— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

# Notion de polynômes

**2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique** · Pr Abdelkader Hammami

## Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro trois : notion de polynômes. Bech na3rfou chnowa polynôme, le degré mte3ou, w kifech na3mlou 3lih des opérations. W ahamm 7aja : ki nal9aw racine alpha, najmou factoriser par x moins alpha. Biha bech n7ellou des équations w des inéquations de degré trois w quatre, w nkammlou b les fonctions rationnelles.

عسلامة ! الـ chapitre numéro trois : notion de polynômes . باش نعرفو شنوّة le degré ، polynôme متاعو ، w كيفاش نعملو عليه . w أهم حاجة : كي نلقاو racine alpha ، نجّمو factoriser par x moins alpha . بيها باش نحلّو des équations w des inéquations de degré trois w quatre ، w نكمّلو بـ les fonctions rationnelles .

*Bonjour ! Le chapitre numéro trois : notion de polynômes. Nous allons voir ce qu'est un polynôme, son degré, et comment opérer sur les polynômes. Et surtout : quand on trouve une racine alpha, on factorise par x moins alpha. Cela nous permettra de résoudre des équations et des inéquations de degré trois et quatre, et nous finirons par les fonctions rationnelles.*

Ce chapitre étudie les **polynômes** : des fonctions de la forme $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Après un retour sur la notion de fonction, il définit le degré, les opérations, l'égalité de deux polynômes, puis l'outil central : **si $\alpha$ est une racine de $P$, alors $P$ est factorisable par $(x - \alpha)$**.

On s'en sert pour résoudre des équations et des inéquations de degré $3$ ou $4$, et termine par les fonctions rationnelles $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

*À la fin de ce chapitre, tu sauras :*

- Reconnaître un polynôme, lire ses coefficients et son degré

  > Reconnaître un polynôme, lire ses coefficients et son degré.
  > *Reconnaître un polynôme, lire ses coefficients et son degré.*

- Additionner, multiplier des polynômes et prévoir le degré d'un produit

  > Additionner et multiplier des polynômes, et prévoir le degré d'un produit.
  > *Additionner et multiplier des polynômes, et prévoir le degré d'un produit.*

- Utiliser l'égalité de deux polynômes pour identifier des coefficients

  > Utiliser l'égalité de deux polynômes pour trouver des coefficients.
  > *Utiliser l'égalité de deux polynômes pour trouver des coefficients.*

- Factoriser un polynôme par $(x - \alpha)$ quand $\alpha$ est une racine

  > Factoriser un polynôme par x moins alpha quand alpha est racine.
  > *Factoriser un polynôme par x moins alpha quand alpha est racine.*

- Résoudre des équations et inéquations de degré $3$ ou $4$, et étudier une fonction rationnelle

  > Résoudre des équations et des inéquations de degré trois ou quatre, et étudier une fonction rationnelle.
  > *Résoudre des équations et des inéquations de degré trois ou quatre, et étudier une fonction rationnelle.*

---

1. DÉFINITION

## Notion de fonction

CE QU'IL DIT

Nabdew b la notion de fonction. E partie non vide de IR, w koll réel x men E nrabtouh b au plus un réel y : hedhi fonction, w nektbou y égale f de x. Les réels x elli f de x mawjouda fihom, houma l'ensemble de définition D. W y nsammiwh l'image de x, w x nsammiwh un antécédent de y. Mathalan, le rectangle AMNP fi quart de cercle de rayon trois : AM égale x, w Pythagore ya3tina MN égale racine de, neuf moins x carré. Donc S de x égale x fois racine de, neuf moins x carré, w x lezem bin zéro w trois.

هاذي : au plus un réel y نربطوه بـ E من réel x كل la notion de fonction . E partie non vide de IR ، w نبداو بـ l'ensemble de définition D . w y هوما ، موجودة فيهم f de x إلّي y égale f de x . les réels x نكتبو fonction ، w quart de cercle de في le rectangle AMNP ، مثلا . un antécédent de y نسمّيوه l'image de x ، w x نسمّيوه MN égale racine de , neuf moins x carré . donc S de x يعطينا rayon trois : AM égale x ، w Pythagore . zéro w trois لازم بين égale x fois racine de , neuf moins x carré ، w x

*Commençons par la notion de fonction. Soit E une partie non vide de IR : si à chaque réel x de E on associe au plus un réel y, on a défini une fonction, et on écrit y égale f de x. Les réels x pour lesquels f de x existe forment l'ensemble de définition D. On dit que y est l'image de x, et que x est un antécédent de y. Par exemple, le rectangle AMNP est dans un quart de cercle de rayon trois : AM égale x, et Pythagore donne MN égale racine de, neuf moins x carré. Donc S de x égale x fois racine de, neuf moins x carré, avec x compris entre zéro et trois.*

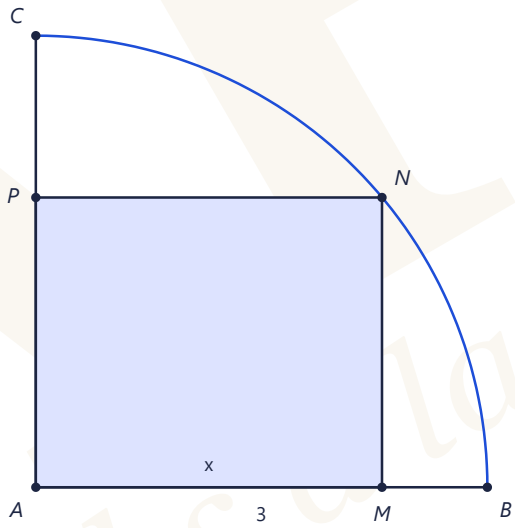
**Définition.** Soit $E$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Lorsqu'à tout réel $x$ de $E$ on associe **au plus un** réel $y$, on dit qu'on a défini une **fonction** de $E$ vers $\mathbb{R}$. Si on la note $f$, on écrit $y = f(x)$ et $f : E \to \mathbb{R}$,

$x \mapsto f(x)$.

L'ensemble $D$ des réels $x$ de $E$ tels que $f(x)$ existe est l'**ensemble de définition** de $f$ : on dit que $f$ est définie sur $D$.

**Vocabulaire.** Pour $x \in D$ et $y = f(x)$ : le réel $y$ est l'**image** de $x$ par $f$ ; $x$ est **un antécédent** de $y$ par $f$.

Exemple : le rectangle $AMNP$ est inscrit dans le quart de cercle de centre $A$ et de rayon $3$, $AM = x$ avec $x \in ]0;3[$, et Pythagore dans le triangle $AMN$ donne $MN = \sqrt{9 - x^2}$. L'aire du rectangle est donc $S(x) = x\sqrt{9-x^2}$ : $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{4}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$, $S(1) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $S(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$.




AMNP est un rectangle inscrit dans le quart de cercle de centre A et de rayon 3, et AM = x.

*Un quart de cercle de centre A et de rayon 3, d'extrémités B (sur la demi-droite horizontale issue de A) et C (sur la demi-droite verticale issue de A). Le point M est sur le segment [AB], avec AM = x ; N est sur l'arc BC, à la verticale de M ; P est sur le segment [AC], à la hauteur de N. Le rectangle AMNP est grisé.*

UNE FONCTION

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

ENSEMBLE DE DÉFINITION

$$D = \{x \in E \,;\, f(x) \text{ existe}\}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**La distance de freinage $d$ (en mètres) d'une voiture qui roule à $v$ km/h est modélisée par $d = 0{,}2\,v + \dfrac{v^2}{150}$. Quelle distance parcourt après le freinage une voiture qui roule à $90$ km/h ? Quelles vitesses permettent de s'arrêter en moins de $12$ mètres ?**

**À 90 km/h —** On calcule l'image de $90$.

$d = 0{,}2 \times 90 + \frac{90^2}{150} = 18 + 54 = 72$

**Moins de 12 m —** On multiplie par $150$ et on regroupe tout dans un membre.

$0{,}2\,v + \frac{v^2}{150} < 12 \iff v^2 + 30v - 1800 < 0$

**Factoriser —** Le discriminant vaut $900 + 7200 = 8100 = 90^2$ : les racines sont $30$ et $-60$.

$v^2 + 30v - 1800 = (v - 30)(v + 60)$

**Conclure —** $v + 60 > 0$ pour une vitesse : le produit est négatif si et seulement si $v < 30$.

$0 \leq v < 30$

$$d = 72 \text{ m} \; ; \; v < 30 \text{ km/h}$$

**À ne pas faire :** $z \mapsto \sqrt{z-2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ — Elle est définie sur $[2;+\infty[$. $\sqrt{z-2}$ n'existe que si $z - 2 \geq 0$.

**À ne pas faire :** $-2$ a pour antécédent $f(-2)$ — $f(-2)$ est l'image de $-2$ ; $-2$ est un antécédent de $f(-2)$. L'image se calcule à partir du réel de départ ; l'antécédent est le réel de départ.

2. DÉFINITION

## Fonction polynôme

CE QU'IL DIT

Fonction polynôme, hiya fonction mo3arrfa 3la IR kemel, b ech-chakl hedha : f de x égale a n x puissance n plus a n moins un x puissance n moins un, w hakka, 7atta a un x plus a zéro. Les réels a n, ..., a zéro nsammiwhom les coefficients. W 3ada n9oulou le polynôme f bark. W ken el coefficients el kol nuls, hedha le polynôme nul. Mathalan, n9os carré de côté x men koll coin mta3 plaque de soixante : la base twalli soixante moins deux x, w le volume V de x égale x fois, soixante moins deux x, le tout au carré. Hedha polynôme, w yousel lel maximum ki x égale dix.

f de x égale a n x puissance n plus a n : هذا بالشكل ، كامل IR معرّفة على fonction هي ، fonction polynôme les نسمّيوهم a un x plus a zéro . les réels a n ، ... ، a zéro حتى ، هكّا moins un x puissance n moins un ، w . مثلا ، le polynôme nul هذا ، nuls الكل coefficients كان الـ w . برك le polynôme f عادة نقولو coefficients . w soixante moins deux x ، w le تولّي plaque de soixante : la base متاع coin كل من carré de côté x نقصّو يوصل للـ polynôme ، w هذا . volume V de x égale x fois , soixante moins deux x , le tout au carré . x égale dix كي maximum

*Une fonction polynôme est une fonction définie sur tout IR de la forme : f de x égale a n x puissance n plus a n moins un x puissance n moins un, et ainsi de suite, jusqu'à a un x plus a zéro. Les réels a n, ..., a zéro sont ses coefficients. On dit souvent simplement le polynôme f. Si tous les coefficients sont nuls, c'est le polynôme nul. Par exemple, on découpe un carré de côté x à chaque coin d'une plaque de soixante : la*

*base mesure soixante moins deux x, et le volume V de x égale x fois, soixante moins deux x, le tout au carré. C'est un polynôme, et il atteint son maximum pour x égale dix.*

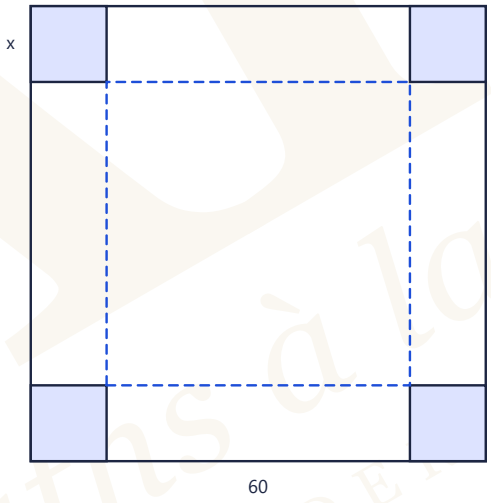
**Définition.** Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et $a_n$ des réels. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

est appelée **fonction polynôme**. Les réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ et $a_0$ sont ses **coefficients**.

**Remarque.** Au lieu de dire « la fonction polynôme $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par… », on dit souvent « le **polynôme** $f$ défini par… ». Si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, le polynôme $f$ est appelé **polynôme nul**.

Exemple : dans une plaque carrée de $60$ cm de côté, on découpe à chaque coin un carré de côté $x$, puis on replie les bords. La boîte a pour base un carré de côté $60 - 2x$ et pour hauteur $x$, avec $x \in ]0\,;30[$ : son volume $V(x) = x(60-2x)^2 = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$ est un polynôme.




On découpe un carré de côté x à chaque coin de la plaque de 60 cm, puis on replie les bords.

*Une plaque de carton carrée de 60 cm de côté. À chacun des quatre coins, un petit carré de côté x est grisé : c'est la partie découpée. Les quatre bords restants se replient le long d'un carré intérieur en pointillés, de côté 60 − 2x, pour former une boîte sans couvercle.*

FONCTION POLYNÔME

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Avec $V(x) = x(60-2x)^2$ pour $x \in ]0\,;30[$, calculer $V(10)$, vérifier que $V(x) - V(10) = 4(x-10)(x^2-50x+400)$, puis trouver $x$ pour que le volume soit maximal.**

Calculer —

$V(10) = 10 \times 40^2 = 16000$

**Développer —** On développe $V(x)$, puis le produit proposé.

$V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$

$4(x-10)(x^2 - 50x + 400) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x - 16000 = V(x) - V(10)$

**Signe —** $x^2 - 50x + 400 = (x-10)(x-40)$, et $x - 40 < 0$ sur $]0;30[$.

$V(x) - V(10) = 4(x-10)^2(x-40) \leq 0$

**Conclure —** Pour tout $x$ de $]0;30[$, $V(x) \leq V(10)$ : le volume est maximal pour $x = 10$.

$V_{\max} = V(10) = 16000 \text{ cm}^3$

$$x = 10 \text{ cm}$$

**À ne pas faire :** $V(x) = x(60-x)^2$ — $V(x) = x(60-2x)^2$. On découpe un carré de côté $x$ à **chaque** coin : le côté de la base perd $2x$.

**À ne pas faire :** $f(x) = 0$ pour $x = 2$ et $x = 3$, donc $f$ est le polynôme nul — Le polynôme nul s'annule pour **tout** réel $x$. $x^2 - 5x + 6$ s'annule en $2$ et en $3$, mais vaut $6$ en $0$.

---

3. APPLICATION

## Reconnaître un polynôme

CE QU'IL DIT

Kifech na3rfou elli fonction hiya polynôme ? Lezem tetekteb somme mta3 termes a fois x puissance un entier naturel. El coefficients ynajmou ykounou ay réels : racine de deux, deux tiers, ma famma 7atta mochkla. Mathalan moins deux fois, x plus un, le tout au cube, plus cinq x carré moins quatre x, ki ndévelopper, nal9aw moins deux x cube moins x carré moins dix x moins deux : polynôme. W trois racine de deux, polynôme constant. Ama valeur absolue de x, walla un sur, x carré plus un, ma yetektbouch hakka : mouch polynômes.

termes a fois x puissance un entier متاع somme تتكتب لازم ؟ polynôme هي fonction كيفاش نعرفو إلّي
moins مثلا . مشكل حتى فمّا ما ، réels : racine de deux ، deux tiers أي ينجّمو يكونو coefficients الـ . naturel
moins نلقاو ، développer نـ كي ، deux fois , x plus un , le tout au cube , plus cinq x carré moins quatre x
deux x cube moins x carré moins dix x moins deux : polynôme . w trois racine de deux ، polynôme
. polynômes موش : هكّا يتكتبوش ما ، un sur , x carré plus un ولّا ، valeur absolue de x أما . constant

*Comment reconnaître un polynôme ? Il doit s'écrire comme une somme de termes a fois x puissance un entier naturel. Les coefficients peuvent être n'importe quels réels : racine de deux, deux tiers, aucun problème. Par exemple moins deux fois, x plus un, le tout au cube, plus cinq x carré moins quatre x : en développant, on trouve moins deux x cube moins x carré moins dix x moins deux, c'est un polynôme. Trois racine de deux est un polynôme constant. En revanche valeur absolue de x, ou un sur, x carré plus un, ne s'écrivent pas ainsi : ce ne sont pas des polynômes.*

Une fonction est un polynôme si, pour tout réel $x$, elle **s'écrit** $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ : une somme de termes $a_k x^k$, avec des exposants entiers naturels et des coefficients **réels** — $\sqrt{2}$ ou $\frac{2}{3}$ sont des coefficients permis.

- $F(x) = -2x^3 - 5x^2 - 1$ et $G(t) = 1 + 3t + \frac{2}{3}t^2 - 6t^3$ sont des polynômes ; le nom de la variable ne compte pas.
- $x \mapsto -2(x+1)^3 + 5x^2 - 4x$ en est un : en développant, on trouve $-2x^3 - x^2 - 10x - 2$.
- $x \mapsto 3\sqrt{2}$ est un polynôme **constant** : $a_0 = 3\sqrt{2}$.
- $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2 + 5|x|$ ou $x \mapsto 3x^5 - 2\sqrt{3}\,x + \frac{1}{x^2+1}$ ne s'écrivent pas sous cette forme : ce ne sont pas des polynômes.

DÉVELOPPER POUR RECONNAÎTRE

$$-2(x+1)^3 + 5x^2 - 4x = -2x^3 - x^2 - 10x - 2$$

EXEMPLE TRAITÉ

**$P(x) = 5x^2 - \frac{1}{6}x$ est-il un polynôme ? Si oui, donner ses coefficients.**

**Forme —** C'est une somme de termes $a_k x^k$ à exposants entiers : oui, c'est un polynôme.

**Coefficients —** Le terme constant manque : il vaut $0$.

$a_2 = 5, \quad a_1 = -\frac{1}{6}, \quad a_0 = 0$

$P$ est un polynôme de coefficients $5,\ -\frac{1}{6},\ 0$

**À ne pas faire :** $x \mapsto 3\sqrt{2}$ n'est pas un polynôme, il n'y a pas de $x$ — C'est un polynôme constant, avec $a_0 = 3\sqrt{2}$. Tous les coefficients autres que $a_0$ sont nuls : c'est permis.

**À ne pas faire :** $x^2 - \sqrt{2}\,x$ n'est pas un polynôme à cause de $\sqrt{2}$ — C'est un polynôme : $\sqrt{2}$ est un coefficient réel. La racine porte sur un nombre, pas sur $x$ ; avec $\sqrt{x}$, ce ne serait plus un polynôme.

4. THÉORÈME

## Égalité de deux polynômes

CE QU'IL DIT

Polynôme nul pour tout réel x, ma3neha el coefficients el kol nuls. W zouz polynômes égaux, ken 3andhom nafs le degré w nafs les coefficients, terme par terme. Rodd belek : zouz polynômes ynajmou ye5dhou nafs la valeur fi no9ta walla zouz, w ma ykounouch égaux. Mathalan, f de x égale trois x carré moins x plus trois, w g de x égale deux x carré plus quatre x moins un : f de un égale g de un, w f de

quatre égale g de quatre, ama f de zéro trois w g de zéro moins un. W men houni tji la méthode d'identification : ki zouz polynômes égaux, nsawiw les coefficients mta3 nafs le degré.

polynôme nul pour tout réel x ، معناها الـ coefficients الكل . w زوز nuls polynômes égaux ، كان عندهم نفس
le degré w نفس terme par terme ، les coefficients . رد بالك : زوز polynômes ينجّمو ياخذو نفس la valeur في
f de x égale trois x carré moins x plus trois ، w g de x égale deux ، مثلا . égaux ما يكونوش w ، نقطة ولّا زوز
f de zéro أما ، x carré plus quatre x moins un : f de un égale g de un ، w f de quatre égale g de quatre
trois w g de zéro moins un . w من هنا تجي la méthode d'identification : كي زوز polynômes ،
les coefficients نساويو متاع نفس le degré .

*Un polynôme est nul pour tout réel x si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Et deux polynômes sont égaux s'ils ont le même degré et les mêmes coefficients, terme par terme. Attention : deux polynômes peuvent prendre la même valeur en un ou deux points sans être égaux. Par exemple, avec f de x égale trois x carré moins x plus trois, et g de x égale deux x carré plus quatre x moins un : f de un égale g de un, et f de quatre égale g de quatre, mais f de zéro vaut trois et g de zéro vaut moins un. C'est la base de la méthode d'identification : quand deux polynômes sont égaux, on égale les coefficients de même degré.*

- Un polynôme est **nul** (pour tout réel $x$) **si et seulement si tous ses coefficients sont nuls**.
- Deux polynômes sont **égaux** (pour tout réel $x$) **si et seulement s'ils ont même degré et si les coefficients des termes de même degré sont égaux**.

Attention : deux polynômes peuvent prendre la même valeur en quelques points sans être égaux. Par exemple, $f(x) = 3x^2 - x + 3$ et $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$ vérifient $f(1) = g(1) = 5$ et $f(4) = g(4) = 47$, mais $f(0) = 3$ et $g(0) = -1$ : la phrase « $f(x) = g(x)$ pour tout réel $x$ » est fausse.

C'est ce résultat qui fonde la **méthode d'identification** : si, pour tout réel $x$, $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 2x^2 - 10x + 11$, alors $a_2 = 2$, $a_1 = -10$ et $a_0 = 11$.

POLYNÔME NUL

$$a_n x^n + \cdots + a_0 = 0 \text{ pour tout } x \iff a_n = \cdots = a_0 = 0$$

POLYNÔMES ÉGAUX

$$\sum a_k x^k = \sum b_k x^k \text{ pour tout } x \iff a_k = b_k \text{ pour tout } k$$

DÉMONSTRATION

Au degré $2$ : si $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ est nul pour tout $x$, alors $g(0) = a_0 = 0$, $g(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 0$ et $g(-1) = a_2 - a_1 + a_0 = 0$. En ajoutant et en retranchant les deux dernières égalités : $a_2 = 0$ et $a_1 = 0$. Pour deux polynômes égaux, on applique ce résultat à leur différence $P - Q$, qui est nulle.

EXEMPLE TRAITÉ

**Existe-t-il un réel $a$ tel que, pour tout réel $x$, $a^2x^2 + (a^2 + a)x + a = 9x^2 + 6x - 3$ ?**

**Identifier —** Les coefficients des termes de même degré doivent être égaux.

$$a^2 = 9, \quad a^2 + a = 6, \quad a = -3$$

**Vérifier —** $a = -3$ donne $a^2 = 9$ et $a^2 + a = 9 - 3 = 6$ : les trois conditions sont satisfaites.

$a = -3$

$$a = -3$$

**À ne pas faire :** $f(1) = g(1)$ et $f(4) = g(4)$, donc $f = g$ — Il faut l'égalité pour **tout** réel $x$, c'est-à-dire des coefficients égaux. Avec $f(x) = 3x^2 - x + 3$ et $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$ : $f(0) = 3$ mais $g(0) = -1$.

**À ne pas faire :** $ax^2 + bx + 4 = 0$ pour tout $x$ avec $a = b = 0$ — Impossible : le terme constant $4$ n'est pas nul. Un polynôme nul a **tous** ses coefficients nuls, y compris $a_0$.

---

5. DÉFINITION

## Degré d'un polynôme

CE QU'IL DIT

Koll polynôme non nul yetekteb b tari9a wa7da : a n x puissance n plus ... plus a zéro, avec a n différent de zéro. L'entier n houwa le degré mta3 P, w nektbou degré de P égale n. Le polynôme nul ma 3andouch degré, w polynôme constant non nul, le degré mte3ou zéro. Ama rodd belek : dima réduire 9bal ma te9ra le degré. Mathalan K de x égale, x moins un, le tout au cube, moins x cube : les x cube yemchiw, w yo93ed moins trois x carré plus trois x moins un, degré deux, mouch trois.

a n x puissance n plus ... plus a zéro ، avec a n différent de : وحدة بطريقة يتكتب polynôme non nul كل
degré ، w عندوش ما degré de P égale n . le polynôme nul نكتبو P ، w متاع le degré هو zéro . l'entier n
K de مثلا . le degré قُبَلْ ما تقرا réduire ديما : أما رد بالك . zéro متاعو polynôme constant non nul ، le degré
moins trois x carré plus يقعد w ، يمشيو x égale , x moins un , le tout au cube , moins x cube : les x cube
. trois موش ، trois x moins un ، degré deux

*Tout polynôme non nul s'écrit de façon unique : a n x puissance n plus ... plus a zéro, avec a n différent de zéro. L'entier n est le degré de P, et on écrit degré de P égale n. Le polynôme nul n'a pas de degré, et un polynôme constant non nul est de degré zéro. Mais attention : réduis toujours avant de lire le degré. Par exemple K de x égale, x moins un, le tout au cube, moins x cube : les x cube s'annulent, il reste moins trois x carré plus trois x moins un, de degré deux, pas trois.*

**Définition.** On admet que tout polynôme **non nul** $P$ a une écriture unique de la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ avec } a_n \neq 0.$$

L'entier $n$ est appelé le **degré** du polynôme $P$ ; on écrit $d^\circ(P) = n$. On convient que le polynôme nul **n'a pas de degré**. Le degré d'un polynôme constant (non nul) est égal à **zéro**.

Exemples : $P(x) = 3x^4 - 7x^2 + x$ est de degré $4$ ; $Q(x) = 2 - x + x^3 + x^5 + x^7$ de degré $7$ ; $R(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$ de degré $2$ ; $V(x) = (2x+1)(2x^3 + 8x - 1)$ de degré $4$. Mais $K(x) = (x-1)^3 - x^3 = -3x^2 + 3x - 1$ est de degré $2$ : les termes en $x^3$ se sont annulés.

DEGRÉ

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0 \Rightarrow d^\circ(P) = n$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Déterminer le degré et le coefficient du terme du plus haut degré de $P(x) = 6x^3 - 5x^2 + (2x^2 + x - 1)(2 - 3x)$.**

**Développer —** On développe le produit.

$(2x^2 + x - 1)(2 - 3x) = -6x^3 + x^2 + 5x - 2$

**Réduire —** Les termes en $x^3$ s'annulent.

$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 6x^3 + x^2 + 5x - 2 = -4x^2 + 5x - 2$

**Conclure —** Le degré de $P$ est $2$, et le coefficient de son terme du plus haut degré est $-4$.

$d^\circ(P) = 2, \quad a_2 = -4$

degré 2, coefficient du terme du plus haut degré : $-4$

**À ne pas faire :** $K(x) = (x-1)^3 - x^3$ est de degré $3$ — $K(x) = -3x^2 + 3x - 1$ est de degré $2$. On réduit **avant** de lire le degré : les termes de plus haut degré peuvent s'annuler.

**À ne pas faire :** Le polynôme nul est de degré $0$ — Le polynôme nul n'a pas de degré ; un polynôme constant **non nul** est de degré $0$. C'est la convention : le degré exige $a_n \neq 0$.

6. VOCABULAIRE

## Terme constant, monôme, binôme, trinôme

CE QU'IL DIT

Chwaya vocabulaire. A zéro houwa le terme constant. A un x houwa le terme du premier degré, walla le terme en x. W a n x puissance n houwa le terme du plus haut degré. Koll terme wa7dou nsammiwh monôme. Polynôme du premier degré nsammiwh binôme, w polynôme du second degré nsammiwh trinôme. Rodd belek, le terme du plus haut degré mouch dima houwa elli mekteb loul fi l'écriture : ordonner, w chouf akbar puissance.

le terme en x . ولّا ، le terme du premier degré هو le terme constant . a un x هو vocabulaire . a zéro شويّة monôme . polynôme du وحدو نسمّيوه terme كل . le terme du plus haut degré هو w a n x puissance n le terme du ، رد بالك . trinôme نسمّيوه binôme ، w polynôme du second degré نسمّيوه premier degré . puissance أكبر شوف l'écriture : ordonner ، w مكتوب اللوّل في إلّي هو ديما موش plus haut degré

*Un peu de vocabulaire. A zéro est le terme constant. A un x est le terme du premier degré, ou terme en x. Et a n x puissance n est le terme du plus haut degré. Chaque terme pris seul s'appelle un monôme. Un polynôme du premier degré s'appelle un binôme, et un polynôme du second degré un trinôme. Attention, le terme du plus haut degré n'est pas toujours écrit en premier : ordonne, puis regarde la plus grande puissance.*

**Vocabulaire.** Pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ :

- $a_0$ s'appelle le **terme constant** ;
- $a_1 x$ s'appelle le **terme du premier degré**, ou le terme en $x$ ;
- $a_n x^n$ s'appelle le **terme de degré $n$**, ou le terme en $x^n$ : c'est aussi le **terme du plus haut degré** ;
- chacun des termes $a_0$, $a_1 x$, $\ldots$, $a_{n-1}x^{n-1}$ et $a_n x^n$ est appelé **monôme** ;
- tout polynôme du premier degré est appelé **binôme** (du premier degré) ;
- tout polynôme du second degré est appelé **trinôme** (du second degré).

Exemple : dans $T(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + x^6 + 1$, le terme du plus haut degré est $x^6$ — il n'est pas écrit en premier —, le terme en $x$ est $-x$ et le terme constant est $1$.

LES TERMES

$$\underbrace{a_n x^n}_{\text{plus haut degré}} + \cdots + \underbrace{a_1 x}_{\text{terme en } x} + \underbrace{a_0}_{\text{terme constant}}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Ordonner $T(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + x^6 + 1$ et lire son degré, son terme du plus haut degré et son terme constant.**

**Ordonner —** On écrit les termes par degrés décroissants.

$T(x) = x^6 + \frac{3}{4}x^2 - x + 1$

**Lire —** Le degré est $6$, le terme du plus haut degré est $x^6$ et le terme constant est $1$.

$d^\circ(T) = 6, \quad \text{terme du plus haut degré} : x^6, \quad \text{terme constant} : 1$

$T$ est de degré $6$

**À ne pas faire :** Le terme du plus haut degré de $2 - x + x^3$ est $2$ — C'est $x^3$. On cherche le plus grand exposant, pas le premier terme écrit : on ordonne d'abord.

7. DÉFINITION

## Opérations sur les polynômes

CE QU'IL DIT

F w g zouz polynômes w alpha réel. La somme f plus g, hiya f de x plus g de x. Le produit alpha f, houwa alpha fois f de x. W le produit f g, houwa f de x fois g de x. W ki y9oulou lek réduire et ordonner : tjamma3 les termes mta3 nafs le degré, w tektebhom men akbar puissance l asghar wa7da. W ki tatra7 polynôme, 7ottou bin parenthèses : le moins ybaddel le signe mta3 les termes el kol.

هو ، f de x plus g de x . le produit alpha f هي ، polynômes w alpha réel . la somme f plus g زوز f w g les تجمع : réduire et ordonner كي يقولولك f de x fois g de x . w هو ، alpha fois f de x . w le produit f g

حطّو بين ، polynôme كي تطرح w . لأصغر وحدة puissance تكتبهم من أكبر le degré ، w متاع نفس termes
. الكل les termes متاع le signe يبدّل parenthèses : le moins

*Soient f et g deux polynômes et alpha un réel. La somme f plus g, c'est f de x plus g de x. Le produit alpha f, c'est alpha fois f de x. Et le produit f g, c'est f de x fois g de x. Quand on te demande de réduire et ordonner : regroupe les termes de même degré, puis écris-les de la plus grande puissance à la plus petite. Et quand tu retranches un polynôme, mets-le entre parenthèses : le moins change le signe de tous ses termes.*

**Définition.** Soient $f$ et $g$ deux polynômes et $\alpha$ un réel.

- La **somme** de $f$ et $g$ est le polynôme $f+g$ défini pour tout réel $x$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Le **produit du polynôme $f$ par le réel $\alpha$** est le polynôme $\alpha f$ défini par $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.
- Le **produit des polynômes** $f$ et $g$ est le polynôme $fg$ défini par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.

« Réduire et ordonner », c'est regrouper les termes de même degré, puis les écrire par degrés décroissants. Par exemple, avec $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 1$ et $q(x) = x - 2$ :

$$f(x)\,q(x) = 2x^4 - 4x^3 - 5x^3 + 10x^2 + x^2 - 2x - x + 2 = 2x^4 - 9x^3 + 11x^2 - 3x + 2.$$

LES TROIS OPÉRATIONS

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$$

EXEMPLE TRAITÉ

$P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ et $Q(x) = 3x^3 - x$. **Réduire et ordonner $P+Q$ et $3P-2Q$.**

**La somme —** On regroupe les termes de même degré.

$(P+Q)(x) = 5x^3 - x^2 + x - 1$

**La combinaison —**

$3P(x) - 2Q(x) = 6x^3 - 3x^2 + 6x - 3 - 6x^3 + 2x$

Les termes en $x^3$ s'annulent.

$(3P-2Q)(x) = -3x^2 + 8x - 3$

$P+Q = 5x^3 - x^2 + x - 1$ ; et $3P - 2Q = -3x^2 + 8x - 3$

**À ne pas faire :** $g(x) - p(x) = -3x^2 + 7x - \sqrt{5} - 3x^2 - x - 1$ — $g(x) - p(x) = -3x^2 + 7x - \sqrt{5} - 3x^2 + x + 1$. Le signe moins devant $p(x)$ change le signe de **tous** ses termes : on met des parenthèses.

**À ne pas faire :** $(2x+1)^2 = 4x^2 + 1$ — $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$. Le double produit $2 \times 2x \times 1$ ne disparaît pas.

8. PROPRIÉTÉ

## Degré d'une somme, d'un produit

CE QU'IL DIT

Le degré mta3 le produit f g, houwa la somme des degrés : x puissance n fois x puissance p ta3ti x puissance, n plus p. W alpha f, ki alpha non nul, 3andou nafs le degré mta3 f. Ama la somme, rodd belek : le degré ynajjem yahbet, ki les termes du plus haut degré yetna77aw. Mathalan moins trois x carré w trois x carré, ki njam3ouhom yemchiw, w yo93ed polynôme de degré un.

le degré متاع f g le produit ، هو x puissance p fois x puissance n la somme des degrés : x تعطي
le : رد بالك ، la somme أما . f متاع le degré عندو نفس ، alpha non nul كي ، puissance , n plus p . w alpha f
degré ينجّم يهبط ، كي les termes du plus haut degré يتنحّاو . مثلا moins trois x carré w trois x carré ، كي
. polynôme de degré un يقعد w ، نجمعوهم يمشيو

*Le degré du produit f g est la somme des degrés : x puissance n fois x puissance p donne x puissance, n plus p. Et alpha f, avec alpha non nul, a le même degré que f. Pour la somme, attention : le degré peut baisser, quand les termes de plus haut degré s'annulent. Par exemple moins trois x carré et trois x carré s'annulent dans la somme, et il reste un polynôme de degré un.*

**Remarque.** Si $f$ et $g$ sont deux polynômes non nuls et $\alpha$ un réel non nul :

- $f+g$ est un polynôme ;
- $fg$ est un polynôme, et **le degré de $fg$ est égal à la somme des degrés** de $f$ et de $g$ ;
- $\alpha f$ est un polynôme, de **même degré** que $f$.

Le degré d'une somme, lui, peut **baisser** : par exemple, $g(x) = -3x^2 + 7x - \sqrt{5}$ et $p(x) = 3x^2 - x - 1$ sont de degré $2$, mais $g(x) + p(x) = 6x - \sqrt{5} - 1$ est de degré $1$.

Sans développer : $A(x) = (x^2 + x - 5)(2x^5 - 2x^3 + 1)$ est de degré $2 + 5 = 7$ ; $B(x) = (x^2 + 3)^5$ de degré $5 \times 2 = 10$.

DEGRÉ D'UN PRODUIT

$$d^\circ(fg) = d^\circ(f) + d^\circ(g), \qquad d^\circ(\alpha f) = d^\circ(f) \ \ (\alpha \neq 0)$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Déterminer, sans développer complètement, le degré de $C(x) = (x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 7)(x - 1) - (x^5 + 1)$.**

**Le produit —** Il est de degré $4 + 1 = 5$, de terme du plus haut degré $x^4 \times x = x^5$.

$$x^4 \times x = x^5$$

**La différence —** Les termes en $x^5$ s'annulent : on cherche le coefficient de $x^4$.

$$x^4 \times (-1) + (-2x^3) \times x = -3x^4$$

**Conclure —** Le coefficient de $x^4$ n'est pas nul : $C$ est de degré $4$.

$$d^\circ(C) = 4$$

$C$ est de degré 4

**À ne pas faire :** $d^\circ(fg) = d^\circ(f) \times d^\circ(g)$ — $d^\circ(fg) = d^\circ(f) + d^\circ(g)$. On multiplie les termes de plus haut degré : $x^n \times x^p = x^{n+p}$, les exposants s'ajoutent.

**À ne pas faire :** $d^\circ(f+g)$ est toujours le plus grand des deux degrés — Il peut être plus petit, quand les termes de plus haut degré s'annulent. $(-3x^2 + 7x - \sqrt{5}) + (3x^2 - x - 1)$ est de degré $1$.

---

9. DÉFINITION

## Racine d'un polynôme

CE QU'IL DIT

Alpha réel, n9oulou alpha racine, walla zéro, mta3 polynôme f, ken f de alpha égale zéro. Bech tthabbet, 3awedh x b alpha w a7seb : lezem tal9a zéro. Mathalan f de x égale x carré plus deux x moins trois : f de un égale un plus deux moins trois, ya3ni zéro, donc un racine. W rodd belek lel puissances : moins deux puissance quatre égale seize, positive, 5ater l'exposant pair.

x عوّض ، تثبّت باش . f de alpha égale zéro كان ، polynôme f متاع ، zéro ولّا ، alpha racine نقولو ، alpha réel
f de x égale x carré plus deux x moins trois : f de un égale un plus مثلا . zéro تلقى لازم : احسب alpha w بـ
puissances : moins deux puissance quatre لـ لل رد بالك zéro ، donc un racine . w يعني ، deux moins trois
. l'exposant pair خاطر ، égale seize ، positive

*On dit qu'un réel alpha est une racine, ou un zéro, d'un polynôme f si f de alpha égale zéro. Pour le vérifier, remplace x par alpha et calcule : tu dois trouver zéro. Par exemple f de x égale x carré plus deux x moins trois : f de un égale un plus deux moins trois, soit zéro, donc un est racine. Et attention aux puissances : moins deux puissance quatre égale seize, positif, car l'exposant est pair.*

**Définition.** On dit qu'un réel $\alpha$ est une **racine** ou un **zéro** d'un polynôme $f$ si $f(\alpha) = 0$.

Pour montrer que $\alpha$ est une racine, on **calcule** $f(\alpha)$ et on trouve $0$. Par exemple, pour $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $f(-1) = -4$, $f(1) = 0$ et $f(-3) = 0$ : $1$ et $-3$ sont des racines de $f$, $-1$ n'en est pas une. Pour $h(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2$, $h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - 2 + 2 = 0$.

Autre exemple : $g(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$ et $\alpha = -2$ :

$$g(-2) = 64 - 40 - 56 + 18 + 14 = 0.$$

RACINE (OU ZÉRO)

$\alpha$ racine de $f \iff f(\alpha) = 0$

EXEMPLE TRAITÉ

**Montrer que $\alpha = \frac{1}{2}$ est une racine de $h(x) = 8x^5 + 3x^2 - 1$.**

Puissances —

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Calculer —

$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{32} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = 0$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

**À ne pas faire :** $(-2)^4 = -16$ — $(-2)^4 = 16$. Une puissance paire d'un négatif est positive ; on garde les parenthèses autour de $-2$.

**À ne pas faire :** $1$ est racine de $f$ car $f(0) = 1$ — $\alpha$ est racine si $f(\alpha) = 0$. La racine est le réel qu'on remplace, pas la valeur obtenue.

---

10. APPLICATION

## Trouver des coefficients à partir de racines

CE QU'IL DIT

Ki polynôme fih des paramètres a w b, koll racine na3rfouha ta3tina équation. Mathalan P de x égale a x puissance quatre plus, a plus un, x cube moins, b plus neuf, x carré moins, deux b moins un, x plus quatorze, w un racine, donc P de un égale zéro : deux a moins trois b plus sept égale zéro. W moins deux racine, donc P de moins deux égale zéro : huit a moins trente-deux égale zéro. Nal9aw a égale quatre, w ba3d b égale cinq. W ki na3rfou P, nal9aw Q bel identification.

P de x égale a x مثلا . équation نعرفوها تعطينا racine كل ، des paramètres a w b فيه polynôme كي puissance quatre plus , a plus un , x cube moins , b plus neuf , x carré moins , deux b moins un , x plus quatorze ، w un racine ، donc P de un égale zéro : deux a moins trois b plus sept égale zéro . w moins deux racine ، donc P de moins deux égale zéro : huit a moins trente-deux égale zéro a égale نلقاو . identification بالـ Q نلقاو ، P نعرفو كي b égale cinq . w بعد quatre ، w .

*Quand un polynôme dépend de paramètres a et b, chaque racine connue donne une équation. Par exemple, P de x égale a x puissance quatre plus, a plus un, x cube moins, b plus neuf, x carré moins, deux b moins un, x plus quatorze, et un est racine, donc P de un égale zéro : deux a moins trois b plus sept égale zéro. Et moins deux est racine, donc P de moins deux égale zéro : huit a moins trente-deux égale zéro. On trouve a égale quatre, puis b égale cinq. Une fois P connu, on trouve Q par identification.*

Quand un polynôme dépend de paramètres, chaque racine connue donne une **équation** sur ces paramètres.

$P(x) = ax^4 + (a+1)x^3 - (b+9)x^2 - (2b-1)x + 14$, et l'on sait que $1$ et $-2$ sont des racines :

$$P(1) = 2a - 3b + 7 = 0 \qquad P(-2) = 8a - 32 = 0.$$

D'où $a = 4$, puis $b = 5$ : $P(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$ — on retrouve le polynôme $g$ vu plus haut, dont $-2$ est bien une racine.

Ensuite, $P(x) = (x^2 + x - 2)\,Q(x)$ avec $Q$ de degré $2$ : par identification, $Q(x) = 4x^2 + x - 7$.

UN SYSTÈME

$$P(1) = 0 \text{ et } P(-2) = 0 \iff \begin{cases} 2a - 3b + 7 = 0 \\ 8a - 32 = 0 \end{cases}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Avec $a = 4$ et $b = 5$, déterminer $Q$ tel que $4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14 = (x^2 + x - 2)\,Q(x)$ pour tout réel $x$.**

**Forme de Q —** Le degré de $Q$ est $4 - 2 = 2$, et le terme du plus haut degré de $Q$ est $4x^2$.

$$Q(x) = 4x^2 + bx + c$$

**Développer —**

$$(x^2 + x - 2)(4x^2 + bx + c) = 4x^4 + (b + 4)x^3 + (c + b - 8)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

**Identifier —**

$$b + 4 = 5, \quad -2c = 14 \iff b = 1, \quad c = -7$$

**Contrôler —** Les deux autres coefficients concordent.

$$c + b - 8 = -14, \quad c - 2b = -9$$

$$Q(x) = 4x^2 + x - 7$$

**À ne pas faire :** $P(-2) : -(2b - 1) \times (-2) = -4b + 2$ — $-(2b - 1) \times (-2) = 4b - 2$. Deux signes moins se multiplient : le produit est positif.

11. DÉFINITION

## Polynôme factorisable

CE QU'IL DIT

P factorisable par Q, ma3neha famma polynôme R b 7aythou P de x égale Q de x fois R de x, pour tout réel x. W bech tfactoriser, ebda dima bel 7wayej elli ta3refhom : facteur commun, regroupement, w les identités remarquables. Mathalan x puissance quatre moins trois x cube plus deux x carré : x carré facteur commun, w yo93ed x carré moins trois x plus deux, elli houwa, x moins un, fois, x moins deux.

P de x égale Q de x fois R de x ، pour tout réel x . w بحيث polynôme R معناها فمّا ، P factorisable par Q
facteur commun ، regroupement ، w les identités : إلّي تعرفها بالحاجات ديما ابدا ، factoriser تـ باش
x puissance quatre moins trois x cube plus deux x carré : x carré facteur commun ، w مثلا . remarquables
. x moins un , fois , x moins deux , هو إلّي ، x carré moins trois x plus deux يقعد

*P est factorisable par Q s'il existe un polynôme R tel que P de x égale Q de x fois R de x, pour tout réel x. Pour factoriser, commence toujours par les outils que tu connais : facteur commun, regroupement de termes, et identités remarquables. Par exemple x puissance quatre moins trois x cube plus deux x carré : x carré est en facteur, et il reste x carré moins trois x plus deux, qui vaut, x moins un, fois, x moins deux.*

**Définition.** Soient $P$ et $Q$ deux polynômes. On dit que $P$ est **factorisable par** $Q$ s'il existe un polynôme $R$ tel que, pour tout réel $x$,

$$P(x) = Q(x) \times R(x).$$

Les outils de factorisation déjà connus restent les premiers à essayer — **facteur commun**, **regroupement de termes**, **identités remarquables**.

- $A(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 - 3x + 2) = x^2(x-1)(x-2)$ ;
- $C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 = 2x^2(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(2x^2+3)$ ;
- $D(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3 = x^3(x+3) - (x+3) = (x+3)(x^3-1) = (x+3)(x-1)(x^2+x+1)$.

FACTORISABLE

$P$ factorisable par $Q \iff P(x) = Q(x) \times R(x)$ pour tout $x$

DIFFÉRENCE DE DEUX CUBES

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

EXEMPLE TRAITÉ

**Factoriser $G(x) = x^4 - 64$ et $H(x) = 9(x+1)^2 - 4(2x-1)^2$.**

G — Une différence de deux carrés, puis encore une.

$x^4 - 64 = (x^2-8)(x^2+8) = (x - 2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x^2+8)$

H — $9(x+1)^2 = (3(x+1))^2$ et $4(2x-1)^2 = (2(2x-1))^2$.

$H(x) = (3x+3-4x+2)(3x+3+4x-2)$

$H(x) = (5-x)(7x+1)$

$$G(x) = (x - 2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x^2+8), \quad H(x) = (5-x)(7x+1)$$

**À ne pas faire :** $x^2 + 8 = (x - \sqrt{8})(x+\sqrt{8})$ — $x^2+8$ ne se factorise pas : il est toujours strictement positif. L'identité $a^2 - b^2$ demande une **différence** ; $x^2 + 8$ n'a aucune racine.

**À ne pas faire :** $(3(x+1))^2 - (2(2x-1))^2 = (3x+3-4x-2)(\dots)$ — $3x+3-(4x-2) = -x+5$. Le moins porte sur tout le second facteur : on garde les parenthèses.

12. THÉORÈME

## Racine α et facteur (x − α)

CE QU'IL DIT

Hedhi ahamm 7aja fel chapitre. Ken alpha racine mta3 f, donc f factorisable par, x moins alpha : f de x égale, x moins alpha, fois g de x, w g de degré n moins un. W el 3aks zeda s7i7 : ken f factorisable par x moins alpha, alpha racine. Rodd belek lel signe : moins deux racine, le facteur houwa x plus deux, mouch x moins deux.

هاذي أهم حاجة في الـ chapitre . كان alpha racine متاع f de x : factorisable par , x moins alpha égale , x moins alpha , fois g de x ، w g de degré n moins un . w العكس زادة صحيح : كان f factorisable par x moins alpha ، alpha racine . رد بالك للـ le facteur ، signe : moins deux racine هو x plus deux ، x موش . moins deux

*C'est le résultat le plus important du chapitre. Si alpha est une racine de f, alors f est factorisable par, x moins alpha : f de x égale, x moins alpha, fois g de x, avec g de degré n moins un. Et la réciproque est vraie : si f est factorisable par x moins alpha, alors alpha est racine. Attention au signe : si moins deux est racine, le facteur est x plus deux, pas x moins deux.*

Soit $f$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et $\alpha$ un réel.

- Si $f$ est factorisable par $(x-\alpha)$, alors $\alpha$ est une racine de $f$ : $f(\alpha) = (\alpha-\alpha)\,g(\alpha) = 0$.
- **Réciproquement**, si $\alpha$ est une racine de $f$, alors $f$ est factorisable par $(x-\alpha)$ : il existe un polynôme $g$ **de degré** $n-1$ tel que, pour tout réel $x$,

$$f(x) = (x-\alpha)\,g(x).$$

La preuve au degré $3$ (ci-dessous) donne même $g$ : pour $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $P(x) - P(\alpha) = (x-\alpha)\left[ax^2 + (a\alpha+b)x + (a\alpha^2+b\alpha+c)\right]$. Si $P(\alpha) = 0$, c'est la factorisation cherchée — et ce sont des formules qu'on peut mettre dans un tableur : $b' = a\alpha + b$ et $c' = a\alpha^2 + b\alpha + c$.

RACINE ET FACTEUR

$$f(\alpha) = 0 \iff f(x) = (x-\alpha)\,g(x), \quad d^\circ(g) = n-1$$

DÉMONSTRATION

Au degré $3$ : $P(x) - P(\alpha) = a(x^3-\alpha^3) + b(x^2-\alpha^2) + c(x-\alpha)$. Or $x^3-\alpha^3 = (x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$ et $x^2-\alpha^2 = (x-\alpha)(x+\alpha)$. On met $(x-\alpha)$ en facteur : $P(x)-P(\alpha) = (x-\alpha)\left[a(x^2+\alpha x+\alpha^2) + b(x+\alpha) + c\right]$. Si $\alpha$ est racine, $P(\alpha)=0$, et le crochet est un polynôme $Q$ de degré $2$.

EXEMPLE TRAITÉ

$P(x) = 4x^3+5x^2-2x+1$ et $\alpha = 1$. **Calculer** $P(1)$, **puis** $b'$ **et** $c'$ **tels que** $P(x)-P(1) = (x-1)(4x^2+b'x+c')$.

**Colonne F —**

$P(1) = 4+5-2+1 = 8$

**Colonne G —**

$b' = a\alpha + b = 4 + 5 = 9$

**Colonne H —**

$c' = a\alpha^2 + b\alpha + c = 4 + 5 - 2 = 7$

**Contrôler —**

$(x-1)(4x^2+9x+7) = 4x^3 + 5x^2 - 2x - 7 = P(x) - 8$

$$P(1) = 8, \quad b' = 9, \quad c' = 7$$

**À ne pas faire :** $-2$ est racine, donc $f(x) = (x-2)\,g(x)$ — $-2$ est racine, donc $f(x) = (x+2)\,g(x)$. Le facteur est $x - \alpha$ : avec $\alpha = -2$, c'est $x - (-2) = x + 2$.

**À ne pas faire :** $f$ de degré $3$ et $f(x) = (x-\alpha)\,g(x)$ avec $g$ de degré $3$ — $g$ est de degré $3 - 1 = 2$. Les degrés s'ajoutent dans un produit : le degré de $g$ vaut $3 - 1 = 2$.

---

13. MÉTHODE

## Trouver le quotient par identification

CE QU'IL DIT

Kifech nal9aw Q ? Loul nthabtou elli P de alpha égale zéro. Ba3d nektbou la forme mta3 Q : le degré mte3ou yon9os b wa7ed, w le terme du plus haut degré ma3rouf. Ndévelopper, x moins alpha, fois Q de x, w nsawiw les coefficients mta3 nafs le degré m3a P. W fel e5er, el coefficient elli 93ed, nesta3mlouh bech nthabtou. Hedhi la méthode d'identification.

كيفاش نلقاو Q ؟ اللوّل نثبّتو إلّي P de alpha égale zéro بعد نكتبو la forme متاع le degré متاع Q : متاعو ينقص بواحد ، le terme du plus haut degré w معروف . نـ w ، x fois Q de ، x moins alpha ، développer نساويو les coefficients متاع نفس le degré مع w . P في الآخر ، الـ coefficient إلّي قعد ، نستعملوه باش نثبّتو . هاذي la méthode d'identification .

*Comment trouver Q ? D'abord on vérifie que P de alpha égale zéro. Puis on écrit la forme de Q : son degré baisse de un, et son terme du plus haut degré est connu. On développe, x moins alpha, fois Q de x, et on égale les coefficients de même degré avec ceux de P. À la fin, le coefficient qui reste sert de contrôle. C'est la méthode d'identification.*

Pour écrire $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ quand $\alpha$ est une racine :

1. **vérifier** que $P(\alpha) = 0$ ;
2. **écrire la forme** de $Q$ : son degré est $d^\circ(P) - 1$, et son terme du plus haut degré est connu ;
3. **développer** $(x-\alpha)\,Q(x)$ ;
4. **identifier** les coefficients des termes de même degré avec ceux de $P$ (égalité de deux polynômes) ;
5. **contrôler** avec le coefficient qui reste.

Exemple : $P(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 6$, $P(1) = 3 + 1 + 2 - 6 = 0$. On cherche $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ : en développant, $ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$, d'où $a = 3$, $b - a = 1$, $c = 6$ : $b = 4$, et le contrôle $c - b = 2$ concorde.

$$3x^3 + x^2 + 2x - 6 = (x-1)(3x^2 + 4x + 6).$$

LE DÉVELOPPEMENT À IDENTIFIER

$$(x-\alpha)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a\alpha)x^2 + (c - b\alpha)x - c\alpha$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Vérifier que $-2$ est une racine de $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$ et écrire $P(x) = (x+2)\,Q(x)$.**

**Vérifier —**

$P(-2) = -16 - 28 + 34 + 10 = 0$

**Forme de Q —**

$Q(x) = 2x^2 + bx + c$

**Développer —**

$(x+2)(2x^2 + bx + c) = 2x^3 + (b+4)x^2 + (c+2b)x + 2c$

**Identifier —**

$b + 4 = -7, \quad 2c = 10 \iff b = -11, \quad c = 5$

**Contrôler —**

$c + 2b = 5 - 22 = -17$

$$P(x) = (x+2)(2x^2 - 11x + 5)$$

À ne pas faire : $Q(x) = x^2 + bx + c$ pour $P(x) = 2x^3 - \ldots$ — $Q(x) = 2x^2 + bx + c$. Le terme du plus haut degré de $P$ est $x \times 2x^2$ : le coefficient 2 passe dans $Q$.

À ne pas faire : S'arrêter sans contrôler le dernier coefficient — Le coefficient restant doit concorder. S'il ne concorde pas, il y a une erreur de calcul — ou $\alpha$ n'est pas racine.

14. MÉTHODE

## La division suivant les puissances décroissantes

CE QU'IL DIT

Famma tari9a o5ra bech nal9aw Q : la division suivant les puissances décroissantes, kima division mta3 les nombres. Nchoufou ken les termes du plus haut degré : six x cube sur deux x, trois x carré. Natr7ou, deux x moins un, fois trois x carré, w n3awdou bel be9i : quatre x carré sur deux x, deux x. Ba3d dix x sur deux x, cinq. W ki yo93ed zéro, Q égale trois x carré plus deux x plus cinq.

les متاع division كيما ، Q : la division suivant les puissances décroissantes نلقاو باش أخرى طريقة فمّا deux x , نطرحو . les termes du plus haut degré : six x cube sur deux x ، trois x carré كان نشوفو . nombres

dix x sur deux x ، بعد . quatre x carré sur deux x ، deux x : نعاودو بالباقي moins un , fois trois x carré ، w
. zéro ، Q égale trois x carré plus deux x plus cinq كي يقعد cinq . w

*Il existe une autre façon de trouver Q : la division suivant les puissances décroissantes, comme la division des nombres. On ne regarde que les termes de plus haut degré : six x cube sur deux x, trois x carré. On retranche, deux x moins un, fois trois x carré, et on recommence avec le reste : quatre x carré sur deux x, deux x. Puis dix x sur deux x, cinq. Quand il reste zéro, Q égale trois x carré plus deux x plus cinq.*

Une deuxième méthode pour trouver $Q$ : la **division suivant les puissances décroissantes**, disposée comme la division des nombres.

Exemple : $P(x) = 6x^3 + x^2 + 8x - 5$, chercher $Q$ tel que $P(x) = (2x - 1)\,Q(x)$.

1. On ne s'occupe que des termes de plus haut degré : $6x^3 \div 2x = 3x^2$. On retranche $(2x - 1) \times 3x^2 = 6x^3 - 3x^2$ : il reste $4x^2 + 8x - 5$.
2. $4x^2 \div 2x = 2x$. On retranche $(2x - 1) \times 2x = 4x^2 - 2x$ : il reste $10x - 5$.
3. $10x \div 2x = 5$. On retranche $(2x - 1) \times 5 = 10x - 5$ : il reste $0$.

$$6x^3 + x^2 + 8x - 5 = (2x - 1)(3x^2 + 2x + 5).$$

La méthode vue plus haut s'appelle, elle, la **méthode d'identification** : les deux donnent le même $Q$.

UN EXEMPLE DE DIVISION

$$6x^3 + x^2 + 8x - 5 = (2x - 1)(3x^2 + 2x + 5)$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Par la division suivant les puissances décroissantes, trouver $Q$ tel que $2x^3 - 7x^2 - 17x + 10 = (x + 2)\,Q(x)$.**

1er terme — $2x^3 \div x = 2x^2$ ; on retranche $(x + 2) \times 2x^2 = 2x^3 + 4x^2$.
$2x^3 - 7x^2 - 17x + 10 - (2x^3 + 4x^2) = -11x^2 - 17x + 10$

2e terme — $-11x^2 \div x = -11x$ ; on retranche $(x + 2) \times (-11x) = -11x^2 - 22x$.
$-11x^2 - 17x + 10 - (-11x^2 - 22x) = 5x + 10$

3e terme — $5x \div x = 5$ ; on retranche $5x + 10$ : il reste $0$.
$5x + 10 - (5x + 10) = 0$

$$Q(x) = 2x^2 - 11x + 5$$

À ne pas faire : $4x^2 + 8x - 5 - (4x^2 - 2x) = 6x - 5$ — $4x^2 + 8x - 5 - (4x^2 - 2x) = 10x - 5$. On **retranche** chaque produit : tous ses signes changent.

15. THÉORÈME

## Deux racines, puis k racines

CE QU'IL DIT

Ki ykounou 3andna zouz racines alpha w beta, f factorisable par, x moins alpha, fois, x moins beta, w g ywalli de degré n moins deux. W b sifa 3amma, k racines, g de degré n moins k. Mathalan P de x égale trois x cube moins treize x carré moins onze x plus cinq : moins un w cinq racines, donc P de x égale, x plus un, fois, x moins cinq, fois, trois x moins un.

يولّي racines alpha w beta ، f factorisable par , x moins alpha , fois , x moins beta ، w g كي يكونو عندنا زوز P de x égale trois x cube مثلا . k racines ، g de degré n moins k ، بصفة عامّة de degré n moins deux . w moins treize x carré moins onze x plus cinq : moins un w cinq racines ، donc P de x égale , x plus un , . fois , x moins cinq , fois , trois x moins un

*Quand on a deux racines alpha et bêta, f est factorisable par, x moins alpha, fois, x moins bêta, et g est de degré n moins deux. Plus généralement, avec k racines, g est de degré n moins k. Par exemple, pour P de x égale trois x cube moins treize x carré moins onze x plus cinq, moins un et cinq sont racines, donc P de x égale, x plus un, fois, x moins cinq, fois, trois x moins un.*

Soit $f$ un polynôme de degré $n$.

- Pour $n \geq 2$, si $\alpha$ et $\beta$ sont deux racines (distinctes) de $f$, alors $f$ est factorisable par $(x-\alpha)(x-\beta)$ : il existe un polynôme $g$ **de degré $n-2$** tel que $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,g(x)$.
- Plus généralement, pour $n \geq 3$, **on admet** que si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (avec $k \leq n$) sont des racines (distinctes) de $f$, alors il existe un polynôme $g$ de degré $n-k$ tel que

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\,g(x).$$

Exemple : $P(x) = 3x^3 - 13x^2 - 11x + 5$, avec $P(-1) = -3 - 13 + 11 + 5 = 0$ et $P(5) = 375 - 325 - 55 + 5 = 0$. Comme $(x+1)(x-5) = x^2 - 4x - 5$, on cherche $P(x) = (x^2 - 4x - 5)(3x + c)$ : le terme constant donne $-5c = 5$, donc $c = -1$, et $P(x) = (x+1)(x-5)(3x-1)$.

DEUX RACINES

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \Rightarrow f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,g(x), \quad d^\circ(g) = n-2$$

DÉMONSTRATION

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux racines distinctes de $F$. $\alpha$ est racine, donc $F(x) = (x-\alpha)\,G_1(x)$. Alors $0 = F(\beta) = (\beta-\alpha)\,G_1(\beta)$, et $\beta - \alpha \neq 0$ : $\beta$ est une racine de $G_1$, donc $G_1(x) = (x-\beta)\,G(x)$.

EXEMPLE TRAITÉ

**Vérifier que $2$ et $-3$ sont des racines de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$, puis écrire $P(x) = (x-2)(x+3)\,Q(x)$.**

Vérifier —

$$P(2) = 16 + 16 - 16 - 10 - 6 = 0, \quad P(-3) = 81 - 54 - 36 + 15 - 6 = 0$$

Le produit —

$(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$

**Identifier —** $Q(x) = x^2 + bx + c$ ; le terme en $x^3$ donne $b + 1 = 2$, le terme constant $-6c = -6$.

$b = 1, \quad c = 1$

**Contrôler —**

$(x^2 + x - 6)(x^2 + x + 1) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$

$$P(x) = (x-2)(x+3)(x^2+x+1)$$

**À ne pas faire :** $Q$ est de degré $3$ dans $x^4 + \cdots = (x-2)(x+3)\,Q(x)$ — $Q$ est de degré $4 - 2 = 2$. Chaque racine connue fait baisser le degré de $1$.

---

16. PROPRIÉTÉ

## Au plus n racines

CE QU'IL DIT

Polynôme de degré n, 3andou au plus n racines : degré trois, au plus trois, degré quatre, au plus quatre. Au plus, ya3ni ynajjem ykoun 3andou a9al, walla ma 3andou 7atta racine. W natija mohimma : ken polynôme de degré au plus n 3andou n plus un racines distinctes, ykoun le polynôme nul. Biha nthabtou égalité blech ma ndévelopper.

au plus n racines : degré trois ، au plus trois ، degré quatre ، au plus quatre عندو ، polynôme de degré n polynôme de degré au كان : نتيجة مهمّة racine . w حتى ولّا ما عندو أقل ، يعني ينجّم يكون عندو ، . au plus . développer بلاش ما نـ égalité نثبّتو بيها . le polynôme nul يكون ، n plus un racines distinctes عندو plus n

*Un polynôme de degré n a au plus n racines : degré trois, au plus trois, degré quatre, au plus quatre. Au plus, cela veut dire qu'il peut en avoir moins, ou aucune. Et une conséquence importante : si un polynôme de degré au plus n a n plus un racines distinctes, c'est le polynôme nul. Cela permet de prouver une égalité sans développer.*

- Un polynôme de degré $3$ admet **au plus trois** racines ; un polynôme de degré $4$, au plus quatre.
- **On admet** qu'un polynôme de degré $n$ ($n \geq 2$) admet **au plus** $n$ racines.

Conséquence : si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ admet $n + 1$ racines distinctes, alors $P$ est le **polynôme nul**.

Cela permet de prouver une égalité sans développer : soient $a$, $b$ et $c$ trois réels distincts et

$$f(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

On a $f(a) = 1 + 0 + 0 = 1$, et de même $f(b) = f(c) = 1$. Le polynôme $f - 1$, de degré au plus $2$, a trois racines distinctes $a$, $b$, $c$ : il est nul, et $f(x) = 1$ pour tout réel $x$.

NOMBRE DE RACINES

$$d^\circ(P) = n \Rightarrow P \text{ a au plus } n \text{ racines}$$

DÉMONSTRATION

Au degré $3$ : si $\alpha$ est racine, $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ avec $d^\circ(Q) = 2$. Toute autre racine de $P$ annule $Q$, et un polynôme de degré $2$ a au plus deux racines. $P$ en a donc au plus $1 + 2 = 3$.

EXEMPLE TRAITÉ

**$Q(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$. Vérifier que $1$ et $-2$ sont des racines, puis trouver toutes les racines de $Q$.**

**Vérifier —**

$$Q(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0, \quad Q(-2) = 16 - 16 + 2 - 2 = 0$$

**Factoriser —** $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$, et l'identification donne le quotient.

$$Q(x) = (x-1)(x+2)(x^2 + x + 1)$$

**Le reste —** $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$ : pas de racine.

$$\Delta = -3 < 0$$

Les racines de $Q$ sont $-2$ et $1$

**À ne pas faire :** Un polynôme de degré $4$ a toujours quatre racines — Il en a **au plus** quatre ; il peut en avoir moins, ou aucune. $x^4 + 2x^3 - x - 2$ n'en a que deux, et $x^4 + 1$ aucune.

17. MÉTHODE

## Résoudre P(x) = 0 avec une racine apparente

CE QU'IL DIT

Bech t7ell P de x égale zéro, ki P de degré trois : lawwej 3la racine apparente. Jarreb zéro, un, moins un, deux, moins deux. Ki tal9a alpha, tfactoriser P b x moins alpha, w yo93edlek second degré, t7ellou b delta. Mathalan x cube plus x carré moins deux : un racine, w yo93ed x carré plus deux x plus deux, delta négatif. Donc solution wa7da : un.

باش تحلّ P de x égale zéro ، كي P de degré trois : لوّج على racine apparente . جرّب ، moins un ، un ، zéro
تحلّو بـ ، second degré يقعدلك x moins alpha ، w بـ factoriser P تـ ، alpha تلقى كي . deux ، moins deux
x carré plus deux x plus deux ، delta يقعد x cube plus x carré moins deux : un racine ، w مثلا . delta
. un : وحدة négatif . donc solution

*Pour résoudre P de x égale zéro quand P est de degré trois : cherche une racine apparente. Essaie zéro, un, moins un, deux, moins deux. Quand tu trouves alpha, factorise P par x moins alpha, et il reste un second degré, que tu résous avec delta. Par exemple x cube plus x carré moins deux : un est racine, et il reste x carré plus deux x plus deux, de delta négatif. Une seule solution : un.*

Pour résoudre $P(x) = 0$ quand $P$ est de degré $3$ (ou plus) :

1. **chercher une racine apparente** : on essaie les petites valeurs simples, $0, 1, -1, 2, -2\ldots$ ;

2. **factoriser** $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ par identification ;
3. **résoudre** $Q(x) = 0$ — au degré $2$, avec le discriminant ;
4. **réunir** les solutions.

Exemple : $x^3 + x^2 - 2 = 0$. On voit que $1 + 1 - 2 = 0$ : $1$ est racine, et $x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$. Le discriminant de $x^2 + 2x + 2$ est $4 - 8 = -4 < 0$ : $S = \{1\}$.

Pour résoudre $f(x) = g(x)$, on étudie $h = f - g$. Avec $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 6$ et $g(x) = x^2 - 2x - 4$, $f(2) = g(2) = -4$, donc $2$ est racine de $h(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x-2)(x+1)(x-5)$, et $f(x) = g(x) \iff x \in \{-1; 2; 5\}$.

PRODUIT NUL

$$P(x) = 0 \iff (x-\alpha)\,Q(x) = 0 \iff x = \alpha \text{ ou } Q(x) = 0$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Résoudre $4x^3 + x^2 - 11x + 6 = 0$, sachant que $1$ et $-2$ en sont des solutions.**

**Vérifier —**

$4 + 1 - 11 + 6 = 0, \quad -32 + 4 + 22 + 6 = 0$

**Factoriser —** $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ ; le quotient est de degré $1$, de la forme $4x + c$, et le terme constant donne $-2c = 6$.

$4x^3 + x^2 - 11x + 6 = (x-1)(x+2)(4x-3)$

**Résoudre —**

$4x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}$

$$S = \left\{-2; \tfrac{3}{4}; 1\right\}$$

**À ne pas faire :** $x^3 + x^2 - 2 = 0$ : $S = \{1; -1 \pm i\}$ — $S = \{1\}$ dans $\mathbb{R}$. Quand son discriminant est négatif, le facteur du second degré n'a aucune racine réelle.

**À ne pas faire :** Résoudre $f(x) = g(x)$ en cherchant les racines de $f$, puis celles de $g$ — On cherche les racines de $h = f - g$. Une solution de $f(x) = g(x)$ n'annule ni $f$ ni $g$ en général : $f(2) = g(2) = -4$.

18. MÉTHODE

## Signe d'un polynôme et inéquations

CE QU'IL DIT

Bech ta3ref le signe mta3 polynôme, walla t7ell inéquation : 7ott koll chay fi membre wa7ed, w ba3d factoriser el kol. A3mel tableau de signes, ligne l koll facteur, w el règle des signes. W facteur du second degré ma 3andouch racine, yo93ed dima b nafs le signe mta3 le coefficient de x carré. W fel e5er rodd belek lel crochets : inégalité stricte, les racines ma yod5louch.

باش تعرف le signe متاع polynôme ، ولّا تحلّ inéquation : حطّ كل شي في membre واحد ، بعد factoriser w
الكل . اعمل ligne ، tableau de signes لكل w ، facteur الـ facteur du second degré w . règle des signes ما
عندوش racine ، يقعد ديما بنفس le signe متاع w . le coefficient de x carré في الآخر رد بالك للـ : crochets
. ما يدخلوش inégalité stricte ، les racines

*Pour étudier le signe d'un polynôme, ou résoudre une inéquation : mets tout dans un membre, puis factorise complètement. Fais un tableau de signes, une ligne par facteur, et applique la règle des signes. Un facteur du second degré sans racine garde toujours le signe de son coefficient de x carré. Et à la fin, attention aux crochets : pour une inégalité stricte, les racines sont exclues.*

Pour étudier le signe de $P(x)$, ou résoudre $P(x) > 0$ :

1. **tout ramener dans un membre** : $f(x) > g(x) \iff f(x) - g(x) > 0$ ;
2. **factoriser** complètement, à l'aide des racines ;
3. dresser le **tableau de signes** : une ligne par facteur, puis la règle des signes ;
4. **lire** l'ensemble des solutions, avec les bons crochets.

Exemple : $P(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$, $P(4) = 0$, et $P(x) = (x-4)(x^2-2) = (x-4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Avec les racines rangées, $-\sqrt{2} < \sqrt{2} < 4$ :

| $x$ | $]-\infty;-\sqrt{2}[$ | $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ | $]\sqrt{2};4[$ | $]4;+\infty[$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Un facteur du second degré **sans racine** garde le signe de son coefficient de $x^2$ : il ne change pas le signe, il se « traverse ».

FACTORISATION COMPLÈTE

$$x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = (x-4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^3 - 3x < 2 - 3x^2$.**

**Un membre —**
$2x^3 - 3x < 2 - 3x^2 \iff 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 < 0$

**Racine —** $1$ est une racine apparente : $2 + 3 - 3 - 2 = 0$.
$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x-1)(2x^2 + 5x + 2)$

**Factoriser —** $2x^2 + 5x + 2$ a pour racines $-2$ et $-\dfrac{1}{2}$.
$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x-1)(x+2)(2x+1)$

**Signes —** De gauche à droite, avec les racines $-2 < -\dfrac{1}{2} < 1$ : $-, +, -, +$.
$S = ]-\infty;-2[ \cup ]-\frac{1}{2};1[$

$$S = ]-\infty; -2[ \cup ]-\tfrac{1}{2}; 1[$$

**À ne pas faire :** $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 > 0 \iff x + 1 > 0$, sans justifier — $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x^2 + x + 3)$ et $x^2 + x + 3 > 0$ car $\Delta = -11 < 0$. On n'efface un facteur que si l'on sait qu'il est strictement positif.

**À ne pas faire :** $P(x) > 0$ sur $[4; +\infty[$ — $P(x) > 0$ sur $]4; +\infty[$. En $4$, $P(4) = 0$ : pour une inégalité stricte, le crochet est ouvert.

---

19. ACTIVITÉ

## Somme et produit de trois racines

CE QU'IL DIT

Ki a x cube plus b x carré plus c x plus d 3andou trois racines alpha, beta w gamma, nektbouh a fois, x moins alpha, fois, x moins beta, fois, x moins gamma. Ndévelopper w nidentifier : la somme alpha plus beta plus gamma égale moins b sur a, w le produit alpha beta gamma égale moins d sur a. Hakka na7sbou barcha 7wayej 3la les racines, blech ma nal9awhom.

a fois , x نكتبوه ، trois racines alpha ، beta w gamma عندو a x cube plus b x carré plus c x plus d كي identifier : la somme alpha نـ développer w نـ . moins alpha , fois , x moins beta , fois , x moins gamma هكّا . plus beta plus gamma égale moins b sur a ، w le produit alpha beta gamma égale moins d sur a نحسبو برشا حاجات على les racines ، بلاش ما نلقاوهم .

*Quand a x cube plus b x carré plus c x plus d a trois racines alpha, bêta et gamma, on l'écrit a fois, x moins alpha, fois, x moins bêta, fois, x moins gamma. On développe et on identifie : la somme alpha plus bêta plus gamma vaut moins b sur a, et le produit alpha bêta gamma vaut moins d sur a. On calcule ainsi beaucoup de choses sur les racines sans les trouver.*

Supposons que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) admette trois racines distinctes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Alors $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, et en développant puis en identifiant :

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}.$$

On en tire, sans calculer les racines : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$ et, si aucune n'est nulle, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$.

Application : trois réels de somme $5$, de produit $-1$ et tels que $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$ seraient les racines de $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$. Or $1$ en est une racine apparente, et $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x-1)(x^2 - 4x - 1)$ : ils existent, ce sont $1$, $2 - \sqrt{5}$ et $2 + \sqrt{5}$.

DÉVELOPPER POUR IDENTIFIER

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = a\left[x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma\right]$$

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXEMPLE TRAITÉ

**$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ admet trois racines distinctes : $\alpha$, $\beta$ et une troisième $\gamma$. Sans les calculer, donner leur somme, leur produit, et la somme de leurs produits deux à deux.**

**Coefficients —**

$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -5, \quad d = -6$

**Formules —** La somme vaut $-\dfrac{b}{a} = -2$, le produit $-\dfrac{d}{a} = 6$, et la somme des produits deux à deux $\dfrac{c}{a} = -5$.

$\alpha + \beta + \gamma = -2, \quad \alpha\beta\gamma = 6, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -5$

**Contrôle —** $-1$ est racine apparente, et $P(x) = (x+1)(x+3)(x-2)$ : les racines $-3, -1, 2$ ont bien pour somme $-2$ et pour produit $6$.

$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$

somme $-2$, produit $6$, somme des produits deux à deux $-5$

**À ne pas faire :** $\alpha\beta\gamma = \dfrac{d}{a}$ — $\alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a}$. Au degré $3$, en développant, le terme constant vaut $-a$ fois le produit des trois racines : ce produit vaut donc $-\dfrac{d}{a}$.

20. ACTIVITÉ

## Polynômes symétriques

CE QU'IL DIT

Polynôme symétrique, les coefficients yet9rew kif kif men ezzouz jhet. Fi degré trois, a x cube plus b x carré plus b x plus a, moins un dima racine apparente : moins a plus b moins b plus a, zéro. W fi degré quatre, nediviser 3la x carré, w n7ottou X égale x plus un sur x : x carré plus un sur x carré twalli X carré moins deux, w yarja3lna second degré.

degré trois ، a x cube plus b x في . يتقراو كيف كيف من الزوز جهات polynôme symétrique ، les coefficients في racine apparente : moins a plus b moins b plus a ، zéro . w ديما carré plus b x plus a ، moins un X تولّي X égale x plus un sur x : x carré plus un sur x carré نحطّو x carré ، w على diviser نـ ، degré quatre . second degré يرجعلنا carré moins deux ، w

*Dans un polynôme symétrique, les coefficients se lisent pareil dans les deux sens. Au degré trois, a x cube plus b x carré plus b x plus a, moins un est toujours racine apparente : moins a plus b moins b plus a, zéro. Au degré quatre, on divise par x carré, et on pose grand X égale x plus un sur x : x carré plus un sur x carré devient X carré moins deux, et on retombe sur un second degré.*

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme dont les coefficients — $a$, $b$, $b$, $a$ au degré $3$, $2$, $-9$, $14$, $-9$, $2$ au degré $4$ — se lisent de la même façon dans les deux sens.

**Degré 3.** $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$ ($a \neq 0$) : $f(-1) = -a + b - b + a = 0$, donc $-1$ est une racine apparente, et

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = (x+1)\left(ax^2 + (b-a)x + a\right).$$

Le nombre de solutions de $f(x) = 0$ : le trinôme $ax^2 + (b-a)x + a$ a pour discriminant $(b-a)^2 - 4a^2 = (b-3a)(b+a)$, et il n'admet $-1$ pour racine que si $b = 3a$.

- si $(b-3a)(b+a) < 0$ : une seule solution, $-1$ ;
- si $b = 3a$ : $f(x) = a(x+1)^3$, une seule solution, $-1$ ;
- si $b = -a$ : le trinôme vaut $a(x-1)^2$, deux solutions, $-1$ et $1$ ;
- si $(b-3a)(b+a) > 0$ : trois solutions distinctes.

**Degré 4.** Pour $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$ : $0$ n'est pas solution, on divise par $x^2$ et l'on regroupe :

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

On pose $X = x + \dfrac{1}{x}$ ; comme $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = X^2 - 2$, l'équation devient $2X^2 - 9X + 10 = 0$, de solutions $X = 2$ et $X = \dfrac{5}{2}$. Puis $x + \dfrac{1}{x} = 2$ donne $x = 1$, et $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$ donne $x = 2$ ou $x = \dfrac{1}{2}$ : $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 1; 2\right\}$.

SYMÉTRIQUE DE DEGRÉ 3

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = (x+1)\left(ax^2 + (b-a)x + a\right)$$

SYMÉTRIQUE DE DEGRÉ 4

$$X = x + \tfrac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \tfrac{1}{x^2} = X^2 - 2$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Résoudre $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$ et préciser le signe de $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 2$.**

**Factoriser —** $a = 2, b = 5$ : $b - a = 3$.

$f(x) = (x+1)(2x^2 + 3x + 2)$

**Le trinôme —** Son discriminant est négatif : il est toujours strictement positif.

$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$

**Conclure —** $f(x)$ a le signe de $x + 1$ : négatif avant $-1$, positif après.

$S = \{-1\}$

$$S = \{-1\}$$

À ne pas faire : $x^2+\dfrac{1}{x^2}=X^2$ — $x^2+\dfrac{1}{x^2}=X^2-2$. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$ : le double produit vaut $2$.

---

21. DÉFINITION

## Fonctions rationnelles

CE QU'IL DIT

F w g zouz polynômes : x yemchi l f de x sur g de x, hedhi fonction rationnelle. Mo3arrfa ki le dénominateur mouch zéro : D houwa les réels elli g de x différent de zéro fihom. Ba3d nfactoriser el fou9 w el louta, w nsimplifier. Rodd belek : D nal9awh 9bal la simplification, mouch ba3dha. W nsimplifier ken des facteurs, 3omrek ma tsimplifier des termes.

le dénominateur معرّفة كي . fonction rationnelle هاذي ، f de x sur g de x يمشي لـ polynômes : x زوز f w g
موش D : zéro هو les réels إلّي différent de zéro g de x . بعد نـ factoriser الفوق w اللوطة ، w نـ
simplifier . رد بالك D : نلقاوه قُبْلْ la simplification ، موش بعدها . w نـ simplifier كان des facteurs ، عمرك ما تـ
. simplifier des termes

*Soient f et g deux polynômes : la fonction qui à x associe f de x sur g de x est une fonction rationnelle. Elle est définie quand le dénominateur n'est pas nul : D est l'ensemble des réels x tels que g de x est différent de zéro. Ensuite, on factorise le numérateur et le dénominateur, et on simplifie. Attention : D se détermine avant la simplification, pas après. Et on ne simplifie que des facteurs, jamais des termes.*

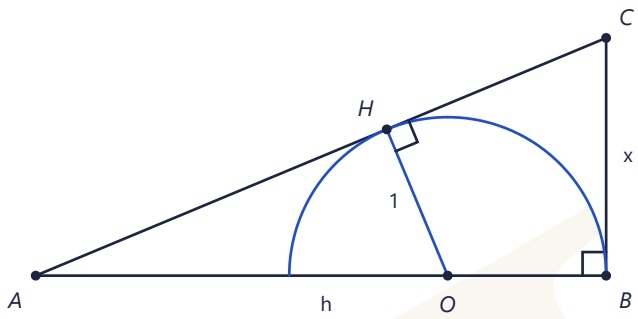
**Définition.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions polynômes. La fonction $h : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est appelée **fonction rationnelle**.

Elle est définie là où le dénominateur ne s'annule pas : son ensemble de définition est $D=\{x\in\mathbb{R}\,;\,g(x)\neq 0\}$. On **factorise** numérateur et dénominateur, puis on **simplifie** pour $x\in D$.

Exemple : $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ et $g(x)=x^2+x-6$. $f(2)=0$ et $f(x)=(x-2)(x-1)(x+1)$ ; $g(x)=(x-2)(x+3)$. Donc $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$ et, pour $x\in D$,

$$h(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x+3}.$$

Autre exemple, sur la figure : $ABC$ est rectangle en $B$, $AB=h$, $BC=x$, et le demi-cercle de centre $O$, de rayon $1$, est tangent à $(AC)$ en $H$. On a $CH=CB=x$ et $\tan\widehat{BAC}=\dfrac{x}{h}=\dfrac{OH}{AH}=\dfrac{1}{AH}$, d'où $AH=\dfrac{h}{x}$ ; Pythagore dans $ABC$ donne $\left(\dfrac{h}{x}+x\right)^2=h^2+x^2$, c'est-à-dire $h=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ — une fonction rationnelle de $x$.




Le demi-cercle de centre O et de rayon 1 est tangent à (AC) en H ; AB = h et BC = x.

*Un triangle ABC rectangle en B : A à gauche, B en bas à droite, C au-dessus de B. Un demi-cercle de centre O, posé sur le segment [AB], a pour rayon 1 et passe par B ; il est tangent à la droite (AC) au point H, et le rayon [OH] est perpendiculaire à (AC). On note AB = h et BC = x.*

FONCTION RATIONNELLE

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \,;\, g(x) \neq 0\}$$

LA HAUTEUR H EN FONCTION DE X

$$h = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Dans la figure, avec $h = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$, peut-on avoir $h = 2$ ? $h = 3$ ? $h = \dfrac{9}{4}$ ?**

**Premier cas —**

$\frac{2x^2}{x^2-1} = 2 \iff 2x^2 = 2x^2 - 2 \iff 0 = -2$

Impossible : on ne peut pas avoir $h = 2$.

**Deuxième cas —**

$2x^2 = 3x^2 - 3 \iff x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3}$

**Troisième cas —**

$8x^2 = 9x^2 - 9 \iff x^2 = 9 \iff x = 3$

$$h = 2 \text{ impossible; } h = 3 \text{ pour } x = \sqrt{3}; \; h = \tfrac{9}{4} \text{ pour } x = 3$$

**À ne pas faire :** $h(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+3}$, donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ — $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$. L'ensemble de définition se lit sur le dénominateur **avant** simplification : $g(2) = 0$.

**À ne pas faire :** $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x - \dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ pour $x \neq 1$. On ne simplifie que des **facteurs**, jamais des termes : on factorise d'abord.

22. ACTIVITÉ

## Décomposer pour calculer une somme

CE QU'IL DIT

Un sur, x fois, x plus un, nektbouha un sur x moins un sur, x plus un : réduis au même dénominateur w tal9aha. W biha na7sbou la somme un sur un fois deux, plus un sur deux fois trois, 7atta un sur n fois, n plus un : koll terme yetna77a m3a elli ba3dou, w ma yo93ed ken un moins un sur, n plus un, ya3ni n sur, n plus un.

un sur x moins un sur , x plus un : réduis au même dénominateur w نكتبوها ، un sur , x fois , x plus un un sur n fois , n plus حتى ، la somme un sur un fois deux ، plus un sur deux fois trois بيها نحسبو w . تلقاها . n sur , n plus un يعني ، un moins un sur , n plus un ما يقعد كان w ، بعدو اللي مع يتنحّى terme كل : un

*Un sur, x fois, x plus un, s'écrit un sur x moins un sur, x plus un : réduis au même dénominateur pour le vérifier. Cela permet de calculer la somme un sur un fois deux, plus un sur deux fois trois, jusqu'à un sur n fois, n plus un : chaque terme s'annule avec le suivant, et il ne reste que un moins un sur, n plus un, soit n sur, n plus un.*

Une fonction rationnelle se décompose parfois en somme de fractions plus simples, ce qui permet de calculer des sommes « en cascade ».

1) Pour tout réel $x$ différent de $0$ et de $-1$ :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

(On cherche $a$ et $b$ tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$ : par identification $a + b = 0$ et $a = 1$.)

Alors, en écrivant chaque terme ainsi, tout se simplifie sauf le premier et le dernier :

$$S_1 = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

2) De même $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$, ce qui conduit à $S_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

3) Enfin $\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right)$ : la somme se simplifie encore en cascade, et $S_3 = \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.

LA DÉCOMPOSITION

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

LA SOMME $S_1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

EXEMPLE TRAITÉ

**Calculer $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5}$ avec la décomposition vue ci-dessus.**

**Décomposer —**

$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$

**Simplifier —** Les termes intermédiaires s'annulent deux à deux.

$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}$

**À ne pas faire :** $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Avec le $+$, on obtiendrait $\frac{2x+1}{x(x+1)}$ : on vérifie en réduisant au même dénominateur.

## À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

*Voici ce qu'il faut retenir :*

1. Un polynôme : $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ; avec $a_n \neq 0$, son degré est $n$. Le polynôme nul n'a pas de degré.

   > Polynôme houwa a n x puissance n plus ... plus a zéro, w ki a n mouch zéro, le degré n. Le polynôme nul ma 3andouch degré.
   > *Un polynôme s'écrit a n x puissance n plus ... plus a zéro, et si a n n'est pas nul, son degré est n. Le polynôme nul n'a pas de degré.*

2. Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls ; deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

   > Polynôme nul, ya3ni les coefficients el kol nuls ; w zouz polynômes égaux, ya3ni nafs les coefficients.
   > *Un polynôme est nul si tous ses coefficients sont nuls ; deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients.*

3. $d^\circ(fg) = d^\circ(f) + d^\circ(g)$ ; le degré d'une somme peut baisser.

   > Le degré mta3 le produit houwa la somme des degrés, w le degré mta3 la somme ynajjem yahbet.

> *Le degré d'un produit est la somme des degrés, et le degré d'une somme peut baisser.*

4. $\alpha$ est racine de $f$ si $f(\alpha) = 0$.

   > Alpha racine, ken f de alpha égale zéro.
   > *Alpha est racine si f de alpha égale zéro.*

5. $f(\alpha) = 0 \iff f(x) = (x - \alpha)\, g(x)$, avec $d^\circ(g) = n - 1$ ; $g$ s'obtient par identification ou par division.

   > Alpha racine, ya3ni f de x égale, x moins alpha, fois g de x, w g de degré n moins un ; nal9awh bel identification walla bel division.
   > *Alpha est racine signifie f de x égale, x moins alpha, fois g de x, avec g de degré n moins un ; on le trouve par identification ou par division.*

6. Un polynôme de degré $n$ a au plus $n$ racines.

   > Polynôme de degré n 3andou au plus n racines.
   > *Un polynôme de degré n a au plus n racines.*

7. Équation ou inéquation de degré $3$ : racine apparente, factorisation, puis discriminant et tableau de signes.

   > Fi degré trois : racine apparente, factorisation, w ba3d delta w tableau de signes.
   > *Au degré trois : racine apparente, factorisation, puis delta et tableau de signes.*

8. Fonction rationnelle $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ : définie si $g(x) \neq 0$ ; on factorise, puis on simplifie des facteurs.

   > Fonction rationnelle f de x sur g de x, mo3arrfa ki g de x mouch zéro ; factoriser, w ba3d simplifier des facteurs.
   > *Une fonction rationnelle f de x sur g de x est définie quand g de x n'est pas nul ; on factorise, puis on simplifie des facteurs.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : 9bal ma te9ra le degré, réduire. Ki tal9a racine alpha, factoriser b x moins alpha, w Q tal9ah bel identification. W fi fonction rationnelle, D 9bal la simplification. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : قُبَلْ ما تقرا réduire ، le degré . كي تلقى factoriser ، racine alpha بـ x moins
. exercices لـ لله يا . la simplification قُبَلْ fonction rationnelle ، D في identification . w تلقاه بالـ alpha ، w Q

*Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : avant de lire le degré, réduis. Quand tu trouves une racine alpha, factorise par x moins alpha, et trouve Q par identification. Et pour une fonction rationnelle, cherche D avant de simplifier. Allons aux exercices.*

## Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

*Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.*

## QUESTION 1 · NOTION DE FONCTION

kifech nal9a l'ensemble de définition | comment trouver l'ensemble de définition d'une fonction | ensemble de definition chnowa | c'est quoi l'ensemble de définition

CE QU'IL RÉPOND

L'ensemble de définition houwa les réels x elli f de x mawjouda fihom. Polynôme mo3arref 3la IR kemel. Ki famma quotient, le dénominateur ma ykounech zéro ; w ki famma racine carrée, elli ta7tha lezem positive walla nulle.

l'ensemble de définition هو les réels x إلّي f de x موجودة فيهم . polynôme معرّف على IR كامل . كي فمّا
. nulle ولّا positive اللي تحتها لازم ، racine carrée كي فمّا w ؛ zéro ما يكونش quotient ، le dénominateur

*L'ensemble de définition est formé des réels x pour lesquels f de x existe. Un polynôme est défini sur tout IR. Avec un quotient, le dénominateur ne doit pas être nul ; avec une racine carrée, ce qui est dessous doit être positif ou nul.*

## QUESTION 2 · NOTION DE FONCTION

chnowa el far9 bin image w antécédent | différence entre image et antécédent | c'est quoi un antécédent | antecedent ma fhemtech

CE QU'IL RÉPOND

Ki y égale f de x : y houwa l'image de x, w x houwa un antécédent de y. L'image ta7sebha : t3awedh x. Ama l'antécédent tlawwej 3lih : t7ell l'équation f de x égale y. W réel wa7ed ynajjem ykoun 3andou barcha antécédents.

كي y égale f de x : y هو l'image de x ، w x هو un antécédent de y . l'image تحسبها : تعوّض x . أما
. antécédents برشا عندو يكون ينجّم واحد l'équation f de x égale y . w réel تحلّ : تلوّج عليه l'antécédent

*Si y égale f de x : y est l'image de x, et x est un antécédent de y. L'image se calcule en remplaçant x. L'antécédent se cherche en résolvant l'équation f de x égale y. Et un même réel peut avoir plusieurs antécédents.*

## QUESTION 3 · FONCTION POLYNÔME

chnowa polynome | c'est quoi un polynôme | définition d'un polynôme | polynome ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

CE QU'IL RÉPOND

Polynôme hiya fonction mo3arrfa 3la IR, tetekteb a n x puissance n plus a n moins un x puissance n moins un plus ... plus a un x plus a zéro. Les réels a n, ..., a zéro houma les coefficients. Ya3ni somme mta3 termes, koll terme réel fois x puissance entier naturel.

a n x puissance n plus a n moins un x puissance n moins تتكتب ، IR معرّفة على fonction هي polynôme
عتاع somme يعني . les coefficients هوما un plus ... plus a un x plus a zéro . les réels a n ، ... ، a zéro
. terme réel fois x puissance entier naturel كل ، termes

*Un polynôme est une fonction définie sur IR qui s'écrit a n x puissance n plus a n moins un x puissance n moins un plus ... plus a un x plus a zéro. Les réels a n, ..., a zéro sont ses coefficients. C'est une somme de termes, chacun égal à un réel fois x puissance un entier naturel.*

---

### QUESTION 4 · RECONNAÎTRE UN POLYNÔME

valeur absolue de x polynome walla le | est-ce que valeur absolue de x est un polynôme | racine de x c'est un polynôme | 3lech racine de x mouch polynome

CE QU'IL RÉPOND

La. Valeur absolue de x, racine de x, walla un sur x, ma yetektbouch a n x puissance n plus ... plus a zéro : mouch polynômes. Ama x fois racine de deux, walla deux tiers x carré, polynômes : la racine walla la fraction 3la nombre, mouch 3la x.

موش : a n x puissance n plus ... plus a zéro ما يتكتبوش ، un sur x ولّا ، valeur absolue de x ، racine de x . لا
على la fraction ولّا deux tiers x carré ، polynômes : la racine ولّا ، x fois racine de deux أما . polynômes
. x على موش ، nombre

*Non. Valeur absolue de x, racine de x, ou un sur x ne s'écrivent pas sous la forme a n x puissance n plus ... plus a zéro : ce ne sont pas des polynômes. En revanche x fois racine de deux, ou deux tiers x carré, sont des polynômes : la racine ou la fraction porte sur un nombre, pas sur x.*

---

### QUESTION 5 · FONCTION POLYNÔME

c'est quoi le polynôme nul | polynome nul chnowa | quand est-ce qu'on dit polynôme nul | polynome nul ma3neha

CE QU'IL RÉPOND

Le polynôme nul houwa elli les coefficients mte3ou el kol nuls : ya3ti zéro pour tout réel x. W rodd belek, polynôme yetna77a fi no9ta walla zouz mouch dharouri nul : x carré moins cinq x plus six yetna77a fi deux w trois, ama ya3ti six fi zéro.

، رد بالك zéro pour tout réel x . w يعطي : nuls متاعو الكل les coefficients هو إلّي le polynôme nul
، deux w trois في يتنحّى nul : x carré moins cinq x plus six ضروري موش زوز ولّا نقطة في يتنحّى polynôme
. zéro في six يعطي أما

*Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls : il vaut zéro pour tout réel x. Attention, un polynôme qui s'annule en un ou deux points n'est pas forcément nul : x carré moins cinq x plus six s'annule en deux et en trois, mais vaut six en zéro.*

## QUESTION 6 · ÉGALITÉ DE DEUX POLYNÔMES

kifech na3ref zouz polynomes egaux | quand deux polynômes sont-ils égaux | deux polynômes égaux c'est quoi la condition | égalité de deux polynômes

CE QU'IL RÉPOND

Zouz polynômes égaux pour tout réel x, ken 3andhom nafs le degré, w les coefficients mta3 nafs le degré égaux. Mouch yekfi yetsewew fi no9ta walla zouz : lezem pour tout x. W hedha houwa asès la méthode d'identification.

زوج polynômes égaux pour tout réel x ، كان عندهم نفس le degré ، w les coefficients نفس le degré متاع نفس égaux . موش يكفي يتساواو في نقطة ولّا زوج : لازم pour tout x . w هذا هو أساس la méthode d'identification .

*Deux polynômes sont égaux pour tout réel x s'ils ont le même degré et si les coefficients des termes de même degré sont égaux. Il ne suffit pas qu'ils coïncident en un ou deux points : il faut l'égalité pour tout x. C'est la base de la méthode d'identification.*

## QUESTION 7 · TROUVER LE QUOTIENT PAR IDENTIFICATION

chnowa la méthode d'identification | comment faire une identification | kifech nidentifier les coefficients | méthode d'identification c'est quoi

CE QU'IL RÉPOND

Tekteb les deux membres kif kif : tdévelopper ejjiha elli fiha les inconnues a, b, c, w ba3d tsawi les coefficients mta3 nafs le degré : x cube m3a x cube, x carré m3a x carré, 7atta le terme constant. Yo5rojlek système bsit. W el coefficient elli yo93ed, esta3mlou bech tthabbet.

تكتب les deux membres كيف كيف : تـ développer الجهة إلّي فيها les inconnues a ، b ، c ، w بعد تساوي les coefficients متاع نفس le degré : x cube ، x carré مع x cube ، x carré مع le terme constant ، حتى يخرجلك . système بسيط . w الـ coefficient إلّي يقعد ، استعملو باش تثبّت .

*Tu développes le membre qui contient les inconnues a, b, c, puis tu égales les coefficients de même degré : x cube avec x cube, x carré avec x carré, jusqu'au terme constant. Tu obtiens un système simple. Et le coefficient qui reste sert de contrôle.*

## QUESTION 8 · DEGRÉ D'UN POLYNÔME

kifech na3ref le degré d'un polynôme | comment trouver le degré | c'est quoi le degré d'un polynôme | le degré chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Le degré houwa akbar puissance mta3 x elli el coefficient mte3ha mouch zéro. Ama 9bal, réduire w ordonner : sa3at les termes el kbar yetna77aw. Mathalan, x moins un, au cube, moins x cube, degré

deux mouch trois.

: réduire w ordonner ، أما قْبَلْ . zéro موش متاعها coefficient الـ إلّي x متاع puissance أكبر هو le degré
. trois موش x moins un , au cube , moins x cube ، degré deux , مثلا . الكبار يتنحّاو les termes ساعات

*Le degré est la plus grande puissance de x dont le coefficient n'est pas nul. Mais d'abord, réduis et ordonne : parfois les termes les plus hauts s'annulent. Par exemple, x moins un, au cube, moins x cube, est de degré deux, pas trois.*

---

### QUESTION 9 · DEGRÉ D'UN POLYNÔME

le polynôme nul a quel degré | degre polynome nul chnowa | degré d'un polynôme constant | polynome constant degre zero

CE QU'IL RÉPOND

Polynôme constant non nul, kif cinq walla racine de deux, le degré mte3ou zéro. Ama le polynôme nul, ma 3andouch degré : hedhi convention, 5ater ma famma 7atta coefficient mouch zéro.

ما ، le polynôme nul أما . zéro متاعو racine de deux ، le degré ولّا cinq كيف ، polynôme constant non nul
. zéro موش coefficient حتى فمّا ما خاطر ، convention هاذي : degré عندوش

*Un polynôme constant non nul, comme cinq ou racine de deux, est de degré zéro. Le polynôme nul, lui, n'a pas de degré : c'est une convention, car il n'a aucun coefficient non nul.*

---

### QUESTION 10 · TERME CONSTANT, MONÔME, BINÔME, TRINÔME

chnowa le terme du plus haut degré | c'est quoi le terme de plus haut degré | terme du plus haut degre kifech nal9ah | le coefficient dominant

CE QU'IL RÉPOND

Le terme du plus haut degré houwa a n x puissance n, elli fih akbar puissance. Mouch dima houwa el mekteb loul : ordonner loul. W le coefficient mte3ou a n, houwa elli y9arrer le degré.

: موش ديما هو المكتوب اللوّل . puissance أكبر فيه إلّي ، a n x puissance n هو le terme du plus haut degré
. le degré هو إلّي يقرّر ، a n متاعو w le coefficient . اللوّل ordonner

*Le terme du plus haut degré est a n x puissance n, celui qui porte la plus grande puissance. Il n'est pas toujours écrit en premier : ordonne d'abord. Et son coefficient a n est celui qui fixe le degré.*

---

### QUESTION 11 · TERME CONSTANT, MONÔME, BINÔME, TRINÔME

chnowa el far9 bin monôme binôme w trinôme | différence entre monôme binôme et trinôme | c'est quoi un trinôme | binome ma3neha

CE QU'IL RÉPOND

Monôme houwa terme wa7ed, kif a k x puissance k. Binôme houwa polynôme du premier degré, a x plus b. W trinôme houwa polynôme du second degré, a x carré plus b x plus c.

monôme هو terme واحد ، كيف binôme . a k x puissance k هو w . a x plus b ، polynôme du premier degré
trinôme هو a x carré plus b x plus c ، polynôme du second degré .

*Un monôme est un seul terme, comme a k x puissance k. Un binôme est un polynôme du premier degré, a x plus b. Et un trinôme est un polynôme du second degré, a x carré plus b x plus c.*

---

### QUESTION 12 · DEGRÉ D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT

le degré d'un produit de polynômes | degre mta3 produit kifech | degré de f fois g | degré quand on multiplie deux polynômes

CE QU'IL RÉPOND

Le degré mta3 le produit houwa la somme des degrés : 5ater x puissance n fois x puissance p ta3ti x puissance, n plus p. Mathalan polynôme de degré deux fois polynôme de degré cinq, degré sept. W mouch le produit des degrés.

le degré متاع le produit هو la somme des degrés : خاطر x puissance n fois x puissance p تعطي x
موش polynôme de degré deux fois polynôme de degré cinq ، degré sept . w مثلا . puissance , n plus p
. le produit des degrés

*Le degré d'un produit est la somme des degrés : x puissance n fois x puissance p donne x puissance, n plus p. Par exemple un polynôme de degré deux fois un polynôme de degré cinq donne un degré sept. Ce n'est pas le produit des degrés.*

---

### QUESTION 13 · DEGRÉ D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT

le degré d'une somme de polynômes | degre mta3 la somme | degré de la somme f plus g | pourquoi le degré de la somme baisse

CE QU'IL RÉPOND

Le degré mta3 la somme ma yfoutech akbar degré. Ama ynajjem yahbet : ki les termes du plus haut degré yetna77aw. Mathalan moins trois x carré plus sept x, w trois x carré moins x : la somme six x, degré un.

le degré متاع la somme ما يفوتش أكبر degré . أما ينجّم يهبط : كي les termes du plus haut degré يتنحّاو . مثلا
. moins trois x carré plus sept x ، w trois x carré moins x : la somme six x ، degré un

*Le degré d'une somme ne dépasse pas le plus grand des deux degrés. Mais il peut baisser, quand les termes de plus haut degré s'annulent. Par exemple moins trois x carré plus sept x, et trois x carré moins x : la somme vaut six x, de degré un.*

---

### QUESTION 14 · RACINE D'UN POLYNÔME

---

c'est quoi une racine d'un polynôme | racine mta3 polynome chnowa | définition racine d'un polynôme | racine ou zéro d'un polynôme c'est quoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(\alpha) = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Alpha racine, walla zéro, mta3 polynôme f, ken f de alpha égale zéro. Ya3ni ki t3awedh x b alpha, tal9a zéro. Mouch la valeur elli tal9aha, houwa alpha elli 3awadhtou.

alpha racine ، وﻻّ zéro ، متاع polynôme f ، كان f de alpha égale zéro . يعني كي تعوّض x بـ alpha ، تلقى zéro . موش la valeur إلّي تلقاها ، هو alpha إلّي عوّضتو .

*Alpha est une racine, ou un zéro, du polynôme f si f de alpha égale zéro. Autrement dit, en remplaçant x par alpha, on trouve zéro. La racine est le réel qu'on remplace, pas la valeur obtenue.*

---

## QUESTION 15 · RACINE D'UN POLYNÔME

kifech nthabbet elli alpha racine | comment montrer qu'un réel est une racine | vérifier qu'un nombre est racine d'un polynôme | montrer que alpha est une racine

CE QU'IL RÉPOND

3awedh x b alpha fi P de x, w a7seb bel behi : ken l9it zéro, alpha racine. Rodd belek lel puissances mta3 les nombres négatifs : moins deux puissance quatre égale seize, w moins deux au cube égale moins huit.

عوّض x بـ alpha في w ، P de x احسب بالباهي : كان لقيت alpha racine ، zéro . رد بالك للـ les puissances متاع . nombres négatifs : moins deux puissance quatre égale seize ، w moins deux au cube égale moins huit

*Remplace x par alpha dans P de x, et calcule soigneusement : si tu trouves zéro, alpha est racine. Attention aux puissances des nombres négatifs : moins deux puissance quatre égale seize, et moins deux au cube égale moins huit.*

---

## QUESTION 16 · RÉSOUDRE P(X) = 0 AVEC UNE RACINE APPARENTE

chnowa racine apparente | comment trouver une racine apparente | racine evidente kifech nal9aha | c'est quoi une racine évidente

CE QU'IL RÉPOND

Racine apparente hiya racine tben bel 3in : jarreb zéro, un, moins un, deux, moins deux. Mathalan ken la somme mta3 les coefficients zéro, un racine. W fi polynôme symétrique de degré trois, moins un dima racine.

la كان مثلا . zéro ، un ، moins un ، deux ، moins deux جرّب : تبان بالعين racine هي racine apparente ديما polynôme symétrique de degré trois ، moins un في les coefficients zéro ، un racine . w متاع somme . racine

*Une racine apparente se voit à l'œil : essaie zéro, un, moins un, deux, moins deux. Par exemple, si la somme des coefficients est nulle, un est racine. Et pour un polynôme symétrique de degré trois, moins un est toujours racine.*

---

### QUESTION 17 · POLYNÔME FACTORISABLE

chnowa factorisable par | c'est quoi un polynôme factorisable | P factorisable par Q ma3neha | que veut dire factorisable

CE QU'IL RÉPOND

P factorisable par Q, ma3neha famma polynôme R b 7aythou P de x égale Q de x fois R de x, pour tout réel x. Mathalan x carré moins un factorisable par x moins un, 5ater ysawi, x moins un, fois, x plus un.

مثلا . P de x égale Q de x fois R de x ، pour tout réel x بحيث polynôme R معناها فمّا ، P factorisable par Q . x moins un , fois , x plus un , خاطر يساوي ، x carré moins un factorisable par x moins un

*P est factorisable par Q s'il existe un polynôme R tel que P de x égale Q de x fois R de x, pour tout réel x. Par exemple x carré moins un est factorisable par x moins un, car il vaut, x moins un, fois, x plus un.*

---

### QUESTION 18 · RACINE A ET FACTEUR (X − A)

3lech ki alpha racine nfactoriser b x moins alpha | pourquoi factoriser par x moins alpha | racine alpha et factorisation par x moins alpha | x moins alpha facteur kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f(\alpha) = 0 \iff f(x) = (x - \alpha)\, g(x)$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater P de x moins P de alpha dima factorisable par x moins alpha : x puissance k moins alpha puissance k fiha x moins alpha. W ken alpha racine, P de alpha égale zéro, donc P de x nafsha égale, x moins alpha, fois Q de x, w Q de degré n moins un.

factorisable par x moins alpha : x puissance k moins alpha puissance ديما P de x moins P de alpha خاطر égale , x moins نفسها alpha racine ، P de alpha égale zéro ، donc P de x كان x moins alpha . w فيها k . alpha , fois Q de x ، w Q de degré n moins un

*Parce que P de x moins P de alpha est toujours factorisable par x moins alpha : chaque x puissance k moins alpha puissance k contient le facteur x moins alpha. Si alpha est racine, P de alpha égale zéro, donc P de x lui-même égale, x moins alpha, fois Q de x, avec Q de degré n moins un.*

---

### QUESTION 19 · RACINE A ET FACTEUR (X − A)

racine négative le facteur x plus deux walla x moins deux | racine négative quel facteur | si la racine est négative le facteur | racine negative nektbou x plus

CE QU'IL RÉPOND

Le facteur dima x moins alpha. Ken alpha égale moins deux, x moins, moins deux, ya3ni x plus deux. Donc racine négative ta3ti facteur b plus.

le facteur ديما x moins alpha . كان moins deux , x moins ، alpha égale moins deux ، يعني . x plus deux
donc racine négative تعطي facteur بـ plus .

*Le facteur est toujours x moins alpha. Si alpha égale moins deux, c'est x moins, moins deux, c'est-à-dire x plus deux. Une racine négative donne donc un facteur avec un plus.*

## QUESTION 20 · LA DIVISION SUIVANT LES PUISSANCES DÉCROISSANTES

kifech na3mel la division des polynômes | comment faire la division suivant les puissances décroissantes | division euclidienne polynome | diviser un polynôme par un autre

CE QU'IL RÉPOND

Kif division mta3 les nombres : tchouf ken les termes du plus haut degré. Six x cube sur deux x, trois x carré : tektbou fi Q, tatra7 le produit, w t3awed bel be9i, 7atta yo93ed zéro. El résultat houwa nafsou elli tal9ah bel identification.

كيف division متاع les nombres : تشوف كان trois x ، les termes du plus haut degré . six x cube sur deux x
carré : تكتبو في Q ، تطرح w ، le produit تعاود بالباقي ، حتى يقعد zéro . الـ résultat هو نفسو إلّي تلقاه بالـ identification .

*Comme la division des nombres : tu ne regardes que les termes de plus haut degré. Six x cube sur deux x donne trois x carré : tu l'écris dans Q, tu retranches le produit, et tu recommences avec le reste, jusqu'à obtenir zéro. Le résultat est le même que par identification.*

## QUESTION 21 · DEUX RACINES, PUIS K RACINES

ki 3andi zouz racines kifech nfactoriser | factoriser avec deux racines | deux racines alpha et beta factorisation | zouz racines connues

CE QU'IL RÉPOND

Ken alpha w beta zouz racines, f factorisable par, x moins alpha, fois, x moins beta. Tdévelopper ezzouz facteurs, w ba3d tal9a g bel identification, w le degré mte3ou n moins deux.

كان alpha w beta زوز x moins beta , fois , x moins alpha , f factorisable par ، racines . تـ développer الزوز
facteurs ، w بعد تلقى g بالـ le degré ، w identification متاعو n moins deux .

*Si alpha et bêta sont deux racines, f est factorisable par, x moins alpha, fois, x moins bêta. Développe ces deux facteurs, puis trouve g par identification : il est de degré n moins deux.*

## QUESTION 22 · AU PLUS N RACINES

9addech men racine 3and polynome | combien de racines a un polynôme | nombre maximum de racines | un polynôme de degré 3 a combien de racines

CE QU'IL RÉPOND

Polynôme de degré n 3andou au plus n racines. Degré trois, au plus trois. Ama au plus bark : ynajjem ykoun 3andou a9al, walla ma 3andou 7atta racine : x carré plus un, de degré deux, ma 3andou 7atta racine.

polynôme de degré n عندو au plus trois ، degré trois . au plus n racines . أما au plus برك : ينجّم يكون عندو
أقل ، ولّا ما عندو حتى de degré deux ، x carré plus un : racine ، ما عندو حتى racine .

*Un polynôme de degré n a au plus n racines. Au degré trois, au plus trois. Mais au plus seulement : il peut en avoir moins, ou même aucune : x carré plus un, de degré deux, n'en a pas.*

---

## QUESTION 23 · RÉSOUDRE P(X) = 0 AVEC UNE RACINE APPARENTE

kifech n7ell equation de degré trois | comment résoudre une équation de degré 3 | résoudre x cube | equation du troisieme degre

CE QU'IL RÉPOND

Lawwej 3la racine apparente alpha, w factoriser : P de x égale, x moins alpha, fois Q de x. Q de degré deux, t7ellou b delta. W les solutions houma alpha w les racines mta3 Q.

racine apparente alpha ، w factoriser : P de x égale , x moins alpha , fois Q de x . Q de degré لوّج على
deux ، تحلّو بـ w les solutions . delta هوما alpha w les racines متاع Q .

*Cherche une racine apparente alpha, puis factorise : P de x égale, x moins alpha, fois Q de x. Q est de degré deux, tu le résous avec delta. Les solutions sont alpha et les racines de Q.*

---

## QUESTION 24 · SIGNE D'UN POLYNÔME ET INÉQUATIONS

kifech na3ref le signe d'un polynôme | comment étudier le signe d'un polynôme | tableau de signes d'un polynôme | signe mta3 polynome de degre trois

CE QU'IL RÉPOND

Factoriser loul, w ba3d a3mel tableau de signes : ligne l koll facteur, w el règle des signes fel e5er. Facteur du second degré blech racine, ye5ou dima le signe mta3 le coefficient de x carré.

factoriser اللوّل ، w بعد اعمل tableau de signes : ligne لكل w ، facteur الـ règle des signes في الآخر .
du second degré بلاش racine ، ياخذ ديما le signe متاع le coefficient de x carré .

*Factorise d'abord, puis fais un tableau de signes : une ligne par facteur, et la règle des signes à la fin. Un facteur du second degré sans racine a toujours le signe de son coefficient de x carré.*

---

## QUESTION 25 · SIGNE D'UN POLYNÔME ET INÉQUATIONS

kifech n7ell inéquation de degré trois | comment résoudre une inéquation avec un polynôme | inequation f de x superieur a g de x | résoudre une inéquation polynôme

CE QU'IL RÉPOND

7ott koll chay fi membre wa7ed : f de x supérieur à g de x, ya3ni f de x moins g de x supérieur à zéro. Factoriser, tableau de signes, w ba3d e9ra les intervalles. Inégalité stricte, crochets ouverts 3and les racines.

حطّ كل شي في membre واحد : f de x supérieur à g de x ، يعني f de x moins g de x supérieur à zéro . factoriser بعد اقرا ، tableau de signes ، w les intervalles . inégalité stricte ، crochets ouverts عند les racines .

*Mets tout dans un membre : f de x supérieur à g de x revient à f de x moins g de x supérieur à zéro. Factorise, fais le tableau de signes, puis lis les intervalles. Pour une inégalité stricte, les crochets sont ouverts aux racines.*

## QUESTION 26 · SOMME ET PRODUIT DE TROIS RACINES

la somme des racines alpha plus beta plus gamma | alpha beta gamma sans calculer les racines | somme et produit de trois racines | produit des trois racines alpha beta gamma

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki a x cube plus b x carré plus c x plus d 3andou trois racines alpha, beta, gamma : la somme moins b sur a, le produit moins d sur a, w alpha beta plus beta gamma plus gamma alpha égale c sur a. Nal9awhom bel identification m3a a fois, x moins alpha, fois, x moins beta, fois, x moins gamma.

كي a x cube plus b x carré plus c x plus d عندو trois racines alpha ، beta ، gamma : la somme moins b sur a ، le produit moins d sur a ، w alpha beta plus beta gamma plus gamma alpha égale c sur a . نلقاوهم بالـ identification مع a fois , x moins alpha , fois , x moins beta , fois , x moins gamma .

*Quand a x cube plus b x carré plus c x plus d a trois racines alpha, bêta, gamma : la somme vaut moins b sur a, le produit moins d sur a, et alpha bêta plus bêta gamma plus gamma alpha vaut c sur a. On les obtient par identification avec a fois, x moins alpha, fois, x moins bêta, fois, x moins gamma.*

## QUESTION 27 · POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

chnowa polynome symetrique | c'est quoi un polynôme symétrique | comment résoudre un polynôme symétrique | symétrique de degré quatre kifech

CE QU'IL RÉPOND

Nsammiw hakka polynôme kima a x cube plus b x carré plus b x plus a : les coefficients a, b, b, a yet9rew kif kif men ezzouz jhet. Fi degré trois, moins un dima racine. W fi degré quatre, nediviser 3la x

carré w n7ottou X égale x plus un sur x, yarja3 second degré.

نسمّيو هكّا polynôme كيما a ، b ، b ، a : les coefficients a x cube plus b x carré plus b x plus a يتقراو كيف
كيف من الزوز جهات . في moins un ، ديما degré trois . w racine في degré quatre ، نـ diviser على w carré x
نحطّو X égale x plus un sur x ، يرجع second degré .

*On appelle ainsi un polynôme comme a x cube plus b x carré plus b x plus a : ses coefficients a, b, b, a se lisent pareil dans les deux sens. Au degré trois, moins un est toujours racine. Au degré quatre, on divise par x carré et on pose X égale x plus un sur x : on retombe sur un second degré.*

---

### QUESTION 28 · FONCTIONS RATIONNELLES

chnowa fonction rationnelle | c'est quoi une fonction rationnelle | définition fonction rationnelle | fonction rationnelle ensemble de définition

CE QU'IL RÉPOND

Fonction rationnelle hiya quotient mta3 zouz polynômes : f de x sur g de x. Mo3arrfa ki g de x mouch zéro : t7ell g de x égale zéro w tna77i les solutions men IR.

: zéro موش g de x معرّفة كي . polynômes : f de x sur g de x متاع زوز quotient هي fonction rationnelle
. IR من les solutions تنحّي g de x égale zéro w تحلّ

*Une fonction rationnelle est un quotient de deux polynômes : f de x sur g de x. Elle est définie quand g de x n'est pas nul : on résout g de x égale zéro et on retire ces solutions de IR.*

---

### QUESTION 29 · FONCTIONS RATIONNELLES

kifech nsimplifi fonction rationnelle | comment simplifier une fraction de polynômes | simplifier f de x sur g de x | simplification quotient de polynomes

CE QU'IL RÉPOND

Factoriser el fou9 w el louta, w ba3d na77i les facteurs el mochtarkin. Ken des facteurs, 3omrek ma tna77i des termes. W rodd belek : l'ensemble de définition tal9ah 9bal la simplification, w les valeurs interdites yo93dou interdites.

des termes . عمرك ما تنحّي ، des facteurs كان . المشتركين les facteurs بعد نحّي w ، اللوطة w الفوق factoriser
. interdites يقعدو la simplification ، w les valeurs interdites تلقاه قُبَلْ l'ensemble de définition : رد بالك w

*Factorise le numérateur et le dénominateur, puis retire les facteurs communs. Seulement des facteurs, jamais des termes. Et attention : l'ensemble de définition se cherche avant la simplification, et les valeurs interdites le restent.*

---

### QUESTION 30 · DÉCOMPOSER POUR CALCULER UNE SOMME

kifech na7seb la somme un sur n fois n plus un | comment calculer la somme 1 sur 1x2 plus 1 sur 2x3

somme télescopique | décomposer une fraction rationnelle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

CE QU'IL RÉPOND

Nektbou un sur, k fois, k plus un, un sur k moins un sur, k plus un. Ki njam3ou, koll terme yetna77a m3a elli ba3dou, w ma yo93ed ken le premier w le dernier : un moins un sur, n plus un, ya3ni n sur, n plus un.

نكتبو un sur , k fois , k plus un ، un sur k moins un sur , k plus un كي نجمعو ، كل terme يتنحّى مع اللي . n sur , n plus un يعني ، le premier w le dernier : un moins un sur , n plus un بعدو ، w ما يقعد كان

*On écrit un sur, k fois, k plus un, comme un sur k moins un sur, k plus un. En ajoutant, chaque terme s'annule avec le suivant, et il ne reste que le premier et le dernier : un moins un sur, n plus un, soit n sur, n plus un.*

## Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE

### Distance de freinage

La distance de freinage $d$ (en mètres) d'une voiture qui roule à $v$ km/h est modélisée par $d = 0{,}2\,v + \dfrac{v^2}{150}$. Quelle distance parcourt-elle après le freinage si elle roule à $120$ km/h ?

Donne la distance en mètres.

**Réponse attendue :** `120`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace $v$ par la vitesse donnée dans la formule.
2. Le carré de la vitesse vaut $14400$, et $14400 \div 150 = 96$.

CORRECTION

$d = 0{,}2 \times 120 + \frac{120^2}{150}$

$d = 24 + \frac{14400}{150} = 24 + 96 = 120$

La voiture parcourt $120$ mètres après le freinage.

PIÈGES ANTICIPÉS

`24.8` → Le second terme est $\dfrac{v^2}{150}$ : on élève $120$ au carré avant de diviser.

EXERCICE 2 · BASE

### L'aire du rectangle

L'aire du rectangle $AMNP$ inscrit dans le quart de cercle de rayon $3$ est $S(x) = x\sqrt{9 - x^2}$, pour $x \in ]0; 3[$. Calculer $S(\sqrt{2})$.

Donne la valeur exacte.

**Réponse attendue :** `sqrt(14)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace $x$ par $\sqrt{2}$ : $(\sqrt{2})^2 = 2$.
2. $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{2 \times 7}$.

CORRECTION

$S(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{9 - 2} = \sqrt{2} \times \sqrt{7}$

$S(\sqrt{2}) = \sqrt{14}$

$S(\sqrt{2}) = \sqrt{14} \approx 3{,}74.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(7)` → Il manque le facteur $x = \sqrt{2}$ devant la racine.

---

EXERCICE 3 · BASE

## Le volume de la boîte

On découpe un carré de côté $x$ cm à chaque coin d'une plaque carrée de $60$ cm de côté, puis on replie les bords. Le volume de la boîte est $V(x) = x(60 - 2x)^2$. Calculer $V(10)$, en cm³.

Donne le volume en cm³.

**Réponse attendue :** `16000`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $60 - 2 \times 10 = 40$ : la base est un carré de côté $40$.
2. Le volume est l'aire de la base fois la hauteur $10$.

CORRECTION

$V(10) = 10 \times (60 - 20)^2 = 10 \times 40^2$

$V(10) = 10 \times 1600 = 16000$

$V(10) = 16000$ cm³ : c'est le volume maximal de la boîte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`25000` → On retire $x$ de **chaque** côté : le côté de la base vaut $60 - 2x$, pas $60 - x$.

---

EXERCICE 4 · BASE

## Développer pour reconnaître

La fonction $x \mapsto -2(x + 1)^3 + 5x^2 - 4x$ est un polynôme. Réduire et ordonner son expression.

**Réponse attendue :** `-2x^3-x^2-10x-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
2. Multiplie par $-2$, puis ajoute $5x^2 - 4x$.

CORRECTION

$-2(x+1)^3 = -2x^3 - 6x^2 - 6x - 2$

$-2x^3 - 6x^2 - 6x - 2 + 5x^2 - 4x = -2x^3 - x^2 - 10x - 2$

C'est un polynôme de degré $3$ : $-2x^3 - x^2 - 10x - 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2x^3+5x^2-4x-2` → $(x+1)^3 \neq x^3 + 1$ : il y a aussi $3x^2$ et $3x$.

---

EXERCICE 5 · PRATIQUE

## Identifier un paramètre

Déterminer le réel $a$ tel que, pour tout réel $x$, $a^2x^2 + (a^2+a)x + a = 9x^2 + 6x - 3$.

Donne la valeur de a.

**Réponse attendue :** `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients : compare les termes constants.
2. Vérifie ensuite les deux autres coefficients.

CORRECTION

Terme constant —

$a = -3$

Contrôle —

$a^2 = 9$ et $a^2 + a = 9 - 3 = 6$

$a = -3$ convient pour les trois coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $a = 3$ vérifie $a^2 = 9$, mais le terme constant exige $a = -3$, et $a^2 + a$ vaudrait $12$.

---

EXERCICE 6 · PRATIQUE

## Égaux en deux points seulement

$f(x) = 3x^2 - x + 3$ et $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$ vérifient $f(1) = g(1)$ et $f(4) = g(4)$.
Factoriser $f(x) - g(x)$.

**Réponse attendue :** `(x-1)*(x-4)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par réduire $f(x) - g(x)$.
2. $1$ et $4$ sont des racines de $f - g$.

CORRECTION

**Réduire —**

$f(x) - g(x) = x^2 - 5x + 4$

**Factoriser —**

$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

$f(x) - g(x) = (x - 1)(x - 4)$ ne s'annule qu'en $1$ et $4$ : $f$ et $g$ ne sont pas égaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(x+1)*(x+4)` → Les racines sont $1$ et $4$ : les facteurs sont $x - 1$ et $x - 4$.

---

EXERCICE 7 · BASE

## Le degré après réduction

Déterminer le degré du polynôme $K(x) = (x - 1)^3 - x^3$.

**Donne le degré.**

**Réponse attendue :** 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe $(x - 1)^3$ avant de lire le degré.
2. $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

CORRECTION

$K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3$

$K(x) = -3x^2 + 3x - 1$

Les termes en $x^3$ s'annulent : $K$ est de degré $2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Les termes en $x^3$ s'annulent : réduis avant de lire le degré.

---

EXERCICE 8 · PRATIQUE

## Réduire avant de conclure

Réduire et ordonner $P(x) = 6x^3 - 5x^2 + (2x^2 + x - 1)(2 - 3x)$.

**Réponse attendue :** `-4x^2+5x-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe d'abord le produit $(2x^2 + x - 1)(2 - 3x)$.
2. Le produit commence par $-6x^3$.

CORRECTION

$(2x^2 + x - 1)(2 - 3x) = -6x^3 + x^2 + 5x - 2$

$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 6x^3 + x^2 + 5x - 2 = -4x^2 + 5x - 2$

$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$ : $P$ est de degré $2$, de terme du plus haut degré $-4x^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4x^2+3x-2` → Revois le produit : $2x^2 \times 2 = 4x^2$, $x \times (-3x) = -3x^2$, d'où $x^2$ en tout dans le produit.

---

EXERCICE 9 · PRATIQUE

## Une combinaison de polynômes

$P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ et $Q(x) = 3x^3 - x$. Réduire et ordonner $3P(x) - 2Q(x)$.

**Réponse attendue :** `-3x^2+8x-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $3P(x) = 6x^3 - 3x^2 + 6x - 3$ et $2Q(x) = 6x^3 - 2x$.
2. Retranche **tous** les termes de $2Q(x)$.

CORRECTION

$3P(x) - 2Q(x) = 6x^3 - 3x^2 + 6x - 3 - 6x^3 + 2x$

$3P(x) - 2Q(x) = -3x^2 + 8x - 3$

$3P - 2Q$ est de degré $2$ : les termes en $x^3$ se sont annulés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3x^2+4x-3` → Le moins devant $2Q(x)$ change aussi le signe de $-2x$ : on obtient $+2x$.

---

EXERCICE 10 · PRATIQUE

## Un produit de polynômes

$Q(x) = -5x^3 + 2x - 3$ et $R(x) = x^3 - x + 5$. Réduire et ordonner $Q(x)\,R(x)$.

**Réponse attendue :** `-5x^6+7x^4-28x^3-2x^2+13x-15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie chaque terme de $Q(x)$ par chaque terme de $R(x)$ : neuf produits.
2. Regroupe : en $x^4$, $5x^4 + 2x^4$ ; en $x^3$, $-25x^3 - 3x^3$.

CORRECTION

$-5x^3 \times R(x) = -5x^6 + 5x^4 - 25x^3$

$2x \times R(x) = 2x^4 - 2x^2 + 10x$

$-3 \times R(x) = -3x^3 + 3x - 15$

**Regrouper —**

$Q(x)\,R(x) = -5x^6 + 7x^4 - 28x^3 - 2x^2 + 13x - 15$

Le produit est de degré $3 + 3 = 6$.

EXERCICE 11 · BASE

## Degré sans développer

Déterminer, sans développer, le degré de $B(x) = (x^2 + 3)^5$.

Donne le degré.

**Réponse attendue : 10**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $B$ est le produit de cinq facteurs égaux à $x^2 + 3$.
2. Le degré d'un produit est la somme des degrés.

CORRECTION

degré de $B = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 \times 2 = 10$

$B$ est de degré $10$ : son terme du plus haut degré est $x^{10}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Le degré n'est pas l'exposant $5$ : chaque facteur est déjà de degré $2$.

32 → Les degrés s'**ajoutent** dans un produit : $2 + 2 + 2 + 2 + 2$, pas $2^5$.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

## Un degré qui baisse

Déterminer le degré de $C(x) = (x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 7)(x - 1) - (x^5 + 1)$.

Donne le degré.

**Réponse attendue : 4**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le produit commence par $x^5$ : que devient ce terme quand on retranche $x^5 + 1$ ?
2. Cherche le coefficient de $x^4$ : il vient de $x^4 \times (-1)$ et de $-2x^3 \times x$.

CORRECTION

Termes de degré 5 —

$x^4 \times x - x^5 = 0$

Termes de degré 4 —

$x^4 \times (-1) + (-2x^3) \times x = -3x^4$

Le coefficient de $x^4$ est $-3 \neq 0$ : $C$ est de degré $4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → Les termes en $x^5$ s'annulent : $x^5 - x^5 = 0$.

EXERCICE 13 · BASE

## Une image avec une racine

$g(x) = x^3 + 2x^2 - 1$. Calculer $g(\sqrt{2})$.

Donne la valeur exacte.

**Réponse attendue :** `3+2*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

CORRECTION

$g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2 \times 2 - 1$

$g(\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$

$g(\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} \neq 0$ : $\sqrt{2}$ n'est pas une racine de $g$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, pas 2.

---

EXERCICE 14 · RAISONNEMENT **Deux racines, deux paramètres**

$P(x) = ax^4 + (a+1)x^3 - (b+9)x^2 - (2b-1)x + 14$. Sachant que $1$ et $-2$ sont des racines de $P$, déterminer $a$ et $b$, puis le polynôme $Q$ tel que $P(x) = (x^2 + x - 2)\,Q(x)$ pour tout réel $x$. Donner $Q(x)$.

**Réponse attendue :** `4x^2+x-7`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $P(1) = 0$ donne $2a - 3b + 7 = 0$ ; $P(-2) = 0$ donne $8a - 32 = 0$.
2. Avec $a = 4$ et $b = 5$, cherche $Q(x) = 4x^2 + bx + c$ et identifie.

CORRECTION

**Paramètres —**

$a = 4, \quad b = 5$

$P(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$

**Développer —**

$(x^2 + x - 2)(4x^2 + bx + c) = 4x^4 + (b+4)x^3 + (c + b - 8)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

**Identifier —**

$b + 4 = 5, \;\; -2c = 14 \iff b = 1, \;\; c = -7$

$Q(x) = 4x^2 + x - 7$, et l'on contrôle : $c + b - 8 = -14$, $c - 2b = -9$.

---

EXERCICE 15 · PRATIQUE **Factoriser par regroupement**

Factoriser au maximum $D(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$.

**Réponse attendue :** `(x+3)*(x-1)*(x^2+x+1)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe : $x^4 + 3x^3 = x^3 \times (x+3)$.
2. Puis $x^3 - 1$ est une différence de deux cubes.

CORRECTION

$D(x) = x^3 \times (x+3) - (x+3) = (x+3)(x^3-1)$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$D(x) = (x+3)(x-1)(x^2+x+1)$ ; $x^2+x+1$ n'a pas de racine (son discriminant vaut $-3$).

---

EXERCICE 16 · PRATIQUE

## Une différence de deux carrés

Factoriser $H(x) = 9(x+1)^2 - 4(2x-1)^2$.

**Réponse attendue :** `(5-x)*(7x+1)` — aussi acceptées : -(x-5)*(7x+1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $9(x+1)^2 = (3(x+1))^2$ et $4(2x-1)^2 = (2(2x-1))^2$.
2. Utilise $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, avec des parenthèses autour de $B$.

CORRECTION

Le moins porte sur tout $4x-2$ :

$H(x) = (3x+3-4x+2)(3x+3+4x-2)$

$H(x) = (5-x)(7x+1)$

$H(x) = (5-x)(7x+1)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(1-x)*(7x+1)` → Le moins porte sur tout $4x-2$ : $3x+3-4x+2 = -x+5$.

---

EXERCICE 17 · BASE

## Le quotient par identification

$P(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 6$. Vérifier que $1$ est une racine de $P$, puis déterminer le polynôme $Q$ de degré $2$ tel que $P(x) = (x-1)\,Q(x)$ pour tout réel $x$.

**Réponse attendue :** 3x^2+4x+6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $P(1) = 3 + 1 + 2 - 6$.
2. Écris $Q(x) = ax^2 + bx + c$ et développe $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.

CORRECTION

**Vérifier —**

$P(1) = 3 + 1 + 2 - 6 = 0$

**Identifier —**

$a = 3, \quad b - a = 1, \quad -c = -6$

$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 6$

$P(x) = (x-1)(3x^2 + 4x + 6)$, et le contrôle $c - b = 2$ concorde.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3x^2+4x-6` → Le terme constant de $(x-1)(ax^2+bx+c)$ est $-c$ : $-c = -6$ donne $c = 6$.

---

EXERCICE 18 · PRATIQUE

## Factoriser par x + 2

Vérifier que $-2$ est une racine de $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$, puis déterminer $Q$ tel que $P(x) = (x+2)\,Q(x)$.

**Réponse attendue :** `2x^2-11x+5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $P(-2) = -16 - 28 + 34 + 10$.
2. Le facteur est $x - (-2) = x + 2$ ; écris $Q(x) = 2x^2 + bx + c$.

CORRECTION

**Vérifier —**

$P(-2) = 0$

**Développer —**

$(x+2)(2x^2+bx+c) = 2x^3 + (b+4)x^2 + (c+2b)x + 2c$

**Identifier —**

$b + 4 = -7, \quad 2c = 10 \iff b = -11, \quad c = 5$

$P(x) = (x+2)(2x^2 - 11x + 5)$ ; contrôle : $c + 2b = -17$.

---

EXERCICE 19 · PRATIQUE

## Un quotient de degré 3

Vérifier que $3$ est une racine de $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 3$, puis déterminer $Q$ tel que $P(x) = (x-3)\,Q(x)$.

**Réponse attendue :** `x^3+x-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $Q$ est de degré $3$ : $Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.
2. Identifie de proche en proche : $x^3$, puis $x^2$, puis $x$.

CORRECTION

**Vérifier —**

$P(3) = 81 - 81 + 9 - 12 + 3 = 0$

**Développer —**

AH Maths à la carte DELKADER HAMMAMI

$$(x-3)(x^3+bx^2+cx+d) = x^4+(b-3)x^3+(c-3b)x^2+(d-3c)x-3d$$

**Identifier —**

$b-3=-3,\ \ c-3b=1,\ \ d-3c=-4 \iff b=0,\ \ c=1,\ \ d=-1$

$Q(x)=x^3+x-1$ ; contrôle : $-3d=3$.

---

EXERCICE 20 · PRATIQUE

## Deux racines connues

$Q(x)=x^3+3x^2-4x-12$. Vérifier que $2$ et $-3$ sont des racines de $Q$, puis déterminer le polynôme $R$ tel que $Q(x)=(x-2)(x+3)\,R(x)$.

**Réponse attendue :** x+2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$, et $R$ est de degré $1$.
2. Le terme constant : $-6\times c=-12$.

CORRECTION

**Vérifier —**

$Q(2)=8+12-8-12=0, \quad Q(-3)=-27+27+12-12=0$

**Identifier —**

$Q(x)=(x^2+x-6)(x+c), \quad -6c=-12 \iff c=2$

$Q(x)=(x-2)(x+3)(x+2)$ : $R(x)=x+2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

x-2 → $-6c=-12$ donne $c=2$, pas $-2$.

---

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

## Le facteur sans racine

$P(x)=x^4+2x^3-4x^2-5x-6$. Vérifier que $2$ et $-3$ sont des racines de $P$, puis écrire $P(x)=(x-2)(x+3)\,Q(x)$. Donner $Q(x)$.

**Réponse attendue :** x^2+x+1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$ et $Q(x)=x^2+bx+c$.
2. Le terme en $x^3$ donne $b+1=2$ ; le terme constant, $-6c=-6$.

CORRECTION

**Vérifier —**

$P(2)=0, \quad P(-3)=81-54-36+15-6=0$

**Développer —**

$(x^2+x-6)(x^2+bx+c)=x^4+(b+1)x^3+(c+b-6)x^2+(c-6b)x-6c$

**Identifier —**

$b = 1, \quad c = 1$

$P(x) = (x-2)(x+3)(x^2+x+1)$ ; contrôle : $c + b - 6 = -4$ et $c - 6b = -5$.

---

EXERCICE 22 · PRATIQUE

## Toutes les racines

$Q(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 12$. Vérifier que $-2$ et $3$ sont des racines, factoriser $Q(x)$ et résoudre l'équation $Q(x) = 0$.

Écris l'ensemble, par exemple « {-1;-√3;√3;2} ».

**Réponse attendue :** `{-2;-√2;√2;3}` — aussi acceptées : {-2;-sqrt(2);sqrt(2);3}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$ ; le quotient est de la forme $x^2 + bx + c$.
2. Tu dois trouver $Q(x) = (x+2)(x-3)(x^2-2)$.

CORRECTION

**Vérifier —**

$Q(-2) = 16 + 8 - 32 - 4 + 12 = 0, \quad Q(3) = 81 - 27 - 72 + 6 + 12 = 0$

**Identifier —**

$Q(x) = (x^2 - x - 6)(x^2 - 2)$

**Factoriser —**

$Q(x) = (x+2)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$S = \{-2; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3\}$ : quatre racines, le maximum pour un degré $4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2;3}` → Le facteur $x^2 - 2$ s'annule aussi : en $\sqrt{2}$ et en $-\sqrt{2}$.

---

EXERCICE 23 · BASE

## Une racine apparente

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + x^2 - 2 = 0$, en cherchant une racine apparente.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {2} ».

**Réponse attendue :** `{1}` — aussi acceptées : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Essaie $x = 1$.
2. Factorise $x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + bx + c)$, puis calcule le discriminant du second facteur.

CORRECTION

**Racine apparente —**

$1 + 1 - 2 = 0$

**Factoriser —**

$x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2+2x+2)$

**Le reste —**

$b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$

$S = \{1\}$.

---

EXERCICE 24 · PRATIQUE

## Une équation de degré 3

Résoudre l'équation $4x^3 + x^2 - 11x + 6 = 0$, après avoir vérifié que $1$ et $-2$ en sont des solutions.

**Écris l'ensemble, par exemple « {-1;1/2;3} ».**

**Réponse attendue :** `{-2;3/4;1}` — aussi acceptées : {-2;0.75;1}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$, et le quotient est de la forme $4x + c$.
2. Le terme constant : $-2c = 6$.

CORRECTION

**Vérifier —**

$4 + 1 - 11 + 6 = 0, \quad -32 + 4 + 22 + 6 = 0$

**Factoriser —**

$4x^3 + x^2 - 11x + 6 = (x-1)(x+2)(4x-3)$

**La troisième —**

$4x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}$

$$S = \left\{-2; \frac{3}{4}; 1\right\}.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2;1}` → Il manque la troisième solution, celle du facteur $4x - 3$.

---

EXERCICE 25 · RAISONNEMENT

## Comparer deux polynômes

$f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 6$ et $g(x) = x^2 - 2x - 4$. Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.

**Écris la réunion d'intervalles, par exemple « ]-2;1[U]3;+inf[ ».**

**Réponse attendue :** `]-1;2[U]5;+inf[` — aussi acceptées : ]-1;2[∪]5;+∞[ · ]-1;2[ U ]5;+inf[ · ]5;+inf[U]-1;2[ · ]5;+∞[∪]-1;2[ · ]-1,2[U]5,+inf[ · ]-1,2[∪]5,+∞[ · ]5,+inf[U]-1,2[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Étudie $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ : $f(2) = g(2)$, donc $2$ est racine de $h$.
2. $h(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 5) = (x-2)(x+1)(x-5)$ : fais le tableau de signes.

CORRECTION

**Un membre —**

$f(x) > g(x) \iff x^3 - 6x^2 + 3x + 10 > 0$

**Factoriser —**

$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x+1)(x-2)(x-5)$

**Signes —**

$-, +, -, +$ sur $]-\infty;-1[, ]-1;2[, ]2;5[, ]5;+\infty[$

$S = ]-1;2[ \cup ]5;+\infty[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;-1[U]2;5[` → Ce sont les intervalles où $h(x) < 0$ : relis le tableau de signes.

---

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

## Une inéquation de degré 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^3 - 3x < 2 - 3x^2$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple « ]-inf;-1[U]0;2[ ».

**Réponse attendue : `]-inf;-2[U]-1/2;1[`** — aussi acceptées : ]-∞;-2[∪]-1/2;1[ · ]-inf;-2[U]-0.5;1[ · ]-inf;-2[U]-0,5;1[ · ]-1/2;1[U]-inf;-2[ · ]-0.5;1[U]-inf;-2[ · ]-0,5;1[U]-inf;-2[ · ]-inf,-2[U]-1/2,1[ · ]-∞,-2[∪]-1/2,1[ · ]-inf,-2[U]-0.5,1[ · ]-inf,-2[U]-0,5,1[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ramène tout dans un membre : $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 < 0$.
2. $1$ est une racine apparente ; le quotient $2x^2 + 5x + 2$ a pour racines $-2$ et $-\frac{1}{2}$.

CORRECTION

**Factoriser —**

$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x-1)(x+2)(2x+1)$

**Signes —**

$-, +, -, +$ sur $]-\infty;-2[, ]-2;-\frac{1}{2}[, ]-\frac{1}{2};1[, ]1;+\infty[$

$S = ]-\infty;-2[ \cup \left]-\frac{1}{2};1\right[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;-2]U[-1/2;1]` → L'inégalité est stricte : les racines $-2$, $-\frac{1}{2}$ et $1$ sont exclues.

---

EXERCICE 27 · PRATIQUE

## Un facteur toujours positif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 + 4x^2 > 2x^2 - 4x - 3$.

Écris l'intervalle, par exemple « ]2;+inf[ ».

**Réponse attendue : `]-1;+inf[`** — aussi acceptées : ]-1;+∞[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ramène tout dans un membre : $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 > 0$, et essaie $x = -1$.
2. Le quotient $x^2 + x + 3$ a un discriminant négatif.

CORRECTION

**Factoriser —**

$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x^2 + x + 3)$

**Le trinôme —**

$b^2 - 4ac = 1 - 12 = -11 < 0 \Rightarrow x^2 + x + 3 > 0$

**Conclure —**

$(x + 1)(x^2 + x + 3) > 0 \iff x + 1 > 0$

$S = ]-1; +\infty[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-1;+inf[` → En $-1$ le produit vaut $0$, et $0 > 0$ est faux : le crochet est ouvert.

---

EXERCICE 28 · PRATIQUE

## Un polynôme symétrique

Résoudre l'équation $7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = 0$.

Écris l'ensemble, par exemple « {-1;1/2;2} ».

**Réponse attendue :** `{-1;1/7;7}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le polynôme est symétrique : $-1$ est une racine apparente.
2. $ax^3 + bx^2 + bx + a = (x + 1)\left(ax^2 + (b - a)x + a\right)$, ici avec $a = 7$ et $b = -43$.

CORRECTION

**Factoriser —**

$7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = (x + 1)(7x^2 - 50x + 7)$

**Discriminant —**

$(-50)^2 - 4 \times 7 \times 7 = 2500 - 196 = 2304 = 48^2$

**Racines —**

$x = \frac{50-48}{14} = \frac{1}{7}$ ou $x = \frac{50+48}{14} = 7$

$S = \left\{-1; \frac{1}{7}; 7\right\}$ : les racines $7$ et $\frac{1}{7}$ sont inverses l'une de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1/7;7}` → N'oublie pas la racine apparente $-1$.

---

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

## Sans calculer les racines

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ admet trois racines distinctes : $\alpha$, $\beta$ et une troisième $\gamma$. Sans les calculer, déterminer la somme de leurs inverses.

**Donne la valeur exacte.**

**Réponse attendue :** `-5/6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis au même dénominateur : la somme des inverses est la somme des produits deux à deux, divisée par le produit des trois racines.
2. La somme des produits deux à deux vaut $\dfrac{c}{a}$, et le produit des trois racines vaut $-\dfrac{d}{a}$.

CORRECTION

**Formules —** La somme des produits deux à deux, puis le produit des trois racines :

$\frac{c}{a} = -5, \quad -\frac{d}{a} = 6$

**Conclure —** La somme des inverses est leur quotient :

$\frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$

La somme vaut $-\dfrac{5}{6}$ ; avec les racines $-3, -1, 2$ : $-\dfrac{1}{3} - 1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{6}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/6` → Au degré $3$, le produit des trois racines vaut $-\dfrac{d}{a} = 6$, pas $-6$.

---

EXERCICE 30 · RAISONNEMENT

## Une inéquation rationnelle

$f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8}$. Déterminer l'ensemble de définition de $f$, puis résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

**Écris la réunion d'intervalles, par exemple « ]-3;1[U]1;+inf[ ».**

**Réponse attendue :** `]-4;2[U]2;+inf[` — aussi acceptées : ]-4;2[∪]2;+∞[ · ]-4;2[ U ]2;+inf[ · ]2;+inf[U]-4;2[ · ]2;+∞[∪]-4;2[ · ]-4,2[U]2,+inf[ · ]-4,2[∪]2,+∞[ · ]-4;+inf[\{2} · ]-4;+∞[\{2} · ]-4,+inf[\{2}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}$.
2. $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$, et $x^2 + 2x + 4 > 0$.

CORRECTION

**Définition —**

$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}$

**Simplifier —**

$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+4)(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+4} \quad (x \in D)$

**Signe —**

$b^2 - 4ac = 4 - 16 < 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 > 0, \quad f(x) > 0 \iff x + 4 > 0$

$S = ]-4;2[ \cup ]2;+\infty[$ : 2 reste exclu, même après simplification.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-4;+inf[` → Après simplification, $2$ reste une valeur interdite : il faut l'exclure.

---

EXERCICE 31 · PRATIQUE **Le triangle et le demi-cercle**

Dans un triangle $ABC$ rectangle en $B$, avec $AB = h$ et $BC = x$, un demi-cercle de rayon $1$, de centre sur $[AB]$, passe par $B$ et est tangent à $(AC)$ ; on montre que $h = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$. Pour quelle valeur de $x$ a-t-on $h = \dfrac{9}{4}$ ?

Donne la valeur de x.

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais un produit en croix : $4 \times 2x^2 = 9(x^2-1)$.
2. $x$ est une longueur : on garde la solution positive.

CORRECTION

$8x^2 = 9x^2 - 9 \iff x^2 = 9$

$x = 3 \quad (x > 0)$

$h = \dfrac{9}{4}$ pour $x = 3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3` → $x = BC$ est une longueur : $-3$ ne convient pas.

---

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT **Une somme en cascade**

Sachant que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, calculer $S = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{99\times 100}$.

Donne la valeur exacte.

**Réponse attendue :** `99/100`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris chaque terme comme une différence : $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
2. Tout s'annule sauf le premier et le dernier terme.

CORRECTION

$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$

$S = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

$S = \dfrac{99}{100}$, c'est la formule $\dfrac{n}{n+1}$ avec $n = 99$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100/101` → Le dernier terme est $\dfrac{1}{99 \times 100}$ : il reste $-\dfrac{1}{100}$, pas $-\dfrac{1}{101}$.

---

EXERCICE 33 · DEFI

## Le problème de Bhaskara

Exercice 16 : « Quel est, homme savant, le nombre qui multiplié par $12$ et ajouté au cube du nombre, est égal à $6$ fois le carré, augmenté de $35$ ? »

**Donne le nombre.**

**Réponse attendue :** 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis : $x^3 + 12x = 6x^2 + 35$, soit $x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0$.
2. Essaie de petits entiers positifs, ou remarque que $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$.

CORRECTION

**Équation —**

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0 \iff (x-2)^3 = 27$$

**Résoudre —**

$$x - 2 = 3 \iff x = 5$$

**Vérifier —**

$$125 + 60 = 185 = 6 \times 25 + 35$$

Le nombre cherché est $5$.

---

EXERCICE 34 · PRATIQUE

## Une racine commune

Exercice 13 : $f(x) = x^2 + x - 12$ et $g(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 3$. Vérifier que $3$ est une racine commune de $f$ et $g$, factoriser $g(x)$ et résoudre l'inéquation $g(x) < 0$.

**Écris l'intervalle, par exemple « ]1;+inf[ ».**

**Réponse attendue :** `]3;+inf[` — aussi acceptées : ]3;+∞[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $g(3) = -27 + 36 - 12 + 3 = 0$ ; écris $g(x) = (x-3)(-x^2 + bx + c)$.
2. $-x^2 + x - 1$ a un discriminant négatif : il est toujours strictement négatif.

CORRECTION

**Racine commune —**

$$f(3) = 9 + 3 - 12 = 0, \quad g(3) = 0$$

**Factoriser —**

$g(x) = (x-3)(-x^2+x-1)$

**Le trinôme —**

$b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0 \Rightarrow -x^2+x-1 < 0$

**Conclure —**

$g(x) < 0 \iff x - 3 > 0$

$S = ]3; +\infty[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;3[` → Le facteur $-x^2+x-1$ est **négatif** : il inverse le signe de $x-3$.

---

EXERCICE 35 · DEFI

## Le polynôme des sommes

Déterminer le polynôme $P$ de degré $2$ tel que, pour tout réel $x$, $P(x) - P(x-1) = x$ et $P(0) = 0$.

**Réponse attendue :** `x^2/2+x/2` — aussi acceptées : `(x^2+x)/2` · `0.5x^2+0.5x`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $P(0) = 0$ : écris $P(x) = ax^2 + bx$.
2. $P(x) - P(x-1) = a\left(x^2 - (x-1)^2\right) + b = 2ax - a + b$ : identifie avec $x$.

CORRECTION

**Calculer —**

$P(x) - P(x-1) = a(2x-1) + b = 2ax + (b-a)$

**Identifier —**

$2a = 1, \quad b - a = 0 \iff a = b = \frac{1}{2}$

$P(x) = \dfrac{x^2+x}{2}$ ; en remplaçant $x$ par $1, 2, \ldots, n$ et en ajoutant, $1 + 2 + \cdots + n = P(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

---

EXERCICE 36 · DEFI

## La somme des carrés

Déterminer le polynôme $Q$ de degré $3$ tel que, pour tout réel $x$, $Q(x) - Q(x-1) = x^2$ et $Q(0) = 0$.

**Réponse attendue :** `x^3/3+x^2/2+x/6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $Q(0) = 0$ : écris $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.
2. $x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$ et $x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$ : développe, puis identifie avec $x^2$.

CORRECTION

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

**Calculer —**

$Q(x) - Q(x-1) = a(3x^2 - 3x + 1) + b(2x - 1) + c = 3ax^2 + (2b - 3a)x + (a - b + c)$

**Identifier —**

$3a = 1, \quad 2b - 3a = 0, \quad a - b + c = 0 \iff a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6}$

$Q(x) = \dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ ; en remplaçant $x$ par $1, 2, \ldots, n$ et en ajoutant, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = Q(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

x^3/3+x^2/2 → Le terme constant $a - b + c$ doit aussi être nul : il donne $c = b - a = \dfrac{1}{6}$.

---

EXERCICE 37 · BASE

## Un antécédent dans l'ensemble de définition

La fonction $f$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - 5$. Déterminer l'antécédent de $22$ par $f$.

**Donner la valeur de l'antécédent.**

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un antécédent de $22$ est un réel $x$ de $[0; +\infty[$ tel que $f(x) = 22$.
2. L'équation $3x^2 - 5 = 22$ donne $x^2 = 9$ : garde la solution qui appartient à l'ensemble de définition.

CORRECTION

**L'équation —**

$3x^2 - 5 = 22 \iff x^2 = 9$

**Deux candidats —**

$x = -3$ ou $x = 3$

**L'ensemble de définition —** Seul $3$ appartient à $[0; +\infty[$.

$x = 3$

Un antécédent se cherche en résolvant $f(x) = y$, puis en ne gardant que les solutions qui appartiennent à l'ensemble de définition.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → $-3$ vérifie bien $3x^2 - 5 = 22$, mais il n'appartient pas à $[0; +\infty[$ : ce n'est pas un antécédent par $f$.

1447 → Tu as calculé l'image de $22$ ; on cherche le réel $x$ dont l'image est $22$.

---

EXERCICE 38 · PRATIQUE

## Une racine et un quotient

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-1}$.

---

Écrire la réunion d'intervalles, par exemple « [-2;3[U]3;+inf[ ».

**Réponse attendue :** `[-4;1[U]1;+inf[` — aussi acceptées : [-4,1[U]1,+inf[ · [-4;1[U]1;+∞[ · [-4,1[U]1,+∞[ · [-4;1[∪]1;+inf[ · [-4,1[∪]1,+inf[ · [-4;1[∪]1;+∞[ · [-4,1[∪]1,+∞[ · ]1;+inf[U[-4;1[ · ]1,+inf[U[-4,1[ · ]1;+∞[U[-4;1[ · ]1,+∞[U[-4,1[ · ]1;+inf[∪[-4;1[ · ]1,+inf[∪[-4,1[ · ]1;+∞[∪[-4;1[ · ]1,+∞[∪[-4,1[ · D=[-4;1[U]1;+inf[ · D=[-4;1[∪]1;+∞[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux conditions : ce qui est sous la racine doit être positif ou nul, et le dénominateur ne doit pas s'annuler.
2. $x + 4 \geq 0 \iff x \geq -4$ ; retire ensuite la valeur qui annule $x - 1$.

CORRECTION

**Sous la racine —**

$$x + 4 \geq 0 \iff x \geq -4$$

**Le dénominateur —**

$$x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$$

**Réunir —**

$$D = [-4; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

$f(x)$ existe si la racine est définie **et** si le dénominateur n'est pas nul : on écrit les deux conditions, puis on les réunit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-4;+inf[` → Pour $x = 1$, le dénominateur est nul : $1$ doit être retiré de l'ensemble.

`]-4;1[U]1;+inf[` → Pour $x = -4$, $\sqrt{0} = 0$ existe et le dénominateur vaut $-5$ : $-4$ appartient à l'ensemble, le crochet est fermé.

---

EXERCICE 39 · RAISONNEMENT

## Le rectangle de périmètre 20

Un rectangle a pour périmètre $20$ cm ; on note $x$ sa largeur, en cm, avec $0 < x \leq 5$ (la largeur ne dépasse pas la longueur). Exprimer son aire $A(x)$ en fonction de $x$, puis déterminer la largeur $x$ pour laquelle l'aire vaut $21$ cm².

Donner la largeur x, en cm.

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La longueur vaut $10 - x$ : le demi-périmètre est $10$ cm.
2. Résous $x(10 - x) = 21$, c'est-à-dire $x^2 - 10x + 21 = 0$, puis tiens compte de la condition sur $x$.

CORRECTION

**L'aire —**

$$A(x) = x(10 - x)$$

**L'équation —**

$x(10-x)=21 \iff x^2-10x+21=0$

**Les solutions —** Le discriminant vaut $100-84=16$.

$x=3$ ou $x=7$

**La condition —** $7>5$ : ce serait la longueur.

$x=3$

On traduit l'énoncé par une fonction, et l'ensemble où vit $x$ trie les solutions : la largeur est $3$ cm, la longueur $7$ cm.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → Avec $x=7$, l'autre côté mesure $3$ : $7$ est la longueur, et la condition $x \leq 5$ l'exclut.

---

EXERCICE 40 · BASE

## Les valeurs possibles de x

Dans une plaque rectangulaire de $30$ cm sur $20$ cm, on découpe à chaque coin un carré de côté $x$ cm, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle, de volume $V(x)=x(30-2x)(20-2x)$. Déterminer l'intervalle auquel doit appartenir $x$ pour que la boîte existe, c'est-à-dire pour que ses trois dimensions soient strictement positives.

**Écrire l'intervalle, par exemple « ]0;4[ ».**

**Réponse attendue :** `]0;10[`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les trois dimensions de la boîte sont $x$, $30-2x$ et $20-2x$ : chacune doit être strictement positive.
2. Résous les trois inéquations, puis garde les réels qui vérifient les trois à la fois.

CORRECTION

**Les trois conditions —**

$x>0, \quad 30-2x>0, \quad 20-2x>0$

**Résoudre —**

$x>0, \quad x<15, \quad x<10$

**Réunir —** Les trois conditions ensemble : $x<10$ entraîne $x<15$.

$x \in ]0;10[$

L'ensemble où vit $x$ vient de la situation : chaque dimension doit être strictement positive, et c'est la contrainte la plus forte, $20-2x>0$, qui l'emporte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]0;15[` → La largeur $20-2x$ doit aussi être positive : $x<10$, pas seulement $x<15$.

`[0;10] / ]0;10] / [0;10[` → Pour $x=0$ ou $x=10$, une dimension est nulle : il n'y a pas de boîte, les crochets sont ouverts.

`]0;20[` → On découpe un carré à **chaque** coin : la largeur devient $20-2x$, pas $20-x$.

Maths à la carte — ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 41 · PRATIQUE

## Le volume d'un pavé

Un pavé droit a pour dimensions $x$, $x+1$ et $x+3$ (en cm, avec $x>0$). Exprimer son volume $V(x)$ comme un polynôme réduit et ordonné.

**Réponse attendue :** x^3+4x^2+3x

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le volume d'un pavé est le produit de ses trois dimensions.
2. Développe d'abord $(x+1)(x+3)$, puis multiplie par $x$.

CORRECTION

**Le produit —**

$$V(x)=x(x+1)(x+3)$$

**Deux facteurs —**

$$(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$$

**Réduire et ordonner —**

$$V(x)=x^3+4x^2+3x$$

Un volume qui dépend d'une longueur $x$ est souvent un polynôme de degré $3$ : on développe facteur par facteur, puis on ordonne.

PIÈGES ANTICIPÉS

x^3+3x → $(x+1)(x+3)$ ne vaut pas $x^2+3$ : il y a aussi les termes $3x$ et $x$, soit $4x$.

EXERCICE 42 · RAISONNEMENT

## Un coefficient de la boîte

Dans une plaque carrée de $24$ cm de côté, on découpe à chaque coin un carré de côté $x$ cm et l'on replie les bords : la boîte a pour volume $V(x)=x(24-2x)^2$. Développer $V(x)$ et déterminer le coefficient de son terme en $x^2$.

**Donner le coefficient du terme en x².**

**Réponse attendue :** -96

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe d'abord le carré : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
2. Le double produit de $24$ et de $2x$ donne le terme en $x$ du carré ; multiplié par $x$, il devient le terme en $x^2$.

CORRECTION

**Le carré —**

$$(24-2x)^2=576-96x+4x^2$$

**Multiplier par x —**

$$V(x)=4x^3-96x^2+576x$$

**Lire —**

$a_2 = -96$

Pour lire un coefficient, on réduit et on ordonne d'abord : ici le terme en $x^2$ vient du double produit du carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

-48 → Le double produit vaut $2 \times 24 \times 2x = 96x$ : le facteur $2$ a été oublié.

96 → Dans $(24 - 2x)^2$, le double produit est retranché : le coefficient est négatif.

---

EXERCICE 43 · BASE

## Combien de polynômes ?

Parmi les fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{3}\,x^2 - x$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$, $f_3 : x \mapsto \dfrac{2}{x} + 1$, $f_4 : x \mapsto |x - 1|$ et $f_5 : x \mapsto -7$, combien sont des polynômes ?

**Donner le nombre de polynômes.**

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un polynôme s'écrit comme une somme de termes $a_k x^k$, avec des exposants entiers naturels ; ses coefficients peuvent être des racines ou des fractions.
2. Une variable au dénominateur, ou dans une valeur absolue, empêche cette écriture ; une constante est un polynôme.

CORRECTION

**$f_1$ et $f_2$ —** $\sqrt{3}$ et $\dfrac{1}{2}$ sont des coefficients réels permis.

$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

**$f_3$ et $f_4$ —** $\dfrac{2}{x}$ et $|x - 1|$ ne s'écrivent pas sous la forme $a_n x^n + \cdots + a_0$.

**$f_5$ —** C'est un polynôme constant.

$f_1,\ f_2,\ f_5$ : 3 polynômes

Un polynôme est une somme de termes $a_k x^k$ : les coefficients réels sont tous permis, mais pas une variable au dénominateur ni dans une valeur absolue.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Une fonction constante comme $x \mapsto -7$ est un polynôme (de degré $0$), et $\dfrac{x^2+1}{2}$ en est un aussi.

4 → Ni $\dfrac{2}{x}$ ni $|x - 1|$ ne s'écrivent comme une somme de termes $a_k x^k$.

---

EXERCICE 44 · PRATIQUE

## Un carré moins un produit

Montrer que $P(x) = (2x - 3)^2 - 4(x - 1)(x + 2)$ est un polynôme : réduire et ordonner son expression.

**Réponse attendue :** `-16x+17`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe le carré avec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, puis le produit $(x-1)(x+2)$.
2. Attention au signe : on retranche **tout** le produit $4(x^2+x-2)$.

CORRECTION

**Le carré —**

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

**Le produit —**

$$4(x-1)(x+2) = 4x^2 + 4x - 8$$

**Réduire —** Les termes en $x^2$ s'annulent.

$$P(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 - 4x + 8 = -16x + 17$$

Les termes de degré $2$ disparaissent : $P$ est un polynôme, et même un binôme du premier degré. On développe entièrement avant de conclure.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-16x+1` → On retranche $4x^2 + 4x - 8$ : le $-8$ devient $+8$, et $9 + 8 = 17$.

`-8x+17` → $-12x - 4x = -16x$ : les deux termes en $x$ sont négatifs.

---

EXERCICE 45 · RAISONNEMENT

## Une fraction qui est un polynôme

Soit $g : x \mapsto \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$. Justifier que $g$ est définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer que c'est un polynôme : simplifier $g(x)$.

**Réponse attendue :** `x^2-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour tout réel $x$, $x^2 + 1 \geq 1$ : le dénominateur ne s'annule jamais.
2. Le numérateur est une différence de deux carrés, celui de $x^2$ et celui de $1$.

CORRECTION

**Définie sur ℝ —**

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

**Factoriser —**

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

**Simplifier —**

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2 - 1$$

Une écriture en fraction ne prouve pas qu'une fonction n'est pas un polynôme : on simplifie d'abord. Ici $g$ est le trinôme $x^2 - 1$, défini sur $\mathbb{R}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

x^2+1 → $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ : après simplification par $x^2 + 1$, il reste $x^2 - 1$.

---

EXERCICE 46 · BASE

## Identifier deux coefficients

Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $x$, $(a - 1)x^2 + (a + b)x = 3x^2 + 2x$. Donner $b$.

**Donner la valeur de b.**

**Réponse attendue :** -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients pour les termes de même degré.
2. Le terme en $x^2$ donne $a - 1 = 3$ ; le terme en $x$ donne une deuxième équation.

CORRECTION

**Terme en x² —**

$a - 1 = 3 \iff a = 4$

**Terme en x —**

$a + b = 2 \iff b = 2 - 4$

$b = -2$

On identifie les coefficients degré par degré, en commençant par l'équation qui ne contient qu'une inconnue.

PIÈGES ANTICIPÉS

0 → $a - 1 = 3$ donne $a = 4$, pas $a = 2$ : on ajoute $1$ aux deux membres.

6 → $4 + b = 2$ donne $b = 2 - 4$ : on retranche $4$.

---

EXERCICE 47 · PRATIQUE

## Suivant les puissances de x + 2

Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout réel $x$, $x^2 + 4x + 1 = a(x + 2)^2 + b(x + 2) + c$. Donner $c$.

**Donner la valeur de c.**

**Réponse attendue :** -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe le membre de droite, puis ordonne-le suivant les puissances de $x$.
2. Identifie d'abord $a$ avec le terme en $x^2$, puis $b$ avec le terme en $x$, enfin $c$ avec le terme constant.

CORRECTION

**Développer —**

$a(x + 2)^2 + b(x + 2) + c = ax^2 + (4a + b)x + 4a + 2b + c$

**Identifier —**

$a = 1, \quad 4a + b = 4, \quad 4a + 2b + c = 1$

**Résoudre —**

$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1 - 4$

$c = -3$

Écrire un polynôme suivant les puissances de $x + 2$ se fait par identification : $x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Le terme constant du membre de droite n'est pas $c$ seul : c'est $4a + 2b + c$.

3 → $4 + c = 1$ donne $c = 1 - 4$.

---

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

## Le polynôme nul

Déterminer le réel $m$ tel que, pour tout réel $x$, $(m^2 - 4)x^2 + (m + 2)x + m^2 + m - 2 = 0$.

**Donner la valeur de m.**

**Réponse attendue : -2**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un polynôme est nul pour tout $x$ si et seulement si **tous** ses coefficients sont nuls.
2. Écris les trois conditions ; la première a deux solutions, une seule annule aussi le coefficient de $x$.

CORRECTION

**Terme en $x^2$ —**

$m^2 - 4 = 0 \iff m = 2 \text{ ou } m = -2$

**Terme en x —**

$m + 2 = 0 \iff m = -2$

**Terme constant —**

$(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

$m = -2$

Les trois coefficients doivent s'annuler **ensemble** : une valeur qui n'annule que le premier ne suffit pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Pour $m = 2$, le coefficient de $x$ vaut $4$ et le terme constant $4$ : le polynôme $4x + 4$ n'est pas nul.

---

EXERCICE 49 · DEFI

## Un carré parfait

Déterminer les réels $a$ et $b$, avec $b > 0$, tels que $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 1$ soit, pour tout réel $x$, le carré d'un trinôme $x^2 + px + q$. Donner $a$.

**Donner la valeur de a.**

**Réponse attendue :** 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe $(x^2+px+q)^2$ et ordonne-le.
2. Le terme en $x^3$ donne $p$, le terme constant donne deux valeurs possibles de $q$ ; la condition $b>0$ choisit.

CORRECTION

**Développer —**

$$(x^2+px+q)^2 = x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$$

**Identifier —**

$$2p=4, \quad q^2=1 \iff p=2, \quad q=1 \text{ ou } q=-1$$

**La condition b > 0 —** $b=2pq=4q$ est positif pour $q=1$.

$$b=4, \quad a=p^2+2q=4+2$$

$$a=6$$

L'identification donne un système ; quand il a plusieurs solutions, la condition de l'énoncé tranche : $x^4+4x^3+6x^2+4x+1=(x^2+2x+1)^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Avec $q=-1$, on trouverait $a=2$, mais $b=-4<0$ : la condition $b>0$ l'exclut.

---

EXERCICE 50 · BASE **Le terme du plus haut degré**

Déterminer le degré et le coefficient du terme du plus haut degré de $P(x)=(3x^2-1)(2-x^3)+x$.

**Donner le coefficient du terme du plus haut degré.**

**Réponse attendue :** -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le terme du plus haut degré d'un produit est le produit des termes du plus haut degré de ses facteurs.
2. Ici, ce sont $3x^2$ et $-x^3$ ; le $+x$ ne change rien au plus haut degré.

CORRECTION

**Le plus haut degré —**

$$3x^2 \times (-x^3) = -3x^5$$

**Conclure —**

$$d^\circ(P)=5, \quad a_5=-3$$

Pas besoin de tout développer : le terme du plus haut degré d'un produit se lit sur les facteurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Le terme du plus haut degré de $2-x^3$ est $-x^3$ : le coefficient est négatif.

5 → $5$ est le degré ; on demande le coefficient du terme $-3x^5$.

---

EXERCICE 51 · PRATIQUE

## Deux carrés qui se compensent

Déterminer le degré du polynôme $P(x) = (x^2+2)^2 - (x^2-1)^2$.

**Donner le degré.**

**Réponse attendue : 2**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux carrés ont le même terme en $x^4$ : il disparaît dans la différence.
2. Développe les deux carrés, ou utilise $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

CORRECTION

**Factoriser —**

$$P(x) = \left[(x^2+2) - (x^2-1)\right]\left[(x^2+2) + (x^2-1)\right]$$

$$P(x) = 3(2x^2+1) = 6x^2+3$$

**Conclure —**

$d^\circ(P) = 2$

Le degré d'une différence peut baisser : on réduit avant de lire le degré.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Les termes en $x^4$ s'annulent : $x^4 - x^4 = 0$.

---

EXERCICE 52 · DEFI

## Le degré selon un paramètre

Soit $m$ un réel et $P(x) = (m-2)x^3 + (m^2-4)x^2 + (m+1)x - 3$. Déterminer $m$ pour que $P$ soit de degré $1$.

**Donner la valeur de m.**

**Réponse attendue : 2**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Degré $1$ : les coefficients de $x^3$ et de $x^2$ sont nuls, celui de $x$ ne l'est pas.
2. La condition sur $x^3$ ne laisse qu'une valeur ; vérifie qu'elle annule aussi le coefficient de $x^2$.

CORRECTION

**Terme en x³ —**

$$m - 2 = 0 \iff m = 2$$

**Terme en x² —**

$$2^2 - 4 = 0$$

**Terme en x —**

$2 + 1 = 3 \neq 0$

$m = 2$

Pour imposer le degré $n$, on annule tous les coefficients de degré supérieur à $n$ et l'on vérifie que celui de degré $n$ n'est pas nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → Pour $m = -2$, le coefficient de $x^3$ vaut $-4$ : $P$ serait de degré $3$.

---

EXERCICE 53 · BASE **Ordonner avant de lire**

Déterminer le coefficient du terme du plus haut degré de $T(x) = 5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x - x^2$.

Donner le coefficient.

**Réponse attendue :** -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ordonne $T(x)$ par degrés décroissants : le premier terme écrit n'est pas forcément celui du plus haut degré.
2. Le coefficient garde son signe.

CORRECTION

Ordonner —

$T(x) = -2x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 5$

Lire —

$a_3 = -2$

Le terme du plus haut degré est celui du plus grand exposant, où qu'il soit écrit : ici $-2x^3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → $5$ est le terme constant, même s'il est écrit en premier.

2 → Le terme est $-2x^3$ : son coefficient est négatif.

---

EXERCICE 54 · BASE **Le terme du premier degré**

Développer $Q(x) = (x - 3)(2x + 1)$ et donner le coefficient de son terme du premier degré.

Donner le coefficient de $x$.

**Réponse attendue :** -5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe avec la double distributivité.
2. Les termes en $x$ viennent de $x \times 1$ et de $(-3) \times 2x$.

CORRECTION

**Développer —**

$Q(x) = 2x^2 + x - 6x - 3$

**Réduire —**

$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

**Lire —**

$a_1 = -5$

Le terme du premier degré, ou terme en $x$, se lit après réduction : ici $-5x$.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → $(-3) \times 2x = -6x$, et $x - 6x = -5x$.

-3 → $-3$ est le terme constant ; on demande le coefficient de $x$.

---

EXERCICE 55 · PRATIQUE

## Un trinôme caché

Réduire $R(x) = (x+1)^3 - (x-1)^3$ et donner le coefficient de son terme en $x^2$.

**Donner le coefficient du terme en x².**

**Réponse attendue :** 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ; pour $(x-1)^3$, les signes alternent.
2. Les termes en $x^3$ et en $x$ disparaissent dans la différence.

CORRECTION

**Les cubes —**

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

**La différence —**

$R(x) = 6x^2 + 2$

**Lire —**

$a_2 = 6$

$R$ est un trinôme du second degré, sans terme en $x$ : on réduit avant de nommer un polynôme.

PIÈGES ANTICIPÉS

0 → $3x^2 - (-3x^2) = 6x^2$ : les termes en $x^2$ s'ajoutent, ils ne s'annulent pas.

3 → Chaque cube apporte un terme $3x^2$ ou $-3x^2$ : la différence donne $3x^2 + 3x^2 = 6x^2$.

---

EXERCICE 56 · RAISONNEMENT

## Un binôme imposé

Soient $a$ et $b$ deux réels et $P(x) = (a-1)x^2 + (2a+b)x + b - 4$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $P$ soit un binôme du premier degré de terme constant nul, puis donner $P(x)$.

**Réponse attendue :** 6x

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Binôme du premier degré : le coefficient de $x^2$ est nul, celui de $x$ ne l'est pas.
2. Terme constant nul : $b - 4 = 0$.

CORRECTION

**Terme en $x^2$ —**

$a - 1 = 0 \iff a = 1$

**Terme constant —**

$b - 4 = 0 \iff b = 4$

**Contrôler —** Le coefficient de $x$ vaut $2 \times 1 + 4 = 6 \neq 0$.

$P(x) = 6x$

Chaque mot du vocabulaire est une condition sur un coefficient : « premier degré » annule le terme en $x^2$ sans annuler celui en $x$, « terme constant nul » annule $a_0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2x-8` → $b - 4 = 0$ donne $b = 4$, pas $b = -4$ : avec $b = -4$, le terme constant ne serait pas nul.

---

EXERCICE 57 · BASE **Une somme qui perd son degré**

$f(x) = x^3 - 2x + 4$ et $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$. Réduire et ordonner $f(x) + g(x)$.

**Réponse attendue :** 3x^2+3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe les termes de même degré : $x^3$ avec $-x^3$, $-2x$ avec $2x$…
2. Deux couples de termes s'annulent.

CORRECTION

**Regrouper —**

$(x^3 - x^3) + 3x^2 + (-2x + 2x) + (4 - 1)$

**Réduire —**

$f(x) + g(x) = 3x^2 + 3$

On additionne les coefficients degré par degré ; le degré de la somme $(2)$ est ici plus petit que celui de $f$ et de $g$ $(3)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3x^2-4x+3` → $-2x + 2x = 0$ : les termes en $x$ s'annulent.

`3x^2+5` → $4 + (-1) = 3$.

---

EXERCICE 58 · PRATIQUE **Le produit par un binôme**

$f(x) = 2x^2 - x + 3$ et $g(x) = x - 2$. Réduire et ordonner $f(x)\,g(x)$.

**Réponse attendue :** `2x^3-5x^2+5x-6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie chaque terme de $f(x)$ par $x$, puis par $-2$.
2. Regroupe ensuite les termes de même degré.

CORRECTION

**Distribuer —**

$$f(x)\,g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x + 3x - 6$$

**Réduire —**

$$f(x)\,g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$$

Le produit d'un trinôme par un binôme est de degré $2 + 1 = 3$ : on distribue, puis on réduit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2x^3-3x^2+5x-6` → $(-x) \times x = -x^2$ : le terme en $x^2$ vaut $-4x^2 - x^2 = -5x^2$.

`2x^3-5x^2+5x+6` → $3 \times (-2) = -6$.

---

EXERCICE 59 · RAISONNEMENT

## Retrouver un polynôme

$f(x) = x^2 + 4x - 1$ et $h(x) = -x^2 + 5x + 7$. Déterminer le polynôme $g$ tel que, pour tout réel $x$, $2f(x) - 3g(x) = h(x)$.

**Réponse attendue :** `x^2+x-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Isole $g(x)$ : $3g(x) = 2f(x) - h(x)$.
2. Calcule $2f(x) - h(x)$ en changeant tous les signes de $h(x)$, puis divise par $3$.

CORRECTION

**Isoler —**

$$3g(x) = 2f(x) - h(x)$$

**Calculer —**

$$2f(x) - h(x) = 2x^2 + 8x - 2 + x^2 - 5x - 7 = 3x^2 + 3x - 9$$

**Diviser par 3 —**

$$g(x) = x^2 + x - 3$$

Les opérations sur les polynômes se manipulent comme sur les nombres : on isole $g(x)$, puis on réduit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3x^2+3x-9` → C'est $3g(x)$ qui vaut $3x^2 + 3x - 9$ : il reste à diviser par $3$.

`(x^2+13x+5)/3` → $3g(x) = 2f(x) - h(x)$ : on retranche $h(x)$, on ne l'ajoute pas.

EXERCICE 60 · BASE

## Le degré d'un triple produit

Déterminer, sans développer, le degré de $A(x) = (2x^3 + 1)(x^4 - x)(5 - x^2)$.

**Donner le degré.**

**Réponse attendue :** 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le degré d'un produit est la **somme** des degrés des facteurs.
2. Les trois facteurs sont de degrés $3$, $4$ et $2$.

CORRECTION

**Les facteurs —**

$$d^\circ(2x^3 + 1) = 3, \quad d^\circ(x^4 - x) = 4, \quad d^\circ(5 - x^2) = 2$$

**Additionner —**

$$d^\circ(A) = 3 + 4 + 2 = 9$$

Le degré d'un produit se lit sans développer : c'est la somme des degrés des facteurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

24 → On additionne les degrés d'un produit : $x^3 \times x^4 \times x^2 = x^9$.

4 → Le degré d'un produit n'est pas le plus grand des degrés : c'est leur somme.

EXERCICE 61 · PRATIQUE

## Le coefficient dominant d'un produit

Sans développer, déterminer le degré et le coefficient du terme du plus haut degré de $B(x) = (2x - 1)^3(3 - x^2)$.

**Donner le coefficient du terme du plus haut degré.**

**Réponse attendue :** -8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le terme du plus haut degré de $(2x - 1)^3$ est $(2x)^3$.
2. Multiplie-le par le terme du plus haut degré de $3 - x^2$.

CORRECTION

**Le cube —**

$$(2x)^3 = 8x^3$$

**Le produit —**

$$8x^3 \times (-x^2) = -8x^5$$

$$d^\circ(B) = 5, \quad a_5 = -8$$

Le terme du plus haut degré d'un produit, ou d'une puissance, est le produit des termes du plus haut degré.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → Le cube porte aussi sur le coefficient : $(2x)^3 = 8x^3$, pas $2x^3$.

8 → Le terme du plus haut degré de $3 - x^2$ est $-x^2$ : le coefficient est négatif.

-6 → $(2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3$ : on élève $2$ au cube, on ne le multiplie pas par $3$.

---

EXERCICE 62 · RAISONNEMENT

## Un produit moins une puissance

Déterminer le degré de $C(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) - x^4$.

**Donner le degré.**

**Réponse attendue :** 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le produit est de degré $4$, de terme du plus haut degré $x^4$ : il s'annule avec $-x^4$.
2. Pour aller vite : $(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + 1)^2 - x^2$.

CORRECTION

**Identité remarquable —**

$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$

**Réduire —**

$C(x) = x^2 + 1$

$d^\circ(C) = 2$

Quand les termes du plus haut degré se compensent, on cherche le premier coefficient non nul : le degré de $C$ est $2$, pas $4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Les termes en $x^4$ s'annulent ; il faut chercher le terme suivant.

3 → Le coefficient de $x^3$ dans le produit est $-1 + 1 = 0$ : il s'annule aussi.

---

EXERCICE 63 · BASE

## Trier les racines

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Parmi les réels $-2$, $-1$, $1$, $2$ et $3$, lesquels sont des racines de $f$ ?

**Écrire l'ensemble des racines trouvées, par exemple « {-1;4} ».**

**Réponse attendue :** `{-2;1;3}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\alpha$ est une racine de $f$ si $f(\alpha) = 0$ : calcule les cinq images.
2. Garde les parenthèses autour des nombres négatifs : $(-2)^3 = -8$.

CORRECTION

**Calculer —**

$f(-2) = -8 - 8 + 10 + 6 = 0, \quad f(-1) = -1 - 2 + 5 + 6 = 8$

$f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0, \quad f(2) = 8 - 8 - 10 + 6 = -4$

$f(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$

**Conclure —**

$\{-2; 1; 3\}$

Pour savoir si un réel est une racine, on calcule son image : $-2$, $1$ et $3$ annulent $f$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1;3}` → $f(-2) = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$ : $-2$ est aussi une racine.

---

EXERCICE 64 · PRATIQUE

## Une racine entière

$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 18$ a une seule racine entière, comprise entre $-4$ et $4$. Déterminer cette racine.

**Donner la racine.**

**Réponse attendue :** -3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Tous les coefficients sont positifs : pour $x \geq 0$, $P(x) > 0$. Cherche parmi les entiers négatifs.
2. Essaie $-1$, $-2$… en gardant les parenthèses.

CORRECTION

**Les positifs —** Pour $x \geq 0$, $P(x) \geq 18 > 0$ : aucune racine positive ou nulle.

**Essayer —**

$P(-1) = 16, \quad P(-2) = 12, \quad P(-3) = -27 + 18 - 9 + 18 = 0$

$\alpha = -3$

Une racine se cherche par essais raisonnés : le signe des coefficients élimine déjà tous les entiers positifs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → $P(3) = 27 + 18 + 9 + 18 = 72 \neq 0$ : la racine est négative.

---

EXERCICE 65 · DEFI

## Deux racines opposées

Soit $a$ un réel et $P(x) = x^3 + ax^2 - 4x - 8$. Déterminer $a$ pour que $P$ admette deux racines opposées non nulles $\alpha$ et $-\alpha$.

**Donner la valeur de a.**

**Réponse attendue :** 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $P(\alpha) = 0$ et $P(-\alpha) = 0$, puis fais la différence et la somme des deux égalités.
2. La différence donne $2\alpha^3 - 8\alpha = 0$ : comme $\alpha \neq 0$, tu obtiens $\alpha^2$.

---

CORRECTION

**Deux égalités —**

$\alpha^3 + a\alpha^2 - 4\alpha - 8 = 0, \quad -\alpha^3 + a\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0$

**La différence —**

$2\alpha^3 - 8\alpha = 0 \iff \alpha^2 = 4$

**La somme —**

$2a\alpha^2 - 16 = 0 \iff 8a = 16$

**Contrôler —** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x-2)(x+2)^2$ : $2$ et $-2$ sont bien des racines.

$a = 2$

Deux racines donnent deux équations ; les additionner et les soustraire sépare les termes de degré pair de ceux de degré impair.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → Pour $a = -2$, $P(2) = 8 - 8 - 8 - 8 = -16 \neq 0$ : la somme des deux égalités donne $8a = 16$.

---

EXERCICE 66 · BASE

## Un paramètre pour une racine

Déterminer le réel $m$ tel que $\dfrac{1}{2}$ soit une racine de $P(x) = 4x^3 + mx^2 - 3x + 2$.

**Donner la valeur de m.**

**Réponse attendue : -4**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ : c'est une équation d'inconnue $m$.
2. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

CORRECTION

**Calculer —**

$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} + \frac{m}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 1 + \frac{m}{4}$

**Résoudre —**

$1 + \frac{m}{4} = 0 \iff m = -4$

Une racine connue donne une équation sur le paramètre : on calcule $P(\alpha)$ et on l'égale à $0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $1 + \dfrac{m}{4} = 0$ donne $\dfrac{m}{4} = -1$ : $m$ est négatif.

---

EXERCICE 67 · RAISONNEMENT

## La troisième racine

---

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$, où $a$ et $b$ sont des réels. Sachant que $1$ et $2$ sont des racines de $P$, déterminer $a$ et $b$, puis la troisième racine de $P$.

**Donner la troisième racine.**

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$ donnent un système de deux équations en $a$ et $b$.
2. Ensuite, $P(x) = (x-1)(x-2)(x+c)$ : le terme constant suffit pour trouver $c$.

CORRECTION

**Le système —**

$$\begin{cases} 1 + a + b - 6 = 0 \\ 8 + 4a + 2b - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

**Résoudre —**

$a = -6, \quad b = 11$

**Le dernier facteur —** $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, et le terme constant donne $2c = -6$.

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$\gamma = 3$

Deux racines donnent deux équations, donc les deux paramètres ; la factorisation donne ensuite la dernière racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → Le dernier facteur est $x + c$ avec $c = -3$ : c'est $x - 3$, qui s'annule en $3$.

---

EXERCICE 68 · RAISONNEMENT

## Deux valeurs imposées

$P(x) = x^3 + ax + b$, où $a$ et $b$ sont des réels, vérifie $P(1) = 2$ et $P(-1) = 6$. Déterminer $a$ et $b$, puis calculer $P(2)$.

**Donner la valeur de P(2).**

**Réponse attendue :** 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque valeur connue donne une équation sur $a$ et $b$.
2. Additionne les deux équations pour trouver $b$.

CORRECTION

**Le système —**

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 7 \end{cases}$$

**Résoudre —**

$b = 4, \quad a = -3$

**Calculer —**

$P(2) = 8 - 6 + 4 = 6$

Une valeur imposée $P(\alpha) = k$ se traite comme une racine : c'est une équation sur les coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → $a = -3$ : le terme $2a$ vaut $-6$, pas $+6$.

---

EXERCICE 69 · PRATIQUE

## Un trinôme par trois valeurs

Déterminer le polynôme $P$ de degré $2$ tel que $P(0) = 3$, $P(1) = 0$ et $P(-1) = 8$.

**Réponse attendue :** `x^2-4x+3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $P(x) = ax^2 + bx + c$ : $P(0)$ donne directement $c$.
2. $P(1)$ et $P(-1)$ donnent $a + b$ et $a - b$.

CORRECTION

**Le terme constant —**

$P(0) = c = 3$

**Le système —**

$a + b + 3 = 0, \quad a - b + 3 = 8 \iff a + b = -3, \quad a - b = 5$

**Résoudre —**

$a = 1, \quad b = -4$

$P(x) = x^2 - 4x + 3$

Trois valeurs déterminent un trinôme : on pose ses trois coefficients inconnus, et chaque valeur donne une équation.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4x^2+x+3` → En additionnant les deux équations, $2a = 2$, donc $a = 1$ ; c'est $b$ qui vaut $-4$.

---

EXERCICE 70 · BASE

## Une différence de deux cubes

Factoriser $8x^3 - 1$ à l'aide de $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

**Réponse attendue :** `(2x-1)*(4x^2+2x+1)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $8x^3 = (2x)^3$ et $1 = 1^3$ : prends $a = 2x$ et $b = 1$.
2. Le second facteur est $a^2 + ab + b^2$, pas $(a + b)^2$.

CORRECTION

**Reconnaître —**

$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3$

**Appliquer —**

$8x^3 - 1 = (2x - 1)\left((2x)^2 + 2x \times 1 + 1^2\right)$

$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

On reconnaît une différence de deux cubes, puis on applique la formule ; le trinôme obtenu, de discriminant $4 - 16 < 0$, ne se factorise plus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2x-1)*(4x^2+4x+1)` → Le second facteur est $a^2 + ab + b^2 = 4x^2 + 2x + 1$ : le terme du milieu est $ab$, pas $2ab$.

---

EXERCICE 71 · PRATIQUE

## Regrouper les termes

Factoriser au maximum $E(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$.

**Réponse attendue :** `(2x-1)*(x-3)*(x+3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe les deux premiers termes, puis les deux derniers : un facteur commun apparaît.
2. Il reste une différence de deux carrés à factoriser.

CORRECTION

**Regrouper —**

$E(x) = x^2(2x - 1) - 9(2x - 1)$

**Facteur commun —**

$E(x) = (2x - 1)(x^2 - 9)$

**Identité remarquable —**

$E(x) = (2x - 1)(x - 3)(x + 3)$

Le regroupement fait apparaître un facteur commun ; on continue tant qu'un facteur se factorise encore.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2x-1)*(x^2+9)` → $-18x + 9 = -9(2x - 1)$ : le second facteur est $x^2 - 9$, pas $x^2 + 9$.

---

EXERCICE 72 · RAISONNEMENT

## Un facteur commun caché

Factoriser au maximum $F(x) = (x^2 - 1)^2 - (x + 1)^2$.

**Réponse attendue :** `x*(x-2)*(x+1)^2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ : le facteur $(x + 1)^2$ est commun aux deux termes.

2. Après l'avoir mis en facteur, il reste $(x-1)^2-1$, une différence de deux carrés.

CORRECTION

**Le facteur commun —**

$$F(x)=(x-1)^2(x+1)^2-(x+1)^2=(x+1)^2\left[(x-1)^2-1\right]$$

**Le crochet —**

$$(x-1)^2-1=(x-1-1)(x-1+1)=(x-2)\,x$$

$$F(x)=x(x-2)(x+1)^2$$

Avant de développer, on cherche un facteur commun : ici $(x+1)^2$, caché dans $(x^2-1)^2$.

---

EXERCICE 73 · BASE **Factorisable par x + 1**

Déterminer le réel $m$ tel que $P(x)=x^3-2x^2+mx+6$ soit factorisable par $(x+1)$.

**Donner la valeur de m.**

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $P$ est factorisable par $(x-\alpha)$ si et seulement si $\alpha$ est une racine de $P$.
2. Ici $x+1=x-(-1)$ : écris $P(-1)=0$.

CORRECTION

**La racine —**

$$x+1=x-(-1):\ P(-1)=0$$

**Calculer —**

$$P(-1)=-1-2-m+6=3-m$$

$$m=3$$

Être factorisable par $(x-\alpha)$ équivaut à $P(\alpha)=0$ : attention au signe de $\alpha$, ici $-1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-5 → Le facteur $x+1$ s'annule en $-1$, pas en $1$ : c'est $P(-1)$ qu'il faut annuler.

---

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT **Le terme constant du quotient**

$f(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$. Vérifier que $1$ est une racine de $f$ ; on écrit alors $f(x)=(x-1)\,g(x)$. Sans calculer $g(x)$ en entier, déterminer $g(0)$.

**Donner la valeur de g(0).**

**Réponse attendue :** -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'égalité $f(x)=(x-1)\,g(x)$ est vraie pour **tout** réel $x$ : choisis une valeur simple.

2. Remplace $x$ par $0$ des deux côtés.

CORRECTION

**Vérifier —**

$f(1) = 1 + 1 - 3 - 1 + 2 = 0$

**En x = 0 —**

$f(0) = (0-1)\,g(0) \iff 2 = -g(0)$

$g(0) = -2$

Une égalité de polynômes vraie pour tout $x$ se spécialise : en $x = 0$, elle relie directement les termes constants.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → En $x = 0$, le facteur $x - 1$ vaut $-1$ : $g(0) = -f(0)$.

---

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT **Factoriser P(x) − P(1)**

$P(x) = x^3 - 2x + 5$. Calculer $P(1)$, puis déterminer le polynôme $Q$ tel que, pour tout réel $x$, $P(x) - P(1) = (x-1)\,Q(x)$.

**Réponse attendue :** `x^2+x-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $1$ n'est pas une racine de $P$, mais c'est une racine de $P(x) - P(1)$.
2. Écris $x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + bx + c)$ et identifie.

CORRECTION

**P(1) —**

$P(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

**La différence —**

$P(x) - P(1) = x^3 - 2x + 1$

**Identifier —**

$(x-1)(x^2 + bx + c) = x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c$

$b - 1 = 0, \quad -c = 1 \iff b = 1, \quad c = -1$

$Q(x) = x^2 + x - 1$

$P(x) - P(\alpha)$ s'annule toujours en $\alpha$ : il est factorisable par $(x - \alpha)$, que $\alpha$ soit une racine de $P$ ou non.

PIÈGES ANTICIPÉS

`x^2+x+1` → Le terme constant de $(x-1)(x^2 + bx + c)$ est $-c$ ; il vaut $1$, donc $c = -1$.

---

EXERCICE 76 · PRATIQUE **Factoriser par x + 3**

Vérifier que $-3$ est une racine de $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$, puis déterminer le polynôme $Q$ tel que $P(x) = (x+3)\,Q(x)$.

**Réponse attendue :** `2x^2-x-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $P(-3)$ en gardant les parenthèses.
2. Pose $Q(x) = 2x^2 + bx + c$, développe $(x+3)\,Q(x)$ et identifie.

CORRECTION

**Vérifier —**

$$P(-3) = -54 + 45 + 12 - 3 = 0$$

**Développer —**

$$(x+3)(2x^2+bx+c) = 2x^3 + (b+6)x^2 + (c+3b)x + 3c$$

**Identifier —**

$$b+6 = 5, \quad 3c = -3 \iff b = -1, \quad c = -1$$

**Contrôler —**

$$c + 3b = -1 - 3 = -4$$

$$Q(x) = 2x^2 - x - 1$$

On vérifie la racine, on pose la forme de $Q$, on identifie, et le coefficient qui reste sert de contrôle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2x^2-x+1` → Le terme constant de $(x+3)\,Q(x)$ est $3c$, qui doit valoir $-3$ : $c = -1$.

---

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

## Une factorisation complète

$P(x) = 6x^3 - 7x^2 - x + 2$. Trouver une racine apparente de $P$, puis factoriser $P(x)$ en un produit de trois facteurs du premier degré.

**Réponse attendue :** `(x-1)*(2x+1)*(3x-2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Essaie $x = 1$ : la somme des coefficients est-elle nulle ?
2. Après $P(x) = (x-1)\,Q(x)$, factorise le trinôme $Q(x)$ à l'aide de ses racines.

CORRECTION

**Racine apparente —**

$$P(1) = 6 - 7 - 1 + 2 = 0$$

**Identifier —**

$$P(x) = (x-1)(6x^2 - x - 2)$$

**Le trinôme —** Son discriminant vaut $1 + 48 = 49$ : ses racines sont $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$.

$$6x^2 - x - 2 = (2x+1)(3x-2)$$

$$P(x) = (x-1)(2x+1)(3x-2)$$

$1$ est une racine dès que la somme des coefficients est nulle ; le quotient du second degré se factorise ensuite avec son discriminant.

---

EXERCICE 78 · BASE

## Une première division

Par la division suivant les puissances décroissantes, déterminer le polynôme $Q$ tel que $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)\,Q(x)$.

**Réponse attendue :** `x^2-2x-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Premier terme du quotient : $x^3 \div x = x^2$ ; retranche $(x-2) \times x^2$.
2. Recommence avec le reste obtenu, jusqu'à un reste nul.

CORRECTION

**1er terme —** $x^3 \div x = x^2$ ; on retranche $x^3 - 2x^2$.

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 - (x^3 - 2x^2) = -2x^2 + x + 6$$

**2e terme —** $-2x^2 \div x = -2x$ ; on retranche $-2x^2 + 4x$.

$$-2x^2 + x + 6 - (-2x^2 + 4x) = -3x + 6$$

**3e terme —** $-3x \div x = -3$ ; on retranche $-3x + 6$ : le reste est nul.

$$-3x + 6 - (-3x + 6) = 0$$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 3$$

À chaque étape, on divise le terme du plus haut degré du reste par $x$ ; un reste nul confirme que $2$ est une racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

`x^2-6x-11` → $-4x^2 - (-2x^2) = -2x^2$ : retrancher un terme négatif revient à l'ajouter.

---

EXERCICE 79 · PRATIQUE

## Diviser par 2x + 1

Par la division suivant les puissances décroissantes, déterminer le polynôme $Q$ tel que $4x^3 + 8x^2 + x - 1 = (2x+1)\,Q(x)$.

**Réponse attendue :** `2x^2+3x-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Premier terme : $4x^3 \div 2x = 2x^2$.
2. Retranche à chaque étape le produit de $(2x+1)$ par le terme trouvé.

CORRECTION

**1er terme —** $4x^3 \div 2x = 2x^2$ ; on retranche $4x^3 + 2x^2$.

$$6x^2 + x - 1$$

**2e terme —** $6x^2 \div 2x = 3x$ ; on retranche $6x^2 + 3x$.

$-2x - 1$

**3e terme —** $-2x \div 2x = -1$ ; on retranche $-2x - 1$ : le reste est nul.

$0$

$Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$

La division marche aussi avec un diviseur comme $2x + 1$ : on divise toujours les termes du plus haut degré.

---

EXERCICE 80 · RAISONNEMENT

## Diviser par x² + 1

Le polynôme $x^2 + 1$ n'a pas de racine. Par la division suivant les puissances décroissantes, déterminer le polynôme $Q$ tel que $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 3 = (x^2 + 1)\,Q(x)$.

**Réponse attendue :** `2x^2+3x+3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Premier terme : $2x^4 \div x^2 = 2x^2$ ; retranche $(x^2 + 1) \times 2x^2$.
2. Le quotient est de degré $2$ : trois étapes suffisent.

CORRECTION

**1er terme —** On retranche $2x^4 + 2x^2$.

$3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

**2e terme —** $3x^3 \div x^2 = 3x$ ; on retranche $3x^3 + 3x$.

$3x^2 + 3$

**3e terme —** $3x^2 \div x^2 = 3$ ; on retranche $3x^2 + 3$ : le reste est nul.

$0$

$Q(x) = 2x^2 + 3x + 3$

Sans racine connue, on ne peut pas factoriser par $(x - \alpha)$ ; la division, elle, marche avec n'importe quel diviseur.

---

EXERCICE 81 · DEFI

## Deux coefficients absents

Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $x^4 + ax^2 + b$ soit factorisable par $x^2 + x + 1$, puis donner le polynôme $Q$ tel que $x^4 + ax^2 + b = (x^2 + x + 1)\,Q(x)$.

**Réponse attendue :** `x^2-x+1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $Q$ est de degré $2$ et de terme du plus haut degré $x^2$ : pose $Q(x) = x^2 + px + q$.
2. Développe $(x^2 + x + 1)(x^2 + px + q)$ : les coefficients de $x^3$ et de $x$ doivent être nuls.

CORRECTION

**Développer —**

$$(x^2+x+1)(x^2+px+q) = x^4+(p+1)x^3+(q+p+1)x^2+(q+p)x+q$$

**Identifier —**

$$p+1=0, \quad q+p=0 \iff p=-1, \quad q=1$$

**Les paramètres —**

$$a=q+p+1=1, \quad b=q=1$$

$$Q(x)=x^2-x+1$$

Les termes absents ($x^3$ et $x$) ont des coefficients nuls : ce sont eux qui donnent les équations. On peut contrôler par la division : $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`x^2+x+1` → Le coefficient de $x^3$ est $p+1$ ; il doit être nul : $p=-1$.

---

EXERCICE 82 · PRATIQUE

## Deux racines, un facteur

$P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$. Vérifier que $3$ et $-2$ sont des racines de $P$, puis déterminer le polynôme $R$ tel que $P(x)=(x-3)(x+2)\,R(x)$.

**Réponse attendue :** `2x-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $R$ est de degré $3-2=1$ et son terme en $x$ est $2x$ : $R(x)=2x+c$.
2. $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$ ; compare les termes constants.

CORRECTION

**Vérifier —**

$$P(3)=54-27-33+6=0, \quad P(-2)=-16-12+22+6=0$$

**Le produit —**

$$(x-3)(x+2)=x^2-x-6$$

**Terme constant —**

$$-6c=6 \iff c=-1$$

$$R(x)=2x-1$$

Avec deux racines, le quotient perd deux degrés ; ici il est du premier degré et un seul coefficient suffit — on contrôle avec un autre terme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2x+1` → $-6c=6$ donne $c=-1$.

---

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT

## La quatrième racine

$f(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$ admet $-1$, $2$ et $-2$ pour racines. Déterminer sa quatrième racine.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

Donner la quatrième racine.

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois racines : $f(x) = (x+1)(x-2)(x+2)\,g(x)$ avec $g$ de degré $1$, de la forme $x + c$.
2. Compare les termes constants des deux membres.

CORRECTION

**La forme —**

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x+2)(x+c)$$

**Terme constant —**

$$1 \times (-2) \times 2 \times c = 12 \iff -4c = 12$$

**Conclure —**

$$c = -3$$

$$\alpha_4 = 3$$

Avec $k$ racines connues, le quotient est de degré $n - k$ ; un seul coefficient à identifier donne ici la dernière racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → Le facteur est $x - 3$ ; il s'annule en $3$, pas en $-3$.

---

EXERCICE 84 · DEFI **Trois racines imposées**

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 6$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels, admet $1$, $2$ et $3$ pour racines. Déterminer $c$.

Donner la valeur de c.

**Réponse attendue :** -17

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois racines : $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x+d)$, avec un dernier facteur du premier degré de coefficient $1$.
2. Le terme constant donne $d$ ; développe ensuite pour lire le coefficient de $x$.

CORRECTION

**La forme —**

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x+d)$$

**Terme constant —**

$$(-1)(-2)(-3)\,d = 6 \iff d = -1$$

**Développer —**

$$P(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5x + 6) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$$

$$c = -17$$

Le théorème des $k$ racines fixe la forme de $P$ ; le terme constant donne le dernier facteur — ici $1$ est racine double.

PIÈGES ANTICIPÉS

11 → $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ n'est que de degré $3$ : il manque un facteur pour atteindre le degré $4$.

---

EXERCICE 85 · BASE

## Le nombre maximal de racines

Sans développer, déterminer le nombre maximal de racines que peut avoir $P(x) = (2x^3 - x + 4)(x^2 - 7)$, d'après son degré.

**Donner le nombre maximal de racines.**

**Réponse attendue :** 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines.
2. Le degré d'un produit est la somme des degrés.

CORRECTION

**Le degré —**

$d^\circ(P) = 3 + 2 = 5$

**Conclure —**

$P$ a au plus $5$ racines

Le degré borne le nombre de racines : un polynôme de degré $5$ en a au plus $5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Le degré d'un produit est la **somme** des degrés : $3 + 2 = 5$.

---

EXERCICE 86 · PRATIQUE

## Moins de racines que le degré

Déterminer le nombre de racines de $P(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$.

**Donner le nombre de racines.**

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
2. $x^2 + 1$ ne s'annule jamais ; factorise $x^3 - 2x$.

CORRECTION

**Premier facteur —**

$x^2 + 1 \geq 1 > 0$

**Second facteur —**

$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

**Compter —**

$-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}$ : 3 racines

Le degré $(5)$ n'est qu'un maximum : un polynôme peut avoir moins de racines, ici $3$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → $5$ est le degré, donc le nombre **maximal** de racines ; le facteur $x^2 + 1$ n'en apporte aucune.

2 → $x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ : $0$ est aussi une racine.

---

EXERCICE 87 · RAISONNEMENT

## Égaux en trois points

$P(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme de degré au plus $2$ qui prend en $1$, $2$ et $3$ les mêmes valeurs que $Q(x) = x^2 + 1$. Sans calculer $a$, $b$ et $c$, déterminer $P(10)$.

**Donner la valeur de P(10).**

**Réponse attendue :** `101`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le polynôme $P - Q$ est de degré au plus $2$. Combien de racines a-t-il ?
2. Un polynôme de degré au plus $2$ qui a trois racines distinctes est le polynôme nul.

CORRECTION

**La différence —** $P - Q$ est de degré au plus $2$ et s'annule en $1$, $2$ et $3$.

**Le polynôme nul —**

$P(x) = x^2 + 1$ pour tout réel $x$

$P(10) = 100 + 1 = 101$

Trois racines pour un polynôme de degré au plus $2$, c'est une de trop : il est nul. Deux trinômes égaux en trois points sont égaux partout.

PIÈGES ANTICIPÉS

11 → $Q(10) = 10^2 + 1$ : on élève $10$ au carré.

---

EXERCICE 88 · DEFI

## Une somme qui vaut x²

Soit $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-4)}{3} - 2(x-1)(x-4) + \dfrac{8(x-1)(x-2)}{3}$. Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$, en déduire $f(x)$ pour tout réel $x$, puis calculer $f(\sqrt{7})$.

**Donner la valeur de f(√7).**

**Réponse attendue :** 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque calcul ne garde qu'un seul des trois termes : par exemple $f(1) = \dfrac{(-1)(-3)}{3} = 1$.
2. Le polynôme $f(x) - x^2$ est de degré au plus $2$ et s'annule en $1$, $2$ et $4$.

CORRECTION

**Trois valeurs —**

$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(4) = 16$

**Le polynôme nul —** $f(x) - x^2$ est de degré au plus $2$ et a trois racines distinctes, $1$, $2$ et $4$ : il est nul.

$f(x) = x^2$ pour tout réel $x$

$f(\sqrt{7}) = 7$

Plutôt que de développer, on compte les racines : un polynôme de degré au plus $2$ qui s'annule trois fois est nul.

---

EXERCICE 89 · PRATIQUE

## Trois solutions dont une fraction

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$, en cherchant une racine apparente.

**Écrire l'ensemble, par exemple « {-2;1/3;1} ».**

**Réponse attendue :** `{-1;-1/2;2}` — aussi acceptées : {-1;-0.5;2}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Essaie $x = -1$, en gardant les parenthèses.
2. Factorise par $(x + 1)$, puis résous l'équation du second degré avec le discriminant.

CORRECTION

**Racine apparente —**

$2(-1)^3 - (-1)^2 + 5 - 2 = 0$

**Factoriser —**

$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = (x + 1)(2x^2 - 3x - 2)$

**Le trinôme —** $\Delta = 9 + 16 = 25$.

$x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{3+5}{4} = 2$

$S = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 2\right\}$

Racine apparente, factorisation, discriminant : au degré $3$, la méthode ramène au second degré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-1/2;2}` → $-1$, la racine apparente, est aussi une solution.

---

EXERCICE 90 · DEFI

## Trois entiers consécutifs

Déterminer trois entiers naturels consécutifs dont le produit est égal à $8$ fois leur somme. Donner le plus petit des trois.

**Donner le plus petit des trois entiers.**

---

**Réponse attendue :** 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note $n$, $n+1$ et $n+2$ les trois entiers : leur somme vaut $3(n+1)$.
2. L'équation $n(n+1)(n+2) = 24(n+1)$ a un facteur commun, $n+1$.

CORRECTION

**Mettre en équation —**

$$n(n+1)(n+2) = 8 \times 3(n+1)$$

**Factoriser —**

$$(n+1)(n^2+2n-24) = 0 \iff (n+1)(n-4)(n+6) = 0$$

**Les entiers naturels —** $-1$ et $-6$ ne sont pas des entiers naturels.

$$n = 4$$

Un problème de degré $3$ se ramène à un produit nul ; l'énoncé (des entiers naturels) trie ensuite les solutions : $4$, $5$ et $6$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-6` → $-6$ conduit à $-6, -5, -4$ : ce ne sont pas des entiers naturels.

`120` → $120$ est le produit ; on demande le plus petit des trois entiers.

---

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

## Une inéquation large

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 - x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

**Écrire la réunion d'intervalles, par exemple « [-3;0]U[1;+inf[ ».**

**Réponse attendue :** `[-2;1]U[2;+inf[` — aussi acceptées : [-2,1]U[2,+inf[ · [-2;1]U[2;+∞[ · [-2,1]U[2,+∞[ · [-2;1]∪[2;+inf[ · [-2,1]∪[2,+inf[ · [-2;1]∪[2;+∞[ · [-2,1]∪[2,+∞[ · [2;+inf[U[-2;1] · [2,+inf[U[-2,1] · [2;+∞[U[-2;1] · [2,+∞[U[-2,1] · [2;+inf[∪[-2;1] · [2,+inf[∪[-2,1] · [2;+∞[∪[-2;1] · [2,+∞[∪[-2,1]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regroupe les termes deux par deux : $x^2(x-1) - 4(x-1)$.
2. Avec les trois racines rangées, dresse le tableau de signes ; l'inégalité est large, les racines sont des solutions.

CORRECTION

**Factoriser —**

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = (x+2)(x-1)(x-2)$$

**Signes —**

$-,\ +,\ -,\ +$ sur $]-\infty;-2[,\ ]-2;1[,\ ]1;2[,\ ]2;+\infty[$

**Conclure —**

$$S = [-2;1] \cup [2;+\infty[$$

On factorise complètement, on lit le tableau de signes, et l'inégalité large ($\geq$) fait entrer les racines : crochets fermés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-2;1[U]2;+inf[` → L'inégalité est large : en $-2$, $1$ et $2$, l'expression vaut $0$, ces réels sont des solutions.

`]-inf;-2]U[1;2]` → Ce sont les intervalles où l'expression est négative : relis le tableau de signes.

---

EXERCICE 92 · RAISONNEMENT

## Une inéquation de degré 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 - 3x^2 - 4 < 0$.

Écrire l'intervalle, par exemple « ]-1;3[ ».

**Réponse attendue :** `]-2;2[`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $X = x^2$ : le trinôme $X^2 - 3X - 4$ se factorise.
2. $x^2 + 1$ est toujours positif : seul le signe de $x^2 - 4$ compte.

CORRECTION

**Factoriser —**

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1)$$

**Le facteur positif —**

$$x^2 + 1 > 0$$

**Le signe —**

$$x^2 - 4 < 0 \iff -2 < x < 2$$

$$S = ]-2;2[$$

Un facteur du second degré sans racine garde un signe constant : on le « traverse », et l'inéquation se ramène au signe d'un seul facteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;-2[U]2;+inf[` → Pour $x < -2$ ou $x > 2$, $x^2 - 4 > 0$ : l'expression y est positive.

`[-2;2]` → L'inégalité est stricte : $-2$ et $2$ annulent l'expression, ils ne sont pas solutions.

---

EXERCICE 93 · BASE

## La somme des trois racines

$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + x + 5$ admet trois racines distinctes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Sans les calculer, déterminer $\alpha + \beta + \gamma$.

Donner la valeur de la somme.

**Réponse attendue :** 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $ax^3 + bx^2 + cx + d$, la somme des trois racines vaut $-\dfrac{b}{a}$.
2. Ici $a = 2$ et $b = -6$ : attention aux deux signes moins.

CORRECTION

**La formule —**

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

**Calculer —**

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-6}{2} = 3$

La somme des racines se lit sur les deux premiers coefficients, sans résoudre l'équation.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → La somme vaut $-\dfrac{b}{a}$ : avec $b = -6$, on obtient un nombre positif.

6 → On divise par le coefficient $a = 2$ du terme en $x^3$.

---

EXERCICE 94 · PRATIQUE

## La somme des carrés des racines

$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$ admet trois racines distinctes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Sans les calculer, déterminer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

**Donner la valeur de la somme.**

**Réponse attendue : 11**

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$.
2. Ici la somme des racines vaut $3$, et $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dfrac{c}{a} = -1$.

CORRECTION

**Les relations —**

$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$

**La somme des carrés —**

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3^2 - 2 \times (-1) = 11$

On exprime la quantité demandée avec la somme et la somme des produits deux à deux, qui se lisent sur les coefficients.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → $-2 \times (-1) = +2$ : on ajoute $2$ à $9$.

9 → $(\alpha + \beta + \gamma)^2$ contient aussi les doubles produits : il faut retrancher $2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$.

---

EXERCICE 95 · DEFI

## Un produit décalé

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2$ admet trois racines distinctes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Sans les calculer, déterminer la valeur exacte de $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

**Donner la valeur exacte.**

**Réponse attendue :** `-1/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $P(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ pour tout réel $x$ : choisis bien la valeur de $x$.
2. En $x = -1$, chaque facteur $-1-\alpha$ vaut $-(\alpha+1)$.

CORRECTION

**La factorisation —**

$$P(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

**En x = −1 —**

$$P(-1) = 3(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma) = -3(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

**Calculer —**

$$P(-1) = -3-5+7+2 = 1$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = -\tfrac{1}{3}$$

Évaluer la forme factorisée en un point bien choisi donne d'un coup un produit portant sur les racines ; contrôle : $1 + \dfrac{5}{3} - \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → Chacun des trois facteurs $-1-\alpha$ change de signe : $(-1)^3 = -1$.

`-1` → $P(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ : on divise par le coefficient $3$.

`-0.33 / -0.333` → On demande la valeur exacte : garde la fraction.

---

EXERCICE 96 · PRATIQUE

## Un symétrique sans autre racine

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$.

**Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {2} ».**

**Réponse attendue :** `{-1}` — aussi acceptées : -1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les coefficients se lisent de la même façon dans les deux sens : $-1$ est une racine apparente.
2. Factorise par $(x+1)$ et étudie le discriminant du trinôme qui reste.

CORRECTION

**Racine apparente —**

$$2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 2 = -2+3-3+2 = 0$$

**Factoriser —**

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x+1)(2x^2+x+2)$$

**Le trinôme —**

$$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$$

$$S = \{-1\}$$

Un polynôme symétrique de degré $3$ a toujours la racine $-1$ ; le trinôme quotient décide des autres solutions.

PIÈGES ANTICIPÉS

{1} → $2+3+3+2=10\neq 0$ : la racine apparente d'un symétrique de degré $3$ est $-1$.

---

EXERCICE 97 · PRATIQUE

## Le paramètre d'un symétrique

Soit $b$ un réel et $f(x)=2x^3+bx^2+bx+2$. Déterminer $b$ pour que l'équation $f(x)=0$ ait exactement deux solutions, $-1$ et $1$.

Donner la valeur de b.

**Réponse attendue :** `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $-1$ est toujours une racine ; il faut que $1$ en soit une aussi.
2. Écris $f(1)=0$.

CORRECTION

La racine 1 —

$$f(1)=2+b+b+2=4+2b=0 \iff b=-2$$

Contrôler —

$$f(x)=(x+1)(2x^2-4x+2)=2(x+1)(x-1)^2$$

$b=-2$

C'est le cas $b=-a$ : le trinôme quotient devient $a(x-1)^2$, et les solutions sont exactement $-1$ et $1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Pour $b=6$, $f(x)=2(x+1)^3$ : une seule solution, $-1$.

---

EXERCICE 98 · DEFI

## Un symétrique de degré 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$, en posant $X=x+\dfrac{1}{x}$.

Écrire l'ensemble, par exemple « {2;(1-√3)/2;(1+√3)/2} ».

**Réponse attendue :** `{1;(3-√5)/2;(3+√5)/2}` — aussi acceptées : {1;(3-sqrt(5))/2;(3+sqrt(5))/2} · {1;(3-sqrt5)/2;(3+sqrt5)/2} · {1;(3-√(5))/2;(3+√(5))/2} · {1;3/2-√5/2;3/2+√5/2} · {1;3/2-sqrt(5)/2;3/2+sqrt(5)/2} · {1;1,5-√5/2;1,5+√5/2}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $0$ n'est pas solution : divise par $x^2$ et regroupe $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ et $x+\dfrac{1}{x}$.
2. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=X^2-2$ : l'équation en $X$ est du second degré.

CORRECTION

**Diviser par $x^2$ —**

$$\left(x^2+\tfrac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\tfrac{1}{x}\right)+8=0$$

**Poser X —**

$$X^2-2-5X+8=0 \iff X^2-5X+6=0 \iff X=2 \text{ ou } X=3$$

**X = 2 —**

$$x+\tfrac{1}{x}=2 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1$$

**X = 3 —**

$$x+\tfrac{1}{x}=3 \iff x^2-3x+1=0 \iff x=\tfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$S=\left\{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2};1;\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Un symétrique de degré $4$ se ramène, en posant $X=x+\dfrac{1}{x}$, à des équations du second degré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2;3}` → $2$ et $3$ sont les valeurs de $X$ ; il reste à résoudre $x+\dfrac{1}{x}=X$ pour chacune.

`{(3-√5)/2;(3+√5)/2}` → $X=2$ donne aussi une solution : $x=1$.

---

EXERCICE 99 · BASE

## Les valeurs interdites

Déterminer les valeurs interdites de la fonction rationnelle $h : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

**Écrire l'ensemble des valeurs interdites, par exemple « {-1;4} ».**

**Réponse attendue :** `{2;3}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une valeur est interdite quand elle annule le dénominateur.
2. Résous $x^2-5x+6=0$.

CORRECTION

**Le dénominateur —**

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

**Ses racines —**

$$x=2 \text{ ou } x=3$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$$

Une fonction rationnelle est définie partout sauf aux racines de son dénominateur ; le numérateur n'intervient pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-1}` / `{-1;2;3}` → $-1$ annule le numérateur : en $-1$, $h$ est définie et vaut $0$. Seul le dénominateur donne des valeurs interdites.

`{-3;-2}` → $(x-2)(x-3)$ s'annule en $2$ et en $3$.

---

EXERCICE 100 · PRATIQUE

## Simplifier une fonction rationnelle

Soit $h : x \mapsto \dfrac{x^3-4x}{x^2-4x+4}$, définie pour $x \neq 2$. Factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier $h(x)$.

**Réponse attendue :** `(x^2+2x)/(x-2)` — aussi acceptées : x*(x+2)/(x-2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $x^3-4x = x(x^2-4)$, et le dénominateur est une identité remarquable.
2. Simplifie par le facteur commun $x-2$, qui n'est pas nul pour $x \neq 2$.

CORRECTION

**Numérateur —**

$x^3-4x = x(x-2)(x+2)$

**Dénominateur —**

$x^2-4x+4 = (x-2)^2$

**Simplifier —**

$h(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x(x+2)}{x-2}$

On factorise numérateur et dénominateur avant de simplifier ; la simplification n'est valable que là où $h$ est définie, pour $x \neq 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`x*(x+2)` → Le dénominateur est $(x-2)^2$ : après simplification, il reste un facteur $x-2$ en bas.

---

EXERCICE 101 · RAISONNEMENT

## Le zéro qui n'en est pas un

Soit $h : x \mapsto \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$. Déterminer l'ensemble de définition de $h$, puis résoudre l'équation $h(x) = 0$.

**Écrire l'ensemble des solutions, par exemple « {3} ».**

**Réponse attendue :** `{-2}` — aussi acceptées : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $1$ est une racine apparente du numérateur : factorise-le complètement.
2. Une solution de $h(x) = 0$ annule le numérateur **et** appartient à l'ensemble de définition.

CORRECTION

**Définition —**

$x^2-1 \neq 0 \iff x \neq -1$ et $x \neq 1$

**Le numérateur —**

$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2)$

**Simplifier —**

$h(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x+1}$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$

**Résoudre —** $1$ annule le numérateur, mais c'est une valeur interdite.

$S = \{-2\}$

On résout toujours dans l'ensemble de définition : une racine du numérateur qui annule aussi le dénominateur n'est pas une solution.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2;1}` → $1$ annule le dénominateur : $h(1)$ n'existe pas, ce n'est pas une solution.

---

EXERCICE 102 · RAISONNEMENT **Dépasser 0,95**

Sachant que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, on pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Exprimer $S_n$ en fonction de $n$, puis déterminer le plus petit entier $n$ tel que $S_n > 0{,}95$.

**Donner la valeur de n.**

**Réponse attendue :** `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris chaque terme comme une différence : en additionnant, tout se simplifie sauf le premier et le dernier terme.
2. Résous ensuite l'inéquation $\dfrac{n}{n+1} > 0{,}95$, en multipliant par $n+1 > 0$.

CORRECTION

**En cascade —**

$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

**L'inéquation —** Comme $n+1 > 0$, on peut multiplier les deux membres par $n+1$.

$\frac{n}{n+1} > 0{,}95 \iff 0{,}05\,n > 0{,}95 \iff n > 19$

**Le plus petit entier —** $S_{19} = \dfrac{19}{20} = 0{,}95$ exactement : ce n'est pas plus grand.

$n = 20$

La décomposition donne $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ ; l'inéquation se résout ensuite comme au premier degré, et l'inégalité stricte exclut $n = 19$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`19` → $S_{19} = \dfrac{19}{20} = 0{,}95$ : l'inégalité est stricte, $S_{19}$ ne dépasse pas $0{,}95$.

21 → Le dernier terme qui reste est $-\dfrac{1}{n+1}$, pas $-\dfrac{1}{n}$ : $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

---

EXERCICE 103 · DEFI

## Une cascade de pas 2

Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $x$ différent de $0$ et de $-2$, $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2}$, puis calculer la valeur exacte de $S = \dfrac{1}{1\times 3} + \dfrac{1}{3\times 5} + \cdots + \dfrac{1}{19\times 21}$.

**Donner la valeur exacte.**

**Réponse attendue :** `10/21`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2}$ au même dénominateur et identifie les numérateurs : $(a+b)x + 2a = 1$.
2. Avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$, chaque terme de $S$ est la moitié d'une différence.

CORRECTION

**Identifier —**

$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x+2a}{x(x+2)} \iff a+b=0, \quad 2a=1$

**La décomposition —**

$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$

**En cascade —**

$S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right)$

$S = \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} = \frac{10}{21}$

On décompose par identification, puis la somme se simplifie en cascade ; le facteur $\dfrac{1}{2}$ vient de l'écart $2$ entre les deux facteurs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20/21` → $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}\right)$ : n'oublie pas le facteur $\dfrac{1}{2}$.

`0.48 / 0.476` → On demande la valeur exacte : garde la fraction.

---

EXERCICE 104 · DEFI

## Trois fractions simples

Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout réel $x$ différent de $0$, de $-1$ et de $-2$, $\dfrac{4x+2}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$. Donner $c$.

**Donner la valeur de c.**

**Réponse attendue :** `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis au même dénominateur : $4x+2 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)$ pour tout $x$.
2. Cette égalité de polynômes est vraie pour tout $x$ : remplace $x$ par $0$, $-1$ puis $-2$.

CORRECTION

**Les numérateurs —**

$$4x+2 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)$$

**En x = 0 et x = −1 —**

$$2 = 2a \iff a = 1, \quad -2 = -b \iff b = 2$$

**En x = −2 —**

$$-6 = 2c \iff c = -3$$

**Contrôler —** Le coefficient de $x^2$ vaut $a+b+c = 0$, comme à gauche.

$$c = -3$$

Après réduction au même dénominateur, on obtient une égalité de polynômes : on la spécialise aux valeurs qui annulent tous les termes sauf un.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → En $x = -2$ : $c \times (-2) \times (-1) = 2c$ et $4 \times (-2) + 2 = -6$.



AH Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI