et moins quatre, est normal à D'.

$D' : x - 4y + c = 0$

Avec le point A — On remplace.

$3 - 4 \times (-1) + c = 0 \quad \text{donc} \quad c = -7$

Une équation de D' est $x - 4y - 7 = 0$. On vérifie : $4 \times 1 + 1 \times (-4) = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → On a $7 + c = 0$: c'est $c = -7$.

1 → Attention : $-4 \times (-1)$ vaut $+4$. On obtient $3 + 4 + c = 0$.

EXERCICE 59 · RAISONNEMENT

Un angle droit à placer

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2\,;1)$, $B(6\,;3)$ et $C(m\,;7)$, où m est un réel. Déterminer le réel m pour lequel le triangle ABC est rectangle en B.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle est rectangle en B quand les droites (BA) et (BC) sont perpendiculaires.
2. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$, de composantes -4 et -2, est normal à toute droite perpendiculaire à (BA) : il doit être orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.
3. Deux vecteurs de composantes $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ sont orthogonaux, dans un repère orthonormé, quand $xx'+yy'=0$.

CORRECTION

Les vecteurs — On calcule les composantes.

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}m-6\\4\end{pmatrix}$$

L'orthogonalité — On écrit que la somme des produits est nulle.

$$-4(m-6)-2\times 4=0$$

On résout — Moins quatre m plus vingt-quatre moins huit égale zéro.

$$-4m+16=0 \quad \text{donc} \quad m=4$$

Pour $m=4$: $\overrightarrow{BC}(-2\,;4)$, et $-4\times(-2)+(-2)\times 4=0$. On peut vérifier avec Pythagore : $AB^2=20$, $BC^2=20$, $AC^2=40$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-8 → Attention à la parenthèse : $-4(m-6)$ vaut $-4m+24$, et non $-4m-24$.

-1 → Tu as cherché un angle droit en A. Ici, c'est en B : les vecteurs sont $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 60 · DEFI

Le pied de la perpendiculaire

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $x+2y-7=0$ et le point $A(5\,;6)$. Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite D. Déterminer les coordonnées du point H.

Écris les coordonnées sous la forme « (x;y) », par exemple « (2;3) ».

Réponse attendue : (3;2) — aussi acceptées : (3,2) · 3;2 · x=3;y=2 · x=3 et y=2 · (x;y)=(3;2) · x=3 y=2 · x=3, y=2 · 3 et 2 · I(3;2) · I(3,2) · K(3;2) · K(3,2) · M(3;2) · M(3,2) · A(3;2) · A(3,2) · P(3;2) · P(3,2) · J(3;2) · J(3,2) · N(3;2) · N(3,2) · E(3;2) · E(3,2) · H(3;2) · H(3,2) · S(3;2) · S(3,2) · Ω(3;2) · Ω(3,2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point H est l'intersection de D et de la perpendiculaire à D passant par A.
2. Le vecteur de composantes -2 et 1 dirige D : il est normal à la perpendiculaire. Écris son équation avec le point A.
3. Résous ensuite le système formé par les deux équations.

CORRECTION

La perpendiculaire — Vecteur normal de composantes deux et moins un, passage par A.

$$2x - y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 10 - 6 + c = 0 \quad \text{donc} \quad 2x - y - 4 = 0$$

Le système — On tire y de la seconde équation : y égale deux x moins quatre.

$$x + 2(2x - 4) - 7 = 0 \quad \text{donc} \quad 5x - 15 = 0$$

Les coordonnées — On trouve x égale trois, puis y égale deux.

$$x = 3 \quad ; \quad y = 2 \times 3 - 4 = 2$$

Contrôle : $AH = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$, et la formule de la distance donne $\dfrac{|5 + 12 - 7|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$. Le projeté orthogonal : intersection de la droite et de sa perpendiculaire passant par le point.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;3)` / `(2,3)` / `2;3` → L'abscisse s'écrit en premier : $x = 3$ et $y = 2$.

EXERCICE 61 · RAISONNEMENT

Le bon point sur un côté

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. On choisit un repère orthonormé d'origine A dans lequel $B(6\,;0)$ et $D(0\,;4)$. Le point F du segment $[AB]$ est tel que les droites (DF) et (AC) sont perpendiculaires. Calculer la longueur AF.

Donne la longueur AF, sous forme de fraction.

Réponse attendue : `8/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère, C a pour coordonnées 6 et 4, et F, sur $[AB]$, a des coordonnées de la forme t et 0.
2. Les droites sont perpendiculaires quand les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
3. Écris $xx' + yy' = 0$ avec $\overrightarrow{AC}(6\,;4)$ et $\overrightarrow{DF}(t\,;-4)$.

CORRECTION

Les coordonnées — Le point C et le point F de l'axe des abscisses.

$$C(6\,;4) \quad ; \quad F(t\,;0)$$

Les vecteurs — On calcule les composantes.

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}t\\-4\end{pmatrix}$$

L'orthogonalité — Six t moins seize égale zéro.

$$6t - 16 = 0 \quad \text{donc} \quad t = \frac{8}{3}$$

La longueur —

$AF = \dfrac{8}{3}$

$\dfrac{8}{3}$ est bien compris entre 0 et 6 : F est sur le segment. Un repère bien choisi a son origine en un sommet et ses axes sur les côtés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2.7 / 2.6 / 2.67 / 2.66 / 2.667 / 2.666` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, $\dfrac{8}{3}$.

`3/8` → Tu as divisé dans le mauvais sens : $6t = 16$ donne $t = \dfrac{16}{6}$.

`-8/3` → Une longueur est positive : $6t - 16 = 0$ donne $t = \dfrac{16}{6}$.

EXERCICE 62 · DEFI

Deux droites dans un carré

Soit $ABCD$ un carré. On note I le milieu du côté $[BC]$ et J le milieu du côté $[CD]$. Les droites (AI) et (BJ) se coupent en un point K. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, calculer l'ordonnée du point K.

Donne l'ordonnée du point K.

Réponse attendue : `2/5` — aussi acceptées : `0.4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce repère : $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$ et $D(0\,;1)$. Calcule les coordonnées de I et de J.
2. La droite (AI) passe par l'origine : son équation réduite est simple. Cherche aussi une équation de (BJ).
3. (BJ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\right)$: une équation est $2x + y - 2 = 0$. Résous le système.

CORRECTION

Les milieux — Les demi-sommes.

$$I\left(1\,;\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad J\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$$

Les deux droites — (AI) passe par l'origine ; (BJ) passe par B, de vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}$.

$$(AI) : y = \frac{1}{2}x \quad ; \quad (BJ) : 2x + y - 2 = 0$$

L'intersection — On remplace x par deux y dans la seconde équation.

$$4y + y - 2 = 0 \quad \text{donc} \quad y = \frac{2}{5}$$

$K\left(\dfrac{4}{5}\,;\dfrac{2}{5}\right)$. En prenant le côté du carré pour unité, ce repère est orthonormé, et l'on voit de plus que (AI) et (BJ) sont perpendiculaires : $1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \times 1 = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/5 / 0.8` → $\frac{4}{5}$ est l'abscisse de K. On demande son ordonnée.

`1/2 / 0.5` → $\frac{1}{2}$ est l'ordonnée de I, pas celle de K : K est entre A et I.

EXERCICE 63 · RAISONNEMENT

L'orthocentre

Dans un repère orthonormé, on considère le triangle ABC avec $A(-1\,;0)$, $B(5\,;0)$ et $C(1\,;4)$. On note H l'orthocentre du triangle ABC. Soit y l'ordonnée du point H. Calculer y.

Donne l'ordonnée du point H.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'orthocentre est le point de concours des hauteurs : deux hauteurs suffisent.
2. Le côté $[AB]$ est sur l'axe des abscisses : la hauteur issue de C est la droite d'équation $x = 1$.
3. Pour la hauteur issue de B, le vecteur $\overrightarrow{AC}$, de composantes 2 et 4, est normal.

CORRECTION

Hauteur issue de C — Elle est perpendiculaire à l'axe des abscisses et passe par C.

$$x = 1$$

Hauteur issue de B — Vecteur normal de composantes un et deux, passage par B.

$$x + 2y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 5 + c = 0 \quad \text{donc} \quad x + 2y - 5 = 0$$

L'intersection — On remplace x par un.

$$1 + 2y - 5 = 0 \quad \text{donc} \quad y = 2$$

$H(1\,;2)$. On vérifie avec la troisième hauteur : elle passe par A, de vecteur normal $\overrightarrow{BC}(-4\,;4)$, d'équation $x - y + 1 = 0$, et $1 - 2 + 1 = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/3` → $\frac{4}{3}$ est l'ordonnée du centre de gravité, pas de l'orthocentre.

`3` → Attention : $1 + 2y - 5 = 0$ donne $2y = 4$.

EXERCICE 64 · DEFI

Le cercle circonscrit

Dans un repère orthonormé, on considère le triangle ABC avec $A(-2\,;-1)$, $B(4\,;-1)$ et $C(2\,;3)$. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Donne la valeur exacte du rayon.

Réponse attendue : `sqrt(10)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre Ω du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices.
2. Le segment $[AB]$ est parallèle à l'axe des abscisses : sa médiatrice a une équation très simple.
3. La médiatrice de $[AC]$ passe par le milieu de $[AC]$, de vecteur normal $\overrightarrow{AC}(4\,;4)$. Trouve Ω, puis calcule ΩA.

CORRECTION

Médiatrice de [AB] — Le milieu de $[AB]$ a pour abscisse un, et $[AB]$ est horizontal.

$$x = 1$$

Médiatrice de [AC] — Milieu de coordonnées zéro et un, vecteur normal de composantes un et un.

$$x + y + c = 0 \quad \text{avec} \quad 0 + 1 + c = 0 \quad \text{donc} \quad x + y - 1 = 0$$

Le centre — On remplace x par un : y égale zéro.

$$\Omega(1\,;0)$$

Le rayon — On calcule la distance de Ω à A.

$$\Omega A = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10}$$

On vérifie : $\Omega B^2 = 9 + 1 = 10$ et $\Omega C^2 = 1 + 9 = 10$. Le cercle circonscrit a pour équation $(x-1)^2 + y^2 = 10$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Dix est le **carré** du rayon. Le rayon est sa racine carrée.

`3.2 / 3.1 / 3.16 / 3.162` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, $\sqrt{10}$.

`3` → Trois est la moitié de AB : le cercle de diamètre $[AB]$ ne passe pas par C.

EXERCICE 65 · PRATIQUE De la cartésienne à la réduite

Dans un repère cartésien, soit D la droite d'équation $4x + 3y - 6 = 0$. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite D.

Donne l'ordonnée à l'origine p.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Isole y : passe les autres termes dans le second membre, puis divise par 3.
2. L'équation réduite s'écrit $y = mx + p$: l'ordonnée à l'origine est le terme constant.

CORRECTION

On isole y — On passe quatre x et moins six dans l'autre membre.

$$3y = -4x + 6$$

On divise — On divise tout par trois.

$$y = -\frac{4}{3}x + 2$$

L'ordonnée à l'origine —

$$p = 2$$

L'équation réduite est $y = -\frac{4}{3}x + 2$: coefficient directeur $-\frac{4}{3}$, ordonnée à l'origine 2. La droite passe par le point $(0\,;2)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → Six est le terme constant de $3y = -4x + 6$. Il faut encore diviser par 3.

`-2` → Attention au signe : en passant -6 dans le second membre, il devient $+6$.

`-4/3` → $-\frac{4}{3}$ est le coefficient directeur. On demande l'ordonnée à l'origine.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

La réduite par deux points

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(-2\,;7)$ et $B(4\,;-2)$. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

Écris l'équation réduite, avec ou sans « y = ».

Réponse attendue : `-3x/2+4` — aussi acceptées : -1.5x+4 · 4-3x/2 · (-3x+8)/2 · -(3/2)x+4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le coefficient directeur : la variation des ordonnées divisée par la variation des abscisses.
2. Tu trouves $m = \frac{-2-7}{4-(-2)}$. Simplifie.
3. Pour l'ordonnée à l'origine, écris que A est sur la droite.

CORRECTION

Le coefficient directeur — Moins neuf sur six.

$$m = \frac{-2-7}{4-(-2)} = -\frac{3}{2}$$

Avec le point A — On remplace x par moins deux et y par sept.

$$7 = -\frac{3}{2} \times (-2) + p = 3 + p \quad \text{donc} \quad p = 4$$

L'équation réduite —

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

On vérifie avec B : $-\frac{3}{2} \times 4 + 4 = -6 + 4 = -2$. Deux points : la pente d'abord, puis l'ordonnée à l'origine.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2x/3+17/3` → Tu as divisé la variation des abscisses par celle des ordonnées. Le coefficient directeur est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

`-3x/2+7` → L'ordonnée à l'origine n'est pas l'ordonnée de A : A n'est pas sur l'axe des ordonnées.

`-3x/2+10` → Attention : $-\frac{3}{2} \times (-2)$ vaut $+3$, donc $7 = 3 + p$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Une pente lue sur les axes

Dans un repère cartésien, une droite D coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -3 et l'axe des abscisses au point d'abscisse 2. Déterminer le coefficient directeur de la droite D.

Donne le coefficient directeur m.

Réponse attendue : `3/2` — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite passe par deux points connus : $(0\,;-3)$ et $(2\,;0)$.
2. Le coefficient directeur est le quotient de la variation des ordonnées par celle des abscisses.

CORRECTION

Deux points — Les points d'intersection avec les axes.

$$(0\,;-3) \quad \text{et} \quad (2\,;0)$$

Le quotient — La variation des ordonnées, trois, sur celle des abscisses, deux.

$$m = \frac{0-(-3)}{2-0} = \frac{3}{2}$$

L'équation réduite de D est $y = \frac{3}{2}x - 3$. Quand x augmente de 2, y augmente de 3 : la droite monte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3/2 / -1.5` → La droite passe de -3 à 0 quand x passe de 0 à 2 : elle monte, sa pente est positive.

`2/3` → Tu as divisé la variation des abscisses par celle des ordonnées. C'est l'inverse.

EXERCICE 68 · PRATIQUE

Deux pentes égales

Dans un repère cartésien, pour tout réel m, on considère les droites $D_m : y = (3m-2)x + 1$ et $D'_m : y = (m+4)x - 5$. Déterminer le réel m pour lequel les droites D_m et D'_m sont parallèles.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles quand elles ont le même coefficient directeur.
2. Lis les deux coefficients directeurs, puis écris qu'ils sont égaux : c'est une équation du premier degré en m.

CORRECTION

Les coefficients directeurs — Le coefficient de x dans chaque équation réduite.

$$3m-2 \quad \text{et} \quad m+4$$

L'égalité — Les droites sont parallèles quand leurs pentes sont égales.

$$3m-2 = m+4 \iff 2m = 6$$

La valeur —

$m = 3$

Pour $m = 3$, les deux droites ont la pente 7 : $y = 7x + 1$ et $y = 7x - 5$. Leurs ordonnées à l'origine sont différentes : elles sont strictement parallèles. Parallèles : mêmes pentes ; l'ordonnée à l'origine ne joue aucun rôle.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → En passant -2 dans l'autre membre, il devient $+2$: $3m - m = 4 + 2$.

3/2 / 1.5 → On retranche m des deux membres : $3m - m = 2m$, et non $3m + m$.

EXERCICE 69 · RAISONNEMENT

Compléter un trapèze

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(-1\,;1)$, $B(3\,;3)$, $C(4\,;0)$ et $D(a\,;-1)$, où a est un réel. Déterminer le réel a pour lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles quand elles ont le même coefficient directeur.
2. Calcule le coefficient directeur de (AB), puis exprime celui de (CD) en fonction de a.
3. Tu obtiens $\dfrac{-1-0}{a-4} = \dfrac{1}{2}$: fais les produits en croix.

CORRECTION

La pente de (AB) — Deux sur quatre.

$$\frac{3-1}{3-(-1)} = \frac{1}{2}$$

La pente de (CD) — En fonction de a, avec a différent de quatre.

$$\frac{-1-0}{a-4} = \frac{-1}{a-4}$$

L'égalité — Les produits en croix.

$a - 4 = -2 \quad \text{donc} \quad a = 2$

$D(2\,;-1)$: (AB) et (CD) ont la même pente $\dfrac{1}{2}$, et $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$. Égaler deux pentes, c'est écrire un parallélisme.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Attention au signe : la variation des ordonnées de C à D vaut $-1 - 0 = -1$.

7/2 / 3.5 → La pente de (AB) est $\dfrac{2}{4}$, la variation des ordonnées sur celle des abscisses, et non l'inverse.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 70 · BASE

L'angle d'une droite

Dans un repère orthonormé, soit D la droite d'équation $y = \sqrt{3}\,x + 2$. Déterminer, en degrés, la mesure de l'angle aigu que fait la droite D avec l'axe des abscisses.

Donne la mesure de l'angle, en degrés.

Réponse attendue : `60`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un repère orthonormé, la tangente de l'angle aigu entre la droite et l'axe des abscisses est la valeur absolue de la pente.
2. Ici la pente vaut $\sqrt{3}$. Quel angle aigu a pour tangente $\sqrt{3}$?

CORRECTION

La pente — Le coefficient de x.

$m = \sqrt{3}$

La tangente — La tangente de l'angle aigu est la valeur absolue de la pente.

$\tan\alpha = \sqrt{3}$

L'angle —

$\alpha = 60°$

Retenir les valeurs : une pente 1 donne $45°$, une pente $\sqrt{3}$ donne $60°$, une pente $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donne $30°$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → $30°$ a pour tangente $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ici la tangente vaut $\sqrt{3}$.

`45` → $45°$ correspond à une pente égale à 1.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

Une droite à 45 degrés

Dans un repère orthonormé, une droite D passe par le point $A(2\,;-3)$; elle monte et fait avec l'axe des abscisses un angle aigu de $45°$. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite D.

Donne l'ordonnée à l'origine p.

Réponse attendue : `-5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La tangente de $45°$ vaut 1 : la pente vaut 1 ou -1.
2. La droite monte : sa pente est positive. Son équation réduite est de la forme $y = x + p$.
3. Utilise le point A pour trouver p.

CORRECTION

La pente — La droite monte, et la tangente de quarante-cinq degrés vaut un.

$m = 1$

Avec le point A — On remplace x par deux et y par moins trois.

$-3 = 2 + p$

La valeur —

$p = -5$

$D : y = x - 5$. Une droite qui monte a une pente positive, une droite qui descend une pente négative : l'angle seul ne donne que la valeur absolue.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1` → De $-3 = 2 + p$, on tire $p = -3 - 2$. Et la pente vaut bien 1 : la droite monte.

`-3` → -3 est l'ordonnée de A. L'ordonnée à l'origine est celle du point d'abscisse zéro.

EXERCICE 72 · RAISONNEMENT

Une droite qui descend

Dans un repère orthonormé, une droite D passe par le point $A(0\,;1)$; elle descend et fait avec l'axe des abscisses un angle aigu de $60°$. Calculer l'abscisse du point où la droite D coupe l'axe des abscisses.

Donne la valeur exacte de l'abscisse.

Réponse attendue : `sqrt(3)/3` — aussi acceptées : 1/sqrt(3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La tangente de $60°$ vaut $\sqrt{3}$, et la droite descend : quelle est sa pente ?
2. Le point A est sur l'axe des ordonnées : il donne directement l'ordonnée à l'origine.
3. Écris l'équation réduite, puis résous $y = 0$.

CORRECTION

La pente — La droite descend : la pente est négative.

$m = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

L'équation réduite — Elle passe par le point de coordonnées zéro et un.

$y = -\sqrt{3}\,x + 1$

Sur l'axe des abscisses — On résout y égale zéro.

$$-\sqrt{3}\,x + 1 = 0 \quad \text{donc} \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Le point est $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,;0\right)$, soit environ $(0{,}58\,;0)$. Dans le triangle formé avec l'origine, $\tan 60° = \frac{1}{x}$: on retrouve le même résultat.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-sqrt(3)/3 / -1/sqrt(3)` → La droite descend et passe par $(0\,;1)$: elle coupe l'axe des abscisses à droite de l'origine.

`sqrt(3)` → Tu as utilisé une pente de valeur absolue $\frac{\sqrt{3}}{3}$, celle de $30°$. Pour $60°$, c'est $\sqrt{3}$.

`0.6 / 0.5 / 0.58 / 0.57 / 0.577` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 73 · BASE

Deux pentes, un angle droit ?

Dans un repère orthonormé, on considère les droites $D : y = \frac{2}{3}x + 1$ et $D' : y = -\frac{3}{2}x + 5$. Les droites D et D' sont-elles perpendiculaires ?

Réponds par « oui » ou par « non ».

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles sont perpendiculaires · elles sont perpendiculaires · perpendiculaires · oui, elles sont perpendiculaires · oui perpendiculaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un repère orthonormé, deux droites de pentes m et m' sont perpendiculaires quand $mm' = -1$.
2. Calcule le produit des deux coefficients directeurs.

CORRECTION

Le produit — On multiplie les pentes.

$$\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

On conclut — Le produit vaut moins un : les droites sont perpendiculaires.

Les droites sont perpendiculaires : leurs pentes sont inverses l'une de l'autre et de signes contraires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elles ne sont pas perpendiculaires` → Refais le calcul : le produit $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$ vaut -1.

EXERCICE 74 · PRATIQUE

La perpendiculaire en équation réduite

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 4$ et le point $A(-2\,;3)$. Déterminer l'équation réduite de la droite D' passant par A et perpendiculaire à D.

Écris seulement l'expression en x, sans « $y =$ ».

Réponse attendue : `2x+7` — aussi acceptées : 7+2x

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient directeur m' de D' vérifie $m \times m' = -1$.
2. Avec $m = -\frac{1}{2}$, tu trouves $m' = 2$. Écris $y = 2x + p$.
3. Utilise le point A pour trouver p.

CORRECTION

La pente de D' — Le produit des pentes vaut moins un.

$$-\frac{1}{2} \times m' = -1 \quad \text{donc} \quad m' = 2$$

Avec le point A — On remplace x par moins deux et y par trois.

$$3 = 2 \times (-2) + p \quad \text{donc} \quad p = 7$$

L'équation réduite —

$$y = 2x + 7$$

On vérifie : $2 \times (-2) + 7 = 3$. Perpendiculaires : la pente de l'une est l'opposée de l'inverse de la pente de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

2x-1 → Attention : $2 \times (-2)$ vaut -4, donc $3 = -4 + p$.

-2x-1 → La pente de la perpendiculaire est l'**opposée de l'inverse** : $-\frac{1}{m}$ avec $m = -\frac{1}{2}$ donne 2.

-x/2+2 → C'est la parallèle à D passant par A. On demande la perpendiculaire.

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT

Où est l'angle droit ?

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(4\,;2)$. Le triangle ABC est rectangle : déterminer le sommet de son angle droit.

Donne le nom du sommet, par exemple « A ».

Réponse attendue : B — aussi acceptées : en B · rectangle en B · il est rectangle en B · le triangle est rectangle en B · ABC est rectangle en B · au point B · en B. · sommet B · le sommet B · le triangle ABC est rectangle en B · triangle ABC rectangle en B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les coefficients directeurs des trois côtés.
2. Deux côtés sont perpendiculaires quand le produit de leurs pentes vaut -1.
3. Le sommet de l'angle droit est le point commun des deux côtés perpendiculaires.

CORRECTION

Les trois pentes — Pour chaque côté, la variation des ordonnées sur celle des abscisses.

$$m_{(AB)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad m_{(BC)} = \frac{-2}{1} = -2 \quad ; \quad m_{(AC)} = 0$$

Le produit — Celui de (AB) et de (BC) vaut moins un.

$$\frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

Le sommet — Les côtés $[AB]$ et $[BC]$ se rencontrent en B.

Le triangle est rectangle en B. Contrôle par Pythagore : $AB^2 = 20$, $BC^2 = 5$, $AC^2 = 25 = 20 + 5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

A / en A → En A se rencontrent $[AB]$ et $[AC]$: le produit de leurs pentes vaut $\frac{1}{2} \times 0 = 0$, pas -1.

C / en C → En C se rencontrent $[CA]$ et $[CB]$: le produit de leurs pentes vaut $0 \times (-2) = 0$, pas -1.

EXERCICE 76 · BASE

Une image par une valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x - 6|$. Calculer $f(-1)$.

Donne la valeur de $f(-1)$.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord $3 \times (-1) - 6$, puis prends sa valeur absolue.
2. La valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé.

CORRECTION

L'intérieur — On remplace x par moins un.

$$3 \times (-1) - 6 = -9$$

La valeur absolue — Moins neuf est négatif : sa valeur absolue est neuf.

$$f(-1) = |-9| = 9$$

Une valeur absolue est toujours positive ou nulle. On calcule l'intérieur d'abord, entièrement.

PIÈGES ANTICIPÉS

-9 → Une valeur absolue n'est jamais négative : $|-9| = 9$.

-3 → La valeur absolue porte sur toute l'expression $3x - 6$: calcule d'abord $-3 - 6$.

EXERCICE 77 · PRATIQUE

Deux points à la même hauteur

Dans un repère orthonormé, soit $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x - 5|$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x) = 3$.

Écris l'ensemble des solutions entre accolades, par exemple « {1;5} ».

Réponse attendue : `{1;4}` — aussi acceptées : x=1 ou x=4 · x=4 ou x=1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux nombres ont pour valeur absolue 3 : 3 et -3.
2. Résous donc deux équations : $2x - 5 = 3$ et $2x - 5 = -3$.

CORRECTION

Deux cas — La valeur absolue vaut trois quand l'intérieur vaut trois ou moins trois.

$$2x - 5 = 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = -3$$

On résout — Deux équations du premier degré.

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

L'ensemble —

$S = \{1; 4\}$

La droite d'équation $y = 3$ coupe la courbe en V en deux points, d'abscisses 1 et 4, symétriques par rapport à la droite $x = \dfrac{5}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4}` → Il y a une deuxième solution : $|2x - 5| = 3$ quand $2x - 5 = -3$ aussi.

`{-4;4}` / `{-1;4}` → Résous $2x - 5 = -3$: on trouve $2x = 2$.

EXERCICE 78 · RAISONNEMENT

Sans les barres

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |-2x + 4|$. Pour tout réel x supérieur ou égal à 3, écrire $f(x)$ sans valeur absolue.

Écris seulement l'expression en x, sans « f(x) = ».

Réponse attendue : `2x-4` — aussi acceptées : `-4+2x` · `-(-2x+4)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le signe de $-2x + 4$ quand $x \geq 3$.
2. Si $x \geq 3$, alors $-2x \leq -6$: que dire de $-2x + 4$?
3. La valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé.

CORRECTION

Le signe — Pour x supérieur ou égal à trois, moins deux x plus quatre est négatif.

$$x \geq 3 \Longrightarrow -2x + 4 \leq -2 < 0$$

L'opposé — On prend l'opposé de l'intérieur.

$$f(x) = -(-2x + 4)$$

L'expression —

$$f(x) = 2x - 4$$

En fait $-2x + 4 < 0$ dès que $x > 2$: sur $[2\,;+\infty[$, la courbe de f est la demi-droite portée par $y = 2x - 4$. Pour enlever une valeur absolue, on étudie le signe de l'intérieur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2x+4` → Pour $x \geq 3$, $-2x + 4$ est négatif : sa valeur absolue est son opposé.

`2x+4` → L'opposé de $-2x + 4$ est $2x - 4$: on change le signe de **chaque** terme.

EXERCICE 79 · BASE

La distance à une droite verticale

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(-3\,;2)$ et la droite D d'équation $x - 4 = 0$. Calculer la distance du point A à la droite D.

Donne la distance.

Maths à la carte
ELYADER HAMMAMI

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite D est parallèle à l'axe des ordonnées : tous ses points ont pour abscisse 4.
2. Le projeté orthogonal de A sur D a la même ordonnée que A : il ne reste qu'à comparer les abscisses.
3. Tu peux aussi appliquer la formule avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = -4$.

CORRECTION

Le projeté — Le projeté orthogonal H de A sur D a pour abscisse quatre et pour ordonnée deux.

$H(4\,;2)$

La distance — La distance entre les abscisses.

$AH = |4 - (-3)| = 7$

Avec la formule — Le même résultat.

$$\frac{|-3-4|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 7$$

La distance d'un point à une droite est la distance de ce point à son projeté orthogonal sur la droite. Pour une droite verticale, c'est l'écart des abscisses.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Attention : l'abscisse de A est -3. L'écart entre -3 et 4 vaut 7.

2 → Deux est l'ordonnée de A. La droite est verticale : on compare les abscisses.

EXERCICE 80 · BASE

Appliquer la formule

Dans un repère orthonormé, calculer la distance du point $A(1\,;-2)$ à la droite D d'équation $3x + 4y - 5 = 0$.

Donne la distance.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule : la valeur absolue de $ax_A + by_A + c$, divisée par la racine carrée de $a^2 + b^2$.
2. Ici $a = 3$, $b = 4$ et $c = -5$: la racine carrée tombe juste.

CORRECTION

Le numérateur — On remplace x par un et y par moins deux.

$|3 \times 1 + 4 \times (-2) - 5| = |-10| = 10$

Le dénominateur — Neuf plus seize font vingt-cinq.

$\sqrt{3^2+4^2} = 5$

La distance —

$$d(A, D) = \frac{10}{5} = 2$$

La valeur absolue rend la distance positive : sans elle, on aurait trouvé -2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → Une distance est positive : n'oublie pas la valeur absolue au numérateur.

`10` → Dix est le numérateur. Il reste à diviser par $\sqrt{9+16}$.

`2/5 / 0.4` → On divise par la **racine carrée** de a^2+b^2, c'est-à-dire par 5, et non par 25.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Une droite donnée par un vecteur directeur

Dans un repère orthonormé, soit D la droite passant par le point $A(1\,;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de composantes 4 et 3. Calculer la distance du point $E(0\,;1)$ à la droite D.

Donne la distance.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche d'abord une équation cartésienne de D : le vecteur de composantes $-b$ et a doit être $\vec{u}$.
2. Avec $-b=4$ et $a=3$, une équation est de la forme $3x-4y+c=0$; le point A donne c.
3. Applique ensuite la formule de la distance avec le point E.

CORRECTION

Une équation de D — On prend a égale trois et b égale moins quatre, puis on écrit que A est sur D.

$$3\times 1-4\times(-2)+c=0 \quad \text{donc} \quad D : 3x-4y-11=0$$

Le numérateur — On remplace x par zéro et y par un.

$$|3\times 0-4\times 1-11|=|-15|=15$$

La distance — On divise par la racine carrée de neuf plus seize.

$$d(E,D)=\frac{15}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

La distance vaut 3. La formule de la distance demande une équation **cartésienne** : quand la droite est donnée par un point et un vecteur directeur, on commence par l'écrire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Tu as pris $\vec{u}$ comme vecteur **normal**. C'est un vecteur directeur : l'équation est de la forme $3x-4y+c=0$.

`15` → Quinze est le numérateur. Il reste à diviser par $\sqrt{9+16}=5$.

`-3` → Une distance est positive : n'oublie pas la valeur absolue au numérateur.

EXERCICE 82 · RAISONNEMENT

L'écart entre deux parallèles

Dans un repère orthonormé, on considère les droites parallèles $D : x+2y-3=0$ et $D' : x+2y+7=0$. Calculer la distance entre les droites D et D', c'est-à-dire la distance d'un point quelconque de D à la droite D'.

Donne la valeur exacte de la distance.

Réponse attendue : `2*sqrt(5)` — aussi acceptées : 10/sqrt(5) · sqrt(20)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Choisis un point simple sur D, par exemple celui d'ordonnée 0.
2. Calcule la distance de ce point à la droite D' avec la formule.
3. Le résultat ne dépend pas du point choisi : les droites sont parallèles.

CORRECTION

Un point de D — Avec y égale zéro, on trouve x égale trois.

$$E(3\,;0) \in D$$

La distance à D' — On applique la formule.

$$\frac{|3+2\times 0+7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

On simplifie — Dix sur racine de cinq.

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Pour deux droites $ax+by+c=0$ et $ax+by+c'=0$, la distance vaut $\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$: ici $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/sqrt(5) / 4*sqrt(5)/5` → Tu as calculé $|-3+7|$: le point de D a pour abscisse 3, et $3+7=10$.

`10` → Dix est le numérateur. Il reste à diviser par $\sqrt{5}$.

`4.5 / 4.4 / 4.47 / 4.472` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT

Régler la distance

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(1\,;1)$ et, pour tout réel c, la droite D_c d'équation $3x-4y+c=0$. Déterminer le réel c strictement positif pour lequel la distance du point A à la droite D_c est égale à 2.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : `11`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la distance de A à D_c avec la formule, en fonction de c.
2. Le dénominateur vaut $\sqrt{9+16}=5$: tu obtiens $\dfrac{|c-1|}{5}=2$.
3. Une valeur absolue égale à 10 : deux cas. Garde la valeur positive.

CORRECTION

La distance — On remplace x et y par un.

$$\frac{|3-4+c|}{5} = \frac{|c-1|}{5}$$

L'équation — La distance doit valoir deux.

$|c-1| = 10$

Deux cas — c moins un vaut dix ou moins dix.

$c = 11 \quad \text{ou} \quad c = -9$

La valeur positive —

$c = 11$

Il y a deux droites de cette direction à la distance 2 de A, une de chaque côté : $3x - 4y + 11 = 0$ et $3x - 4y - 9 = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-9` → -9 convient aussi pour la distance, mais on demande la valeur strictement positive.

`3` → N'oublie pas de diviser par $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$: $|c-1| = 10$, pas 2.

`10` → Le numérateur est $|3 - 4 + c|$, c'est-à-dire $|c-1|$: il faut $c - 1 = 10$.

EXERCICE 84 · DEFI

L'aire par la distance

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(0\,;4)$, $B(-2\,;0)$ et $C(5\,;1)$. En prenant $[BC]$ pour base et la distance de A à la droite (BC) pour hauteur, calculer l'aire du triangle ABC.

Donne l'aire, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `13`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule la longueur BC, puis cherche une équation de la droite (BC).
2. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour composantes 7 et 1 : une équation de (BC) est de la forme $x - 7y + c = 0$.
3. Calcule la distance de A à (BC), puis l'aire : la moitié de la base fois la hauteur.

CORRECTION

La base — On calcule BC.

$BC = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

La droite (BC) — Elle passe par B : moins deux plus c égale zéro.

$(BC) : x - 7y + 2 = 0$

La hauteur — La distance de A à (BC).

$$\frac{|0 - 28 + 2|}{\sqrt{1 + 49}} = \frac{26}{5\sqrt{2}}$$

L'aire — La moitié de la base fois la hauteur.

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times \frac{26}{5\sqrt{2}} = 13$$

Les racines se simplifient : l'aire vaut 13 unités d'aire. La distance d'un point à une droite donne la hauteur d'un triangle sans tracer le pied de la hauteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`26` → Tu as oublié de diviser par 2 : l'aire d'un triangle est la moitié de la base fois la hauteur.

EXERCICE 85 · DEFI

Sur l'axe, à distance donnée

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $4x - 3y + 2 = 0$. Deux points de l'axe des abscisses sont à la distance 3 de la droite D. Calculer l'abscisse de celui des deux qui a une abscisse positive.

Donne l'abscisse positive.

Réponse attendue : `13/4` — aussi acceptées : 3.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point de l'axe des abscisses a des coordonnées de la forme x et 0.
2. Écris sa distance à D avec la formule : $\dfrac{|4x + 2|}{5}$.
3. Résous $|4x + 2| = 15$: deux cas, garde la solution positive.

CORRECTION

La distance — Pour le point M de coordonnées x et zéro.

$$d(M, D) = \frac{|4x - 0 + 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|4x + 2|}{5}$$

L'équation — La distance vaut trois.

$$|4x + 2| = 15$$

Deux cas — Quatre x plus deux vaut quinze ou moins quinze.

$$x = \frac{13}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{17}{4}$$

La solution positive —

$$x = \frac{13}{4}$$

Les deux points sont $\left(\frac{13}{4} ; 0\right)$ et $\left(-\frac{17}{4} ; 0\right)$, de part et d'autre du point où D coupe l'axe, d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-17/4 / -4.25` → C'est l'autre point, d'abscisse négative. On demande celui d'abscisse positive.

`1/4 / 0.25` → N'oublie pas le dénominateur $\sqrt{16 + 9} = 5$: $|4x + 2| = 15$, pas 3.

EXERCICE 86 · DEFI

Un cercle entre deux parallèles

Dans un repère orthonormé, on considère les droites $D : 3x + 4y - 5 = 0$ et $D' : 3x + 4y + 15 = 0$. Un cercle est tangent à la fois à D et à D'. Calculer son rayon.

Donne le rayon.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les droites sont parallèles. Un cercle tangent aux deux a son diamètre égal à la distance entre elles.
2. Prends un point simple de D, par exemple celui d'ordonnée 2 — son abscisse est -1 — et calcule sa distance à D'.
3. Le rayon est la moitié de cette distance.

CORRECTION

Un point de D — Pour y égale deux, trois x plus trois égale zéro.

$$E(-1\,;2) \in D$$

La distance — La distance de E à D'.

$$\frac{|-3+8+15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{20}{5} = 4$$

Le rayon — La moitié de l'écart entre les deux droites.

$$R = \frac{4}{2} = 2$$

Le centre du cercle est sur la droite parallèle à mi-chemin, $3x+4y+5=0$, et son rayon vaut 2. Le diamètre d'un cercle tangent à deux parallèles est l'écart entre elles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → Quatre est l'écart entre les deux droites : c'est le **diamètre** du cercle.

`20 / 10` → Il faut diviser par $\sqrt{3^2+4^2}=5$ pour obtenir une distance.

EXERCICE 87 · PRATIQUE

Développer l'équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $I(-2\,;3)$ et de rayon 4 a une équation de la forme $x^2+y^2+4x-6y+c=0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'équation du cercle sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
2. Développe les deux carrés et passe R^2 dans le premier membre.
3. Le réel c est la somme des termes constants.

CORRECTION

L'équation — Centre de coordonnées moins deux et trois, rayon quatre.

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16$$

On développe — Les deux identités remarquables.

$$x^2+4x+4+y^2-6y+9-16=0$$

Le réel c — Quatre plus neuf moins seize.

$c = -3$

L'équation développée est $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$. On vérifie avec le point $(2\,;3)$ du cercle : $4 + 9 + 8 - 18 - 3 = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → C'est le carré du rayon, 16, qu'il faut retrancher, et non le rayon 4.

29 → Le carré du rayon passe dans le premier membre avec un signe moins : $4 + 9 - 16$.

3 → Quatre plus neuf moins seize vaut -3.

EXERCICE 88 · PRATIQUE

Un cercle de diamètre donné

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2\,;5)$ et $B(6\,;-1)$. Calculer le rayon du cercle de diamètre $[AB]$.

Donne le rayon.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre du cercle de diamètre $[AB]$ est le milieu de $[AB]$, et son rayon la moitié de AB.
2. Calcule AB : la racine carrée de la somme des carrés des écarts de coordonnées.

CORRECTION

La longueur AB — Huit au carré plus six au carré.

$AB = \sqrt{(6+2)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{100} = 10$

Le rayon — La moitié du diamètre.

$R = 5$

Le centre est le milieu $I(2\,;2)$, et le cercle a pour équation $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$.

PIÈGES ANTICIPÉS

10 → Dix est la longueur AB, le **diamètre**. Le rayon en est la moitié.

25 → Vingt-cinq est le carré du rayon. Le rayon est sa racine carrée.

EXERCICE 89 · PRATIQUE

Le rayon caché

Dans un repère orthonormé, l'ensemble des points de coordonnées x et y vérifiant $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$ est un cercle. Déterminer son rayon.

Donne le rayon.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais apparaître des carrés : $x^2 + 6x$ est le début de $(x+3)^2$.

2. De même, $y^2 - 2y$ est le début de $(y-1)^2$. N'oublie pas de retrancher les carrés ajoutés.
3. Mets l'équation sous la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

CORRECTION

Les carrés — On complète chaque carré.

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9 \quad ; \quad y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$$

La forme canonique — Moins neuf moins un moins six : on passe seize dans l'autre membre.

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Le rayon —

$$R = 4$$

Le cercle a pour centre $(-3\,;1)$ et pour rayon 4. Pour reconnaître un cercle : forme canonique, puis second membre strictement positif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → Seize est le carré du rayon. Le rayon est sa racine carrée.

`sqrt(6)` → Le terme constant -6 n'est pas le carré du rayon : il faut d'abord compléter les carrés.

`sqrt(15)` → Tu as oublié de retrancher un des carrés ajoutés : $9 + 1 + 6 = 16$.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Choisir le rayon

Dans un repère orthonormé, pour tout réel k, on considère l'ensemble $\mathscr{C}_k$ des points de coordonnées x et y vérifiant $x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$. Déterminer le réel k pour lequel $\mathscr{C}_k$ est un cercle de rayon 3.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mets l'équation sous forme canonique : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \ldots$
2. Le second membre doit être égal au carré du rayon, ici 9.
3. Tu obtiens $5 - k = 9$.

CORRECTION

La forme canonique — On complète les carrés : moins quatre et moins un.

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$$

La condition — Le second membre est le carré du rayon.

$$5 - k = 9$$

La valeur —

$$k = -4$$

Pour $k = -4$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. Et en général, $\mathscr{C}_k$ est un cercle si $k < 5$, un point si $k = 5$, et vide si $k > 5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Le second membre $5 - k$ est le **carré** du rayon : il doit valoir 9, pas 3.

14 / 4 → De $5 - k = 9$, on tire $k = 5 - 9$.

EXERCICE 91 · DEFI

Deux fois plus loin

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $B(3\,;0)$. L'ensemble des points M du plan tels que $MO = 2MB$ est un cercle. Déterminer son rayon.

Donne le rayon.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux distances positives sont égales quand leurs carrés le sont : écris $MO^2 = 4MB^2$.
2. Avec $M(x\,;y)$, développe : $x^2 + y^2 = 4\left[(x-3)^2 + y^2\right]$.
3. Regroupe tout dans un membre, divise par 3, puis mets sous forme canonique.

CORRECTION

Les carrés — On élève au carré.

$$x^2 + y^2 = 4(x-3)^2 + 4y^2$$

On regroupe — On passe tout à droite, et on divise par trois.

$$3x^2 + 3y^2 - 24x + 36 = 0 \iff x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$

La forme canonique — On complète le carré en x.

$$(x-4)^2 + y^2 = 4$$

Le rayon —

$$R = 2$$

C'est le cercle de centre $(4\,;0)$ et de rayon 2. Il passe par $(2\,;0)$ et $(6\,;0)$: pour le premier, $MO = 2$ et $MB = 1$. On traduit la condition en coordonnées, puis on reconnaît un cercle.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Quatre est le carré du rayon. Le rayon est sa racine carrée.

EXERCICE 92 · RAISONNEMENT

La tangente en un point

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(1\,;2)$ passant par le point $A(4\,;6)$. La tangente à $\mathscr{C}$ au point A a une équation de la forme $3x + 4y + c = 0$. Déterminer le réel c.

Donne la valeur de c.

Réponse attendue : -36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La tangente au cercle en A est perpendiculaire au rayon $[IA]$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{IA}$, de composantes 3 et 4, est donc normal à la tangente : d'où la forme proposée.
3. La tangente passe par A : remplace ses coordonnées.

CORRECTION

Le vecteur normal — On calcule les composantes de $\overrightarrow{IA}$.

$$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Avec le point A — La tangente passe par A.

$$3\times 4+4\times 6+c=0$$

Le réel c — Douze plus vingt-quatre.

$$c=-36$$

La tangente en A a pour équation $3x+4y-36=0$. Contrôle : la distance de I à cette droite vaut $\dfrac{|3+8-36|}{5}=5=IA$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-11 → Ta droite passe par le centre I. La tangente passe par le point de contact A.

36 → On a $36+c=0$: c'est $c=-36$.

EXERCICE 93 · DEFI

Deux tangentes de même pente

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2=5$, et, pour tout réel p, la droite D_p d'équation $y=2x+p$. Déterminer le réel p strictement positif pour lequel la droite D_p est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

Donne la valeur de p.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cercle a pour centre O et pour rayon $\sqrt{5}$.
2. La droite est tangente quand la distance de O à D_p est égale au rayon. Écris d'abord D_p sous la forme $2x-y+p=0$.
3. Tu obtiens $\dfrac{|p|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

CORRECTION

Le centre et le rayon — On lit l'équation.

$$O(0\,;0)\quad ;\quad R=\sqrt{5}$$

La distance — Avec l'équation cartésienne deux x moins y plus p égale zéro.

$$d(O,D_p)=\frac{|p|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|p|}{\sqrt{5}}$$

La condition — La distance est égale au rayon.

$$\frac{|p|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \iff |p| = 5$$

La valeur positive —

$p = 5$

Les deux tangentes de pente 2 sont $y = 2x + 5$ et $y = 2x - 5$; la première touche le cercle au point $(-2\,;1)$. Tangente : distance du centre égale au rayon.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(5)` → Il faut $\frac{|p|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$: on multiplie par $\sqrt{5}$, et $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

`25` → De $|p| = \sqrt{5} \times \sqrt{5}$, on tire $|p| = 5$, pas 25.

`-5` → -5 donne aussi une tangente, mais on demande la valeur strictement positive.

EXERCICE 94 · BASE

La droite touche-t-elle le cercle ?

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le cercle de centre O et de rayon 4, et la droite D d'équation $x + y - 6 = 0$. Quelle est la position de la droite D par rapport au cercle : sécante, tangente ou extérieure ?

Réponds par un mot : sécante, tangente ou extérieure.

Réponse attendue : `extérieure` — aussi acceptées : exterieure · elle est extérieure · extérieure au cercle · D est extérieure au cercle · la droite est extérieure au cercle · D est extérieure · elle est extérieure au cercle · extérieur · exterieur · la droite D est extérieure · aucun point commun · pas de point commun · elle ne coupe pas le cercle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare la distance du centre O à la droite D avec le rayon.
2. La distance vaut $\frac{|0 + 0 - 6|}{\sqrt{1 + 1}}$. Est-elle plus petite, égale ou plus grande que 4 ?

CORRECTION

La distance — On applique la formule avec le centre O.

$$d(O, D) = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

On compare — Trois racine de deux vaut environ quatre virgule vingt-quatre, plus que le rayon.

$3\sqrt{2} > 4$

La distance du centre à la droite dépasse le rayon : la droite et le cercle n'ont aucun point commun.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sécante / secante / elle est sécante` → La droite serait sécante si la distance du centre était plus petite que le rayon. Or $3\sqrt{2}$, environ $4{,}24$, est plus grand que 4.

`tangente / elle est tangente` → La droite serait tangente si la distance du centre était égale au rayon. Compare $3\sqrt{2}$ et 4 : leurs carrés valent 18 et 16.

EXERCICE 95 · DEFI

La corde d'un cercle

Dans un repère orthonormé, la droite D d'équation $y = x + 2$ coupe le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 10$ en deux points E et F. Calculer la longueur EF.

Donne la valeur exacte de la longueur EF.

Réponse attendue : `4*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(32)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points communs vérifient les deux équations : remplace y par $x + 2$ dans celle du cercle.
2. Tu obtiens une équation du second degré en x : $2x^2 + 4x - 6 = 0$.
3. Calcule les deux points, puis la distance entre eux.

CORRECTION

On remplace — Dans l'équation du cercle.

$$x^2 + (x+2)^2 = 10 \iff 2x^2 + 4x - 6 = 0$$

On résout — On divise par deux : x carré plus deux x moins trois, de racines un et moins trois.

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

Les points — On calcule y égale x plus deux.

$$E(1\,;3) \quad ; \quad F(-3\,;-1)$$

La longueur — Seize plus seize.

$$EF = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Contrôle : la distance du centre O à D vaut $\sqrt{2}$, et $\left(\frac{EF}{2}\right)^2 + 2 = 8 + 2 = 10 = R^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`32` → Trente-deux est le carré de la longueur. La longueur est sa racine carrée.

`5.7 / 5.6 / 5.66 / 5.65 / 5.657 / 5.656` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

`2*sqrt(10)` → C'est le diamètre du cercle. La droite ne passe pas par le centre : la corde est plus courte.

EXERCICE 96 · DEFI

Une tangente par l'origine

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $(x-4)^2 + y^2 = 4$, et, pour tout réel m, la droite D_m d'équation $y = mx$. Déterminer le réel m strictement positif pour lequel la droite D_m est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

Donne la valeur exacte de m.

Réponse attendue : `sqrt(3)/3` — aussi acceptées : 1/sqrt(3) · sqrt(1/3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cercle a pour centre $I(4\,;0)$ et pour rayon 2. Écris D_m sous la forme $mx - y = 0$.

2. La droite est tangente quand $d(I, D_m) = 2$, c'est-à-dire $\dfrac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$.

3. Élève au carré pour faire disparaître la racine et la valeur absolue.

CORRECTION

La distance — Avec mx moins y égale zéro et le centre de coordonnées quatre et zéro.

$$d(I, D_m) = \frac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

La condition — On élève au carré l'égalité avec le rayon.

$$16m^2 = 4(m^2+1) \iff m^2 = \frac{1}{3}$$

La valeur positive —

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La pente $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ correspond à un angle de $30°$: dans le triangle formé par O, le centre et le point de contact, $\sin \widehat{IOT} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → Un tiers est le **carré** de m. Il reste à prendre la racine carrée.

`sqrt(3)` → Avec $m = \sqrt{3}$, la distance vaut $\dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, pas 2.

`0.6 / 0.5 / 0.58 / 0.57 / 0.577` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 97 · PRATIQUE

Le cercle par trois points

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $A(4\,;0)$ et $B(0\,;-6)$. Calculer le rayon du cercle passant par les points O, A et B.

Donne la valeur exacte du rayon.

Réponse attendue : `sqrt(13)` — aussi acceptées : sqrt(52)/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre est à l'intersection des médiatrices de $[OA]$ et de $[OB]$.
2. La médiatrice de $[OA]$ est la droite $x = 2$; celle de $[OB]$ est la droite $y = -3$.
3. Calcule la distance du centre à O.

CORRECTION

Les médiatrices — Les segments sont sur les axes.

$$x = 2 \quad ; \quad y = -3$$

Le centre — Leur point commun.

$$\Omega(2\,;-3)$$

Le rayon — La distance du centre à l'origine.

$R = \Omega O = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

Le triangle OAB est rectangle en O : le centre est le milieu de l'hypoténuse $[AB]$, et le rayon vaut $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → Treize est le carré du rayon. Le rayon est sa racine carrée.

`2*sqrt(13) / sqrt(52)` → C'est la longueur AB, le diamètre. Le rayon en est la moitié.

`3.6 / 3.61 / 3.60 / 3.606 / 3.605` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 98 · RAISONNEMENT

Quatre points sur un cercle ?

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1\,;0)$, $B(3\,;0)$, $C(0\,;3)$ et $D(2\,;3)$. Les points A, B, C et D sont-ils cocycliques ?

Réponds par « oui » ou par « non ».

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui ils sont cocycliques · ils sont cocycliques · cocycliques · oui, ils sont cocycliques · oui cocycliques

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le centre du cercle passant par trois des points : l'intersection de deux médiatrices.
2. La médiatrice de $[AB]$ est la droite $x = 1$, celle de $[CD]$ aussi : prends plutôt $[AB]$ et $[AC]$, ou cherche un point $I(1\,;b)$ tel que $IA = IC$.
3. Calcule enfin la distance du centre au quatrième point.

CORRECTION

Le centre — Il est sur la médiatrice x égale un : on cherche $I(1\,;b)$ avec $IA^2 = IC^2$.

$4 + b^2 = 1 + (3-b)^2 \iff 6b = 6 \iff b = 1$

Le rayon — Le carré de la distance de $I(1\,;1)$ à A.

$IA^2 = 4 + 1 = 5$

Le point D — On calcule ID^2.

$ID^2 = (2-1)^2 + (3-1)^2 = 5$

On conclut — Les quatre points sont sur le cercle de centre I et de rayon racine de cinq.

Les points sont cocycliques, sur le cercle $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$. On pouvait le prévoir : $ABDC$ est un trapèze isocèle, symétrique par rapport à la droite $x = 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non ils ne sont pas cocycliques` → Calcule ID^2 avec $I(1\,;1)$: on trouve $1 + 4 = 5$, comme IA^2.

EXERCICE 99 · DEFI

Le quatrième point

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2\,;0)$, $B(-4\,;0)$ et $C(0\,;4)$, et le point $D(m\,;2)$, où m est un réel. Déterminer le réel m strictement positif pour lequel les points A, B, C et D sont cocycliques.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le cercle passant par A, B et C : son centre est sur la médiatrice de $[AB]$, la droite $x = -1$.
2. Cherche le centre $I(-1\,;b)$ tel que $IA^2 = IC^2$, puis le carré du rayon.
3. Écris enfin que ID^2 est égal au carré du rayon : équation du second degré en m.

CORRECTION

Le centre — On écrit $IA^2 = IC^2$ avec $I(-1\,;b)$.

$9 + b^2 = 1 + (4-b)^2 \iff 8b = 8 \iff b = 1$

Le rayon — Le carré de la distance de $I(-1\,;1)$ à A.

$R^2 = 9 + 1 = 10$

Le point D — On écrit $ID^2 = 10$.

$(m+1)^2 + 1 = 10 \iff (m+1)^2 = 9$

La valeur positive — m plus un vaut trois ou moins trois.

$m = 2 \quad \text{ou} \quad m = -4 \quad ; \quad m = 2$

Pour $m = 2$, $D(2\,;2)$ est sur le cercle $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$. L'autre valeur, -4, donne le point $(-4\,;2)$, symétrique de D par rapport à la droite $x = -1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → -4 convient aussi, mais on demande la valeur strictement positive.

8 → De $(m+1)^2 = 9$, on tire $m + 1 = 3$ ou $m + 1 = -3$: il faut prendre la racine carrée.

EXERCICE 100 · BASE

Dedans ou dehors ?

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ et le point $A(2\,;0)$. Le point A est-il à l'intérieur du cercle, sur le cercle ou à l'extérieur du cercle ?

Réponds par : à l'intérieur, sur le cercle ou à l'extérieur.

Réponse attendue : `à l'intérieur` — aussi acceptées : intérieur · interieur · il est à l'intérieur · A est à l'intérieur · à l'intérieur du cercle · A est à l'intérieur du cercle · a l interieur · il est à l'intérieur du cercle · A est intérieur au cercle · intérieur au cercle · il est intérieur · le point A est à l'intérieur du cercle · dedans

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mets l'équation sous forme canonique pour lire le centre et le carré du rayon.
2. Compare ensuite le carré de la distance du centre à A avec le carré du rayon.

CORRECTION

La forme canonique — On complète les carrés.

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

Le point A — On remplace x par deux et y par zéro dans le premier membre.

$$(2-1)^2+(0+2)^2=5$$

On compare — Cinq est plus petit que neuf.

$$5<9$$

Le point A est à l'intérieur du cercle. Plus rapide : en remplaçant dans $x^2+y^2-2x+4y-4$, on trouve -4, négatif : c'est l'intérieur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`à l'extérieur / extérieur / exterieur / il est à l'extérieur` → Le point serait à l'extérieur si IA^2 était plus grand que R^2. Or 5 est plus petit que 9.

`sur le cercle / il est sur le cercle` → Le point serait sur le cercle si IA^2 était égal à R^2. Or 5 n'est pas égal à 9.

EXERCICE 101 · RAISONNEMENT

Des entiers à l'intérieur

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de centre $I(2\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{13}$, et, pour tout entier k, le point $A_k(k\,;1)$. Combien y a-t-il d'entiers k pour lesquels le point A_k est strictement à l'intérieur du cercle ?

Donne le nombre d'entiers.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point A_k est strictement à l'intérieur quand $IA_k^2<13$.
2. Calcule IA_k^2 en fonction de k : $(k-2)^2+4$.
3. Tu obtiens $(k-2)^2<9$, c'est-à-dire $-3<k-2<3$. Compte les entiers.

CORRECTION

La condition — Le carré de la distance au centre est plus petit que treize.

$$(k-2)^2+(1+1)^2<13$$

On simplifie — On retranche quatre.

$$(k-2)^2<9 \iff -3<k-2<3$$

L'encadrement — On ajoute deux.

$$-1<k<5$$

Les entiers — Zéro, un, deux, trois et quatre.

$$5$$

Pour $k=-1$ et $k=5$, le point est **sur** le cercle : $IA_k^2=9+4=13$. « Strictement à l'intérieur » exclut ces deux valeurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → Pour $k = -1$ et $k = 5$, $IA_k^2 = 13$: le point est sur le cercle, pas strictement à l'intérieur.

`25` → Le rayon vaut $\sqrt{13}$, pas 13 : la condition est $IA_k^2 < 13$, et non $IA_k < 13$.

EXERCICE 102 · RAISONNEMENT

Trois droites, un point

Dans un repère cartésien, on considère les droites $D_1 : x + y - 2 = 0$, $D_2 : 2x - y - 7 = 0$ et, pour tout réel m, la droite $D_3 : mx + 3y + 5 = 0$. Déterminer le réel m pour lequel les trois droites sont concourantes.

Donne la valeur de m, sous forme de fraction.

Réponse attendue : `-2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois droites sont concourantes quand elles passent par un même point.
2. Calcule d'abord le point d'intersection de D_1 et de D_2 : additionne les deux équations.
3. Écris ensuite que ce point appartient à D_3.

CORRECTION

D1 et D2 — En additionnant les équations, trois x moins neuf égale zéro.

$x = 3 \quad ; \quad y = 2 - 3 = -1$

Le point dans D3 — On remplace x par trois et y par moins un.

$3m - 3 + 5 = 0$

La valeur —

$m = -\dfrac{2}{3}$

Pour $m = -\dfrac{2}{3}$, les trois droites passent par le point $(3\,;-1)$. Méthode : l'intersection de deux d'entre elles, puis l'appartenance à la troisième.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-0.7` / `-0.6` / `-0.67` / `-0.66` / `-0.667` / `-0.666` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, sous forme de fraction.

`2/3` → De $3m + 2 = 0$, on tire $3m = -2$.

`-8/3` → Attention : $3y$ avec $y = -1$ vaut -3. On obtient $3m - 3 + 5 = 0$.

EXERCICE 103 · DEFI

Le triangle de trois droites

Dans un repère orthonormé, les droites $D_1 : x - y + 2 = 0$, $D_2 : x + y - 8 = 0$ et $D_3 : y + 2 = 0$ forment un triangle. Calculer l'aire de ce triangle.

Donne l'aire, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 49

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les trois sommets : chacun est l'intersection de deux des droites.
2. Deux des sommets sont sur la droite D_3, horizontale : la base est facile à mesurer.
3. La hauteur est l'écart des ordonnées entre le troisième sommet et la droite D_3.

CORRECTION

Les sommets — Les intersections deux à deux.

$D_1 \cap D_2 : (3\,;5) \quad ; \quad D_1 \cap D_3 : (-4\,;-2) \quad ; \quad D_2 \cap D_3 : (10\,;-2)$

La base — Sur la droite horizontale D_3.

$$10 - (-4) = 14$$

La hauteur — De l'ordonnée moins deux à l'ordonnée cinq.

$$5 - (-2) = 7$$

L'aire — La moitié de la base fois la hauteur.

$$\frac{14 \times 7}{2} = 49$$

L'aire vaut 49 unités d'aire. De plus, D_1 et D_2 ont pour pentes 1 et -1 : le triangle est rectangle en $(3\,;5)$, et isocèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

98 → Tu as oublié de diviser par 2 : l'aire d'un triangle est la moitié de la base fois la hauteur.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI