— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Homothéties

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro huit : homothéties. Ba3d la translation elli tzalla9 el figure, lyoum bech nchoufou application tkabber el figure walla tsaghgharha, men ghir ma tbaddel ech-chakl mte3ha. Ne5tarou point I, houwa le centre, w réel k non nul, houwa le rapport : el point M yemchi l M prime, w le vecteur IM prime égale k fois le vecteur IM. Bech nchoufou la propriété caractéristique, l'image mta3 droite w mta3 cercle, w chnowa t7afedh 3lih l'homothétie : l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles w le parallélisme. W nkammlou b des problèmes de construction w des problèmes de lieu.

عسلامة ! الـ chapitre numéro huit : homothéties . بعد la translation اللي تزلّق الـ figure ، ليوم باش نشوفو application تكبّر الـ figure ولّا تصغّرها ، من غير ما تبدّل الشكل متاعها . نختارو point I ، هو le centre ، w réel k non nul ، هو le rapport : الـ point M يمشي لـ I M prime égale k fois le vecteur I M ، w le vecteur I M prime . باش نشوفو l'image متاع la propriété caractéristique ، w متاع droite w cercle ، شنوّة تحافظ عليه l'homothétie : l'alignement ، le milieu ، le barycentre ، les angles w le parallélisme . w نكمّلو بـ des problèmes de construction w des problèmes de lieu .

Bonjour ! Le chapitre numéro huit : homothéties. Après la translation, qui fait glisser une figure, nous allons voir aujourd'hui une application qui agrandit la figure ou la réduit, sans changer sa forme. On choisit un point I, le centre, et un réel k non nul, le rapport : le point M va en M prime, et le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M. Nous verrons la propriété caractéristique, l'image d'une droite et d'un cercle, et ce que l'homothétie conserve : l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles et le parallélisme. Et nous terminerons par des problèmes de construction et des problèmes de lieu.

Agrandir ou réduire une figure sans la déformer, à partir d'un point fixe : c'est une **homothétie**. Chaque point s'éloigne ou se rapproche du centre dans le même rapport.

On définit l'homothétie de centre I et de rapport k par l'égalité $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$, puis on étudie sa propriété caractéristique, les images des figures usuelles et ce qu'elle conserve. Elle devient alors un outil pour prouver des alignements, construire des figures et chercher des lieux géométriques.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Construire l'image et l'antécédent d'un point par une homothétie de centre I et de rapport k

  > Construire l'image et l'antécédent d'un point par une homothétie de centre I et de rapport k.
  > *Construire l'image et l'antécédent d'un point par une homothétie de centre I et de rapport k.*

- Reconnaître une homothétie, trouver son centre et son rapport

  > Reconnaître une homothétie, trouver son centre et son rapport.
  > *Reconnaître une homothétie, trouver son centre et son rapport.*

- Utiliser la propriété caractéristique $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ et ses conséquences

  > Utiliser la propriété caractéristique, le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur M N, et ses conséquences.
  > *Utiliser la propriété caractéristique, le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur M N, et ses conséquences.*

- Déterminer l'image d'une droite, d'un segment et d'un cercle, et utiliser ce que l'homothétie conserve

  > Déterminer l'image d'une droite, d'un segment et d'un cercle, et utiliser ce que l'homothétie conserve.
  > *Déterminer l'image d'une droite, d'un segment et d'un cercle, et utiliser ce que l'homothétie conserve.*

- Calculer des périmètres et des aires de figures homothétiques, résoudre des problèmes de construction et de lieu

  > Calculer des périmètres et des aires de figures homothétiques, et résoudre des problèmes de construction et de lieu.
  > *Calculer des périmètres et des aires de figures homothétiques, et résoudre des problèmes de construction et de lieu.*

1. ACTIVITÉ

Rappels

CE QU'IL DIT

Nabdew b tadhkir. 3andna zouz points A w B, w réel k, w el point M elli y7a99e9 : le vecteur AM égale k fois le vecteur AB. M dima 3la la droite AB. Ken k négatif, M yji fej-jiha lo5ra mta3 A, mouch jihet B. Ken k bin zéro w un, M 3la le segment AB. W ken k akbar men un, M yfout B. W fel 7alet el koll, la distance AM égale la valeur absolue de k fois AB. Chedd es-soura hedhi fi belek : biha bech n3arrfou l'homothétie.

نبداو بتذكير . عندنا زوز points A w B ، w réel k ، w اللي يحقّق point M الـ le vecteur A M égale k fois le : vecteur A B . M ديما على la droite A B . كان M ، k négatif يجي في الجهة الأخرى متاع A ، موش جهة B . كان k

بين M و zéro w un ، على le segment A B . w كان k أكبر من M ، un يفوت w . B في الحالات الكل ، la distance A
. l'homothétie نعرّفو بيها باش : شدّ الصورة هذي في بالك . M égale la valeur absolue de k fois A B

Commençons par un rappel. On a deux points A et B, un réel k, et le point M qui vérifie : le vecteur A M égale k fois le vecteur A B. M est toujours sur la droite A B. Si k est négatif, M est de l'autre côté de A, pas du côté de B. Si k est entre zéro et un, M est sur le segment A B. Et si k est plus grand que un, M dépasse B. Dans tous les cas, la distance A M égale la valeur absolue de k fois A B. Garde cette image en tête : c'est avec elle qu'on va définir l'homothétie.

Soient A et B deux points distincts d'une droite, k un réel et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$. Le point M est sur la droite (AB), et la valeur de k dit où :

- si $k < 0$, M est sur la demi-droite d'origine A qui ne contient pas B ;
- si $0 \leq k \leq 1$, M est sur le segment $[AB]$;
- si $k > 1$, M est sur la demi-droite $[AB)$, au-delà de B.

Dans tous les cas, $AM = |k| \times AB$.

On rappelle aussi que trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Le signe et la taille du coefficient placent le point sur la droite (AB).

Une droite sur laquelle sont placés, de gauche à droite, les points E, A, F, B et G. AB mesure 4 unités. E est à 2 unités à gauche de A (coefficient moins un demi), F est entre A et B à 1 unité de A (coefficient un quart), G est à 2 unités à droite de B (coefficient trois demis).

M EST SUR LA DROITE (AB)

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points tels que $AB = 4$. On place les points E, F et G tels que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égal à $-\frac{1}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$, le vecteur $\overrightarrow{AF}$ à $\frac{1}{4}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$, et le vecteur $\overrightarrow{AG}$ à $\frac{3}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Situer ces trois points et calculer les distances AE, AF et AG.

Le point E — Le coefficient est négatif : E est de l'autre côté de A par rapport à B. Sa distance à A est la moitié de AB.

$AE = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

Le point F — Le coefficient est entre 0 et 1 : F est sur le segment $[AB]$, au quart à partir de A.

$AF = \frac{1}{4} \times 4 = 1$

Le point G — Le coefficient est plus grand que 1 : G est au-delà de B.

$AG = \frac{3}{2} \times 4 = 6$

$$AE = 2 \quad ; \quad AF = 1 \quad ; \quad AG = 6$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, donc M est entre A et B — M est au-delà de B, sur la demi-droite $[AB)$. Le coefficient est plus grand que 1 : la distance AM dépasse la distance AB.

---

2. ACTIVITÉ

Pour comprendre : agrandir une figure

CE QU'IL DIT

Bech nefhmou, ne5dhou trapèze ABCD fi quadrillage, w point I. L koll sommet, nadhrbou fi deux el vecteur elli yo5rej men I : le vecteur IA prime égale deux fois le vecteur IA, w kif kif l B w C w D. Chouf el trapèze ej-jdid A prime B prime C prime D prime. Les côtés mte3ou parallèles l les côtés mta3 ABCD. Koll longueur tetdhrab fi deux, donc le périmètre zeda. Ama l'aire, tetdhrab fi quatre. El figure kebret, men ghir ma yetbaddel ech-chakl mte3ha : hedha elli bech nsammiweh homothétie.

باش نفهمو ، ناخذو trapèze A B C D في point I ، w quadrillage . لكل sommet ، نضربو في deux الـ vecteur اللي يخرج من I : le vecteur I A prime égale deux fois le vecteur I A ، w كيف كيف لـ I B w C w D . شوف الـ trapèze الجديد A prime B prime C prime D prime . les côtés متاعو parallèles لـ les côtés متاع A B C D . كل longueur تتضرب في deux ، donc le périmètre زادة . أما l'aire ، تتضرب في quatre . الـ figure كبرت ، من غير ما يتبدّل الشكل متاعها : هذا اللي باش نسمّيوه homothétie .

Pour comprendre, prenons un trapèze A B C D dans un quadrillage, et un point I. Pour chaque sommet, on multiplie par deux le vecteur qui part de I : le vecteur I A prime égale deux fois le vecteur I A, et de même pour B, C et D. Regarde le nouveau trapèze A prime B prime C prime D prime. Ses côtés sont parallèles aux côtés de A B C D. Chaque longueur est multipliée par deux, donc le périmètre aussi. Mais l'aire, elle, est multipliée par quatre. La figure a grandi, sans que sa forme change : c'est ce qu'on appellera une homothétie.

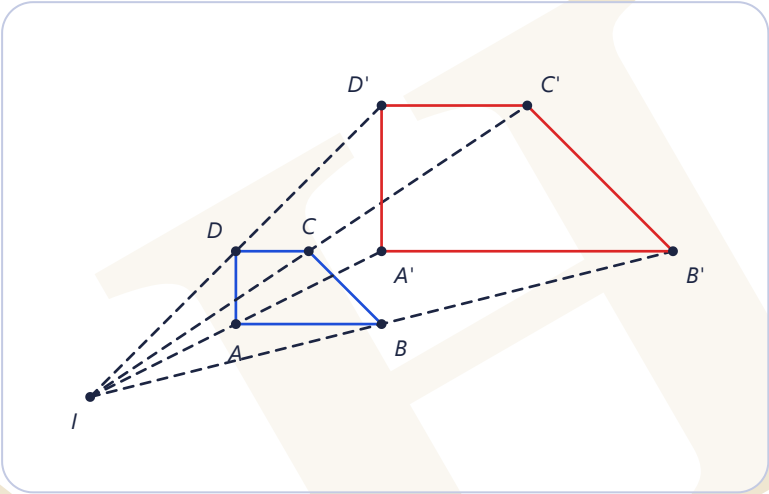
Dans un quadrillage, $ABCD$ est un trapèze rectangle en A : $AB = 4$, $AD = 2$ et $DC = 2$, l'unité étant le côté d'un carreau. I est un point du plan. On construit les points A', B', C' et D' tels que

$$\overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA}, \quad \overrightarrow{IB'} = 2\overrightarrow{IB}, \quad \overrightarrow{IC'} = 2\overrightarrow{IC}, \quad \overrightarrow{ID'} = 2\overrightarrow{ID}$$

On compare alors $ABCD$ et $A'B'C'D'$:

- chaque côté de $A'B'C'D'$ est **parallèle** au côté correspondant de $ABCD$;
- chaque longueur est multipliée par 2, donc le périmètre aussi ;
- l'aire est multipliée par 4.

Une translation aurait donné un trapèze de mêmes dimensions que $ABCD$. Ici la figure est **agrandie**, sans être déformée.



Chaque sommet est envoyé deux fois plus loin de I.

Un point I en bas à gauche. Un petit trapèze rectangle ABCD : A est à 4 carreaux à droite et 2 carreaux au-dessus de I, AB est horizontal et mesure 4, AD est vertical et mesure 2, DC est horizontal et mesure 2. Un grand trapèze A'B'C'D', deux fois plus loin de I dans chaque direction : A'B' mesure 8, A'D' mesure 4, D'C' mesure 4. Des demi-droites en pointillés partent de I et passent par chaque sommet et son image.

DE MÊME POUR B, C ET D

$$\overrightarrow{IA'} = 2\,\overrightarrow{IA}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec les données de la figure, montrer que le côté $[A'B']$ est parallèle au côté $[AB]$ et deux fois plus long, puis comparer les périmètres et les aires des deux trapèzes.

Un côté — Par la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{A'I}$ et du vecteur $\overrightarrow{IB'}$: on trouve 2 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les deux côtés sont parallèles, et $A'B' = 8$.

$$\overrightarrow{A'B'} = -2\,\overrightarrow{IA} + 2\,\overrightarrow{IB} = 2\,\overrightarrow{AB}$$

Les périmètres — Dans $ABCD$, le côté $[BC]$ mesure $2\sqrt{2}$. Chaque côté est doublé, donc le périmètre est doublé.

$$8 + 2\sqrt{2} \quad \text{devient} \quad 16 + 4\sqrt{2}$$

Les aires — L'aire du trapèze $ABCD$ vaut 6. Dans $A'B'C'D'$, les bases mesurent 8 et 4, et la hauteur 4 : l'aire vaut 24.

$$\frac{(8+4)\times 4}{2} = 24 = 4 \times 6$$

périmètre $\times 2$; aire $\times 4$

À ne pas faire : Les longueurs sont multipliées par 2, donc l'aire est multipliée par 2 — L'aire est multipliée par $2^2 = 4$. Une aire est un produit de deux longueurs : chacune est multipliée par 2, donc le produit est multiplié par 4.

---

3. ACTIVITÉ

Pour comprendre : un coefficient négatif

CE QU'IL DIT

Tawa nbaddlou le coefficient : ne5dhou moins un demi. 3andna point O, w triangle ABC. N7ottou A prime b7ith le vecteur OA prime égale moins un demi fois le vecteur OA, w kif kif l B w C. Chnowa nle7dhou ? O w A w A prime alignés, ama O yji bin A w A prime, 5ater le coefficient négatif. La droite BC w la droite B prime C prime parallèles. W koll longueur twalli ennoss. El triangle ej-jdid asghar marrtin, w ma9loub fej-jiha lo5ra mta3 O.

تولّي النصّ . الـ triangle الجديد أصغر مرّتين ، w مقلوب في الجهة الأخرى متاع O .

Changeons maintenant le coefficient : prenons moins un demi. On a un point O et un triangle A B C. On place A prime de sorte que le vecteur O A prime égale moins un demi fois le vecteur O A, et de même pour B et C. Qu'observe-t-on ? O, A et A prime sont alignés, mais O se trouve entre A et A prime, parce que le coefficient est négatif. La droite B C et la droite B prime C prime sont parallèles. Et chaque longueur est divisée par deux. Le nouveau triangle est deux fois plus petit, et retourné de l'autre côté de O.

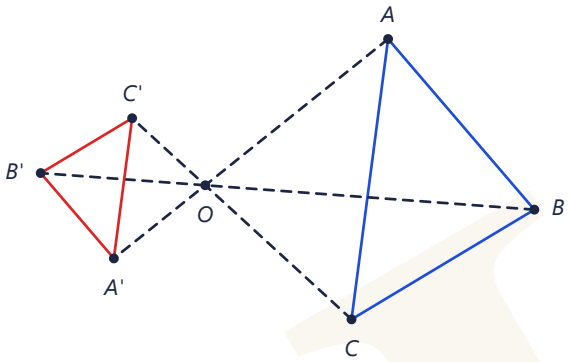
Soient O, A, B et C quatre points distincts du plan. On construit les points A', B' et C' tels que

$$\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

Cette fois le coefficient est négatif, et l'on observe que :

- les points O, A et A' sont alignés, et O est entre A et A' ; de même pour B et B', pour C et C' ;
- les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles ;
- $A'C' = \frac{1}{2}\,AC$.

Le triangle $A'B'C'$ est une **réduction** du triangle ABC, placée de l'autre côté de O.



Le point O est entre chaque point et son image.

Un point O au centre. À droite, un triangle ABC. À gauche de O, un triangle A'B'C' deux fois plus petit et retourné : chaque sommet est aligné avec O et le sommet correspondant de ABC, de l'autre côté de O et deux fois plus près. Les côtés de A'B'C' sont parallèles à ceux de ABC.

DE MÊME POUR B ET C

$$\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec ces données, justifier que les points O, A et A' sont alignés, que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, et que $B'C' = \frac{1}{2} \times BC$.

L'alignement — Le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ est égal à $-\frac{1}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{OA}$: ces deux vecteurs sont colinéaires et ont la même origine. Les points O, A et A' sont alignés.

$$\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

Chasles — On décompose le vecteur $\overrightarrow{B'C'}$ en passant par O, puis on met $-\frac{1}{2}$ en facteur.

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{OC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Conclure — Les vecteurs $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires : les droites sont parallèles. Et la longueur $B'C'$ est la moitié de la longueur BC.

$$(BC) \parallel (B'C') \quad ; \quad B'C' = \frac{1}{2}BC$$

$$(BC) \parallel (B'C') \quad ; \quad B'C' = \frac{1}{2}BC$$

À ne pas faire : Le coefficient $-\frac{1}{2}$ est négatif, donc A' n'est pas sur la droite (OA) — A' est sur la droite (OA), de l'autre côté de O. Deux vecteurs colinéaires de même origine donnent des points alignés, quel que soit le signe du coefficient.

4. DÉFINITION

Homothétie de centre I et de rapport k

CE QU'IL DIT

Tawa el définition. 3andna point I, w réel k non nul. L'application elli ta3ti l koll point M, el point el wa7id M prime elli y7a99e9 le vecteur IM prime égale k fois le vecteur IM, nsammiwha l'homothétie de centre I et de rapport k, w nektbouha h indice I k. M prime houwa l'image mta3 M, w M houwa l'antécédent mta3 M prime. Rodd belek : ez-zouz vecteurs yo5rjou men le centre I. Ken k positif, M w M prime fi nafs ej-jiha mta3 I. W ken k négatif, I yji binethom.

توّا الـ définition . عندنا l'application ، réel k non nul w ، point I اللي تعطي لكل point M ، الـ M الوحيد l'homothétie de centre I et de نسمّيوها ، le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M اللي prime يحقّق rapport k ، w نكتبوها h indice I k . M prime هو l'image متاع M ، w M هو l'antécédent متاع M prime . ردّ بالك : الزوز vecteurs يخرجو من le centre I . كان M w M prime ، k positif في نفس الجهة متاع k . كان I négatif ، يجي بيناتهم .

Voici la définition. On a un point I et un réel k non nul. L'application qui associe à chaque point M l'unique point M prime qui vérifie le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M s'appelle l'homothétie de centre I et de rapport k, et on la note h indice I k. M prime est l'image de M, et M est l'antécédent de M prime. Attention : les deux vecteurs partent du centre I. Si k est positif, M et M prime sont du même côté de I. Et si k est négatif, I se trouve entre eux.

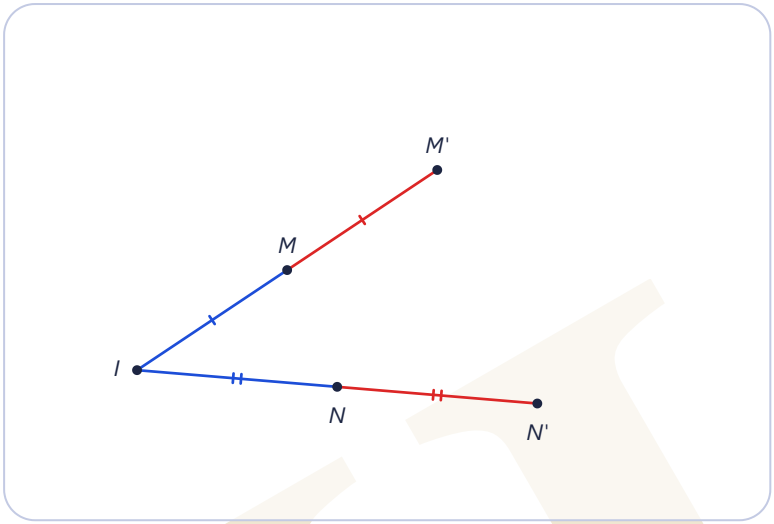
Soit I un point et k un réel non nul. L'application qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$ est appelée **homothétie de centre I et de rapport k.** Elle est notée $h_{(I,k)}$.

On a ainsi :

$$h_{(I,k)}(M) = M' \text{ équivaut à } \overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$$

M' est appelé l'**image** du point M par l'homothétie $h_{(I,k)}$, et M est appelé l'**antécédent** de M' par l'homothétie $h_{(I,k)}$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



Ici k = 2 : chaque image est deux fois plus loin du centre.

Un point I à gauche. Deux points M et N, et leurs images M' et N' par l'homothétie de centre I et de rapport 2 : M' est sur la demi-droite d'origine I passant par M, deux fois plus loin de I que M ; de même N' est deux fois plus loin de I que N. Les segments IM et MM' portent la même marque, ainsi que IN et NN'.

LA DÉFINITION

$$h_{(I,k)}(M) = M' \iff \overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Traduire par une égalité vectorielle chacun des énoncés suivants. Premier énoncé : l'homothétie de centre I et de rapport -2 transforme A en B. Deuxième énoncé : le point C est l'image du point D par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$. Troisième énoncé : le point Q est l'antécédent du point P par l'homothétie de centre I et de rapport $\sqrt{2}$.

De A vers B — Le centre est I, le point de départ est A, son image est B : le vecteur qui va du centre à l'image est égal à -2 fois le vecteur qui va du centre au point.

$$\overrightarrow{IB} = -2\,\overrightarrow{IA}$$

Le centre A — Ici le centre est A et l'image est C : les deux vecteurs partent toujours du centre.

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AD}$$

L'antécédent — Q est l'antécédent de P : c'est P qui est l'image de Q.

$$\overrightarrow{IP} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{IQ}$$

À ne pas faire : $h_{(I,k)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = k\,\overrightarrow{IM}$ — $h_{(I,k)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$. Les deux vecteurs partent du centre I : l'un va vers le point, l'autre vers son image.

À ne pas faire : On peut prendre $k = 0$ comme rapport d'une homothétie — Le rapport d'une homothétie est un réel non nul. Avec un coefficient nul, tous les points auraient pour image le centre I, et un point autre que I n'aurait aucun antécédent.

5. PROPRIÉTÉ

Conséquences de la définition

CE QU'IL DIT

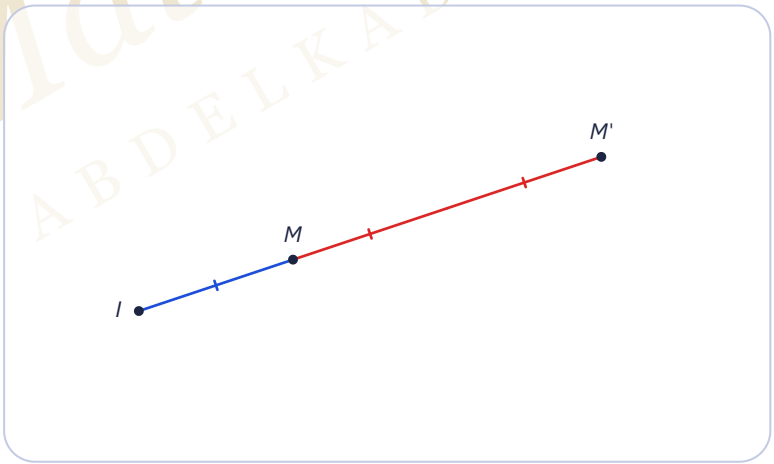
Men el définition ntalla3ou trois conséquences. Numéro un : el point, w l'image mte3ou, w le centre, dima alignés, 5ater ez-zouz vecteurs colinéaires. Numéro deux : l'image mta3 le centre I hiya I : n9oulou I point invariant. Numéro trois : le vecteur IM prime égale k fois le vecteur IM, équivaut à le vecteur IM égale un sur k fois le vecteur IM prime. Ya3ni bech traja3 men M prime l M, testa3mel le rapport un sur k. W hakka koll point 3andou antécédent wa7ed bark.

من الـ définition نطلّعو numéro un . trois conséquences : الـ l'image w ، point متاعو ، le centre w ، ديما
I point نقولو : I هي le centre I متاع vecteurs colinéaires . numéro deux : l'image الزوز خاطر ، alignés
invariant . numéro trois : le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M ، équivaut à le vecteur I M
le rapport un sur k . تستعمل ، M لـ M prime من ترجع باش يعني . égale un sur k fois le vecteur I M prime
w هكّا كل point عندو antécédent واحد برك .

De la définition, on tire trois conséquences. Numéro un : un point, son image et le centre sont toujours alignés, parce que les deux vecteurs sont colinéaires. Numéro deux : l'image du centre I est I : on dit que I est un point invariant. Numéro trois : le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M, équivaut à le vecteur I M égale un sur k fois le vecteur I M prime. Autrement dit, pour revenir de M prime à M, on utilise le rapport un sur k. Et ainsi chaque point a un seul antécédent.

- Un point et son image sont **alignés** avec le centre de l'homothétie.
- $h_{(I,k)}(I) = I$: on dit que I est un point **invariant** par h.
- $h_{(I,k)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$, qui équivaut à $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{IM'}$.

Tout point du plan admet donc un **unique antécédent** par une homothétie : l'antécédent de M' par $h_{(I,k)}$ est l'image de M' par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$.



De M à M' : rapport 3. De M' à M : rapport un tiers.

Trois points alignés I, M et M'. Le segment IM' est partagé en trois parts égales, et M est à la première : M' est trois fois plus loin de I que M.

LE CENTRE EST INVARIANT

$$h_{(I,k)}(I) = I$$

L'ANTÉCÉDENT

$$\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM} \iff \overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{IM'}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Donner une interprétation de chacune des égalités suivantes au moyen d'une homothétie. Première égalité : le vecteur $\overrightarrow{MD}$ est égal à $-\frac{5}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{MN}$. Deuxième égalité : $\frac{7}{4}$ fois le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{PR}$.

Le centre M — Les deux vecteurs partent de M : le centre est M. Le point D est l'image de N par l'homothétie de centre M et de rapport $-\frac{5}{2}$.

$$\overrightarrow{MD} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{MN}$$

Le centre P — Les deux vecteurs partent de P : le centre est P. Le point R est l'image de Q par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{7}{4}$.

$$\overrightarrow{PR} = \frac{7}{4}\overrightarrow{PQ}$$

Dans l'autre sens — On peut aussi lire chaque égalité à l'envers, avec le rapport inverse : Q est l'image de R par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{4}{7}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{PR}$$

À ne pas faire : L'antécédent de M' par $h_{(I,k)}$ s'obtient avec le rapport $-k$ — Il s'obtient avec le rapport $\frac{1}{k}$: $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{IM'}$. Pour revenir en arrière, on divise par k : on prend l'inverse du rapport, pas son opposé.

6. MÉTHODE

Construire l'image d'un point

CE QU'IL DIT

Kifech narsmou l'image mta3 point A ? Et-tari9a fiha trois étapes. Numéro un : arsem la droite IA, 5ater l'image dima 3liha. Numéro deux : a7seb la distance : IA prime égale la valeur absolue de k fois IA. Numéro trois : e5tar ej-jiha. Ken k positif, A prime fi nafs ej-jiha mta3 A. Ken k négatif, A prime fej-jiha lo5ra mta3 I. W zid tfakker : ken la valeur absolue de k akbar men un, l'image teb3ed 3la le centre, w ken asghar men un, ta9reb lih.

كيفاش نرسمو l'image متاع point A ؟ الطريقة فيها trois étapes . numéro un ارسم la droite I A ، خاطر
la distance : I A prime égale la valeur absolue de k fois I A . احسب : numéro deux . ديما عليها l'image
في الجهة k négatif ، A prime كان . A في نفس الجهة متاع k positif ، A prime كان . اختار الجهة : numéro trois

الأخرى متاع w . I زيد تفكّر : كان la valeur absolue de k أكبر من l'image ، un تبعد على w ، le centre كان أصغر من un ، تقرب ليه .

Comment construire l'image d'un point A ? La méthode tient en trois étapes. Numéro un : trace la droite I A, car l'image est toujours dessus. Numéro deux : calcule la distance : I A prime égale la valeur absolue de k fois I A. Numéro trois : choisis le côté. Si k est positif, A prime est du même côté que A. Si k est négatif, A prime est de l'autre côté de I. Et retiens encore : si la valeur absolue de k est plus grande que un, l'image s'éloigne du centre, et si elle est plus petite que un, elle s'en rapproche.

Pour construire l'image A' d'un point A par l'homothétie de centre I et de rapport k :

1. on trace la droite (IA) : l'image est sur cette droite ;
2. on reporte à partir de I la distance $IA' = |k| \times IA$;
3. on choisit le côté : du **même côté** que A si $k > 0$, de l'**autre côté** de I si $k < 0$.

Si $|k| > 1$, l'image est plus loin du centre que le point ; si $|k| < 1$, elle en est plus près.



Trois images du même point A : rapports 3, un demi et −2.

Une droite sur laquelle sont placés, de gauche à droite, les points G, I, F, A et E. IA mesure 2 unités. E est du côté de A, à 6 unités de I. F est le milieu du segment IA. G est de l'autre côté de I, à 4 unités de I.

LA DISTANCE AU CENTRE

$$IA' = |k| \times IA$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient I et A deux points tels que $IA = 2$. Construire l'image du point A par l'homothétie de centre I dans chacun des cas suivants : on note E l'image quand le rapport est 3, F l'image quand le rapport est $\frac{1}{2}$, et G l'image quand le rapport est -2.

Agrandir — Le rapport 3 est positif et plus grand que 1 : E est du côté de A, trois fois plus loin de I.

$$\overrightarrow{IE} = 3\,\overrightarrow{IA}, \quad IE = 6$$

Réduire — Le rapport $\frac{1}{2}$ est positif et plus petit que 1 : F est le milieu du segment $[IA]$.

$$\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{IA}, \quad IF = 1$$

Rapport négatif — Le rapport -2 est négatif : G est de l'autre côté de I, à une distance double de IA.

$$\overrightarrow{IG} = -2\,\overrightarrow{IA}, \quad IG = 4$$

À ne pas faire : Pour le rapport -2, on place A' du côté de A, à la distance $2 \times IA$ — On place A' de l'autre côté de I, à la distance $2 \times IA$. Un rapport négatif change le sens du vecteur : le centre I se retrouve entre le point et son image.

---

7. MÉTHODE

Trouver le centre

CE QU'IL DIT

W bel 3aks : na3rfou le rapport k, w point A, w l'image mte3ou B. Win le centre I ? Nektbou el définition : le vecteur IB égale k fois le vecteur IA. N7ottou el koll fi jiha wa7da : k fois le vecteur IA moins le vecteur IB égale le vecteur nul. Hedhi relation mta3 barycentre : I houwa le barycentre des points A et B, affectés des coefficients k et moins un. Mathalan, ken le rapport deux tiers, nal9aw I barycentre de A et B, affectés des coefficients moins deux et trois. W ma tensech : ken k positif, le centre 5arej le segment AB, w ken k négatif, le centre bin A w B.

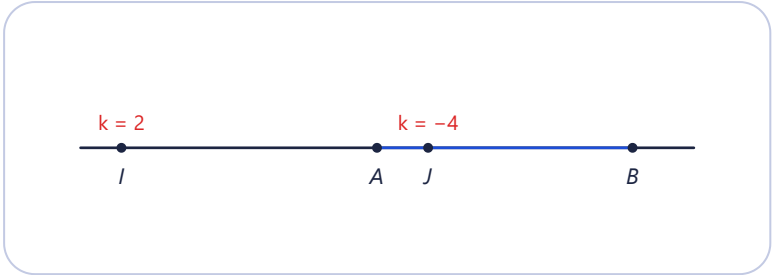
définition : le نكتبو الـ ؟ le centre I وين . B متاعو le rapport k ، w point A ، w l'image بالعكس : نعرفو w k fois le vecteur I A moins le vecteur I B : نحطّو الكل في جهة وحدة . vecteur I B égale k fois le vecteur I A le barycentre des points A et B ، affectés des هو barycentre : I متاع relation هذي . égale le vecteur nul I barycentre de A et B ، affectés des نلقاو ، le rapport deux tiers كان ، مثلا . coefficients k et moins un k كان le segment A B ، w خارج k positif ، le centre كان : ما تنساش coefficients moins deux et trois . w A w B بين négatif ، le centre .

Et dans l'autre sens : on connaît le rapport k, un point A et son image B. Où est le centre I ? On écrit la définition : le vecteur I B égale k fois le vecteur I A. On met tout du même côté : k fois le vecteur I A moins le vecteur I B égale le vecteur nul. C'est une relation de barycentre : I est le barycentre des points A et B, affectés des coefficients k et moins un. Par exemple, si le rapport est deux tiers, on trouve que I est le barycentre de A et B, affectés des coefficients moins deux et trois. Et n'oublie pas : si k est positif, le centre est hors du segment A B, et si k est négatif, le centre est entre A et B.

On connaît le rapport k d'une homothétie h, avec $k \neq 1$, un point A et son image B. Où est le centre I ?

L'égalité $\overrightarrow{IB} = k\,\overrightarrow{IA}$ s'écrit $k\,\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$: le centre I est le **barycentre** des points A et B affectés des coefficients k et -1.

Par exemple, si B est l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$, alors $3\,\overrightarrow{IB} = 2\,\overrightarrow{IA}$, donc $-2\,\overrightarrow{IA} + 3\,\overrightarrow{IB} = \vec{0}$: I est le barycentre des points A et B affectés des coefficients -2 et 3.



I pour le rapport 2, J pour le rapport −4.

Une droite sur laquelle sont placés, de gauche à droite : un premier centre I, le point A, un second centre J, puis le point B. AB mesure 5 unités. I est à gauche de A, à 5 unités : A est le milieu du segment IB. J est entre A et B, à 1 unité de A.

LE CENTRE EST UN BARYCENTRE

$$\overrightarrow{IB} = k\,\overrightarrow{IA} \iff k\,\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points distincts. Construire le centre de l'homothétie qui transforme A en B : on note I ce centre quand le rapport est 2, et J ce centre quand le rapport est -4.

Chasles — Dans les deux cas, on écrit le vecteur qui va du centre à B comme une somme passant par A, pour ne garder qu'un vecteur d'origine A.

$$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$$

Rapport positif — Le vecteur $\overrightarrow{IB}$ est égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$: il reste que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{IA}$. Le point A est le milieu du segment $[IB]$: I est le symétrique de B par rapport à A.

$$\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB}$$

Rapport négatif — Le vecteur $\overrightarrow{JB}$ est égal à -4 fois le vecteur $\overrightarrow{JA}$: le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à -5 fois le vecteur $\overrightarrow{JA}$. Le point J est sur le segment $[AB]$, au cinquième à partir de A.

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$$

À ne pas faire : L'homothétie de rapport 2 qui transforme A en B a pour centre le milieu de $[AB]$ — Son centre est le symétrique de B par rapport à A. Avec un rapport positif, A et B sont du même côté du centre : le centre ne peut pas être entre eux.

8. MÉTHODE

Reconnaître une homothétie

CE QU'IL DIT

Kifech na3rfou elli application hiya homothétie ? Nlawwjou 3la point fixe I, w réel k non nul, b7ith l koll point M : le vecteur IM prime égale k fois le vecteur IM. Barcha marrat l'énoncé ya3tik le vecteur MM prime. Wa9tha esta3mel Chasles : le vecteur IM prime égale le vecteur IM plus le vecteur MM prime. W

rodd belek : le rapport na9raweh 3la ez-zouz vecteurs elli yo5rjou men le centre, mouch 3la le vecteur MM prime.

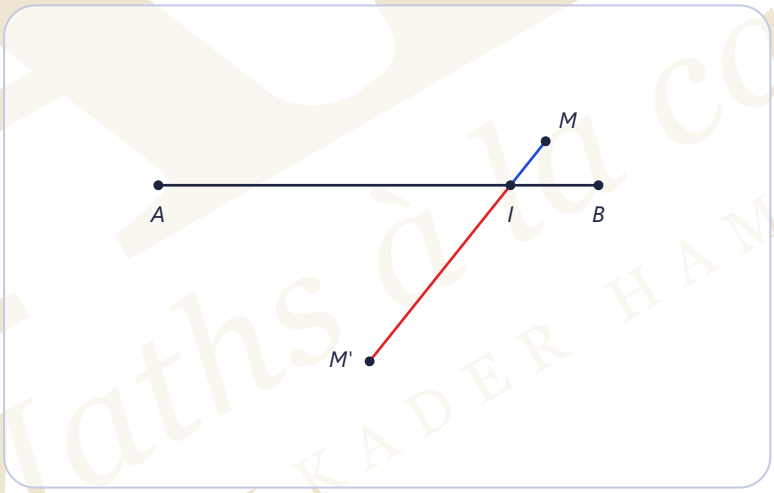
كيفاش نعرفو اللي application هي homothétie ؟ نلوّجو على w réel k non nul ، point fixe I ، بحيث لكل point
. le vecteur M M prime يعطيك l'énoncé برشة مرّات . M : le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M
وقتها استعمل w . Chasles : le vecteur I M prime égale le vecteur I M plus le vecteur M M prime ردّ بالك :
. le vecteur M M prime موش على ، le centre من يخرجو اللي vecteurs نقراوه على الزوز le rapport

Comment reconnaître qu'une application est une homothétie ? On cherche un point fixe I et un réel k non nul tels que, pour tout point M : le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M. Très souvent, l'énoncé te donne le vecteur M M prime. Utilise alors Chasles : le vecteur I M prime égale le vecteur I M plus le vecteur M M prime. Et attention : le rapport se lit sur les deux vecteurs qui partent du centre, pas sur le vecteur M M prime.

Pour montrer qu'une application f, qui à tout point M associe un point M', est une homothétie, on cherche un point **fixe** I et un réel non nul k tels que, pour tout point M :

$$\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$$

Le plus souvent, l'énoncé donne le vecteur $\overrightarrow{MM'}$: on passe au vecteur $\overrightarrow{IM'}$ par la relation de Chasles, $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'}$.



I est entre M et M', et IM' = 4 IM.

Un segment AB horizontal. Le point I est sur ce segment, aux quatre cinquièmes à partir de A. Un point M est placé un peu au-dessus et à droite de I. Son image M' est de l'autre côté de I, alignée avec I et M, quatre fois plus loin de I que M.

POUR TOUT POINT M, AVEC I FIXE

$$\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points distincts et I le barycentre des points A et B affectés des coefficients 1 et 4. À tout point M du plan, on associe le point M' tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à la somme

du vecteur $\overrightarrow{MA}$ et de 4 fois le vecteur $\overrightarrow{MB}$. Reconnaître l'application f qui associe au point M le point M'.

Réduire la somme — I est le barycentre : pour tout point M, la somme se réduit à 5 fois le vecteur $\overrightarrow{MI}$.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 4\,\overrightarrow{MB} = 5\,\overrightarrow{MI}$$

Partir du centre — On écrit le vecteur $\overrightarrow{IM'}$ avec la relation de Chasles, en passant par M.

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{IM} + 5\,\overrightarrow{MI}$$

Conclure — Le vecteur $\overrightarrow{MI}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{IM}$: il reste -4 fois le vecteur $\overrightarrow{IM}$. Le point I est fixe et le coefficient ne dépend pas de M.

$$\overrightarrow{IM'} = -4\,\overrightarrow{IM}$$

> f est l'homothétie de centre I et de rapport -4

À ne pas faire : $\overrightarrow{MM'} = 5\,\overrightarrow{MI}$, donc f est l'homothétie de centre I et de rapport 5 — $\overrightarrow{IM'} = -4\,\overrightarrow{IM}$: le rapport est -4. Le rapport se lit sur les deux vecteurs qui partent du centre, pas sur le vecteur qui va du point à son image.

---

9. THÉORÈME

Propriété caractéristique

CE QU'IL DIT

Hedhi la propriété caractéristique. Ne5dhou homothétie h de centre O et de rapport k, w zouz points M w N, w les images mte3hom M prime w N prime. Wa9tha le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur MN. 3lech ? B Chasles : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M prime O plus le vecteur ON prime, ya3ni moins k fois le vecteur OM, plus k fois le vecteur ON. N5arrjou k en facteur, w nal9aw k fois le vecteur MN. Tfakker : l'homothétie todhrob les vecteurs el koll fi k, mouch ken elli yo5rjou men le centre.

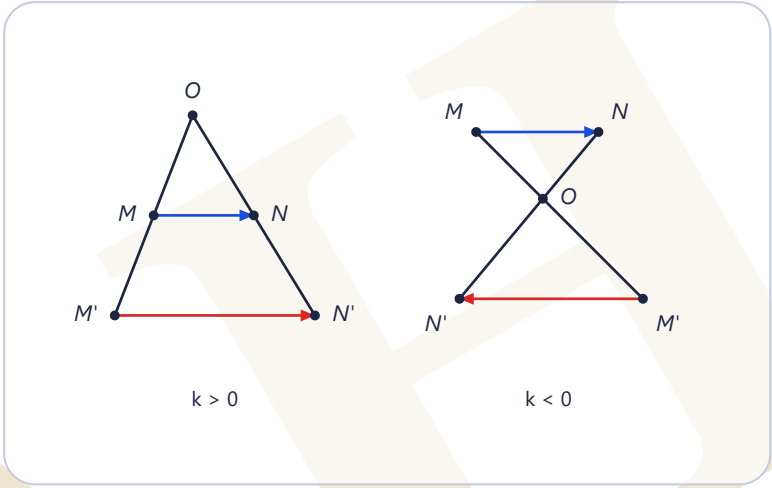
points M w N ، زوز homothétie h de centre O et de rapport k ، w ناخذو . la propriété caractéristique هذي . le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur M N وقتها . M prime w N prime متاعهم w les images ، Chasles : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M prime O plus le vecteur O N prime بـ ؟ علاش k fois le نلقاو k en facteur ، w نخرّجو . moins k fois le vecteur O M ، plus k fois le vecteur O N يعني . le centre من يخرجو اللي كان موش ، k في الكل les vecteurs تضرب l'homothétie : تفكّر . vecteur M N

Voici la propriété caractéristique. On prend une homothétie h de centre O et de rapport k, deux points M et N, et leurs images M prime et N prime. Alors le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur M N. Pourquoi ? Par Chasles : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M prime O plus le vecteur O N prime, c'est-à-dire moins k fois le vecteur O M, plus k fois le vecteur O N. On met k en facteur, et on trouve k fois le vecteur M N. Retiens : l'homothétie multiplie tous les vecteurs par k, pas seulement ceux qui partent du centre.

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k. Soient M et N deux points du plan et M' et N' leurs images respectives par h. On a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$$

Une homothétie multiplie donc **tous** les vecteurs par son rapport, pas seulement ceux qui partent du centre.



Le vecteur M'N' est égal à k fois le vecteur MN : même sens si k > 0, sens contraire si k < 0.

Deux dessins côte à côte. À gauche, le rapport est positif : O est en haut, M et N sont sur deux demi-droites issues de O, et M' et N' sont plus loin sur ces mêmes demi-droites ; les vecteurs MN et M'N' sont parallèles et de même sens. À droite, le rapport est négatif : O est entre M et M', et entre N et N' ; les vecteurs MN et M'N' sont parallèles et de sens contraires.

POUR TOUS POINTS M ET N

$$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$$

DÉMONSTRATION

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'}$. Or $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = k\,\overrightarrow{ON}$, donc $\overrightarrow{M'N'} = -k\,\overrightarrow{OM} + k\,\overrightarrow{ON} = k\,(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\,\overrightarrow{MN}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$. On note I l'image de B par h, et J le point tel que le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{AC}$. Montrer que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles et que $IC = \frac{1}{3} \times BJ$.

L'image de J — Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal à un tiers du vecteur $\overrightarrow{AJ}$: le point C est l'image de J par h. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$

La propriété — I et C sont les images de B et de J : le vecteur qui joint les images est égal à un tiers du vecteur qui joint les points.

$\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$

Conclure — Les deux vecteurs sont colinéaires, donc les droites sont parallèles ; et la longueur IC est le tiers de la longueur BJ.

$(IC) \parallel (BJ) \quad ; \quad IC = \frac{1}{3} BJ$

$(IC) \parallel (BJ) \quad ; \quad IC = \frac{1}{3} BJ$

À ne pas faire : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, comme pour une translation — $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$. Une translation ne change pas les vecteurs ; une homothétie les multiplie tous par son rapport.

---

10. PROPRIÉTÉ

Conséquences : droites parallèles, longueurs multipliées

CE QU'IL DIT

Men la propriété caractéristique ntalla3ou zouz conséquences. Ken A prime w B prime houma les images mta3 A w B par une homothétie de rapport k, wa9tha la droite AB parallèle à la droite A prime B prime, 5ater ez-zouz vecteurs colinéaires. W la distance A prime B prime égale la valeur absolue de k fois AB. Ya3ni l'homothétie todhrob les distances el koll fi la valeur absolue de k : tkabber ken hiya akbar men un, w tsaghghar ken hiya asghar men un.

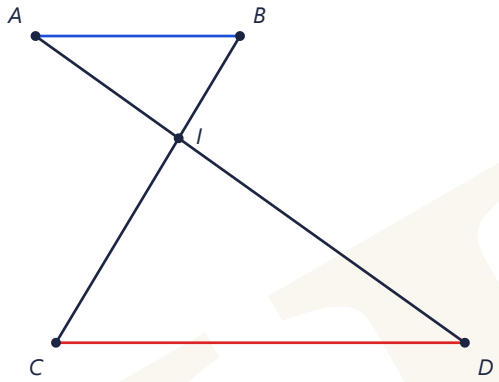
A متاع les images هوما A prime w B prime كان . conséquences نطلّعو زوز la propriété caractéristique من خاطر ، la droite A B parallèle à la droite A prime B prime وقتها ، w B par une homothétie de rapport k يعني . vecteurs colinéaires . w la distance A prime B prime égale la valeur absolue de k fois A B الزوز تكبّر كان هي أكبر من w ، un تصغّر كان : la valeur absolue de k في الكل les distances تضرب l'homothétie هي أصغر من un .

De la propriété caractéristique, on tire deux conséquences. Si A prime et B prime sont les images de A et B par une homothétie de rapport k, alors la droite A B est parallèle à la droite A prime B prime, parce que les deux vecteurs sont colinéaires. Et la distance A prime B prime égale la valeur absolue de k fois A B. Autrement dit, l'homothétie multiplie toutes les distances par la valeur absolue de k : elle agrandit si celle-ci est plus grande que un, et elle réduit si elle est plus petite que un.

Si A' et B' sont les images respectives de deux points distincts A et B par une homothétie de rapport k, alors :

- la droite (AB) est **parallèle** à la droite $(A'B')$;
- $A'B' = |k| \times AB$.

Une homothétie multiplie donc toutes les distances par $|k|$: elle **agrandit** si $|k| > 1$, elle **réduit** si $|k| < 1$.



Les droites (AD) et (BC) se coupent en I, avec ID = 2 IA.

Un segment AB horizontal en haut, et un segment CD horizontal en bas, deux fois plus long, avec C à gauche et D à droite. Les segments AD et BC se croisent en un point I : I est entre A et D, et entre B et C, et ID vaut deux fois IA.

$$(AB) \parallel (A'B')$$

LES DISTANCES

$$A'B' = |k|\, AB$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, les droites (AD) et (BC) se coupent en I, $ID = 2 \times IA$, et les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Montrer que D et C sont les images respectives de A et de B par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Le point D — I est entre A et D, et $ID = 2 \times IA$: les deux vecteurs sont de sens contraires. L'homothétie h de centre I et de rapport -2 transforme A en D.

$$\overrightarrow{ID} = -2\,\overrightarrow{IA}$$

L'image de B — On note E l'image de B par h. La droite (DE) est parallèle à la droite (AB) : E est sur la droite (CD). Et E est aligné avec I et B : c'est le point C.

$$h(B) = C$$

Conclure — L'homothétie de centre I et de rapport -2 transforme A en D et B en C. On en déduit que la longueur CD est le double de la longueur AB.

$$CD = |-2| \times AB = 2\,AB$$

$$CD = |-2| \times AB = 2\,AB$$

À ne pas faire : Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, donc $A'B' = AB$ — $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, donc $A'B' = |k| \times AB$. Deux droites parallèles ne portent pas forcément des vecteurs égaux. L'égalité des vecteurs, c'est la translation ; l'homothétie, elle, multiplie le vecteur par son rapport.

---

11. PROPRIÉTÉ

Conservation de l'alignement

CE QU'IL DIT

L'homothétie t7afedh 3la l'alignement. Ken trois points A w B w C alignés, les images mte3hom A prime w B prime w C prime zeda alignés. Es-sbab sehel : le vecteur AC égale réel t fois le vecteur AB. Nadhrbou ez-zouz fi k, nal9aw : le vecteur A prime C prime égale t fois le vecteur A prime B prime. Donc les images alignés. W hedhi tari9a behya bech tthabbet elli trois points alignés : twarri elli houma les images mta3 trois points alignés.

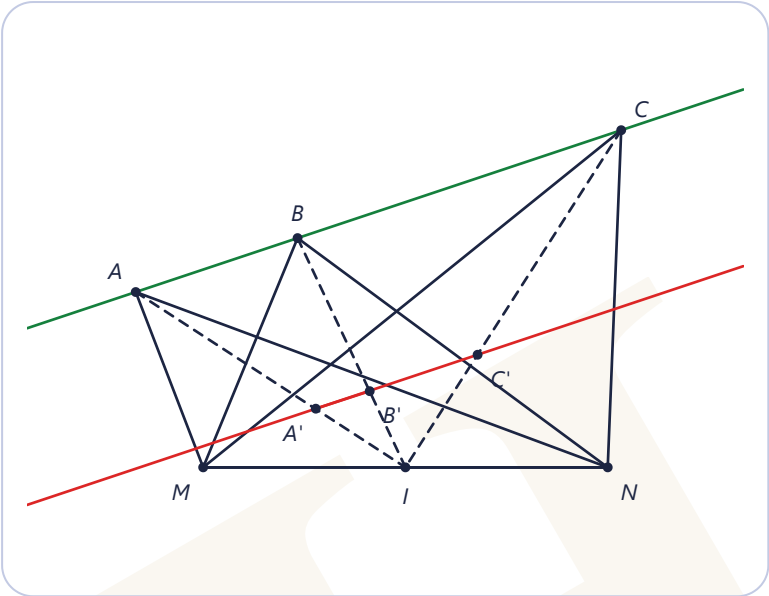
A prime w متاعهم trois points A w B w C alignés ، les images كان . l'alignement تحافظ على l'homothétie
نضربو الزوز . le vecteur A C égale réel t fois le vecteur A B : السبب ساهل . alignés زادة B prime w C prime
le vecteur A prime C prime égale t fois le vecteur A prime B prime . donc les images : في k ، نلقاو
trois متاع les images هوما اللي توزّي : trois points alignés هذي طريقة باهية باش تثبت اللي alignés . w
. points alignés

L'homothétie conserve l'alignement. Si trois points A, B et C sont alignés, leurs images A prime, B prime et C prime sont alignées aussi. La raison est simple : le vecteur A C égale un réel t fois le vecteur A B. On multiplie les deux par k, et on trouve : le vecteur A prime C prime égale t fois le vecteur A prime B prime. Donc les images sont alignées. Et c'est un bon moyen de prouver que trois points sont alignés : on montre qu'ils sont les images de trois points alignés.

Les images, par une homothétie, de trois points alignés sont trois points **alignés**.

Autrement dit : si A, B et C sont alignés et si A', B' et C' sont leurs images par une homothétie, alors A', B' et C' sont alignés.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



A', B' et C' sont les centres de gravité des triangles AMN, BMN et CMN.

Un segment MN horizontal en bas, de milieu I. Trois points A, B et C alignés sur une droite oblique au-dessus. Les triangles AMN, BMN et CMN ont le même côté MN. Les segments AI, BI et CI sont tracés en pointillés ; sur chacun, au tiers à partir de I, se trouve le centre de gravité : A' sur AI, B' sur BI, C' sur CI. Les trois points A', B' et C' sont alignés sur une droite parallèle à la droite (AC).

$$\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{A'C'} = t\,\overrightarrow{A'B'}$$

DÉMONSTRATION

Les points A, B et C sont alignés, avec $A \neq B$: il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$. Par la propriété caractéristique, $\overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{AC} = k\,t\,\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{A'B'}$. Les vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires : A', B' et C' sont alignés.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, AMN, BMN et CMN sont des triangles tels que A, B et C soient alignés. On note I le milieu du segment $[MN]$, et A', B' et C' les centres de gravité respectifs de ces trois triangles. Montrer que A', B' et C' sont alignés.

Le centre de gravité — Dans le triangle AMN, la droite (AI) est une médiane, et le centre de gravité est au tiers de la médiane à partir du milieu I.

$$\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$$

Une homothétie — A' est donc l'image de A par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$. Les trois triangles ont le même côté $[MN]$: de même, B' et C' sont les images de B et de C.

$$h(A) = A' \quad ; \quad h(B) = B' \quad ; \quad h(C) = C'$$

Conclure — A, B et C sont alignés, et une homothétie conserve l'alignement.

A', B', C' sont alignés

A', B', C' sont alignés

À ne pas faire : Le centre de gravité est au tiers de la médiane à partir du sommet : $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ — $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane à partir du sommet, donc au tiers à partir du milieu du côté.

---

12. THÉORÈME

Image d'une droite, image d'un segment

CE QU'IL DIT

Chnowa l'image mta3 droite ? Hiya droite parallèle liha. Ken A w B zouz points 3la la droite, w les images mte3hom A prime w B prime, l'image de la droite AB hiya la droite A prime B prime. W l'image du segment AB hiya le segment A prime B prime. Pratiquement, yekfik l'image mta3 point wa7ed : arsem men l'image hedhi la parallèle à la droite elli bdit biha. W 7ala 5assa : la droite elli tet3adda men le centre mta3 l'homothétie, l'image mte3ha hiya bidha.

شنوّة l'image متاع droite ؟ هي droite parallèle ليها . كان A w B زوز points على les images ، w la droite
متاعهم A B ، l'image de la droite A prime w B prime هي l'image du w . la droite A prime B prime
ارسم من : واحد point متاع l'image يكفيك ، le segment A prime B prime . Pratiquement هي segment A B
متاع le centre من تتعدّى اللي la droite : حالة خاصّة w . بديت بيها اللي la parallèle à la droite هذي l'image
متاعها هي بيدها . l'homothétie ، l'image

Quelle est l'image d'une droite ? C'est une droite qui lui est parallèle. Si A et B sont deux points de la droite, d'images A prime et B prime, l'image de la droite A B est la droite A prime B prime. Et l'image du segment A B est le segment A prime B prime. En pratique, l'image d'un seul point te suffit : trace par cette image la parallèle à la droite de départ. Et un cas particulier : une droite qui passe par le centre de l'homothétie est sa propre image.

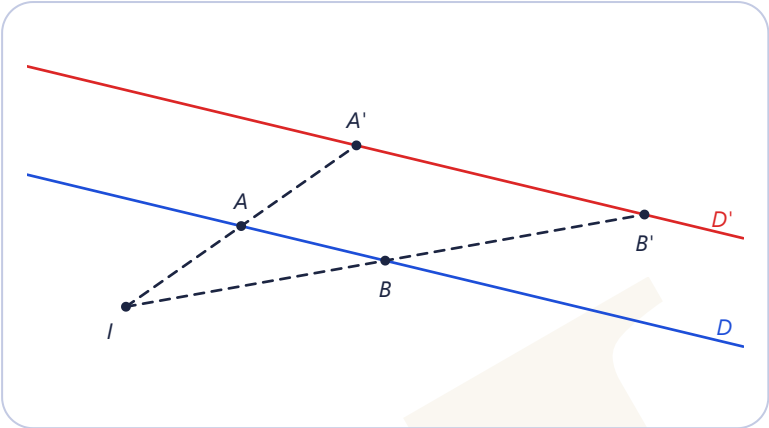
L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est **parallèle**.

Plus précisément : si A et B sont deux points distincts d'images A' et B', l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

L'image d'un segment par une homothétie est un **segment** : l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.

En pratique. Pour préciser l'image d'une droite D par une homothétie h :

- si l'on connaît les images A' et B' de deux points de D, l'image de D est la droite $(A'B')$;
- si l'on connaît l'image A' d'un seul point de D, l'image de D est la parallèle à D passant par A' ;
- si D passe par le centre de h, l'image de D est D elle-même.



L'image de D par l'homothétie de centre I et de rapport 2 est la parallèle D'.

Un point I en bas à gauche. Une droite D, en bleu, passe par deux points A et B. Les demi-droites d'origine I passant par A et par B sont tracées en pointillés ; A' est sur la première, deux fois plus loin de I que A, et B' sur la seconde, deux fois plus loin de I que B. La droite D', en rouge, passe par A' et B' : elle est parallèle à D.

UNE DROITE PARALLÈLE

$$h\big((AB)\big) = (A'B')$$

UN SEGMENT

$$h\big([AB]\big) = [A'B']$$

DÉMONSTRATION

Soit M un point de la droite (AB) : il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$. Alors $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM} = t\,k\,\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{A'B'}$, donc M' est sur la droite $(A'B')$. Réciproquement, soit N' un point de $(A'B')$ et N son antécédent : $\overrightarrow{A'N'} = t\,\overrightarrow{A'B'}$ donne $k\,\overrightarrow{AN} = t\,k\,\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AN} = t\,\overrightarrow{AB}$ et N est sur (AB). L'image de (AB) est exactement $(A'B')$, et elle est parallèle à (AB) car $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$. Pour le segment, on reprend le même calcul avec $0 \le t \le 1$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient D une droite et I un point qui n'est pas sur D. Construire l'image de la droite D par l'homothétie h de centre I et de rapport 2.

Un point — On choisit un point A sur D et on construit son image A' : le vecteur $\overrightarrow{IA'}$ est égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$, donc A est le milieu du segment $[IA']$.

$$\overrightarrow{IA'} = 2\,\overrightarrow{IA}$$

La parallèle — L'image de D est une droite parallèle à D, et elle passe par A' : on trace la parallèle à D passant par A'. On la note D'.

$$D' \parallel D, \quad A' \in D'$$

Vérifier — Si on prend un autre point B de D, son image B' est le point où la droite (IB) coupe D'.

$$h(B) = B'$$

D' est la parallèle à D passant par A'

À ne pas faire : L'image de la droite D est la droite qui passe par I et par A' — C'est la parallèle à D passant par A'. La droite qui joint le centre à l'image d'un point contient ce point et son image, mais ce n'est pas l'image de la droite de départ : l'image d'une droite lui est parallèle.

---

13. MÉTHODE

Une homothétie donnée par son centre, un point et son image

CE QU'IL DIT

L'homothétie na3rfouha el koll ki ykoun 3andna le centre O, w point A, w l'image mte3ou A prime : el trois points alignés, w le rapport houwa el réel k elli y7a99e9 le vecteur OA prime égale k fois le vecteur OA. Bech tarsem l'image mta3 point e5er M, ma test7a99ech ta7seb k. Ken M mouch 3la la droite OA, arsem la droite OM, w ba3d la parallèle à la droite AM elli tet3adda men A prime : yetla9aw fi M prime. W ken M 3la la droite OA, arsem 9bal l'image mta3 point N 5arej la droite hedhi, w 3awed nafs el 5edma b N w N prime.

trois points الـ : A prime متاعو le centre O ، w point A ، w l'image عندنا نعرفوها الكل كي يكون l'homothétie باش ترسم . le vecteur O A prime égale k fois le vecteur O A اللي يحقّق réel k الـ هو alignés ، w le rapport la droite O M ، w ارسم ، la droite O A موش على M كان . k ما تستحقّش تحسب ، M آخر point متاع l'image ، la droite O A على M كان M prime . w يتلاقاو في : A prime من اللي تتعدّى la parallèle à la droite A M بعد N w N prime . هذي la droite خارج point N متاع l'image قُبَلْ ارسم w ، عاود نفس الخدمة بـ

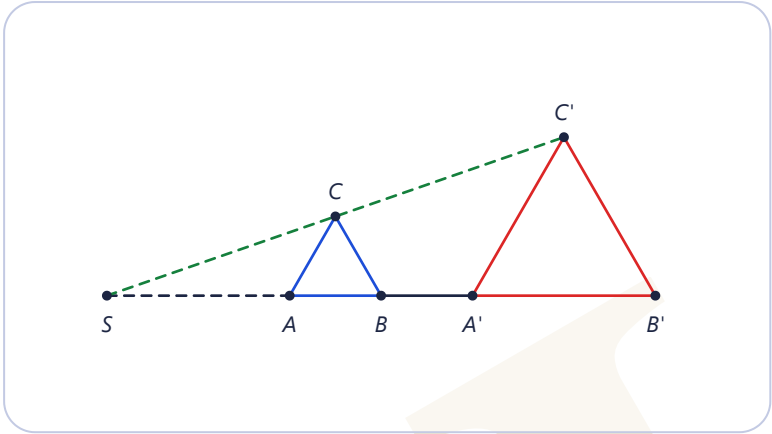
Une homothétie est entièrement connue dès qu'on a son centre O, un point A et son image A prime : les trois points sont alignés, et le rapport est le réel k qui vérifie le vecteur O A prime égale k fois le vecteur O A. Pour construire l'image d'un autre point M, tu n'as pas besoin de calculer k. Si M n'est pas sur la droite O A, trace la droite O M, puis la parallèle à la droite A M qui passe par A prime : elles se coupent en M prime. Et si M est sur la droite O A, construis d'abord l'image d'un point N hors de cette droite, et refais le même travail avec N et N prime.

Soient O, A et A' trois points alignés, avec A et A' distincts de O. Il existe **une seule** homothétie de centre O qui transforme A en A' : son rapport est le réel k tel que $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$.

On construit alors l'image M' de n'importe quel point M sans calculer k :

- si M n'est pas sur la droite (OA) : M' est le point d'intersection de la droite (OM) et de la parallèle à (AM) passant par A' ;
- si M est sur la droite (OA) : on construit d'abord l'image N' d'un point N hors de cette droite, puis M' est le point d'intersection de (OA) et de la parallèle à (NM) passant par N'.

Inversement, le centre d'une homothétie est sur chaque droite qui joint un point à son image.



Le centre S est sur la droite (AA') et sur la droite (CC').

Sur une droite horizontale sont alignés, de gauche à droite, les points S, A, B, A' et B'. Au-dessus de AB, un petit triangle équilatéral ABC. Au-dessus de A'B', un triangle équilatéral A'B'C' deux fois plus grand. La droite qui passe par C et C' coupe la droite horizontale au point S.

LE RAPPORT EST FIXÉ PAR A ET A'

$$\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles équilatéraux, les points A, B, A' et B' sont alignés dans cet ordre, et C et C' sont du même côté de la droite (AB). Une homothétie h transforme A en A' et B en B'. Montrer que $h(C) = C'$, puis construire le centre de h.

Deux parallèles — L'angle $\widehat{BAC}$ et l'angle $\widehat{B'A'C'}$ mesurent chacun $60°$, et ils sont correspondants : la droite (AC) est parallèle à la droite $(A'C')$. De même, la droite (BC) est parallèle à la droite $(B'C')$.

$$(AC) \parallel (A'C') \quad ; \quad (BC) \parallel (B'C')$$

L'image de C — L'image de la droite (AC) est la parallèle à (AC) passant par A' : c'est $(A'C')$. De même, l'image de (BC) est $(B'C')$. Le point C est sur les deux droites, donc son image est sur les deux images.

$$h(C) = C'$$

Le centre — Un point, son image et le centre sont alignés : le centre est sur la droite (AA') et sur la droite (CC'). On le note S.

$$S \text{ est le point d'intersection de } (AA') \text{ et } (CC')$$

$$S \text{ est le point d'intersection de } (AA') \text{ et } (CC')$$

À ne pas faire : Pour construire M', on trace par A' la parallèle à la droite (OM) — On trace par A' la parallèle à la droite (AM) ; elle coupe (OM) en M'. C'est la droite qui joint A à M qui a pour image la droite qui joint leurs images : ces deux droites sont parallèles.

14. PROPRIÉTÉ

Conservation du milieu

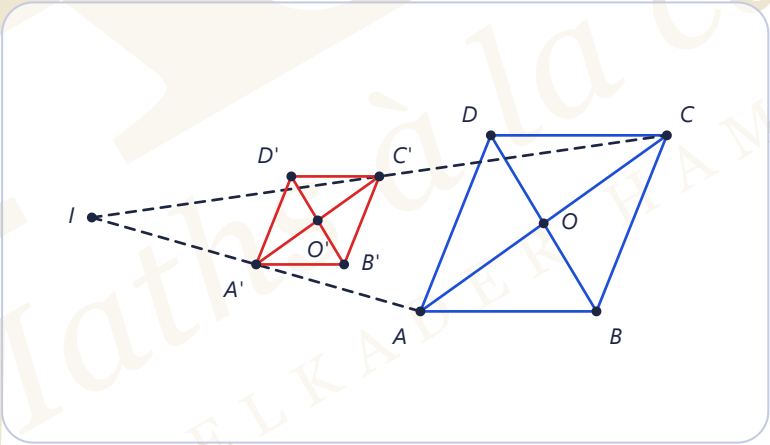
CE QU'IL DIT

L'homothétie t7afedh 3la le milieu. Ken P houwa le milieu du segment MN, l'image mte3ou P prime hiya le milieu du segment M prime N prime. 3lech ? Le vecteur MP égale le vecteur PN. Nadhrbou ez-zouz fi k : le vecteur M prime P prime égale le vecteur P prime N prime. Donc P prime houwa le milieu. W menha ntalla3ou : l'image mta3 parallélogramme hiya parallélogramme, 5ater les diagonales mte3ou yetla9aw dima fi le milieu mte3hom.

l'homothétie تحافظ على le milieu . كان P هو l'image ، le milieu du segment M N متاعو P prime هي le vecteur M P égale le vecteur P N ؟ علاش . milieu du segment M prime N prime k : le في نضربو الزوز . le milieu منها نطلّعو : w هو vecteur M prime P prime égale le vecteur P prime N prime . donc P prime l'image متاع parallélogramme هي parallélogramme ، خاطر les diagonales متاعو يتلاقاو ديما في le milieu متاعهم .

L'homothétie conserve le milieu. Si P est le milieu du segment M N, son image P prime est le milieu du segment M prime N prime. Pourquoi ? Le vecteur M P égale le vecteur P N. On multiplie les deux par k : le vecteur M prime P prime égale le vecteur P prime N prime. Donc P prime est le milieu. Et on en tire ceci : l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme, parce que ses diagonales se coupent toujours en leur milieu.

Une homothétie conserve le **milieu** : si P est le milieu d'un segment $[MN]$ et si M', N' et P' sont les images de M, N et P par une homothétie, alors P' est le milieu du segment $[M'N']$.



L'image du centre O est le centre O' du parallélogramme image.

À droite, un parallélogramme ABCD dont les diagonales se coupent en O. À gauche, un point I. Deux segments en pointillés joignent I aux sommets A et C. Entre I et ABCD, un parallélogramme A'B'C'D' deux fois plus petit, image de ABCD par une homothétie de centre I : ses côtés sont parallèles à ceux de ABCD, et ses diagonales se coupent en O', aligné avec I et O.

$$P \text{ milieu de } [MN] \implies P' \text{ milieu de } [M'N']$$

DÉMONSTRATION

P est le milieu de $[MN]$: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$. Par la propriété caractéristique, $\overrightarrow{M'P'} = k\,\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{P'N'} = k\,\overrightarrow{PN}$, donc $\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{P'N'}$: P' est le milieu de $[M'N']$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. On désigne par A', B', C', D' et O' les images respectives de A, B, C, D et O par une homothétie h. Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$?

Le centre O — Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu : O est le milieu du segment $[AC]$ et du segment $[BD]$.

O milieu de $[AC]$ et de $[BD]$

Les images — Une homothétie conserve le milieu : O' est le milieu du segment $[A'C']$ et du segment $[B'D']$.

O' milieu de $[A'C']$ et de $[B'D']$

Conclure — Les diagonales du quadrilatère $A'B'C'D'$ se coupent en leur milieu.

$A'B'C'D'$ est un parallélogramme de centre O'

> $A'B'C'D'$ est un parallélogramme de centre O'

À ne pas faire : L'image du milieu de $[MN]$ est le milieu de $[MM']$ — L'image du milieu de $[MN]$ est le milieu de $[M'N']$. On prend le milieu du segment image, celui qui joint les images des deux extrémités.

---

15. PROPRIÉTÉ

Conservation du barycentre

CE QU'IL DIT

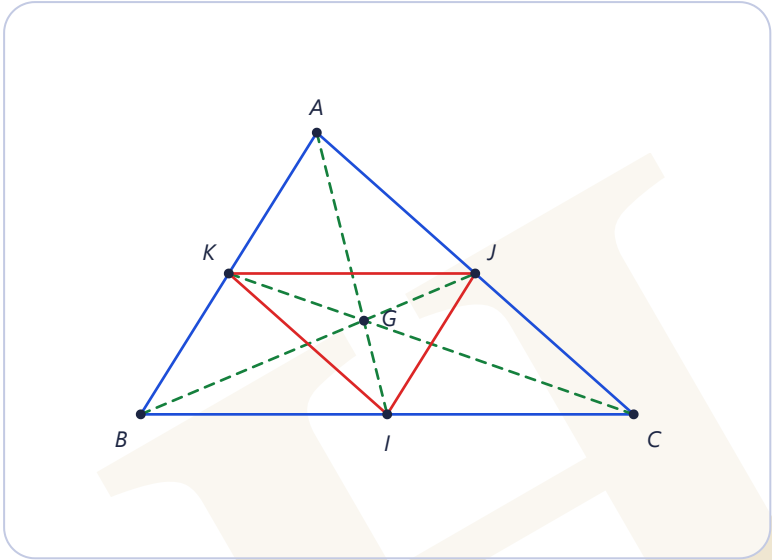
L'homothétie t7afedh zeda 3la le barycentre. Ken P houwa le barycentre des points M et N, affectés des coefficients alpha et bêta, wa9tha P prime houwa le barycentre de M prime et N prime, b nafs les coefficients. Yekfi nadhrbou la relation vectorielle fi k. W nafs el 7keya m3a trois points. W bel 5sous : l'image mta3 le centre de gravité mta3 triangle, hiya le centre de gravité mta3 el triangle image.

l'homothétie تحافظ زادة على le barycentre . كان P هو le barycentre des points M et N ، affectés des coefficients alpha et bêta ، وقتها P prime هو le barycentre de M prime et N prime ، بنفس les coefficients . w في la relation vectorielle نضربو . يكفي k . w نفس الحكاية مع trois points بالخصوص : l'image متاع le centre de gravité هي ، triangle متاع centre de gravité . triangle image الـ متاع

L'homothétie conserve aussi le barycentre. Si P est le barycentre des points M et N, affectés des coefficients alpha et bêta, alors P prime est le barycentre de M prime et N prime, avec les mêmes coefficients. Il suffit de multiplier la relation vectorielle par k. Et c'est la même chose avec trois points. En particulier : l'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Une homothétie conserve le **barycentre** : soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$, et P le barycentre des points pondérés (M, α) et (N, β). Si M', N' et P' sont les images de M, N et P par une homothétie, alors P' est le barycentre des points pondérés (M', α) et (N', β).

Il en est de même pour le barycentre de trois points pondérés. En particulier, l'image du **centre de gravité** d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.



Le triangle des milieux IJK est l'image de ABC par l'homothétie de centre G et de rapport −1/2.

Un triangle ABC. I est le milieu du côté BC, J le milieu du côté CA et K le milieu du côté AB. Les trois médianes AI, BJ et CK, en pointillés verts, se coupent au centre de gravité G. Le triangle IJK, en rouge, relie les trois milieux : il est deux fois plus petit que ABC et retourné.

$$\alpha\,\overrightarrow{PM}+\beta\,\overrightarrow{PN}=\vec{0}\implies\alpha\,\overrightarrow{P'M'}+\beta\,\overrightarrow{P'N'}=\vec{0}$$

DÉMONSTRATION

P est le barycentre de (M,α) et (N,β) : $\alpha\,\overrightarrow{PM}+\beta\,\overrightarrow{PN}=\vec{0}$. En multipliant par k : $\alpha\,k\,\overrightarrow{PM}+\beta\,k\,\overrightarrow{PN}=\vec{0}$, c'est-à-dire $\alpha\,\overrightarrow{P'M'}+\beta\,\overrightarrow{P'N'}=\vec{0}$ par la propriété caractéristique. Donc P' est le barycentre de (M',α) et (N',β).

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On note I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

Sur une médiane — Le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane $[AI]$ à partir de A : le vecteur $\overrightarrow{GI}$ est égal à $-\dfrac{1}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{GA}$.

$$\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

Les trois sommets — L'homothétie h de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ transforme donc A en I. De même, elle transforme B en J et C en K : le triangle IJK est l'image du triangle ABC.

$$h(A)=I\quad;\quad h(B)=J\quad;\quad h(C)=K$$

Le barycentre — L'image du centre de gravité de ABC est le centre de gravité de IJK. Or G est le centre de h, donc il est sa propre image.

$$h(G)=G$$

G est le centre de gravité de IJK

À ne pas faire : L'homothétie de centre G qui transforme A en I a pour rapport $\frac{1}{2}$ — Son rapport est $-\frac{1}{2}$. Le point G est entre A et I : les deux vecteurs qui partent de G sont de sens contraires.

---

16. APPLICATION

La configuration du trapèze

CE QU'IL DIT

Mithel ma3rouf : la configuration du trapèze. Fi trapèze ABCD, les bases mte3ou AB w CD, nsammiw I le milieu de AB, w J le milieu de CD, w O el point elli yetla9aw fih la droite AD w la droite BC, w O prime el point elli yetla9aw fih les diagonales. Wa9tha el quatre points O w I w O prime w J alignés. Nthabtouha b zouz homothéties : h, de centre O, teb3ath A l D, w g, de centre O prime, teb3ath A l C. W koll wa7da teb3ath le milieu I l le milieu J.

مثال معروف : la configuration du trapèze . في les bases ، A B C D trapèze متاعو A B w C D ، نسمّيو I le milieu de A B ، w J le milieu de C D ، w O الـ point اللي يتلاقاو فيه la droite B C ، w O la droite A D w la droite A D w الـ point اللي يتلاقاو فيه les diagonales . وقتها الـ quatre points O w I w O prime w J alignés . نثبتوها homothéties : h ، de centre O بـ زوز I le milieu ـل J le milieu . تبعث A ـل O prime de centre ، g w ، D ، تبعث A w ـل C . كل وحدة تبعث

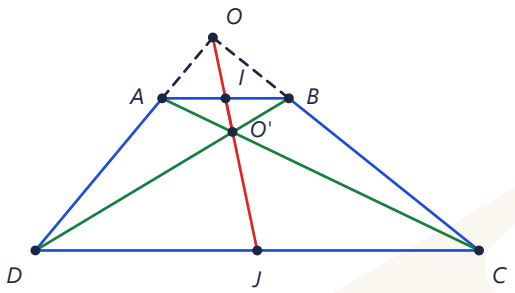
Un exemple classique : la configuration du trapèze. Dans un trapèze A B C D, de bases A B et C D, on note I le milieu de A B, J le milieu de C D, O le point où se coupent la droite A D et la droite B C, et O prime le point où se coupent les diagonales. Alors les quatre points O, I, O prime et J sont alignés. On le prouve avec deux homothéties : h, de centre O, envoie A sur D, et g, de centre O prime, envoie A sur C. Et chacune envoie le milieu I sur le milieu J.

Dans un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$, on note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, O le point d'intersection des droites (AD) et (BC), et O' le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).

Alors les quatre points O, I, O' et J sont **alignés**.

On le prouve avec deux homothéties : h, de centre O, qui transforme A en D, et g, de centre O', qui transforme A en C.

Maths à la carte ABDELKADER HARRAM



Les points O, I, O' et J sont sur une même droite.

Un trapèze ABCD : la petite base AB est en haut, la grande base DC en bas, avec D à gauche et C à droite. Les côtés AD et BC, prolongés en pointillés vers le haut, se coupent en O. Les diagonales AC et BD, en vert, se coupent en O' à l'intérieur du trapèze. I est le milieu de AB, J le milieu de DC. Une droite rouge passe par O, I, O' et J.

$O,\ I,\ O',\ J$ sont alignés

EXEMPLE TRAITÉ

Avec les notations de la figure, montrer que h transforme B en C, puis que les points O, I, O' et J sont alignés.

L'image de B — L'image de la droite (AB) par h est la parallèle à (AB) passant par D : c'est la droite (DC). L'image de B est sur (DC) et sur la droite (OB) : c'est C.

$h(A) = D \quad ; \quad h(B) = C$

Le milieu — h transforme le segment $[AB]$ en le segment $[DC]$, et une homothétie conserve le milieu : l'image de I est J.

$h(I) = J$

Un alignement — Un point, son image et le centre sont alignés : O, I et J sont alignés.

$O,\ I,\ J$ sont alignés

Avec les diagonales — De la même façon, g transforme A en C et B en D, donc I en J : les points O', I et J sont alignés. Les quatre points sont sur la droite (IJ).

$O,\ I,\ O',\ J$ sont alignés

$O,\ I,\ O',\ J$ sont alignés

À ne pas faire : Les homothéties h et g ont le même rapport — Le rapport de h est $\dfrac{DC}{AB}$, celui de g est $-\dfrac{DC}{AB}$. Le centre O est à l'extérieur du segment $[AD]$, alors que O' est entre A et C : les deux rapports sont opposés.

17. APPLICATION

Un problème de construction

CE QU'IL DIT

Tawa problème de construction. 3andna zouz droites sécantes D un w D deux, w point I mouch 3la 7atta wa7da fihom. N7ebbou point A 3la D un, w point B 3la D deux, b7ith le vecteur IB égale trois fois le vecteur IA. El fekra : B houwa l'image de A par l'homothétie h de centre I et de rapport trois. W 5ater A 3la D un, B lezem ykoun 3la l'image mta3 D un. Narsmou l'image hedhi, la droite D trois : t9oss D deux fi B. W ba3d A houwa l'antécédent mta3 B : el point elli la droite IB t9oss fih D un.

تولّا problème de construction . عندنا زوز droites sécantes D un w D deux ، w point I موش على حتّى وحدة فيهم . نحبّو point A على point B ، w point B على D un ، D deux على D un ، بحيث le vecteur I A égale trois fois le vecteur I B . الفكرة : B هو l'image de A par l'homothétie h de centre I et de rapport trois . w لازم D un ، B على A خاطر يكون على l'image متاع D un . نرسمو l'image هذي ، la droite D trois : تقصّ D deux في w . B بعد A هو l'antécédent متاع B : الـ point اللي la droite I B تقصّ فيه D un .

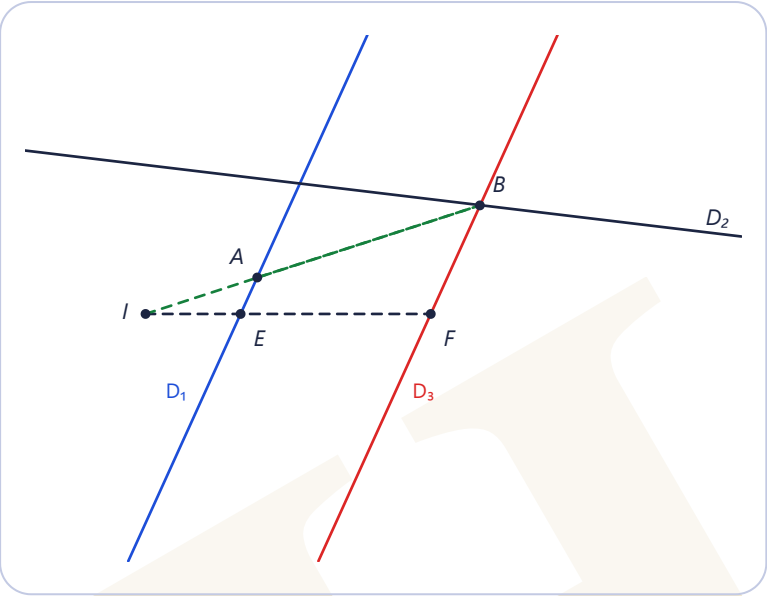
Passons à un problème de construction. On a deux droites sécantes D un et D deux, et un point I qui n'est sur aucune des deux. On veut un point A sur D un et un point B sur D deux, tels que le vecteur I B égale trois fois le vecteur I A. L'idée : B est l'image de A par l'homothétie h de centre I et de rapport trois. Et comme A est sur D un, B doit être sur l'image de D un. On trace cette image, la droite D trois : elle coupe D deux en B. Ensuite A est l'antécédent de B : le point où la droite I B coupe D un.

Le problème. Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes et I un point qui n'appartient ni à D_1 ni à D_2. Construire un point A de D_1 et un point B de D_2 tels que $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IA}$.

L'idée. L'égalité dit que B est l'image de A par l'homothétie h de centre I et de rapport 3. Comme A est sur D_1, son image B est sur l'image de D_1 ; et B doit aussi être sur D_2.

La construction. On construit la droite D_3, image de D_1 par h : elle est parallèle à D_1. Elle coupe D_2 en B. Le point A est l'antécédent de B : c'est le point d'intersection de la droite (IB) et de D_1.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



D₃ est l'image de D₁ : elle coupe D₂ en B, et la droite (IB) coupe D₁ en A.

Deux droites sécantes : D_1, en bleu, très inclinée, et D_2, presque horizontale, en haut. Un point I à gauche, hors des deux droites. Un point E sur D_1, et son image F, trois fois plus loin de I sur la demi-droite d'origine I passant par E. La droite D_3, en rouge, passe par F et est parallèle à D_1 ; elle coupe D_2 au point B. Le segment IB, en pointillés, coupe D_1 au point A.

B EST L'IMAGE DE A

$$\overrightarrow{IB} = 3\,\overrightarrow{IA}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Réaliser cette construction, et justifier que les points A et B obtenus conviennent.

L'image de la droite — On choisit un point E de D_1 et on construit son image F : le vecteur $\overrightarrow{IF}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{IE}$. La droite D_3 est la parallèle à D_1 passant par F.

$$\overrightarrow{IF} = 3\,\overrightarrow{IE}$$

Le point B — Les droites D_1 et D_2 sont sécantes, donc D_3, qui est parallèle à D_1, coupe D_2 : on note B leur point d'intersection.

$$B \in D_3 \cap D_2$$

Le point A — B est sur D_3, image de D_1 : son antécédent A est sur D_1. On l'obtient en coupant D_1 par la droite (IB).

$$\overrightarrow{IB} = 3\,\overrightarrow{IA}$$

$$\overrightarrow{IB} = 3\,\overrightarrow{IA}$$

À ne pas faire : On construit l'image de D_2 par h et on la coupe avec D_1 — On construit l'image de D_1 par h et on la coupe avec D_2. C'est le point A, sur la première droite, qui a pour image B : c'est donc l'image de la première droite qui contient B.

18. APPLICATION

Un problème d'alignement

CE QU'IL DIT

Hedha problème d'alignement. ABCD trapèze, les bases mte3ou AB w DC, w la droite AD w la droite BC yetla9aw fi E. Ne5dhou point F de5el le triangle ABE. La parallèle à la droite AF elli tet3adda men D, w la parallèle à la droite BF elli tet3adda men C, yetla9aw fi G. N7ebbou nthabtou elli E w F w G alignés. El mefte7 : l'homothétie h de centre E elli teb3ath A l D. Ken nwarriw elli G houwa l'image mta3 F, kammelna, 5ater el point w l'image mte3ou w le centre dima alignés.

هذا problème d'alignement متاعو A B C D trapèze ، les bases A B w D C ، w la droite A D w la droite B C يتلاقاو في E . ناخذو point F داخل le triangle A B E . la parallèle à la droite A F اللي تتعدّى من D ، w la parallèle à la droite B F اللي تتعدّى من C ، يتلاقاو في G . نحبّو نثبتو اللي E w F w G alignés . المفتاح : l'homothétie h de centre E اللي تبعث A لـ D . كان نورّيو اللي G هو l'image متاع F ، كمّلنا ، خاطر الـ point w l'image متاعو le centre w alignés ديما .

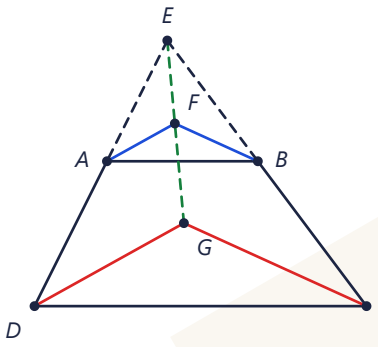
Voici un problème d'alignement. A B C D est un trapèze, de bases A B et D C, et la droite A D et la droite B C se coupent en E. On prend un point F à l'intérieur du triangle A B E. La parallèle à la droite A F qui passe par D, et la parallèle à la droite B F qui passe par C, se coupent en G. On veut prouver que E, F et G sont alignés. La clé : l'homothétie h de centre E qui envoie A sur D. Si on montre que G est l'image de F, c'est terminé, car un point, son image et le centre sont toujours alignés.

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$. Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point E. Soit F un point intérieur au triangle ABE. La parallèle à (AF) passant par D et la parallèle à (BF) passant par C se coupent en un point G.

Alors les points E, F et G sont **alignés**.

L'idée. Pour prouver que trois points sont alignés, on cherche une homothétie dont l'un est le centre et qui transforme le deuxième en le troisième. Ici : l'homothétie h de centre E qui transforme A en D.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



G est l'image de F par l'homothétie de centre E qui transforme A en D.

Un trapèze ABCD : la petite base AB en haut, la grande base DC en bas, avec D à gauche et C à droite. Les côtés AD et BC, prolongés en pointillés vers le haut, se coupent en E. Un point F est à l'intérieur du triangle ABE ; les segments AF et BF sont tracés en bleu. Par D passe la parallèle à (AF), par C la parallèle à (BF), en rouge : elles se coupent en G, à l'intérieur du trapèze. Une droite verte passe par E, F et G.

$$h(F) = G \implies E,\ F,\ G \text{ alignés}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec les données de la figure, on considère l'homothétie h de centre E qui transforme A en D. Déterminer l'image de la droite (AF), montrer que $h(B) = C$, puis en déduire que E, F et G sont alignés.

Une première droite — L'image de la droite (AF) est la parallèle à (AF) passant par l'image de A, c'est-à-dire par D : c'est la droite (DG).

$h\big((AF)\big) = (DG)$

L'image de B — L'image de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par D : c'est (DC). L'image de B est sur (DC) et sur la droite (EB) : c'est C. L'image de la droite (BF) est donc la parallèle à (BF) passant par C : la droite (CG).

$h(B) = C \quad ; \quad h\big((BF)\big) = (CG)$

L'image de F — F est sur les droites (AF) et (BF) : son image est sur leurs deux images, (DG) et (CG). C'est le point G.

$h(F) = G$

Conclure — Un point, son image et le centre d'une homothétie sont alignés.

$E,\ F,\ G$ sont alignés

$E,\ F,\ G$ sont alignés

À ne pas faire : La droite (DG) est parallèle à (AF), donc G est l'image de F — G est l'image de F parce qu'il est sur les images des deux droites (AF) et (BF). Une seule droite ne suffit pas à repérer un point : il faut deux droites qui se coupent en ce point, et leurs deux images.

---

19. DÉFINITION

Figures homothétiques

CE QU'IL DIT

Définition : zouz figures n9oulou 3lihom homothétiques, ken wa7da fihom hiya l'image mta3 lo5ra par une homothétie. Rodd belek : agrandissement walla réduction ma ya3tich dima zouz figures homothétiques. Lezem koll côté mta3 l'image ykoun parallèle lel côté elli y9ablou, w les droites elli torbot koll point b l'image mte3ou lezem yet3addew el koll men nafs el point, houwa le centre.

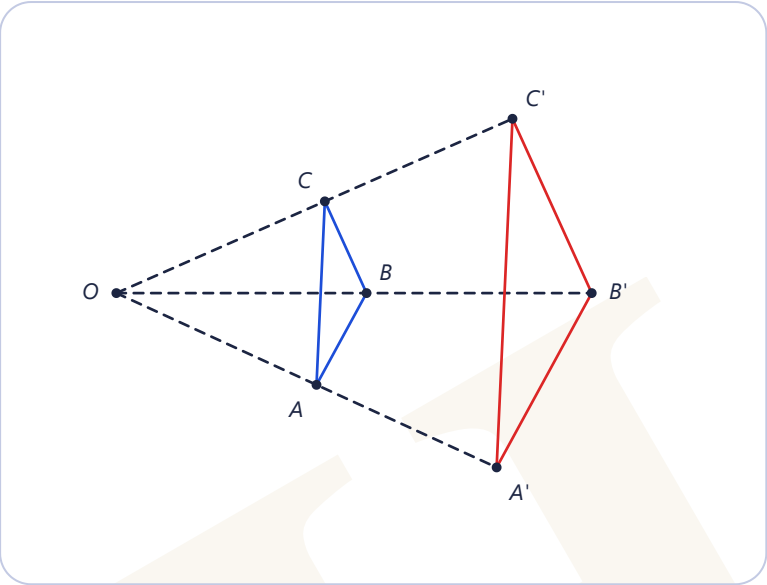
définition : زوز figures نقولو عليهم homothétiques ، كان وحدة فيهم هي l'image متاع الأخرى par une
homothétie . ردّ بالك : agrandissement ولّا réduction ما يعطيش ديما زوز figures homothétiques . لازم كل
côté متاع l'image يكون parallèle للـ côté اللي يقابلو ، les droites w اللي تربط كل point بـ l'image متاعو لازم
يتعدّاو الكل من نفس الـ point ، هو le centre .

Une définition : deux figures sont dites homothétiques si l'une est l'image de l'autre par une homothétie. Attention : un agrandissement ou une réduction ne donne pas toujours deux figures homothétiques. Il faut que chaque côté de l'image soit parallèle au côté qui lui correspond, et que les droites qui joignent chaque point à son image passent toutes par le même point, le centre.

Deux figures sont dites **homothétiques** si l'une est l'image de l'autre par une homothétie.

Un agrandissement ou une réduction d'une figure n'en est pas toujours une image par une homothétie. Il faut en plus que chaque côté de l'image soit **parallèle** au côté correspondant, et que les droites qui joignent chaque point à son image passent toutes par un même point : le centre.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Deux triangles homothétiques : mêmes directions, même centre O.

Trois demi-droites partent d'un point O, à gauche. Sur la première se trouvent A puis A', sur la deuxième B puis B', sur la troisième C puis C'. Le petit triangle ABC, en bleu, est près de O ; le grand triangle A'B'C', en rouge, est plus loin. Les côtés AB et A'B' sont parallèles, ainsi que BC et B'C', et AC et A'C'.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, les points O, A et A' sont alignés, ainsi que O, B et B', et O, C et C'. Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, et les droites (BC) et $(B'C')$ aussi. Quelle est la position relative des droites (AC) et $(A'C')$?

Une homothétie — O, B et B' sont alignés : on note h l'homothétie de centre O qui transforme B en B'.

$h(B) = B'$

L'image de A — L'image de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par B' : c'est $(A'B')$. L'image de A est sur $(A'B')$ et sur la droite (OA) : c'est A'.

$h(A) = A'$

L'image de C — De même, l'image de la droite (BC) est $(B'C')$, et l'image de C est C'.

$h(C) = C'$

Conclure — La droite (AC) a pour image la droite $(A'C')$: elles sont parallèles. Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont homothétiques.

$(AC) \parallel (A'C')$

$$(AC) \parallel (A'C')$$

À ne pas faire : Deux carrés sont toujours homothétiques — Deux carrés ne sont homothétiques que si leurs côtés sont parallèles. Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle : si l'un des carrés est tourné par rapport à l'autre, aucune homothétie n'envoie l'un sur l'autre.

20. PROPRIÉTÉ

Conservation des angles

CE QU'IL DIT

L'homothétie t7afedh 3la les angles. Ken A prime w B prime w C prime houma les images mta3 A w B w C, wa9tha l'angle B prime A prime C prime égale l'angle BAC. El fekra mta3 la preuve : nzall9ou le triangle ABC b la translation elli teb3ath A l A prime. El triangle elli nal9aweh isométrique l ABC, w les côtés mte3ou elli yo5rjou men A prime 3la nafs les droites mta3 les côtés mta3 A prime B prime C prime. Tfakker : l'homothétie tbaddel el 9add mta3 el figure, mouch ech-chakl mte3ha.

l'homothétie تحافظ على les angles . كان A prime w B prime w C prime هوما les images متاع A w B w C ، وقتها l'angle B A C égale l'angle B prime A prime C prime . الفكرة متاع la preuve : نزلّقو le triangle A B C بـ A prime لـ A اللي تبعث la translation اللي نلقاوه isométrique لـ les côtés w ، A B C متاعو اللي . الـ triangle l'homothétie : تفكّر . A prime B prime C prime متاع les côtés متاع les droites على نفس A prime يخرجو من figure ، موش الشكل متاعها . تبدّل القدّ متاع الـ

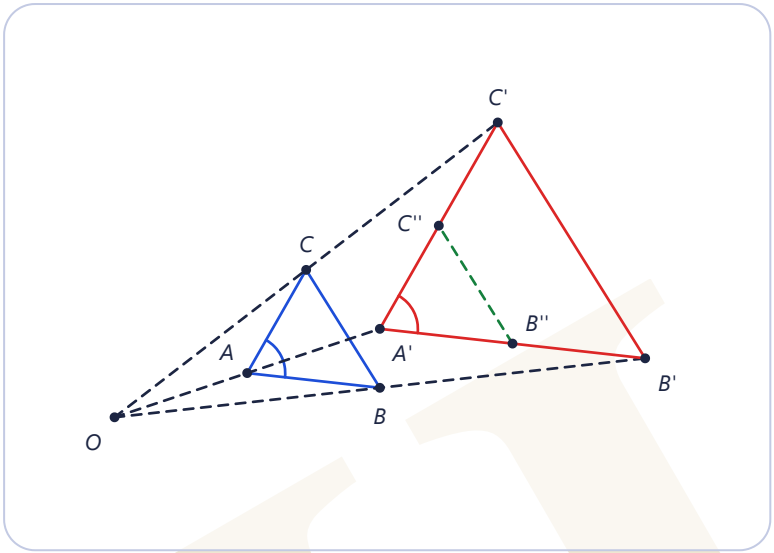
L'homothétie conserve les angles. Si A prime, B prime et C prime sont les images de A, B et C, alors l'angle B prime A prime C prime égale l'angle B A C. L'idée de la preuve : on fait glisser le triangle A B C par la translation qui envoie A sur A prime. Le triangle obtenu est isométrique à A B C, et ses côtés qui partent de A prime sont sur les mêmes droites que les côtés de A prime B prime C prime. Retiens : l'homothétie change la taille de la figure, pas sa forme.

Une homothétie conserve les **angles** : si A', B' et C' sont les images de A, B et C par une homothétie, alors

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$$

L'image d'un triangle est donc un triangle qui a les mêmes angles : une homothétie change la taille d'une figure, pas sa forme.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Le triangle translaté A'B''C'' montre que l'angle en A' est égal à l'angle en A.

Un point O en bas à gauche. Un petit triangle ABC, en bleu, et son image A'B'C', en rouge, deux fois plus grande et deux fois plus loin de O. En pointillés verts, le triangle A'B''C'' obtenu en faisant glisser ABC jusqu'à ce que A arrive en A' : il a les mêmes dimensions que ABC, et ses côtés issus de A' sont portés par les côtés de A'B'C'. Les angles en A et en A' portent la même marque.

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$$

DÉMONSTRATION

On note $A'B''C''$ l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$: les triangles ABC et $A'B''C''$ sont isométriques, donc $\widehat{B''A'C''} = \widehat{BAC}$. Or $\overrightarrow{A'B''} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{A'B''}$; de même $\overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{A'C''}$. Si $k > 0$, les demi-droites $[A'B')$ et $[A'B'')$ sont confondues, ainsi que $[A'C')$ et $[A'C'')$: les deux angles sont le même. Si $k < 0$, les angles $\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{B''A'C''}$ sont opposés par le sommet, donc égaux. Dans les deux cas, $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 35°$. On note $A'B'C'$ son image par une homothétie de rapport -3. Donner la nature du triangle $A'B'C'$ et la mesure de ses angles.

L'angle droit — L'angle en A' est égal à l'angle en A : le triangle image est rectangle en A'.

$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC} = 90°$

Les autres angles — L'angle en B' mesure $35°$, comme l'angle en B ; le troisième se calcule par la somme des angles d'un triangle.

$\widehat{A'C'B'} = 180° - 90° - 35° = 55°$

$A'B'C'$ est rectangle en A', avec des angles de $35°$ et $55°$

À ne pas faire : Par une homothétie de rapport 3, un angle de $40°$ devient un angle de $120°$ — Il reste un angle de $40°$. Le rapport multiplie les longueurs, pas les angles.

21. PROPRIÉTÉ

Parallélisme et orthogonalité

CE QU'IL DIT

L'homothétie t7afedh 3la le parallélisme w l'orthogonalité. Ken zouz droites parallèles, les images mte3hom parallèles. W ken zouz droites perpendiculaires, les images mte3hom perpendiculaires. Es-sbab : koll droite l'image mte3ha droite parallèle liha, donc ez-zouz images ya3mlou binethom nafs l'angle mta3 ez-zouz droites elli bdina bihom. W menha : l'image mta3 rectangle hiya rectangle, l'image mta3 carré hiya carré, w l'image mta3 hauteur fi triangle hiya hauteur fel triangle image.

l'homothétie تحافظ على le parallélisme w l'orthogonalité . كان زوز les images ، droites parallèles متاعهم
. السبب : كل droite parallèles كان زوز les images ، droites perpendiculaires متاعهم
l'image متاعها droite parallèle ليها ، donc images الزوز يعملو بيناتهم نفس l'angle متاع الزوز droites اللي بدينا
بيهم . w منها : l'image متاع rectangle هي l'image ، carré متاع rectangle هي l'image ، w hauteur متاع triangle في hauteur هي triangle في الـ image .

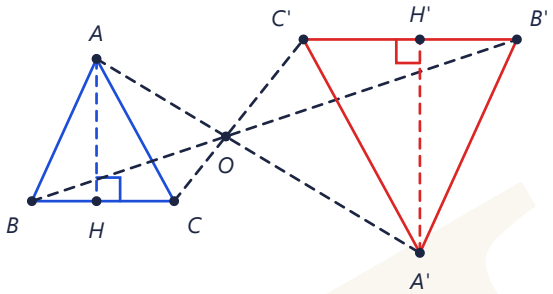
L'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité. Si deux droites sont parallèles, leurs images sont parallèles. Et si deux droites sont perpendiculaires, leurs images sont perpendiculaires. La raison : chaque droite a pour image une droite qui lui est parallèle, donc les deux images forment entre elles le même angle que les deux droites de départ. On en tire : l'image d'un rectangle est un rectangle, l'image d'un carré est un carré, et l'image d'une hauteur d'un triangle est une hauteur du triangle image.

Soit h une homothétie, D_1 et D_2 deux droites, et D'_1 et D'_2 leurs images respectives par h.

- Si D_1 et D_2 sont **parallèles**, alors D'_1 et D'_2 sont parallèles.
- Si D_1 et D_2 sont **perpendiculaires**, alors D'_1 et D'_2 sont perpendiculaires.

On dit qu'une homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



L'image du pied H de la hauteur est le pied H' de la hauteur du triangle image.

À gauche, un triangle ABC, en bleu, avec sa hauteur AH en pointillés : H est sur le côté BC, et un angle droit est marqué en H. Au centre, un point O. À droite, le triangle A'B'C', en rouge, image de ABC par une homothétie de centre O et de rapport négatif : il est plus grand et retourné. Sa hauteur A'H' est tracée en pointillés, avec un angle droit marqué en H' sur le côté B'C'.

$$D_1 \parallel D_2 \implies D_1' \parallel D_2'$$

$$D_1 \perp D_2 \implies D_1' \perp D_2'$$

DÉMONSTRATION

L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle : D_1' est parallèle à D_1 et D_2' est parallèle à D_2. Si D_1 est parallèle à D_2, alors D_1', D_1, D_2 et D_2' sont parallèles entre elles. Si D_1 est perpendiculaire à D_2, alors D_1', parallèle à D_1, est perpendiculaire à D_2, donc à D_2', qui est parallèle à D_2.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle et $A'B'C'$ son image par une homothétie h. On note H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A, et H' le pied de la hauteur du triangle $A'B'C'$ issue de A'. Montrer que H' est l'image de H par cette homothétie.

Sur le côté — H est sur la droite (BC) : son image est sur la droite image, $(B'C')$.

$h(H) \in (B'C')$

La perpendiculaire — La droite (AH) est perpendiculaire à (BC) : son image, qui passe par A' et par l'image de H, est perpendiculaire à $(B'C')$.

$h\big((AH)\big) \perp (B'C')$

Conclure — L'image de H est le point de $(B'C')$ où arrive la perpendiculaire issue de A' : c'est le pied de la hauteur, H'.

$h(H) = H'$

$$h(H) = H'$$

À ne pas faire : D_1 et D_2 sont perpendiculaires, donc D'_1 est perpendiculaire à D_1 — D'_1 est parallèle à D_1, et perpendiculaire à D'_2. Chaque droite a pour image une droite qui lui est parallèle ; c'est entre les deux images que l'angle droit se retrouve.

---

22. THÉORÈME

Image d'un cercle

CE QU'IL DIT

W le cercle ? L'image mta3 cercle de centre O et de rayon R par une homothétie de rapport k, hiya le cercle de centre O prime, l'image mta3 O, w le rayon mte3ou R prime égale la valeur absolue de k fois R. 3lech ? Ken M 3la le cercle, OM égale R, w l'homothétie todhrob les distances fi la valeur absolue de k : O prime M prime égale la valeur absolue de k fois R. Bech tarsem l'image mta3 cercle, arsem l'image mta3 le centre, w ba3d odhrob le rayon.

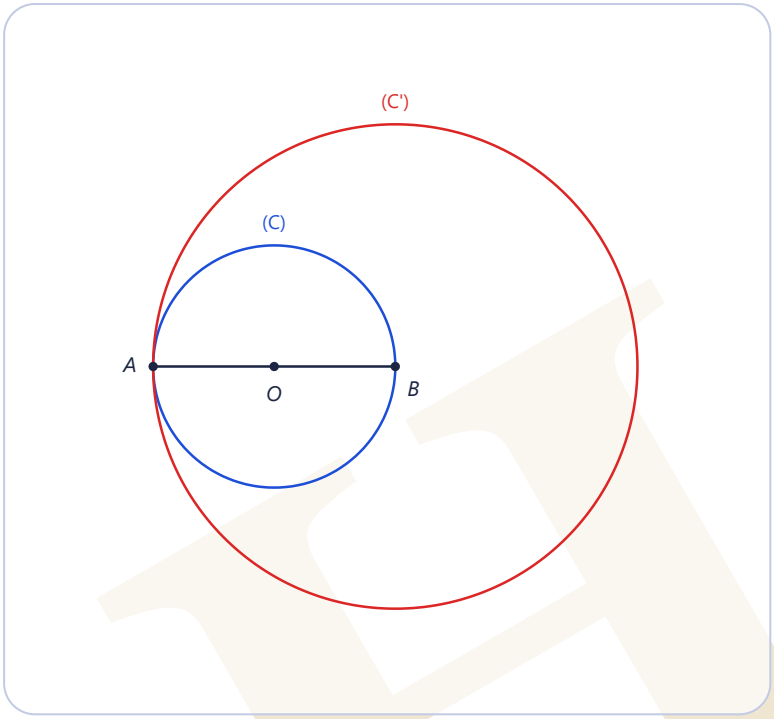
le هي ، cercle de centre O et de rayon R par une homothétie de rapport k متاع l'image ؟ w le cercle . R prime égale la valeur absolue de k fois R متاعو O ، w le rayon متاع cercle de centre O prime ، l'image la valeur absolue de k في les distances تضرب le cercle ، O M égale R ، w l'homothétie على M كان ؟ علاش : O prime M prime égale la valeur absolue de k fois R باش ترسم l'image متاع cercle ، ارسم l'image متاع . le rayon بعد اضرب le centre ، w .

Et le cercle ? L'image d'un cercle de centre O et de rayon R par une homothétie de rapport k est le cercle de centre O prime, image de O, et de rayon R prime égale la valeur absolue de k fois R. Pourquoi ? Si M est sur le cercle, O M égale R, et l'homothétie multiplie les distances par la valeur absolue de k : O prime M prime égale la valeur absolue de k fois R. Pour tracer l'image d'un cercle, construis l'image du centre, puis multiplie le rayon.

L'image d'un cercle de centre O et de rayon R par une homothétie h de rapport k est le cercle de centre $O' = h(O)$ et de rayon $R' = |k|\,R$.

En pratique. Pour tracer l'image d'un cercle, on construit l'image de son centre, puis on multiplie le rayon par $|k|$ — ou bien on construit l'image d'un point du cercle : le cercle image passe par ce point.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



Par l'homothétie de centre A et de rapport 2, le centre O devient B et le rayon double.

Un petit cercle (C), en bleu, de centre O et de diamètre AB, avec A à gauche et B à droite. Un grand cercle (C'), en rouge, de centre B, passe par A : son rayon est le double de celui de (C). Les deux cercles se touchent au point A, et le petit est à l'intérieur du grand.

CENTRE H(O), RAYON |K| R

$$\mathscr{C}(O,R) \longmapsto \mathscr{C}'(O', |k|\,R)$$

DÉMONSTRATION

Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ et M' son image : $O'M' = |k| \times OM = |k|\,R = R'$, donc M' est sur le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon R'. Réciproquement, soit N' un point de $\mathscr{C}'$ et N son antécédent : $O'N' = |k| \times ON$, donc $ON = \dfrac{R'}{|k|} = R$ et N est sur $\mathscr{C}$. L'image de $\mathscr{C}$ est exactement $\mathscr{C}'$.

EXEMPLE TRAITÉ

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 3, et un diamètre $[AB]$ de ce cercle. Construire l'image (C') du cercle (C) par l'homothétie h de centre A qui transforme O en B.

Le rapport — O est le milieu du segment $[AB]$: le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{AO}$. Le rapport de h est 2.

$$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AO}$$

Le centre et le rayon — L'image du centre O est B, et le rayon est multiplié par 2.

$$R' = 2 \times 3 = 6$$

Le cercle image — (C') est le cercle de centre B et de rayon 6. Il passe par A, car $BA = 6$: le point A est le centre de l'homothétie et il est sur (C), donc il est aussi sur l'image.

$$(C') \text{ est le cercle de centre } B \text{ passant par } A$$

(C') est le cercle de centre B passant par A

À ne pas faire : Par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$, le rayon devient $-\frac{1}{2}\,R$ — Le rayon devient $\frac{1}{2}\,R$. Un rayon est une longueur : on le multiplie par la valeur absolue du rapport. Le signe ne joue que sur la position du centre.

---

23. PROPRIÉTÉ

Conservation du contact

CE QU'IL DIT

L'homothétie t7afedh 3la le contact. Ken droite D tangente l cercle fi point A, wa9tha l'image mta3 D tangente l l'image mta3 le cercle, fel point A prime, l'image mta3 A. Es-sbab : la tangente perpendiculaire 3la le rayon, w l'homothétie t7afedh 3la l'orthogonalité. W kif kif, zouz cercles tangents, les images mte3hom zouz cercles tangents. Dima n7awwlou la droite w le cercle m3a b3adhhom.

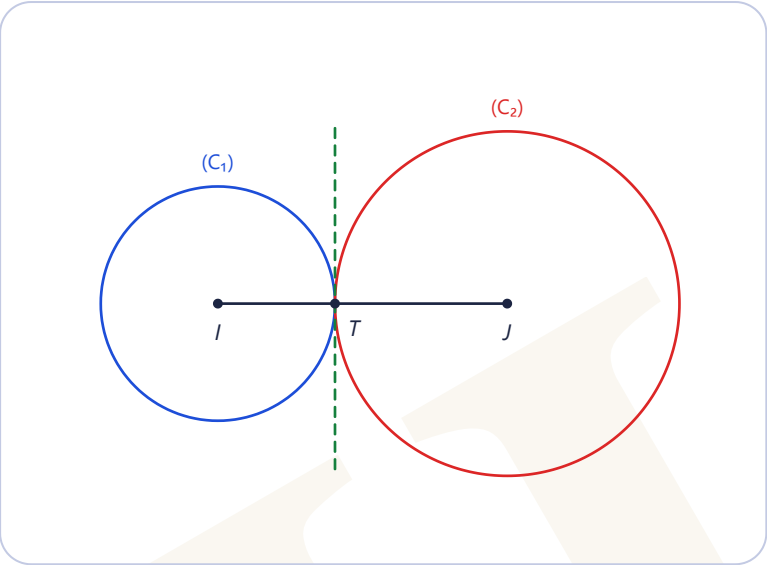
l'homothétie تحافظ على le contact . كان D tangente droite لـ cercle في point A ، وقتها l'image متاع D
tangente لـ l'image متاع le cercle ، في الـ l'image ، point A prime متاع A . السبب : la tangente
perpendiculaire على l'homothétie ، w تحافظ على le rayon . w l'orthogonalité كيف كيف ، زوز cercles
tangents ، les images متاعهم زوز cercles tangents . ديما نحوّلو la droite w le cercle مع بعضهم .

L'homothétie conserve le contact. Si une droite D est tangente à un cercle en un point A, alors l'image de D est tangente à l'image du cercle, au point A prime, image de A. La raison : la tangente est perpendiculaire au rayon, et l'homothétie conserve l'orthogonalité. De même, deux cercles tangents ont pour images deux cercles tangents. On transforme toujours la droite et le cercle ensemble.

Une homothétie conserve le **contact** : soit $\mathscr{C}$ un cercle et D une droite tangente à ce cercle en un point A. On note A', $\mathscr{C}'$ et D' les images respectives de A, de $\mathscr{C}$ et de D par une homothétie. Alors la droite D' est tangente au cercle $\mathscr{C}'$ au point A'.

De même, deux cercles tangents ont pour images deux cercles tangents.

Maths à la carte ABDELMADER HAMMI



L'homothétie de centre T qui transforme I en J transforme (C_1) en (C_2).

Deux cercles tangents extérieurement en un point T : à gauche le cercle (C_1), en bleu, de centre I, et à droite le cercle (C_2), en rouge, plus grand, de centre J. Les points I, T et J sont alignés sur une droite horizontale. La tangente commune en T, en pointillés verts, est verticale.

DÉMONSTRATION

A est sur $\mathscr{C}$ et sur D, donc A' est sur $\mathscr{C}'$ et sur D'. La tangente D est perpendiculaire au rayon (OA) ; une homothétie conserve l'orthogonalité, donc D' est perpendiculaire à la droite $(O'A')$, où O' est le centre de $\mathscr{C}'$. Une droite qui passe par un point A' du cercle et qui est perpendiculaire au rayon $(O'A')$ est la tangente en A'.

EXEMPLE TRAITÉ

On considère deux cercles (C_1) et (C_2), de centres respectifs I et J, tangents en un point T. Soit h l'homothétie de centre T qui transforme I en J. Montrer que h transforme (C_1) en (C_2).

Le centre — L'image de (C_1) est un cercle dont le centre est l'image de I, c'est-à-dire J.

$$h(I) = J$$

Un point — T est le centre de h, donc il est sa propre image. Comme T est sur (C_1), le cercle image passe par T.

$$h(T) = T$$

Conclure — Le cercle de centre J qui passe par T est (C_2).

$$h\big((C_1)\big) = (C_2)$$

La tangente — La tangente à (C_1) en T passe par le centre de h : elle est sa propre image. Par conservation du contact, elle est tangente à (C_2) en T : les deux cercles ont la même tangente en T.

$$h\big((C_1)\big) = (C_2)$$

À ne pas faire : L'image d'une tangente à $\mathscr{C}$ est encore tangente à $\mathscr{C}$ — L'image d'une tangente à $\mathscr{C}$ est tangente au cercle image $\mathscr{C}'$. On transforme la droite et le cercle en même temps : le contact se conserve entre les deux images, au point image.

24. APPLICATION

Deux cercles de rayons différents

CE QU'IL DIT

Tawa ne5dhou zouz cercles 3andhom rayons mo5talfin, R w R prime. 9addech men homothétie teb3ath el cercle numéro un lel cercle numéro deux ? Zouz. Le rayon yetdhrab fi la valeur absolue de k, donc k égale R prime sur R, walla moins R prime sur R. B le rapport positif, le centre I 5arej le segment elli yorbot ez-zouz centres. W b le rapport négatif, le centre J bin ez-zouz centres. W ez-zouz points hedhouma nesta3mlouhom bech narsmou les tangentes communes lez-zouz cercles : yet3addew men I walla men J.

توّا ناخذو زوز cercles عندهم rayons مختلفين ، R w R prime . قدّاش من homothétie تبعث الـ cercle numéro un للـ cercle numéro deux ؟ زوز . le rayon يتضرب في R sur R prime égale k donc ، k de absolue valeur la ، ولّا R sur R moins . w الزوز يربط اللي le segment خارج le rapport positif ، le centre I بـ centres le بـ . w الزوز بين rapport négatif ، le centre J points هاذوما نستعملوهم باش نرسمو les tangentes communes للزوز cercles : يتعدّاو من I ولّا من J .

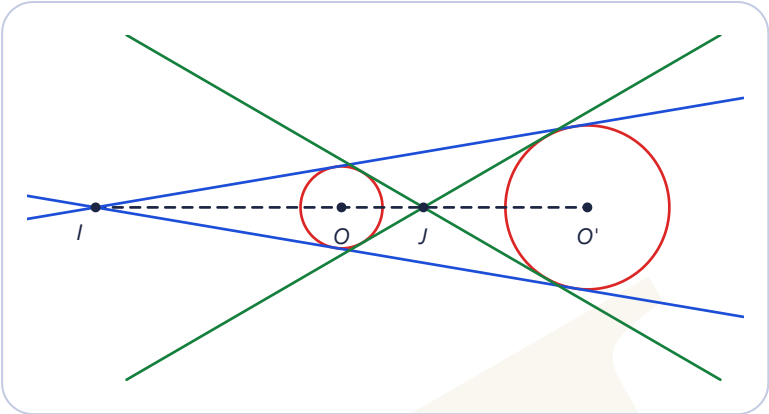
Prenons maintenant deux cercles de rayons différents, R et R prime. Combien d'homothéties envoient le cercle numéro un sur le cercle numéro deux ? Deux. Le rayon est multiplié par la valeur absolue de k, donc k égale R prime sur R, ou bien moins R prime sur R. Avec le rapport positif, le centre I est hors du segment qui joint les deux centres. Et avec le rapport négatif, le centre J est entre les deux centres. Ces deux points servent à tracer les tangentes communes aux deux cercles : elles passent par I ou par J.

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R' tels que $R \neq R'$.

- Il existe une seule homothétie de rapport **positif** qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$: son rapport est $\dfrac{R'}{R}$, et son centre I vérifie $\overrightarrow{IO'} = \dfrac{R'}{R}\overrightarrow{IO}$.
- Il existe une seule homothétie de rapport **négatif** qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$: son rapport est $-\dfrac{R'}{R}$, et son centre J vérifie $\overrightarrow{JO'} = -\dfrac{R'}{R}\overrightarrow{JO}$.

Tangentes communes. Quand les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, les tangentes à $\mathscr{C}$ issues de I et celles issues de J sont tangentes aux deux cercles : ce sont leurs tangentes communes.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



I est le centre de l'homothétie de rapport positif, J celui de l'homothétie de rapport négatif.

Sur une droite horizontale, de gauche à droite : le point I, le centre O d'un petit cercle, le point J, puis le centre O' d'un cercle deux fois plus grand. Les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre. Deux droites bleues partent de I et touchent les deux cercles du même côté : les tangentes extérieures. Deux droites vertes passent par J, entre les deux cercles, et touchent chaque cercle : les tangentes intérieures.

DEUX HOMOTHÉTIES

$$k = \frac{R'}{R} \quad \text{ou} \quad k = -\frac{R'}{R}$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 1, et un cercle (C') de centre O' et de rayon 2, avec $OO' = 6$. Déterminer le rapport et la position du centre de chacune des deux homothéties qui transforment (C) en (C').

Les rapports — Le rayon est multiplié par la valeur absolue du rapport : elle vaut 2. Le rapport est 2 ou -2.

$$|k| = \frac{R'}{R} = 2$$

Rapport positif — Le centre I vérifie que le vecteur $\overrightarrow{IO'}$ est égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{IO}$: O est le milieu du segment $[IO']$. Le point I est le symétrique de O' par rapport à O.

$$\overrightarrow{IO'} = 2\,\overrightarrow{IO}, \quad IO = 6$$

Rapport négatif — Le centre J vérifie que le vecteur $\overrightarrow{JO'}$ est égal à -2 fois le vecteur $\overrightarrow{JO}$: J est sur le segment $[OO']$, au tiers à partir de O.

$$\overrightarrow{JO'} = -2\,\overrightarrow{JO}, \quad OJ = 2$$

Les tangentes — Une tangente à (C) issue de I passe par le centre de la première homothétie : elle est sa propre image, donc elle est tangente à (C'). Les deux tangentes issues de I et les deux tangentes issues de J sont les quatre tangentes communes.

rapport 2 et centre I ; rapport -2 et centre J

À ne pas faire : Une seule homothétie transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ — Il y en a deux quand $R \neq R'$: l'une de rapport $\dfrac{R'}{R}$, l'autre de rapport $-\dfrac{R'}{R}$. Le rayon ne donne que la valeur absolue du rapport : les deux signes sont possibles, avec deux centres différents.

---

25. APPLICATION

Cercles tangents

CE QU'IL DIT

Hedha problème de construction b cercles tangents. 3andna cercle numéro un, w droite D un, w point A 3la D un, mouch 3la le cercle. N7ebbou narsmou cercle tangent l le cercle numéro un, w tangent l D un fel point A. Ne5dhou le diamètre BC mta3 le cercle, perpendiculaire 3la D un, w la tangente fi B : nsammiwha D deux, w hiya parallèle à D un. La droite AB t9oss le cercle marra o5ra fi I. El mefte7 : l'homothétie h de centre I elli teb3ath B l A. Teb3ath la tangente D deux l D un, w teb3ath le cercle numéro un l cercle numéro deux. W 5ater l'homothétie t7afedh 3la le contact, le cercle numéro deux tangent l D un fi A. W houwa zeda tangent l le cercle numéro un fi I, le centre mta3 l'homothétie.

هذا problème de construction بـ cercles tangents . عندنا cercle numéro un ، w droite D un ، w point A على D un ، موش على le cercle . نحبّو نرسمو cercle tangent لـ le cercle numéro un ، w tangent لـ D un في نسمّيوها : B في D un ، w la tangente على le cercle ، perpendiculaire متاع le diamètre B C ناخذو . point A الـ l'homothétie h de : المفتاح . I مرّة أخرى في le cercle تقصّ parallèle à D un . la droite A B هي D deux ، w cercle numéro لـ le cercle numéro un تبعث D un ، w لـ la tangente D deux تبعث . A لـ B اللي تبعث centre I هو A . w في D un لـ le contact ، le cercle numéro deux tangent على تحافظ l'homothétie خاطر deux . w زادة tangent لـ le cercle numéro un في le centre ، I متاع l'homothétie .

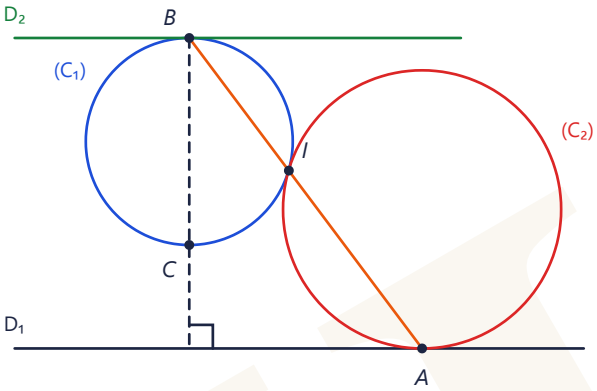
Voici un problème de construction avec des cercles tangents. On a un cercle numéro un, une droite D un, et un point A de D un qui n'est pas sur le cercle. On veut tracer un cercle tangent au cercle numéro un, et tangent à D un au point A. On prend le diamètre B C du cercle qui est perpendiculaire à D un, et la tangente en B : on l'appelle D deux, et elle est parallèle à D un. La droite A B recoupe le cercle en I. La clé : l'homothétie h de centre I qui envoie B sur A. Elle envoie la tangente D deux sur D un, et le cercle numéro un sur un cercle numéro deux. Comme l'homothétie conserve le contact, le cercle numéro deux est tangent à D un en A. Il est aussi tangent au cercle numéro un en I, le centre de l'homothétie.

Le problème. On donne un cercle (C_1), une droite D_1 et un point A de D_1 qui n'appartient pas à (C_1). Construire un cercle tangent à (C_1) et tangent à D_1 au point A.

La configuration. Soit $[BC]$ un diamètre de (C_1) tel que la droite (BC) soit perpendiculaire à D_1, et D_2 la tangente à (C_1) en B. La droite (AB) recoupe le cercle (C_1) en I. On note h l'homothétie de centre I qui transforme B en A, et (C_2) l'image de (C_1) par h.

Alors le cercle (C_2) est **tangent à** (C_1) **en** I et **tangent à** D_1 **en** A.

L'idée. Une homothétie conserve le contact : on transforme en même temps le cercle (C_1) et sa tangente D_2.



(C₂) est l'image de (C₁) par l'homothétie de centre I qui transforme B en A.

Un cercle (C₁), en bleu, et en dessous une droite horizontale D₁ qui ne le coupe pas. Le diamètre [BC] du cercle est vertical, donc perpendiculaire à D₁ : B est le point le plus haut du cercle, C le point le plus bas. La tangente D₂ au cercle en B, en vert, est horizontale : elle est parallèle à D₁. Un point A est placé sur D₁, à droite. Le segment [AB], en orange, recoupe le cercle (C₁) en un point I, situé entre A et B. Le cercle (C₂), en rouge, plus grand, est tangent à (C₁) en I, à l'extérieur, et tangent à la droite D₁ en A.

$$h(B) = A \quad ; \quad h(D_2) = D_1$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec ces notations, montrer que l'homothétie h transforme la droite D_2 en la droite D_1, puis que le cercle (C_2) est tangent à la droite D_1 en A et tangent au cercle (C_1) en I.

Deux parallèles — La tangente D_2 est perpendiculaire au diamètre $[BC]$, et la droite D_1 est perpendiculaire à la droite (BC) : les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

$D_2 \parallel D_1$

L'image de la tangente — L'image de la droite D_2 est la parallèle à D_2 passant par l'image de B, c'est-à-dire par A : c'est la droite D_1.

$h(D_2) = D_1$

Le contact avec la droite — La droite D_2 est tangente au cercle (C_1) en B. Par conservation du contact, son image D_1 est tangente au cercle image (C_2) au point A, image de B.

Le contact avec le cercle — Le point I est le centre de l'homothétie : il est sa propre image, et comme il est sur le cercle (C_1), il est aussi sur le cercle (C_2). La tangente au cercle (C_1) en I passe par le centre de l'homothétie : elle est sa propre image. Par conservation du contact, elle est donc tangente au cercle (C_2) en I. Les deux cercles ont la même tangente en I : ils sont tangents en I.

$h(I) = I$

L'autre cercle — En recommençant avec l'autre extrémité du diamètre, le point C, on obtient de la même façon un second cercle, tangent lui aussi au cercle (C_1) et à la droite D_1 en A.

le cercle (C_2) est tangent au cercle (C_1) en I et à la droite D_1 en A

26. PROPRIÉTÉ

Périmètres et aires

CE QU'IL DIT

Chnowa ysir l les périmètres w les aires ? Par une homothétie de rapport k, koll longueur tetdhrab fi la valeur absolue de k. Donc le périmètre mta3 polygone yetdhrab fi la valeur absolue de k. Ama l'aire tetdhrab fi k au carré, 5ater l'aire hiya produit mta3 zouz longueurs. W nafs el 7keya l le cercle : le périmètre mte3ou yetdhrab fi la valeur absolue de k, w l'aire mte3ou fi k au carré.

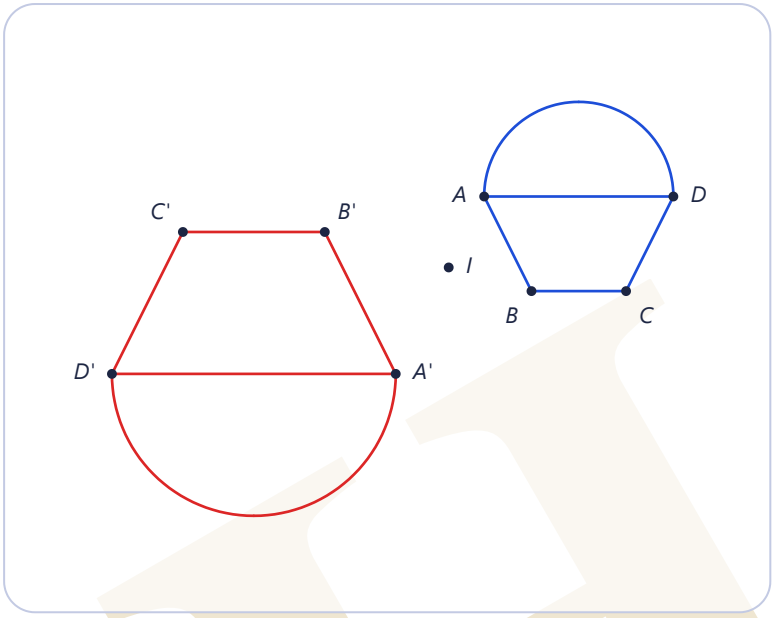
شنوّة يصير لـ les périmètres w les aires ؟ par une homothétie de rapport k ، كل longueur تتضرب في la valeur absolue de k . donc le périmètre متاع polygone يتضرب في la valeur absolue de k . أما l'aire تتضرب في k au carré ، خاطر l'aire هي produit متاع زوز longueurs . w نفس الحكاية لـ le périmètre متاعو le cercle : le périmètre متاعو يتضرب في l'aire ، w la valeur absolue de k في k au carré .

Que deviennent les périmètres et les aires ? Par une homothétie de rapport k, chaque longueur est multipliée par la valeur absolue de k. Donc le périmètre d'un polygone est multiplié par la valeur absolue de k. Mais l'aire est multipliée par k au carré, parce qu'une aire est le produit de deux longueurs. Et c'est la même chose pour le cercle : son périmètre est multiplié par la valeur absolue de k, et son aire par k au carré.

L'image d'un polygone de périmètre p et d'aire a par une homothétie de rapport k est un polygone de périmètre $|k|\,p$ et d'aire $k^2\,a$.

Il en est de même pour un cercle : l'image d'un cercle de rayon R a pour périmètre $|k| \times 2\pi R$ et pour aire $k^2 \times \pi R^2$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



F' est l'image de F par l'homothétie de centre I et de rapport −1,5.

En haut à droite, la figure F, en bleu : un trapèze ABCD, dont la grande base AD est en haut et la petite base BC en bas, surmonté d'un demi-disque de diamètre AD. Un point I est placé à gauche de F, à la hauteur du trapèze, un peu au-dessus de la petite base. En bas à gauche, la figure F', en rouge, image de F par l'homothétie de centre I et de rapport −1,5 : elle est une fois et demie plus grande, et retournée, le demi-disque vers le bas.

LE PÉRIMÈTRE

$$p' = |k|\, p$$

L'AIRE

$$a' = k^2\, a$$

DÉMONSTRATION

Pour un triangle ABC d'image $A'B'C'$: chaque côté est multiplié par $|k|$, donc le périmètre aussi. Si H est le pied de la hauteur issue de A, son image H' est le pied de la hauteur issue de A', et $A'H' = |k| \times AH$. L'aire de $A'B'C'$ vaut donc $\frac{1}{2} \times B'C' \times A'H' = \frac{1}{2} \times |k|\, BC \times |k|\, AH = k^2 \times \frac{1}{2} \times BC \times AH$. Un polygone se découpe en triangles, et le résultat s'étend.

EXEMPLE TRAITÉ

La figure F est formée d'un trapèze $ABCD$ et d'un demi-disque de diamètre $[AD]$. On donne $AD = 4$, $BC = 2$, la hauteur du trapèze vaut 2, et $AB = CD$, l'unité étant le centimètre. On note F' l'image de F par une homothétie de rapport $-1{,}5$, puis p et s le périmètre et l'aire de F, et p' et s' ceux de F'. Calculer p et s, puis les quotients $\frac{p'}{p}$ et $\frac{s'}{s}$.

Le périmètre de F — Le contour est fait du demi-cercle de rayon 2, des côtés $[AB]$ et $[CD]$, qui mesurent chacun $\sqrt{5}$, et du côté $[BC]$.

$p = 2\pi + 2\sqrt{5} + 2$

L'aire de F — On ajoute l'aire du demi-disque, qui vaut 2π, et l'aire du trapèze, qui vaut 6.

$s = 2\pi + 6$

Les quotients — Inutile de recalculer pour F' : le périmètre est multiplié par la valeur absolue du rapport, et l'aire par son carré.

$$\frac{p'}{p} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{s'}{s} = 1{,}5^2 = 2{,}25$$

$$\frac{p'}{p} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{s'}{s} = 1{,}5^2 = 2{,}25$$

À ne pas faire : Le rapport est $-1{,}5$, donc l'aire est multipliée par $-1{,}5$ — L'aire est multipliée par $(-1{,}5)^2 = 2{,}25$. Une aire est positive, et elle dépend de deux dimensions : on multiplie par le carré du rapport.

---

27. MÉTHODE

Problèmes de lieu

CE QU'IL DIT

Tawa les problèmes de lieu. Point M yet7arrek 3la ligne, w point e5er M prime marbout bih. Ken M prime houwa l'image mta3 M par une homothétie, el centre mte3ha fixe w le rapport mte3ha constant, wa9tha M prime yet7arrek 3la l'image mta3 el ligne. Ken M yet7arrek 3la droite, M prime yet7arrek 3la droite parallèle. W ken M yet7arrek 3la cercle de rayon R, M prime yet7arrek 3la cercle, le rayon mte3ou la valeur absolue de k fois R. Et-tari9a : chouf chnowa fixe, lawwej 3la l'homothétie, w ba3d 5oudh l'image mta3 el ligne.

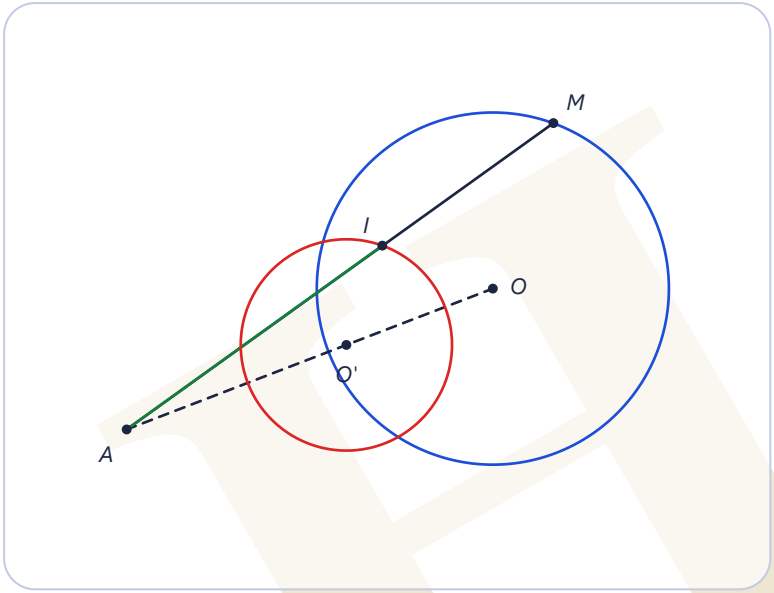
تولّا les problèmes de lieu . point M يتحرّك على w point ligne آخر M prime مربوط بيه . كان هو M prime وقتها ، constant متاعها fixe w le rapport متاعها centre الـ ، M par une homothétie متاع l'image يتحرّك على متاع الـ ligne . كان M يتحرّك على droite ، M prime يتحرّك على w droite parallèle . كان M يتحرّك على cercle de rayon R ، M prime يتحرّك على cercle ، le rayon متاعو R fois k de valeur absolue la . l'homothétie ، w على لوّج ، fixe شنوّة شوف : الطريقة ligne الـ متاع l'image خوذ بعد

Passons aux problèmes de lieu. Un point M se déplace sur une ligne, et un autre point M prime lui est lié. Si M prime est l'image de M par une homothétie dont le centre est fixe et le rapport constant, alors M prime se déplace sur l'image de la ligne. Si M se déplace sur une droite, M prime se déplace sur une droite parallèle. Et si M se déplace sur un cercle de rayon R, M prime se déplace sur un cercle dont le rayon est la valeur absolue de k fois R. La méthode : regarde ce qui est fixe, cherche l'homothétie, puis prends l'image de la ligne.

Quand un point M décrit une ligne et que M' est son image par une homothétie h, le point M' décrit l'**image** de cette ligne par h :

- si M décrit une droite D, M' décrit la droite image, parallèle à D ;
- si M décrit un cercle de centre O et de rayon R, M' décrit le cercle de centre $h(O)$ et de rayon $|k|\,R$.

Méthode. On repère les éléments fixes ; on cherche une homothétie de centre fixe et de rapport constant qui transforme le point variable connu en le point cherché ; puis on prend l'image de la ligne qu'il décrit.



Quand M décrit le grand cercle, I décrit le petit cercle de centre O'.

Un grand cercle bleu de centre O. Un point A à l'extérieur, en bas à gauche. Un point M sur le cercle, relié à A par un segment ; sur ce segment, le point I est aux trois cinquièmes à partir de A. Le segment AO est tracé en pointillés, et le point O' y est aux trois cinquièmes à partir de A. Un cercle rouge de centre O', plus petit, passe par I.

$$M' = h(M) \text{ et } M \in \mathscr{C} \implies M' \in h(\mathscr{C})$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon R, et un point A qui n'appartient pas à (C). Soit M un point du cercle (C), et I le barycentre des points A et M affectés des coefficients 2 et 3. Déterminer le lieu du point I lorsque le point M décrit le cercle (C).

Fixe ou variable — Le cercle (C), son centre O et le point A sont fixes. Le point M varie sur (C), et I varie avec lui.

Le barycentre — I est le barycentre des points A et M affectés des coefficients 2 et 3 : le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est égal à trois cinquièmes du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AM}$$

Une homothétie — I est l'image de M par l'homothétie h de centre A et de rapport $\dfrac{3}{5}$: le centre est fixe et le rapport est constant.

$$I = h(M)$$

Le lieu — Quand M décrit (C), I décrit l'image de (C) : le cercle de centre O', image de O, et de rayon trois cinquièmes de R.

$$\overrightarrow{AO'} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AO}, \quad R' = \frac{3}{5}\,R$$

le lieu de I est le cercle de centre O' et de rayon $\frac{3}{5}R$

À ne pas faire : M décrit un cercle de rayon R, donc I décrit un cercle de même rayon R — I décrit un cercle de rayon $\frac{3}{5}R$. Une homothétie multiplie le rayon par la valeur absolue de son rapport ; seule une translation le conserverait.

---

28. APPLICATION

Un lieu avec deux diamètres

CE QU'IL DIT

Problème de lieu, b cercle de diamètre AB. Ne5dhou point S 3la la droite AB. L koll point M 3la le cercle, narsmou le diamètre PM, w ba3d el point M prime elli yetla9aw fih la droite SM w la droite AP. Win yet7arrek M prime ? Zouz diamètres ya3tiw rectangle : APBM. Donc la droite AP parallèle à la droite BM. L'homothétie h de centre S elli teb3ath B l A, teb3ath la droite BM l la droite AP, w teb3ath M l M prime. Donc le lieu mta3 M prime houwa l'image mta3 le cercle : cercle.

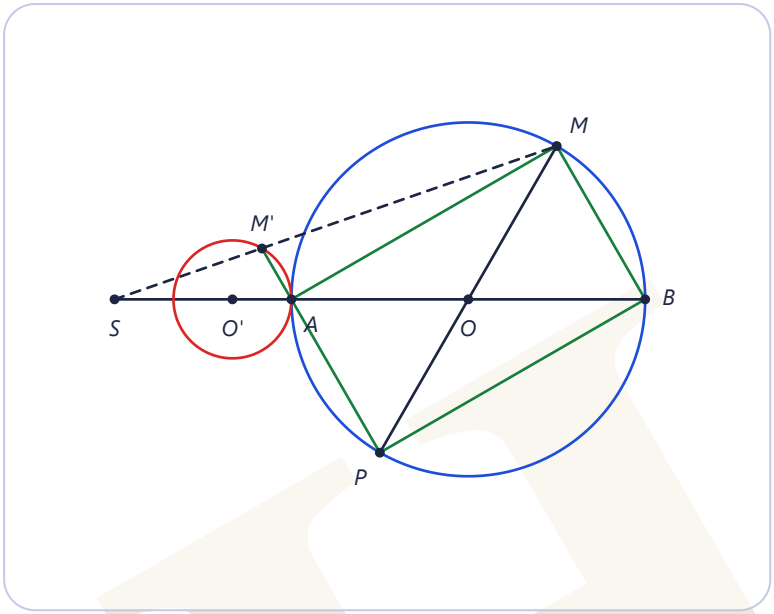
، le cercle على point M لكل . la droite A B على point S ناخذو . cercle de diamètre A B بـ ، problème de lieu
وين يتحرّك . la droite S M w la droite A P اللي يتلاقاو فيه point M prime بعد الـ le diamètre P M ، w نرسمو
rectangle : A P B M . donc la droite A P parallèle à la droite B M . يعطيو diamètres زوز ؟ M prime
M prime . لـ M تبعث la droite A P ، w لـ la droite B M تبعث ، A لـ B تبعث اللي l'homothétie h de centre S
. le cercle : cercle متاع l'image هو M prime متاع donc le lieu

Un problème de lieu, avec un cercle de diamètre A B. On prend un point S sur la droite A B. Pour chaque point M du cercle, on trace le diamètre P M, puis le point M prime où se coupent la droite S M et la droite A P. Où se déplace M prime ? Deux diamètres donnent un rectangle : A P B M. Donc la droite A P est parallèle à la droite B M. L'homothétie h de centre S qui envoie B sur A envoie la droite B M sur la droite A P, et elle envoie M sur M prime. Donc le lieu de M prime est l'image du cercle : un cercle.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ et S un point de la droite (AB), distinct de A et de B. Pour chaque point M du cercle, distinct de A et de B, on trace le diamètre $[PM]$, puis on note M' le point d'intersection des droites (SM) et (AP). Quel est le lieu du point M' lorsque M décrit le cercle ?

L'idée. $[AB]$ et $[PM]$ sont deux diamètres : $APBM$ est un rectangle, donc (AP) est parallèle à (BM). L'homothétie h de centre S qui transforme B en A transforme alors la droite (BM) en la droite (AP), et le point M en le point M'.

Le lieu de M' est donc l'image du cercle $\mathscr{C}$ par h, privée des images des points A et B.



M' est l'image de M par l'homothétie de centre S qui transforme B en A.

Un cercle bleu de diamètre AB horizontal, de centre O. Un point S sur la droite (AB), à gauche de A. Un point M sur le cercle, en haut à droite, et le point P diamétralement opposé, en bas à gauche : le quadrilatère APBM est un rectangle, tracé en vert. La droite (SM), en pointillés, coupe la droite (AP) au point M', situé entre S et M. Un petit cercle rouge, qui passe par A et par M', a son centre O' sur la droite (AB), entre S et A.

H DE CENTRE S

$$h(B) = A \implies h(M) = M'$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec ces données, on note (C) le cercle et h l'homothétie de centre S qui transforme B en A. Montrer que M' est l'image de M par h, puis conclure.

Un rectangle — Les segments $[AB]$ et $[PM]$ sont deux diamètres du cercle : ils ont le même milieu et la même longueur. Le quadrilatère $APBM$ est un rectangle, donc la droite (AP) est parallèle à la droite (BM).

$$(AP) \parallel (BM)$$

L'image d'une droite — L'image de la droite (BM) par h est la parallèle à (BM) passant par l'image de B, c'est-à-dire par A : c'est la droite (AP).

$$h\big((BM)\big) = (AP)$$

L'image de M — L'image de M est sur la droite (AP), et elle est alignée avec S et M : c'est le point M'.

$$h(M) = M'$$

Le lieu — Quand M décrit le cercle (C), son image M' décrit l'image de (C) par h : un cercle (C'), dont le centre est l'image de O et qui passe par A, image de B.

$$M' \in (C')$$

le lieu de M' est le cercle (C'), privé des images de A et de B

29. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : un carré dans un triangle

CE QU'IL DIT

Problème pour aller plus loin : narsmou carré de5el triangle ABC, zouz sommets 3la le côté AB, w wa7ed 3la AC, w wa7ed 3la BC. El fekra mezyena. Narsmou 9bal carré sghir MPQR, P w Q 3la AB, w M 3la AC : le quatrième sommet R yo93od de5el el triangle. W ba3d nkabbrou el carré hedha men A, b homothétie de centre A, 7atta yousel R lel côté BC, fel point R prime. L'image mta3 carré hiya carré, w les sommets mte3ou 3la el trois côtés.

واحد le côté A B ، w على sommets زوز ، triangle A B C داخل carré نرسمو : problème pour aller plus loin
A C : على A B ، w M على M P Q R ، P w Q صغير carré نرسمو قُبَيْل . الفكرة مزيانة . B C واحد على A C ، w على
، homothétie de centre A ، بـ A من هذا carré بعد نكبّرو الـ triangle . w يقعد داخل الـ le quatrième sommet R
carré ، w les sommets هي carré متاع point R prime . l'image في الـ ، côté B C للـ R حتّى يوصل
. trois côtés

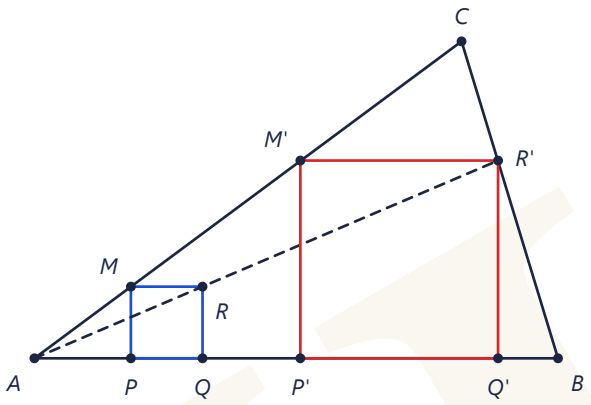
Un problème pour aller plus loin : construire un carré dans un triangle A B C, avec deux sommets sur le côté A B, un sur A C et un sur B C. L'idée est jolie. On trace d'abord un petit carré M P Q R, avec P et Q sur A B et M sur A C : le quatrième sommet R reste à l'intérieur du triangle. Puis on agrandit ce carré à partir de A, par une homothétie de centre A, jusqu'à ce que R arrive sur le côté B C, au point R prime. L'image d'un carré est un carré, et ses sommets sont sur les trois côtés.

Le problème. Construire un carré inscrit dans un triangle ABC : deux sommets sur le côté $[AB]$, un sommet sur le côté $[AC]$ et un sommet sur le côté $[BC]$.

L'idée. On commence par un carré plus petit, $MPQR$, qui ne remplit que trois des quatre conditions : P et Q sont sur $[AB]$, M est sur $[AC]$, et R est à l'intérieur du triangle. Puis on l'agrandit à partir du sommet A, jusqu'à ce que le quatrième sommet arrive sur le côté $[BC]$.

La construction. La droite (AR) coupe (BC) en R'. On note h l'homothétie de centre A qui transforme R en R', et $M'P'Q'R'$ l'image de $MPQR$ par h. Les points P' et Q' sont sur (AB), le point M' est sur (AC) et R' est sur (BC) : $M'P'Q'R'$ est le carré cherché.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Le grand carré est l'image du petit par l'homothétie de centre A qui transforme R en R'.

Un triangle ABC : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite. Un petit carré bleu MPQR, près de A : P et Q sont sur le côté AB, M est sur le côté AC au-dessus de P, et R est à l'intérieur du triangle, au-dessus de Q. La demi-droite d'origine A passant par R, en pointillés, coupe le côté BC au point R'. Un grand carré rouge M'P'Q'R' : P' et Q' sont sur AB, M' est sur AC, R' est sur BC.

H DE CENTRE A

$h(R) = R'$

EXEMPLE TRAITÉ

Justifier que $M'P'Q'R'$ est bien un carré dont les quatre sommets sont sur les côtés du triangle ABC, et dire comment le tracer.

Sur les côtés — Les droites (AB) et (AC) passent par le centre A : chacune est sa propre image. Les images P' et Q' sont donc sur (AB), et l'image M' est sur (AC). Le point R' est sur (BC) par construction.

$$P',\ Q' \in (AB) \quad ; \quad M' \in (AC) \quad ; \quad R' \in (BC)$$

Un carré — Une homothétie conserve l'orthogonalité et multiplie toutes les longueurs par le même nombre : l'image du carré $MPQR$ a quatre angles droits et quatre côtés égaux.

$M'P'Q'R'$ est un carré

Tracer — On trace par R' la parallèle à (RQ), qui coupe (AB) en Q', et la parallèle à (RM), qui coupe (AC) en M'. Puis P' est le point de (AB) tel que $(M'P')$ soit parallèle à (MP).

$M'P'Q'R'$ est un carré inscrit dans le triangle ABC

30. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : la droite d'Euler

CE QU'IL DIT

Problème pour aller plus loin : la droite d'Euler. Fi triangle ABC, nsammiw O le centre du cercle circonscrit, w G le centre de gravité, w H l'orthocentre. Ne5dhou l'homothétie h de centre G et de rapport moins un demi : teb3ath koll sommet l le milieu mta3 le côté elli y9ablou. Donc teb3ath koll hauteur l médiatrice, w teb3ath l'orthocentre H lel point O. En-natija : O w G w H alignés, w le vecteur OH égale trois fois le vecteur OG. La droite hedhi nsammiwha la droite d'Euler. W le cercle elli yet3adda men el trois milieux nsammiweh le cercle d'Euler : le rayon mte3ou houwa ennoss mta3 le rayon du cercle circonscrit.

O le centre du cercle نسمّيو ، triangle A B C في . problème pour aller plus loin : la droite d'Euler l'homothétie h de centre G et de rapport ناخذو . circonscrit ، w G le centre de gravité ، w H l'orthocentre médiatrice لـ hauteur كل تبعث donc . اللي يقابلو le côté متاع le milieu لـ sommet كل تبعث : moins un demi O w G w H alignés ، w le vecteur O H égale trois fois le : النتيجة . point O للـ l'orthocentre H تبعث ، w le نسمّيوه trois milieux الـ من يتعدّى اللي la droite d'Euler . w le cercle هذي نسمّيوها vecteur O G . la droite . le rayon du cercle circonscrit متاع النصّ هو متاعو cercle d'Euler : le rayon

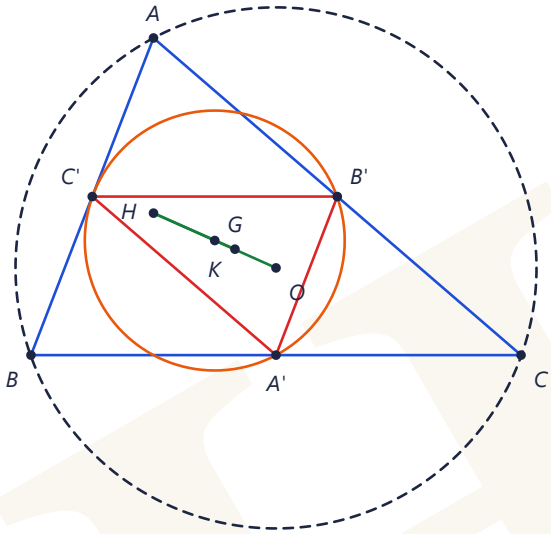
Un problème pour aller plus loin : la droite d'Euler. Dans un triangle A B C, on note O le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité et H l'orthocentre. On prend l'homothétie h de centre G et de rapport moins un demi : elle envoie chaque sommet sur le milieu du côté opposé. Donc elle envoie chaque hauteur sur une médiatrice, et elle envoie l'orthocentre H sur le point O. Résultat : O, G et H sont alignés, et le vecteur O H égale trois fois le vecteur O G. Cette droite s'appelle la droite d'Euler. Et le cercle qui passe par les trois milieux s'appelle le cercle d'Euler : son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit.

Soit ABC un triangle. On désigne par O le centre de son cercle circonscrit, par G son centre de gravité et par H son orthocentre. Soient A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Alors les points O, G et H sont alignés, et $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$. La droite qui contient O, G et H s'appelle la **droite d'Euler** du triangle ABC.

Le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ est appelé **cercle d'Euler** du triangle ABC : son centre est le milieu du segment $[OH]$, et son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit à ABC.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



O, G et H sont alignés ; le cercle d'Euler passe par les trois milieux.

Un triangle ABC, en bleu, et son cercle circonscrit, en pointillés, de centre O. A' est le milieu du côté BC, B' le milieu de AC et C' le milieu de AB ; le triangle A'B'C' est tracé en rouge. Trois points sont alignés sur une droite verte : l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre O, avec G entre H et O, deux fois plus près de O que de H. Le cercle d'Euler, en orange, passe par A', B' et C' ; son centre K est le milieu du segment OH.

LA DROITE D'EULER

$$\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec ces notations, montrer que l'image de la hauteur (AH) par cette homothétie est la médiatrice du segment $[BC]$, puis que O, G et H sont alignés et que le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{OG}$.

Les milieux — Le centre de gravité est aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet : l'homothétie h transforme A en A', B en B' et C en C'.

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GA}$$

Une hauteur — L'image de la hauteur (AH) est la parallèle à (AH) passant par A'. Elle est perpendiculaire à (BC) et passe par le milieu de $[BC]$: c'est la médiatrice de $[BC]$. De même pour les deux autres hauteurs.

L'orthocentre — H est sur les trois hauteurs : son image est sur les trois médiatrices. C'est le point O.

$$h(H) = O$$

La droite d'Euler — Le vecteur $\overrightarrow{GO}$ est égal à $-\frac{1}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{GH}$: les points O, G et H sont alignés. Par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{OG}$ et du vecteur $\overrightarrow{GH}$, qui vaut 2 fois le vecteur $\overrightarrow{OG}$.

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OG}$$

Le cercle d'Euler — L'homothétie h transforme le cercle circonscrit à ABC en le cercle qui passe par A', B' et C' : son centre K est l'image de O, et son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit. On vérifie que K est le milieu du segment $[OH]$.

$$r = \frac{R}{2}$$

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \quad ; \quad \text{rayon du cercle d'Euler} = \frac{R}{2}$$

> En résumé : le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{OG}$, et le rayon du cercle d'Euler est la moitié du rayon du cercle circonscrit.
>
> En résumé: le vecteur O H est égal à 3 fois le vecteur O G, et le rayon du cercle d'Euler est la moitié du rayon du cercle circonscrit.

31. REMARQUE

Le pantographe

CE QU'IL DIT

Kelma 3al culture : le pantographe. Houwa instrument ma3moul men tiges articulées, ya3mlou parallélogramme, w nesta3mlouh bech n3awdou dessin w nkabbrouh walla nsaghgharouh. Famma point A fixe. Ki la pointe N ttabba3 el dessin, le crayon elli fi M yarsem nafs el dessin, ama asghar. W ken nbaddlou la pointe w le crayon, el dessin yekber. 3lech ? 5ater A w M w N yo93dou dima alignés, b nafs le rapport : hedhi homothétie de centre A. W nesta3mlou fih men akther men quatre siècles.

كلمة culture : le pantographe . هو instrument معمول من tiges articulées ، يعملو parallélogramme w ، نستعملوه باش نعاودو dessin w نكبّروه ولّا نصغّروه . فمّا point A fixe . كي la pointe N تتبّع الـ le ، dessin يكبر . علاش الـ dessin ، la pointe w le crayon كان نبدّلو w . أما أصغر ، dessin الـ يرسم نفس M في اللي crayon ؟ خاطر A w M w N يقعدو ديما alignés ، بنفس le rapport : هذي w . homothétie de centre A نستعملو فيه من أكثر من quatre siècles .

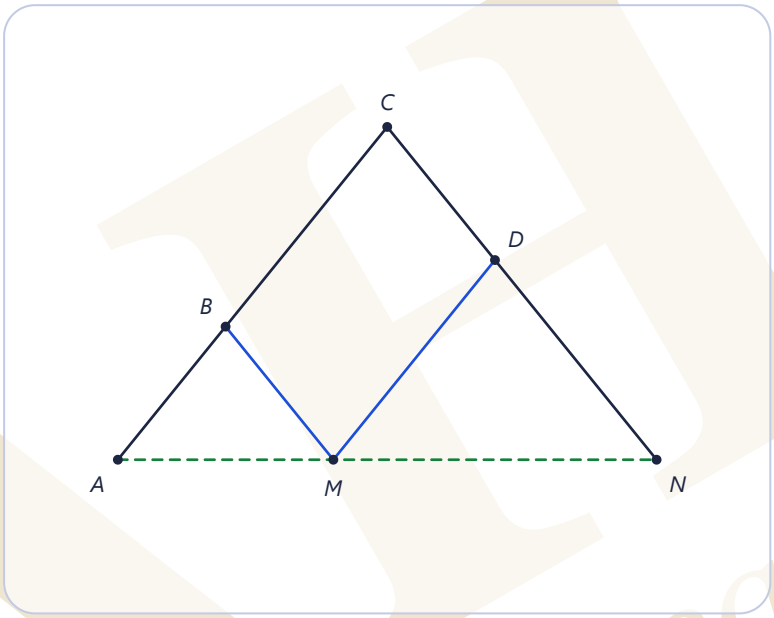
Un mot de culture : le pantographe. C'est un instrument fait de tiges articulées, qui forment un parallélogramme, et qui sert à recopier un dessin en l'agrandissant ou en le réduisant. Il y a un point A fixe. Quand la pointe N suit le dessin, le crayon placé en M trace le même dessin, mais plus petit. Et si on échange la pointe et le crayon, le dessin grandit. Pourquoi ? Parce que A, M et N restent toujours alignés, avec le même rapport : c'est une homothétie de centre A. Et on s'en sert depuis plus de quatre siècles.

Le **pantographe** est un instrument comportant un parallélogramme articulé et permettant de reproduire mécaniquement un dessin en agrandissant ou en réduisant les dimensions du modèle.

Il fut employé pour la première fois vers la fin du XVI^{e} siècle. En 1743, Langlois lui donna à peu près sa forme actuelle.

Sur l'instrument, quatre tiges forment un parallélogramme articulé $BCDM$: on a $AC = CN$, $AB = CD = BM$ et $ND = MD = BC$, de sorte que les points A, M et N restent alignés. Le point A est fixe. Quand le point N suit une courbe, le point M en trace une réduction ; et si c'est M qui suit une courbe, N en trace un agrandissement.

Le rapport $k = \dfrac{AB}{AC}$ dépend de la position de B sur $[AC]$: le point M est l'image du point N par l'homothétie de centre A et de rapport k.



A est fixe ; A, M et N restent alignés, et AM = k AN avec k = AB / AC.

Deux grandes tiges de même longueur, AC et CN, forment un V renversé : A est en bas à gauche, C en haut, N en bas à droite. Le point B est sur la tige AC, le point D sur la tige CN. Deux petites tiges, BM et MD, en bleu, ferment le parallélogramme BCDM. Le point M est sur le segment AN, tracé en pointillés verts.

Maths à la carte
Ali HAMMAMI

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. $h_{(I,k)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$, où k est un réel non nul.

   > H indice I k de M égale M prime, ma3neha le vecteur IM prime égale k fois le vecteur IM, w k réel non nul.
   >
   > *H indice I k de M égale M prime, cela signifie que le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M, et k est un réel non nul.*

2. Un point, son image et le centre sont alignés ; le centre est invariant ; l'antécédent s'obtient avec le rapport $\frac{1}{k}$.

   > El point w l'image mte3ou w le centre dima alignés. Le centre invariant. W bech nal9aw l'antécédent, nesta3mlou le rapport un sur k.
   > *Un point, son image et le centre sont toujours alignés. Le centre est invariant. Et pour trouver l'antécédent, on utilise le rapport un sur k.*

3. Propriété caractéristique : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$. Conséquence : $(MN) \parallel (M'N')$ et $M'N' = |k|\,MN$.

   > La propriété caractéristique : le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur MN. Donc la droite MN parallèle à la droite M prime N prime, w M prime N prime égale la valeur absolue de k fois MN.
   > *La propriété caractéristique : le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur M N. Donc la droite M N est parallèle à la droite M prime N prime, et M prime N prime égale la valeur absolue de k fois M N.*

4. L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle ; l'image d'un segment est un segment.

   > L'image mta3 droite hiya droite parallèle liha, w l'image mta3 segment hiya segment.
   > *L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle, et l'image d'un segment est un segment.*

5. L'image d'un cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre $h(O)$ et de rayon $|k|\,R$.

   > L'image mta3 cercle de centre O et de rayon R, hiya le cercle elli centre mte3ou l'image mta3 O, w le rayon mte3ou la valeur absolue de k fois R.
   > *L'image d'un cercle de centre O et de rayon R est le cercle dont le centre est l'image de O, et dont le rayon est la valeur absolue de k fois R.*

6. L'image d'un polygone de périmètre p et d'aire a est un polygone de périmètre $|k|\,p$ et d'aire $k^2\,a$.

   > Le périmètre mta3 polygone yetdhrab fi la valeur absolue de k, w l'aire mte3ou tetdhrab fi k au carré.
   > *Le périmètre d'un polygone est multiplié par la valeur absolue de k, et son aire est multipliée par k au carré.*

7. Une homothétie conserve l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité et le contact.

   > L'homothétie t7afedh 3la l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité w le contact.
   > *L'homothétie conserve l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité et le contact.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : l'homothétie de centre I et de rapport k teb3ath M l M prime, ki le vecteur IM prime égale k fois le vecteur IM. W la propriété caractéristique : le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur MN. Les longueurs tetdhrab fi la valeur absolue de k, w les aires fi k au carré. La droite twalli droite parallèle, w le cercle ywalli cercle. W l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité w le contact, el koll yo93dou kima houma. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : l'homothétie de centre I et de rapport k تبعث M لـ M prime ، كي le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M . w la propriété caractéristique : le vecteur M prime N prime égale k k au carré . la droite في la valeur absolue de k ، w les aires في تتضرب fois le vecteur M N . les longueurs cercle . w l'alignement ، le milieu ، le barycentre ، les angles ، le يولّي droite parallèle ، w le cercle تولّي . exercices لـ لله يا . هوما كيما يقعدو الكل ، parallélisme ، l'orthogonalité w le contact

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : l'homothétie de centre I et de rapport k envoie M sur M prime quand le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M. Et la propriété caractéristique : le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur M N. Les longueurs sont multipliées par la valeur absolue de k, et les aires par k au carré. Une droite devient une droite parallèle, et un cercle devient un cercle. Et l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité et le contact restent tous tels quels. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · HOMOTHÉTIE DE CENTRE I ET DE RAPPORT K

c'est quoi une homothétie | chnowa l'homothétie | homothétie ma3neha chnowa | définition de l'homothétie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$h_{(I,k)}(M) = M' \iff \overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'homothétie de centre I et de rapport k, hiya l'application elli teb3ath koll point M lel point M', b7ith $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$. Le rapport k réel non nul. Hiya tkabber el figure walla tsaghgharha men le centre, men ghir ma yetbaddel ech-chakl mte3ha.

l'homothétie de centre I et de rapport k ، هي l'application اللي تبعث كل point M لـ point M prime ، le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M . le rapport k réel non nul بحيث ولّا figure الـ تكبّر هي . le centre من تصغّرها ، من غير ما يتبدّل الشكل متاعها .

Une homothétie de centre I et de rapport k, c'est l'application qui envoie chaque point M sur le point M prime tel que le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M. Le rapport k est un réel non nul. Elle agrandit ou réduit la figure à partir du centre, sans changer sa forme.

QUESTION 2 · HOMOTHÉTIE DE CENTRE I ET DE RAPPORT K

pourquoi k doit être non nul | 3lech le rapport mouch zéro | ken k égale zéro chnowa ysir | le rapport peut-il être nul | pourquoi k différent de zéro

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$k \neq 0$

CE QU'IL RÉPOND

5ater ken le rapport nul, les points el koll twalli 3andhom nafs l'image : le centre I. El figure el koll tetlamm fi point wa7ed, w point e5er ghir I ma yeb9ach 3andou antécédent. 3la hedha nochrtou le rapport non nul.

خاطر كان les points ، le rapport nul الكل تولّي عندهم نفس l'image : le centre I . الـ figure الكل تتلمّ في point واحد ، w point آخر غير I ما يبقاش عندو antécédent . على هذا نشرطو le rapport non nul .

Parce qu'avec un rapport nul, tous les points auraient la même image : le centre I. Toute la figure serait écrasée en un seul point, et un point autre que I n'aurait plus d'antécédent. C'est pour cela qu'on exige un rapport non nul.

QUESTION 3 · HOMOTHÉTIE DE CENTRE I ET DE RAPPORT K

homothétie de rapport -1 | ken k égale -1 chnowa ysir | homothétie et symétrie centrale | est-ce que la symétrie centrale est une homothétie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$k = -1 \implies I \text{ milieu de } [MM']$

CE QU'IL RÉPOND

B le rapport moins 1, $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$: le centre I houwa le milieu du segment [MM']. Donc hedhi la symétrie centrale de centre I. Ya3ni la symétrie centrale hiya homothétie de rapport moins 1.

بـ le vecteur I M prime ، le rapport moins un هو l'opposé متاع le vecteur I M : le centre I هو le milieu du segment M M prime . donc هذي la symétrie centrale de centre I . la symétrie centrale يعني هي homothétie de rapport moins un .

Avec le rapport moins un, le vecteur I M prime est l'opposé du vecteur I M : le centre I est le milieu du segment M M prime. C'est donc la symétrie centrale de centre I. Autrement dit, une symétrie centrale est une homothétie de rapport moins un.

QUESTION 4 · CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT

rapport négatif ma3neha chnowa | ken k négatif win yji M prime | que change un rapport négatif | homothétie avec k negatif | rapport positif ma3neha chnowa | ken k < 0 chnowa ysir | ken k > 0 chnowa ysir

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$k > 0 : \ M' \in [IM)$
$k < 0 : \ I \in [MM']$

CE QU'IL RÉPOND

Le signe mta3 le rapport ywarrik win tji l'image bennesba l le centre. Ken k positif, M w M' fi nafs ej-jiha mta3 I. Ken k négatif, I yji bin M w M', w el figure image tji ma9louba bennesba lel figure elli bdina biha. W fel 7alet ez-zouz, la distance tetdhrab fi $|k|$.

le signe متاع le rapport يورّيك وين تجي l'image بالنسبة لـ le centre . كان M w M prime ، k positif في نفس
الجهة متاع I . كان I ، k négatif يجي بين w ، M w M prime الـ figure image تجي مقلوبة بالنسبة للـ figure اللي
بدينا بيها . w في الحالات الزوز ، la distance تتضرب في la valeur absolue de k .

Le signe du rapport dit de quel côté du centre se trouve l'image. Si k est positif, M et M prime sont du même côté de I. Si k est négatif, I se trouve entre M et M prime, et la figure image est retournée par rapport à la figure de départ. Dans les deux cas, la distance est multipliée par la valeur absolue de k.

QUESTION 5 · CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT

wa9tech l'homothétie tkabber el figure | agrandissement ou réduction comment savoir | quand est-ce que la figure est réduite | l'homothétie tsaghghar wa9tech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$|k| > 1 : \text{agrandissement}$
$|k| < 1 : \text{réduction}$

CE QU'IL RÉPOND

Chouf la valeur absolue mta3 le rapport. Ken hiya akbar men un, les distances tetdhrab fi nombre akbar men un : el figure tekber. Ken hiya asghar men un, el figure tesghar. W ken hiya tsewi un, el figure to93od b nafs el 9add.

شوف la valeur absolue متاع le rapport . كان هي أكبر من les distances ، un تتضرب في nombre أكبر من un :
الـ figure تكبر . كان هي أصغر من un ، الـ figure تصغار . w كان هي تساوي un ، الـ figure تقعد بنفس القدّ .

Regarde la valeur absolue du rapport. Si elle est plus grande que un, les distances sont multipliées par un nombre plus grand que un : la figure est agrandie. Si elle est plus petite que un, la figure est réduite. Et si elle vaut un, la figure garde sa taille.

QUESTION 6 · CONSÉQUENCES DE LA DÉFINITION

c'est quoi un antécédent | kifech nal9a l'antécédent | antécédent d'un point par une homothétie | antecedent chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{IM'}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'antécédent mta3 M', houwa el point M elli l'image mte3ou M'. Bech tal9ah, esta3mel l'inverse mta3 le rapport : $\overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{IM'}$. W koll point 3andou antécédent wa7ed bark.

متاع l'inverse استعمل ، باش تلقاه . M prime متاعو l'image اللي point M هو الـ ، M prime متاع l'antécédent واحد برك antécédent عندو point كل le rapport : le vecteur I M égale un sur k fois le vecteur I M prime . w .

L'antécédent de M prime, c'est le point M dont l'image est M prime. Pour le trouver, utilise l'inverse du rapport : le vecteur I M égale un sur k fois le vecteur I M prime. Et chaque point a un seul antécédent.

QUESTION 7 · CONSÉQUENCES DE LA DÉFINITION

c'est quoi un point invariant | point invariant chnowa | quels sont les points invariants | point fixe par une homothétie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$h_{(I,k)}(I) = I$$

CE QU'IL RÉPOND

Point invariant houwa point l'image mte3ou hiya bidou. Fi homothétie 3andha rapport différent de un, famma wa7ed bark : le centre I. Les points lo5rin el koll yet7arrkou.

point invariant هو point l'image متاعو هي بيدو . في homothétie عندها rapport différent de un ، فمّا واحد برك : les points . le centre I الأخرين الكل يتحرّكو .

Un point invariant est un point qui est sa propre image. Dans une homothétie de rapport différent de un, il n'y en a qu'un seul : le centre I. Tous les autres points se déplacent.

QUESTION 8 · CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT

comment construire l'image d'un point | kifech narsem l'image mta3 point | construire le point M' par une homothétie | tracer l'image d'un point

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$IM' = |k| \times IM$$

CE QU'IL RÉPOND

Arsem la droite elli tet3adda men le centre I w men el point M : l'image 3liha. Ba3d 7ott la distance $IM' = |k| \times IM$. Fi nafs ej-jiha mta3 M ken k positif, w fej-jiha lo5ra mta3 I ken k négatif.

ارسم la droite اللي تتعدّى من le centre I w من الـ point M : l'image عليها . بعد حطّ la distance I M prime ، في نفس الجهة متاع M كان w ، k positif في الجهة الأخرى متاع I كان k اللي هي la valeur absolue de k fois I M . négatif

Trace la droite qui passe par le centre I et par le point M : l'image est dessus. Reporte ensuite la distance I M prime, qui vaut la valeur absolue de k fois I M. Du même côté que M si k est positif, et de l'autre côté de I si k est négatif.

QUESTION 9 · TROUVER LE CENTRE

comment trouver le centre d'une homothétie | kifech nal9a le centre | déterminer le centre de l'homothétie | win yji le centre | kifech narsem le centre mta3 l'homothétie | comment construire le centre d'une homothétie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$k\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le centre dima aligné m3a koll point w l'image mte3ou. Ken ta3ref zouz points w les images mte3hom, arsem ez-zouz droites elli torbot koll point b l'image mte3ou : yetla9aw fi le centre. W ken ta3ref le rapport k, w point A, w l'image mte3ou B, le centre houwa le barycentre de A et B, affectés des coefficients k et moins un.

le centre ديما aligné مع كل point w l'image متاعو . كان تعرف زوز points w les images متاعهم ، ارسم الزوز droites اللي تربط كل point بـ l'image متاعو : يتلاقاو في w . le centre كان تعرف A point ، w le rapport k ، le centre متاعو l'image هو B ، affectés des coefficients k et moins un . le barycentre de A et B

Le centre est toujours aligné avec chaque point et son image. Si tu connais deux points et leurs images, trace les deux droites qui joignent chaque point à son image : elles se coupent au centre. Et si tu connais le rapport k, un point A et son image B, le centre est le barycentre de A et B, affectés des coefficients k et moins un.

QUESTION 10 · CONSÉQUENCES : DROITES PARALLÈLES, LONGUEURS MULTIPLIÉES

comment trouver le rapport d'une homothétie | kifech nal9a le rapport | déterminer le rapport k | calculer le rapport de l'homothétie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$|k| = \frac{A'B'}{AB}$$

$$|k| = \frac{IA'}{IA}$$

CE QU'IL RÉPOND

A3mel le quotient mta3 longueur image 3la la longueur elli bdit biha : ya3tik $|k|$. Ken ta3ref le centre I, w point A, w l'image mte3ou A prime, houwa le quotient de IA prime par IA. Ba3d chouf le signe : positif ken el point w l'image mte3ou fi nafs ej-jiha mta3 le centre, w négatif ken le centre binethom.

اعمل le quotient متاع longueur image على la longueur اللي بديت بيها : يعطيك la valeur absolue de k . كان تعرف w l'image ، A point ، w le centre I متاعو A prime ، هو I A par I A de le quotient . بعد شوف signe : positif الـ كان point w l'image متاعو في نفس الجهة متاع w négatif ، le centre كان le centre بيناتهم .

Fais le quotient d'une longueur image par la longueur de départ : il te donne la valeur absolue de k. Si tu connais le centre I, un point A et son image A prime, c'est le quotient de I A prime par I A. Regarde ensuite le signe : positif si un point et son image sont du même côté du centre, et négatif si le centre est entre eux.

QUESTION 11 · RECONNAÎTRE UNE HOMOTHÉTIE

comment montrer qu'une application est une homothétie | kifech nthabbet elli f homothétie | prouver que f est une homothétie | reconnaître une homothétie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'}$$

CE QU'IL RÉPOND

Lawwej 3la point fixe I, w réel k non nul, b7ith l koll point M : $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$. W ken l'énoncé ya3tik le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, t3adda men I b la relation de Chasles.

لوّج على point fixe I ، w réel k non nul بحيث لكل point M : le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I . w M كان l'énoncé يعطيك le vecteur M M prime ، تعدّى من I بـ la relation de Chasles .

Cherche un point fixe I et un réel k non nul tels que, pour tout point M, le vecteur I M prime égale k fois le vecteur I M. Et si l'énoncé te donne le vecteur M M prime, passe par I avec la relation de Chasles.

QUESTION 12 · PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE

c'est quoi la propriété caractéristique | propriete caracteristique mta3 l'homothétie | la propriété caractéristique chnowa | propriété caractéristique d'une homothétie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken M' w N' houma les images mta3 M w N par une homothétie de rapport k, wa9tha $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$. L'homothétie todhrob les vecteurs el koll fi k. W menha ntalla3ou elli les droites parallèles, w les distances tetdhrab fi $|k|$.

كان M prime w N prime هوما les images متاع M w N par une homothétie de rapport k ، وقتها le vecteur منها نطلّعو k . w الكل في les vecteurs تضرب M prime N prime égale k fois le vecteur M N . l'homothétie اللي les distances ، w les droites parallèles تتضرب في la valeur absolue de k .

Si M prime et N prime sont les images de M et N par une homothétie de rapport k, alors le vecteur M prime N prime égale k fois le vecteur M N. L'homothétie multiplie tous les vecteurs par k. On en tire que les droites sont parallèles, et que les distances sont multipliées par la valeur absolue de k.

QUESTION 13 · PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE

différence entre homothétie et translation | el far9 bin homothétie w translation | homothétie ou translation comment savoir | chnowa el far9 bin homothétie w translation

CE QU'IL RÉPOND

La translation ma tbaddelch les vecteurs : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, w el figure to93od b nafs el 9add. L'homothétie todhrobhom fi k : el figure tekber walla tesghar. W far9 e5er : l'homothétie 3andha point invariant, houwa le centre ; la translation ma 3andha 7atta wa7ed.

la translation ما تبدّلش ، w les vecteurs : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N تقعد figure الـ l'homothétie . بنفس القدّ تضربهم في l'homothétie : k الـ figure تكبر ولّا تصغار . w فرق آخر : point عندها invariant ، هو le centre ؛ la translation ما عندها حتّى واحد .

Une translation ne change pas les vecteurs : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N, et la figure garde sa taille. Une homothétie les multiplie par k : la figure grandit ou rétrécit. Autre différence : l'homothétie a un point invariant, son centre ; la translation n'en a aucun.

QUESTION 14 · CONSÉQUENCES : DROITES PARALLÈLES, LONGUEURS MULTIPLIÉES

l'homothétie conserve-t-elle les distances | les distances yetbaddlou walla le | les longueurs ba3d l'homothétie | est-ce que les longueurs restent les mêmes | l'homothétie t7afedh 3la les distances

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$A'B' = |k| \times AB$$

CE QU'IL RÉPOND

L'homothétie de rapport k todhrob les distances el koll fi $|k|$: $A'B' = |k| \times AB$. Yo93dou kima houma ken ki le rapport ykoun un walla moins un bark. Elli t7afedh 3lih houwa les proportions w les angles.

la valeur absolue de k : A prime B prime égale la الكل في les distances تضرب l'homothétie de rapport k يقعدو كيما هوما كان كي le rapport يكون un ولّا moins un برك . اللي تحافظ valeur absolue de k fois A B . les proportions w les angles عليه هو

Une homothétie de rapport k multiplie toutes les distances par la valeur absolue de k : A prime B prime égale la valeur absolue de k fois A B. Elles ne restent les mêmes que si le rapport vaut un ou moins un. Ce qu'elle conserve, ce sont les proportions et les angles.

QUESTION 15 · CONSERVATION DE L'ALIGNEMENT

quelles propriétés conserve une homothétie | l'homothétie t7afedh 3la chnowa | chnowa elli t7afedh 3lih l'homothétie | qu'est-ce qui ne change pas dans la figure par une homothétie

CE QU'IL RÉPOND

L'homothétie t7afedh 3la l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité w le contact. Ya3ni el figure to93od b nafs ech-chakl : elli yetbaddel houwa el 9add

mte3ha bark.

l'alignement ، le milieu ، le barycentre ، les angles ، le parallélisme ، تحافظ على l'homothétie
. يعني الـ figure تقعد بنفس الشكل : اللي يتبدّل هو القدّ متاعها برك . l'orthogonalité w le contact

Une homothétie conserve l'alignement, le milieu, le barycentre, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité et le contact. Autrement dit, la figure garde la même forme : seule sa taille change.

QUESTION 16 · CONSERVATION DE L'ALIGNEMENT

points alignés par une homothétie | 3lech les images alignés | comment montrer un alignement avec une homothétie | trois points alignes w l'homothétie | l'homothétie t7afedh 3la l'alignement | l'homothétie conserve-t-elle l'alignement

CE QU'IL RÉPOND

Les images mta3 trois points alignés, houma trois points alignés. Bech tthabbet alignement, 3andek zouz tor9 : twarri elli el trois points houma les images mta3 trois points alignés, walla twarri elli wa7ed fihom houwa le centre mta3 homothétie teb3ath el point numéro deux lel point numéro trois.

les images متاع trois points alignés ، هوما trois points alignés . باش تثبت alignement ، عندك زوز طرق :
توزّي اللي الـ trois points هوما les images متاع trois points alignés ، ولّا توزّي اللي واحد فيهم هو le centre
متاع homothétie تبعث الـ point numéro deux للـ point numéro trois .

Les images de trois points alignés sont trois points alignés. Pour prouver un alignement, tu as deux moyens : montrer que les trois points sont les images de trois points alignés, ou montrer que l'un d'eux est le centre d'une homothétie qui envoie le point numéro deux sur le point numéro trois.

QUESTION 17 · IMAGE D'UNE DROITE, IMAGE D'UN SEGMENT

image d'une droite par une homothétie | l'image mta3 droite chnowa | kifech nal9a l'image d'une droite | comment tracer l'image d'une droite | l'image d'un segment par une homothétie

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(AB) \longmapsto (A'B'), \quad (AB) \parallel (A'B')$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mta3 droite hiya droite parallèle liha, w l'image mta3 segment hiya segment. Bech tarsemha, arsem l'image mta3 point wa7ed men la droite, w ba3d arsem men l'image hedhi la parallèle à la droite elli bdit biha. W ken la droite tet3adda men le centre, l'image mte3ha hiya bidha.

l'image متاع droite هي droite parallèle ليها ، w l'image متاع segment هي segment . باش ترسمها ، ارسم
l'image متاع point واحد من w ، la droite بعد ارسم من l'image هذي la parallèle à la droite اللي بديت بيها . w
كان la droite تتعدّى من l'image ، le centre متاعها هي بيدها .

L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle, et l'image d'un segment est un segment. Pour la tracer, construis l'image d'un seul point de la droite, puis trace par cette image la parallèle à la droite de départ. Et si la droite passe par le centre, elle est sa propre image.

QUESTION 18 · CONSERVATION DU MILIEU

l'homothétie et le milieu | 3lech l'image du milieu hiya le milieu | milieu ba3d l'homothétie | l'image du milieu d'un segment | l'homothétie t7afedh 3la le milieu | l'homothétie conserve-t-elle le milieu

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$P \text{ milieu de } [MN] \implies P' \text{ milieu de } [M'N']$$

CE QU'IL RÉPOND

L'homothétie t7afedh 3la le milieu : l'image mta3 le milieu mta3 segment, hiya le milieu mta3 le segment image. Hedha yji men la propriété caractéristique : zouz vecteurs égaux yo93dou égaux ki nadhrbouhom ez-zouz fi k.

l'homothétie تحافظ على l'image : le milieu متاع le milieu متاع segment ، هي le milieu متاع le segment . هذا يجي من la propriété caractéristique : زوز vecteurs égaux يقعدو égaux كي نضربوهم الزوز في k .

L'homothétie conserve le milieu : l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image. Cela vient de la propriété caractéristique : deux vecteurs égaux restent égaux quand on les multiplie tous les deux par k.

QUESTION 19 · CONSERVATION DU BARYCENTRE

l'homothétie et le barycentre | l'image du barycentre chnowa | barycentre ba3d l'homothétie | l'image du centre de gravité | l'homothétie t7afedh 3la le barycentre | l'homothétie conserve-t-elle le barycentre

CE QU'IL RÉPOND

L'homothétie t7afedh 3la le barycentre : l'image mta3 le barycentre mta3 points pondérés, hiya le barycentre mta3 les images mte3hom, b nafs les coefficients. W bel 5sous : l'image mta3 le centre de gravité mta3 triangle, hiya le centre de gravité mta3 el triangle image.

l'homothétie تحافظ على l'image : le barycentre متاع le barycentre متاع points pondérés ، هي le barycentre متاع les images متاعهم ، بنفس les coefficients . w بالخصوص : l'image متاع le centre de gravité ، هي le centre de gravité متاع triangle ، triangle متاع الـ image . .

L'homothétie conserve le barycentre : l'image du barycentre de points pondérés est le barycentre de leurs images, avec les mêmes coefficients. En particulier, l'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

QUESTION 20 · CONSERVATION DU BARYCENTRE

c'est quoi le centre de gravité | chnowa le centre de gravité | kifech nal9a le centre de gravité | comment trouver le centre de gravité | comment construire le centre de gravité | win yji le centre de gravité

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le centre de gravité mta3 triangle houwa el point elli yetla9aw fih el trois médianes. Yji fi les deux tiers mta3 koll médiane, ki tebda men le sommet : ken I houwa le milieu de BC, le vecteur GI égale moins un demi fois le vecteur GA.

متاع les deux tiers في يجي . trois médianes الـ اللي يتلاقاو فيه point الـ هو triangle متاع le centre de gravité
le milieu de B C ، le vecteur G I égale moins un demi fois هو I كان : le sommet من تبدا كي ، médiane كل
. le vecteur G A

Le centre de gravité d'un triangle est le point où se coupent ses trois médianes. Il est aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet : si I est le milieu de B C, le vecteur G I égale moins un demi fois le vecteur G A.

QUESTION 21 · CONSERVATION DES ANGLES

l'homothétie change-t-elle les angles | les angles ba3d l'homothétie | est-ce que les angles restent pareils | mesure de l'angle image | l'homothétie t7afedh 3la les angles | l'homothétie conserve-t-elle les angles | 3lech les angles ma yetbaddlouch

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'homothétie t7afedh 3la les angles : l'image mta3 angle de quarante degrés hiya angle de quarante degrés, mahma ken le rapport. Le rapport ybaddel les longueurs, mouch les angles : el figure to93od b nafs ech-chakl.

angle de quarante هي angle de quarante degrés متاع les angles : l'image تحافظ على l'homothétie
. تقعد بنفس الشكل figure الـ : les angles موش ، les longueurs يبدّل le rapport . le rapport كان مهما ، degrés

L'homothétie conserve les angles : l'image d'un angle de quarante degrés est un angle de quarante degrés, quel que soit le rapport. Le rapport change les longueurs, pas les angles : la figure garde la même forme.

QUESTION 22 · PARALLÉLISME ET ORTHOGONALITÉ

deux droites parallèles restent-elles parallèles | les droites paralleles ba3d l'homothétie | l'homothétie et le parallélisme | deux droites perpendiculaires par une homothétie | les droites perpendiculaires ba3d l'homothétie | l'homothétie et l'orthogonalité

l'homothétie t7afedh 3la le parallélisme | l'homothétie conserve-t-elle l'orthogonalité

CE QU'IL RÉPOND

Koll droite l'image mte3ha droite parallèle liha. Donc zouz droites parallèles, les images mte3hom zouz droites parallèles, w zouz droites perpendiculaires, les images mte3hom zouz droites perpendiculaires. N9oulou l'homothétie t7afedh 3la le parallélisme w l'orthogonalité. 3la hedha l'image mta3 rectangle hiya rectangle, w l'image mta3 hauteur hiya hauteur.

كل droite l'image متاعها droite parallèle ليها . donc les images زوز ، droites parallèles متاعهم زوز droites . نقولو droites perpendiculaires متاعهم زوز droites perpendiculaires ، les images زوز parallèles ، w l'homothétie تحافظ على le parallélisme w l'orthogonalité . على هذا l'image متاع rectangle هي ، rectangle w l'image متاع hauteur هي hauteur .

Chaque droite a pour image une droite qui lui est parallèle. Donc deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles, et deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires. On dit que l'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité. C'est pour cela que l'image d'un rectangle est un rectangle, et que l'image d'une hauteur est une hauteur.

QUESTION 23 · IMAGE D'UN CERCLE

image d'un cercle par une homothétie | l'image mta3 cercle chnowa | le rayon du cercle image | kifech narsem l'image d'un cercle | kifech nal9a l'image mta3 cercle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$R' = |k| \times R$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mta3 cercle de centre O et de rayon R hiya cercle. Le centre mte3ou houwa l'image mta3 O, w le rayon mte3ou $|k| \times R$. Bech tarsmou, arsem l'image mta3 le centre, w ba3d odhrob le rayon.

متاع l'image متاعو هو cercle . le centre هي cercle de centre O et de rayon R متاع l'image O ، w le rayon . la valeur absolue de k fois R متاعو باش ترسمو ، ارسم l'image متاع ، w le centre بعد اضرب le rayon .

L'image d'un cercle de centre O et de rayon R est un cercle. Son centre est l'image de O, et son rayon est la valeur absolue de k fois R. Pour le tracer, construis l'image du centre, puis multiplie le rayon.

QUESTION 24 · CONSERVATION DU CONTACT

c'est quoi la conservation du contact | la tangente par une homothétie | droite tangente au cercle ba3d l'homothétie | le point de contact win yemchi | l'homothétie t7afedh 3la le contact | l'homothétie conserve-t-elle le contact

CE QU'IL RÉPOND

Ken droite tangente l cercle fi point A, wa9tha l'image mta3 la droite tangente l l'image mta3 le cercle, fel point image A'. N9oulou l'homothétie t7afedh 3la le contact. Es-sbab : la tangente perpendiculaire

3la le rayon, w l'orthogonalité to93od kima hiya.

كان droite tangente لـ cercle في point A ، وقتها l'image متاع la droite tangente لـ l'image متاع le cercle ، في الـ point image A prime . نقولو l'homothétie تحافظ على le contact . السبب : la tangente perpendiculaire على l'orthogonalité ، w le rayon تقعد كيما هي .

Si une droite est tangente à un cercle en un point A, alors l'image de la droite est tangente à l'image du cercle, au point image A prime. On dit que l'homothétie conserve le contact. La raison : la tangente est perpendiculaire au rayon, et l'orthogonalité est conservée.

QUESTION 25 · DEUX CERCLES DE RAYONS DIFFÉRENTS

combien d'homothéties entre deux cercles | homothétie qui transforme deux cercles l'un en l'autre | zouz cercles 9addech men homothétie | deux cercles de rayons différents | deux cercles de même rayon

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$k = \frac{R'}{R} \quad \text{ou} \quad k = -\frac{R'}{R}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki ez-zouz rayons mo5talfin, famma zouz homothéties. Wa7da 3andha rapport positif, $\dfrac{R'}{R}$, w le centre mte3ha 5arej le segment elli yorbot ez-zouz centres. W lo5ra 3andha rapport négatif, $-\dfrac{R'}{R}$, w le centre mte3ha bin ez-zouz centres. W ken ez-zouz rayons égaux, to93od wa7da bark : la symétrie centrale par rapport au milieu mta3 ez-zouz centres, de rapport moins un.

كي الزوز rayons مختلفين ، فمّا زوز homothéties . وحدة عندها le centre w ، R prime sur R rapport positif ، متاعها خارج le segment اللي يربط الزوز w . الأخرى عندها centres ، w ، moins R prime sur R rapport négatif ، متاعها بين الزوز w le centre . كان الزوز rayons égaux ، تقعد وحدة برك : la symétrie centrale par rapport au milieu متاع الزوز rapport moins un de ، centres .

Quand les deux rayons sont différents, il y a deux homothéties. L'une a un rapport positif, R prime sur R, et son centre est hors du segment qui joint les deux centres. L'autre a un rapport négatif, moins R prime sur R, et son centre est entre les deux centres. Si les deux rayons sont égaux, il n'en reste qu'une : la symétrie centrale par rapport au milieu des deux centres, de rapport moins un.

QUESTION 26 · PÉRIMÈTRES ET AIRES

3lech l'aire tetdhrab fi k carré | l'aire de la figure image | pourquoi l'aire est multipliée par k au carré | aire ba3d l'homothétie | l'aire tetdhrab fi 9addech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a' = k^2 \times a$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater l'aire hiya produit mta3 zouz longueurs, w koll wa7da tetdhrab fi $|k|$. Donc l'aire tetdhrab fi k^{2}. Mathalan, b le rapport trois, l'aire tetdhrab fi neuf.

la valeur absolue de k . donc l'aire كل وحدة تتضرب في longueurs ، w زوز متاع produit هي l'aire خاطر
تتضرب في k au carré . مثلا ، بـ l'aire ، le rapport trois تتضرب في neuf .

Parce qu'une aire est le produit de deux longueurs, et que chacune est multipliée par la valeur absolue de k. L'aire est donc multipliée par k au carré. Par exemple, avec le rapport trois, l'aire est multipliée par neuf.

QUESTION 27 · PÉRIMÈTRES ET AIRES

le périmètre de la figure image | périmètre ba3d l'homothétie | le périmètre yetdhrab fi chnowa | comment calculer le périmètre de l'image | le périmètre yetdhrab fi 9addech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$p' = |k| \times p$$

CE QU'IL RÉPOND

Le périmètre yetdhrab fi $|k|$, kima les longueurs el koll. Rodd belek ma t5altouch m3a l'aire, elli tetdhrab fi k^{2}.

le périmètre يتضرب في la valeur absolue de k ، كيما les longueurs الكل . ردّ بالك ما تخلطوش مع l'aire ،
اللي تتضرب في k au carré .

Le périmètre est multiplié par la valeur absolue de k, comme toutes les longueurs. Attention à ne pas le confondre avec l'aire, qui est multipliée par k au carré.

QUESTION 28 · FIGURES HOMOTHÉTIQUES

c'est quoi deux figures homothétiques | figures homothétiques ma3neha | triangles homothétiques chnowa | comment savoir si deux figures sont homothétiques

CE QU'IL RÉPOND

Zouz figures homothétiques ki wa7da fihom hiya l'image mta3 lo5ra par une homothétie. Bech tet2akked, chouf ken les côtés elli y9ablou b3adhhom parallèles, w ken les droites elli torbot koll point b l'image mte3ou yet3addew el koll men nafs el point.

زوز figures homothétiques كي وحدة فيهم هي l'image متاع الأخرى par une homothétie . باش تتأكّد ، شوف
كان les côtés اللي يقابلو بعضهم w ، les droites كان parallèles اللي تربط كل point بـ l'image متاعو يتعدّاو الكل
من نفس الـ point .

Deux figures sont homothétiques quand l'une est l'image de l'autre par une homothétie. Pour le vérifier, regarde si les côtés qui se correspondent sont parallèles, et si les droites qui joignent chaque point à son image passent toutes par le même point.

QUESTION 29 · PROBLÈMES DE LIEU

c'est quoi un lieu géométrique | lieu des points chnowa | kifech nal9a le lieu

comment chercher un lieu avec une homothétie

CE QU'IL RÉPOND

Le lieu mta3 point, houwa el ligne elli yet7arrek 3liha ki point e5er yetbaddel. Ken el point elli nlawwjou 3lih houwa l'image mta3 el point el met7arrek par une homothétie, le centre mte3ha fixe w le rapport mte3ha constant, le lieu mte3ou houwa l'image mta3 el ligne elli yet7arrek 3liha el point el met7arrek : droite ta3ti droite, w cercle ya3ti cercle.

le lieu متاع point ، هو الـ ligne اللي يتحرّك عليها كي point آخر يتبدّل . كان الـ point اللي نلوّجو عليه هو l'image متاعو constant ، le lieu متاعها fixe w le rapport متاعها par une homothétie ، le centre متاع الـ point المتحرّك هو l'image متاع الـ ligne اللي يتحرّك عليها الـ point المتحرّك : تعطي droite ، w cercle يعطي droite . cercle

Le lieu d'un point, c'est la ligne sur laquelle il se déplace quand un autre point varie. Si le point cherché est l'image du point variable par une homothétie dont le centre est fixe et le rapport constant, son lieu est l'image de la ligne sur laquelle se déplace le point variable : une droite donne une droite, et un cercle donne un cercle.

QUESTION 30 · UN PROBLÈME POUR ALLER PLUS LOIN : LA DROITE D'EULER

c'est quoi la droite d'Euler | droite d'Euler chnowa | le cercle d'Euler ma3neha | la droite d'Euler tet3adda men chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi triangle, le centre du cercle circonscrit O, w le centre de gravité G, w l'orthocentre H, alignés : la droite elli thezzhom hiya la droite d'Euler, w $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$. W le cercle d'Euler houwa le cercle elli yet3adda men les milieux mta3 el trois côtés ; le rayon mte3ou ennoss mta3 le rayon du cercle circonscrit.

في triangle ، le centre du cercle circonscrit O ، w le centre de gravité G ، w l'orthocentre H ، alignés : la droite d'Euler ، w le vecteur O H égale trois fois le vecteur O G . w le cercle اللي تهزّهم هي le cercle هو d'Euler اللي يتعدّى من les milieux متاع الـ trois côtés ؛ le rayon متاعو النصّ متاع le rayon du cercle circonscrit .

Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit O, le centre de gravité G et l'orthocentre H sont alignés : la droite qui les porte est la droite d'Euler, et le vecteur O H égale trois fois le vecteur O G. Et le cercle d'Euler est le cercle qui passe par les milieux des trois côtés ; son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit.

QUESTION 31 · LE PANTOGRAPHE

c'est quoi un pantographe | pantographe chnowa | à quoi sert le pantographe | kifech ye5dem le pantographe

CE QU'IL RÉPOND

Le pantographe houwa instrument ma3moul men tiges articulées ya3mlou parallélogramme. Nesta3mlouh bech n3awdou dessin w nkabbrouh walla nsaghgharouh. W ye5dem b homothétie : el point fixe houwa le centre, w la pointe w le crayon yo93dou alignés m3ah, b rapport constant.

le pantographe هو instrument معمول من tiges articulées يعملو parallélogramme . نستعملوه باش نعاودو dessin w نكبّروه ولّا نصغّروه . w يخدم بـ homothétie : الـ point fixe هو le crayon w la pointe ، le centre يقعدو alignés معاه ، بـ rapport constant .

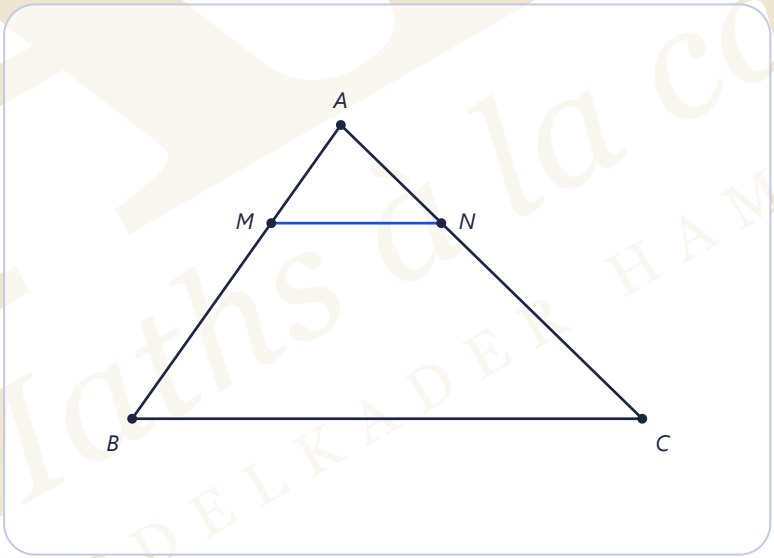
Le pantographe est un instrument fait de tiges articulées qui forment un parallélogramme. On s'en sert pour recopier un dessin en l'agrandissant ou en le réduisant. Et il fonctionne par une homothétie : le point fixe est le centre, et la pointe et le crayon restent alignés avec lui, dans un rapport constant.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE

Un triangle trois fois plus grand

Dans la figure, M est un point du côté $[AB]$ et N un point du côté $[AC]$ du triangle ABC. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $AC = 3 \times AN$. Le périmètre du triangle AMN vaut 7. Calculer le périmètre du triangle ABC.



(MN) est parallèle à (BC) et AC = 3 AN.

Un triangle ABC, avec A en haut. Le point M est sur le côté AB et le point N sur le côté AC, tous deux au tiers à partir de A. Le segment MN est parallèle au côté BC.

Donne le périmètre du triangle ABC, le nombre seul.

Réponse attendue : 21

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles : d'après le théorème de Thalès, les côtés du triangle ABC sont proportionnels à ceux du triangle AMN.

2. Chaque côté de ABC est le triple du côté correspondant de AMN : que devient la somme des trois côtés ?

CORRECTION

Thalès — Les droites (MN) et (BC) sont parallèles : les longueurs des côtés sont proportionnelles, avec le coefficient 3.

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN} = 3$$

Le périmètre — Chaque côté est multiplié par 3, donc la somme des trois côtés aussi.

$$3 \times 7 = 21$$

Le périmètre de ABC vaut 21 : le triangle ABC est l'image du triangle AMN par l'homothétie de centre A et de rapport 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → On n'ajoute pas 3 : chaque côté est multiplié par 3, donc le périmètre aussi.

`63` → 63 serait 7×9 : c'est l'aire qui est multipliée par le carré du rapport, pas le périmètre.

`7/3` → Le triangle ABC est le plus grand des deux : on multiplie par 3, on ne divise pas.

EXERCICE 2 · BASE

La distance au centre

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 3, et A un point tel que $IA = 4$. On note E l'image de A par h. Calculer la distance IE.

Donne la distance IE.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'égalité vectorielle qui définit l'image de A.
2. Les distances au centre vérifient :
   $IE = |k| \times IA$

CORRECTION

La définition — Le vecteur $\overrightarrow{IE}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$.

$$\overrightarrow{IE} = 3\,\overrightarrow{IA}$$

> La définition. Le vecteur $\overrightarrow{IE}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$.
>
> .La définition. Le vecteur I E est égal à 3 fois le vecteur I A

La distance — La distance au centre est multipliée par 3.

$$IE = 3 \times 4 = 12$$

$IE = 12$: l'image est trois fois plus loin du centre que le point.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → On n'ajoute pas le rapport : la distance au centre est multipliée par 3.

4/3 → Tu as divisé par 3 : c'est l'antécédent qui serait trois fois plus près du centre. L'image est trois fois plus loin.

EXERCICE 3 · BASE

De part et d'autre du centre

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport -2, et A un point tel que $IA = 5$. On note E l'image de A par h. Calculer la distance AE.

Donne la distance AE.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord la distance IE.
2. Le rapport est négatif : de quel côté de I se trouve E ?

CORRECTION

La distance au centre — La distance est multipliée par la valeur absolue du rapport.

$IE = |-2| \times 5 = 10$

La position — Le rapport est négatif : I est entre A et E, donc les deux distances s'ajoutent.

$AE = AI + IE = 5 + 10 = 15$

$AE = 15$: avec un rapport négatif, le centre est entre le point et son image.

PIÈGES ANTICIPÉS

10 → 10 est la distance IE. On demande AE : le centre I est entre A et E.

5 → Tu as calculé $10 - 5$, comme si A et E étaient du même côté de I. Le rapport est négatif : I est entre les deux points.

EXERCICE 4 · BASE

Dans l'autre sens

On sait que le vecteur $\overrightarrow{MD}$ est égal à $-\frac{5}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{MN}$: le point D est l'image du point N par l'homothétie de centre M et de rapport $-\frac{5}{2}$. Le point N est donc l'image du point D par une homothétie de centre M. Quel est son rapport k ?

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-2/5` — aussi acceptées : -0.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. N est l'antécédent de D par la première homothétie.
2. Pour revenir de l'image au point, on prend l'inverse du rapport.

CORRECTION

Isoler — On divise les deux membres par $-\frac{5}{2}$, c'est-à-dire qu'on les multiplie par son inverse.

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{MD}$$

> Isoler. On divise les deux membres par $-\frac{5}{2}$, c'est-à-dire qu'on les multiplie par son inverse : le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal à $-\frac{2}{5}$ fois le vecteur $\overrightarrow{MD}$.
>
> Isoler. On divise les deux membres par moins 5 sur 2, c'est-à-dire qu'on les multiplie par son inverse: le vecteur M N est égal à moins 2 sur 5 fois le vecteur M D.

Lire — Les deux vecteurs partent de M : le centre est M, et N est l'image de D.

$$k = -\frac{2}{5}$$

Le rapport est l'inverse de $-\frac{5}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-5/2 → $-\frac{5}{2}$ est le rapport de l'homothétie qui transforme N en D. Ici on va de D vers N : il faut l'inverse.

2/5 → L'inverse d'un nombre négatif est négatif : M reste entre N et D.

5/2 → Pour revenir en arrière, on prend l'inverse du rapport, pas son opposé.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Où est le centre ?

Soient A et B deux points tels que $AB = 12$. On note I le centre de l'homothétie de rapport -3 qui transforme A en B. Calculer la distance IA.

Donne la distance IA.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport est négatif : le centre I est entre A et B.
2. La distance IB est le triple de la distance IA, et les deux s'ajoutent pour donner AB.

CORRECTION

Les distances — Le vecteur $\overrightarrow{IB}$ est égal à -3 fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$: I est entre A et B, et la distance IB est le triple de la distance IA.

$$\overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IA}$$

> Les distances. Le vecteur $\overrightarrow{IB}$ est égal à -3 fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$: I est entre A et B, et la distance IB est le triple de la distance IA.
>
> Les distances. Le vecteur I B est égal à moins 3 fois le vecteur I A: I est entre A et B, et la distance I B est le triple de la distance I A.

Le partage — Le segment $[AB]$ est partagé en quatre parts égales, dont une pour IA.

$$IA = \frac{12}{4} = 3$$

$IA = 3$ et $IB = 9$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Tu as divisé 12 par 3. Mais la distance AB est la somme de IA et de IB, qui vaut 3 fois IA : elle vaut 4 fois IA.

6 → Le centre n'est pas le milieu de $[AB]$: il est trois fois plus près de A que de B.

9 → 9 est la distance IB. On demande IA.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Un barycentre qui cache une homothétie

Soit A un point du plan. À tout point M, on associe le point M', barycentre des points A et M affectés des coefficients 2 et 3. Cette application est une homothétie de centre A. Quel est son rapport k ?

Donne le rapport k.

Réponse attendue : 3/5 — aussi acceptées : 0.6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la relation vectorielle qui définit le barycentre M', puis fais apparaître le vecteur $\overrightarrow{AM'}$.
2. Par la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{M'A}$ et du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

CORRECTION

Le barycentre — M' est le barycentre des points A et M affectés des coefficients 2 et 3.

$$2\,\overrightarrow{M'A} + 3\,\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

> Le barycentre. M' est le barycentre des points A et M affectés des coefficients 2 et 3 : 2 fois le vecteur $\overrightarrow{M'A}$ plus 3 fois le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ égale le vecteur nul.
>
> Le barycentre. M prime est le barycentre des points A et M affectés des coefficients 2 et 3: 2 fois le vecteur .M prime A plus 3 fois le vecteur M prime M égale le vecteur nul

Chasles — On décompose le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ en passant par A.

$$5\,\overrightarrow{M'A} + 3\,\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

> Chasles. On décompose le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ en passant par A : 5 fois le vecteur $\overrightarrow{M'A}$ plus 3 fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$ égale le vecteur nul.
>
> Chasles. On décompose le vecteur M prime M en passant par A: 5 fois le vecteur M prime A plus 3 fois le .vecteur A M égale le vecteur nul

Le rapport — On isole le vecteur $\overrightarrow{AM'}$.

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AM}$$

> Le rapport. On isole le vecteur $\overrightarrow{AM'}$: il est égal à $\frac{3}{5}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$.

.Le rapport. On isole le vecteur A M prime: il est égal à 3 sur 5 fois le vecteur A M

L'application est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2/5 → $\frac{2}{5}$ utilise le coefficient de A. C'est le coefficient de M qu'on divise par la somme des coefficients.

3/2 / 2/3 → On divise par la somme des coefficients, $2+3$, pas par l'autre coefficient.

EXERCICE 7 · PRATIQUE

Passer par le centre

Soit A un point du plan. À tout point M, on associe le point M' tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à $-\frac{1}{3}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$. Cette application est une homothétie de centre A. Quel est son rapport k ?

Donne le rapport k.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport se lit sur le vecteur $\overrightarrow{AM'}$, qui part du centre A.
2. Utilise la relation de Chasles :
   $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'}$

> Utilise la relation de Chasles : le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{AM}$ et du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
>
> Utilise la relation de Chasles: le vecteur A M prime est la somme du vecteur A M et du vecteur M M .prime

CORRECTION

Chasles — On passe par M pour faire apparaître le vecteur donné.

$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'}$

> Chasles. On passe par M pour faire apparaître le vecteur donné : le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{AM}$ et du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
>
> Chasles. On passe par M pour faire apparaître le vecteur donné: le vecteur A M prime est la somme du .vecteur A M et du vecteur M M prime

Remplacer — On remplace le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, puis on met le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en facteur.

$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

> Remplacer. On remplace le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, puis on met le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en facteur : le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AM}$ moins un tiers du vecteur $\overrightarrow{AM}$, c'est-à-dire aux deux tiers du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
>
> Remplacer. On remplace le vecteur M M prime, puis on met le vecteur A M en facteur: le vecteur A M .prime est égal au vecteur A M moins un tiers du vecteur A M, c'est-à-dire aux deux tiers du vecteur A M

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

L'application est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/3` → $-\frac{1}{3}$ donne le vecteur $\overrightarrow{MM'}$. Le rapport se lit sur le vecteur $\overrightarrow{AM'}$, qui part du centre.

`4/3` → Tu as ajouté un tiers au lieu de le retrancher : il reste $1 - \frac{1}{3}$.

EXERCICE 8 · RAISONNEMENT

Avec le centre de gravité

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. À tout point M, on associe le point M' tel que 4 fois le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à la somme des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$. Cette application est une homothétie de centre G. Quel est son rapport k ?

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `1/4` — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. G est le centre de gravité : pour tout point M,
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$

> G est le centre de gravité : pour tout point M, la somme des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ est égale à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.
>
> G est le centre de gravité: pour tout point M, la somme des vecteurs M A, M B et M C est égale à 3 fois le vecteur M G.

2. Écris ensuite le vecteur $\overrightarrow{GM'}$ comme la somme du vecteur $\overrightarrow{GM}$ et du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

CORRECTION

Réduire la somme — G est le centre de gravité : la somme des trois vecteurs vaut 3 fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.

$4\,\overrightarrow{MM'} = 3\,\overrightarrow{MG}$

> Réduire la somme. G est le centre de gravité : la somme des trois vecteurs vaut 3 fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.
> Donc 4 fois le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ égale 3 fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.
>
> Réduire la somme. G est le centre de gravité: la somme des trois vecteurs vaut 3 fois le vecteur M G. Donc 4 fois le vecteur M M prime égale 3 fois le vecteur M G.

Partir du centre — On écrit le vecteur $\overrightarrow{GM'}$ en passant par M.

$\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GM} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{MG}$

> Partir du centre. On écrit le vecteur $\overrightarrow{GM'}$ en passant par M : il est égal au vecteur $\overrightarrow{GM}$ plus $\frac{3}{4}$ fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$.
>
> Partir du centre. On écrit le vecteur G M prime en passant par M: il est égal au vecteur G M plus 3 sur 4 fois le vecteur M G.

Conclure — Le vecteur $\overrightarrow{MG}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{GM}$.

$$\overrightarrow{GM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GM}$$

> Conclure. Le vecteur $\overrightarrow{MG}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{GM}$: le vecteur $\overrightarrow{GM'}$ est égal à $\frac{1}{4}$ fois le vecteur $\overrightarrow{GM}$.
>
> Conclure. Le vecteur M G est l'opposé du vecteur G M: le vecteur G M prime est égal à 1 sur 4 fois le vecteur G M.

Le rapport vaut $\frac{1}{4}$. Le seul point invariant de cette application est son centre G.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/4` → $\frac{3}{4}$ relie le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ au vecteur $\overrightarrow{MG}$. Le rapport se lit sur le vecteur $\overrightarrow{GM'}$, qui part du centre.

`-3/4 / -1/4` → Vérifie les signes : M' est entre M et G, donc du même côté de G que M. Le rapport est positif.

EXERCICE 9 · RAISONNEMENT

Trois points pondérés

Soit ABC un triangle. À tout point M, on associe le point M', barycentre des points A, B et M affectés des coefficients 1, -2 et 3. On note G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 1 et -2. Cette application est une homothétie de centre G. Quel est son rapport k ?

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `3/2` — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points A et B peuvent être remplacés par leur barycentre G, affecté de la somme de leurs coefficients.
2. M' est alors le barycentre des points G et M affectés des coefficients -1 et 3.

CORRECTION

Barycentre partiel — On remplace les points A et B par leur barycentre G, affecté du coefficient -1 : M' est le barycentre des points G et M affectés des coefficients -1 et 3.

$$-\overrightarrow{M'G} + 3\,\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

> Barycentre partiel. On remplace les points A et B par leur barycentre G, affecté du coefficient -1 : M' est le barycentre des points G et M affectés des coefficients -1 et 3. Donc moins le vecteur $\overrightarrow{M'G}$, plus 3 fois le vecteur $\overrightarrow{M'M}$, égale le vecteur nul.
>
> Barycentre partiel. On remplace les points A et B par leur barycentre G, affecté du coefficient moins 1: M prime est le barycentre des points G et M affectés des coefficients moins 1 et 3. Donc moins le vecteur M prime G, plus 3 fois le vecteur M prime M, égale le vecteur nul.

Chasles — On décompose le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ en passant par G.

$$2\,\overrightarrow{M'G} + 3\,\overrightarrow{GM} = \vec{0}$$

> Chasles. On décompose le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ en passant par G : 2 fois le vecteur $\overrightarrow{M'G}$ plus 3 fois le vecteur $\overrightarrow{GM}$ égale le vecteur nul.
>
> Chasles. On décompose le vecteur M prime M en passant par G: 2 fois le vecteur M prime G plus 3 fois le vecteur G M égale le vecteur nul.

Le rapport — On isole le vecteur $\overrightarrow{GM'}$.

$$\overrightarrow{GM'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{GM}$$

> Le rapport. On isole le vecteur $\overrightarrow{GM'}$: il est égal à $\frac{3}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{GM}$.
>
> Le rapport. On isole le vecteur G M prime: il est égal à 3 sur 2 fois le vecteur G M.

L'application est l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{3}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est le coefficient de M. Il faut encore le diviser par la somme des trois coefficients.

2/3 → Tu as inversé le quotient : le coefficient de M est au numérateur, la somme des coefficients au dénominateur.

-3/2 → Le rapport est positif : le coefficient de M et la somme des coefficients sont tous deux positifs.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

Une translation, puis un barycentre

Soit ABC un triangle. On note E l'image de A par la translation dont le vecteur est un quart du vecteur $\overrightarrow{BC}$, et F le barycentre des points A et C affectés des coefficients 4 et 1. Le point F est l'image de E par une homothétie de centre B. Quel est son rapport k ?

Donne le rapport k.

Réponse attendue : 4/5 — aussi acceptées : 0.8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Pour le barycentre F :

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{AC}$$

> Pour le barycentre F : le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est égal à un cinquième du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
>
> Pour le barycentre F: le vecteur A F est égal à un cinquième du vecteur A C.

CORRECTION

Le point E — Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égal à un quart du vecteur $\overrightarrow{BC}$: on part de B et on passe par A.

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$$

Le point E. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égal à un quart du vecteur $\overrightarrow{BC}$: on part de B et on passe par A. Le vecteur $\overrightarrow{BE}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$ plus un quart du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Le point E. Le vecteur A E est égal à un quart du vecteur B C: on part de B et on passe par A. Le vecteur B E .est égal au vecteur B A plus un quart du vecteur B C

Le point F — Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est égal à un cinquième du vecteur $\overrightarrow{AC}$, et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$

Le point F. Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est égal à un cinquième du vecteur $\overrightarrow{AC}$, et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{BC}$. Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est donc égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$ plus un cinquième du vecteur $\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire à quatre cinquièmes du vecteur $\overrightarrow{BA}$ plus un cinquième du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Le point F. Le vecteur A F est égal à un cinquième du vecteur A C, et le vecteur A C est la somme du vecteur A B et du vecteur B C. Le vecteur B F est donc égal au vecteur B A plus un cinquième du vecteur A .C, c'est-à-dire à quatre cinquièmes du vecteur B A plus un cinquième du vecteur B C

Comparer — On met quatre cinquièmes en facteur : on retrouve le vecteur $\overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{BF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$$

Comparer. On met quatre cinquièmes en facteur : on retrouve le vecteur $\overrightarrow{BE}$. Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est égal à quatre cinquièmes du vecteur $\overrightarrow{BE}$.

Comparer. On met quatre cinquièmes en facteur: on retrouve le vecteur B E. Le vecteur B F est égal à .quatre cinquièmes du vecteur B E

F est l'image de E par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{4}{5}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/4 → Tu as exprimé le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BF}$. On demande l'inverse.

1/5 → Un cinquième relie le vecteur $\overrightarrow{AF}$ au vecteur $\overrightarrow{AC}$. Il faut partir du centre B.

1/4 → Un quart est le coefficient qui place E. Compare plutôt les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BE}$.

EXERCICE 11 · BASE

Une longueur multipliée

Une homothétie de rapport -3 transforme A en E et B en F. On donne $AB = 2{,}5$. Calculer la distance EF.

Donne la distance EF, en écriture décimale.

Réponse attendue : `7.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par une homothétie de rapport k :

$$EF = |k| \times AB$$

2. La valeur absolue de -3 est 3.

CORRECTION

La conséquence — Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est égal à -3 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$: la distance est multipliée par la valeur absolue du rapport.

$EF = |-3| \times AB$

Le calcul — On remplace AB par sa valeur.

$EF = 3 \times 2{,}5 = 7{,}5$

$EF = 7{,}5$, et la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

PIÈGES ANTICIPÉS

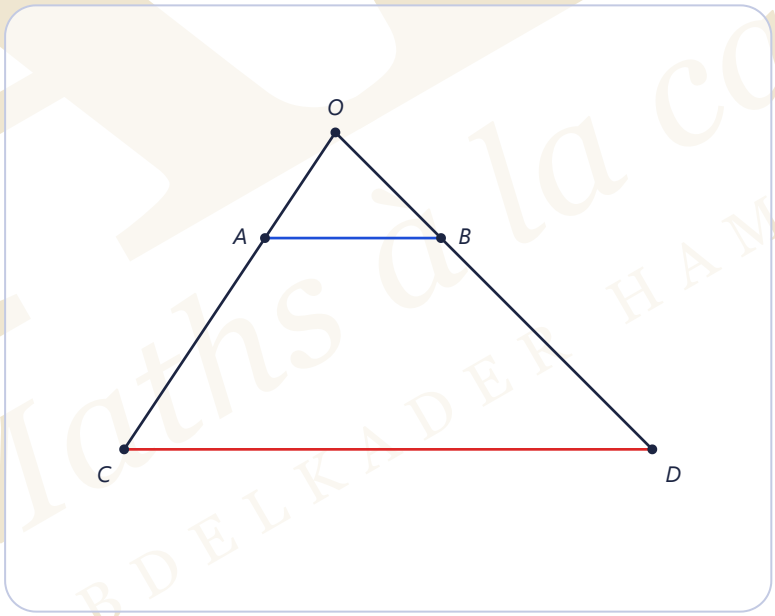
`-7.5` → Une distance n'est jamais négative : on multiplie par la valeur absolue du rapport.

`5.5` → On n'ajoute pas 3 : la distance est multipliée par 3.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Le rapport sur la figure

Dans la figure, les points O, A et C sont alignés, ainsi que les points O, B et D. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $CD = 3 \times AB$. Quel est le rapport k de l'homothétie de centre O qui transforme A en C et B en D ?



(AB) est parallèle à (CD) et CD = 3 AB.

Un point O en haut. Deux segments partent de O vers le bas : l'un passe par A et se termine en C, l'autre passe par B et se termine en D. Le segment AB est parallèle au segment CD, et CD est trois fois plus long que AB.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La valeur absolue du rapport se lit sur les longueurs : compare CD et AB.

2. Pour le signe, regarde si O est entre A et C ou non.

CORRECTION

La valeur absolue — L'homothétie transforme le segment $[AB]$ en le segment $[CD]$.

$$|k| = \frac{CD}{AB} = 3$$

Le signe — A et C sont du même côté de O : le rapport est positif.

$$k = 3$$

Le rapport vaut 3 : le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

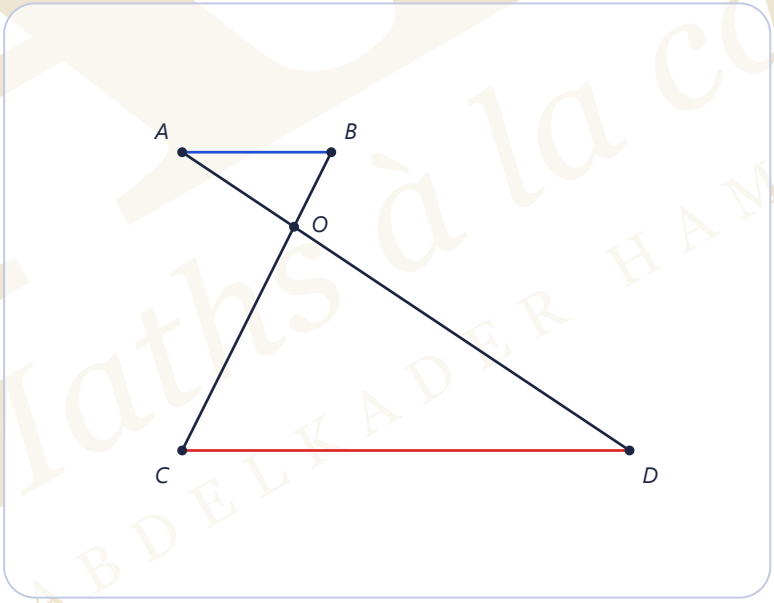
`-3` → A et C sont du même côté de O : le rapport est positif.

`1/3` → Un tiers est le rapport de l'homothétie qui transforme C en A. Ici on va de A vers C : la figure est agrandie.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

Le centre entre les deux

Dans la figure, les segments $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en O. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $CD = 3 \times AB$. Quel est le rapport k de l'homothétie de centre O qui transforme A en D et B en C ?



(AB) est parallèle à (CD) et CD = 3 AB.

Un segment AB horizontal en haut, et un segment CD horizontal en bas, trois fois plus long, avec C à gauche et D à droite. Les segments AD et BC se croisent en un point O, situé entre A et D et entre B et C.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La valeur absolue du rapport se lit sur les longueurs : compare CD et AB.

2. Pour le signe, regarde où se trouve O par rapport à A et D.

CORRECTION

La valeur absolue — L'homothétie transforme le segment $[AB]$ en le segment $[DC]$.

$$|k| = \frac{CD}{AB} = 3$$

Le signe — O est entre A et D : le rapport est négatif.

$$k = -3$$

Le rapport vaut -3 : le vecteur $\overrightarrow{OD}$ est égal à -3 fois le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

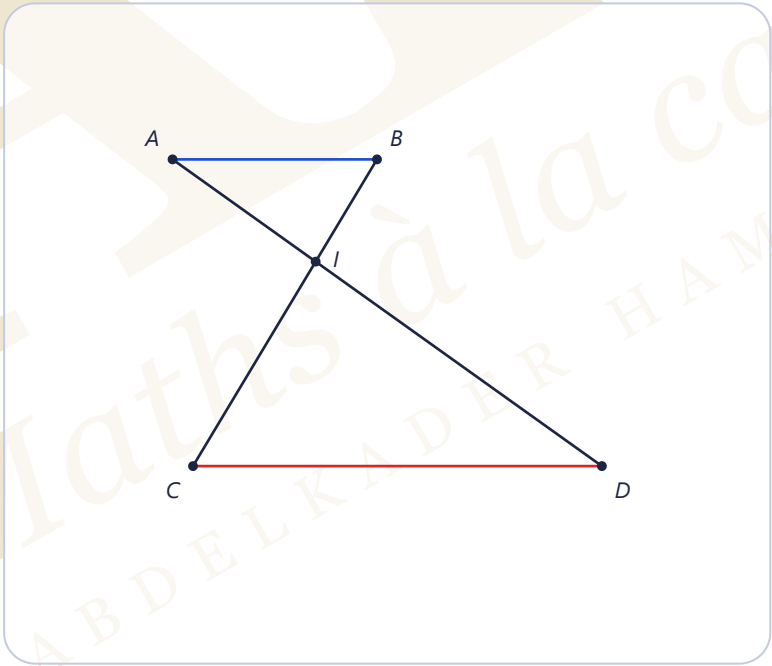
`3` → O est entre A et D : les deux vecteurs qui partent de O sont de sens contraires, le rapport est négatif.

`-1/3 / 1/3` → De A vers D, la figure est agrandie : la valeur absolue du rapport est 3, pas un tiers.

EXERCICE 14 · PRATIQUE

Deux bases parallèles

Dans la figure, les droites (AD) et (BC) se coupent en I, les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $ID = 2 \times IA$. On donne $AB = 3{,}5$. Calculer la distance CD.



Les droites (AD) et (BC) se coupent en I, avec ID = 2 IA.

Un segment AB horizontal en haut, et un segment CD horizontal en bas, deux fois plus long, avec C à gauche et D à droite. Les segments AD et BC se croisent en un point I : I est entre A et D, et entre B et C, et ID vaut deux fois IA.

Donne la distance CD.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'homothétie de centre I et de rapport -2 transforme A en D. Quelle est l'image de B ?
2. Elle transforme B en C : le segment $[AB]$ a pour image le segment $[DC]$.

CORRECTION

L'homothétie — I est entre A et D, et ID est le double de IA : l'homothétie de centre I et de rapport -2 transforme A en D. Comme la droite (CD) est parallèle à la droite (AB), elle transforme B en C.

$\overrightarrow{DC} = -2\,\overrightarrow{AB}$

> L'homothétie. I est entre A et D, et ID est le double de IA : l'homothétie de centre I et de rapport -2 transforme A en D. Comme la droite (CD) est parallèle à la droite (AB), elle transforme B en C. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est égal à -2 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
>
> L'homothétie. I est entre A et D, et I D est le double de I A: l'homothétie de centre I et de rapport moins 2 transforme A en D. Comme la droite C D est parallèle à la droite A B, elle transforme B en C. Le vecteur D C .est égal à moins 2 fois le vecteur A B

La distance — La distance est multipliée par la valeur absolue du rapport.

$CD = 2 \times 3{,}5 = 7$

$CD = 7.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`1.75` → Le segment $[CD]$ est l'image du segment $[AB]$ par une homothétie qui agrandit : on multiplie par 2.

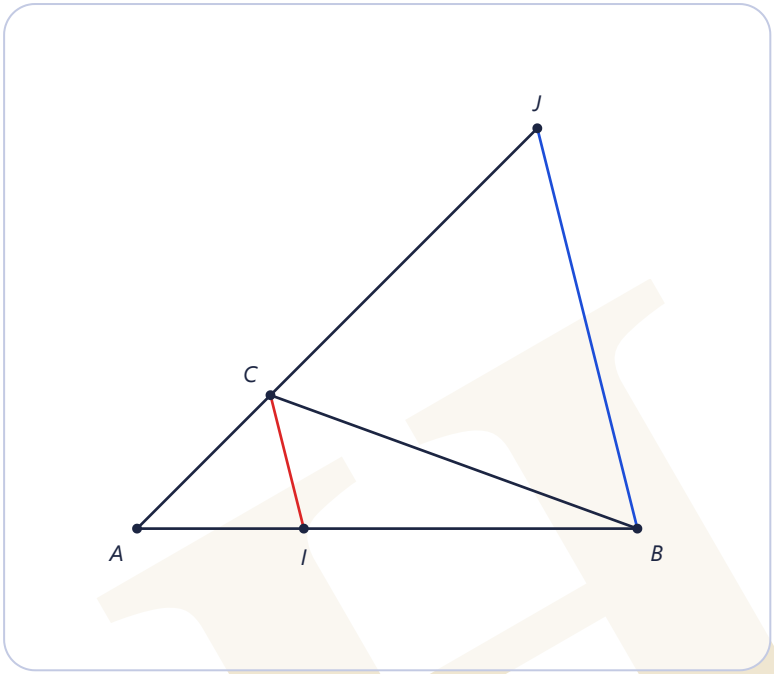
`5.5` → On n'ajoute pas 2 : les longueurs sont multipliées par 2.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Un tiers de la distance

Soit ABC un triangle. On note I l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$, et J le point tel que le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{AC}$. On donne $BJ = 12$. Calculer la distance IC.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



I est au tiers de [AB], et AJ = 3 AC.

Un triangle ABC, avec le côté AB horizontal en bas. Le point I est sur le côté AB, au tiers à partir de A. Le point J est sur la demi-droite d'origine A passant par C, trois fois plus loin de A que C. Le segment IC, en rouge, est parallèle au segment BJ, en bleu, et trois fois plus court.

Donne la distance IC.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est l'image du point J par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$?
2. I et C sont les images de B et de J : utilise la propriété caractéristique.

CORRECTION

L'image de J — Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal à un tiers du vecteur $\overrightarrow{AJ}$: C est l'image de J.

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$$

> L'image de J. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal à un tiers du vecteur $\overrightarrow{AJ}$: C est l'image de J.
>
> .L'image de J. Le vecteur A C est égal à un tiers du vecteur A J: C est l'image de J

La propriété — I et C sont les images de B et de J.

$$\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$$

> La propriété. I et C sont les images de B et de J : le vecteur $\overrightarrow{IC}$ est égal à un tiers du vecteur $\overrightarrow{BJ}$.
>
> .La propriété. I et C sont les images de B et de J: le vecteur I C est égal à un tiers du vecteur B J

La distance — La distance est divisée par 3.

$$IC = \frac{12}{3} = 4$$

$IC = 4$, et la droite (IC) est parallèle à la droite (BJ).

PIÈGES ANTICIPÉS

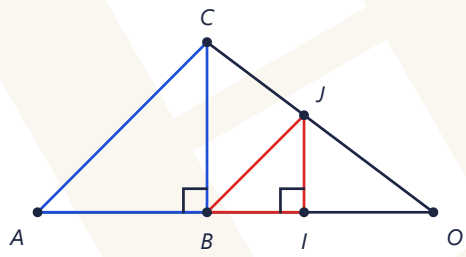
36 → I et C sont les images de B et de J par l'homothétie de rapport un tiers : la distance est divisée par 3, pas multipliée.

6 → Le rapport est un tiers, pas un demi.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

L'image d'un sommet

Dans la figure, les points A, B, I et O sont alignés, ainsi que les points C, J et O. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B, et le triangle BIJ est rectangle et isocèle en I. On note h l'homothétie de centre O qui transforme I en B. Quelle est l'image du point J par h ?



Les triangles ABC et BIJ sont rectangles et isocèles ; C, J et O sont alignés.

Quatre points alignés sur une droite horizontale, de gauche à droite : A, B, I et O. Le triangle ABC est rectangle en B, avec C au-dessus de B et BC égal à AB. Le triangle BIJ est rectangle en I, avec J au-dessus de I et IJ égal à IB. Les points C, J et O sont alignés sur un segment oblique qui descend vers O.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : C — aussi acceptées : le point C · point C · c'est C · c'est le point C · = C · l'image est C · l'image est le point C · h(J) = C · h(J)=C · l'image de J est C · l'image de J est le point C · le sommet C · sommet C · c'est le sommet C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de J est alignée avec O et J : sur quelle droite se trouve-t-elle ?
2. L'image de la droite (IJ) est la parallèle à (IJ) passant par l'image de I. Les droites (IJ) et (BC) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AO).

CORRECTION

Une droite — Les droites (IJ) et (BC) sont perpendiculaires à la droite (AO) : elles sont parallèles. L'image de (IJ) est la parallèle à (IJ) passant par B, image de I : c'est la droite (BC).

Le point — L'image de J est sur la droite (BC) et sur la droite (OJ) : c'est leur point d'intersection.

$h(J) = C$

L'image de J est le point C.

PIÈGES ANTICIPÉS

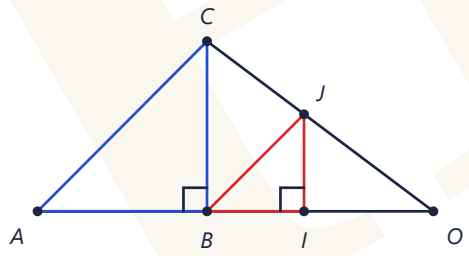
`A / le point A / point A / le sommet A / sommet A` → L'image de J est alignée avec O et J : le point A n'est pas sur la droite (OJ).

`B / le point B / point B / le sommet B / sommet B` → B est l'image de I. Pour J, cherche l'image de la droite (IJ).

EXERCICE 17 · RAISONNEMENT

Un angle de 45 degrés

Dans la figure, les points A, B, I et O sont alignés, ainsi que les points C, J et O. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B, et le triangle BIJ est rectangle et isocèle en I. L'homothétie h de centre O qui transforme I en B transforme aussi J en C. Quelle est l'image du point B par h ?



Les triangles ABC et BIJ sont rectangles et isocèles ; C, J et O sont alignés.

Quatre points alignés sur une droite horizontale, de gauche à droite : A, B, I et O. Le triangle ABC est rectangle en B, avec C au-dessus de B et BC égal à AB. Le triangle BIJ est rectangle en I, avec J au-dessus de I et IJ égal à IB. Les points C, J et O sont alignés sur un segment oblique qui descend vers O.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · c'est A · c'est le point A · = A · l'image est A · l'image est le point A · h(B) = A · h(B)=A · l'image de B est A · l'image de B est le point A · le sommet A · sommet A · c'est le sommet A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de B est sur la droite (OB). Cherche aussi l'image de la droite (BJ).
2. Dans un triangle rectangle et isocèle, les deux angles aigus mesurent $45°$: compare les directions des droites (BJ) et (AC).

CORRECTION

Deux parallèles — L'angle $\widehat{IBJ}$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesurent chacun $45°$, et ils sont correspondants : la droite (BJ) est parallèle à la droite (AC).

L'image d'une droite — L'image de la droite (BJ) est la parallèle à (BJ) passant par C, image de J : c'est la droite (AC).

Le point — L'image de B est sur la droite (AC) et sur la droite (OB) : c'est leur point d'intersection.

$h(B) = A$

L'image de B est le point A : le triangle ABC est l'image du triangle BIJ.

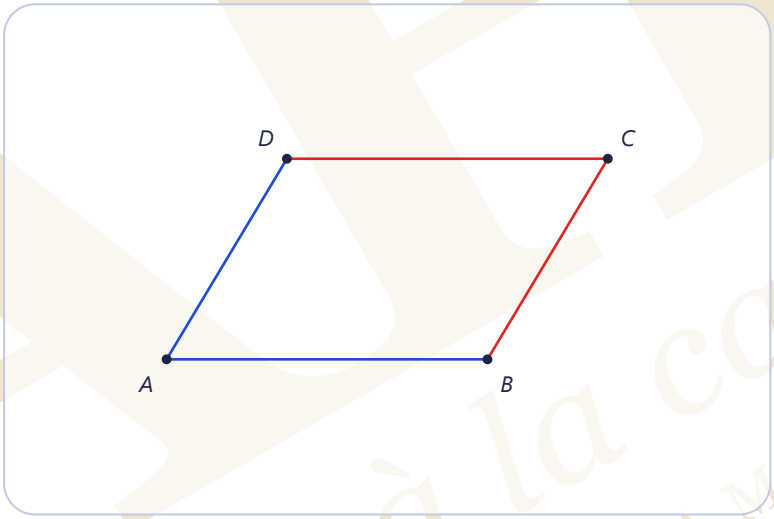
PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / point C / le sommet C / sommet C` → C est l'image de J. L'image de B est alignée avec O et B.

`B / le point B / point B / le sommet B / sommet B` → Seul le centre O est sa propre image : B a une image différente de lui-même.

EXERCICE 18 · PRATIQUE **Deux droites, un point**

Soit $ABCD$ un parallélogramme et h une homothétie qui transforme la droite (AB) en la droite (CD), et la droite (AD) en la droite (BC). Quelle est l'image du point A par h ?



Les droites (AB) et (AD) se coupent en A ; les droites (CD) et (BC) se coupent en C.

Un parallélogramme ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. Les droites (AB) et (AD), qui passent par A, sont en bleu ; les droites (CD) et (BC), qui passent par C, sont en rouge.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : C — aussi acceptées : le point C · point C · c'est C · c'est le point C · = C · l'image est C · l'image est le point C · h(A) = C · h(A)=C · l'image de A est C · l'image de A est le point C · le sommet C · sommet C · c'est le sommet C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point A est sur deux droites dont on connaît les images.
2. Son image est sur les deux droites images : cherche leur point d'intersection.

CORRECTION

Deux droites — A est le point d'intersection des droites (AB) et (AD).

Leurs images — L'image de A est sur l'image de (AB) et sur l'image de (AD) : elle est sur la droite (CD) et sur la droite (BC).

$h(A) = C$

L'image de A est le point C : le centre de h est sur la droite (AC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`D / le point D / point D / le sommet D / sommet D` → D est bien sur la droite (CD), mais il n'est pas sur la droite (BC), image de (AD).

`B / le point B / point B / le sommet B / sommet B` → B est sur la droite (BC), mais il n'est pas sur la droite (CD), image de (AB).

EXERCICE 19 · BASE

L'image d'un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note E, F, G et K les images respectives de A, B, C et D par une homothétie. Quelle est la nature du quadrilatère $EFGK$?

Réponds par un mot : parallélogramme, losange, trapèze...

Réponse attendue : `parallelogramme` — aussi acceptées : un parallelogramme · c'est un parallelogramme · parallélogramme · un parallélogramme · efgk est un parallelogramme · efgk parallelogramme · le quadrilatere efgk est un parallelogramme

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : que devient ce milieu par l'homothétie ?
2. Une homothétie conserve le milieu.

CORRECTION

Le centre — On note O le centre de $ABCD$: c'est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

Son image — L'image de O est le milieu du segment $[EG]$ et du segment $[FK]$: les diagonales de $EFGK$ se coupent en leur milieu.

$EFGK$ est un parallélogramme

$EFGK$ est un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

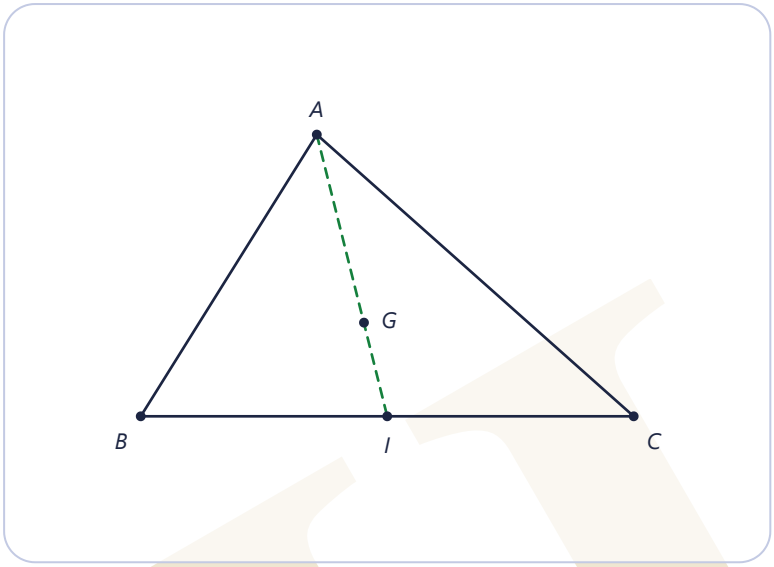
`trapeze / un trapeze / trapèze / un trapèze / efgk est un trapeze` → Un trapèze n'a qu'une paire de côtés parallèles. Ici les deux paires de côtés opposés restent parallèles.

`rectangle / un rectangle / losange / un losange / carre / un carre / efgk est un rectangle / efgk est un losange / efgk est un carre` → Rien ne dit que $ABCD$ a un angle droit ou des côtés égaux : son image est un parallélogramme, sans plus.

EXERCICE 20 · PRATIQUE

Du sommet au milieu du côté

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et I le milieu du côté $[BC]$. Quel est le rapport k de l'homothétie de centre G qui transforme A en I ?



G est aux deux tiers de la médiane [AI] à partir de A.

Un triangle ABC. I est le milieu du côté BC. La médiane AI est tracée en pointillés ; le centre de gravité G est sur cette médiane, entre A et I, deux fois plus près de I que de A.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-1/2` — aussi acceptées : -0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane $[AI]$ à partir de A.
2. Compare les distances GI et GA, puis regarde de quel côté de G se trouvent A et I.

CORRECTION

Sur la médiane — G est aux deux tiers de la médiane à partir de A : GA vaut deux tiers de AI, et GI en vaut un tiers.

$$GI = \frac{1}{2} \times GA$$

Le signe — G est entre A et I : le rapport est négatif.

$$\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

> Le signe. G est entre A et I : le rapport est négatif. Le vecteur $\overrightarrow{GI}$ est égal à $-\frac{1}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{GA}$.
>
> .Le signe. G est entre A et I: le rapport est négatif. Le vecteur G I est égal à moins 1 sur 2 fois le vecteur G A

Le rapport vaut $-\frac{1}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → G est entre A et I : les deux vecteurs qui partent de G sont de sens contraires.

`-2` → -2 est le rapport de l'homothétie qui transforme I en A. De A vers I, la distance au centre est divisée par 2.

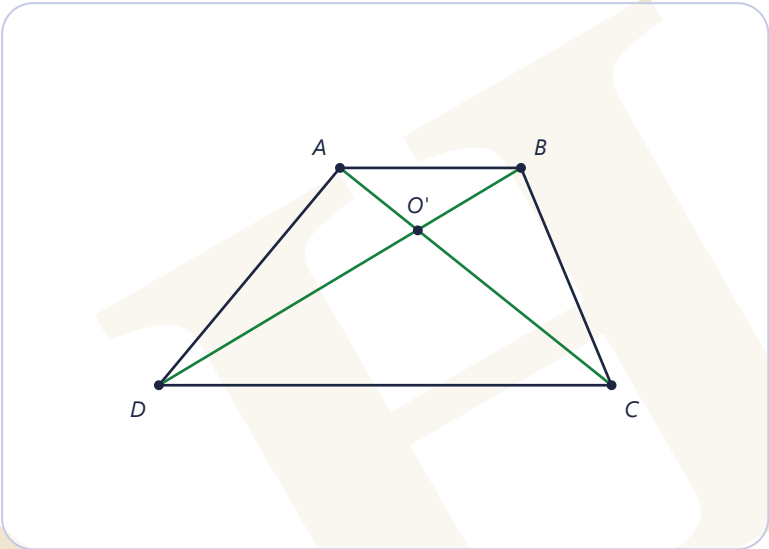
`1/3 / -1/3` → Un tiers est la part de la médiane entre G et I. Compare GI à GA, pas à AI.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

Dans le trapèze

Dans la figure, $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que $AB = 4$ et $CD = 10$. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O'. Quel est le rapport k de l'homothétie de centre O' qui transforme A en C ?



AB = 4, CD = 10 ; les diagonales se coupent en O'.

Un trapèze ABCD : la petite base AB est en haut, la grande base DC en bas, avec D à gauche et C à droite. Les diagonales AC et BD se coupent en un point O' situé à l'intérieur du trapèze.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-5/2` — aussi acceptées : -2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cette homothétie transforme A en C et B en D : elle transforme le segment $[AB]$ en le segment $[CD]$.
2. La valeur absolue du rapport est le quotient des longueurs ; le signe dépend de la position de O' par rapport à A et C.

CORRECTION

La valeur absolue — L'homothétie transforme le segment $[AB]$ en le segment $[CD]$.

$$|k| = \frac{CD}{AB} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Le signe — Le point O' est à l'intérieur du trapèze, entre A et C : le rapport est négatif.

$$k = -\frac{5}{2}$$

Le rapport vaut $-\frac{5}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/2` → O' est entre A et C : le rapport est négatif. Le rapport positif est celui de l'homothétie dont le centre est le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

-2/5 / 2/5 → De A vers C, on passe de la petite base à la grande : la valeur absolue du rapport est plus grande que 1.

EXERCICE 22 · RAISONNEMENT

Le milieu conservé

Soit ABC un triangle tel que $BC = 12$, et I le milieu du côté $[BC]$. On note h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$, puis P l'image de B et R l'image de C par h. Calculer la distance PR.

Donne la distance PR.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le segment $[PR]$ est l'image du segment $[BC]$.
2. Par une homothétie de rapport k, les distances sont multipliées par la valeur absolue de k.

CORRECTION

Le segment image — P et R sont les images de B et de C : le segment $[PR]$ est l'image du segment $[BC]$, et sa longueur est multipliée par deux tiers.

$$PR = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

$PR = 8$. Le milieu I de $[BC]$ est le centre de h : il est aussi le milieu de $[PR]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

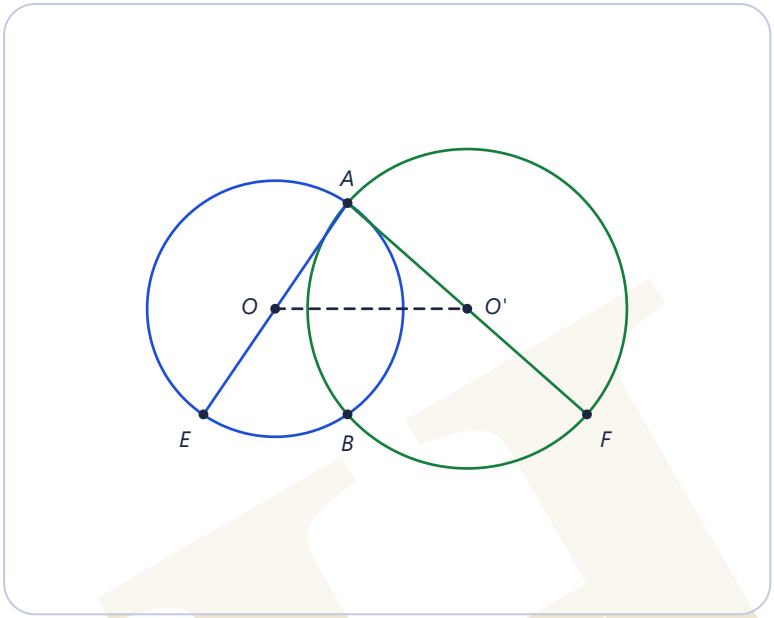
4 → 4 est la distance IP : les deux tiers de IB. On demande PR, image du segment $[BC]$ tout entier.

18 → Le rapport deux tiers est plus petit que 1 : le segment image est plus court que $[BC]$.

EXERCICE 23 · RAISONNEMENT

Deux cercles sécants

On considère deux cercles (C) et (C'), de centres respectifs O et O', sécants en A et B. La droite (AO) recoupe le cercle (C) en E, et la droite (AO') recoupe le cercle (C') en F. On donne $OO' = 5$. Calculer la distance EF.



[AE] est un diamètre de (C), [AF] un diamètre de (C').

Deux cercles sécants en deux points A et B : à gauche le cercle (C) de centre O, à droite le cercle (C'), un peu plus grand, de centre O'. A est le point d'intersection du haut, B celui du bas. Le diamètre [AE] du cercle (C) passe par O, et le diamètre [AF] du cercle (C') passe par O'. Le segment [OO'] est tracé en pointillés. Les points E, B et F sont sur une même droite horizontale, en bas de la figure.

Donne la distance EF.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AE]$ est un diamètre du cercle (C), et $[AF]$ un diamètre du cercle (C') : où se trouvent O et O' sur ces segments ?
2. L'homothétie de centre A et de rapport 2 transforme O en E et O' en F.

CORRECTION

Deux diamètres — E est le point diamétralement opposé à A sur le cercle (C) : O est le milieu du segment $[AE]$. De même, O' est le milieu du segment $[AF]$.

L'homothétie — L'homothétie h de centre A et de rapport 2 transforme O en E et O' en F.

$h(O) = E \quad ; \quad h(O') = F$

La distance — Le segment $[EF]$ est l'image du segment $[OO']$: sa longueur est multipliée par 2.

$EF = 2 \times 5 = 10$

$EF = 10$. La même homothétie transforme le milieu de la corde $[AB]$ en B : ce milieu est aligné avec O et O', donc les points E, B et F sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 est la distance OO'. Le segment $[EF]$ est son image par une homothétie de rapport 2 : il est deux fois plus long.

`2.5` → Tu as divisé par 2. L'homothétie de centre A qui transforme O en E a pour rapport 2 : le segment image est deux fois plus long.

EXERCICE 24 · BASE

Un angle conservé

Dans un triangle ABC, l'angle $\widehat{ABC}$ mesure $35°$. On note E, F et G les images de A, B et C par une homothétie de rapport -3. Combien mesure l'angle $\widehat{EFG}$?

Donne la mesure en degrés.

Réponse attendue : 35

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que fait une homothétie à un angle ?
2. Le signe et la valeur du rapport ne changent rien aux angles.

CORRECTION

La conservation — Une homothétie conserve les angles : l'angle $\widehat{EFG}$, image de l'angle $\widehat{ABC}$, a la même mesure.

$$\widehat{EFG} = \widehat{ABC} = 35°$$

L'angle $\widehat{EFG}$ mesure $35°$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`105 / -105` → Le rapport multiplie les longueurs, pas les angles : une homothétie conserve les angles.

`145` → Même avec un rapport négatif, un angle n'est pas changé en son supplémentaire : il est conservé.

EXERCICE 25 · BASE

Le rayon du cercle image

Un cercle a pour rayon 6. On note r le rayon de son image par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$.

Calculer r.

Donne le rayon r.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon du cercle image est :
   $R' = |k| \times R$
2. La valeur absolue de $-\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}$.

CORRECTION

Le rayon — Le rayon est multiplié par la valeur absolue du rapport, c'est-à-dire par un demi.

$$r = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$r = 3$: le signe du rapport ne joue que sur la position du centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3` → Un rayon est une longueur : on multiplie par la valeur absolue du rapport.

12 → La valeur absolue du rapport est un demi : le cercle est réduit, son rayon est divisé par 2.

EXERCICE 26 · PRATIQUE

Un cercle deux fois plus grand

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 4, et un diamètre $[AB]$ de ce cercle. On note r le rayon de l'image de (C) par l'homothétie de centre A qui transforme O en B. Calculer r.

Donne le rayon r.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche d'abord le rapport : compare les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO}$.
2. O est le milieu du segment $[AB]$: le rapport vaut 2.

CORRECTION

Le rapport — O est le milieu du diamètre $[AB]$.

$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AO}$

> Le rapport. O est le milieu du diamètre $[AB]$: le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{AO}$.
>
> .Le rapport. O est le milieu du diamètre A B: le vecteur A B est égal à 2 fois le vecteur A O

Le rayon — Le rayon est multiplié par 2.

$r = 2 \times 4 = 8$

$r = 8$: le cercle image a pour centre B et passe par A.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Le rayon ne reste le même que pour une translation. Ici le rapport vaut 2.

16 → C'est l'aire qui est multipliée par le carré du rapport. Le rayon est multiplié par le rapport.

EXERCICE 27 · RAISONNEMENT

Le centre de rapport positif

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 2, et un cercle (C') de centre O' et de rayon 6, avec $OO' = 12$. On note I le centre de l'homothétie de rapport positif qui transforme (C) en (C'). Calculer la distance IO.

Donne la distance IO.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport est le quotient des rayons : il vaut 3.
2. Le vecteur $\overrightarrow{IO'}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{IO}$: les points O et O' sont du même côté de I.

CORRECTION

Le rapport — Le rayon est multiplié par 3, et le rapport est positif.

$$k = \frac{6}{2} = 3$$

Le centre — Le centre O a pour image O' : les points O et O' sont du même côté de I, et la distance IO' est le triple de la distance IO.

$$\overrightarrow{IO'} = 3\,\overrightarrow{IO}$$

> Le centre. Le centre O a pour image O' : les points O et O' sont du même côté de I, et la distance IO' est le triple de la distance IO. Le vecteur $\overrightarrow{IO'}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{IO}$.
>
> Le centre. Le centre O a pour image O prime: les points O et O prime sont du même côté de I, et la distance I O prime est le triple de la distance I O. Le vecteur I O prime est égal à 3 fois le vecteur I O.

La distance — La distance OO' est la différence des deux distances à I : elle vaut 2 fois IO.

$$IO = \frac{12}{2} = 6$$

$IO = 6$ et $IO' = 18$: le point I est hors du segment $[OO']$, du côté du petit cercle.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Tu as divisé 12 par 3. Mais la distance OO' est la différence entre IO' et IO : elle vaut 2 fois IO.

3 → 3 est la distance de O au centre de l'homothétie de rapport négatif, qui est entre O et O'. Ici le rapport est positif : I est hors du segment $[OO']$.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

L'aire du triangle image

Un triangle ABC a pour côtés 3, 4 et 5 : il est rectangle, et son aire vaut 6. On note s l'aire de son image par une homothétie de rapport 3. Calculer s.

Donne l'aire s.

Réponse attendue : 54

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par une homothétie de rapport k, l'aire devient :
   $a' = k^2 \times a$
2. Ici le carré du rapport vaut 9.

CORRECTION

Le carré du rapport — On élève le rapport au carré.

$$k^2 = 3^2 = 9$$

L'aire — L'aire est multipliée par le carré du rapport.

$$s = 9 \times 6 = 54$$

$s = 54$: les côtés du triangle image mesurent 9, 12 et 15.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → 18 serait 3×6 : c'est le périmètre qui est multiplié par le rapport. L'aire est multipliée par son carré.

36 → 36 est le périmètre du triangle image. On demande son aire.

EXERCICE 29 · PRATIQUE

Le quart de l'aire

Soit ABC un triangle tel que $AB = 10$. La parallèle à la droite (BC) passant par un point M du côté $[AB]$ coupe le côté $[AC]$ en N. On veut que l'aire du triangle AMN soit le quart de l'aire du triangle ABC. Calculer la distance AM.

Donne la distance AM.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre A, dont le rapport k est le quotient de AM par AB.
2. L'aire est multipliée par le carré du rapport : il faut que ce carré soit égal à un quart.

CORRECTION

L'homothétie — Comme la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme C en N. Son rapport k est positif.

$$AM = k \times AB$$

L'aire — L'aire est multipliée par le carré du rapport.

$$k^2 = \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad k = \frac{1}{2}$$

La distance — On prend la moitié de AB.

$$AM = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$AM = 5$: le point M est le milieu du côté $[AB]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2.5 → Si AM était le quart de AB, l'aire serait divisée par 16. L'aire est multipliée par le carré du rapport.

EXERCICE 30 · RAISONNEMENT

Du point à son image

On considère l'homothétie h de centre O et de rapport 3. Soit M un point du plan et M' son image par h. On sait que la distance entre M et M' vaut 8. Calculer la distance OM.

Donne la distance OM.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}$$

> Par la relation de Chasles : le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{MO}$ et du vecteur $\overrightarrow{OM'}$.
> .Par la relation de Chasles: le vecteur M M prime est la somme du vecteur M O et du vecteur O M prime

2. Le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{OM}$: il reste 2 fois le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

CORRECTION

Le vecteur — On décompose en passant par O : le vecteur $\overrightarrow{MO}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{OM} + 3\,\overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OM}$$

> Le vecteur. On décompose en passant par O : le vecteur $\overrightarrow{MO}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est donc égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
> Le vecteur. On décompose en passant par O: le vecteur M O est l'opposé du vecteur O M, et le vecteur O .M prime est égal à 3 fois le vecteur O M. Le vecteur M M prime est donc égal à 2 fois le vecteur O M

La distance — La distance entre M et M' est le double de OM.

$$OM = \frac{8}{2} = 4$$

$OM = 4$: les points M qui conviennent sont ceux du cercle de centre O et de rayon 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

8/3 → 8 n'est pas la distance de O à l'image : c'est la distance du point à son image. Exprime d'abord le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

2 → La distance du point à son image est la différence entre 3 fois OM et OM : elle vaut 2 fois OM, pas 4 fois.

EXERCICE 31 · RAISONNEMENT

Entre deux droites parallèles

On considère deux droites parallèles D_1 et D_2. Une droite coupe D_1 en A et D_2 en E, avec $AE = 6$. On note O le centre de l'homothétie de rapport $\frac{5}{3}$ qui transforme A en E. Calculer la distance OA.

Donne la distance OA.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport est positif : A et E sont du même côté de O, et la distance OE vaut cinq tiers de OA.
2. La distance AE est la différence entre OE et OA : elle vaut deux tiers de OA.

CORRECTION

La définition — Le rapport est positif et plus grand que 1 : E est au-delà de A sur la demi-droite d'origine O.

$$\overrightarrow{OE} = \frac{5}{3}\,\overrightarrow{OA}$$

La définition. Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ est égal à $\frac{5}{3}$ fois le vecteur $\overrightarrow{OA}$. Le rapport est positif et plus grand que 1 : E est au-delà de A sur la demi-droite d'origine O.

La définition. Le vecteur O E est égal à 5 sur 3 fois le vecteur O A. Le rapport est positif et plus grand que 1: .E est au-delà de A sur la demi-droite d'origine O

La différence — La distance AE est la différence des deux distances au centre.

$$AE = \frac{5}{3} \times OA - OA = \frac{2}{3} \times OA$$

La distance — On multiplie AE par trois demis.

$$OA = \frac{3}{2} \times 6 = 9$$

$OA = 9$ et $OE = 15$. L'image de la droite D_1 par cette homothétie est la droite D_2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3.6 / 18/5` → Tu as multiplié AE par trois cinquièmes. Mais AE n'est pas la distance de O à l'image : c'est la différence entre OE et OA.

`15` → 15 est la distance OE. On demande OA.

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT

Le symétrique d'un point fixe

On considère une droite D_1 et un point A qui n'appartient pas à D_1. Pour chaque point M de D_1, on note N le symétrique de A par rapport à M. Sur quelle sorte de ligne le point N se déplace-t-il lorsque M décrit la droite D_1 ?

Réponds par un mot : droite, cercle, segment…

Réponse attendue : `droite` — aussi acceptées : une droite · la droite · c'est une droite · sur une droite · une ligne droite · ligne droite · sur une ligne droite · une droite parallele · droite parallele · sur une droite parallele · une parallele · une droite parallele a d1 · droite parallele a d1 · la droite parallele a d1 · c'est une droite parallele a d1 · sur une droite parallele a d1 · une droite parallele a la droite d1 · une parallele a d1 · la parallele a d1 · sur une parallele a d1 · sur la parallele a d1 · parallele a d1 · la droite parallele a la droite d1 · une parallele a la droite d1 · une droite parallele a (d1) · droite parallele a (d1) · la droite parallele a (d1) · c'est une droite parallele a (d1) · sur une droite parallele a (d1) · une droite parallele a la droite (d1) · une parallele a (d1) · la parallele a (d1) · sur une parallele a (d1) · parallele a (d1) · n decrit une droite · n decrit une droite parallele a d1 · n decrit une droite parallele a (d1) · n se deplace sur une droite · n se deplace sur une droite parallele a d1 · il se deplace sur une droite · il se deplace sur une droite parallele a d1 · une droite parallele a d · droite parallele a d · la droite parallele a d · sur une droite parallele a d · une parallele a d · la parallele a d · sur une parallele a d · parallele a d

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle application envoie M sur N ? Compare les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$.
2. M est le milieu du segment $[AN]$: N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

CORRECTION

L'homothétie — M est le milieu du segment $[AN]$: N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

$\overrightarrow{AN} = 2\,\overrightarrow{AM}$

> L'homothétie. M est le milieu du segment $[AN]$: le vecteur $\overrightarrow{AN}$ est égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$. N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
>
> L'homothétie. M est le milieu du segment A N: le vecteur A N est égal à 2 fois le vecteur A M. N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

Le lieu — Quand M décrit la droite D_1, son image décrit l'image de D_1 : une droite parallèle à D_1.

N se déplace sur une droite : la parallèle à D_1 située deux fois plus loin de A que D_1.

PIÈGES ANTICIPÉS

`cercle / un cercle / le cercle` → L'image d'une droite par une homothétie est une droite. Un cercle serait l'image d'un cercle.

`la droite d1 / sur la droite d1 / d1 / sur d1 / la droite (d1) / sur la droite (d1) / (d1) / la droite d / sur la droite d` → N n'est pas sur D_1 : il est deux fois plus loin de A que M. Il décrit une droite parallèle à D_1.

EXERCICE 33 · RAISONNEMENT

Le rayon d'un lieu

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 10, et un point A qui n'appartient pas à (C). Pour chaque point M de (C), on note I le barycentre des points A et M affectés des coefficients 2 et 3. Lorsque M décrit (C), le point I décrit un cercle : on note r son rayon. Calculer r.

Donne le rayon r.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour ce barycentre :
   $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AM}$

   > Pour ce barycentre : le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est égal à $\frac{3}{5}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$.
   >
   > .Pour ce barycentre: le vecteur A I est égal à 3 sur 5 fois le vecteur A M
2. I est l'image de M par une homothétie de centre A : le rayon est multiplié par son rapport.

CORRECTION

Le barycentre — Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ s'obtient avec le coefficient de M divisé par la somme des coefficients.

$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AM}$

> Le barycentre. Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ s'obtient avec le coefficient de M divisé par la somme des coefficients : il est égal à $\frac{3}{5}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$.
>
> Le barycentre. Le vecteur A I s'obtient avec le coefficient de M divisé par la somme des coefficients: il est égal à 3 sur 5 fois le vecteur A M.

L'homothétie — I est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport trois cinquièmes : il décrit l'image du cercle (C).

Le rayon — Le rayon est multiplié par trois cinquièmes.

$$r = \frac{3}{5} \times 10 = 6$$

$r = 6$: le lieu de I est le cercle de rayon 6 dont le centre est l'image de O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → Tu as pris deux cinquièmes, avec le coefficient de A. C'est le coefficient de M qui donne le vecteur $\overrightarrow{AI}$.

`10` → Le rayon ne se conserve que par une translation. Ici I est l'image de M par une homothétie de rapport trois cinquièmes.

EXERCICE 34 · DEFI

Un lieu avec un barycentre

On considère un cercle (C) de centre O et de diamètre $[AB]$, avec $AB = 12$. On note G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 3 et -2. Soit M un point de (C), distinct de A et de B, et N le point diamétralement opposé à M. Les droites (BN) et (GM) se coupent en un point E. Lorsque M décrit le cercle, le point E décrit un cercle privé de deux points : on note r son rayon. Calculer r.

Donne le rayon r.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place G : le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est égal à -2 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Compare alors les distances GB et GA.
2. Les segments $[AB]$ et $[MN]$ sont deux diamètres : $AMBN$ est un rectangle, donc la droite (AM) est parallèle à la droite (BN). Pense à l'homothétie de centre G qui transforme A en B.

CORRECTION

Le point G — Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est égal à -2 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$: G est sur la droite (AB), du côté de A, avec $GA = 24$ et $GB = 36$.

$$\overrightarrow{GB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}$$

> Le point G. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est égal à -2 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$: G est sur la droite (AB), du côté de A, avec $GA = 24$ et $GB = 36$. Le vecteur $\overrightarrow{GB}$ est égal à $\frac{3}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{GA}$.
>
> Le point G. Le vecteur A G est égal à moins 2 fois le vecteur A B: G est sur la droite A B, du côté de A, avec G A égale 24 et G B égale 36. Le vecteur G B est égal à 3 sur 2 fois le vecteur G A.

Le rectangle — Les segments $[AB]$ et $[MN]$ sont deux diamètres : $AMBN$ est un rectangle, et la droite (AM) est parallèle à la droite (BN).

L'homothétie — L'homothétie h de centre G et de rapport trois demis transforme A en B, donc la droite (AM) en la droite (BN). L'image de M est sur (BN) et sur (GM) : c'est E.

$$h(M) = E$$

Le rayon — Le rayon de (C) vaut 6 ; il est multiplié par trois demis.

$r = \frac{3}{2} \times 6 = 9$

$r = 9$: E décrit l'image du cercle (C) par h, privée des images de A et de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est le rayon de (C). Le point E est l'image de M par une homothétie de centre G : le rayon est multiplié par son rapport.

18 → Tu as multiplié le diamètre. Le rayon de (C) est 6.

4 → De A vers B, on s'éloigne de G : le rapport est plus grand que 1.

EXERCICE 35 · DEFI

Une translation, puis une homothétie

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 6, et une corde $[AB]$ de ce cercle. Pour chaque point M de (C), on note N le point tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$, et I le milieu du segment $[AN]$. Lorsque M décrit le cercle, le point I décrit un cercle : on note r son rayon. Calculer r.

Donne le rayon r.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: sur quelle ligne se déplace-t-il ?
2. I est l'image de N par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

CORRECTION

La translation — N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: il décrit un cercle de même rayon, 6.

L'homothétie — I est le milieu du segment $[AN]$: c'est l'image de N par l'homothétie de centre A et de rapport un demi.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

> L'homothétie. I est le milieu du segment $[AN]$: le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est la moitié du vecteur $\overrightarrow{AN}$. I est l'image de N par l'homothétie de centre A et de rapport un demi.
>
> L'homothétie. I est le milieu du segment A N: le vecteur A I est la moitié du vecteur A N. I est l'image de N .par l'homothétie de centre A et de rapport un demi

Le rayon — Le rayon est divisé par 2.

$r = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$r = 3$: la translation garde le rayon, l'homothétie le divise par 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est le rayon du cercle décrit par N : une translation conserve le rayon. Mais I est le milieu de $[AN]$: il reste une homothétie de rapport un demi.

12 → I est le milieu de $[AN]$: le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est la moitié du vecteur $\overrightarrow{AN}$, pas son double.

EXERCICE 36 · DEFI

Sur la droite d'Euler

Dans un triangle ABC, on note O le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité et H l'orthocentre. On donne $OG = 4$. Calculer la distance GH.

Donne la distance GH.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur la droite d'Euler :
   $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$

   > Sur la droite d'Euler : le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{OG}$.
   >
   > .Sur la droite d'Euler: le vecteur O H est égal à 3 fois le vecteur O G
2. Le point G est entre O et H : retire OG de OH.

CORRECTION

La droite d'Euler — Les points O, G et H sont alignés, et le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{OG}$.
$OH = 3 \times 4 = 12$

La distance — G est entre O et H.
$GH = 12 - 4 = 8$

$GH = 8$: c'est le double de OG, car l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme H en O.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 est la distance OH. On demande GH : retire OG.

2 → C'est GO qui est la moitié de GH, et non l'inverse.

4 → G n'est pas le milieu du segment $[OH]$: il est deux fois plus près de O que de H.

EXERCICE 37 · DEFI

Trois points alignés

Soit AIJ un triangle inscrit dans un cercle de centre O. On note B et C les symétriques de A par rapport à I et à J, M le milieu du segment $[IJ]$, D le point diamétralement opposé à A sur le cercle, et N le projeté orthogonal de D sur la droite (BC). On donne $AM = 5{,}5$. Calculer la distance AN.

Donne la distance AN.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'homothétie h de centre A et de rapport 2 transforme I en B, J en C et O en D.
2. La droite (OM) est la médiatrice de $[IJ]$: son image est la perpendiculaire à (BC) passant par D. Quelle est alors l'image de M ?

CORRECTION

Trois images — I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AC]$ et O le milieu de $[AD]$: l'homothétie h de centre A et de rapport 2 transforme I en B, J en C et O en D.

Deux droites — L'image de la droite (IJ) est la droite (BC). La droite (OM) est la médiatrice de $[IJ]$: son image passe par D et elle est perpendiculaire à (BC).

Le point N — M est sur (IJ) et sur (OM) : son image est sur (BC) et sur la perpendiculaire à (BC) issue de D. C'est le point N.

$\overrightarrow{AN} = 2\,\overrightarrow{AM}$

> Le point N. M est sur (IJ) et sur (OM) : son image est sur (BC) et sur la perpendiculaire à (BC) issue de D. C'est le point N : le vecteur $\overrightarrow{AN}$ est égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$.
>
> Le point N. M est sur I J et sur O M: son image est sur B C et sur la perpendiculaire à B C issue de D. C'est le .point N: le vecteur A N est égal à 2 fois le vecteur A M

La distance — La distance à A est doublée.

$AN = 2 \times 5{,}5 = 11$

$AN = 11$, et les points A, M et N sont alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5.5` → N n'est pas le point M : c'est son image par une homothétie de rapport 2.

`2.75` → N est l'image de M, pas son antécédent : la distance à A est doublée.

EXERCICE 38 · PRATIQUE

Le pantographe

Sur un pantographe, le point fixe est A, et les tiges vérifient $AB = 6$ et $AC = 15$, l'unité étant le centimètre. Le point M est l'image du point N par l'homothétie de centre A et de rapport $k = \dfrac{AB}{AC}$. Calculer k.

Donne k sous la forme d'une fraction irréductible.

Réponse attendue : `2/5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace AB et AC par leurs valeurs.
2. Simplifie la fraction par 3.

CORRECTION

Le quotient — On remplace les deux longueurs.

$$k = \frac{6}{15}$$

Simplifier — On divise le numérateur et le dénominateur par 3.

$$k = \frac{2}{5}$$

Le rapport est plus petit que 1 : le dessin tracé par M est une réduction du dessin suivi par N.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/2 → Tu as divisé AC par AB. Le rapport est le quotient de AB par AC : il est plus petit que 1, car M trace une réduction.

9 → On ne retranche pas les longueurs : le rapport est leur quotient.

EXERCICE 39 · BASE

Un coefficient négatif

Soient A et B deux points tels que $AB = 6$, et M le point tel que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est égal à $-\frac{2}{3}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Calculer la distance AM.

Donne la distance AM.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une distance ne dépend que de la valeur absolue du coefficient.
   $AM = |k| \times AB$
2. Le signe dit seulement de quel côté de A se trouve M.

CORRECTION

La valeur absolue — La valeur absolue de $-\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3}$.

$$|k| = \frac{2}{3}$$

La distance — On multiplie la distance AB par cette valeur absolue.

$$AM = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$AM = 4$: le coefficient est négatif, donc M est de l'autre côté de A par rapport à B, mais une distance reste positive.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → Une distance n'est jamais négative : on multiplie AB par la valeur absolue du coefficient. Le signe dit seulement de quel côté de A est M.

9 → Tu as divisé par $\frac{2}{3}$. On multiplie : M est plus près de A que B.

EXERCICE 40 · BASE

Retrouver le coefficient

Soient A et B deux points tels que $AB = 5$. Un point M de la droite (AB) vérifie $AM = 15$, et il n'est pas sur la demi-droite $[AB)$. On écrit $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$. Déterminer le réel k.

Donne le réel k.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La valeur absolue de k est le quotient des distances AM et AB.
2. M n'est pas sur la demi-droite $[AB)$: il est de l'autre côté de A. Quel est alors le signe de k ?

CORRECTION

La valeur absolue — La distance AM est $|k|$ fois la distance AB.

$$|k| = \frac{AM}{AB} = \frac{15}{5} = 3$$

Le signe — M est sur la demi-droite d'origine A qui ne contient pas B : le coefficient est négatif.

$$k = -3$$

$k = -3$: la distance donne la valeur absolue du coefficient, la position du point donne son signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → La valeur absolue est juste, mais M est de l'autre côté de A par rapport à B : le coefficient est négatif.

`-1/3 / 1/3` → Tu as divisé AB par AM. C'est AM qu'on compare à AB : M est trois fois plus loin de A que B.

EXERCICE 41 · PRATIQUE

Trois points alignés

Trois points A, B et C sont alignés, B est entre A et C, $AB = 4$ et $BC = 10$. On écrit $\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$. Calculer le réel t.

Donne le réel t.

Réponse attendue : `7/2` — aussi acceptées : 3.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par calculer la distance AC.
2. C est au-delà de B en partant de A : les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens.

CORRECTION

La distance AC — B est entre A et C : les distances s'ajoutent.

$$AC = AB + BC = 4 + 10 = 14$$

Le coefficient — Les deux vecteurs ont le même sens, donc t est positif, et il vaut le quotient des distances.

$$t = \frac{AC}{AB} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$t = \dfrac{7}{2}$: le coefficient se lit sur les distances depuis l'origine commune A, pas sur BC.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/2 / 2.5 → Tu as divisé BC par AB. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ part de A : il faut la distance AC, c'est-à-dire $AB + BC$.

2/7 → Tu as divisé AB par AC. Ici C est plus loin de A que B : le coefficient est plus grand que 1.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

Retrouver la distance au point O

Soient O et A deux points, et A' le point tel que le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ est égal à $-\dfrac{1}{3}$ fois le vecteur $\overrightarrow{OA}$. On mesure $AA' = 8$. Calculer la distance OA.

Donne la distance OA.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le coefficient est négatif : où se trouve O par rapport à A et à A' ?
2. Exprime OA' en fonction de OA, puis écris que $OA + OA' = AA'$.

CORRECTION

La position — Le coefficient est négatif : O est entre A et A', et OA' vaut le tiers de OA.

$$OA' = \frac{1}{3}\,OA$$

L'équation — Les distances au point O s'ajoutent.

$$OA + \frac{1}{3}\,OA = 8 \iff \frac{4}{3}\,OA = 8$$

La distance — On multiplie par $\dfrac{3}{4}$.

$$OA = 6$$

Avec un coefficient négatif, le point O est entre le point et son image : les deux distances au point O s'ajoutent.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 serait juste si A' était du même côté que A. Ici le coefficient est négatif : O est entre les deux, les distances s'ajoutent.

2 → 2 est la distance OA' ; on demande la distance OA.

24 → On ne multiplie pas AA' par 3 : écris d'abord que $OA + OA' = AA'$.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Remonter à la figure de départ

Soient O, B et C trois points, et B' et C' les points tels que le vecteur $\overrightarrow{OB'}$ est égal à $-\frac{3}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{OB}$, et le vecteur $\overrightarrow{OC'}$ à $-\frac{3}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{OC}$. On mesure $B'C' = 6$. Calculer la distance BC.

Donne la distance BC.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{B'C'}$ en passant par O, avec la relation de Chasles.
2. On trouve que la longueur $B'C'$ est $\frac{3}{2}$ fois la longueur BC : il reste à revenir en arrière.

CORRECTION

Chasles — On passe par O, puis on met $-\frac{3}{2}$ en facteur.

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{OC'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

Les longueurs — La longueur $B'C'$ vaut $\frac{3}{2}$ de la longueur BC.

$$B'C' = \frac{3}{2}BC$$

Revenir à BC — On divise par $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire qu'on multiplie par $\frac{2}{3}$.

$$BC = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$BC = 4$: pour retrouver une longueur de départ, on divise la longueur de l'image par la valeur absolue du coefficient.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → $9 = \frac{3}{2} \times 6$: tu es allé de BC vers $B'C'$. Ici on connaît l'image, on remonte à la figure de départ.

-4 → Une longueur n'est pas négative : le signe du coefficient dit seulement que $B'C'$ est de l'autre côté de O.

EXERCICE 44 · PRATIQUE

Un vecteur qui ne part pas du centre

Soit h une homothétie de centre I. Pour un point M distinct de I, son image M' vérifie : le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{IM}$. Déterminer le rapport k de h.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La définition parle du vecteur $\overrightarrow{IM'}$: fais-le apparaître avec la relation de Chasles.

2. Passe par le point M.

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'}$$

CORRECTION

Chasles — On passe par M.

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'}$$

Remplacer — On remplace le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et on regroupe.

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM} + 2\,\overrightarrow{IM} = 3\,\overrightarrow{IM}$$

Le rapport est 3 : le rapport se lit toujours sur deux vecteurs qui partent du centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 est le coefficient du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, qui ne part pas du centre. Le rapport se lit sur le vecteur $\overrightarrow{IM'}$.

`1 / -1` → Relis la relation de Chasles : le vecteur $\overrightarrow{IM'}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{IM}$ et du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, on ajoute les coefficients.

EXERCICE 45 · BASE Le centre au milieu

Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$. Le point B est l'image du point A par une homothétie de centre I. Déterminer son rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$: ont-ils la même longueur ? le même sens ?
2. Le milieu est à égale distance de A et de B, et il est entre les deux : pense au signe.

CORRECTION

Le milieu — I est le milieu du segment $[AB]$: les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont opposés.

$$\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$$

Le rapport — On lit le coefficient.

$$k = -1$$

Le rapport est -1 : l'homothétie de rapport -1 est la symétrie de centre I.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → L'homothétie de rapport 1 ne bouge aucun point. Ici A et B sont de part et d'autre de I : le rapport est négatif.

`2 / -2` → IB est égal à IA, pas au double : I est au milieu.

EXERCICE 46 · PRATIQUE Sur une droite graduée

Sur une droite graduée, le point I a pour abscisse 2 et le point A a pour abscisse 5. Soit A' l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport -3. Calculer l'abscisse x du point A'.

Donne l'abscisse x.

Réponse attendue : -7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur une droite graduée, le vecteur $\overrightarrow{IA}$ se lit par la différence des abscisses : $5 - 2$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{IA'}$ est -3 fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$, et il part du point I, pas de l'origine.

CORRECTION

Le vecteur IA — La mesure algébrique de $\overrightarrow{IA}$ est la différence des abscisses.

$5 - 2 = 3$

Le vecteur IA' — On multiplie par le rapport.

$x - 2 = -3 \times 3 = -9$

L'abscisse — On ajoute l'abscisse du centre.

$x = 2 - 9 = -7$

$x = -7$: on part du centre, pas de l'origine de la graduation.

PIÈGES ANTICIPÉS

-15 → -3×5 revient à prendre l'origine de la graduation pour centre. Le centre est I, d'abscisse 2 : multiplie le vecteur $\overrightarrow{IA}$.

11 → Avec un rapport négatif, A' est de l'autre côté de I par rapport à A : son abscisse est plus petite que 2.

EXERCICE 47 · BASE **Trouver l'antécédent**

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 4, et M' un point tel que $OM' = 10$. On note M l'antécédent de M' par h. Calculer la distance OM.

Donne la distance OM.

Réponse attendue : 5/2 — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est l'antécédent : c'est M' qui est l'image de M.
2. L'antécédent est l'image par l'homothétie de même centre et de rapport inverse.

CORRECTION

La définition — M' est l'image de M : la distance au centre est multipliée par 4.

$OM' = 4\,OM$

Isoler — On divise par 4.

$$OM = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$OM = \dfrac{5}{2}$: l'antécédent est quatre fois plus près du centre que son image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40` → 40 serait la distance de l'image de M'. On cherche son antécédent : on divise par le rapport.

`6` → On ne retranche pas le rapport : la distance au centre est divisée par 4.

EXERCICE 48 · BASE

Combien de points fixes ?

Soit h une homothétie de centre I et de rapport k, avec $k \neq 1$. Déterminer le nombre de points M du plan qui vérifient $h(M) = M$.

Donne le nombre de points.

Réponse attendue : 1 — aussi acceptées : un · un seul · un seul point · un point · 1 point · un seul point fixe · le centre · le centre i · seulement le centre · le point i · i · c'est le centre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'égalité $\overrightarrow{IM} = k\,\overrightarrow{IM}$ et regroupe tout dans un membre.
2. Un produit $(k-1)\,\overrightarrow{IM}$ est nul, avec $k - 1 \neq 0$: que dire du vecteur $\overrightarrow{IM}$?

CORRECTION

L'égalité — M est sa propre image quand le vecteur $\overrightarrow{IM}$ est égal à k fois lui-même.

$$\overrightarrow{IM} = k\,\overrightarrow{IM} \iff (k-1)\,\overrightarrow{IM} = \vec{0}$$

Conclure — Comme $k - 1$ n'est pas nul, le vecteur $\overrightarrow{IM}$ est nul : M est le centre.

$$M = I$$

Un seul point est invariant : le centre I. Seule l'homothétie de rapport 1 laisse tous les points en place.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0 / aucun / zéro / aucun point` → Le centre est toujours invariant : $h(I) = I$, car le vecteur $\overrightarrow{II}$ est nul.

`une infinité / infinité / tous les points / tous` → Tous les points sont fixes seulement si $k = 1$. Ici $k \neq 1$.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Deux fois la même homothétie

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k positif. On note $B = h(A)$ et $C = h(B)$. On sait que $OA = 2$ et $OC = 18$. Déterminer k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{OC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OB}$, puis du vecteur $\overrightarrow{OA}$.
2. On trouve une relation avec k^2. N'oublie pas que k est positif.

CORRECTION

Deux fois la définition — C est l'image de B, et B l'image de A.

$$\overrightarrow{OC} = k\,\overrightarrow{OB} = k^2\,\overrightarrow{OA}$$

Les distances — On passe aux distances.

$$18 = k^2 \times 2 \iff k^2 = 9$$

Le signe — Le rapport est positif.

$$k = 3$$

$k = 3$: appliquer deux fois la même homothétie multiplie les distances au centre par k^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → 9 est k^2 : C s'obtient en appliquant h deux fois. Il reste à prendre la racine carrée.

-3 → -3 a bien pour carré 9, mais l'énoncé dit que k est positif.

EXERCICE 50 · BASE **Reporter la distance**

Soient I et A deux points tels que $IA = 3$, et A' l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport $-\dfrac{5}{3}$. Calculer la distance IA'.

Donne la distance IA'.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La distance au centre est multipliée par la valeur absolue du rapport.
2. Le signe du rapport dit seulement de quel côté de I se trouve A'.

CORRECTION

La valeur absolue — Le signe du rapport ne change pas la distance.

$$|k| = \frac{5}{3}$$

La distance — On multiplie la distance IA.

$$IA' = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

$IA' = 5$, et A' est de l'autre côté de I par rapport à A, car le rapport est négatif.

PIÈGES ANTICIPÉS

-5 → Une distance est positive : on multiplie par la valeur absolue du rapport. Le signe dit seulement de quel côté placer A'.

9/5 → Tu as divisé par $\dfrac{5}{3}$. On multiplie : $|k| > 1$, donc A' est plus loin de I que A.

EXERCICE 51 · PRATIQUE

Lire le rapport sur la construction

Sur une droite passant par I, on a placé un point A et son image A' par une homothétie de centre I : $IA = 12$, $IA' = 4$, et A et A' sont de part et d'autre de I. Déterminer le rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-1/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La valeur absolue du rapport est le quotient $\dfrac{IA'}{IA}$.
2. A et A' sont de part et d'autre du centre : quel est le signe du rapport ?

CORRECTION

La valeur absolue — On compare la distance de l'image à celle du point.

$$|k| = \frac{IA'}{IA} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Le signe — Le point et son image sont de part et d'autre de I : le rapport est négatif.

$$k = -\frac{1}{3}$$

$k = -\dfrac{1}{3}$: $|k| < 1$ car l'image est plus près du centre, et $k < 0$ car elle est de l'autre côté.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → La valeur absolue est juste, mais le point et son image sont de part et d'autre de I : le rapport est négatif.

`-3 / 3` → Tu as divisé IA par IA'. Le rapport transforme A en A' : c'est IA' divisé par IA, et l'image est plus près du centre.

EXERCICE 52 · BASE

Au-delà du point

Soient I et A deux points tels que $IA = 6$, et A' l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{3}{2}$. Calculer la distance AA'.

Donne la distance AA'.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord la distance IA'.
2. Le rapport est positif et plus grand que 1 : A' est sur la demi-droite $[IA)$, au-delà de A.

CORRECTION

La distance IA' — On multiplie la distance au centre par le rapport.

$$IA' = \frac{3}{2} \times 6 = 9$$

La position — A est entre I et A' : on retranche.

$AA' = IA' - IA = 9 - 6 = 3$

$AA' = 3$: avec un rapport plus grand que 1, l'image est du même côté que le point, plus loin du centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → $9 + 6$ placerait A' de l'autre côté de I. Le rapport est positif : A' est du même côté que A.

9 → 9 est la distance IA'. On demande la distance entre A et son image.

EXERCICE 53 · PRATIQUE

Où est le centre ? (rapport positif)

Soient A et B deux points tels que $AB = 8$. Le point B est l'image du point A par une homothétie h de rapport $\frac{1}{3}$. On note I le centre de h. Calculer la distance IB.

Donne la distance IB.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en passant par I : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$.
2. Remplace le vecteur $\overrightarrow{IB}$ par $\frac{1}{3}$ fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$: tu obtiens d'abord la distance IA.

CORRECTION

Chasles — On passe par I, et on utilise la définition.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}$

La distance IA — On passe aux longueurs.

$8 = \frac{2}{3}IA \iff IA = 12$

La distance IB — B est l'image de A : la distance au centre est multipliée par $\frac{1}{3}$.

$IB = \frac{1}{3} \times 12 = 4$

Le rapport est positif et plus petit que 1 : B est entre I et A, et $AB = IA - IB$.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 est la distance IA : on demande la distance du centre à l'image B.

8/3 → On ne divise pas AB par 3 : AB n'est pas une distance au centre.

2 → Avec 2, le centre serait entre A et B : c'est le cas d'un rapport négatif. Ici le rapport est positif.

EXERCICE 54 · BASE

Où est le centre ? (rapport négatif)

Soient A et B deux points tels que $AB = 9$. Le point B est l'image du point A par une homothétie h de rapport $-\dfrac{1}{2}$. On note I le centre de h. Calculer la distance IB.

Donne la distance IB.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport est négatif : où est le centre par rapport à A et à B ?
2. I est entre A et B, et IB est la moitié de IA. Or $IA + IB = AB$.

CORRECTION

La position — Le rapport est négatif : I est entre A et B, et IB est la moitié de IA.

$$IA + IB = AB$$

L'équation — On remplace IA par $2\,IB$.

$$2\,IB + IB = 9 \iff 3\,IB = 9$$

La distance — On divise par 3.

$$IB = 3$$

Rapport négatif : le centre est entre le point et son image, et les deux distances au centre s'ajoutent.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est la distance IA ; on demande la distance IB.

9/2 / 4.5 → Le centre n'est pas le milieu de $[AB]$: il faudrait un rapport -1.

9 → 9 serait la distance IB pour le rapport $\dfrac{1}{2}$, avec B entre I et A. Ici le rapport est négatif : I est entre A et B.

EXERCICE 55 · RAISONNEMENT

Le centre est un barycentre

Le point B est l'image du point A par l'homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{5}{2}$. Le point I est alors le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et -2. Calculer a.

Donne le coefficient a.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la définition, puis multiplie les deux membres par 2 pour faire apparaître le coefficient -2 devant $\overrightarrow{IB}$.
2. Fais tout passer dans un membre : on doit obtenir une somme égale au vecteur nul.

CORRECTION

La définition — On multiplie l'égalité par 2.

$$\overrightarrow{IB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{IA} \iff 2\overrightarrow{IB} = 5\overrightarrow{IA}$$

Le vecteur nul — On fait passer tout dans le même membre.

$5\,\overrightarrow{IA} - 2\,\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Lire le coefficient — I est le barycentre des points A et B affectés des coefficients 5 et -2.

$a = 5$

$a = 5$: le centre d'une homothétie qui transforme A en B est un barycentre de A et de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-5` → Avec -5 et -2, on aurait $-5\,\overrightarrow{IA} - 2\,\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, ce qui n'est pas la définition. Vérifie le signe en passant dans un seul membre.

`5/2 / 2.5` → $\dfrac{5}{2}$ est le rapport. Avec le coefficient -2 devant B, il faut multiplier l'égalité par 2.

EXERCICE 56 · PRATIQUE

Un vecteur vers un point fixe

Soit A un point fixe. À tout point M du plan, on associe le point M' tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à 4 fois le vecteur $\overrightarrow{MA}$. Cette application est une homothétie de centre A. Déterminer son rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il faut le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AM}$. Passe par M.
2. Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

CORRECTION

Chasles — On passe par M.

$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + 4\,\overrightarrow{MA}$

Les opposés — On remplace le vecteur $\overrightarrow{MA}$ par l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - 4\,\overrightarrow{AM} = -3\,\overrightarrow{AM}$

Le rapport est -3 : on s'est ramené à deux vecteurs qui partent du centre A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4 / -4` → 4 est le coefficient du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, qui ne part pas du centre. Le rapport se lit sur le vecteur $\overrightarrow{AM'}$.

`5` → Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AM}$: on retranche 4 fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$, on ne l'ajoute pas.

EXERCICE 57 · RAISONNEMENT

Un barycentre avec un coefficient négatif

Soit A un point fixe. À tout point M du plan, on associe le point M', barycentre des points A et M affectés des coefficients 3 et -1. Cette application est une homothétie de centre A. Déterminer son rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-1/2` — aussi acceptées : -0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la relation du barycentre, puis décompose le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ en passant par A.
2. On doit arriver à un vecteur $\overrightarrow{AM'}$ exprimé avec le seul vecteur $\overrightarrow{AM}$.

CORRECTION

Le barycentre — La somme des coefficients vaut 2, qui n'est pas nul.

$$3\,\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

Chasles — On décompose le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ en passant par A.

$$3\,\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{AM} = \vec{0} \iff 2\,\overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{AM}$$

Le rapport — On change le sens du vecteur $\overrightarrow{M'A}$ et on divise par 2.

$$\overrightarrow{AM'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AM}$$

Le rapport est $-\dfrac{1}{2}$: c'est le coefficient de M divisé par la somme des coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2 / 0.5` → Attention au sens : $2\,\overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{AM}$ donne $\overrightarrow{AM'} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AM}$. Le centre A est entre M et M'.

`3/2 / 1.5` → Tu as divisé le coefficient de A par la somme. Le rapport se lit sur le coefficient de M : $\dfrac{-1}{3-1}$.

EXERCICE 58 · DEFI

Trouver le centre soi-même

Soient A et B deux points distincts. À tout point M du plan, on associe le point M' tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à la somme de 2 fois le vecteur $\overrightarrow{MA}$ et du vecteur $\overrightarrow{MB}$. Montrer que cette application est une homothétie, et déterminer son rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Introduis le barycentre G des points A et B affectés des coefficients 2 et 1 : il réduit la somme.
2. La somme vaut 3 fois le vecteur $\overrightarrow{MG}$. Exprime ensuite le vecteur $\overrightarrow{GM'}$ en passant par M.

CORRECTION

Réduire la somme — Soit G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et 1. Pour tout point M, la somme se réduit.

$$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\,\overrightarrow{MG}$$

Partir du centre — On passe par M ; le vecteur $\overrightarrow{MG}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{GM}$.

$$\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GM} + 3\,\overrightarrow{MG} = -2\,\overrightarrow{GM}$$

Conclure — G est fixe et le coefficient ne dépend pas de M : c'est l'homothétie de centre G.

$$k = -2$$

C'est l'homothétie de centre G, barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et 1, et de rapport -2.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est le coefficient du vecteur $\overrightarrow{MG}$, qui ne part pas du centre. Passe au vecteur $\overrightarrow{GM'}$ avec la relation de Chasles.

4 → Le vecteur $\overrightarrow{MG}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{GM}$: $1 - 3$, et non $1 + 3$.

2 → $1 - 3$ donne -2 : le centre G est entre M et M'.

EXERCICE 59 · BASE

Deux points quelconques

Soit h une homothétie de rapport $-\dfrac{2}{3}$, et M et N deux points tels que $MN = 9$. On note M' et N' leurs images par h. Calculer la distance $M'N'$.

Donne la distance $M'N'$.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La propriété caractéristique vaut pour tous les points, pas seulement le centre : le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ est égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{MN}$.
   $$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$$
2. Pour une distance, on prend la valeur absolue du rapport.

CORRECTION

La propriété — Le vecteur qui joint les images est k fois le vecteur qui joint les points.

$$\overrightarrow{M'N'} = -\frac{2}{3}\,\overrightarrow{MN}$$

La distance — On passe aux longueurs avec la valeur absolue.

$$M'N' = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

$M'N' = 6$: une homothétie multiplie toutes les distances par la valeur absolue de son rapport.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-6` → Une distance est positive : on multiplie par la valeur absolue du rapport.

`27/2 / 13.5` → Tu as divisé par $\frac{2}{3}$. On multiplie : le rapport est plus petit que 1 en valeur absolue, l'image est réduite.

EXERCICE 60 · PRATIQUE

Le rapport par deux longueurs

Une homothétie h transforme deux points M et N en M' et N'. On sait que $MN = 6$, $M'N' = 9$, et que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont de sens contraires. Déterminer le rapport k de h.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-3/2` — aussi acceptées : -1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La valeur absolue du rapport est le quotient $\frac{M'N'}{MN}$.
2. D'après la propriété caractéristique, le signe de k se lit sur le sens des deux vecteurs.

CORRECTION

La valeur absolue — La distance est multipliée par $|k|$.

$$|k| = \frac{M'N'}{MN} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Le signe — Le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ est égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{MN}$, et ils sont de sens contraires : k est négatif.

$$k = -\frac{3}{2}$$

$k = -\frac{3}{2}$: le rapport d'une homothétie se lit sur n'importe quel couple de points, sans connaître le centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2 / 1.5` → La valeur absolue est juste, mais les deux vecteurs sont de sens contraires : le rapport est négatif.

`-2/3 / 2/3` → Tu as divisé MN par $M'N'$. L'image est plus longue : la valeur absolue du rapport est plus grande que 1.

EXERCICE 61 · RAISONNEMENT

Du vecteur des images au centre

Soit h une homothétie de centre O. Elle transforme A en C et B en D, et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On sait que $OA = 2$. Calculer la distance AC.

Donne la distance AC.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La propriété caractéristique donne le rapport de h.
2. Le rapport est positif : C est sur la demi-droite $[OA)$. Calcule d'abord OC.

CORRECTION

Le rapport — Le vecteur qui joint les images est k fois le vecteur qui joint les points.

$\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{AB} \implies k = 3$

La distance OC — C est l'image de A.

$\overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OA}, \quad OC = 6$

La distance AC — Le rapport est positif : A est entre O et C.

$AC = OC - OA = 6 - 2 = 4$

$AC = 4$: la propriété caractéristique donne le rapport, la définition place l'image.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → $6 + 2$ placerait C de l'autre côté de O. Le rapport est positif : C est du même côté que A.

6 → 6 est la distance OC. On demande la distance entre A et son image C.

EXERCICE 62 · BASE

Le plus grand côté

Un triangle a pour côtés 4, 6 et 7. On note T' son image par une homothétie de rapport $-\frac{5}{2}$.

Calculer la longueur du plus grand côté de T'.

Donne la longueur, en fraction ou en écriture décimale.

Réponse attendue : `35/2` — aussi acceptées : `17.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque longueur est multipliée par la valeur absolue du rapport.
2. Le plus grand côté de l'image est l'image du plus grand côté.

CORRECTION

La valeur absolue — Le signe du rapport ne change pas les longueurs.

$|k| = \frac{5}{2}$

Le plus grand côté — On multiplie le plus grand côté, 7.

$\frac{5}{2} \times 7 = \frac{35}{2}$

Le plus grand côté de T' mesure $\frac{35}{2}$, soit $17{,}5$: une homothétie multiplie toutes les longueurs par le même nombre $|k|$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-35/2` / `-17.5` → Une longueur est positive : on multiplie par la valeur absolue du rapport.

14/5 / 2.8 → Tu as divisé par $\frac{5}{2}$. On multiplie : le rapport est plus grand que 1 en valeur absolue, la figure est agrandie.

EXERCICE 63 · RAISONNEMENT

Le papillon

Les droites (AC) et (BD) se coupent en I, le point I est entre A et C et entre B et D, et les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On donne $IA = 3$, $IC = 7{,}5$ et $AB = 4$. Calculer la distance CD.

Donne la distance CD.

Réponse attendue : 10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche l'homothétie de centre I qui transforme A en C : I est entre les deux points.
2. Cette homothétie transforme la droite (AB) en la parallèle à (AB) passant par C : c'est (CD). Que devient B ?

CORRECTION

L'homothétie — I est entre A et C : le rapport est négatif, et sa valeur absolue est le quotient des distances.

$$k = -\frac{IC}{IA} = -\frac{7{,}5}{3} = -\frac{5}{2}$$

L'image de B — L'image de (AB) est la parallèle à (AB) passant par C, c'est-à-dire (CD) ; l'image de B est aussi sur (IB) : c'est D.

$$h(A) = C \quad ; \quad h(B) = D$$

La longueur — La longueur CD est $|k|$ fois la longueur AB.

$$CD = \frac{5}{2} \times 4 = 10$$

$CD = 10$: dans cette configuration, l'homothétie de centre I envoie le segment $[AB]$ sur le segment $[CD]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

8/5 / 1.6 → Tu as divisé AB par $\frac{5}{2}$. C est plus loin de I que A : le segment image est plus long.

23/2 / 11.5 → Les longueurs ne s'ajoutent pas : l'homothétie les multiplie.

EXERCICE 64 · PRATIQUE

Le coefficient d'alignement conservé

Trois points A, B et C vérifient : le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal à -2 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note A', B' et C' leurs images par une homothétie de rapport 5, et on écrit $\overrightarrow{A'C'} = t\,\overrightarrow{A'B'}$. Calculer t.

Donne le réel t.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime les vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ avec la propriété caractéristique.
2. Le rapport 5 apparaît des deux côtés de l'égalité.

CORRECTION

Les deux vecteurs — Par la propriété caractéristique :

$$\overrightarrow{A'C'} = 5\,\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{A'B'} = 5\,\overrightarrow{AB}$$

Comparer — On remplace le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{A'C'} = 5 \times (-2)\,\overrightarrow{AB} = -2 \times 5\,\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{A'B'}$$

$t = -2$: une homothétie conserve l'alignement, et même la position relative des points sur la droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-10` → -10 compare $\overrightarrow{A'C'}$ au vecteur $\overrightarrow{AB}$ de départ. Entre les images, le rapport 5 se simplifie.
`2` → C est de l'autre côté de A par rapport à B, et cela reste vrai pour les images : le coefficient reste négatif.

EXERCICE 65 · BASE

Trois images

Les points A, B et C sont alignés. On note A', B' et C' leurs images par une homothétie de rapport -3. Dire si les points A', B' et C' sont alignés.

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui ils sont alignés · ils sont alignés · alignés · oui alignés · oui, alignés · oui, ils sont alignés · les points sont alignés · oui les points sont alignés · oui, les points sont alignés · oui ils le sont · oui, ils le sont · ouii · yes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que conserve une homothétie ?
2. Le signe du rapport ne change rien à cette propriété.

CORRECTION

La propriété — Une homothétie conserve l'alignement, quel que soit le signe de son rapport.

A', B', C' sont alignés

Oui : les images de trois points alignés par une homothétie sont trois points alignés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non` / `non ils ne sont pas alignés` / `non, ils ne sont pas alignés` / `pas alignés` / `ils ne sont pas alignés` / `non alignés` → Un rapport négatif retourne la figure de l'autre côté du centre, mais une droite reste une droite : l'alignement est conservé.

EXERCICE 66 · BASE

Une droite qui passe par le centre

Soit h une homothétie de centre I et de rapport 4, et D une droite qui passe par I. Déterminer la droite $h(D)$, image de D par h, en donnant son nom.

Écris le nom de la droite.

Réponse attendue : D — aussi acceptées : la droite d · droite d · d elle-meme · elle-meme · elle meme · d elle meme · la droite d elle-meme · c'est d · c'est la droite d · c'est d elle-meme · elle-même · d elle-même · la droite d elle-même · c'est d elle-même · h(d)=d · h(d) = d · (d) · la droite (d) · c'est la droite (d)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour un point M de D, où est son image ? Elle est alignée avec I et M.
2. L'image de D est une droite parallèle à D qui passe par l'image de I.

CORRECTION

Un point de D — Pour un point M de D, son image est sur la droite (IM), qui est D.

$$M \in D \implies h(M) \in D$$

Conclure — L'image de D est une droite parallèle à D passant par $h(I) = I$: c'est D elle-même.

$$h(D) = D$$

Une droite qui passe par le centre est sa propre image (ses points, eux, bougent).

PIÈGES ANTICIPÉS

`une parallele / une droite parallele / une parallele a d / une droite parallele a d / une autre droite` → Elle est bien parallèle à D, mais laquelle ? Elle passe par $h(I) = I$, qui est sur D : c'est D elle-même.

`D' / (D') / la droite D' / la droite (D') / h(D)=D'` → On note souvent D' l'image d'une droite D, mais ici l'image est parallèle à D et passe par $h(I) = I$: c'est D elle-même.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

L'écart entre une droite et son image

Soit D une droite et I un point situé à la distance 3 de D. On note D' l'image de D par l'homothétie de centre I et de rapport -2. Calculer la distance entre les droites parallèles D et D'.

Donne la distance entre D et D'.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Soit H le pied de la perpendiculaire à D issue de I. Son image H' est sur D', et la droite (IH) est perpendiculaire à D'.
2. Le rapport est négatif : D et D' sont de part et d'autre de I.

CORRECTION

Un point bien choisi — Soit H le pied de la perpendiculaire à D issue de I : $IH = 3$. Son image H' est sur D', et la droite (IH) est aussi perpendiculaire à D'.

$IH' = 2 \times 3 = 6$

De part et d'autre — Le rapport est négatif : I est entre H et H', donc entre les deux droites.

$HH' = 3 + 6 = 9$

La distance entre D et D' vaut 9 : une homothétie de rapport négatif place l'image d'une droite de l'autre côté du centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → $6 - 3$ placerait D' du même côté de I que D. Le rapport est négatif : les deux droites sont de part et d'autre de I.

`6` → 6 est la distance de I à D'. On demande la distance entre les deux droites.

EXERCICE 68 · RAISONNEMENT

Une droite et son image se coupent-elles ?

Soit h une homothétie de centre I et de rapport k, avec $k \neq 1$, et D une droite qui ne passe pas par I. Déterminer le nombre de points communs à la droite D et à son image D'.

Donne le nombre de points communs, ou écris « aucun ».

Réponse attendue : aucun — aussi acceptées : 0 · zéro · zero · aucun point · aucun point commun · pas de point commun · aucun point en commun · elles n'ont aucun point commun · elles n'ont pas de point commun · il n'y a aucun point commun

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image d'une droite est une droite parallèle. Il reste à savoir si D' peut être D.
2. Si D' était D, un point M de D et son image seraient sur D et sur la droite (IM). Combien ces deux droites ont-elles de points communs ?

CORRECTION

Parallèles — L'image d'une droite par une homothétie lui est parallèle.

$D' \parallel D$

Distinctes — Soit M un point de D. Son image M' est sur la droite (IM), qui coupe D seulement en M. Or M' n'est pas M, car le seul point fixe est I, qui n'est pas sur D. Donc M' n'est pas sur D.

$M' \notin D \implies D' \neq D$

Aucun point commun : D et D' sont parallèles et distinctes, donc disjointes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / un point / un seul point` → Une droite et son image sont parallèles : elles ne peuvent pas se couper en un seul point.

`une infinité / infinité / une infinite` → Il faudrait que D' soit D, ce qui arrive seulement si D passe par le centre.

EXERCICE 69 · PRATIQUE

Un point et son image suffisent

Les points O, A et A' sont alignés, A' est sur la demi-droite $[OA)$, $OA = 4$ et $OA' = 6$. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en A', et M un point tel que $OM = 10$. Calculer la distance OM', où $M' = h(M)$.

Donne la distance OM'.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le rapport : A' est sur la demi-droite $[OA)$, il est donc positif.
2. Le rapport est le quotient $\dfrac{OA'}{OA}$.

CORRECTION

Le rapport — A' est du même côté que A : le rapport est positif.

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

L'image de M — La distance au centre est multipliée par le rapport.

$$OM' = \frac{3}{2} \times 10 = 15$$

$OM' = 15$: un point et son image fixent le rapport, donc l'image de tous les autres points.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12` → On n'ajoute pas 2 à chaque distance : l'homothétie les multiplie toutes par le même nombre.

`20/3` → Tu as utilisé $\dfrac{4}{6}$. Le rapport transforme A en A' : c'est $\dfrac{OA'}{OA}$.

EXERCICE 70 · RAISONNEMENT

Le rapport par une somme

Les points O, A et A' sont alignés dans cet ordre, avec $OA = 2$ et $AA' = 5$. Déterminer le rapport k de l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `7/2` — aussi acceptées : 3.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il faut la distance OA' : le point A est entre O et A'.
2. A' est du même côté de O que A : quel est le signe du rapport ?

CORRECTION

La distance OA' — Les points sont dans l'ordre O, A, A'.

$$OA' = OA + AA' = 2 + 5 = 7$$

Le rapport — A' est sur la demi-droite $[OA)$: le rapport est positif.

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{7}{2}$$

$k = \frac{7}{2}$: le rapport se lit sur les distances au centre, jamais sur la distance entre le point et son image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/2 / 2.5` → $\frac{5}{2}$ utilise la distance AA'. Le rapport compare les distances au centre : OA' et OA.

`-7/2 / -3.5` → O n'est pas entre A et A' : les deux points sont du même côté du centre, le rapport est positif.

`2/7` → Tu as divisé OA par OA'. L'image est plus loin du centre : le rapport est plus grand que 1.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

L'image du milieu

Soit P le milieu d'un segment $[MN]$ de longueur 7. On note M', N' et P' les images de M, N et P par une homothétie de rapport 3. Calculer la distance $P'M'$.

Donne la distance $P'M'$, en fraction ou en écriture décimale.

Réponse attendue : `21/2` — aussi acceptées : 10.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une homothétie conserve le milieu : où est P' sur le segment $[M'N']$?
2. Calcule $M'N'$, puis prends-en la moitié.

CORRECTION

Le segment image — Les longueurs sont multipliées par 3.

$M'N' = 3 \times 7 = 21$

Le milieu — P' est le milieu du segment $[M'N']$.

$P'M' = \frac{21}{2}$

$P'M' = \frac{21}{2}$, soit $10{,}5$: l'image du milieu est le milieu de l'image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7/2 / 3.5` → $\frac{7}{2}$ est la distance PM. Les longueurs de l'image sont multipliées par 3.

`21` → 21 est la longueur $M'N'$. P' est le milieu : on en prend la moitié.

EXERCICE 72 · RAISONNEMENT

L'image d'un losange

Soit $ABCD$ un losange, et A', B', C' et D' les images de ses sommets par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$. Déterminer la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$.

Réponds par un mot : parallélogramme, losange, rectangle…

Réponse attendue : `losange` — aussi acceptées : un losange · c'est un losange · a'b'c'd' est un losange ·

le quadrilatere est un losange · le quadrilatere a'b'c'd' est un losange

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une homothétie conserve le milieu : les diagonales de $A'B'C'D'$ se coupent-elles en leur milieu ?
2. Les quatre côtés de $ABCD$ ont la même longueur : que deviennent-ils ?

CORRECTION

Un parallélogramme — Les diagonales de $ABCD$ ont le même milieu ; l'homothétie conserve le milieu, donc celles de $A'B'C'D'$ aussi.

$A'B'C'D'$ est un parallélogramme

Les côtés — Chaque côté est multiplié par $\frac{1}{2}$: les quatre côtés de l'image restent égaux.

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = \frac{1}{2}\,AB$$

Conclure — Un parallélogramme à quatre côtés égaux est un losange.

$A'B'C'D'$ est un losange

$A'B'C'D'$ est un losange : une homothétie conserve la nature d'un quadrilatère.

PIÈGES ANTICIPÉS

`carre / un carre / carré / un carré` → Rien ne dit que les angles de $ABCD$ sont droits ; une homothétie conserve les angles, elle n'en crée pas.

`rectangle / un rectangle` → Rien ne dit que les angles de $ABCD$ sont droits. En revanche, les quatre côtés restent égaux.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

Un barycentre conservé

Soit P le barycentre des points M et N affectés des coefficients 2 et 3. On note M', N' et P' les images de M, N et P par une homothétie, et l'on sait que $M'N' = 10$. Calculer la distance $M'P'$.

Donne la distance $M'P'$.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une homothétie conserve le barycentre : P' est le barycentre des points M' et N' affectés des mêmes coefficients.
2. Pour le barycentre de $(M', 2)$ et $(N', 3)$, le vecteur $\overrightarrow{M'P'}$ est égal à $\frac{3}{5}$ fois le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$.

CORRECTION

La conservation — P' est le barycentre des points M' et N' affectés des coefficients 2 et 3.

$$2\,\overrightarrow{P'M'} + 3\,\overrightarrow{P'N'} = \vec{0}$$

Situer P' — On décompose le vecteur $\overrightarrow{P'N'}$ en passant par M'.

$$\overrightarrow{M'P'} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{M'N'}$$

La distance — On passe aux longueurs.

$$M'P' = \frac{3}{5} \times 10 = 6$$

$M'P' = 6$: inutile de connaître le rapport, le barycentre se retrouve directement sur les images.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $\frac{2}{5}$ de 10 donne 4, la distance $N'P'$: le barycentre est plus près du point de plus grand coefficient, ici N'.

5 → P' n'est pas le milieu : les coefficients 2 et 3 sont différents.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

La médiane de l'image

Soit ABC un triangle de centre de gravité G, avec $AG = 6$. On note $A'B'C'$ l'image de ABC par une homothétie de rapport -2, et I' le milieu du segment $[B'C']$. Calculer la longueur de la médiane $A'I'$.

Donne la longueur $A'I'$.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle ABC, le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane $[AI]$ à partir de A. Calcule AI.
2. L'image du milieu I de $[BC]$ est le milieu I' de $[B'C']$: la médiane $[A'I']$ est l'image de la médiane $[AI]$.

CORRECTION

La médiane de ABC — Soit I le milieu de $[BC]$: AG vaut les deux tiers de AI.

$$AI = \frac{3}{2} \times 6 = 9$$

L'image de la médiane — L'homothétie conserve le milieu : elle transforme I en I', et le segment $[AI]$ en le segment $[A'I']$.

$$h(A) = A' \quad ; \quad h(I) = I'$$

La longueur — Les longueurs sont multipliées par 2.

$$A'I' = 2 \times 9 = 18$$

$A'I' = 18$: une homothétie transforme les médianes en médianes, et multiplie leur longueur par $|k|$.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 est la distance $A'G'$. La médiane va jusqu'au milieu I' : elle vaut les trois demis de $A'G'$.

9 → 9 est la médiane AI du triangle de départ. Il reste à la multiplier par $|k| = 2$.

EXERCICE 75 · DEFI

Un barycentre sur l'image

Soit ABC un triangle, et G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 1, 1 et 2. On note h l'homothétie de centre C et de rapport 3, et $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $G' = h(G)$. On sait que $CI = 4$, où I est le milieu de $[AB]$. Calculer la distance CG'.

Donne la distance CG'.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Barycentre partiel : remplace $(A, 1)$ et $(B, 1)$ par leur milieu I, affecté du coefficient 2. Où est G sur $[CI]$?
2. G' est l'image de G par l'homothétie de centre C : la distance au centre est multipliée par 3.

CORRECTION

Barycentre partiel — Le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$ est le milieu I : G est le barycentre de $(I, 2)$ et $(C, 2)$, c'est-à-dire le milieu de $[CI]$.

$$CG = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

L'image — G' est l'image de G par l'homothétie de centre C et de rapport 3.

$$CG' = 3 \times 2 = 6$$

$CG' = 6$: on peut aussi dire que G' est le barycentre de $(A', 1)$, $(B', 1)$ et $(C, 2)$, puisque C est sa propre image.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → $12 = 3 \times 4$ revient à prendre G en I. Avec le coefficient 2 sur C, G est le milieu de $[CI]$.

2 → 2 est la distance CG. Il reste à appliquer l'homothétie de rapport 3.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Le rapport du trapèze

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, avec $AB = 6$ et $CD = 15$. Les droites (AD) et (BC) se coupent en O. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en D. Déterminer son rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : 5/2 — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. h transforme B en C, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en le vecteur $\overrightarrow{DC}$.
2. O est à l'extérieur du trapèze : A et D sont du même côté de O. Quel est le signe du rapport ?

CORRECTION

L'image de B — L'image de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par D, c'est-à-dire (DC) ; l'image de B est aussi sur (OB) : c'est C.

$$h(A) = D \quad ; \quad h(B) = C$$

La valeur absolue — La longueur DC est $|k|$ fois la longueur AB.

$$|k| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Le signe — A et D sont du même côté de O : le rapport est positif.

$$k = \frac{5}{2}$$

$k = \frac{5}{2}$: le rapport de l'homothétie de centre O est le quotient des bases.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/5 / 0.4` → Tu as divisé AB par CD. h transforme la petite base en la grande : le rapport est plus grand que 1.

`-5/2 / -2.5` → Le rapport négatif est celui de l'homothétie centrée au point d'intersection des diagonales. Le point O n'est pas entre A et D.

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Le centre sur les diagonales

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, avec $AB = 9$ et $CD = 6$. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O'. Soit g l'homothétie de centre O' qui transforme A en C. Déterminer son rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. g transforme la droite (AB) en la parallèle passant par C : c'est (CD). Que devient B ?
2. O' est entre A et C : quel est le signe du rapport ?

CORRECTION

L'image de B — L'image de B est sur (CD) et sur la droite $(O'B)$, qui est (BD) : c'est D.

$$g(A) = C \quad ; \quad g(B) = D$$

La valeur absolue — La longueur CD est $|k|$ fois la longueur AB.

$$|k| = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Le signe — O' est entre A et C : le rapport est négatif.

$$k = -\frac{2}{3}$$

$k = -\frac{2}{3}$: les deux homothéties du trapèze ont des rapports opposés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/3` → La valeur absolue est juste, mais O' est entre A et C : le rapport est négatif.

`-3/2 / -1.5 / 3/2 / 1.5` → Tu as divisé AB par CD. g transforme $[AB]$ en $[CD]$, qui est plus court : $|k| < 1$.

EXERCICE 78 · DEFI

Une construction à discuter

Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et I un point situé entre elles, à la distance 3 de D_1 et à la distance 6 de D_2. Déterminer le nombre de couples de points (A, B), avec A sur D_1 et B sur D_2, tels que le vecteur $\overrightarrow{IB}$ est égal à -2 fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$.

Donne le nombre de couples, ou écris « une infinité ».

Réponse attendue : `une infinité` — aussi acceptées : une infinite · infinité · infinite · une infinité de couples · une infinite de couples · il y en a une infinité · il y en a une infinite · infiniment · une infinité de solutions · une infinite de solutions · ∞ · infini

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B est l'image de A par l'homothétie h de centre I et de rapport -2 : B doit être sur D_2 et sur l'image de D_1.
2. Où est l'image de D_1 ? De quel côté de I, à quelle distance ?

CORRECTION

L'homothétie — La condition dit que $B = h(A)$, avec h de centre I et de rapport -2. Donc B est sur l'image D_3 de D_1.

$$\overrightarrow{IB} = -2\,\overrightarrow{IA}$$

L'image de D1 — D_3 est parallèle à D_1, de l'autre côté de I, à la distance $2 \times 3 = 6$ de I : c'est exactement D_2.

$$h(D_1) = D_2$$

Conclure — Pour tout point A de D_1, son image B est sur D_2 : chaque point de D_1 donne un couple.

$$h(D_1) = D_2$$

Il existe une infinité de couples : l'image de D_1 est D_2 elle-même. Avec une autre distance, il n'y en aurait aucun.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / un seul / un seul couple` → Quand D_1 et D_2 sont sécantes, il y a une seule solution. Ici elles sont parallèles : regarde où tombe l'image de D_1.

`0 / aucun / aucune / zéro` → Calcule la distance de I à l'image de D_1 : elle vaut 6, de l'autre côté de I. C'est D_2.

EXERCICE 79 · BASE

Combien de solutions ?

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes et I un point qui n'appartient ni à D_1 ni à D_2. Déterminer le nombre de couples de points (A, B), avec A sur D_1 et B sur D_2, tels que le vecteur $\overrightarrow{IB}$ est égal à $\dfrac{1}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{IA}$.

Donne le nombre de couples.

Réponse attendue : 1 — aussi acceptées : un · un seul · un seul couple · un couple · une seule solution · une solution · il y en a un seul · il n'y en a qu'un

INDICES, DANS L'ORDRE

1. B est l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$: il est sur l'image de D_1.
2. L'image de D_1 est parallèle à D_1, donc sécante à D_2 : en combien de points ?

CORRECTION

L'homothétie — B est l'image de A par h, de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$: il est sur la droite $D_3 = h(D_1)$, parallèle à D_1.

$$B \in D_3 \cap D_2$$

Un seul point — D_3 est parallèle à D_1, qui coupe D_2 : D_3 coupe D_2 en un seul point B. Son antécédent A est unique.

$$D_3 \cap D_2 = \{B\}$$

Il y a un seul couple : B est le point d'intersection de D_2 et de l'image de D_1, et A est son antécédent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`une infinité / infinité / une infinite` → B doit être à la fois sur D_2 et sur l'image de D_1 : deux droites sécantes n'ont qu'un point commun.

`0 / aucun` → L'image de D_1 est parallèle à D_1, donc elle coupe D_2 : il y a bien une solution.

EXERCICE 80 · RAISONNEMENT

Le point G du trapèze

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, dont les côtés (AD) et (BC) se coupent en E, avec $EA = 2$ et $ED = 5$. Soit F un point intérieur au triangle ABE tel que $EF = 3$. La parallèle à (AF) passant par D et la parallèle à (BF) passant par C se coupent en G. Calculer la distance EG.

Donne la distance EG, en fraction ou en écriture décimale.

Réponse attendue : `15/2` — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Considère l'homothétie h de centre E qui transforme A en D : quel est son rapport ?
2. Le cours montre que $h(F) = G$.

CORRECTION

Le rapport — A et D sont du même côté de E.

$$k = \frac{ED}{EA} = \frac{5}{2}$$

L'image de F — h transforme (AF) en (DG) et (BF) en (CG) ; F est sur les deux, donc son image est G.

$$h(F) = G$$

La distance — La distance au centre est multipliée par le rapport.

$$EG = \frac{5}{2} \times 3 = \frac{15}{2}$$

$EG = \frac{15}{2}$: G est l'image de F, donc E, F et G sont alignés, et G est deux fois et demie plus loin de E.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6/5 / 1.2` → Tu as utilisé $\frac{2}{5}$. h transforme A en D, qui est plus loin de E : le rapport est $\frac{ED}{EA}$.

`6` → On n'ajoute pas AD : la distance EG est $\frac{5}{2}$ fois la distance EF.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Deux carrés

Deux carrés $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ont leurs côtés respectivement parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ étant de sens contraires. Le premier a pour côté 3, le second 12. Une homothétie h transforme A en A', B en B', C en C' et D en D'. Déterminer son rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La propriété caractéristique s'applique aux points A et B : le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$
2. Les longueurs donnent $|k|$, le sens des vecteurs donne le signe.

CORRECTION

La valeur absolue — Les côtés sont multipliés par $|k|$.

$$|k| = \frac{12}{3} = 4$$

Le signe — Les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires : k est négatif.

$k = -4$

$k = -4$: le centre de h est entre les deux carrés, et les droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD') y passent toutes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → La valeur absolue est juste, mais les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont de sens contraires : le rapport est négatif.

`-1/4 / 1/4` → Tu as divisé 3 par 12. h transforme le petit carré en le grand : $|k| > 1$.

EXERCICE 82 · RAISONNEMENT

Agrandi, mais homothétique ?

Un triangle ABC a pour côtés $AB = 4$, $BC = 6$ et $CA = 7$. Un triangle EFG a pour côtés $EF = 6$, $FG = 9$ et $GE = 10$. Dire si le triangle EFG peut être l'image du triangle ABC par une homothétie.

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non il ne peut pas · non, il ne peut pas · il ne peut pas · ce n'est pas possible · non ce n'est pas possible · non, ce n'est pas possible · impossible · non impossible · non, impossible · ils ne sont pas homothétiques · non ils ne sont pas homothétiques · non, ils ne sont pas homothétiques · pas homothétiques

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par une homothétie de rapport k, toutes les longueurs sont multipliées par le même nombre $|k|$.
2. Compare les trois quotients : le plus petit côté par le plus petit, le moyen par le moyen, le plus grand par le plus grand.

CORRECTION

Les quotients — On compare les côtés rangés dans le même ordre.

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{10}{7} \neq \frac{3}{2}$$

Conclure — Les longueurs ne sont pas toutes multipliées par le même nombre.

$$\frac{GE}{CA} = \frac{10}{7} \neq \frac{3}{2}$$

Non : deux côtés sur trois ne suffisent pas, une homothétie multiplie toutes les longueurs par le même nombre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui il peut / oui, il peut / il peut` → Les deux premiers quotients valent $\frac{3}{2}$, mais le troisième vaut $\frac{10}{7}$. Il faudrait $10{,}5$ pour le troisième côté.

EXERCICE 83 · BASE

Le troisième angle

Dans un triangle ABC, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $50°$ et l'angle $\widehat{ABC}$ mesure $60°$. On note $A'B'C'$ son image par une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{A'C'B'}$.

Donne la mesure en degrés.

Réponse attendue : `70`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une homothétie conserve les angles : l'angle en C' est égal à l'angle en C.
2. Calcule l'angle en C avec la somme des angles d'un triangle.

CORRECTION

L'angle en C — La somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

$\widehat{ACB} = 180° - 50° - 60° = 70°$

La conservation — L'homothétie conserve les angles.

$\widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB} = 70°$

$\widehat{A'C'B'} = 70°$: le rapport réduit les longueurs, il ne touche pas aux angles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`35` → Le rapport divise les longueurs par 2, pas les angles : une homothétie conserve les angles.

`140` → Le rapport ne s'applique pas aux angles : ils sont conservés.

EXERCICE 84 · PRATIQUE

Un angle du parallélogramme image

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $\widehat{ABC} = 110°$. On note $A'B'C'D'$ son image par une homothétie de rapport -2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{B'C'D'}$.

Donne la mesure en degrés.

Réponse attendue : `70`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'angle $\widehat{B'C'D'}$ est l'image de l'angle $\widehat{BCD}$: commence par calculer celui-ci.
2. Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires.

CORRECTION

Dans ABCD — Les angles en B et en C sont consécutifs : leur somme vaut $180°$.

$\widehat{BCD} = 180° - 110° = 70°$

La conservation — L'homothétie conserve les angles, même avec un rapport négatif.

$\widehat{B'C'D'} = \widehat{BCD} = 70°$

$\widehat{B'C'D'} = 70°$: on calcule l'angle sur la figure de départ, et l'homothétie le conserve.

PIÈGES ANTICIPÉS

`110` → $110°$ est l'angle en B. On demande l'angle en C', image de l'angle en C, qui lui est supplémentaire.

`140 / 220` → Le rapport multiplie les longueurs, pas les angles.

EXERCICE 85 · BASE

Deux perpendiculaires

Les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires. On note D_1' et D_2' leurs images par une homothétie de rapport -5. Déterminer, en degrés, la mesure de l'angle formé par les droites D_1' et D_2'.

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'_1 est parallèle à D_1, et D'_2 est parallèle à D_2.
2. Que conserve une homothétie ?

CORRECTION

Les parallèles — L'image d'une droite par une homothétie lui est parallèle.

$D'_1 \parallel D_1 \quad ; \quad D'_2 \parallel D_2$

L'orthogonalité — Des parallèles à deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires.

$D'_1 \perp D'_2$

Les droites images forment un angle droit : une homothétie conserve l'orthogonalité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0 / 180` → Les images ne sont pas parallèles entre elles : chacune est parallèle à sa droite de départ, et ces deux droites sont perpendiculaires.

EXERCICE 86 · PRATIQUE

La diagonale du rectangle image

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 3$ et $BC = 4$. On note $A'B'C'D'$ son image par une homothétie de rapport -3. Calculer la longueur de la diagonale $A'C'$.

Donne la longueur $A'C'$.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord la diagonale AC avec le théorème de Pythagore.
2. $[A'C']$ est l'image de $[AC]$.

CORRECTION

La diagonale AC — Le triangle ABC est rectangle en B.

$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

L'image — La longueur est multipliée par la valeur absolue du rapport.

$A'C' = 3 \times 5 = 15$

$A'C' = 15$: $A'B'C'D'$ est encore un rectangle, car une homothétie conserve l'orthogonalité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 est la diagonale AC. Il reste à la multiplier par $|k| = 3$.

`-15` → Une longueur est positive : on multiplie par la valeur absolue du rapport.

EXERCICE 87 · BASE

Le diamètre du cercle de départ

Le cercle (C') de rayon 6 est l'image d'un cercle (C) par une homothétie de rapport $-\dfrac{3}{2}$. Calculer le diamètre d du cercle (C).

Donne le diamètre d.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon de (C') est le rayon de (C) multiplié par la valeur absolue du rapport.
2. Trouve d'abord le rayon de (C) : c'est le cercle de départ, il faut revenir en arrière.

CORRECTION

Le rayon de (C) — Le rayon de (C') vaut $\frac{3}{2}$ fois le rayon R de (C).

$$6 = \frac{3}{2}R \iff R = 4$$

Le diamètre — Le diamètre est le double du rayon.

$$d = 2 \times 4 = 8$$

Pour revenir de l'image au cercle de départ, on divise le rayon par $|k|$.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → 18 est le diamètre de l'image d'un cercle de rayon 6. Ici c'est (C'), l'image, qui a pour rayon 6 : on revient en arrière.

4 → 4 est le rayon de (C) ; on demande son diamètre.

-8 → Un diamètre est une longueur : on prend la valeur absolue du rapport.

EXERCICE 88 · PRATIQUE

Un centre sur le cercle

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 3, et A un point de (C). On note (C') l'image de (C) par l'homothétie de centre A et de rapport 3, et O' le centre de (C'). Calculer la distance OO'.

Donne la distance OO'.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de (C') est l'image de O : calcule la distance AO'.
2. O' est sur la demi-droite $[AO)$, au-delà de O.

CORRECTION

Le centre du cercle image — O' est l'image de O, et $AO = 3$ car A est sur (C).

$$\overrightarrow{AO'} = 3\,\overrightarrow{AO}, \quad AO' = 9$$

La distance — Le rapport est positif : O est entre A et O'.

$$OO' = AO' - AO = 9 - 3 = 6$$

$OO' = 6$: le cercle (C'), de centre O' et de rayon 9, passe lui aussi par A, qui est le centre de l'homothétie.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → 9 est la distance AO', qui est aussi le rayon de (C'). On demande la distance entre les deux centres.

12 → $9+3$ placerait O' de l'autre côté de A. Le rapport est positif.

EXERCICE 89 · DEFI

Retrouver le rapport par les rayons

Le cercle (C') de centre O' et de rayon 4 est l'image du cercle (C) de centre O et de rayon 6 par une homothétie de centre I et de rapport négatif. On sait que $IO = 9$. Calculer la distance OO'.

Donne la distance OO'.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les rayons donnent la valeur absolue du rapport, et l'énoncé donne son signe.
2. O' est l'image de O : calcule IO'. Le rapport est négatif, donc I est entre O et O'.

CORRECTION

Le rapport — Le rayon est multiplié par $|k|$, et le rapport est négatif.

$$|k| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad k = -\frac{2}{3}$$

Le centre image — O' est l'image de O.

$$IO' = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

La distance — Le rapport est négatif : I est entre O et O'.

$$OO' = IO + IO' = 9 + 6 = 15$$

$OO' = 15$: le centre d'une homothétie qui transforme un cercle en un autre est aligné avec les deux centres.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $9 - 6$ placerait O et O' du même côté de I. Le rapport est négatif : I est entre les deux centres.

6 → 6 est la distance IO'. On demande la distance entre les deux centres.

45/2 / 22.5 → Tu as utilisé $\frac{6}{4}$. L'homothétie transforme (C) en (C') : $|k| = \frac{R'}{R} = \frac{4}{6}$.

EXERCICE 90 · PRATIQUE

Une tangente et son image

Une droite D est tangente en T à un cercle (C) de centre O et de rayon 4. On note (C'), D' et T' les images de (C), D et T par une homothétie de rapport $-\frac{3}{2}$, et O' le centre de (C'). Calculer la distance du point O' à la droite D'.

Donne la distance de O' à D'.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une homothétie conserve le contact : D' est tangente à (C') en T'.
2. La distance du centre d'un cercle à une tangente est égale au rayon.

CORRECTION

Le contact — D est tangente à (C) en T : son image D' est tangente à (C') en T'.

$$D' \perp (O'T')$$

Le rayon — La distance cherchée est le rayon de (C'), multiplié par $|k|$.

$$O'T' = \frac{3}{2} \times 4 = 6$$

La distance vaut 6 : la tangente image est tangente au cercle image, donc à la distance d'un rayon de son centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-6` → Une distance est positive : on multiplie le rayon par la valeur absolue du rapport.

`4` → 4 est le rayon de (C). Le cercle image a un rayon multiplié par $\frac{3}{2}$.

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

Le rayon par le centre

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 3, et un cercle (C') de centre O'. Le point I est le centre de l'homothétie de rapport positif qui transforme (C) en (C'). Les points I, O et O' sont alignés dans cet ordre, avec $IO = 4$ et $OO' = 6$. Calculer le rayon r du cercle (C').

Donne le rayon r, en fraction ou en écriture décimale.

Réponse attendue : `15/2` — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre O' de (C') est l'image de O : calcule d'abord IO', puis le rapport.
2. Le rayon est multiplié par la valeur absolue du rapport.

CORRECTION

La distance IO' — Les points sont dans l'ordre I, O, O'.

$$IO' = 4 + 6 = 10$$

Le rapport — O' est l'image de O, du même côté de I : le rapport est positif.

$$k = \frac{IO'}{IO} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Le rayon — Le rayon est multiplié par le rapport.

$$r = \frac{5}{2} \times 3 = \frac{15}{2}$$

Le centre de l'homothétie donne le rapport, $k = \frac{IO'}{IO}$, et le rayon est multiplié par $|k|$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6/5` / `1.2` → Le rapport est $\frac{IO'}{IO}$, pas $\frac{IO}{IO'}$: O' est l'image de O.

9/2 / 4.5 → Le rapport se calcule avec $IO' = 10$, pas avec $OO' = 6$.

EXERCICE 92 · DEFI

Le centre de rapport négatif

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon 4, et un cercle (C') de centre O' et de rayon 6, avec $OO' = 15$. Soit J le centre de l'homothétie de rapport négatif qui transforme (C) en (C'). Calculer la distance JO'.

Donne la distance JO'.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rapport négatif est $-\dfrac{R'}{R}$: J est entre O et O'.
2. On a $JO + JO' = 15$ et $JO' = \dfrac{3}{2}\,JO$.

CORRECTION

Le rapport — Le rapport est négatif et sa valeur absolue est le quotient des rayons.

$$k = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

L'équation — J est entre O et O', et JO' vaut $\dfrac{3}{2}$ de JO.

$$JO + \frac{3}{2}\,JO = 15 \iff \frac{5}{2}\,JO = 15 \iff JO = 6$$

La distance — On en déduit l'autre distance.

$$JO' = 15 - 6 = 9$$

$JO' = 9$: le centre de rapport négatif partage $[OO']$ dans le rapport des rayons.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est la distance JO. On demande la distance de J au centre du grand cercle.

45 → 45 est la distance IO' pour le centre de rapport positif, à l'extérieur du segment. Ici le rapport est négatif.

15/2 / 7.5 → J n'est pas le milieu de $[OO']$: les rayons sont différents, il est plus près du petit cercle.

EXERCICE 93 · RAISONNEMENT

Deux cercles tangents extérieurement

Deux cercles (C_1) et (C_2), de centres I et J et de rayons 2 et 6, sont tangents extérieurement en un point T. Soit h l'homothétie de centre T qui transforme I en J. Déterminer son rapport k.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les cercles sont tangents extérieurement : T est sur le segment $[IJ]$, avec $TI = 2$ et $TJ = 6$.
2. T est entre I et J : quel est le signe du rapport ?

CORRECTION

La position de T — Les cercles sont tangents extérieurement : T est entre I et J, à la distance d'un rayon de chaque centre.

$$TI = 2 \quad ; \quad TJ = 6$$

Le rapport — Les vecteurs $\overrightarrow{TJ}$ et $\overrightarrow{TI}$ sont de sens contraires, et TJ est le triple de TI.

$$\overrightarrow{TJ} = -3\,\overrightarrow{TI}$$

$k = -3$: cette homothétie transforme (C_1) en (C_2), et leur tangente commune en T est sa propre image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Pour des cercles tangents extérieurement, T est entre les deux centres : le rapport est négatif.

`-1/3 / 1/3` → Tu as divisé TI par TJ. h transforme I en J, plus loin de T : $|k| > 1$.

EXERCICE 94 · BASE Le périmètre de l'image

Un polygone a pour périmètre 18. Calculer le périmètre p' de son image par une homothétie de rapport $-\dfrac{2}{3}$.

Donne le périmètre p'.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque côté du polygone est multiplié par la valeur absolue du rapport : que devient leur somme ?
2. Le signe du rapport ne compte pas pour une longueur.

CORRECTION

Le périmètre — Chaque côté est multiplié par $\dfrac{2}{3}$, donc leur somme aussi.

$$p' = \frac{2}{3} \times 18 = 12$$

$p' = 12$: le périmètre suit les longueurs, il est multiplié par $|k|$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-12` → Un périmètre est positif : on multiplie par la valeur absolue du rapport.

`8` → $8 = \dfrac{4}{9} \times 18$: c'est l'aire qui est multipliée par le carré du rapport. Le périmètre est multiplié par $|k|$.

EXERCICE 95 · PRATIQUE L'aire d'un disque image

Un disque a pour rayon 3. Calculer l'aire s de son image par une homothétie de rapport $\frac{4}{3}$. Donner la valeur exacte, en fonction de π, sans écrire l'unité.

Donne l'aire s, en valeur exacte.

Réponse attendue : `16*pi` — aussi acceptées : 16pi

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire du disque de départ vaut $\pi \times 3^2$.
2. Par une homothétie de rapport k, l'aire est multipliée par k^2.

CORRECTION

L'aire de départ — On applique la formule de l'aire d'un disque.

$\pi \times 3^2 = 9\pi$

L'aire de l'image — L'aire est multipliée par le carré du rapport.

$s = \frac{16}{9} \times 9\pi = 16\pi$

$s = 16\pi$: on peut aussi calculer le nouveau rayon, 4, puis l'aire $\pi \times 4^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12*pi` → $12\pi = \frac{4}{3} \times 9\pi$: l'aire est multipliée par le carré du rapport, pas par le rapport.

`50.27 / 50.3 / 50.26 / 50` → La consigne demande la valeur exacte : garde π dans la réponse.

EXERCICE 96 · RAISONNEMENT

Le rapport par les aires

Un triangle a pour aire 50, et son image par une homothétie h de rapport négatif a pour aire 8. Déterminer le rapport k de h.

Donne le rapport k.

Réponse attendue : `-2/5` — aussi acceptées : -0.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire est multipliée par k^2 : calcule k^2.
2. Prends la racine carrée, puis tiens compte du signe donné.

CORRECTION

Le carré du rapport — On divise l'aire de l'image par l'aire de départ.

$k^2 = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$

Le rapport — k est négatif.

$k = -\frac{2}{5}$

$k = -\frac{2}{5}$: le quotient des aires donne le carré du rapport, pas le rapport.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4/25 / 4/25 / 0.16 / -0.16` → $\frac{4}{25}$ est k^2 : il reste à prendre la racine carrée.

`2/5 / 0.4` → $\frac{2}{5}$ a bien pour carré $\frac{4}{25}$, mais l'énoncé dit que le rapport est négatif.

EXERCICE 97 · DEFI

Couper un triangle par une parallèle

Soit ABC un triangle d'aire 100, avec $AB = 15$. La parallèle à (BC) passant par un point M du segment $[AB]$ coupe $[AC]$ en N, et le trapèze $MNCB$ a pour aire 64. Calculer la distance AM.

Donne la distance AM.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre A : quelle est son aire ?
2. Le quotient des aires est le carré du rapport.

CORRECTION

L'aire de AMN — On retranche l'aire du trapèze.

$100 - 64 = 36$

L'homothétie — L'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme (BC) en la parallèle passant par M, donc C en N. Son rapport est positif.

$$k^2 = \frac{36}{100} \implies k = \frac{3}{5}$$

La distance — M est l'image de B.

$$AM = \frac{3}{5} \times 15 = 9$$

$AM = 9$: pour une aire, on passe toujours par le carré du rapport, puis par sa racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

`27/5 / 5.4` → $\frac{36}{100}$ est le carré du rapport : il faut en prendre la racine avant de multiplier AB.

`6` → 6 est la distance MB. On demande la distance AM.

`48/5 / 9.6` → Le trapèze n'est pas l'image du triangle : c'est le triangle AMN, d'aire 36, qui l'est.

EXERCICE 98 · PRATIQUE

Le lieu d'un point

Soit (C) un cercle de rayon 10 et A un point fixe. Pour tout point M de (C), on note P le point tel que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est égal à $-\frac{2}{5}$ fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$. Lorsque M décrit (C), le point P décrit un cercle. Calculer son rayon r.

Donne le rayon r.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. P est l'image de M par une homothétie : quels sont son centre et son rapport ?
2. Le lieu de P est l'image du cercle (C).

CORRECTION

L'homothétie — Le centre A est fixe et le rapport est constant.

$$P = h(M), \quad h \text{ de centre } A \text{ et de rapport } -\frac{2}{5}$$

Le rayon — Le lieu est l'image de (C) : son rayon est multiplié par $|k|$.

$$r = \frac{2}{5} \times 10 = 4$$

Le lieu de P est un cercle de rayon 4 : on reconnaît une homothétie, puis on prend l'image de la ligne décrite.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → Un rayon est positif : on multiplie par la valeur absolue du rapport.

25 → Tu as divisé par $\frac{2}{5}$. On multiplie : $|k| < 1$, le cercle est réduit.

EXERCICE 99 · DEFI

Le lieu du centre de gravité

Soient B et C deux points fixes, I le milieu de $[BC]$, et (C) un cercle de centre O qui ne coupe pas la droite (BC), avec $IO = 12$. Pour tout point A de (C), on note G le centre de gravité du triangle ABC. Lorsque A décrit (C), le point G décrit un cercle de centre K. Calculer la distance IK.

Donne la distance IK.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre de gravité est sur la médiane $[IA]$, au tiers à partir de I.
2. G est l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$: le centre du lieu est l'image de O.

CORRECTION

L'homothétie — G est au tiers de la médiane $[IA]$ à partir du milieu I : le centre I est fixe, le rapport constant.

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$$

Le lieu — Quand A décrit (C), G décrit l'image de (C), dont le centre K est l'image de O.

$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$$

La distance — On passe aux longueurs.

$$IK = \frac{1}{3} \times 12 = 4$$

$IK = 4$: le lieu du centre de gravité est l'image du cercle par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → Le centre de gravité est aux deux tiers de la médiane à partir du sommet A, donc au tiers à partir du milieu I : le rapport est $\frac{1}{3}$.

`12` → 12 est la distance IO. Le centre du lieu est l'image de O, pas O lui-même.

EXERCICE 100 · DEFI

Le centre d'un lieu

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, avec $AB = 6$, et S un point de la droite (AB) tel que A soit entre S et B, et $SA = 4$. Pour chaque point M du cercle, distinct de A et de B, on trace le diamètre $[PM]$, puis on note M' le point d'intersection des droites (SM) et (AP). Le point M' décrit un cercle privé de deux points, de centre K. Calculer la distance SK.

Donne la distance SK, en fraction ou en écriture décimale.

Réponse attendue : `14/5` — aussi acceptées : `2.8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cours montre que M' est l'image de M par l'homothétie h de centre S qui transforme B en A. Calcule son rapport.
2. Le centre du cercle décrit est l'image du centre O de (C) : calcule d'abord SO.

CORRECTION

Le rapport — A est entre S et B : $SB = 4 + 6 = 10$, et le rapport est positif.

$$k = \frac{SA}{SB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Le lieu — $APBM$ est un rectangle, donc (AP) est parallèle à (BM) : h transforme (BM) en (AP), et M en M'. Le lieu est l'image de (C).

$$h(M) = M'$$

Le centre — Le centre K du lieu est l'image du centre O de (C), et $SO = SA + AO = 4 + 3 = 7$.

$$SK = \frac{2}{5} \times 7 = \frac{14}{5}$$

Le lieu est l'image du cercle : son centre est l'image du centre O, à la distance $|k| \times SO$ du point S.

PIÈGES ANTICIPÉS

`35/2 / 17.5` → Le rapport est $\frac{SA}{SB}$: h transforme B en A, le plus loin en le plus proche.

`6/5 / 1.2` → C'est le rayon du cercle décrit ; on demande la distance de S à son centre.

`4` → 4 est la distance SA : A est l'image de B, pas du centre O.

EXERCICE 101 · DEFI

Le carré dans le triangle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$, et dont la hauteur issue de C mesure 6, les angles en A et en B étant aigus. Un carré a deux sommets sur le côté $[AB]$, un sur $[AC]$ et un sur $[BC]$. On note s son côté. Calculer s.

Donne le côté s.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le côté supérieur du carré est parallèle à (AB) : il est l'image du segment $[AB]$ par une homothétie de centre C. Son rapport vaut $\dfrac{6-s}{6}$, quotient des distances à C.
2. Écris que l'image de $[AB]$ mesure s, et résous l'équation.

CORRECTION

L'homothétie — Le côté supérieur du carré est à la distance $6 - s$ de C : il est l'image de $[AB]$ par l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{6-s}{6}$.

$$s = \frac{6-s}{6} \times 12$$

L'équation — On simplifie, puis on résout.

$$s = 2\,(6-s) \iff 3\,s = 12$$

Le côté — On divise par 3.

$$s = 4$$

$s = 4$: le côté supérieur du carré est l'image de la base par une homothétie de centre C, de rapport $\dfrac{1}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Le carré n'est pas à mi-hauteur : écris l'équation $s = \dfrac{6-s}{6} \times 12$.

6 → Un carré de côté 6 toucherait le sommet C : son côté supérieur aurait une longueur nulle.

EXERCICE 102 · DEFI

Le centre du cercle d'Euler

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité et H son orthocentre, avec $OG = 2$. On note K le centre du cercle d'Euler du triangle ABC. Calculer la distance OK.

Donne la distance OK.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur la droite d'Euler, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{OG}$.

2. Le centre du cercle d'Euler est le milieu du segment $[OH]$.

CORRECTION

La droite d'Euler — On applique la relation du cours.

$\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}, \quad OH = 6$

Le cercle d'Euler — Son centre K est le milieu de $[OH]$.

$OK = \dfrac{6}{2} = 3$

$OK = 3$: K est sur la droite d'Euler, au milieu de $[OH]$, et $GK = 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est la distance OH. Le centre du cercle d'Euler est le milieu de $[OH]$.

1 → K est le milieu de $[OH]$, pas de $[OG]$: 1 est la distance GK.

EXERCICE 103 · DEFI

Agrandir avec le pantographe

Sur un pantographe de point fixe A, les tiges vérifient $AB = 5$ et $AC = 20$, l'unité étant le centimètre : le point M est l'image du point N par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{AB}{AC}$. On fait suivre au point M le contour d'un carré de côté 3. Calculer l'aire de la figure tracée par le point N, sans écrire l'unité.

Donne l'aire, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 144

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est l'image de N : c'est donc N qui est l'image de M, par l'homothétie de rapport inverse.
2. Le rapport $\dfrac{AB}{AC}$ vaut $\dfrac{1}{4}$: la figure tracée par N est un carré plus grand. L'aire est multipliée par le carré du rapport.

CORRECTION

Le rapport — On calcule le rapport du pantographe.

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$

Dans l'autre sens — N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 4 : N trace un carré de côté $4 \times 3 = 12$.

$\overrightarrow{AN} = 4\,\overrightarrow{AM}$

L'aire — On calcule l'aire du carré tracé par N.

$12^2 = 144$

L'aire vaut 144 : N trace un agrandissement de rapport 4, donc d'aire 16 fois plus grande.

PIÈGES ANTICIPÉS

36 → $36 = 4 \times 9$: l'aire est multipliée par le carré du rapport, soit 16.

$9/16$ → Tu as réduit le carré. C'est M qui trace la réduction ; N, lui, trace un agrandissement.

48 → 48 est le périmètre du carré tracé par N. On demande son aire.

AH
Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI