— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Orthogonalité dans l'espace

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum bech nfassrou m3a b3adhna le chapitre numéro dix-huit : orthogonalité dans l'espace. Fi le chapitre elli fet, chofna le parallélisme dans l'espace. Lyoum nzidou l'orthogonalité. Nabdew b les droites orthogonales. Ba3d nchoufou droite perpendiculaire à un plan, w kifech nbayynouha. W ba3d le plan médiateur d'un segment, w l'axe d'un cercle. W nkammlou b les plans perpendiculaires. Yalla, nabdew.

عسلامة ! ليوم باش نفسّرو مع بعضنا le chapitre numéro dix-huit : orthogonalité dans l'espace في . le parallélisme dans l'espace شفنا ، فات اللي chapitre ليوم نزيدو l'orthogonalité . نبداو بـ les droites orthogonales . بعد نشوفو droite perpendiculaire à un plan ، w كيفاش نبيّنوها . بعد w le plan médiateur d'un segment ، w l'axe d'un cercle . w نكمّلو بـ les plans perpendiculaires . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Aujourd'hui, on va expliquer ensemble le chapitre numéro dix-huit : orthogonalité dans l'espace. Dans le chapitre précédent, nous avons vu le parallélisme dans l'espace. Aujourd'hui, nous ajoutons l'orthogonalité. Nous commencerons par les droites orthogonales. Puis nous verrons une droite perpendiculaire à un plan, et comment le démontrer. Ensuite le plan médiateur d'un segment, et l'axe d'un cercle. Et nous terminerons par les plans perpendiculaires. Allez, on commence.

Ce chapitre poursuit la **géométrie dans l'espace** : après le parallélisme, on étudie l'**orthogonalité**.

On y définit deux droites orthogonales, une droite perpendiculaire à un plan et deux plans perpendiculaires, avec les propriétés qui permettent de démontrer une orthogonalité, de reconnaître le plan médiateur d'un segment et l'axe d'un cercle, et de calculer des longueurs dans un cube, un tétraèdre ou une pyramide.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Reconnaître et démontrer que deux droites de l'espace sont orthogonales
  > Reconnaître et démontrer que deux droites de l'espace sont orthogonales.
  > *Reconnaître et démontrer que deux droites de l'espace sont orthogonales.*
- Démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan
  > Démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan.
  > *Démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan.*
- Utiliser une droite perpendiculaire à un plan pour démontrer une orthogonalité ou calculer une longueur
  > Utiliser une droite perpendiculaire à un plan pour démontrer une orthogonalité ou calculer une longueur.
  > *Utiliser une droite perpendiculaire à un plan pour démontrer une orthogonalité ou calculer une longueur.*
- Reconnaître le plan médiateur d'un segment et l'axe d'un cercle
  > Reconnaître le plan médiateur d'un segment et l'axe d'un cercle.
  > *Reconnaître le plan médiateur d'un segment et l'axe d'un cercle.*
- Démontrer que deux plans sont perpendiculaires
  > Démontrer que deux plans sont perpendiculaires.
  > *Démontrer que deux plans sont perpendiculaires.*

1. ACTIVITÉ

Pour comprendre : des droites perpendiculaires dans un cube

CE QU'IL DIT

Nabdew b cube ABCDEFGH. Les faces mte3ou el koll carrés. Fi face wa7da, nraj3ou l la géométrie plane : deux côtés consécutifs d'un carré sont perpendiculaires. Mathalan fi le carré ABCD, la droite (AB) perpendiculaire à la droite (AD). W bech net3addew men face l face, nesta3mlou les parallèles. La droite qui passe par C et parallèle à la droite (AE), hiya la droite (CG). W la parallèle à la droite (GH) qui passe par C, hiya la droite (CD). W fi le carré CDHG, la droite (CG) perpendiculaire à la droite (CD).

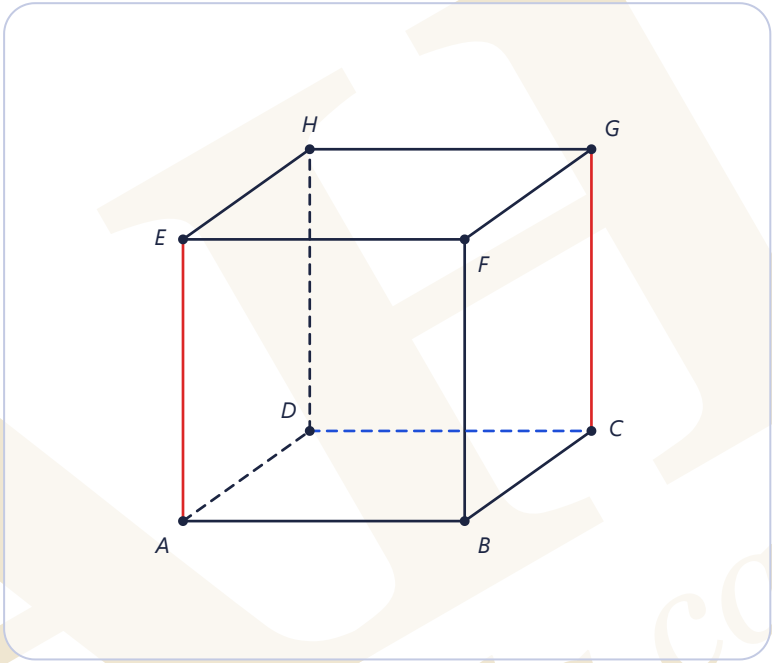
la géométrie plane : لـ نرجعو ، وحدة face في . carrés متاعو الكل cube A B C D E F G H . les faces بـ نبداو le carré A B C D ، la droite A B مثلا في . deux côtés consécutifs d'un carré sont perpendiculaires les parallèles . la droite qui passe نستعملو ، face لـ face من باش نتعدّاو perpendiculaire à la droite A D . w la هي ، la droite C G . w la parallèle à la droite G H qui passe par C هي ، par C et parallèle à la droite A E . le carré C D H G ، la droite C G perpendiculaire à la droite C D في droite C D . w

Commençons par un cube A B C D E F G H. Toutes ses faces sont des carrés. Dans une face, on retrouve la géométrie plane : deux côtés consécutifs d'un carré sont perpendiculaires. Par exemple, dans le carré A B C D, la droite A B est perpendiculaire à la droite A D. Et pour passer d'une face à une autre, on utilise les parallèles. La droite qui passe par C et qui est parallèle à la droite A E, c'est la droite C G. La parallèle à la

droite G H qui passe par C, c'est la droite C D. Et dans le carré C D H G, la droite C G est perpendiculaire à la droite C D.

Dans la figure, $ABCDEFGH$ est un cube : ses six faces sont des carrés.

Dans une face, on retrouve la géométrie plane : deux côtés consécutifs d'un carré sont **perpendiculaires**. Pour passer d'une face à une autre, on utilise les **parallèles** : par un point, il passe une seule parallèle à une droite donnée.



(AE) et (CG) sont parallèles ; (CG) et (CD) sont perpendiculaires.

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les arêtes [AE] et [CG] sont repassées en rouge, l'arête [CD] en bleu.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Nommer deux droites perpendiculaires du plan (ABC), puis deux droites perpendiculaires du plan (ADE). 2) Quelle est la droite passant par C et parallèle à (AE) ? Celle passant par C et parallèle à (GH) ? Celle passant par H et parallèle à (AE) ? 3) Justifier que les droites (CG) et (CD) sont perpendiculaires.

Dans une face — $ABCD$ est un carré : (AB) et (AD) sont perpendiculaires. La face $ADHE$ est un carré du plan (ADE) : (AD) et (AE) sont perpendiculaires.

1) (AB) et (AD) ; (AD) et (AE)

Les parallèles — Les arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont parallèles ; l'arête $[CD]$ est parallèle à $[GH]$.

2) (CG) ; (CD) ; (HD)

Dans la face CDHG — $CDHG$ est un carré : ses côtés consécutifs $[CG]$ et $[CD]$ sont perpendiculaires.

3) (CG) et (CD) sont perpendiculaires

(CG), (CD) et (HD)

À ne pas faire : Les droites (AE) et (CD) sont perpendiculaires — Les droites (AE) et (CD) n'ont aucun point commun : elles ne sont pas perpendiculaires. Deux droites perpendiculaires se coupent, et elles sont dans un même plan.

---

2. DÉFINITION

Droites orthogonales

CE QU'IL DIT

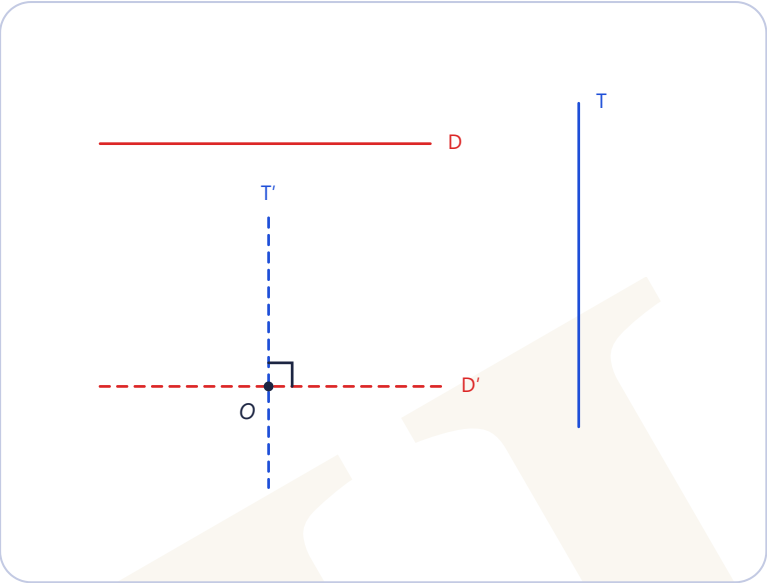
Tawa la définition. On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont deux droites perpendiculaires. Ya3ni ne5dhou point O, nrasmou mennou la parallèle à la première droite w la parallèle à la deuxième. Ken ez-zouz parallèles hedhom perpendiculaires, n9oulou les deux droites sont orthogonales. Thabbet mli7 : deux droites orthogonales mouch lezem yetle9aw. Mithel fi le cube : la droite (AE) w la droite (BC) ma yetle9awch. Ama la parallèle à la droite (AE) qui passe par B hiya la droite (BF), w la droite (BF) perpendiculaire à la droite (BC). Donc la droite (AE) w la droite (BC) sont orthogonales. W kelmet perpendiculaires n5alliwha l deux droites orthogonales elli yetle9aw.

la définition . on dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par تو2ة
la parallèle à la نرسمو منّو ، point O يعني ناخذو . un même point sont deux droites perpendiculaires
les deux نقولو ، perpendiculaires هاذم parallèles الزوز كان . première droite w la parallèle à la deuxième
le cube : la في مثال . موش لازم يتلاقاو deux droites orthogonales : ثبّت مليح . droites sont orthogonales
la droite B F ، w هي la parallèle à la droite A E qui passe par B أما . ما يتلاقاوش droite A E w la droite B C
la droite B F perpendiculaire à la droite B C . donc la droite A E w la droite B C sont orthogonales . w
كلمة perpendiculaires نخلّيوها لـ deux droites orthogonales اللي يتلاقاو .

Voici maintenant la définition. On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont deux droites perpendiculaires. Autrement dit, on prend un point O, on trace par ce point la parallèle à la première droite et la parallèle à la deuxième. Si ces deux parallèles sont perpendiculaires, on dit que les deux droites sont orthogonales. Fais bien attention : deux droites orthogonales ne se coupent pas forcément. Un exemple dans le cube : la droite A E et la droite B C ne se rencontrent pas. Mais la parallèle à la droite A E qui passe par B, c'est la droite B F, et la droite B F est perpendiculaire à la droite B C. Donc la droite A E et la droite B C sont orthogonales. Et le mot perpendiculaires, on le garde pour deux droites orthogonales qui se coupent.

Définition. On dit que deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un même point sont deux droites perpendiculaires.

Remarque. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et sécantes. Mais deux droites orthogonales ne se coupent pas forcément : elles peuvent ne pas être dans un même plan.



D et T sont orthogonales : leurs parallèles D' et T' menées par O sont perpendiculaires.

En haut à gauche, une droite D horizontale, en rouge. À droite, une droite T verticale, en bleu, qui ne rencontre pas D. En bas, un point O : par O passent la droite D', parallèle à D, en pointillés rouges, et la droite T', parallèle à T, en pointillés bleus. D' et T' sont perpendiculaires en O : un angle droit est marqué.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que les droites (AE) et (BC) sont orthogonales.

Par le point B — La parallèle à (AE) menée par B est (BF), et la parallèle à (BC) menée par B est (BC) elle-même.

(BF) est parallèle à (AE)

Dans la face BCGF — $BCGF$ est un carré : (BF) et (BC) sont perpendiculaires.

(BF) est perpendiculaire à (BC)

Conclusion — Les parallèles à (AE) et à (BC) menées par B sont perpendiculaires : (AE) et (BC) sont orthogonales, alors qu'elles n'ont aucun point commun.

(AE) et (BC) sont orthogonales

(AE) et (BC) sont orthogonales

À ne pas faire : (AE) et (BC) sont orthogonales, donc elles se coupent — (AE) et (BC) sont orthogonales et n'ont aucun point commun. Ce sont leurs parallèles menées par un même point qui sont perpendiculaires : les droites elles-mêmes peuvent être non coplanaires.

À ne pas faire : (AE) et (BC) sont perpendiculaires — (AE) et (BC) sont orthogonales. On réserve le mot « perpendiculaires » à deux droites orthogonales qui se coupent.

3. PROPRIÉTÉ

Propriétés 13, 14 et 15

CE QU'IL DIT

Men la définition nestantjou trois propriétés. La propriété 13 : si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. La propriété 14 : si deux droites de l'espace sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre. W la propriété 15 tjam3hom : ken D w T orthogonales, w D' parallèle à D, w T' parallèle à T, alors D' et T' sont orthogonales. Ya3ni, bech tbayyen deux droites orthogonales, tnajjem tbaddel koll wa7da b parallèle liha. Mithel fi parallélépipède rectangle : la droite (EA) parallèle à la droite (FB), w la droite (FB) perpendiculaire à la droite (BC). Donc la droite (EA) orthogonale à la droite (BC). Thabbet mli7 : deux droites orthogonales à une même troisième, mouch dima parallèles.

من la définition نستنتجو trois propriétés . la propriété treize : si deux droites de l'espace sont orthogonales ، alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre . la propriété quatorze : si deux droites de l'espace sont parallèles ، toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre . w la propriété quinze تجمعهم : كان ، D w T orthogonales ، w D prime parallèle à D ، w T prime parallèle à T ، alors D prime et T prime sont orthogonales . يعني ، باش تبيّن deux droites orthogonales ، تنجّم تبدّل كل parallélépipède rectangle : la droite E A parallèle à la droite F B ، w la مثال في . ليها parallèle وحدة بـ droite F B perpendiculaire à la droite B C . donc la droite E A orthogonale à la droite B C : ثبّت مليح . parallèles موش ديما ، deux droites orthogonales à une même troisième

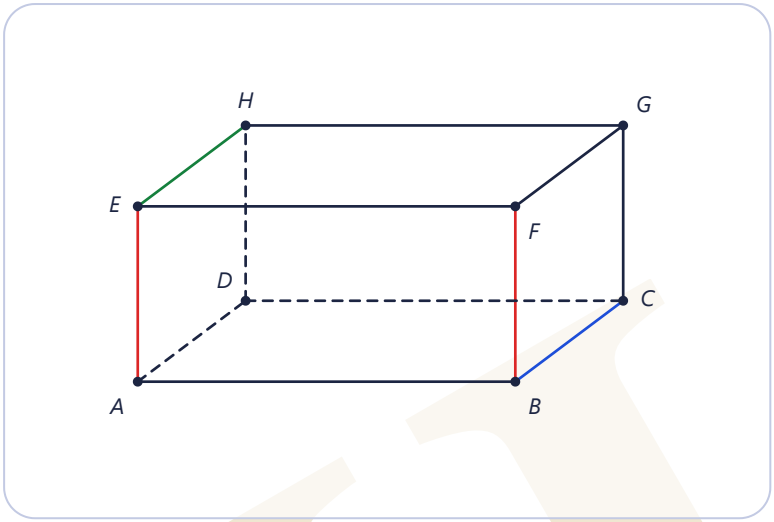
De la définition, on déduit trois propriétés. La propriété treize : si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. La propriété quatorze : si deux droites de l'espace sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre. Et la propriété quinze les réunit : si D et T sont orthogonales, si D prime est parallèle à D et T prime parallèle à T, alors D prime et T prime sont orthogonales. Autrement dit, pour montrer que deux droites sont orthogonales, tu peux remplacer chacune par une parallèle. Un exemple dans un parallélépipède rectangle : la droite E A est parallèle à la droite F B, et la droite F B est perpendiculaire à la droite B C. Donc la droite E A est orthogonale à la droite B C. Fais bien attention : deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas toujours parallèles.

On déduit de la définition les propriétés suivantes.

Propriété 13. Si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 14. Si deux droites de l'espace sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 15. Si D et T sont deux droites orthogonales et si D' et T' sont deux droites parallèles respectivement à D et à T, alors D' et T' sont orthogonales.



(EA) est parallèle à (FB), et (FB) est perpendiculaire à (BC).

Un parallélépipède rectangle ABCDEFGH vu en perspective, plus long que haut : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les arêtes [EA] et [FB] sont repassées en rouge, l'arête [BC] en bleu, l'arête [EH] en vert.

DÉMONSTRATION

Propriété 15. Soit O un point de l'espace. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles : la parallèle à D' menée par O est donc aussi la parallèle à D menée par O, et de même pour T' et T. Comme D et T sont orthogonales, ces deux parallèles sont perpendiculaires : D' et T' sont orthogonales.

Propriétés 13 et 14. Ce sont deux cas particuliers de la propriété 15 : on garde l'une des deux droites, puisqu'une droite est parallèle à elle-même, et on remplace l'autre par une droite qui lui est parallèle.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle : ses faces sont des rectangles. 1) Montrer que les droites (EA) et (BC) sont orthogonales. 2) Montrer que les droites (DH) et (EF) sont orthogonales. 3) Nommer deux droites sécantes orthogonales à la droite (EF).

(EA) et (BC) — (FB) est perpendiculaire à (BC) dans le rectangle $BCGF$, donc orthogonale. (EA) est parallèle à (FB) : par la propriété 13, elle est orthogonale à (BC).

1) (EA) est orthogonale à (BC)

(DH) et (EF) — Dans le rectangle $ABFE$, (AE) est perpendiculaire à (EF). (DH) est parallèle à (AE) : par la propriété 13, (DH) est orthogonale à (EF).

2) (DH) est orthogonale à (EF)

Deux sécantes — (AE) est perpendiculaire à (EF) dans le rectangle $ABFE$, et (EH) est perpendiculaire à (EF) dans le rectangle $EFGH$. Les droites (AE) et (EH) se coupent en E.

3) (AE) et (EH)

(AE) et (EH)

À ne pas faire : Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles — Deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas forcément parallèles. (AE) et (EH) sont toutes deux

orthogonales à (EF), et elles se coupent en E.

4. APPLICATION

Exemple : une section rectangle dans un tétraèdre

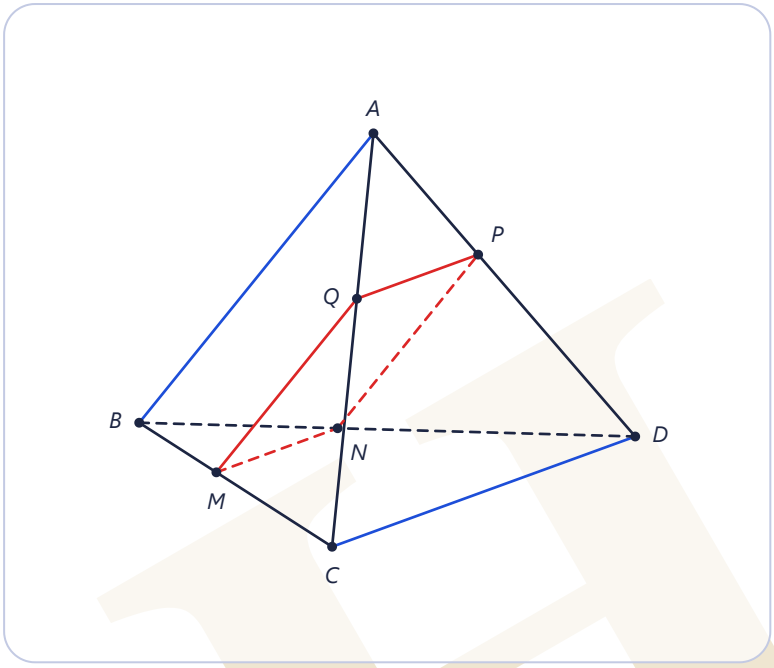
CE QU'IL DIT

Ne5dhou tétraèdre ABCD, w la droite (AB) orthogonale à la droite (CD). M point de l'arête [BC]. El plan elli yet3adda men M w parallèle à la droite (AB) w à la droite (CD), y9oss les arêtes fi N, P w Q. El plan hedha parallèle à la droite (AB), w y9oss le plan (ABC) fi la droite (MQ). Donc la droite (MQ) parallèle à la droite (AB). Kif kif, la droite (MN) parallèle à la droite (CD). W 5ater la droite (AB) w la droite (CD) orthogonales, les parallèles mte3hom zeda orthogonales : la droite (MQ) orthogonale à la droite (MN). W houma yetle9aw fi M, donc le triangle QMN rectangle en M. W MNPQ parallélogramme 3andou angle droit, donc houwa rectangle.

plan الـ . tétraèdre A B C D ، w la droite A B orthogonale à la droite C D . M point de l'arête B C ناخذو اللي يتعدّى من M w parallèle à la droite A B w à la droite C D ، يقصّ les arêtes في P w Q ، N . الـ plan هذا la droite M Q . donc la droite M Q parallèle à la droite في le plan A B C يقصّ parallèle à la droite A B ، w A B . كيف كيف ، w la droite M N parallèle à la droite C D . w خاطر la droite C D w la droite A B orthogonales : la droite M Q orthogonale à la droite M N . w متاعهم زادة parallèles الـ ، orthogonales هوما يتلاقاو في M ، donc le triangle Q M N rectangle en M . w M N P Q parallélogramme عندو angle droit ، donc هو rectangle .

Prenons un tétraèdre A B C D, où la droite A B est orthogonale à la droite C D. M est un point de l'arête B C. Le plan qui passe par M et qui est parallèle à la droite A B et à la droite C D coupe les arêtes en N, P et Q. Ce plan est parallèle à la droite A B, et il coupe le plan A B C suivant la droite M Q. Donc la droite M Q est parallèle à la droite A B. De même, la droite M N est parallèle à la droite C D. Et comme la droite A B et la droite C D sont orthogonales, leurs parallèles le sont aussi : la droite M Q est orthogonale à la droite M N. Elles se coupent en M, donc le triangle Q M N est rectangle en M. Et M N P Q est un parallélogramme qui a un angle droit : c'est un rectangle.

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales, et M est un point de l'arête $[BC]$. Le plan qui passe par M et qui est parallèle aux droites (AB) et (CD) coupe $[BD]$ en N, $[AD]$ en P et $[AC]$ en Q.



Le plan (MNPQ) est parallèle à (AB) et à (CD).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête cachée [BD] est en pointillés. Le point M est sur l'arête [BC], N sur l'arête [BD], P sur l'arête [AD] et Q sur l'arête [AC]. Le quadrilatère MNPQ est tracé en rouge : [MQ] est parallèle à [AB], [MN] à [CD] ; les côtés [MN] et [NP], cachés, sont en pointillés.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que (MQ) est parallèle à (AB) et que (MN) est parallèle à (CD). 2) Montrer que le triangle QMN est rectangle en M. 3) Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

Deux parallèles — Le plan $(MNPQ)$ est parallèle à la droite (AB) et coupe le plan (ABC), qui contient (AB), suivant la droite (MQ) : (MQ) est parallèle à (AB). De même, il coupe le plan (BCD) suivant (MN), parallèle à (CD).

(MQ) est parallèle à (AB) ; (MN) est parallèle à (CD)

L'angle en M — (AB) et (CD) sont orthogonales, et (MQ), (MN) leur sont parallèles : par la propriété 15, (MQ) et (MN) sont orthogonales. Elles se coupent en M : elles sont perpendiculaires.

$\widehat{QMN} = 90°$

La nature — De même, (PQ) est parallèle à (CD) dans le plan (ACD), et (NP) est parallèle à (AB) dans le plan (ABD) : $MNPQ$ a ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

$MNPQ$ est un rectangle

> $MNPQ$ est un rectangle

À ne pas faire : (MQ) et (MN) sont orthogonales, donc $MNPQ$ est un carré — $MNPQ$ est un rectangle ; c'est un carré seulement si $MQ = MN$. L'orthogonalité donne l'angle droit, pas l'égalité des côtés.

5. EXEMPLE

Exemple : deux droites orthogonales qui ne se coupent pas

CE QU'IL DIT

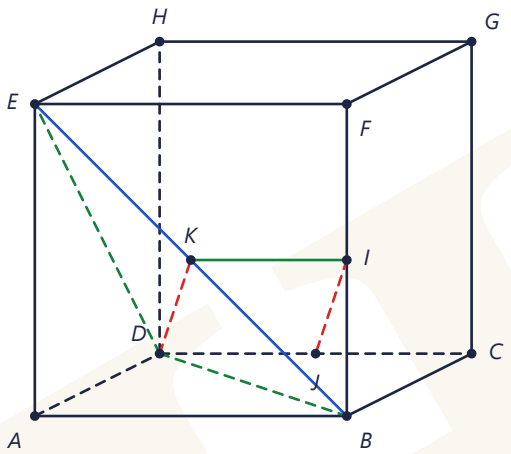
Ne5dhou cube ABCDEFGH. I milieu de [FB], J milieu de [CD], w K milieu de [BE]. N7ebbou nbayynou elli la droite (BE) w la droite (IJ) orthogonales, w houma ma yetle9awch. El fekra : nbaddlou la droite (IJ) b parallèle liha t9oss la droite (BE). Fi le triangle BEF, le vecteur KI égale un demi du vecteur EF. W le vecteur DJ égale un demi du vecteur DC, w le vecteur DC égale le vecteur EF. Donc KIJD parallélogramme, w la droite (DK) parallèle à la droite (IJ). Tawa le triangle EDB : les côtés mte3ou el koll diagonales de faces, donc houwa équilatéral, w la médiane (DK) hiya zeda hauteur. Donc la droite (DK) perpendiculaire à la droite (EB), w la droite (IJ) orthogonale à la droite (BE).

la droite اللي نحبّو نبيّنو . cube A B C D E F G H . I milieu de F B ، J milieu de C D ، w K milieu de B E ناخذو هوما ما يتلاقاوش . الفكرة : نبدّلو la droite I J بـ parallèle la تقصّ ليها la droite I J orthogonales ، w B E w la droite le triangle B E F ، le vecteur K I égale un demi du vecteur E F . w le vecteur D J égale un في . droite B E demi du vecteur D C ، w le vecteur D C égale le vecteur E F . donc K I J D parallélogramme ، w la droite هو diagonales de faces ، donc الكل متاعو le triangle E D B : les côtés توّة . D K parallèle à la droite I J hauteur . donc la droite D K perpendiculaire à la droite E B ، w la زادة هي équilatéral ، w la médiane D K . droite I J orthogonale à la droite B E

Prenons un cube A B C D E F G H. I est le milieu de F B, J le milieu de C D, et K le milieu de B E. Nous voulons montrer que la droite B E et la droite I J sont orthogonales, alors qu'elles ne se coupent pas. L'idée : remplacer la droite I J par une parallèle qui coupe la droite B E. Dans le triangle B E F, le vecteur K I est égal à un demi du vecteur E F. Et le vecteur D J est égal à un demi du vecteur D C, avec le vecteur D C égal au vecteur E F. Donc K I J D est un parallélogramme, et la droite D K est parallèle à la droite I J. Regardons maintenant le triangle E D B : ses côtés sont tous des diagonales de faces, donc il est équilatéral, et sa médiane D K est aussi une hauteur. Donc la droite D K est perpendiculaire à la droite E B, et la droite I J est orthogonale à la droite B E.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a. I et J sont les milieux respectifs de $[FB]$ et $[CD]$, et K est le milieu de $[BE]$. On veut démontrer que les droites (BE) et (IJ) sont orthogonales, alors qu'elles n'ont aucun point commun.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMACHI



KIJD est un parallélogramme : (IJ) est parallèle à (DK).

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. I est le milieu de l'arête [FB], J le milieu de l'arête [CD], K le milieu de la diagonale [BE] de la face ABFE. Le segment [BE] est tracé en bleu, le segment [IJ] en rouge. Au second temps, les segments [KI], [DK], [DB] et [DE] sont tracés, en pointillés pour ceux qui sont cachés : [DK] traverse le cube, [DB] et [DE] sont des diagonales des faces cachées ABCD et ADHE.

EXEMPLE TRAITÉ

Démontrer que (KD) est parallèle à (IJ), puis que (IJ) et (BE) sont orthogonales.

Deux vecteurs égaux — Dans le triangle BEF, K et I sont les milieux de $[BE]$ et $[BF]$: le vecteur $\overrightarrow{KI}$ est la moitié du vecteur $\overrightarrow{EF}$. De même, le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est la moitié du vecteur $\overrightarrow{DC}$, et le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{EF}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{KI}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{DJ}$.

$\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{DJ}$

Un parallélogramme — $KIJD$ est donc un parallélogramme : ses côtés $[KD]$ et $[IJ]$ sont parallèles.

(KD) est parallèle à (IJ)

Le triangle EDB — ED, DB et BE sont des diagonales de faces du cube : elles mesurent toutes $a\sqrt{2}$, où a est la longueur de l'arête. Le triangle EDB est équilatéral, et sa médiane (DK) est aussi une hauteur.

(DK) est perpendiculaire à (EB)

Conclusion — (IJ) est parallèle à (DK), et (DK) est orthogonale à (BE) : par la propriété 13, (IJ) est orthogonale à (BE).

(IJ) est orthogonale à (BE)

(IJ) est orthogonale à (BE)

À ne pas faire : (IJ) et (BE) ne se coupent pas, donc on ne peut pas parler d'angle droit — On remplace (IJ) par sa parallèle (DK), qui coupe (BE) en K. Pour montrer que deux droites sont orthogonales, on se ramène à deux droites sécantes grâce aux parallèles.

---

6. ACTIVITÉ

Pour comprendre : une droite orthogonale à tout un plan

CE QU'IL DIT

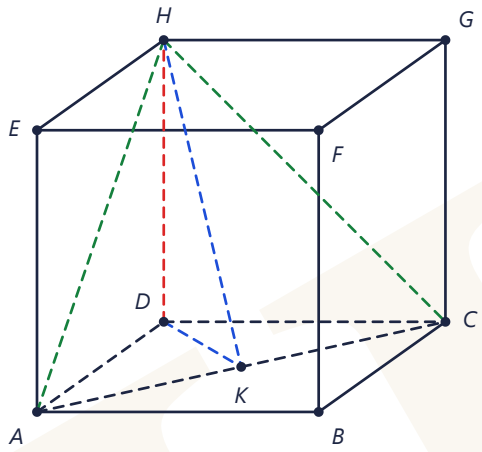
Ne5dhou cube d'arête 8, w K milieu de [AC]. La droite (HD) orthogonale à la droite (AD) w à la droite (CD), 5ater les faces carrés. Es-so2al : hiya orthogonale zeda l les autres droites du plan (ABC) ? Njarrbou m3a la droite (DK). DK égale la moitié de la diagonale AC, ya3ni DK = 4√2. Le triangle AHC équilatéral, el côtés el koll diagonales de faces, w (HK) hauteur, HK = 4√6. Tawa $HD^2 + DK^2 = 64 + 32$, ya3ni 96, w hedha houwa HK^2. Donc le triangle HDK rectangle en D. Ya3ni la droite (HD) orthogonale à la droite (DK) zeda.

، cube d'arête huit ، w K milieu de A C . la droite H D orthogonale à la droite A D w à la droite C D ناخذو
la مع نجرّبو ؟ les autres droites du plan A B C لـ زادة orthogonale هي : السؤال . les faces carrés خاطر
D K égale quatre racine de deux . le triangle يعني ، droite D K . D K égale la moitié de la diagonale A C
توّة . diagonales de faces ، w H K hauteur ، H K égale quatre racine de six الأضلاع الكل ، A H C équilatéral
هذا quatre-vingt-seize ، w يعني ، H D au carré plus D K au carré égale soixante-quatre plus trente-deux
la droite H D orthogonale à la droite D K يعني . H K au carré . donc le triangle H D K rectangle en D هو
زادة .

Prenons un cube d'arête huit, et K le milieu de A C. La droite H D est orthogonale à la droite A D et à la droite C D, parce que les faces sont des carrés. La question : est-elle aussi orthogonale aux autres droites du plan A B C ? Essayons avec la droite D K. D K est la moitié de la diagonale A C, donc D K égale quatre racine de deux. Le triangle A H C est équilatéral, ses côtés sont tous des diagonales de faces, et H K est une hauteur : H K égale quatre racine de six. Or H D au carré plus D K au carré égale soixante-quatre plus trente-deux, c'est-à-dire quatre-vingt-seize, et c'est exactement H K au carré. Donc le triangle H D K est rectangle en D. Autrement dit, la droite H D est aussi orthogonale à la droite D K.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 8, et K est le milieu de $[AC]$.

La droite (HD) est orthogonale à (AD) et à (CD), puisque les faces $ADHE$ et $DCGH$ sont des carrés. On se demande si elle est aussi orthogonale aux autres droites du plan (ABC), par exemple à la droite (DK).



Le triangle HDK est rectangle en D.

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. K est le centre de la face ABCD, milieu de la diagonale [AC]. L'arête [HD] est repassée en rouge. Au second temps, les segments [AC], [DK], [AH], [HC] et [HK] sont tracés en pointillés : le triangle AHC et sa médiane [HK].

EXEMPLE TRAITÉ

1) Calculer DK. 2) Montrer que le triangle AHC est équilatéral et calculer HK. 3) Montrer que le triangle HDK est rectangle en D. 4) On montre de même que (CG) est orthogonale à (AC). En déduire que (HD) et (AC) sont orthogonales, puis que (CG) et (DB) le sont.

DK — $[AC]$ est une diagonale du carré $ABCD$ de côté 8 : $AC = 8\sqrt{2}$. Les diagonales du carré ont le même milieu K et la même longueur : $DK = \frac{AC}{2}$.

$DK = 4\sqrt{2}$

Le triangle AHC — $[AH]$, $[HC]$ et $[CA]$ sont des diagonales de faces : elles mesurent toutes $8\sqrt{2}$, et le triangle AHC est équilatéral. Sa médiane (HK) est aussi une hauteur.

$HK = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$

Pythagore — $HD^2 + DK^2 = HK^2$: par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle HDK est rectangle en D, et (HD) est orthogonale à (DK).

$HD^2 + DK^2 = 64 + 32 = 96$

Question 4 — (HD) est parallèle à (CG), qui est orthogonale à (AC) : par la propriété 14, (HD) est orthogonale à (AC). Et K est sur la diagonale $[BD]$, donc (DK) est la droite (DB) : (CG), parallèle à (HD), est orthogonale à (DB).

(CG) est orthogonale à (DB)

(HD) est orthogonale à (DK)

À ne pas faire : (HD) est orthogonale à (AD), donc elle est orthogonale à toutes les droites du plan (ABC) — (HD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) : (AD) et (CD). Une seule droite du plan ne suffit pas : il en faut deux qui se coupent.

---

7. DÉFINITION

Droite perpendiculaire à un plan

CE QU'IL DIT

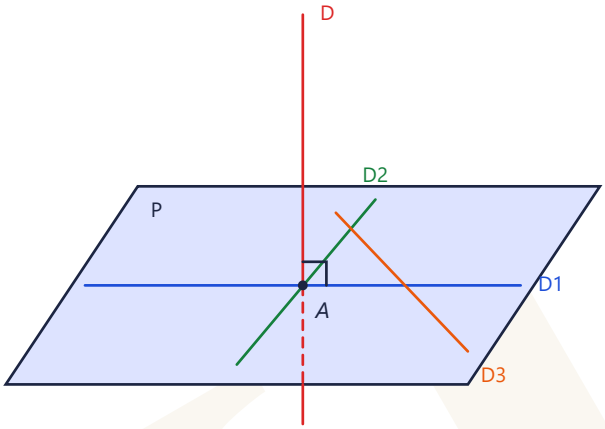
Tawa la définition. On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. W n9oulou zeda la droite est orthogonale au plan. Thabbet mli7 fi kelmet sécantes : zouz droites parallèles ma yekfiwch. W 3andna la propriété 16, na9blouha : si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan. Mithel fi le cube : la droite (AE) perpendiculaire à la droite (AB) w à la droite (AD), w hedhom sécantes en A fi le plan (ABC). Donc la droite (AE) perpendiculaire au plan (ABC). W b la propriété 16, hiya orthogonale à la droite (BD).

la définition . on dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est توّة orthogonale à deux droites sécantes de ce plan . w ثبّت . la droite est orthogonale au plan نقولو زادة si une : نقبلوها ، la propriété seize عندنا w . droites parallèles زوز : sécantes مليح في كلمة droite est perpendiculaire à un plan ، alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan le مثال في . cube : la droite A E perpendiculaire à la droite A B w à la droite A D ، w le plan A في sécantes en A هاذم orthogonale à la هي ، la propriété seize بـ B C . donc la droite A E perpendiculaire au plan A B C . w . droite B D

Voici maintenant la définition. On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. On dit aussi que la droite est orthogonale au plan. Fais bien attention au mot sécantes : deux droites parallèles ne suffisent pas. Et nous avons la propriété seize, que l'on admet : si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan. Un exemple dans le cube : la droite A E est perpendiculaire à la droite A B et à la droite A D, qui sont sécantes en A dans le plan A B C. Donc la droite A E est perpendiculaire au plan A B C. Et, par la propriété seize, elle est orthogonale à la droite B D.

Définition. On dit qu'une droite est **perpendiculaire à un plan** si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. On dit aussi que la droite est **orthogonale au plan**.

Propriété 16 (admise). Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.



D est orthogonale à D1 et à D2, sécantes en A : elle est orthogonale à toute droite du plan, comme D3.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Une droite D, en rouge, traverse le plan au point A, verticalement. Dans le plan, deux droites passent par A : la droite D1, en bleu, et la droite D2, en vert ; un angle droit est marqué entre D et D1. Au second temps, une troisième droite D3 du plan, en orange, est tracée : elle ne passe pas par A.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC), puis que les droites (AE) et (BD) sont orthogonales.

Deux droites sécantes — Dans le carré $ABFE$, (AE) est perpendiculaire à (AB) ; dans le carré $ADHE$, (AE) est perpendiculaire à (AD). Les droites (AB) et (AD) sont sécantes en A et contenues dans le plan (ABC).

(AE) est perpendiculaire au plan (ABC)

Propriété 16 — La droite (BD) est contenue dans le plan (ABC) : (AE) lui est orthogonale.

(AE) est orthogonale à (BD)

(AE) est orthogonale à (BD)

À ne pas faire : Une droite orthogonale à deux droites d'un plan est perpendiculaire à ce plan — Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est perpendiculaire à ce plan. Deux droites parallèles ne suffisent pas : (AB) est orthogonale à (AD) et à (BC), et pourtant elle est contenue dans le plan (ABC).

8. APPLICATION

Exemple : les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier

CE QU'IL DIT

Ne5dhou tétraèdre régulier ABCD : les arêtes el koll nafs et-toul. I milieu de [CD]. N7ebbou nbayynou elli la droite (AB) orthogonale à la droite (CD). El méthode : bech tbayyen deux droites orthogonales, bayyen elli wa7da menhom perpendiculaire à un plan fih lo5ra. Le triangle ACD équilatéral, donc la médiane (AI) hiya zeda hauteur : la droite (CD) perpendiculaire à la droite (AI). Kif kif fi le triangle BCD : la droite (CD) perpendiculaire à la droite (BI). La droite (AI) w la droite (BI) sécantes en I, donc la droite (CD) perpendiculaire au plan (ABI). W la droite (AB) fel plan hedha, donc la droite (AB) orthogonale à la droite (CD).

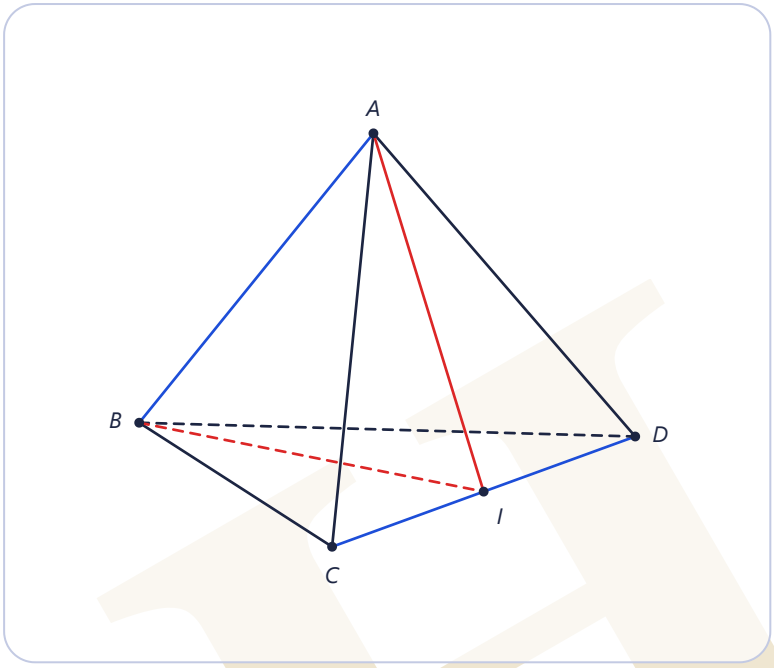
la droite A B نحبّو نبيّنو اللي . I milieu de C D . الكل نفس الطول tétraèdre régulier A B C D : les arêtes ناخذو
بيّن اللي وحدة منهم ، deux droites orthogonales باش تبيّن : méthode الـ . orthogonale à la droite C D
hauteur هي زادة le triangle A C D équilatéral ، donc la médiane A I . فيه الأخرى perpendiculaire à un plan
le triangle B C D : la droite C D كيف كيف في . : la droite C D perpendiculaire à la droite A I
perpendiculaire à la droite B I . la droite A I w la droite B I sécantes en I ، donc la droite C D
donc la droite A B orthogonale à la droite ، هذا plan في الـ perpendiculaire au plan A B I . w la droite A B
. C D

Prenons un tétraèdre régulier A B C D : toutes ses arêtes ont la même longueur. I est le milieu de C D. Nous voulons montrer que la droite A B est orthogonale à la droite C D. La méthode : pour montrer que deux droites sont orthogonales, montre que l'une est perpendiculaire à un plan qui contient l'autre. Le triangle A C D est équilatéral, donc sa médiane A I est aussi une hauteur : la droite C D est perpendiculaire à la droite A I. De même dans le triangle B C D : la droite C D est perpendiculaire à la droite B I. La droite A I et la droite B I sont sécantes en I, donc la droite C D est perpendiculaire au plan A B I. Et la droite A B est dans ce plan : la droite A B est orthogonale à la droite C D.

$ABCD$ est un tétraèdre régulier : toutes ses arêtes ont la même longueur. I est le milieu de $[CD]$. On veut montrer que deux arêtes opposées, $[AB]$ et $[CD]$, sont orthogonales.

La méthode. Pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut montrer que l'une est perpendiculaire à un plan qui contient l'autre.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



(CD) est perpendiculaire au plan (ABI).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête cachée [BD] est en pointillés. I est le milieu de l'arête [CD]. Les arêtes [AB] et [CD] sont repassées en bleu. Au second temps, les segments [AI] et [BI] sont tracés en rouge, [BI] en pointillés : le plan (ABI).

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABI). 2) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Dans la face ACD — Le triangle ACD est équilatéral : sa médiane (AI) est aussi une hauteur.
(CD) est perpendiculaire à (AI)

Dans la face BCD — Le triangle BCD est équilatéral : sa médiane (BI) est aussi une hauteur.
(CD) est perpendiculaire à (BI)

Le plan (ABI) — (AI) et (BI) sont deux droites du plan (ABI), sécantes en I.
(CD) est perpendiculaire au plan (ABI)

Propriété 16 — La droite (AB) est contenue dans le plan (ABI) : (CD) lui est orthogonale. De la même façon, (AD) est orthogonale à (BC) et (AC) est orthogonale à (BD).
(AB) est orthogonale à (CD)

(AB) est orthogonale à (CD)

À ne pas faire : On montre que (CD) est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (AB) — On choisit un plan qui contient (AB) et auquel (CD) est vraiment perpendiculaire : le plan (ABI). (CD) coupe le plan (ABC) en C sans lui être perpendiculaire : l'angle $\widehat{ACD}$ mesure $60°$.

9. PROPRIÉTÉ

Propriété 17

CE QU'IL DIT

La propriété 17 fiha zouz 7ajet. premièrement : si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. deuxièmement : si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. El démonstration sehla : nraj3ou dima l deux droites sécantes du plan, w nesta3mlou les propriétés 13 w 14. Mithel fi le cube : la droite (AE) perpendiculaire au plan (ABC), w la droite (CG) parallèle à la droite (AE). Donc la droite (CG) perpendiculaire au plan (ABC). W le plan (EFG) parallèle au plan (ABC), donc la droite (CG) perpendiculaire au plan (EFG) zeda.

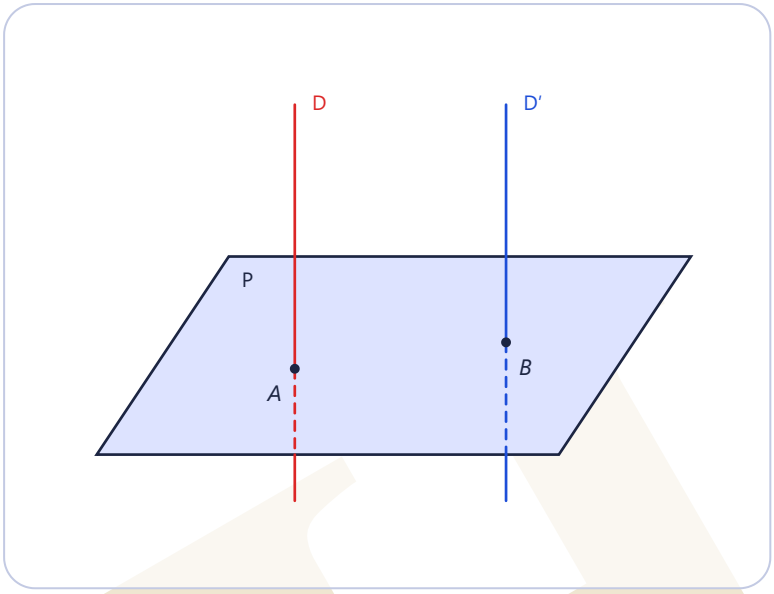
la propriété dix-sept فيها زوز حاجات . premièrement : si deux droites sont parallèles ، tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre . deuxièmement : si deux plans sont parallèles ، toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre . الـ démonstration ساهلة : نرجعو ديما لـ deux droites sécantes du plan ، w les propriétés treize w quatorze نستعملو . مثال في le cube : la droite A E perpendiculaire au plan A B C ، w la droite C G parallèle à la droite A E . donc la droite C G perpendiculaire au plan A B C . w le plan E F G parallèle au plan A B C ، donc la droite C G perpendiculaire au plan E F G زادة .

La propriété dix-sept a deux parties. premièrement : si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. deuxièmement : si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. La démonstration est simple : on revient toujours à deux droites sécantes du plan, et on utilise les propriétés treize et quatorze. Un exemple dans le cube : la droite A E est perpendiculaire au plan A B C, et la droite C G est parallèle à la droite A E. Donc la droite C G est perpendiculaire au plan A B C. Et le plan E F G est parallèle au plan A B C, donc la droite C G est aussi perpendiculaire au plan E F G.

Propriété 17. a) Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

b) Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



D et D' sont parallèles : le plan P, perpendiculaire à D, est perpendiculaire à D'.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Deux droites parallèles D et D', verticales, le traversent : D en rouge, D' en bleu. Chacune est perpendiculaire au plan P.

DÉMONSTRATION

a) Soient D et D' deux droites parallèles et P un plan perpendiculaire à D. D est orthogonale à deux droites sécantes D_1 et D_2 de P. Comme D' est parallèle à D, la propriété 14 donne : D' est orthogonale à D_1 et à D_2. Donc D' est perpendiculaire à P.

b) Soient P et P' deux plans parallèles et D une droite perpendiculaire à P. Soient D'_1 et D'_2 deux droites sécantes de P', et A un point de P. Les parallèles D_1 et D_2 à D'_1 et D'_2 menées par A sont sécantes et contenues dans P, puisque P est parallèle à P'. Par la propriété 16, D est orthogonale à D_1 et à D_2 ; par la propriété 13, elle est orthogonale à D'_1 et à D'_2. Donc D est perpendiculaire à P'.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le cube $ABCDEFGH$, on sait que (AE) est perpendiculaire au plan (ABC). Montrer que (CG) est perpendiculaire au plan (ABC), puis au plan (EFG).

Propriété 17 a) — Les droites (AE) et (CG) sont parallèles, et le plan (ABC) est perpendiculaire à (AE) : il est perpendiculaire à (CG).

(CG) est perpendiculaire au plan (ABC)

Propriété 17 b) — Les plans (ABC) et (EFG) des faces opposées sont parallèles : (CG), perpendiculaire à l'un, est perpendiculaire à l'autre.

(CG) est perpendiculaire au plan (EFG)

(CG) est perpendiculaire aux plans (ABC) et (EFG)

À ne pas faire : (CG) est perpendiculaire au plan (ABC) parce qu'elle est orthogonale à (BC) — (CG) est perpendiculaire au plan (ABC) parce qu'elle est orthogonale à (BC) et à (CD), sécantes en C. Une droite orthogonale à une seule droite du plan n'est pas forcément perpendiculaire au plan.

10. APPLICATION

Exemple : un tétraèdre trirectangle

CE QU'IL DIT

Tawa tétraèdre ABCD trirectangle en A : les faces ABC, ABD w ACD rectangles en A. AB = 3, AD = 4, w AC = 6. La droite (AD) perpendiculaire à la droite (AB) w à la droite (AC), w hedhom sécantes, donc la droite (AD) perpendiculaire au plan (ABC), w AD hiya el hauteur. Le volume : un tiers fois l'aire de la base fois la hauteur. L'aire mta3 ABC égale 3 fois 6 sur 2, ya3ni 9. Donc le volume égale un tiers fois 9 fois 4, ya3ni 12. W BC b Pythagore : √45, ya3ni 3√5. W AH nal9awha b l'aire : AB fois AC égale BC fois AH.

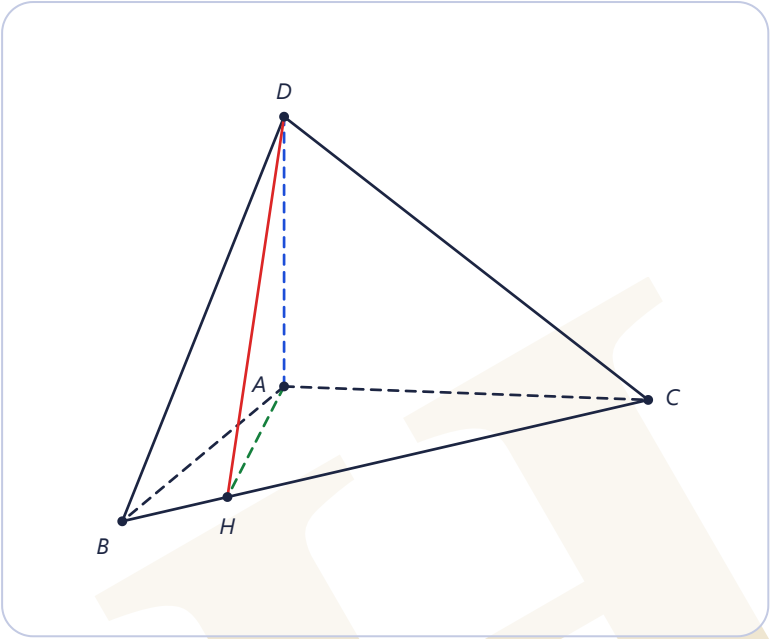
تتوّة A B C D trirectangle en A : les faces A B C ، A B D w A C D rectangles en A . A B égale trois ، A D égale quatre ، w A C égale six . la droite A D perpendiculaire à la droite A B w à la droite A C ، w hauteur . le volume : un الـ هي sécantes ، donc la droite A D perpendiculaire au plan A B C ، w A D هاذم neuf . donc يعني ، A B C égale trois fois six sur deux متاع tiers fois l'aire de la base fois la hauteur . l'aire Pythagore : racine de quarante-cinq بـ douze . w B C يعني ، le volume égale un tiers fois neuf fois quatre . l'aire : A B fois A C égale B C fois A H نلقاوها بـ trois racine de cinq . w A H يعني ،

Voici un tétraèdre A B C D trirectangle en A : les faces A B C, A B D et A C D sont rectangles en A. A B égale trois, A D égale quatre, et A C égale six. La droite A D est perpendiculaire à la droite A B et à la droite A C, qui sont sécantes, donc la droite A D est perpendiculaire au plan A B C, et A D est la hauteur. Le volume : un tiers fois l'aire de la base fois la hauteur. L'aire de A B C est trois fois six sur deux, c'est-à-dire neuf. Donc le volume est un tiers fois neuf fois quatre, c'est-à-dire douze. Et B C, par Pythagore : racine de quarante-cinq, c'est-à-dire trois racine de cinq. Et A H s'obtient par l'aire : A B fois A C égale B C fois A H.

$ABCD$ est un tétraèdre dont les trois faces ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A, avec $AB = 3$, $AD = 4$ et $AC = 6$. On dit que ce tétraèdre est **trirectangle** en A.

H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Les trois angles en A sont droits ; H est le pied de la hauteur issue de A dans ABC.

Un tétraèdre ABCD : le sommet A est au fond, D juste au-dessus de A, B devant à gauche et C à droite. Les arêtes [AB], [AC] et [AD], issues de A, sont en pointillés ; les arêtes [BC], [BD] et [CD] sont en traits pleins. Au second temps, H est placé sur [BC], le segment [AH] est tracé en pointillés et le segment [DH] en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) et calculer le volume du tétraèdre. 2) Calculer BC. 3) Calculer AH.

La hauteur — (AD) est perpendiculaire à (AB) et à (AC), deux droites sécantes du plan (ABC) : elle est perpendiculaire à ce plan, et AD est la hauteur issue de D.

$$(AD) \text{ est perpendiculaire au plan } (ABC)$$

Le volume — Le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur. La base ABC est un triangle rectangle en A.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 6}{2} \times 4 = 12$$

BC — Le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A.

$$BC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

AH — L'aire du triangle ABC s'écrit de deux façons : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$. On divise donc $3 \times 6 = 18$ par $BC = 3\sqrt{5}$, ce qui donne $\frac{6}{\sqrt{5}}$:

$$AH = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$V = 12 \quad ; \quad BC = 3\sqrt{5} \quad ; \quad AH = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

À ne pas faire : Le volume est $3 \times 6 \times 4 = 72$ — Le volume est $\frac{1}{3} \times 9 \times 4 = 12$. Un tétraèdre est une pyramide : on multiplie l'aire de la base, ici 9, par la hauteur, et on prend le tiers.

11. PROPRIÉTÉ

Propriété 18

CE QU'IL DIT

Tawa propriété na9blouha, la propriété 18. premièrement : par un point donné, il passe une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné. W ken A point w P plan, la droite qui passe par A w perpendiculaire à P t9oss P fi point K : K nsammiwh le projeté orthogonal de A sur le plan P. deuxièmement : par un point donné, il passe un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée. troisièmement : si une droite D est orthogonale à un plan P, alors toute droite orthogonale à la droite D et passant par un point du plan P est contenue dans ce plan. Mithel : fi le cube, le plan qui passe par A w perpendiculaire à la droite (AE), houwa le plan (ABC), 5ater yet3adda men A, w ma fammech ghirou.

la propriété dix-huit . premièrement : par un point donné ، il passe une droite et ، نقبلوها propriété توّة A point w P plan ، la droite qui passe par A w كان une seule perpendiculaire à un plan donné . w le projeté orthogonal de A sur le plan P . نسمّيوه point K : K في P تقصّ perpendiculaire à P deuxièmement : par un point donné ، il passe un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée . troisièmement : si une droite D est orthogonale à un plan P ، alors toute droite orthogonale à la droite le cube ، le plan qui passe par في : مثال . D et passant par un point du plan P est contenue dans ce plan . ما فماش غيرو ، A w خاطر يتعدّى من ، le plan A B C هو ، A w perpendiculaire à la droite A E

Voici une propriété que l'on admet, la propriété dix-huit. premièrement : par un point donné, il passe une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné. Et si A est un point et P un plan, la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à P perce ce plan en un point K : on appelle K le projeté orthogonal de A sur le plan P. deuxièmement : par un point donné, il passe un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée. troisièmement : si une droite D est orthogonale à un plan P, alors toute droite orthogonale à la droite D et passant par un point du plan P est contenue dans ce plan. Un exemple : dans le cube, le plan qui passe par A et qui est perpendiculaire à la droite A E, c'est le plan A B C, parce qu'il passe par A, et qu'il n'y en a pas d'autre.

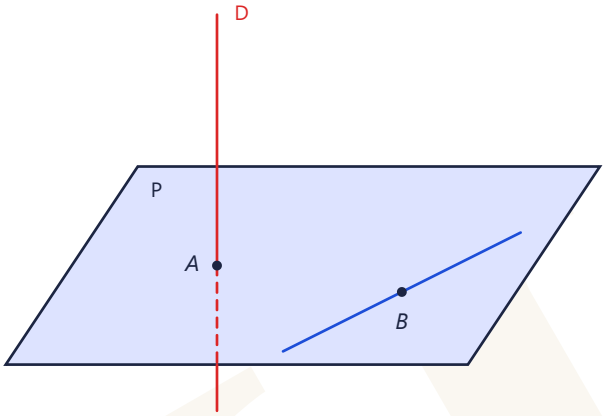
On admet la propriété suivante.

Propriété 18. a) Par un point donné, il passe une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné.

Projeté orthogonal d'un point sur un plan. La droite passant par un point A et perpendiculaire à un plan P perce ce plan en un point K : le point K est appelé **projeté orthogonal** du point A sur le plan P.

b) Par un point donné, il passe un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée.

c) Si une droite D est orthogonale à un plan P, alors toute droite orthogonale à la droite D et passant par un point du plan P est contenue dans ce plan.



Toute droite orthogonale à D passant par un point B de P est contenue dans P.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Une droite D, en rouge, est perpendiculaire au plan P en un point A. Un point B du plan P est marqué : une droite en bleu passe par B, orthogonale à D ; elle est tout entière dans le plan P.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le cube $ABCDEFGH$, quel est le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AE) ?

Un plan qui convient — (AE) est perpendiculaire au plan (ABC), et ce plan passe par A.

$A \in (ABC)$

Il est unique — Par la propriété 18 b), il n'y a qu'un seul plan passant par A et perpendiculaire à (AE) : c'est donc le plan (ABC).

le plan (ABC)

le plan (ABC)

À ne pas faire : Par un point, il passe plusieurs droites perpendiculaires à un plan donné — Par un point, il passe une seule droite perpendiculaire à un plan donné. C'est la propriété 18 a). Ce sont les droites orthogonales à une droite donnée qui sont nombreuses : elles remplissent tout un plan.

12. APPLICATION

Exemple : des arêtes opposées deux à deux orthogonales

CE QU'IL DIT

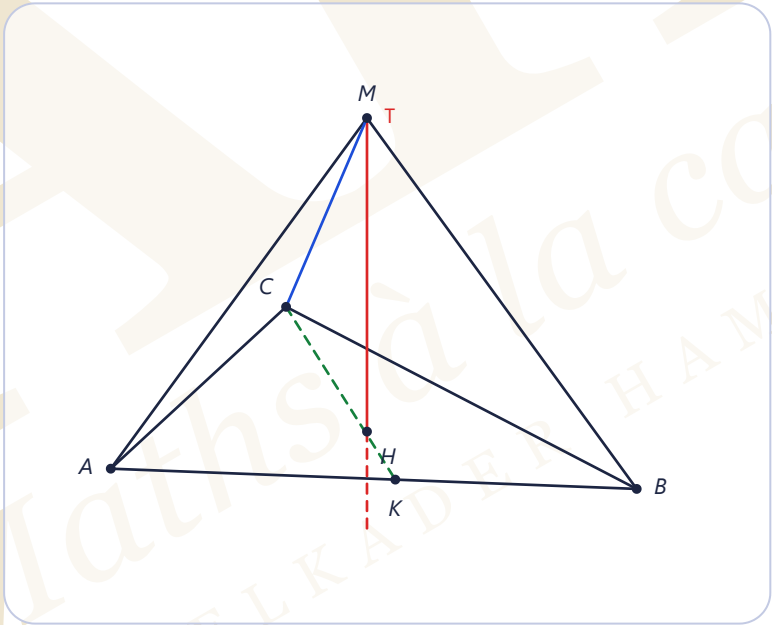
Ne5dhou triangle ABC, w H l'orthocentre mte3ou. T la droite qui passe par H w perpendiculaire au plan (ABC), w M point de T. El hauteur mta3 C tet3adda men H, donc la droite (AB) perpendiculaire à la droite (CH). W la droite (MH) perpendiculaire au plan (ABC), donc orthogonale à la droite (AB). La droite (CH) w la droite (MH) sécantes en H, donc la droite (AB) perpendiculaire au plan (MCH), w orthogonale

à la droite (MC). W kif kif lel arêtes le5rin : fi le tétraèdre MABC, les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales.

T la droite qui passe par H w perpendiculaire au plan A B . متاعو triangle A B C ، w H l'orthocentre ناخذو H ، donc la droite A B perpendiculaire à la droite C H . w تتعدّى من C متاع hauteur الـ . C ، w M point de T la droite M H perpendiculaire au plan A B C ، donc orthogonale à la droite A B . la droite C H w la droite M H sécantes en H ، donc la droite A B perpendiculaire au plan M C H ، w orthogonale à la droite M C . w كيف كيف للـ arêtes الأخرين : في le tétraèdre M A B C ، les arêtes opposées sont deux à deux . orthogonales

Prenons un triangle A B C, et H son orthocentre. T est la droite qui passe par H et qui est perpendiculaire au plan A B C, et M est un point de T. La hauteur issue de C passe par H, donc la droite A B est perpendiculaire à la droite C H. Et la droite M H est perpendiculaire au plan A B C, donc orthogonale à la droite A B. La droite C H et la droite M H sont sécantes en H, donc la droite A B est perpendiculaire au plan M C H, et orthogonale à la droite M C. Et c'est pareil pour les autres arêtes : dans le tétraèdre M A B C, les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales.

ABC est un triangle d'orthocentre H. On désigne par T la droite passant par H et perpendiculaire au plan (ABC), et par M un point de T distinct de H.



T est perpendiculaire au plan (ABC) en l'orthocentre H.

Un triangle ABC posé à plat : A à gauche, B à droite, C au fond. H, l'orthocentre, est à l'intérieur ; la hauteur [CK] issue de C est tracée en pointillés, K étant sur [AB]. Une droite T verticale, en rouge, passe par H ; le point M est sur T, au-dessus de H. Au second temps, les segments [MA], [MB] et [MC] sont tracés : le tétraèdre MABC.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (MCH). 2) En déduire que les droites (AB) et (MC) sont orthogonales.

Une hauteur — H est l'orthocentre du triangle ABC : la droite (CH) est la hauteur issue de C.

(AB) est perpendiculaire à (CH)

Propriété 16 — La droite $T = (MH)$ est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (AB).

(AB) est orthogonale à (MH)

Le plan (MCH) — (CH) et (MH) sont deux droites du plan (MCH), sécantes en H.

(AB) est perpendiculaire au plan (MCH)

Conclusion — (MC) est contenue dans le plan (MCH). De la même façon, (CB) est orthogonale à (MA) et (AC) à (MB) : les arêtes opposées du tétraèdre $MABC$ sont deux à deux orthogonales.

(AB) est orthogonale à (MC)

(AB) est orthogonale à (MC)

À ne pas faire : (AB) est orthogonale à (MH), donc elle est perpendiculaire au plan (MCH) — (AB) est orthogonale à (MH) et à (CH), sécantes en H : elle est perpendiculaire au plan (MCH). Il faut toujours deux droites sécantes du plan.

13. PROPRIÉTÉ

Propriété 19

CE QU'IL DIT

La propriété 19. premièrement : deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. deuxièmement : deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles. El démonstration tji men la propriété 18 : mathalan, par un point, ma tet3adda ken droite wa7da perpendiculaire au plan. Mithel fi le cube : la droite (BF) w la droite (DH) perpendiculaires au plan (ABC), donc parallèles. W thabbet mli7 : deux droites orthogonales à une même droite, mouch dima parallèles. La droite (AB) w la droite (AD) ez-zouz orthogonales à la droite (AE), w yetle9aw fi A.

la propriété dix-neuf . premièrement : deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles . تجي démonstration الـ . deuxièmement : deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles مثال في . perpendiculaire au plan وحدة droite كان تتعدّى ما ، par un point ، مثلا : la propriété dix-huit من deux : ثبّت مليح le cube : la droite B F w la droite D H perpendiculaires au plan A B C ، donc parallèles . w الزوز parallèles . la droite A B w la droite A D موش ديما ، droites orthogonales à une même droite . A في يتلاقاو orthogonales à la droite A E ، w

La propriété dix-neuf. premièrement : deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. deuxièmement : deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles. La démonstration vient de la propriété dix-huit : par exemple, par un point, il ne passe qu'une seule droite perpendiculaire au plan. Un exemple dans le cube : la droite B F et la droite D H sont perpendiculaires au plan A B C, donc elles sont parallèles. Et fais bien attention : deux droites orthogonales à une même droite ne sont pas toujours parallèles. La droite A B et la droite A D sont toutes les deux orthogonales à la droite A E, et elles se coupent en A.

Propriété 19. a) Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

b) Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

DÉMONSTRATION

Ces résultats découlent de la propriété 18.

a) Soient D_1 et D_2 deux droites perpendiculaires à un plan P, et A un point de D_2. La parallèle à D_1 menée par A est perpendiculaire à P (propriété 17 a). Or, par A, il ne passe qu'une seule droite perpendiculaire à P (propriété 18 a) : c'est D_2. Donc D_2 est parallèle à D_1.

b) Soient P_1 et P_2 deux plans perpendiculaires à une droite D. S'ils ont un point commun A, ce sont deux plans passant par A et perpendiculaires à D : ils sont confondus (propriété 18 b). Sinon, ils n'ont aucun point commun. Dans les deux cas, ils sont parallèles.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le cube $ABCDEFGH$, les droites (BF) et (DH) sont perpendiculaires au plan (ABC), et les plans (ABC) et (EFG) sont perpendiculaires à la droite (AE). Que peut-on en déduire ?

Propriété 19 a) — Deux droites perpendiculaires au même plan (ABC) sont parallèles.
(BF) est parallèle à (DH)

Propriété 19 b) — Deux plans perpendiculaires à la même droite (AE) sont parallèles.
(ABC) est parallèle à (EFG)

(BF) est parallèle à (DH), et (ABC) est parallèle à (EFG)

À ne pas faire : Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles — Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même droite peuvent se couper : (AB) et (AD) sont orthogonales à (AE).

14. THÉORÈME

Le théorème des trois perpendiculaires

CE QU'IL DIT

Tawa théorème mach-hour : le théorème des trois perpendiculaires. T droite perpendiculaire à un plan P en A. D droite du plan P ma tet3addech men A, w H le projeté orthogonal de A sur D. W M point de T. El théorème y9oul : la droite D est perpendiculaire au plan (AHM), donc la droite (MH) w la droite D orthogonales. 3lech ? La droite (AH) perpendiculaire à D, 5ater H houwa le projeté orthogonal. W la droite (AM) perpendiculaire au plan P, donc orthogonale à D. Ez-zouz sécantes en A, donc D perpendiculaire au plan (AHM), w orthogonale à la droite (MH).

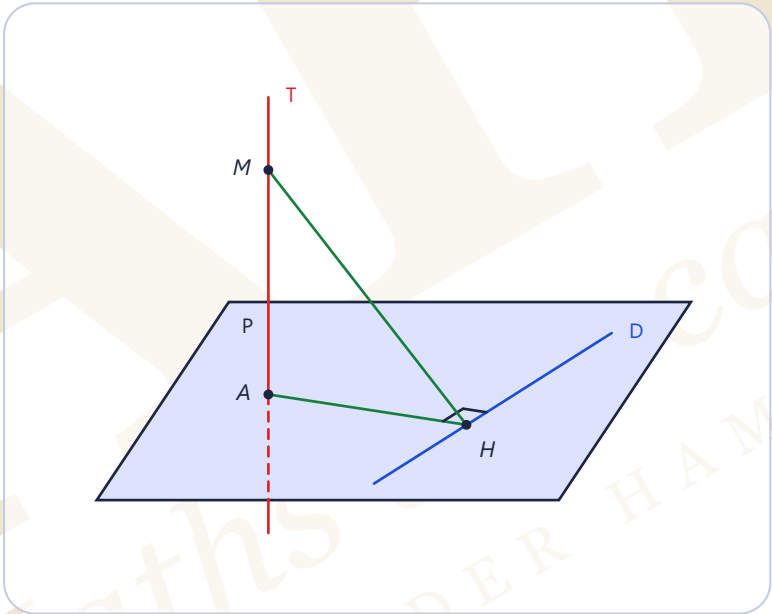
le théorème des trois perpendiculaires . T droite perpendiculaire à un plan P en A : مشهور théorème توّة
الـ . A ، w H le projeté orthogonal de A sur D . w M point de T ما تتعدّاش من . D droite du plan P
la droite D est perpendiculaire au plan A H M ، donc la droite M H w la droite D : يقول théorème
le projeté orthogonal . w la droite هو H خاطر ، la droite A H perpendiculaire à D ؟ علاش . orthogonales

sécantes en A ، donc D perpendiculaire au الزوز . A M perpendiculaire au plan P ، donc orthogonale à D
. plan A H M ، w orthogonale à la droite M H

Voici un théorème célèbre : le théorème des trois perpendiculaires. T est une droite perpendiculaire à un plan P en A. D est une droite du plan P qui ne passe pas par A, et H est le projeté orthogonal de A sur D. Et M est un point de T. Le théorème dit : la droite D est perpendiculaire au plan A H M, donc la droite M H et la droite D sont orthogonales. Pourquoi ? La droite A H est perpendiculaire à D, parce que H est le projeté orthogonal. Et la droite A M est perpendiculaire au plan P, donc orthogonale à D. Ces deux droites sont sécantes en A, donc D est perpendiculaire au plan A H M, et orthogonale à la droite M H.

Soit T une droite perpendiculaire à un plan P, et A le point commun à T et à P. Soit D une droite du plan P ne passant pas par A, et H le projeté orthogonal du point A sur la droite D. Soit M un point de T distinct de A.

Théorème. La droite D est perpendiculaire au plan (AHM). Par conséquent, les droites (MH) et D sont orthogonales.



(AH) est perpendiculaire à D, et (MH) est orthogonale à D.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Une droite T, en rouge, est perpendiculaire au plan P au point A ; le point M est sur T, au-dessus de A. Une droite D, en bleu, est tracée dans le plan P, sans passer par A. H est le projeté orthogonal de A sur D : le segment [AH] est tracé en vert, avec un angle droit en H. Au second temps, le segment [MH] est tracé en vert.

DÉMONSTRATION

(AH) est perpendiculaire à D, par définition du projeté orthogonal. $T = (AM)$ est perpendiculaire au plan P, qui contient D : par la propriété 16, (AM) est orthogonale à D. La droite D est donc orthogonale à (AH) et à (AM), deux droites du plan (AHM) sécantes en A : elle est perpendiculaire à ce plan. Enfin, (MH) est contenue dans le plan (AHM) : par la propriété 16, D est orthogonale à (MH).

EXEMPLE TRAITÉ

Avec les notations du théorème, on donne $AM = 4$ et $AH = 3$. Calculer MH.

Un angle droit en A — (AM) est perpendiculaire au plan P, qui contient (AH) : le triangle AMH est rectangle en A.

$\widehat{MAH} = 90°$

Pythagore — Le théorème de Pythagore dans le triangle AMH.

$MH = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$$MH = 5$$

À ne pas faire : (MH) est orthogonale à D parce que M est au-dessus de H — (MH) est orthogonale à D parce que D est perpendiculaire au plan (AHM). Sur la figure, M est au-dessus de A, pas de H : l'orthogonalité se démontre, elle ne se lit pas sur le dessin.

---

15. EXEMPLE

Exemple : une pyramide dont toutes les arêtes sont égales

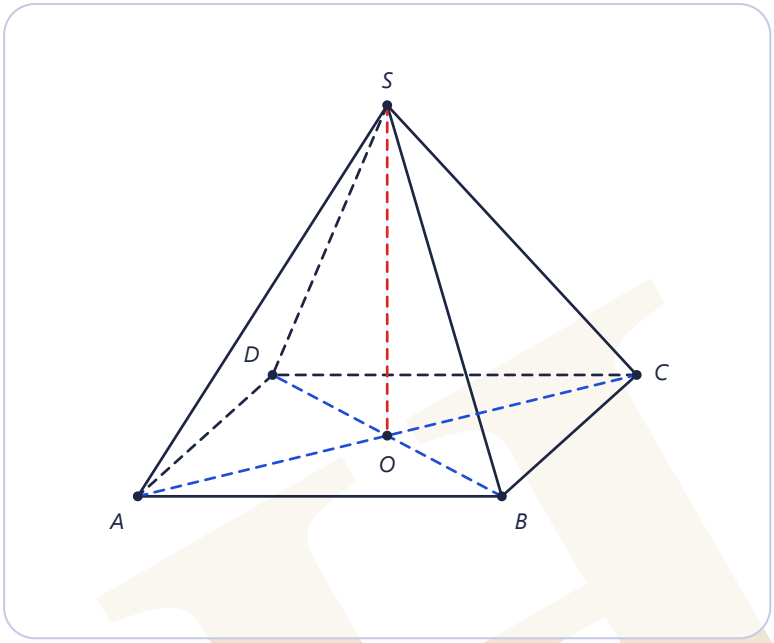
CE QU'IL DIT

Ne5dhou pyramide SABCD, la base carré de centre O, w les arêtes el koll ysewiw 6. Le triangle SBD : SB w SD ysewiw 6, w BD = 6√2. $6^2 + 6^2 = 72$, w hedha houwa BD^2 : donc SBD rectangle en S. W la médiane (SO) hiya zeda hauteur, donc la droite (SO) perpendiculaire à la droite (BD). Kif kif perpendiculaire à la droite (AC). Donc la droite (SO) perpendiculaire au plan de la base. SO égale la moitié de BD, ya3ni 3√2. W le volume égale un tiers fois 36 fois 3√2, ya3ni 36√2.

six . le triangle S B D : S B الكل يساويو pyramide S A B C D ، la base carré de centre O ، w les arêtes ناخذو six ، w B D égale six racine de deux . six au carré plus six au carré égale soixante-douze ، w يساويو w S D hauteur ، donc la droite S O هي زادة B D au carré : donc S B D rectangle en S . w la médiane S O هذا هو perpendiculaire à la droite A C . donc la droite S O كيف كيف . perpendiculaire à la droite B D trois racine de deux . w le volume يعني ، perpendiculaire au plan de la base . S O égale la moitié de B D . trente-six racine de deux يعني ، égale un tiers fois trente-six fois trois racine de deux

Prenons une pyramide S A B C D, de base un carré de centre O, dont toutes les arêtes mesurent six. Le triangle S B D : S B et S D valent six, et B D égale six racine de deux. Six au carré plus six au carré égale soixante-douze, et c'est B D au carré : donc S B D est rectangle en S. Et la médiane S O est aussi une hauteur, donc la droite S O est perpendiculaire à la droite B D. De même, elle est perpendiculaire à la droite A C. Donc la droite S O est perpendiculaire au plan de la base. S O est la moitié de B D, c'est-à-dire trois racine de deux. Et le volume est un tiers fois trente-six fois trois racine de deux, c'est-à-dire trente-six racine de deux.

$SABCD$ est une pyramide de sommet S et de base un carré $ABCD$ de centre O. Toutes ses arêtes ont pour longueur 6.



(SO) est perpendiculaire au plan de la base.

Une pyramide SABCD : la base carrée ABCD est vue en perspective, A devant à gauche, B devant à droite, C derrière à droite, D derrière à gauche ; le sommet S est en haut, au-dessus du centre O de la base. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [SD] sont en pointillés. Au second temps, les diagonales [AC] et [BD] et le segment [SO] sont tracés en pointillés, [SO] en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que le triangle SBD est isocèle et rectangle en S. 2) Montrer que (SO) est perpendiculaire au plan (ABC). 3) Calculer SO, puis le volume de la pyramide.

Le triangle SBD — $SB = SD = 6$, et $BD = 6\sqrt{2}$ est la diagonale du carré : par la réciproque du théorème de Pythagore, SBD est isocèle et rectangle en S.

$$SB^2 + SD^2 = 36 + 36 = 72$$

Deux médianes — Dans le triangle isocèle SBD, la médiane (SO) est aussi une hauteur : (SO) est perpendiculaire à (BD). De même, dans le triangle isocèle SAC, (SO) est perpendiculaire à (AC). Les diagonales (AC) et (BD) sont sécantes en O.

$$(SO) \text{ est perpendiculaire au plan } (ABC)$$

SO — Dans le triangle SBD rectangle en S, la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.

$$SO = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Le volume — La base est un carré d'aire 36, et SO est la hauteur.

$$V = \frac{1}{3} \times 36 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$$

$$SO = 3\sqrt{2} \quad ; \quad V = 36\sqrt{2}$$

À ne pas faire : La hauteur de la pyramide est l'arête $SA = 6$ — La hauteur de la pyramide est $SO = 3\sqrt{2}$. La hauteur est la distance du sommet au plan de la base : elle se mesure sur la perpendiculaire à ce plan.

16. ACTIVITÉ

Pour comprendre : les points équidistants de deux points

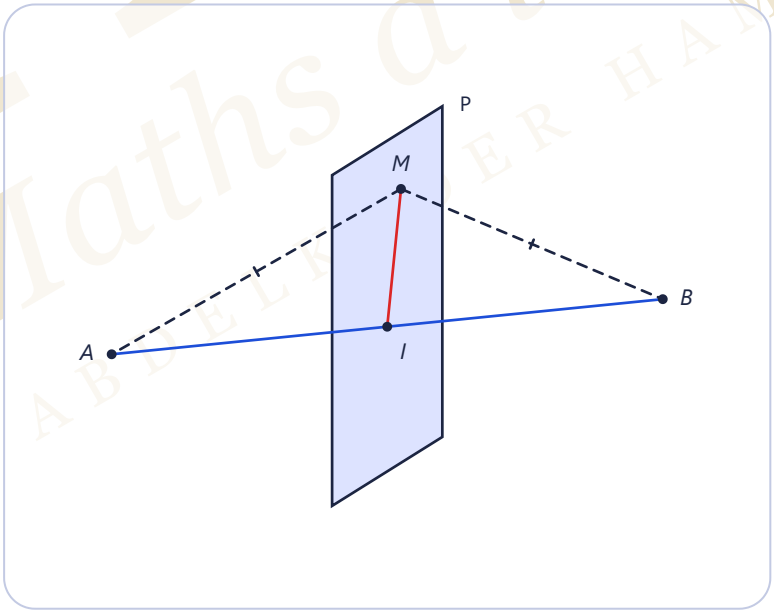
CE QU'IL DIT

Ne5dhou segment [AB], w I le milieu mte3ou. Nlawjou 3la les points M de l'espace elli MA = MB. W ne5dhou P le plan perpendiculaire à la droite (AB) en I. Awwalan, I yesla7 : IA = IB. Tawa ken M yesla7, fi le plan (MAB), M 3la la médiatrice de [AB], donc la droite (MI) perpendiculaire à la droite (AB). W b la propriété 18 c, la droite (MI) fi le plan P. W el 3aks s7i7 : koll point N fi le plan P, la droite (NI) orthogonale à la droite (AB), donc NA = NB. Ya3ni l'ensemble houwa le plan P.

ناخذو M A égale M B . w اللي les points M de l'espace على نلوّجو . متاعو segment A B ، w I le milieu ناخذو le plan M في ، يصلح M كان توّة . I A égale I B : يصلح I ، أوّلا . P le plan perpendiculaire à la droite A B en I la propriété بـ la médiatrice de A B ، donc la droite M I perpendiculaire à la droite A B . w على A B ، M le plan P ، la droite N I في point N كل : صحيح العكس le plan P . w في dix-huit c ، la droite M I . le plan P هو l'ensemble يعني . orthogonale à la droite A B ، donc N A égale N B

Prenons un segment A B, et I son milieu. Nous cherchons les points M de l'espace tels que M A égale M B. Et appelons P le plan perpendiculaire à la droite A B en I. D'abord, I convient : I A égale I B. Maintenant, si M convient, dans le plan M A B, M est sur la médiatrice de A B, donc la droite M I est perpendiculaire à la droite A B. Et, par la propriété dix-huit c, la droite M I est dans le plan P. La réciproque est vraie : pour tout point N du plan P, la droite N I est orthogonale à la droite A B, donc N A égale N B. L'ensemble cherché est donc le plan P.

$[AB]$ est un segment de milieu I. On cherche l'ensemble E des points M de l'espace tels que $MA = MB$. On appelle P le plan perpendiculaire à la droite (AB) en I.



Un point M du plan P est équidistant de A et de B.

Un segment [AB] presque horizontal, de milieu I. Un plan P, dessiné debout comme un parallélogramme vertical, passe par I et coupe le segment. Au second temps, un point M du plan P est marqué, et les segments [MA] et [MB] sont tracés en pointillés, avec une marque d'égalité ; le segment [MI] est tracé en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Le point I appartient-il à E ? 2) Soit M un point de E distinct de I : montrer que M appartient au plan P. 3) Soit N un point de P distinct de I : montrer que N appartient à E.

Le milieu — $IA = IB$: le point I appartient à E.

$I \in E$

Un point de E — Dans le plan (MAB), $MA = MB$: M est sur la médiatrice de $[AB]$, donc (MI) est perpendiculaire à (AB). Or (AB) est orthogonale au plan P : par la propriété 18 c), la droite (MI), orthogonale à (AB) et passant par I, est contenue dans P.

$M \in P$

Un point de P — (NI) est contenue dans P, donc orthogonale à (AB) (propriété 16). Dans le plan (NAB), la droite (NI) est donc la médiatrice de $[AB]$: $NA = NB$.

$N \in E$

$$E = P$$

À ne pas faire : L'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B est la médiatrice de $[AB]$ — C'est le plan perpendiculaire à (AB) en I. La médiatrice n'est qu'une droite de ce plan : celle qui est dans un plan donné contenant A et B.

17. THÉORÈME

Plan médiateur d'un segment

CE QU'IL DIT

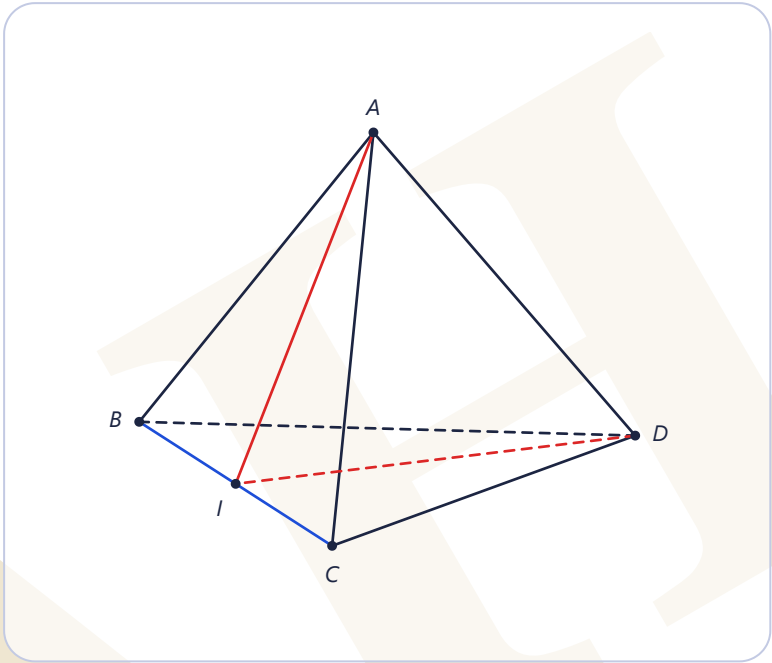
Tawa la définition : on appelle plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu. W el théorème : l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment. Fi l'espace, el médiatrice wallet plan. Mithel fi tétraèdre régulier ABCD, w I milieu de [BC]. AB = AC, w DB = DC, w IB = IC. Donc A, D w I el koll fi le plan médiateur de [BC], w houma mouch alignés. Donc le plan médiateur de [BC] houwa le plan (ADI).

la définition : on appelle plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment en son توّة
théorème : l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan الـ milieu . w
tétraèdre régulier A B C D ، w مثال في . plan ولّات médiatrice الـ ، l'espace في . médiateur de ce segment
le plan في الكل I milieu de B C . A B égale A C ، w D B égale D C ، w I B égale I C . donc A ، D w I
. le plan A D I هو alignés . donc le plan médiateur de B C هوما موش médiateur de B C ، w

Voici la définition : on appelle plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu. Et le théorème : l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment. Dans l'espace, la médiatrice devient un plan. Un exemple dans un tétraèdre régulier A B C D, avec I le milieu de B C. A B égale A C, D B égale D C, et I B égale I C. Donc A, D et I sont tous dans le plan médiateur de B C, et ils ne sont pas alignés. Le plan médiateur de B C est donc le plan A D I.

Définition. On appelle **plan médiateur** d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Théorème. L'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment.



A, D et I sont équidistants de B et de C.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête cachée [BD] est en pointillés. I est le milieu de l'arête [BC], tracée en bleu. Au second temps, le triangle ADI est tracé en rouge, le segment [DI] en pointillés : c'est le plan médiateur de [BC].

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ est un tétraèdre régulier et I est le milieu de $[BC]$. Quel est le plan médiateur de l'arête $[BC]$?

Trois points équidistants — $AB = AC$ et $DB = DC$, puisque toutes les arêtes sont égales ; et $IB = IC$. Les points A, D et I sont équidistants de B et de C : ils sont dans le plan médiateur de $[BC]$.

$$AB = AC \quad ; \quad DB = DC \quad ; \quad IB = IC$$

Le plan — Les points A, D et I ne sont pas alignés : ils déterminent ce plan.

le plan (ADI)

le plan médiateur de $[BC]$ est (ADI)

À ne pas faire : Le plan médiateur de $[BC]$ est le plan (ABC) — Le plan médiateur de $[BC]$ est perpendiculaire à (BC) en son milieu : il ne contient ni B ni C. Un point du plan médiateur est à égale distance de B et de C : B lui-même ne l'est pas.

18. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : la grande diagonale du cube

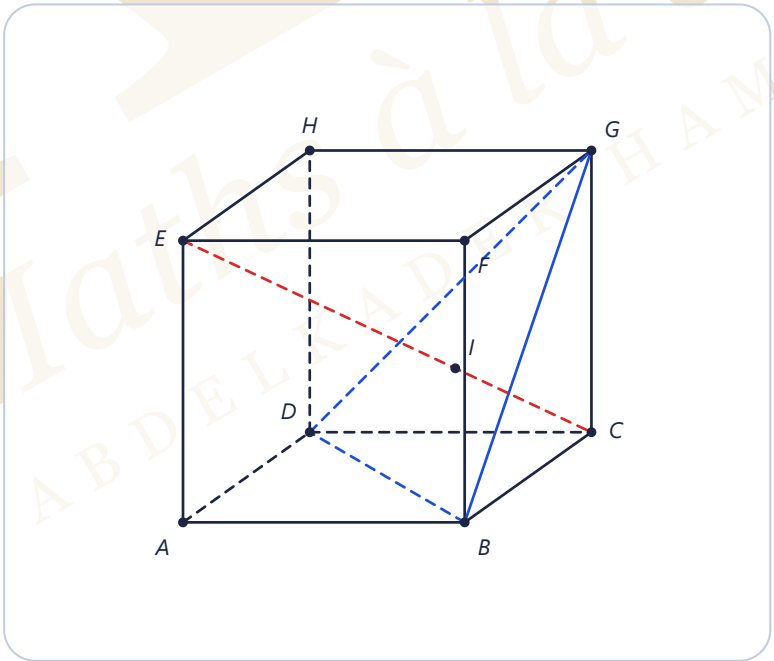
CE QU'IL DIT

Tawa problème as3eb chwaya. Cube ABCDEFGH d'arête a. Le triangle BDG, el côtés mte3ou diagonales de faces, donc équilatéral, w I centre de gravité mte3ou. EB = EG, CB = CG, w IB = IG. Donc E, C w I fi le plan médiateur de [BG]. W kif kif fi le plan médiateur de [DG]. Ez-zouz plans hedhom yet9at3ou fi droite, donc E, C w I alignés. W la droite (EC) fi ez-zouz plans médiateurs, donc orthogonale à la droite (BG) w à la droite (DG). Donc la droite (EC) perpendiculaire au plan (BDG).

توّة problème أصعب شويّة . le triangle B D G d'arête a ، cube A B C D E F G H الـ côtés متاعو diagonales متاعو . . I G égale I B ، w I centre de gravité ، donc équilatéral ، de faces متاعو E G égale E B ، C G égale C B ، w I le plan médiateur de B G . w في donc E ، C w I هاذم plans الزوز . le plan médiateur de D G كيف كيف في يتقاطعو E C في droite ، donc E ، C w I alignés . w la droite E C في plans médiateurs ، donc orthogonale الزوز . à la droite B G w à la droite D G . donc la droite E C perpendiculaire au plan B D G

Voici un problème un peu plus difficile. Un cube A B C D E F G H d'arête a. Le triangle B D G a pour côtés des diagonales de faces, donc il est équilatéral, et I est son centre de gravité. E B égale E G, C B égale C G, et I B égale I G. Donc E, C et I sont dans le plan médiateur de B G. Et de même dans le plan médiateur de D G. Ces deux plans se coupent suivant une droite, donc E, C et I sont alignés. Et la droite E C est dans les deux plans médiateurs, donc elle est orthogonale à la droite B G et à la droite D G. Donc la droite E C est perpendiculaire au plan B D G.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a. Le triangle BDG a pour côtés trois diagonales de faces : il est équilatéral. On note I son centre de gravité.



E, I et C sont alignés, et (EC) est perpendiculaire au plan (BDG).

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le triangle BDG est tracé en bleu, ses côtés [BD] et [DG] en pointillés ; I est son centre de gravité. Au second temps, la grande diagonale [EC] est tracée en rouge, en pointillés : elle passe par I.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Justifier que les points E, C et I appartiennent au plan médiateur de $[BG]$ et au plan médiateur de $[DG]$. 2) En déduire que E, C et I sont alignés et que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (BDG).

Plan médiateur de [BG] — $EB = EG = a\sqrt{2}$, car ce sont des diagonales de faces ; $CB = CG = a$, la longueur de l'arête ; et $IB = IG$, car I est le centre du triangle équilatéral BDG.

$$EB = EG \quad ; \quad CB = CG \quad ; \quad IB = IG$$

Plan médiateur de [DG] — De même $ED = EG = a\sqrt{2}$, $CD = CG = a$, la longueur de l'arête, et $ID = IG$.

$$ED = EG \quad ; \quad CD = CG \quad ; \quad ID = IG$$

Alignés — Les deux plans médiateurs sont distincts, puisque (BG) et (DG) ne sont pas parallèles, et ils ont des points communs : leur intersection est une droite, qui contient E, C et I.

$E,\ C$ et I sont alignés

Perpendiculaire — (EC) est contenue dans le plan médiateur de $[BG]$, perpendiculaire à (BG) : par la propriété 16, (EC) est orthogonale à (BG). De même, elle est orthogonale à (DG). Ces deux droites du plan (BDG) sont sécantes en G.

(EC) est perpendiculaire au plan (BDG)

(EC) est perpendiculaire au plan (BDG)

À ne pas faire : C est dans le plan médiateur de $[BG]$ car $CB = a$ — C est dans le plan médiateur de $[BG]$ car $CB = CG$. Ce qui compte, c'est l'égalité des deux distances aux extrémités du segment.

19. THÉORÈME

Axe d'un cercle

CE QU'IL DIT

Tawa l'axe d'un cercle. La définition : on appelle axe d'un cercle la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan. W el théorème : l'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle. 3lech ? Ken N 3la l'axe, w A point du cercle, le triangle NOA rectangle en O, donc NA² = r² + ON², nafs el 7aja l koll point du cercle. Mithel : rayon 3, w ON = 4, donc NA = 5.

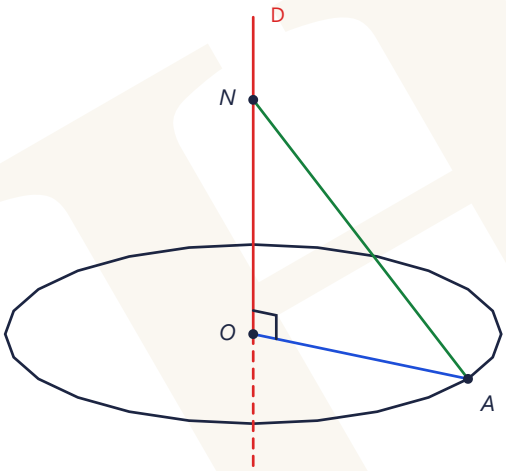
l'axe d'un cercle . la définition : on appelle axe d'un cercle la droite passant par le centre de ce توّة théorème : l'ensemble des points équidistants de tous les الـ cercle et perpendiculaire à son plan . w l'axe ، w A point du cercle ، le triangle N O A على N كان ؟ علاش . points d'un cercle est l'axe de ce cercle point du لكل الحاجة نفس ، rectangle en O ، donc N A au carré égale le rayon au carré plus O N au carré . rayon trois ، w O N égale quatre ، donc N A égale cinq : مثال . cercle

Voyons maintenant l'axe d'un cercle. La définition : on appelle axe d'un cercle la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan. Et le théorème : l'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle. Pourquoi ? Si N est sur l'axe et A un point du cercle, le

triangle N O A est rectangle en O, donc N A au carré égale le rayon au carré plus O N au carré, la même valeur pour tous les points du cercle. Un exemple : rayon trois et O N égale quatre, donc N A égale cinq.

Définition. On appelle **axe d'un cercle** la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.

Théorème. L'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle.



Tout point N de l'axe est à la même distance de tous les points du cercle.

Un cercle de centre O, vu en perspective comme une ellipse. Son axe, en rouge, est la droite verticale passant par O ; le point N est sur l'axe, au-dessus de O. A est un point du cercle. Au second temps, le rayon [OA] est tracé en bleu, avec un angle droit en O, et le segment [NA] en vert.

DÉMONSTRATION

Soit un cercle de centre O et de rayon r, et D son axe.

Un point de l'axe convient. Soit N un point de D, avec $ON = d$, et A un point du cercle. (ON) est perpendiculaire au plan du cercle, qui contient (OA) : le triangle NOA est rectangle en O, et $AN = \sqrt{r^2 + d^2}$. Cette distance est la même pour tous les points A du cercle.

Seuls les points de l'axe conviennent. Soit M un point équidistant de tous les points du cercle, et I, J, K trois points distincts du cercle. M appartient au plan médiateur P de $[IJ]$ et au plan médiateur Q de $[JK]$. Ces deux plans contiennent O, qui est équidistant de I, J et K, et ils sont distincts : ils se coupent suivant une droite passant par O. Cette droite est orthogonale à (IJ) et à (JK), sécantes en J dans le plan du cercle : c'est l'axe D. Donc M est sur D.

EXEMPLE TRAITÉ

Un cercle a pour centre O et pour rayon 3. N est un point de son axe tel que $ON = 4$. Calculer la distance de N à un point A du cercle.

Maths à la carte
ABDELHADER HAMMAMI

Un angle droit — L'axe est perpendiculaire au plan du cercle, qui contient (OA) : le triangle NOA est rectangle en O.

$\widehat{NOA} = 90°$

Pythagore — Le théorème de Pythagore dans le triangle NOA.

$NA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$NA = 5$$

À ne pas faire : L'axe d'un cercle est un de ses diamètres — L'axe d'un cercle est la perpendiculaire à son plan, menée par son centre. Un diamètre est dans le plan du cercle ; l'axe n'a qu'un point commun avec ce plan, le centre.

---

20. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : la sphère circonscrite à un tétraèdre

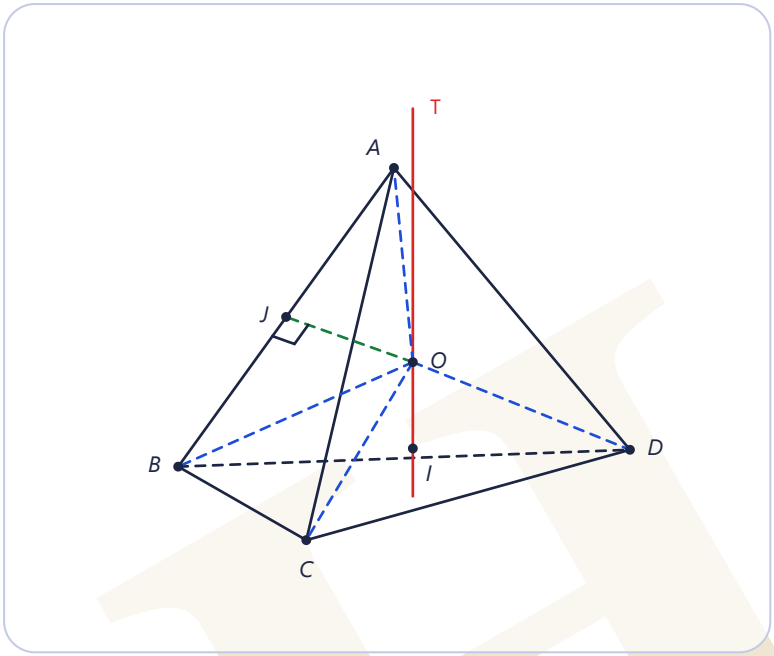
CE QU'IL DIT

Tawa problème e5er : la sphère circonscrite à un tétraèdre ABCD. Nlawjou 3la point O, b3adou 3la A, B, C w D nafs ech-chay. Les points équidistants de B, C w D, houma l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD. W l'axe hedha y9oss le plan médiateur de [AB] fi point O. El point hedha équidistant des quatre sommets, w houwa le centre de la sphère circonscrite.

توّة problème آخر : la sphère circonscrite à un tétraèdre A B C D . نلوّجو على point O ، بعدو على A ، B ، C w D نفس الشي . les points équidistants de B ، C w D ، هوما l'axe du cercle circonscrit au triangle B C D . w هذا يقصّ le plan médiateur de A B في point O . الـ point هذا ، w équidistant des quatre sommets هو le centre de la sphère circonscrite .

Voici un autre problème : la sphère circonscrite à un tétraèdre A B C D. Nous cherchons un point O qui est à la même distance de A, B, C et D. Les points équidistants de B, C et D forment l'axe du cercle circonscrit au triangle B C D. Et cet axe coupe le plan médiateur de A B en un point O. Ce point est équidistant des quatre sommets : c'est le centre de la sphère circonscrite.

$ABCD$ est un tétraèdre. On cherche un point O équidistant de ses quatre sommets. La sphère de centre O qui passe par A, B, C et D est appelée **sphère circonscrite** au tétraèdre $ABCD$.



O est sur l'axe T du cercle circonscrit à BCD et dans le plan médiateur de [AB] : OA = OB = OC = OD.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : A en haut, B à gauche, C devant, D à droite ; l'arête cachée [BD] est en pointillés. I est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD. La droite T, en rouge, passe par I et est perpendiculaire au plan (BCD) : c'est l'axe de ce cercle. O est sur T. J est le milieu de [AB]. Au second temps, le segment [OJ] est tracé en vert, avec un angle droit en J : O est dans le plan médiateur de [AB] ; puis les segments [OA], [OB], [OC] et [OD] sont tracés en pointillés bleus.

EXEMPLE TRAITÉ

Démontrer qu'il existe un point O équidistant de A, B, C et D.

Équidistant de B, C et D — Les plans médiateurs de $[BC]$ et de $[CD]$ se coupent suivant une droite T orthogonale au plan (BCD), qui perce ce plan en I, centre du cercle circonscrit au triangle BCD : T est l'axe de ce cercle. Les points de T sont exactement les points équidistants de B, C et D.

$$M \in T \iff MB = MC = MD$$

Équidistant aussi de A — Soit J le milieu de $[AB]$. La droite T coupe le plan médiateur de $[AB]$ en un point O : sinon, T serait parallèle à ce plan, donc orthogonale à (AB), et A serait dans le plan (BCD).

$$OA = OB$$

Conclusion — O est sur T et dans le plan médiateur de $[AB]$: il est équidistant des quatre sommets. Il appartient donc au plan médiateur de chaque arête du tétraèdre.

$$OA = OB = OC = OD$$

$$OA = OB = OC = OD$$

À ne pas faire : Le centre de la sphère circonscrite est le centre de gravité du tétraèdre — Le centre de la sphère circonscrite est le point commun aux plans médiateurs des arêtes. Ce qu'on demande au centre, c'est d'être à la même distance des quatre sommets : c'est le rôle des plans médiateurs.

21. ACTIVITÉ

Pour comprendre : des plans perpendiculaires

CE QU'IL DIT

Ne5dhou parallélépipède rectangle ABCDEFGH. Nlawjou fi plan 3la droite orthogonale à un autre plan. La droite (AB) perpendiculaire à la droite (BC) w à la droite (BF), w hedhom sécantes en B fi le plan (BCG). Donc la droite (AB), elli hiya fi le plan (ABC), orthogonale au plan (BCG). W kif kif la droite (CG), elli fi le plan (BCG), orthogonale au plan (ABC). Ama fi le plan (ACGE), ma fammech 7atta droite orthogonale au plan (ADHE). Hakka nouslou l la définition mta3 deux plans perpendiculaires.

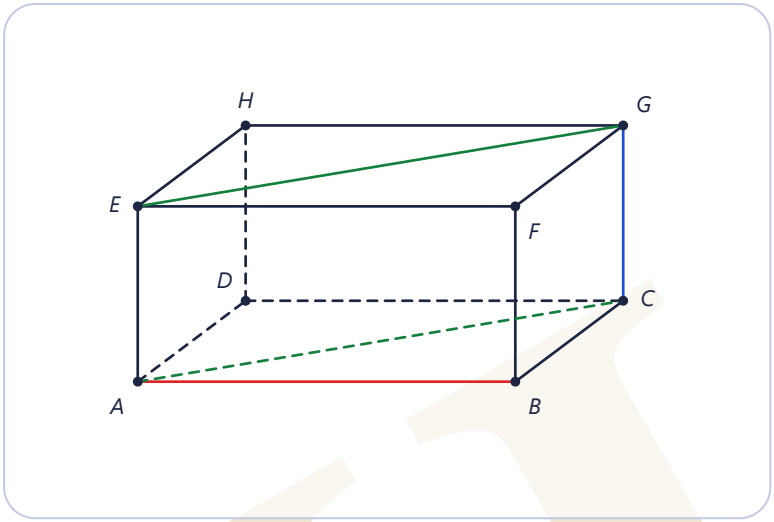
droite orthogonale à un autre plan . على plan نلوّجو في . parallélépipède rectangle A B C D E F G H ناخذو le plan B C G . في sécantes en B هاذم la droite A B perpendiculaire à la droite B C w à la droite B F ، w ، la droite C G كيف كيف le plan A B C ، orthogonale au plan B C G . w اللي هي في ، donc la droite A B droite ما فماش حتّى ، le plan A C G E أما في . le plan B C G ، orthogonale au plan A B C اللي في . deux plans perpendiculaires متاع la définition لـ هكّا نوصلو . orthogonale au plan A D H E

Prenons un parallélépipède rectangle A B C D E F G H. Nous cherchons, dans un plan, une droite orthogonale à un autre plan. La droite A B est perpendiculaire à la droite B C et à la droite B F, qui sont sécantes en B dans le plan B C G. Donc la droite A B, qui est dans le plan A B C, est orthogonale au plan B C G. De même, la droite C G, qui est dans le plan B C G, est orthogonale au plan A B C. En revanche, dans le plan A C G E, il n'y a aucune droite orthogonale au plan A D H E. C'est ce qui nous amène à la définition de deux plans perpendiculaires.

Dans la figure, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle : ses faces sont des rectangles, et chaque arête « verticale » est perpendiculaire aux plans des deux faces qu'elle relie.

On cherche, dans un plan, une droite orthogonale à un autre plan.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



(AB) est orthogonale au plan (BCG) ; (CG) est orthogonale au plan (ABC).

Un parallélépipède rectangle ABCDEFGH vu en perspective, plus long que haut : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [AB] est repassée en rouge, l'arête [CG] en bleu. Au second temps, la face diagonale ACGE est tracée en vert, ses côtés [AC] en pointillés.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Nommer une droite du plan (ABC) qui est orthogonale au plan (BCG). b) Nommer une droite du plan (BCG) qui est orthogonale au plan (ABC). c) Existe-t-il une droite du plan $(ACGE)$ qui est orthogonale au plan $(ADHE)$?

Question a — (AB) est perpendiculaire à (BC) dans le rectangle $ABCD$ et à (BF) dans le rectangle $ABFE$; (BC) et (BF) sont sécantes en B dans le plan (BCG).

(AB) est orthogonale au plan (BCG)

Question b — (CG) est perpendiculaire à (CB) dans le rectangle $BCGF$ et à (CD) dans le rectangle $DCGH$, sécantes en C.

(CG) est orthogonale au plan (ABC)

Question c — Une telle droite serait orthogonale à (AE) ; dans le rectangle $ACGE$, elle serait donc parallèle à (AC), et (AC) serait orthogonale au plan $(ADHE)$, donc à (AD). Or l'angle $\widehat{CAD}$ du rectangle $ABCD$ n'est pas droit.

non

question a : (AB) ; question b : (CG) ; question c : non

À ne pas faire : (AE) est une droite du plan $(ACGE)$ orthogonale au plan $(ADHE)$ — (AE) est contenue dans le plan $(ADHE)$: elle ne lui est pas orthogonale. Une droite contenue dans un plan n'est jamais perpendiculaire à ce plan.

22. DÉFINITION

Plans perpendiculaires

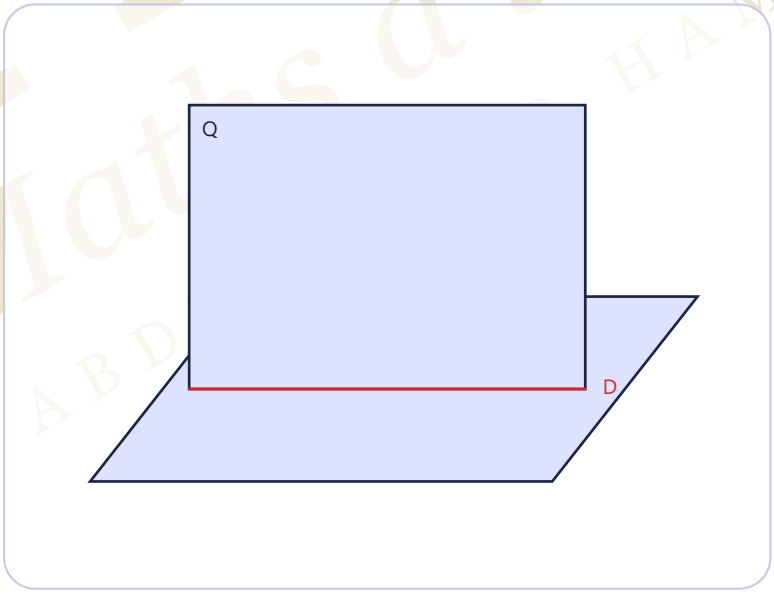
CE QU'IL DIT

Tawa la définition : on dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre. Mithel fi le cube : la droite (BF) orthogonale au plan (ABC), w hiya fi le plan (ABF). Donc le plan (ABF) w le plan (ABC) perpendiculaires. Thabbet mli7 fi zouz 7ajet. Awwalan : mouch koll droite fi le plan (ABF) orthogonale au plan (ABC), mathalan la droite (AF). W thenyan : deux plans perpendiculaires à un même plan mouch dima parallèles : le plan (ABF) w le plan (BCG) ez-zouz perpendiculaires au plan (ABC), w yet9at3ou.

la définition : on dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite توّة orthogonale à l'autre . مثال في w ، le plan A B C orthogonale au plan B F le cube : la droite هي في le plan A B F . donc le plan A B F w le plan A B C perpendiculaires . ثبّت مليح في زوز حاجات . أوّلا : موش كل droite في le deux plans perpendiculaires à un : ثانيا la droite A F . w مثلا ، plan A B F orthogonale au plan A B C perpendiculaires au plan A B C ، w الزوز parallèles : le plan A B F w le plan B C G موش ديما même plan يتقاطعو .

Voici la définition : on dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre. Un exemple dans le cube : la droite B F est orthogonale au plan A B C, et elle est dans le plan A B F. Donc le plan A B F et le plan A B C sont perpendiculaires. Fais bien attention à deux choses. D'abord : toute droite du plan A B F n'est pas orthogonale au plan A B C, par exemple la droite A F. Ensuite : deux plans perpendiculaires à un même plan ne sont pas toujours parallèles : le plan A B F et le plan B C G sont tous les deux perpendiculaires au plan A B C, et ils se coupent.

Définition. On dit que deux plans sont **perpendiculaires** lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.



Les plans P et Q sont perpendiculaires ; ils se coupent suivant la droite D.

Un plan P horizontal, dessiné comme un parallélogramme, et un plan Q debout, dessiné comme un rectangle, qui le coupe suivant la droite D, en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que les plans (ABF) et (ABC) sont perpendiculaires.

Une droite orthogonale — (BF) est perpendiculaire à (BA) et à (BC), sécantes en B : elle est orthogonale au plan (ABC).

(BF) est orthogonale au plan (ABC)

Contenue dans l'autre plan — La droite (BF) est contenue dans le plan (ABF).

(ABF) et (ABC) sont perpendiculaires

(ABF) et (ABC) sont perpendiculaires

À ne pas faire : Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un est orthogonale à l'autre — Seules certaines droites de l'un sont orthogonales à l'autre. Les plans (ABF) et (ABC) sont perpendiculaires, mais la droite (AF) du plan (ABF) n'est pas orthogonale au plan (ABC).

À ne pas faire : Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles — Deux plans perpendiculaires à un même plan peuvent être sécants. Les plans (ABF) et (BCG) sont tous deux perpendiculaires au plan (ABC), et ils se coupent suivant (BF).

23. THÉORÈME

Propriétés 20, 21 et 22

CE QU'IL DIT

Tawa trois propriétés. La propriété 20 : si D est la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires, alors toute droite D' contenue dans l'un de ces deux plans et perpendiculaire à D est orthogonale à l'autre. La propriété 21 : si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. W la propriété 22 : si deux plans sécants P et Q sont perpendiculaires à un même plan R, alors leur droite d'intersection D est orthogonale au plan R. Mithel fi le cube : le plan (ABF) w le plan (ADH) ez-zouz perpendiculaires au plan (ABC), w yet9at3ou fi la droite (AE). Donc la droite (AE) orthogonale au plan (ABC). W men hedhom nestantjou zeda : si deux droites sont orthogonales, alors tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre. W si deux plans P et Q sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à Q menée par un point de P est contenue dans P, w toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

trois propriétés . la propriété vingt : si D est la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires ، تو ّة alors toute droite D prime contenue dans l'un de ces deux plans et perpendiculaire à D est orthogonale à l'autre . la propriété vingt-et-un : si deux plans sont parallèles ، alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre . w la propriété vingt-deux : si deux plans sécants P et Q sont perpendiculaires à un même plan R ، alors leur droite d'intersection D est orthogonale au plan R . مثال la droite A يتقاطعو في perpendiculaires au plan A B C ، w الزوز le cube : le plan A B F w le plan A D H في si deux droites sont : زادة نستنتجو هاذم من E . donc la droite A E orthogonale au plan A B C . w orthogonales ، alors tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre . w si deux plans P et Q sont

perpendiculaires ، toute droite perpendiculaire à Q menée par un point de P est contenue dans P ، w
. toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre

Voici trois propriétés. La propriété vingt : si D est la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires, alors toute droite D prime contenue dans l'un de ces deux plans et perpendiculaire à D est orthogonale à l'autre. La propriété vingt et un : si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. Et la propriété vingt-deux : si deux plans sécants P et Q sont perpendiculaires à un même plan R, alors leur droite d'intersection D est orthogonale au plan R. Un exemple dans le cube : le plan A B F et le plan A D H sont tous les deux perpendiculaires au plan A B C, et ils se coupent suivant la droite A E. Donc la droite A E est orthogonale au plan A B C. On en déduit aussi : si deux droites sont orthogonales, alors tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre. Et si deux plans P et Q sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à Q menée par un point de P est contenue dans P, et toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

Propriété 20. Si D est la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires, alors toute droite D' contenue dans l'un de ces deux plans et perpendiculaire à la droite d'intersection D est orthogonale à l'autre.

Propriété 21. Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Propriété 22. Si deux plans sécants P et Q sont perpendiculaires à un même plan R, alors leur droite d'intersection D est orthogonale au plan R.

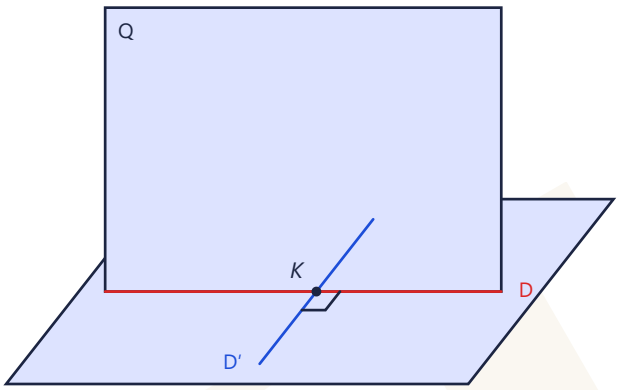
Conséquences. La synthèse du manuel (p.158-159) donne aussi les trois énoncés suivants ; ils sont démontrés plus bas.

1) Si deux droites sont orthogonales, alors tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.

2) Si deux plans P et Q sont perpendiculaires, alors toute droite perpendiculaire à Q menée par un point A de P est contenue dans P.

3) Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



D' est dans P et perpendiculaire à D : elle est orthogonale au plan Q.

Un plan P horizontal et un plan Q debout, perpendiculaires, qui se coupent suivant la droite D, en rouge. Au second temps, une droite D' du plan P, en bleu, est tracée : elle coupe D au point K, à angle droit.

DÉMONSTRATION

Propriété 20. Soient P et Q deux plans perpendiculaires, sécants suivant D, et D' une droite de P perpendiculaire à D. Le plan P contient une droite T orthogonale à Q. Par la propriété 16, T est orthogonale à D, qui est dans Q. Dans le plan P, T et D' sont donc perpendiculaires à la même droite D : elles sont parallèles. Par la propriété 17 a), D' est orthogonale à Q.

Propriété 21. Soient P et P' deux plans parallèles, et R un plan perpendiculaire à P. R contient une droite T orthogonale à P ; par la propriété 17 b), T est orthogonale à P'. Donc R est perpendiculaire à P'.

Propriété 22. Soit A un point de D, et T la droite passant par A et perpendiculaire à R. Le plan P contient une droite T_1 orthogonale à R ; T et T_1 sont parallèles (propriété 19 a), et T passe par le point A de P : T est contenue dans P. De même, T est contenue dans Q. Donc T est la droite d'intersection D : D est orthogonale au plan R.

Conséquence 1. Soient D et D' deux droites orthogonales, et R un plan perpendiculaire à D. Soit A un point de R, et D'' la parallèle à D' menée par A. Par la propriété 13, D'' est orthogonale à D ; elle passe par le point A du plan R : par la propriété 18 c), D'' est contenue dans R. La droite D', parallèle à une droite de R, est donc parallèle à R.

Conséquence 2. Le plan P contient une droite T orthogonale à Q. La parallèle à T menée par A est perpendiculaire à Q (propriété 17 a) ; par la propriété 18 a), c'est la droite D. Parallèle à la droite T de P et passant par le point A de P, elle est contenue dans P.

Conséquence 3. Soit D' une droite perpendiculaire à Q, A un point de P, et D la parallèle à D' menée par A. D est perpendiculaire à Q (propriété 17 a) : par la conséquence 2, elle est contenue dans P. La droite D', parallèle à une droite de P, est parallèle à P.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le cube $ABCDEFGH$, les plans (ABF) et (ADH) sont tous deux perpendiculaires au plan (ABC). Quelle est leur droite d'intersection, et que peut-on en dire ?

L'intersection — Les plans (ABF) et (ADH) sont ceux des faces $ABFE$ et $ADHE$: ils se coupent suivant l'arête (AE).

$(ABF) \cap (ADH) = (AE)$

Propriété 22 — Deux plans sécants perpendiculaires au plan (ABC) : leur droite d'intersection est orthogonale à ce plan.

(AE) est orthogonale au plan (ABC)

> (AE) est orthogonale au plan (ABC)

À ne pas faire : Toute droite du plan P qui coupe D est orthogonale au plan Q — Seule une droite de P perpendiculaire à D est orthogonale au plan Q. La propriété 20 exige l'angle droit avec la droite d'intersection.

---

24. EXEMPLE

Exemple : deux plans diagonaux du cube

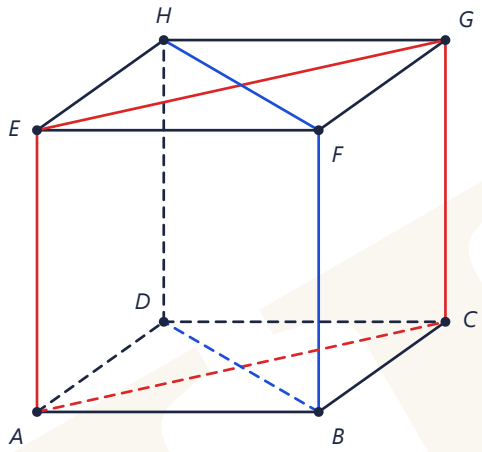
CE QU'IL DIT

Tawa exemple fi le cube : le plan (ACGE) w le plan (BDHF). N7ebbou nbayynou elli houma perpendiculaires. Les diagonales du carré ABCD perpendiculaires : la droite (AC) perpendiculaire à la droite (BD). W la droite (BF) perpendiculaire au plan (ABC), donc orthogonale à la droite (AC). Ez-zouz droites (BD) w (BF) sécantes en B fi le plan (BDHF). Donc la droite (AC) orthogonale au plan (BDHF). W la droite (AC) fi le plan (ACGE), donc les deux plans sont perpendiculaires.

توّة exemple في le cube : le plan A C G E w le plan B D H F نحبّو نبيّنو اللي هوما perpendiculaires . les diagonales du carré A B C D perpendiculaires : la droite A C perpendiculaire à la droite B D . w la droite droites B D w B F sécantes الزوز . B F perpendiculaire au plan A B C ، donc orthogonale à la droite A C le plan A في le plan B D H F . donc la droite A C orthogonale au plan B D H F . w la droite A C في en B . C G E ، donc les deux plans sont perpendiculaires

Voici un exemple dans le cube : le plan A C G E et le plan B D H F. Nous voulons montrer qu'ils sont perpendiculaires. Les diagonales du carré A B C D sont perpendiculaires : la droite A C est perpendiculaire à la droite B D. Et la droite B F est perpendiculaire au plan A B C, donc orthogonale à la droite A C. Les deux droites B D et B F sont sécantes en B dans le plan B D H F. Donc la droite A C est orthogonale au plan B D H F. Et la droite A C est dans le plan A C G E : les deux plans sont perpendiculaires.

$ABCDEFGH$ est un cube. Ses plans diagonaux $(ACGE)$ et $(BDHF)$ coupent le cube suivant deux rectangles.



Les plans (ACGE) et (BDHF) sont perpendiculaires.

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le rectangle ACGE est tracé en rouge : ses côtés [AC] et [EG] sont des diagonales de faces, [AC] en pointillés. Au second temps, le rectangle BDHF est tracé en bleu, ses côtés [BD] et [HF] ; [BD] est en pointillés.

EXEMPLE TRAITÉ

Montrer que le plan $(BDHF)$ est perpendiculaire au plan $(ACGE)$.

Dans la base — Les diagonales du carré $ABCD$ sont perpendiculaires.

(AC) est perpendiculaire à (BD)

L'arête (BF) — (BF) est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (AC) : par la propriété 16, (AC) est orthogonale à (BF).

(AC) est orthogonale à (BF)

Une droite orthogonale au plan — (BD) et (BF) sont sécantes en B dans le plan $(BDHF)$: (AC) est orthogonale à ce plan.

(AC) est orthogonale au plan $(BDHF)$

Conclusion — Le plan $(ACGE)$ contient la droite (AC), orthogonale au plan $(BDHF)$.

$(ACGE)$ et $(BDHF)$ sont perpendiculaires

$(ACGE)$ et $(BDHF)$ sont perpendiculaires

À ne pas faire : (AC) est perpendiculaire à (BD), donc les plans $(ACGE)$ et $(BDHF)$ sont perpendiculaires — (AC) est orthogonale à (BD) et à (BF), donc au plan $(BDHF)$: les deux plans sont perpendiculaires. Il faut une droite d'un plan orthogonale à l'autre plan tout entier, pas à une seule de ses droites.

25. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : la hauteur d'un tétraèdre trirectangle

CE QU'IL DIT

Tawa e5er problème : tétraèdre OABC trirectangle en O, w H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Awwalan, la droite (BC) orthogonale à la droite (OA) w à la droite (OH), donc perpendiculaire au plan (OAH), w orthogonale à la droite (AH). Ya3ni (AH) hauteur du triangle ABC, w H houwa l'orthocentre. Ba3d, b zouz triangles rectangles, nal9aw : 1/OH² = 1/OA² + 1/OB² + 1/OC². Mithel : OA = 3, OB w OC ysewiw 6 : 1/OH² = 1/6, donc OH = √6.

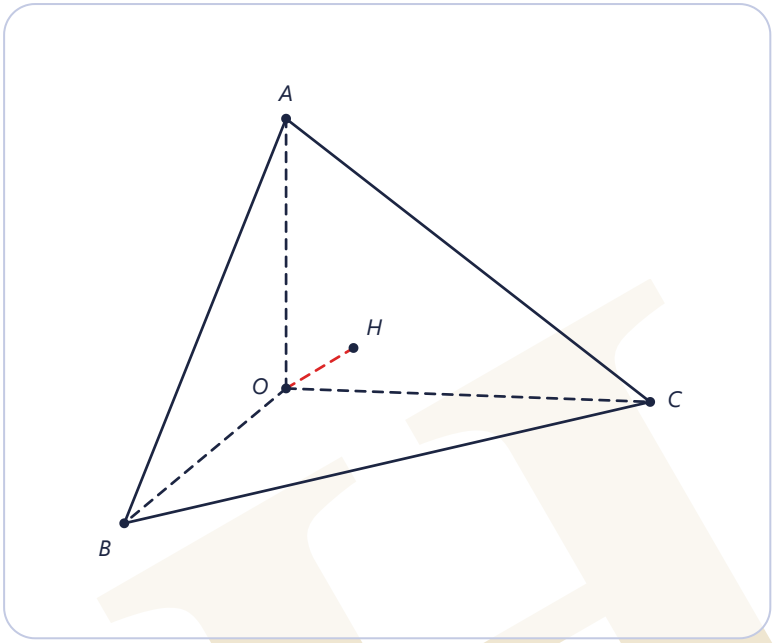
problème : tétraèdre O A B C trirectangle en O ، w H le projeté orthogonal de O sur le plan A B C توّة آخر la droite B C orthogonale à la droite O A w à la droite O H ، donc perpendiculaire au plan O A H ، ، أوّلا . w orthogonale à la droite A H . l'orthocentre هو A H hauteur du triangle A B C ، w H يعني . بعد ، بزوز un sur O H au carré égale un sur O A au carré plus un sur O B au carré plus : نلقاو ، triangles rectangles six : un sur O H au carré égale un sixième يساويو O A égale trois ، O B w O C : مثال . un sur O C au carré . ، donc O H égale racine de six

Voici un dernier problème : un tétraèdre O A B C trirectangle en O, et H le projeté orthogonal de O sur le plan A B C. D'abord, la droite B C est orthogonale à la droite O A et à la droite O H, donc perpendiculaire au plan O A H, et orthogonale à la droite A H. Ainsi A H est une hauteur du triangle A B C, et H est l'orthocentre. Ensuite, avec deux triangles rectangles, on trouve : un sur O H au carré égale un sur O A au carré plus un sur O B au carré plus un sur O C au carré. Un exemple : O A égale trois, O B et O C valent six : un sur O H au carré égale un sixième, donc O H égale racine de six.

$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O : les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles en O. H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

On rappelle que si OAB est un triangle rectangle en O et K le pied de la hauteur issue de O, alors $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Un tétraèdre OABC : O est au fond, A juste au-dessus de O, B devant à gauche, C à droite. Les arêtes [OA], [OB] et [OC], issues de O, sont en pointillés. Au second temps, le point H est placé à l'intérieur du triangle ABC, et le segment [OH] est tracé en rouge, en pointillés.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC. 2) En déduire que $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. 3) Calculer OH lorsque $OA = 3$, $OB = 6$ et $OC = 6$.

Une hauteur — (OA) est orthogonale à (OB) et à (OC) : elle est perpendiculaire au plan (OBC), donc orthogonale à (BC). (OH) est perpendiculaire au plan (ABC), donc orthogonale à (BC). Ainsi (BC) est perpendiculaire au plan (OAH), et orthogonale à (AH) : (AH) est la hauteur issue de A. De même pour (BH) : H est l'orthocentre.

H est l'orthocentre de ABC

Deux triangles rectangles — (AH) coupe (BC) en K. (BC) est perpendiculaire au plan (OAK) : (OK) est la hauteur du triangle OBC rectangle en O, et $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Le triangle OAK est rectangle en O, de hauteur (OH) : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2}$.

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Le calcul — Avec $OA = 3$, $OB = 6$ et $OC = 6$: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$.

$\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$OH = \sqrt{6}$$

À ne pas faire : $OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$ — $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. La hauteur est plus courte que chacune des arêtes OA, OB et OC : ce sont les inverses des carrés qui s'ajoutent.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et sécantes ; deux droites orthogonales peuvent ne pas se couper.

   > Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires. W deux droites perpendiculaires houma orthogonales et sécantes, ama deux droites orthogonales ynajjmou ma yetle9awch.
   > *Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et sécantes, mais deux droites orthogonales peuvent ne pas se couper.*

2. Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

   > Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. W si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
   > *Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. Et si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.*

3. Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Elle est alors orthogonale à toute droite de ce plan.

   > Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. W wa9tha hiya orthogonale à toute droite de ce plan.
   > *Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Elle est alors orthogonale à toute droite de ce plan.*

4. Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

   > Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. W si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
   > *Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Et si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.*

5. Par un point passe une unique droite perpendiculaire à un plan donné, et un unique plan perpendiculaire à une droite donnée.

   > Par un point passe une unique droite perpendiculaire à un plan donné, w un unique plan perpendiculaire à une droite donnée.
   > *Par un point passe une unique droite perpendiculaire à un plan donné, et un unique plan perpendiculaire à une droite donnée.*

6. Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

   > Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. W deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

> *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. Et deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

7. Théorème des trois perpendiculaires : si T est perpendiculaire au plan P en A et si H est le projeté orthogonal de A sur une droite D de P, alors pour tout point M de T, la droite (MH) est orthogonale à D.

   > Le théorème des trois perpendiculaires : ken T perpendiculaire au plan P en A, w H le projeté orthogonal de A sur une droite D de P, alors pour tout point M de T, la droite (MH) est orthogonale à D.
   > *Le théorème des trois perpendiculaires : si T est perpendiculaire au plan P en A et si H est le projeté orthogonal de A sur une droite D de P, alors pour tout point M de T, la droite M H est orthogonale à D.*

8. L'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment : le plan perpendiculaire au segment en son milieu.

   > L'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment : le plan perpendiculaire au segment en son milieu.
   > *L'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment : le plan perpendiculaire au segment en son milieu.*

9. L'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle : la perpendiculaire à son plan menée par son centre.

   > L'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle : la perpendiculaire à son plan menée par son centre.
   > *L'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle : la perpendiculaire à son plan menée par son centre.*

10. Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre. Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même plan, leur droite d'intersection est orthogonale à ce plan.

    > Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre. W si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même plan, leur droite d'intersection est orthogonale à ce plan.
    > *Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre. Et si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même plan, leur droite d'intersection est orthogonale à ce plan.*

11. Si deux plans sont perpendiculaires suivant une droite D, toute droite de l'un perpendiculaire à D est orthogonale à l'autre. Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

    > Si deux plans sont perpendiculaires suivant une droite D, toute droite de l'un perpendiculaire à D est orthogonale à l'autre. W si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
    > *Si deux plans sont perpendiculaires suivant une droite D, toute droite de l'un perpendiculaire à D est orthogonale à l'autre. Et si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.*

12. Si deux droites sont orthogonales, tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre. Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

    > Si deux droites sont orthogonales, tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre. W si deux plans sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.
    > *Si deux droites sont orthogonales, tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre. Et si deux plans sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : deux droites orthogonales mouch lezem yetle9aw. Bech tbayyen droite perpendiculaire à un plan, lawwej 3la deux droites sécantes du plan orthogonales liha. W ki droite perpendiculaire à un plan, hiya orthogonale à toute droite de ce plan : hedhi elli ta3tik les angles droits w Pythagore. W deux plans perpendiculaires, wa7ed fihom fih droite orthogonale à l'autre. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : deux droites orthogonales موش لازم يتلاقاو . باش تبيّن droite perpendiculaire
à un plan ، لوّج على deux droites sécantes du plan orthogonales ليها . w كي droite perpendiculaire à un
plan ، هي orthogonale à toute droite de ce plan : هاذي اللي تعطيك . w les angles droits w Pythagore
. يالله للـ exercices . droite orthogonale à l'autre واحد فيهم فيه ، deux plans perpendiculaires

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : deux droites orthogonales ne se coupent pas forcément. Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, cherche deux droites sécantes du plan qui lui sont orthogonales. Et quand une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan : c'est ce qui te donne les angles droits et Pythagore. Et deux plans sont perpendiculaires quand l'un contient une droite orthogonale à l'autre. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · DROITES ORTHOGONALES

c'est quoi deux droites orthogonales | chnowa ma3neha droites orthogonales | définition de deux droites orthogonales | droites orthogonales ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

orthogonales : leurs parallèles par un même point sont perpendiculaires

CE QU'IL RÉPOND

Deux droites orthogonales, ma3neha : ne5dhou point, w nrasmou mennou parallèle l koll droite. Ken ez-zouz parallèles hedhom perpendiculaires, les deux droites sont orthogonales.

deux droites orthogonales ، معناها : ناخذو w point ، نرسمو منّو parallèle لكل droite . كان الزوز parallèles
. هاذم les deux droites sont orthogonales ، perpendiculaires

Deux droites sont orthogonales quand on prend un point, qu'on trace par ce point une parallèle à chacune, et que ces deux parallèles sont perpendiculaires.

QUESTION 2 · DROITES ORTHOGONALES

quelle est la différence entre orthogonales et perpendiculaires | chnowa el far9 bin orthogonales w perpendiculaires | différence entre droites perpendiculaires et droites orthogonales

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

perpendiculaires = orthogonales et sécantes

CE QU'IL RÉPOND

Deux droites perpendiculaires houma orthogonales w yetle9aw. Ama deux droites orthogonales, ynajjmou ma yetle9awch. Ya3ni perpendiculaires ma3neha orthogonales et sécantes.

deux droites perpendiculaires هوما orthogonales w يتلاقاو . أما deux droites orthogonales ما ينجّمو ، يعني perpendiculaires يتلاقاوش . معناها orthogonales et sécantes .

Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et se coupent. Deux droites orthogonales, elles, peuvent ne pas se couper. Autrement dit, perpendiculaires veut dire orthogonales et sécantes.

QUESTION 3 · DROITES ORTHOGONALES

deux droites orthogonales se coupent toujours | est ce que deux droites orthogonales yetle9aw | droites orthogonales sans point commun possible

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

(AE) et (BC) : orthogonales, sans point commun

CE QU'IL RÉPOND

Le, mouch dima. Fi le cube, la droite (AE) w la droite (BC) orthogonales, w ma yetle9awch : mouch fi nafs el plan.

لا ، موش ديما . في w ، la droite A E w la droite B C orthogonales ، le cube ما يتلاقاوش : موش في نفس الـ plan .

Non, pas toujours. Dans le cube, la droite A E et la droite B C sont orthogonales, et elles ne se coupent pas : elles ne sont pas dans un même plan.

QUESTION 4 · DROITE PERPENDICULAIRE À UN PLAN

c'est quoi une droite perpendiculaire à un plan | chnowa ma3neha droite perpendiculaire à un plan | définition droite orthogonale à un plan

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

orthogonale à deux droites sécantes du plan

CE QU'IL RÉPOND

Droite perpendiculaire à un plan, ma3neha orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. W wa9tha twalli orthogonale à toute droite du plan.

droite perpendiculaire à un plan ، معناها w orthogonale à deux droites sécantes de ce plan . وقتها تولّي orthogonale à toute droite du plan .

Une droite est perpendiculaire à un plan quand elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Elle est alors orthogonale à toute droite du plan.

QUESTION 5 · DROITE PERPENDICULAIRE À UN PLAN

comment montrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan

kifech nbayyen droite perpendiculaire au plan

méthode pour démontrer qu une droite est orthogonale à un plan

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

orthogonale à deux droites sécantes du plan

CE QU'IL RÉPOND

Lawwej fel plan 3la deux droites sécantes, w bayyen elli el droite orthogonale à chacune. Walla bayyen elli hiya parallèle à une droite perpendiculaire au plan.

droite orthogonale à chacune الـ بيّن اللي deux droites sécantes ، w على plan الـ في لوّج . ولّا بيّن اللي هي parallèle à une droite perpendiculaire au plan .

Cherche dans le plan deux droites sécantes, et montre que la droite est orthogonale à chacune. Ou bien montre qu'elle est parallèle à une droite perpendiculaire au plan.

QUESTION 6 · DROITE PERPENDICULAIRE À UN PLAN

pourquoi les deux droites doivent être sécantes

3lech lezem sécantes

pourquoi il faut deux droites sécantes du plan

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

(AB) est orthogonale à (AD) et à (BC)

CE QU'IL RÉPOND

5ater zouz droites parallèles ma yekfiwch. Fi le cube, la droite (AB) orthogonale à la droite (AD) w à la droite (BC), w hiya fi le plan (ABC) nafsou.

le cube ، la droite A B orthogonale à la droite A D w à la في . ما يكفيوش droites parallèles زوز خاطر droite B C ، w هي في le plan A B C نفسو .

Parce que deux droites parallèles ne suffisent pas. Dans le cube, la droite A B est orthogonale à la droite A D et à la droite B C, et pourtant elle est dans le plan A B C lui-même.

QUESTION 7 · DROITE PERPENDICULAIRE À UN PLAN

une droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites du plan

est ce que elle est orthogonale à toute droite du plan

koll droite fel plan orthogonale liha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

propriété 16

CE QU'IL RÉPOND

Ih, hedhi la propriété 16 : si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan, 7atta elli ma tetle9ech m3aha.

la propriété seize : si une droite est perpendiculaire à un plan ، alors elle est orthogonale à إيه ، هاذي toute droite de ce plan ، حتّى اللي ما تتلاقاش معاها .

Oui, c'est la propriété seize : si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan, même celles qu'elle ne coupe pas.

QUESTION 8 · EXEMPLE : LES ARÊTES OPPOSÉES D'UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER

comment montrer que deux droites sont orthogonales

kifech nbayyen elli zouz droites orthogonales

méthode pour démontrer deux droites orthogonales

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

l'une est perpendiculaire à un plan qui contient l'autre

CE QU'IL RÉPOND

3andek zouz torq. Ya tbaddel wa7da menhom b parallèle t9oss lo5ra, w tal9a angle droit. Ya tbayyen elli wa7da menhom perpendiculaire à un plan fih lo5ra.

عندك زوز طرق . يا تبدّل وحدة منهم بـ parallèle تقصّ الأخرى ، w تلقى angle droit . يا تبيّن اللي وحدة منهم perpendiculaire à un plan فيه الأخرى .

Tu as deux méthodes. Soit tu remplaces l'une par une parallèle qui coupe l'autre, et tu trouves un angle droit. Soit tu montres que l'une est perpendiculaire à un plan qui contient l'autre.

QUESTION 9 · PROPRIÉTÉ 18

combien de droites perpendiculaires à un plan passent par un point

9adech men droite perpendiculaire à un plan tet3adda men point

une seule droite perpendiculaire à un plan par un point

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

propriété 18

CE QU'IL RÉPOND

Wa7da bark : par un point donné, il passe une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné. W kif kif, par un point, il passe un seul plan perpendiculaire à une droite donnée.

وحدة برك : w . par un point donné ، il passe une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné
كيف كيف ، par un point ، il passe un seul plan perpendiculaire à une droite donnée .

Une seule : par un point donné, il passe une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné. Et de même, par un point, il passe un seul plan perpendiculaire à une droite donnée.

QUESTION 10 · PROPRIÉTÉ 19

deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles

zouz droites perpendiculaires à nafs el plan parallèles

que dire de deux droites perpendiculaires au même plan

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

propriété 19

CE QU'IL RÉPOND

Ih, deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. Hedhi la propriété 19. Mathalan fi le cube, la droite (BF) w la droite (DH).

مثلا في . la propriété dix-neuf هاذي . deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles ، إيه
. le cube ، la droite B F w la droite D H

Oui, deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. C'est la propriété dix-neuf. Par exemple, dans le cube, la droite B F et la droite D H.

QUESTION 11 · PROPRIÉTÉ 19

deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles ?

zouz droites orthogonales à nafs el droite parallèles ?

deux droites orthogonales à la même droite sont-elles parallèles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

(AB) et (AD) sont orthogonales à (AE)

CE QU'IL RÉPOND

La, mouch dima. Fi le cube, la droite (AB) w la droite (AD) ez-zouz orthogonales à la droite (AE), w yetle9aw fi A. Elli s7i7 : deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

يتلاقاو في orthogonales à la droite A E ، w الزوز le cube ، la droite A B w la droite A D في . موش ديما ، لا
. deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles : اللي صحيح . A

Non, pas toujours. Dans le cube, la droite A B et la droite A D sont toutes les deux orthogonales à la droite A E, et elles se coupent en A. Ce qui est vrai : deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

QUESTION 12 · PLANS PERPENDICULAIRES

deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles | zouz plans perpendiculaires à nafs el plan parallèles | deux plans perpendiculaires au même plan forcément parallèles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(ABF) \cap (BCG) = (BF)$$

CE QU'IL RÉPOND

Le, mouch dima. Le plan (ABF) w le plan (BCG) ez-zouz perpendiculaires au plan (ABC), w yet9at3ou fi la droite (BF). Deux plans perpendiculaires à une même droite, hedhouma elli parallèles.

لا ، موش ديما . B C G le plan w A B F le plan الزوز ، A B C perpendiculaires au plan يتقاطعو في la droite
. parallèles اللي هاذوما ، B F . deux plans perpendiculaires à une même droite

Non, pas toujours. Le plan A B F et le plan B C G sont tous les deux perpendiculaires au plan A B C, et ils se coupent suivant la droite B F. Ce sont deux plans perpendiculaires à une même droite qui sont parallèles.

QUESTION 13 · LE THÉORÈME DES TROIS PERPENDICULAIRES

c'est quoi le théorème des trois perpendiculaires | chnowa théorème des trois perpendiculaires | explique le théorème des trois perpendiculaires | le théorème des 3 perpendiculaires

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(MH) \text{ est orthogonale à } D$$

CE QU'IL RÉPOND

T perpendiculaire au plan P en A, w H le projeté orthogonal de A sur une droite D du plan. El théorème y9oul : pour tout point M de T, la droite (MH) est orthogonale à D.

الـ . T perpendiculaire au plan P en A ، w H le projeté orthogonal de A sur une droite D du plan
. pour tout point M de T ، la droite M H est orthogonale à D : يقول théorème

T est perpendiculaire au plan P en A, et H est le projeté orthogonal de A sur une droite D du plan. Le théorème dit : pour tout point M de T, la droite M H est orthogonale à D.

QUESTION 14 · PLAN MÉDIATEUR D'UN SEGMENT

c'est quoi le plan médiateur d'un segment | chnowa le plan médiateur | définition du plan médiateur

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$MA = MB \iff M \text{ est dans le plan médiateur de } [AB]$$

CE QU'IL RÉPOND

Le plan médiateur d'un segment houwa le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu. W houwa l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

هو le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu . w هو le plan médiateur d'un segment
. l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment

Le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu. C'est aussi l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

QUESTION 15 · POUR COMPRENDRE : LES POINTS ÉQUIDISTANTS DE DEUX POINTS

la médiatrice d'un segment dans l'espace c'est quoi | pourquoi pas la médiatrice dans l'espace | el médiatrice fi l'espace wallet chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

dans l'espace : un plan médiateur

CE QU'IL RÉPOND

Fi l'espace, les points équidistants de A w B ya3mlou plan, mouch droite. La médiatrice de [AB] hiya la trace mta3 el plan hedha fi plan fih A w B.

la trace هي droite . la médiatrice de A B موش ، plan يعملو l'espace ، les points équidistants de A w B في
متاع الـ plan هذا plan فيه A w B .

Dans l'espace, les points équidistants de A et de B forment un plan, pas une droite. La médiatrice de A B, c'est la trace de ce plan dans un plan qui contient A et B.

QUESTION 16 · AXE D'UN CERCLE

c'est quoi l'axe d'un cercle | chnowa l'axe du cercle | définition de l'axe d'un cercle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$NA = \sqrt{r^2 + ON^2}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'axe d'un cercle houwa la droite qui passe par le centre du cercle w perpendiculaire à son plan. Koll point mte3ou b3adou nafs ech-chay 3la les points du cercle.

point كل . la droite qui passe par le centre du cercle w perpendiculaire à son plan هو l'axe d'un cercle
متاعو بعدو نفس الشي على . les points du cercle

L'axe d'un cercle est la droite qui passe par le centre du cercle et qui est perpendiculaire à son plan. Chacun de ses points est à la même distance de tous les points du cercle.

QUESTION 17 · PLANS PERPENDICULAIRES

c'est quoi deux plans perpendiculaires | chnowa ma3neha plans perpendiculaires | définition de deux plans perpendiculaires

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

l’un contient une droite orthogonale à l’autre

CE QU’IL RÉPOND

Deux plans perpendiculaires, ma3neha wa7ed fihom fih droite orthogonale à l'autre. Mathalan le plan (ABF) w le plan (ABC) fi le cube.

deux plans perpendiculaires ، معناها واحد فيهم فيه droite orthogonale à l'autre . مثلا le plan A B F w le plan A B C في le cube .

Deux plans sont perpendiculaires quand l'un contient une droite orthogonale à l'autre. Par exemple le plan A B F et le plan A B C dans le cube.

QUESTION 18 · EXEMPLE : DEUX PLANS DIAGONAUX DU CUBE

comment montrer que deux plans sont perpendiculaires | kifech nbayyen elli deux plans perpendiculaires | méthode pour démontrer deux plans perpendiculaires

CE QU’IL ÉCRIT AU TABLEAU

une droite de l’un, orthogonale à l’autre

CE QU’IL RÉPOND

Lawwej fi wa7ed menhom 3la droite, w bayyen elli hiya orthogonale à deux droites sécantes du deuxième plan. W wa9tha les deux plans sont perpendiculaires.

orthogonale à deux droites sécantes du deuxième plan . w بيّن اللي هي droite ، w لوّج في واحد منهم على وقتها les deux plans sont perpendiculaires .

Cherche dans l'un des plans une droite, et montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes du deuxième plan. Alors les deux plans sont perpendiculaires.

QUESTION 19 · PROPRIÉTÉ 18

c'est quoi le projeté orthogonal d'un point sur un plan | chnowa el projeté orthogonal | projeté orthogonal sur un plan ma3neha

CE QU’IL ÉCRIT AU TABLEAU

(AK) est perpendiculaire à P et $K \in P$

CE QU’IL RÉPOND

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan P, houwa le point où la perpendiculaire à P menée par A perce le plan P.

le projeté orthogonal d'un point A sur un plan P ، هو le point où la perpendiculaire à P menée par A perce le plan P .

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan P est le point où la perpendiculaire à P menée par A perce le plan P.

QUESTION 20 · EXEMPLE : LES ARÊTES OPPOSÉES D'UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER

c'est quoi un tétraèdre régulier | chnowa tétraèdre régulier | définition tétraèdre régulier

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AB = AC = AD = BC = BD = CD$$

CE QU'IL RÉPOND

Tétraèdre régulier, les arêtes mte3ou el koll nafs et-toul, w les faces mte3ou el koll triangles équilatéraux. W les arêtes opposées mte3ou orthogonales.

tétraèdre régulier ، les arêtes متاعو الكل نفس الطول ، w les faces متاعو الكل w les triangles équilatéraux . arêtes opposées متاعو orthogonales .

Dans un tétraèdre régulier, toutes les arêtes ont la même longueur, et toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Et ses arêtes opposées sont orthogonales.

QUESTION 21 · EXEMPLE : UN TÉTRAÈDRE TRIRECTANGLE

c'est quoi un tétraèdre trirectangle | chnowa trirectangle | tétraèdre trirectangle ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 90^\circ$$

CE QU'IL RÉPOND

Tétraèdre trirectangle en A, ma3neha les trois faces elli yetle9aw fi A, el koll rectangles en A. Kima coin de cube.

tétraèdre trirectangle en A ، معناها les trois faces اللي يتلاقاو في A ، الكل rectangles en A كيما coin de . cube

Un tétraèdre trirectangle en A a ses trois faces qui se rencontrent en A toutes rectangles en A, comme un coin de cube.

QUESTION 22 · EXEMPLE : DES ARÊTES OPPOSÉES DEUX À DEUX ORTHOGONALES

c'est quoi l'orthocentre d'un triangle | chnowa l'orthocentre | définition de l'orthocentre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

le point commun aux trois hauteurs

CE QU'IL RÉPOND

L'orthocentre d'un triangle houwa le point de concours des trois hauteurs mte3ou.

l'orthocentre d'un triangle هو le point de concours des trois hauteurs متاعو .

L'orthocentre d'un triangle est le point de concours de ses trois hauteurs.

QUESTION 23 · UN PROBLÈME POUR ALLER PLUS LOIN : LA SPHÈRE CIRCONSCRITE À UN TÉTRAÈDRE

c'est quoi la sphère circonscrite à un tétraèdre | chnowa sphère circonscrite | sphère circonscrite ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$OA = OB = OC = OD$$

CE QU'IL RÉPOND

La sphère circonscrite à un tétraèdre hiya la sphère qui passe par ses quatre sommets. El centre mte3ha fi le plan médiateur de chaque arête.

la sphère circonscrite à un tétraèdre هي la sphère qui passe par ses quatre sommets . الـ centre متاعها le plan médiateur de chaque arête في .

La sphère circonscrite à un tétraèdre est la sphère qui passe par ses quatre sommets. Son centre est dans le plan médiateur de chaque arête.

QUESTION 24 · EXEMPLE : UN TÉTRAÈDRE TRIRECTANGLE

comment calculer le volume d'une pyramide | kifech na7sbou le volume mta3 pyramide | formule du volume d une pyramide

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

CE QU'IL RÉPOND

Le volume d'une pyramide, walla tétraèdre, égale un tiers fois l'aire de la base fois la hauteur. W el hauteur tet9es 3la la perpendiculaire au plan de la base.

le volume d'une pyramide ، ولّا tétraèdre الـ ، égale un tiers fois l'aire de la base fois la hauteur . w hauteur تتقاس على la perpendiculaire au plan de la base .

Le volume d'une pyramide, ou d'un tétraèdre, est égal à un tiers fois l'aire de la base fois la hauteur. Et la hauteur se mesure sur la perpendiculaire au plan de la base.

QUESTION 25 · POUR COMPRENDRE : UNE DROITE ORTHOGONALE À TOUT UN PLAN

on peut utiliser Pythagore dans l'espace | est ce que Pythagore tekhdem fi l'espace | théorème de Pythagore dans l'espace

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$EC^2 = AE^2 + AC^2$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, ama fi triangle rectangle. Fi l'espace, nal9aw l'angle droit b l'orthogonalité : mathalan ken droite perpendiculaire à un plan, ta3tik angle droit m3a koll droite du plan elli t9os-ha.

إيه ، أما في triangle rectangle . في l'espace ، نلقاو l'angle droit بـ l'orthogonalité : مثلا كان droite
perpendiculaire à un plan ، تعطيك angle droit مع كل droite du plan اللي تقصّها .

Oui, mais dans un triangle rectangle. Dans l'espace, on trouve l'angle droit grâce à l'orthogonalité : par exemple, une droite perpendiculaire à un plan fait un angle droit avec toute droite du plan qu'elle coupe.

QUESTION 26 · UN PROBLÈME POUR ALLER PLUS LOIN : LA GRANDE DIAGONALE DU CUBE

combien mesure la diagonale d'un cube | longueur de la grande diagonale du cube | 9adech toul el diagonale fel cube | quelle est la diagonale du cube

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$a\sqrt{2} \quad ; \quad a\sqrt{3}$

CE QU'IL RÉPOND

Fi cube d'arête a, la diagonale d'une face égale a√2, w la grande diagonale égale a√3.

في cube d'arête a ، la diagonale d'une face égale a racine de deux ، w la grande diagonale égale a racine de trois .

Dans un cube d'arête a, la diagonale d'une face mesure a racine de deux, et la grande diagonale mesure a racine de trois.

QUESTION 27 · EXEMPLE : LES ARÊTES OPPOSÉES D'UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER

hauteur d'un triangle équilatéral | kifech na7sbou la hauteur mta3 triangle équilatéral | combien mesure la hauteur du triangle équilatéral

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$h = c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

CE QU'IL RÉPOND

Triangle équilatéral de côté c, la hauteur mte3ou égale c fois √3 sur 2. W hiya zeda médiane.

médiane زادة هي égale c fois racine de trois sur deux . w متاعو triangle équilatéral de côté c ، la hauteur .

Dans un triangle équilatéral de côté c, la hauteur mesure c fois racine de trois sur deux. C'est aussi une médiane.

QUESTION 28 · DROITES ORTHOGONALES

quel est le symbole de orthogonal | comment on note deux droites orthogonales | chnowa el signe mta3 perpendiculaire

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$D \perp D'$

CE QU'IL RÉPOND

Nektbou b le symbole « perpendiculaire », elli houwa trait vertical sur un trait horizontal, kima fi le plan. Ama fel cours nektbou bel klem : orthogonale à, bech ma n5altouch bin orthogonales w perpendiculaires.

نكتبو بـ « le symbole « perpendiculaire ، اللي هو trait vertical sur un trait horizontal ، كيما في le plan . أما في الـ cours نكتبو بالكلام : orthogonale à ، باش ما نخلطوش بين orthogonales w perpendiculaires .

On note avec le symbole perpendiculaire, un trait vertical posé sur un trait horizontal, comme dans le plan. Mais dans le cours on l'écrit en toutes lettres, orthogonale à, pour ne pas confondre orthogonales et perpendiculaires.

QUESTION 29 · DROITE PERPENDICULAIRE À UN PLAN

pourquoi on admet la propriété 16 | chnowa ma3neha propriété admise | 3lech na9blou propriété men ghir démonstration

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

admise : utilisée sans démonstration

CE QU'IL RÉPOND

Propriété admise, ma3neha nesta3mlouha men ghir démonstration, 5ater el démonstration mte3ha as3eb men el programme. Ama hiya s7i7a, w nesta3mlouha fi les démonstrations.

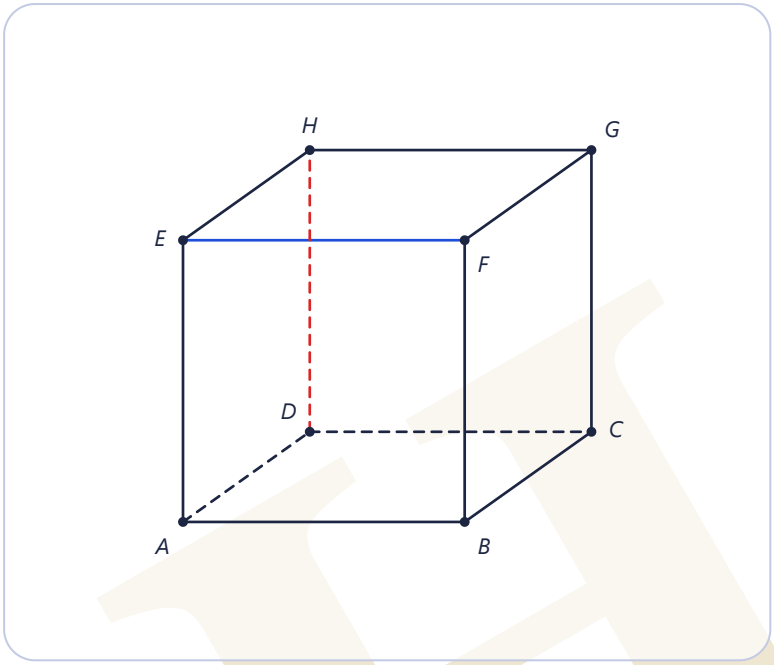
propriété admise ، معناها نستعملوها من غير démonstration ، خاطر الـ démonstration متاعها أصعب من الـ programme . أما هي صحيحة ، w نستعملوها في les démonstrations .

Une propriété admise est une propriété qu'on utilise sans la démontrer, parce que sa démonstration dépasse le programme. Mais elle est vraie, et on s'en sert dans les démonstrations.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Une arête et une arête du dessus**

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, réponds par vrai ou faux : « la droite (DH) est orthogonale à la droite (EF) ».



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [DH] est repassée en rouge, l'arête [EF] en bleu.

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `vrai` — aussi acceptées : c'est vrai · il est vrai · oui · oui c'est vrai · oui elles sont orthogonales · oui, elles sont orthogonales · elles sont orthogonales · orthogonales · oui orthogonales · vrai elles sont orthogonales · vrai, elles sont orthogonales · c'est vrai elles sont orthogonales · oui elles le sont · oui, c'est vrai · oui c'est vraie · oui, c'est vraie · vraie · c'est vraie · vrai, c'est vrai · oui, vrai

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche une droite parallèle à (DH) qui coupe (EF).
2. (AE) est parallèle à (DH). Que sait-on de (AE) et (EF) dans la face $ABFE$?

CORRECTION

Une parallèle — (AE) est parallèle à (DH), et dans le carré $ABFE$, (AE) est perpendiculaire à (EF).

(AE) est perpendiculaire à (EF)

Propriété 13 — Toute droite parallèle à (AE) est orthogonale à (EF).

(DH) est orthogonale à (EF)

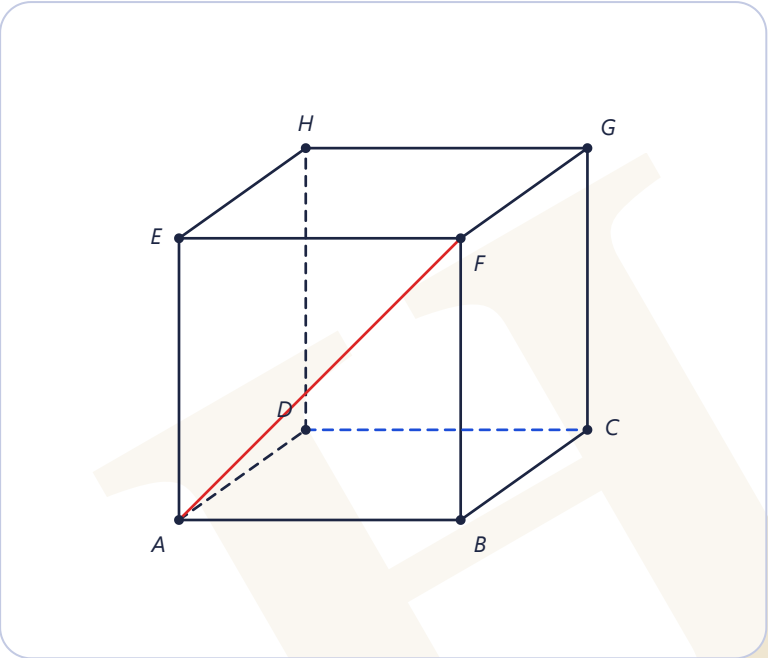
Vrai : (DH) est orthogonale à (EF), sans la couper.

PIÈGES ANTICIPÉS

`faux / non / c'est faux / pas orthogonales / elles ne sont pas orthogonales / non elles ne sont pas orthogonales / non, elles ne sont pas orthogonales / faux elles ne sont pas orthogonales / faux, elles ne sont pas orthogonales / non pas orthogonales` → (DH) et (EF) ne se coupent pas, mais ce n'est pas nécessaire : la parallèle (AE) est perpendiculaire à (EF).

EXERCICE 2 · BASE Une diagonale de face et une arête

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, réponds par vrai ou faux : « la droite (AF) est orthogonale à la droite (CD) ».



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [AF] de la face ABFE est tracée en rouge ; l'arête [CD] est repassée en bleu.

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux · pas orthogonales · elles ne sont pas orthogonales · non elles ne sont pas orthogonales · non, elles ne sont pas orthogonales · faux elles ne sont pas orthogonales · faux, elles ne sont pas orthogonales · non pas orthogonales · non, c'est faux · fausse · c'est fausse · non, c'est fausse · non c'est fausse · non, faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace (CD) par une droite qui lui est parallèle et qui passe par A.
2. (AB) est parallèle à (CD). Quel angle font (AF) et (AB) dans le carré $ABFE$?

CORRECTION

Par le point A — La parallèle à (CD) menée par A est (AB).

(AB) est parallèle à (CD)

Dans le carré ABFE — La diagonale (AF) fait un angle de $45°$ avec le côté (AB) : elles ne sont pas perpendiculaires.

$\widehat{BAF} = 45°$

Faux : (AF) et (CD) ne sont pas orthogonales.

PIÈGES ANTICIPÉS

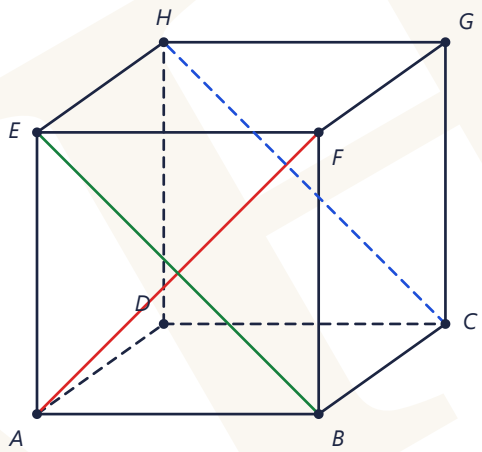
`vrai / oui / c'est vrai / oui elles sont orthogonales / oui, elles sont orthogonales / elles sont orthogonales / orthogonales / oui orthogonales / vrai elles sont orthogonales / vrai, elles sont`

`orthogonales / c'est vrai elles sont orthogonales` → Elles ne se coupent pas, mais ce n'est pas la question : par A, la parallèle à (CD) est (AB), et l'angle $\widehat{BAF}$ mesure $45°$.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Deux diagonales de faces

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, réponds par vrai ou faux : « la droite (AF) est orthogonale à la droite (CH) ».



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [AF] est tracée en rouge, la diagonale [CH] de la face DCGH en bleu, en pointillés, et la diagonale [BE] de la face ABFE en vert.

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `vrai` — aussi acceptées : c'est vrai · il est vrai · oui · oui c'est vrai · oui elles sont orthogonales · oui, elles sont orthogonales · elles sont orthogonales · orthogonales · oui orthogonales · vrai elles sont orthogonales · vrai, elles sont orthogonales · c'est vrai elles sont orthogonales · oui elles le sont · oui, c'est vrai · oui c'est vraie · oui, c'est vraie · vraie · c'est vraie · vrai, c'est vrai · oui, vrai

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche, dans la face $ABFE$, une parallèle à (CH).
2. $BCHE$ est un parallélogramme : (CH) est parallèle à (BE). Que sait-on des diagonales d'un carré ?

CORRECTION

Une parallèle — $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE}$: (CH) est parallèle à (BE).

(CH) est parallèle à (BE)

Les diagonales du carré — Dans le carré $ABFE$, les diagonales (AF) et (BE) sont perpendiculaires.

(AF) est perpendiculaire à (BE)

Propriété 13 — (CH) est parallèle à (BE), qui est orthogonale à (AF).

(AF) est orthogonale à (CH)

Vrai : (AF) et (CH) sont orthogonales.

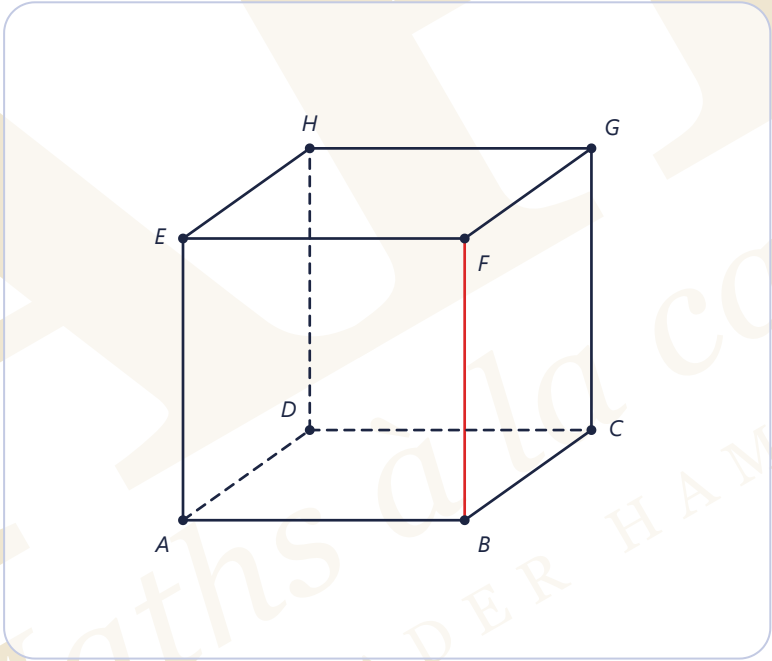
PIÈGES ANTICIPÉS

`faux / non / c'est faux / pas orthogonales / elles ne sont pas orthogonales / non elles ne sont pas orthogonales / non, elles ne sont pas orthogonales / faux elles ne sont pas orthogonales / faux, elles ne sont pas orthogonales / non pas orthogonales` → Elles sont dans des faces différentes, mais (CH) est parallèle à (BE), perpendiculaire à (AF).

EXERCICE 4 · BASE

La parallèle par un sommet

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, quelle est la droite passant par H et parallèle à la droite (BF) ?



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [BF] est repassée en rouge.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(HD)` — aussi acceptées : HD · la droite (HD) · la droite HD · droite (HD) · droite HD · c'est (HD) · c'est la droite (HD) · (DH) · DH · la droite (DH) · la droite DH · droite (DH) · droite DH · c'est (DH) · c'est la droite (DH)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les arêtes « verticales » du cube sont toutes parallèles.
2. Quelle arête verticale part du sommet H ?

CORRECTION

Les arêtes verticales — (AE), (BF), (CG) et (DH) sont parallèles.

(HD) est parallèle à (BF)

Unicité — Par H, il passe une seule parallèle à (BF) : c'est (HD).

(HD)

La droite cherchée est (HD).

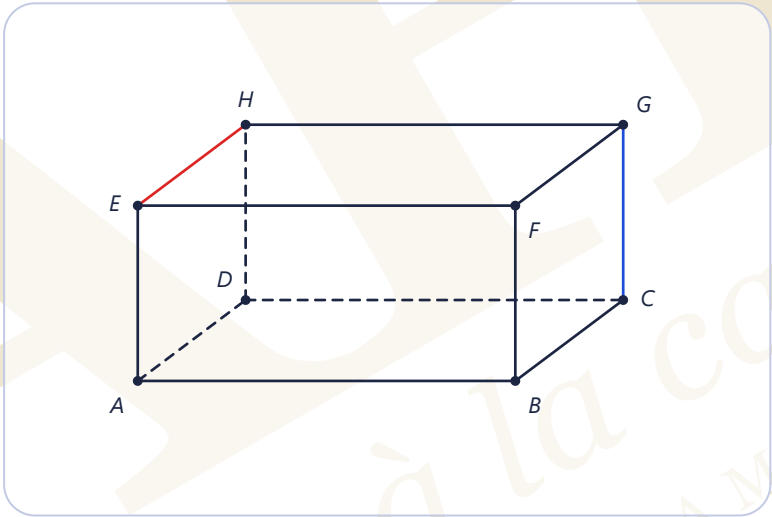
PIÈGES ANTICIPÉS

`(HG)` / `HG` / `(HE)` / `HE` → (HG) et (HE) sont dans la face du dessus : elles sont orthogonales à (BF), pas parallèles.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Dans un parallélépipède rectangle

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (figure). Les droites (EH) et (CG) sont-elles orthogonales ?



Un parallélépipède rectangle ABCDEFGH vu en perspective, plus long que haut : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [EH] est repassée en rouge, l'arête [CG] en bleu.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui elles sont orthogonales · oui, elles sont orthogonales · elles sont orthogonales · orthogonales · oui orthogonales · vrai elles sont orthogonales · vrai, elles sont orthogonales · c'est vrai elles sont orthogonales · oui, c'est vrai · oui c'est vrai · c'est vrai · oui, elles le sont

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace (CG) par une arête parallèle qui passe par H.
2. (DH) est parallèle à (CG). Quel angle fait-elle avec (EH) dans la face $ADHE$?

CORRECTION

Une parallèle — (DH) est parallèle à (CG), et dans le rectangle $ADHE$, (DH) est perpendiculaire à (HE).

(DH) est perpendiculaire à (EH)

Propriété 13 — (CG), parallèle à (DH), est orthogonale à (EH).

(CG) est orthogonale à (EH)

Oui : (EH) et (CG) sont orthogonales.

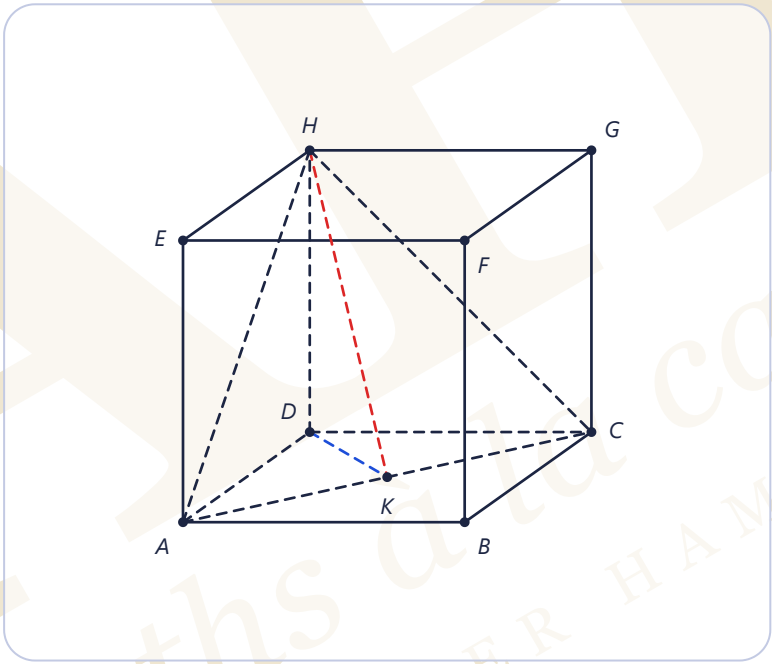
PIÈGES ANTICIPÉS

`non / faux / pas orthogonales / elles ne sont pas orthogonales / non elles ne sont pas orthogonales / non, elles ne sont pas orthogonales / faux elles ne sont pas orthogonales / faux, elles ne sont pas orthogonales / non pas orthogonales` → Elles ne se coupent pas, mais deux droites orthogonales n'ont pas besoin de se couper : regarde la parallèle (DH).

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Une demi-diagonale

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 et K est le milieu de $[AC]$. Calcule DK.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. K est le centre de la face ABCD ; les segments [AC], [DK] et [HK] sont tracés en pointillés, ainsi que [AH] et [HC] : le triangle AHC.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `3*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales du carré $ABCD$: elles ont la même longueur et le même milieu K.
2. La diagonale d'un carré de côté c mesure $c\sqrt{2}$.

CORRECTION

La diagonale — Dans le carré $ABCD$ de côté 6 :

$BD = 6\sqrt{2}$

La moitié — K est le milieu de $[BD]$.

$DK = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$DK = 3\sqrt{2}$.

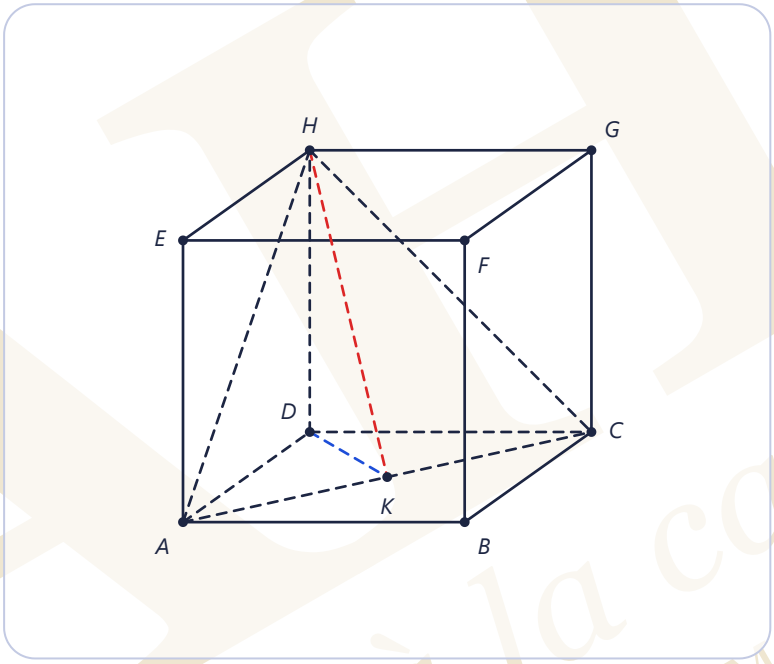
PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(2)` / `6sqrt(2)` → $6\sqrt{2}$ est la diagonale entière ; K est son milieu.

EXERCICE 7 · RAISONNEMENT

La hauteur du triangle AHC

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 et K est le milieu de $[AC]$. Calcule HK.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. K est le centre de la face ABCD ; les segments [AC], [DK] et [HK] sont tracés en pointillés, ainsi que [AH] et [HC] : le triangle AHC.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `3*sqrt(6)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les côtés du triangle AHC sont tous des diagonales de faces : quelle est sa nature ?
2. La hauteur d'un triangle équilatéral de côté c mesure $c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

CORRECTION

Un triangle équilatéral — $AH = HC = CA = 6\sqrt{2}$: le triangle AHC est équilatéral, et sa médiane (HK) est une hauteur.

$AH = HC = CA = 6\sqrt{2}$

La hauteur — On multiplie le côté par $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$HK = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$

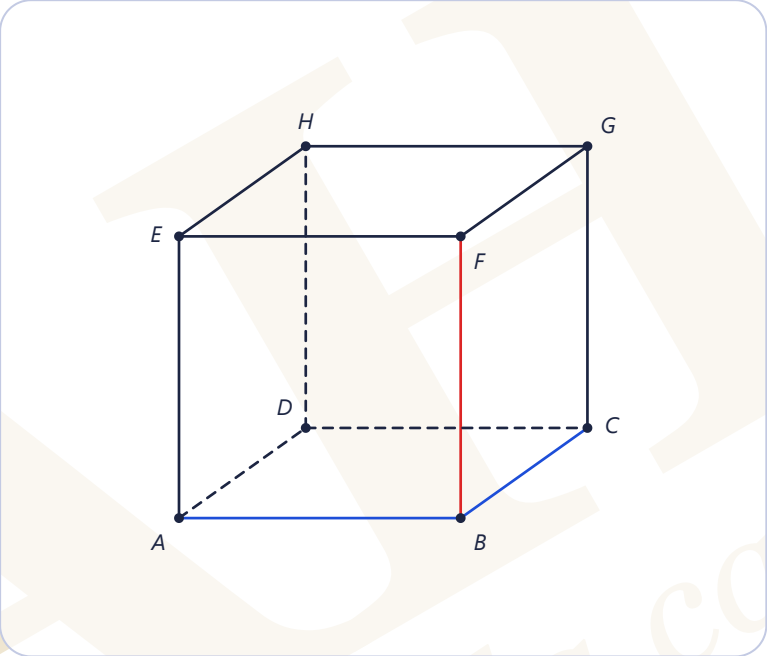
$HK = 3\sqrt{6}$; on vérifie que $HD^2 + DK^2 = 36 + 18 = 54 = HK^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(2)` / `6sqrt(2)` → $6\sqrt{2}$ est le côté du triangle AHC ; HK est sa hauteur.

EXERCICE 8 · BASE **Une arête perpendiculaire à une face**

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, la droite (BF) est-elle perpendiculaire au plan (ABC) ?



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [BF] est repassée en rouge, les arêtes [AB] et [BC] en bleu.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui elle est perpendiculaire · oui, elle est perpendiculaire · elle est perpendiculaire · elle est perpendiculaire au plan · oui elle est perpendiculaire au plan · oui, elle est perpendiculaire au plan · perpendiculaire · oui perpendiculaire · oui elle l'est

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il suffit de trouver deux droites sécantes du plan (ABC) orthogonales à (BF).
2. Regarde les faces $ABFE$ et $BCGF$.

CORRECTION

Deux droites sécantes — Dans le carré $ABFE$, (BF) est perpendiculaire à (BA) ; dans le carré $BCGF$, à (BC). (BA) et (BC) sont sécantes en B dans le plan (ABC).

(BF) est perpendiculaire au plan (ABC)

Oui : (BF) est perpendiculaire au plan (ABC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / faux / elle n'est pas perpendiculaire / non elle n'est pas perpendiculaire / non, elle n'est pas perpendiculaire / pas perpendiculaire / elle n'est pas perpendiculaire au plan` → (BF) est orthogonale à (BA) et à (BC), deux droites sécantes du plan : c'est la définition.

EXERCICE 9 · PRATIQUE

Deux droites parallèles ne suffisent pas

Réponds par vrai ou faux : « Si une droite est orthogonale à deux droites parallèles d'un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan ».

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux · non, c'est faux · fausse · c'est fausse · non, c'est fausse · non c'est fausse · non, faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la définition : quelles droites du plan faut-il ?
2. Dans un cube $ABCDEFGH$, (AB) est orthogonale à (AD) et à (BC). Est-elle perpendiculaire au plan (ABC) ?

CORRECTION

Un contre-exemple — Dans un cube, (AB) est orthogonale à (AD) et à (BC), qui sont parallèles et contenues dans le plan (ABC). Pourtant (AB) est contenue dans ce plan : elle ne lui est pas perpendiculaire.

$(AB) \subset (ABC)$

La définition — Il faut deux droites **sécantes** du plan.

deux droites sécantes

Faux : il faut deux droites sécantes du plan.

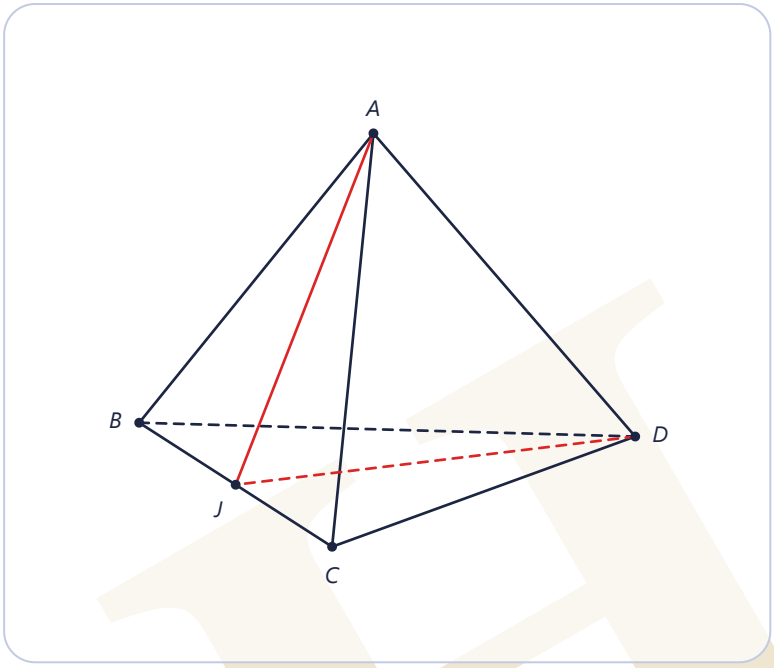
PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → Avec deux droites parallèles, la droite peut même être contenue dans le plan : pense à (AB), orthogonale à (AD) et à (BC).

EXERCICE 10 · PRATIQUE

Deux autres arêtes opposées

$ABCD$ est un tétraèdre régulier et J est le milieu de $[BC]$. Les droites (AD) et (BC) sont-elles orthogonales ?



Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête cachée [BD] est en pointillés. J est le milieu de l'arête [BC]. Les segments [AJ] et [DJ] sont tracés en rouge, [DJ] en pointillés.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui elles sont orthogonales · oui, elles sont orthogonales · elles sont orthogonales · orthogonales · oui orthogonales · vrai elles sont orthogonales · vrai, elles sont orthogonales · c'est vrai elles sont orthogonales

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre que (BC) est perpendiculaire à un plan qui contient (AD).
2. Dans les triangles équilatéraux ABC et DBC, que sont les médianes (AJ) et (DJ) ?

CORRECTION

Deux hauteurs — Les triangles ABC et DBC sont équilatéraux : leurs médianes (AJ) et (DJ) sont des hauteurs.

(BC) est perpendiculaire à (AJ) et à (DJ)

Le plan (ADJ) — (AJ) et (DJ) sont sécantes en J.

(BC) est perpendiculaire au plan (ADJ)

Propriété 16 — (AD) est contenue dans le plan (ADJ).

(AD) est orthogonale à (BC)

Oui : (AD) et (BC) sont orthogonales.

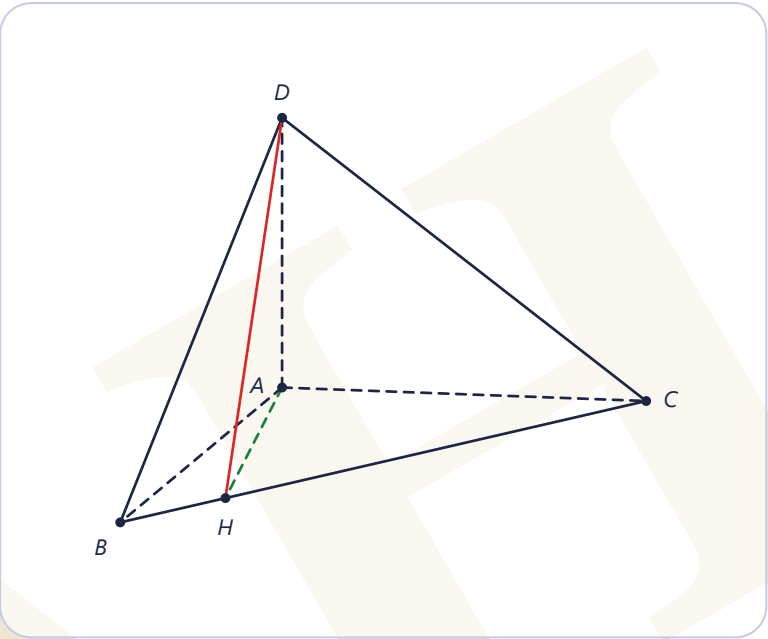
PIÈGES ANTICIPÉS

`non / faux / pas orthogonales / elles ne sont pas orthogonales / non elles ne sont pas orthogonales / non, elles ne sont pas orthogonales / faux elles ne sont pas orthogonales / faux, elles ne sont pas orthogonales / non pas orthogonales` → Elles ne se coupent pas, mais (BC) est perpendiculaire au plan (ADJ), qui contient (AD).

EXERCICE 11 · PRATIQUE

Le pied de la hauteur

$ABCD$ est un tétraèdre trirectangle en A avec $AB = 3$, $AD = 4$ et $AC = 6$. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On sait que $BC = 3\sqrt{5}$. Calcule CH.



AB = 3, AD = 4, AC = 6.

Un tétraèdre ABCD trirectangle en A : A est au fond, D juste au-dessus de A, B devant à gauche et C à droite. Les arêtes issues de A sont en pointillés. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, sur [BC] ; les segments [AH] et [DH] sont tracés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `12*sqrt(5)/5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle ABC rectangle en A, exprime $\cos \widehat{ACB}$ de deux façons.
2. $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$, donc $CH = \frac{AC^2}{BC}$.

CORRECTION

Le cosinus — Dans les triangles rectangles ABC et AHC : $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$.

$CH = \frac{AC^2}{BC}$

Le calcul — On divise 36 par $3\sqrt{5}$, ce qui donne $\frac{12}{\sqrt{5}}$, puis on rend le dénominateur rationnel :

$CH = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$CH = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

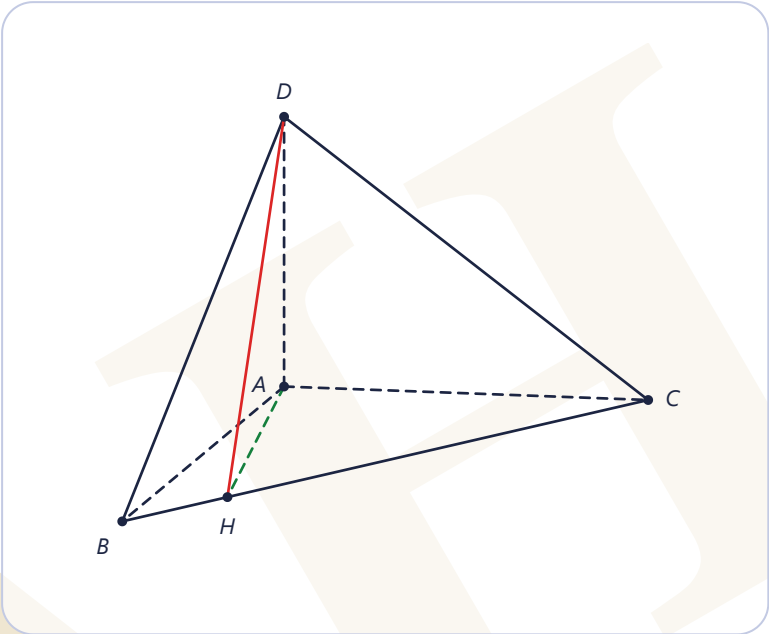
PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(5)/5 / 6/sqrt(5)` → $\frac{6\sqrt{5}}{5}$, c'est AH ; on demande CH.

EXERCICE 12 · RAISONNEMENT

La distance DH

$ABCD$ est un tétraèdre trirectangle en A avec $AB = 3$, $AD = 4$ et $AC = 6$. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, et $AH = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. Calcule DH.



AB = 3, AD = 4, AC = 6.

Un tétraèdre ABCD trirectangle en A : A est au fond, D juste au-dessus de A, B devant à gauche et C à droite. Les arêtes issues de A sont en pointillés. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, sur [BC] ; les segments [AH] et [DH] sont tracés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `2*sqrt(145)/5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) : quelle est la nature du triangle DAH ?
2. Le triangle DAH est rectangle en A : applique le théorème de Pythagore, avec $AH^2 = \frac{36}{5}$.

CORRECTION

Un angle droit — (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (AH) : le triangle DAH est rectangle en A.

$$DH^2 = AD^2 + AH^2$$

Le calcul —

$$DH^2 = 16 + \frac{36}{5} = \frac{116}{5}$$

La racine —

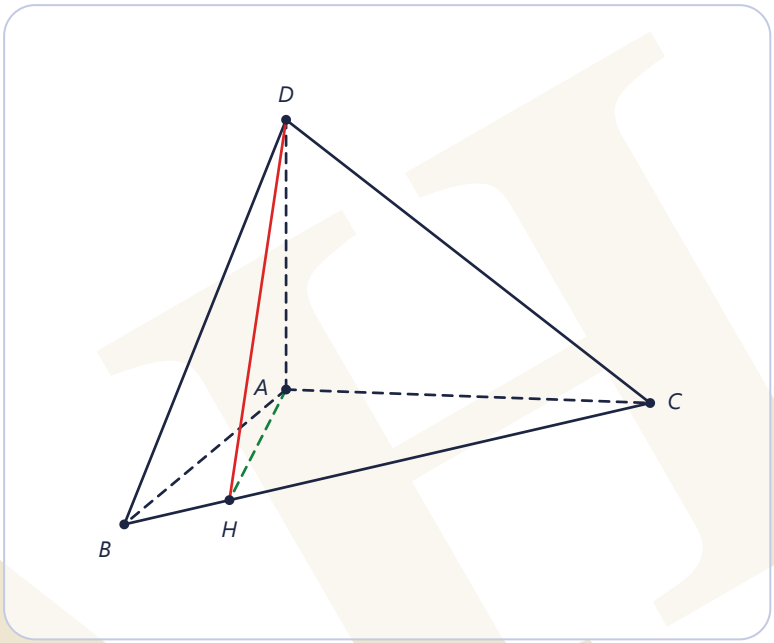
$$DH = \sqrt{\frac{116}{5}} = \frac{\sqrt{580}}{5} = \frac{2\sqrt{145}}{5}$$

$$DH = \frac{2\sqrt{145}}{5}.$$

EXERCICE 13 · RAISONNEMENT

L'aire de la face BCD

Dans le même tétraèdre, $BC = 3\sqrt{5}$ et $DH = \sqrt{\frac{116}{5}}$. On admet que le triangle HDC est rectangle en H. Calcule l'aire du triangle BDC.



AB = 3, AD = 4, AC = 6.

Un tétraèdre ABCD trirectangle en A : A est au fond, D juste au-dessus de A, B devant à gauche et C à droite. Les arêtes issues de A sont en pointillés. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, sur [BC] ; les segments [AH] et [DH] sont tracés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `3*sqrt(29)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle HDC est rectangle en H : que représente (DH) pour le triangle BDC ?
2. L'aire vaut $\frac{BC \times DH}{2}$. Simplifie $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{116}{5}} = \sqrt{116}$.

CORRECTION

Une hauteur — (DH) est perpendiculaire à (BC) : c'est la hauteur issue de D dans le triangle BDC.

$\text{aire}(BDC) = \frac{BC \times DH}{2}$

Le calcul —

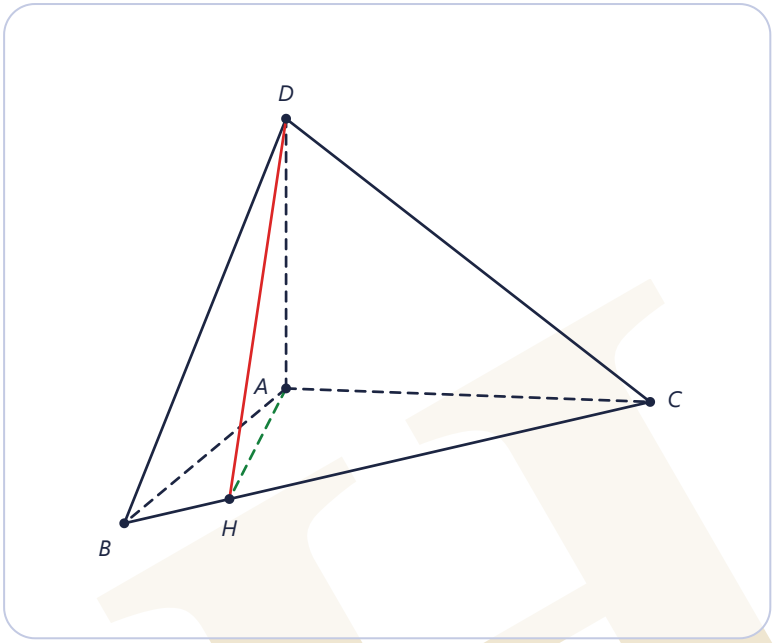
$\text{aire}(BDC) = \frac{3\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{116}{5}}}{2} = \frac{3\sqrt{116}}{2} = 3\sqrt{29}$

L'aire du triangle BDC est $3\sqrt{29}$.

EXERCICE 14 · DEFI

La hauteur issue de A

Le tétraèdre $ABCD$ trirectangle en A a pour volume 12, et l'aire de sa face BDC est $3\sqrt{29}$. Calcule la longueur de la hauteur du tétraèdre issue de A.



AB = 3, AD = 4, AC = 6.

Un tétraèdre ABCD trirectangle en A : A est au fond, D juste au-dessus de A, B devant à gauche et C à droite. Les arêtes issues de A sont en pointillés. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, sur [BC] ; les segments [AH] et [DH] sont tracés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `12*sqrt(29)/29`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris le volume avec la base BDC : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire}(BDC) \times h$.
2. $12 = \sqrt{29} \times h$. Rends le dénominateur rationnel.

CORRECTION

Le volume, autrement — On prend BDC pour base : la hauteur est la distance h de A au plan (BDC).

$12 = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{29} \times h$

Le calcul —

$h = \frac{12}{\sqrt{29}} = \frac{12\sqrt{29}}{29}$

La hauteur issue de A mesure $\frac{12\sqrt{29}}{29}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(29)/29 / 4/sqrt(29)` → N'oublie pas le facteur $\frac{1}{3}$: $12 = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{29} \times h$.

EXERCICE 15 · RAISONNEMENT

Le pied de la hauteur d'un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) d'une part, et les droites (BC) et (AD) d'autre part, sont orthogonales. K est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD). Que représente le point K pour le triangle BCD ?

Écris le nom du point remarquable, par exemple : le centre de gravité.

Réponse attendue : `l'orthocentre` — aussi acceptées : orthocentre · c'est l'orthocentre · K est l'orthocentre · l'orthocentre du triangle BCD · l'orthocentre de BCD · orthocentre de BCD · orthocentre du triangle BCD · K est l'orthocentre du triangle BCD · K est l'orthocentre de BCD · c'est l'orthocentre du triangle BCD · son orthocentre · c'est son orthocentre · K est son orthocentre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre que (CD) est perpendiculaire au plan (ABK) : (CD) est orthogonale à (AB), et à quelle autre droite de ce plan ?
2. Alors (CD) est orthogonale à (BK) : (BK) est une hauteur du triangle BCD. Fais de même avec (BC) et le plan (ADK).

CORRECTION

Le plan (ABK) — (AK) est perpendiculaire au plan (BCD), qui contient (CD) : (CD) est orthogonale à (AK). Elle est aussi orthogonale à (AB), et (AB) et (AK) sont sécantes en A.

(CD) est perpendiculaire au plan (ABK)

Une hauteur — (BK) est contenue dans le plan (ABK) : elle est orthogonale à (CD), et elle est dans le plan (BCD). C'est la hauteur issue de B du triangle BCD.

(BK) est perpendiculaire à (CD)

Une deuxième hauteur — De même, (BC) est orthogonale à (AD) et à (AK), sécantes en A : elle est perpendiculaire au plan (ADK), donc à (DK). C'est la hauteur issue de D.

(DK) est perpendiculaire à (BC)

K est sur deux hauteurs du triangle BCD : c'est son orthocentre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`centre de gravité` / `le centre de gravité` / `c'est le centre de gravité` / `centre du cercle circonscrit` / `le centre du cercle circonscrit` / `c'est le centre du cercle circonscrit` → Ici ce sont des droites orthogonales, donc des angles droits : (BK) et (DK) sont des hauteurs du triangle BCD, pas des médianes ni des médiatrices.

EXERCICE 16 · DEFI

La troisième paire d'arêtes

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) d'une part, et les droites (BC) et (AD) d'autre part, sont orthogonales. K est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD). On admet que K est l'orthocentre du triangle BCD. Les droites (AC) et (BD) sont-elles orthogonales ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui elles sont orthogonales · oui, elles sont orthogonales · elles sont orthogonales · orthogonales · oui orthogonales · vrai elles sont orthogonales · vrai, elles sont orthogonales · c'est vrai elles sont orthogonales · oui, c'est vrai · oui c'est vrai · c'est vrai · oui, elles le sont

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre que (BD) est perpendiculaire au plan (ACK).

2. K est l'orthocentre de BCD : que dire de (CK) et (BD) ? Et de (AK) et (BD) ?

CORRECTION

Une hauteur — K est l'orthocentre du triangle BCD : (CK) est la hauteur issue de C.

(CK) est perpendiculaire à (BD)

Propriété 16 — (AK) est perpendiculaire au plan (BCD), qui contient (BD).

(AK) est orthogonale à (BD)

Le plan (ACK) — (CK) et (AK) sont sécantes en K : (BD) est perpendiculaire au plan (ACK), qui contient (AC).

(AC) est orthogonale à (BD)

Oui : (AC) et (BD) sont orthogonales. Si deux paires d'arêtes opposées sont orthogonales, la troisième l'est aussi.

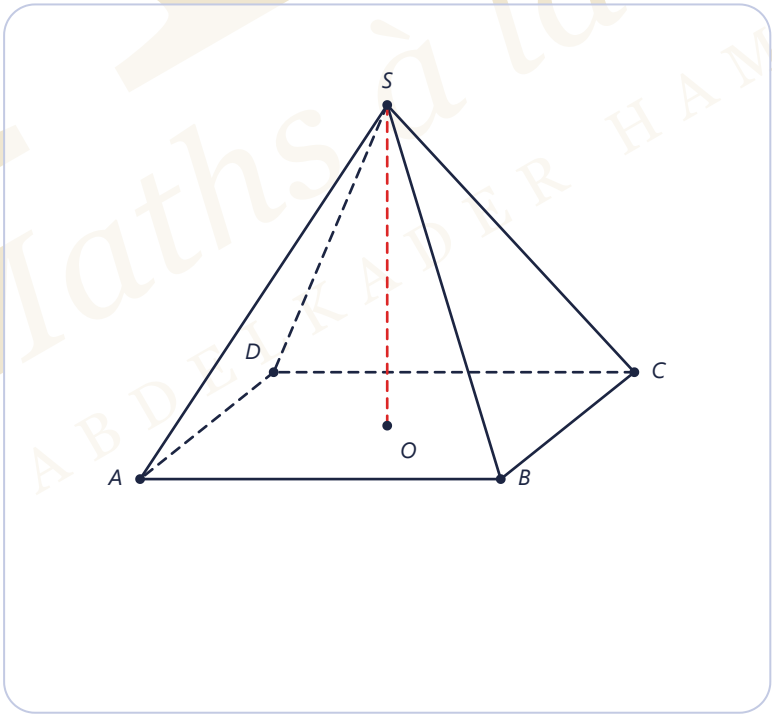
PIÈGES ANTICIPÉS

`non / faux / pas orthogonales / elles ne sont pas orthogonales / non elles ne sont pas orthogonales / non, elles ne sont pas orthogonales / faux elles ne sont pas orthogonales / faux, elles ne sont pas orthogonales / non pas orthogonales` → Elles ne se coupent pas, mais (BD) est perpendiculaire au plan (ACK), qui contient (AC).

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Une section diagonale de la pyramide

$SABCD$ est une pyramide de base carrée $ABCD$, dont toutes les arêtes mesurent 6. Calcule l'aire du triangle SAC.



Toutes les arêtes mesurent 6.

Une pyramide SABCD : la base carrée ABCD est vue en perspective, de centre O ; le sommet S est au-dessus de O. Les arêtes cachées sont en pointillés.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare $SA^2 + SC^2$ et AC^2.
2. $AC = 6\sqrt{2}$: le triangle SAC est rectangle en S.

CORRECTION

Un triangle rectangle — $SA^2 + SC^2 = 36 + 36 = 72$ et $AC^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$: le triangle SAC est rectangle en S.

$36 + 36 = 72$

L'aire —

$\text{aire}(SAC) = \frac{6 \times 6}{2} = 18$

L'aire du triangle SAC est 18.

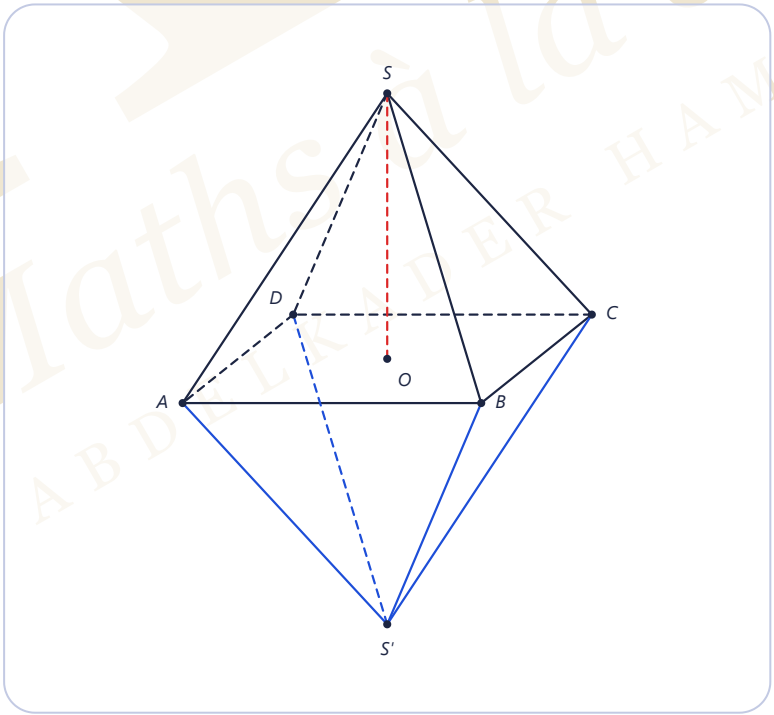
PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(3) / 9sqrt(3)` → SAC n'est pas équilatéral : $AC = 6\sqrt{2}$, pas 6.

EXERCICE 18 · RAISONNEMENT

Une double pyramide

$SABCD$ est une pyramide de base carrée $ABCD$ de centre O, dont toutes les arêtes mesurent 6 ; son volume est $36\sqrt{2}$. S' est le symétrique de S par rapport à O. Calcule le volume du solide $SABCDS'$.



Toutes les arêtes mesurent 6.

Une pyramide SABCD : la base carrée ABCD est vue en perspective, de centre O ; le sommet S est au-dessus de O. Les arêtes cachées sont en pointillés. S', le symétrique de S par rapport à O, est sous la base : les segments [S'A], [S'B], [S'C] et [S'D] sont tracés en bleu.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `72*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le solide est formé de deux pyramides de même base $ABCD$.
2. $OS' = OS$: les deux pyramides ont la même hauteur.

CORRECTION

Deux pyramides — $S'ABCD$ a la même base que $SABCD$, et la même hauteur $OS' = OS$: elle a le même volume.

$V_{S'ABCD} = 36\sqrt{2}$

Le total —

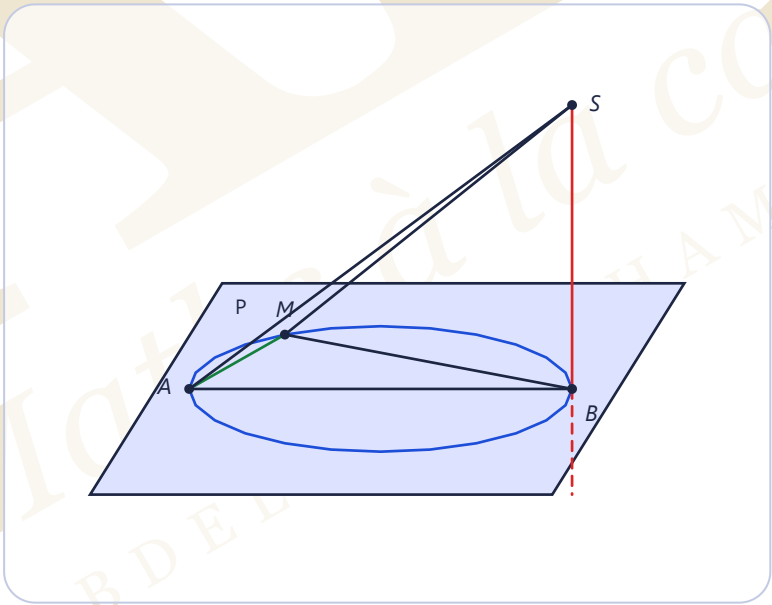
$V = 2 \times 36\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$

Le volume de $SABCDS'$ est $72\sqrt{2}$.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Un triangle dans l'espace

M, A et B sont trois points d'un plan P, M étant un point du cercle de diamètre $[AB]$ distinct de A et de B. La droite (SB) est perpendiculaire au plan P. Quelle est la nature du triangle AMS ?



M est sur le cercle de diamètre [AB] ; (SB) est perpendiculaire au plan P.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Dans ce plan, un cercle de diamètre [AB], vu comme une ellipse, et un point M du cercle. La droite (SB), en rouge, est perpendiculaire au plan P en B ; S est au-dessus de B. Les segments [AM], [MB], [SM] et [SA] sont tracés.

Écris la nature du triangle, par exemple : isocèle en A.

Réponse attendue : `rectangle en M` — aussi acceptées : triangle rectangle en M · un triangle rectangle en M · il est rectangle en M · AMS est rectangle en M · rectangle M · triangle rectangle M · le triangle AMS est rectangle en M · triangle AMS rectangle en M · AMS est un triangle rectangle en M · AMS

rectangle en M · le triangle AMS est un triangle rectangle en M · c'est un triangle rectangle en M · il est rectangle en M.

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre d'abord que (AM) est perpendiculaire au plan (SBM) : (AM) est orthogonale à (SB), et à quelle autre droite ?
2. M est sur le cercle de diamètre $[AB]$: l'angle $\widehat{AMB}$ est droit. Puis (SM) est dans le plan (SBM).

CORRECTION

(SB) et (AM) — (SB) est perpendiculaire au plan P, qui contient (AM) : par la propriété 16, elles sont orthogonales.

(SB) est orthogonale à (AM)

Le cercle — M est sur le cercle de diamètre $[AB]$: (AM) est perpendiculaire à (MB).

(AM) est perpendiculaire à (MB)

Le plan (SBM) — (SB) et (MB) sont sécantes en B.

(AM) est perpendiculaire au plan (SBM)

Conclusion — (SM) est contenue dans le plan (SBM) : (AM) est perpendiculaire à (SM).

$\widehat{AMS} = 90°$

Le triangle AMS est rectangle en M.

PIÈGES ANTICIPÉS

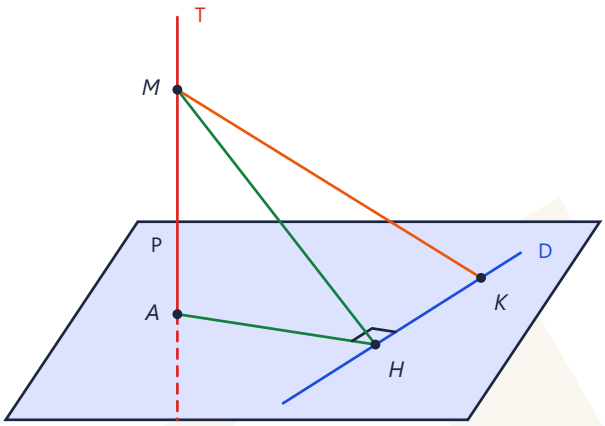
`rectangle en A / rectangle en S` → L'angle droit est en M : c'est (AM) qui est perpendiculaire au plan (SBM).

`rectangle / triangle rectangle / un triangle rectangle / il est rectangle / c'est un triangle rectangle` → Il est bien rectangle : mais en quel sommet ? Dis où est l'angle droit.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

Trois perpendiculaires et deux Pythagore

T est une droite perpendiculaire à un plan P en A. D est une droite du plan P ne passant pas par A, et H est le projeté orthogonal de A sur D. M est un point de T et K un point de D, avec $AM = 4$, $AH = 2$ et $HK = 4$. Calcule MK.



Un plan P. Une droite T perpendiculaire au plan P en A, avec M au-dessus de A. Une droite D du plan, H le projeté orthogonal de A sur D, et K un autre point de D. Les segments [AH], [MH] et [MK] sont tracés.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord MH dans le triangle AMH, rectangle en A.
2. Par le théorème des trois perpendiculaires, (MH) est orthogonale à D : le triangle MHK est rectangle en H.

CORRECTION

MH — (AM) est perpendiculaire au plan P : le triangle AMH est rectangle en A.

$MH^2 = 16 + 4 = 20$

Trois perpendiculaires — D est perpendiculaire au plan (AHM), donc à (MH) : le triangle MHK est rectangle en H.

$MK^2 = MH^2 + HK^2$

Le calcul —

$MK^2 = 20 + 16 = 36$

$MK = 6.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(5)` → $2\sqrt{5}$, c'est MH ; il reste à utiliser le triangle MHK, rectangle en H.

EXERCICE 21 · BASE **Un point du plan médiateur**

$[AB]$ est un segment de longueur 10 et de milieu I. M est un point du plan médiateur de $[AB]$ tel que $MI = 12$. Calcule MA.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan médiateur est perpendiculaire à (AB) en I : quel angle font (MI) et (AB) ?
2. Le triangle MIA est rectangle en I, avec $IA = 5$.

CORRECTION

Un angle droit — (MI) est contenue dans le plan médiateur, perpendiculaire à (AB) : le triangle MIA est rectangle en I.

$MA^2 = MI^2 + IA^2$

Le calcul —

$MA^2 = 144 + 25 = 169$

$MA = 13$, et aussi $MB = 13$.

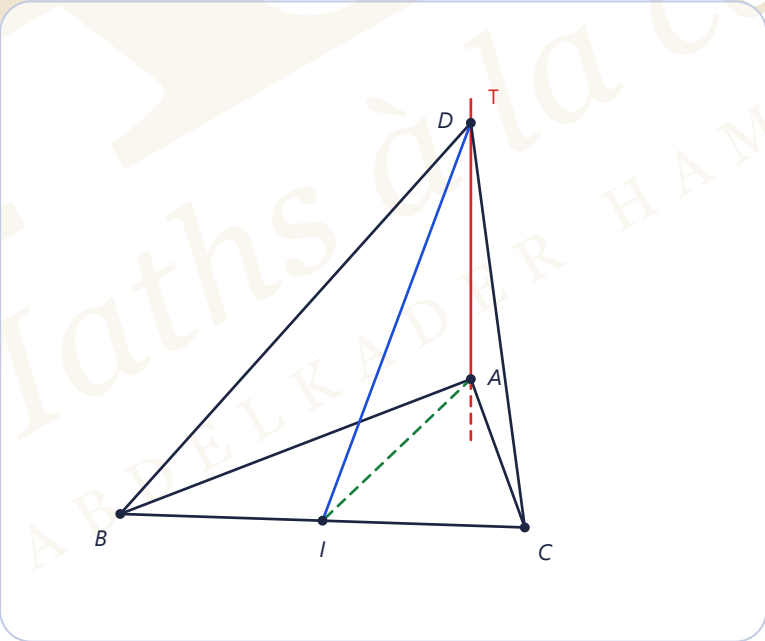
PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(61) / sqrt(244)` → IA est la moitié de AB : $IA = 5$, pas 10.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

Le plan médiateur de la base

ABC est un triangle isocèle en A et I est le milieu de $[BC]$. T est la perpendiculaire au plan (ABC) en A, et D est un point de T distinct de A. Quel est le plan médiateur de $[BC]$?



Un triangle ABC posé à plat, isocèle en A : A au fond à droite, B devant à gauche, C devant à droite ; I est le milieu de [BC]. La droite T, en rouge, est perpendiculaire au plan (ABC) en A ; D est sur T, au-dessus de A. Les segments [DB], [DC], [DI] et [AI] sont tracés.

Écris le nom du plan, par exemple (ABC).

Réponse attendue : `(ADI)` — aussi acceptées : ADI · le plan (ADI) · le plan ADI · plan (ADI) · plan ADI · (AID) · AID · le plan (AID) · le plan AID · plan (AID) · plan AID · (DAI) · DAI · le plan (DAI) · le plan DAI · plan

(DAI) · plan DAI · (DIA) · DIA · le plan (DIA) · le plan DIA · plan (DIA) · plan DIA · (IAD) · IAD · le plan (IAD) · le plan IAD · plan (IAD) · plan IAD · (IDA) · IDA · le plan (IDA) · le plan IDA · plan (IDA) · plan IDA

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche trois points non alignés équidistants de B et de C.
2. $AB = AC$ et $IB = IC$. Pour D, utilise les triangles DAB et DAC, rectangles en A.

CORRECTION

A et I — $AB = AC$ (triangle isocèle) et $IB = IC$ (I milieu de $[BC]$).

$$AB = AC \quad ; \quad IB = IC$$

Le point D — (DA) est perpendiculaire au plan (ABC) : les triangles DAB et DAC sont rectangles en A, et $DB^2 = DA^2 + AB^2 = DA^2 + AC^2 = DC^2$.

$$DB = DC$$

Le plan — A, D et I ne sont pas alignés et sont équidistants de B et de C.

$$\text{le plan médiateur de } [BC] \text{ est } (ADI)$$

Le plan médiateur de $[BC]$ est le plan (ADI).

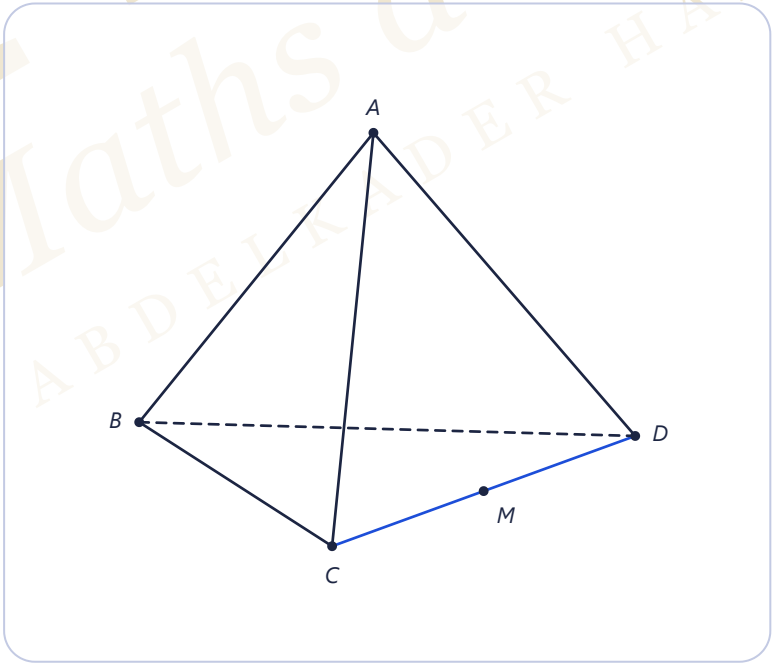
PIÈGES ANTICIPÉS

`(ABC) / ABC / le plan (ABC)` → Le plan (ABC) contient B et C : il ne peut pas être leur plan médiateur.

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Le plan médiateur d'une arête

$ABCD$ est un tétraèdre régulier et M est le milieu de $[CD]$. Quel est le plan médiateur de $[CD]$?



Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête cachée [BD] est en pointillés. M est le milieu de l'arête [CD], tracée en bleu.

Écris le nom du plan, par exemple (ABC).

Réponse attendue : `(ABM)` — aussi acceptées : ABM · le plan (ABM) · le plan ABM · plan (ABM) · plan ABM · (AMB) · AMB · le plan (AMB) · le plan AMB · plan (AMB) · plan AMB · (BAM) · BAM · le plan (BAM) · le plan BAM · plan (BAM) · plan BAM · (BMA) · BMA · le plan (BMA) · le plan BMA · plan (BMA) · plan BMA · (MAB) · MAB · le plan (MAB) · le plan MAB · plan (MAB) · plan MAB · (MBA) · MBA · le plan (MBA) · le plan MBA · plan (MBA) · plan MBA

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quels sommets du tétraèdre sont à égale distance de C et de D ?
2. $AC = AD$ et $BC = BD$; et M ?

CORRECTION

Trois points — Toutes les arêtes sont égales : $AC = AD$ et $BC = BD$. Et $MC = MD$.

$$AC = AD \quad ; \quad BC = BD \quad ; \quad MC = MD$$

Le plan — A, B et M ne sont pas alignés.

$$\text{le plan médiateur de } [CD] \text{ est } (ABM)$$

Le plan médiateur de $[CD]$ est le plan (ABM).

PIÈGES ANTICIPÉS

`(ACD)` / `ACD` / `(BCD)` / `BCD` → Ce plan contient C et D : le plan médiateur de $[CD]$ ne contient ni C ni D.

EXERCICE 24 · BASE **Un point de l'axe**

Un cercle a pour centre O et pour rayon 5. N est un point de son axe, et A un point du cercle tel que $NA = 13$. Calcule ON.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'axe est perpendiculaire au plan du cercle : quelle est la nature du triangle NOA ?
2. $NA^2 = ON^2 + OA^2$, avec $OA = 5$.

CORRECTION

Un angle droit — L'axe est perpendiculaire au plan du cercle, qui contient (OA) : le triangle NOA est rectangle en O.

$$ON^2 = NA^2 - OA^2$$

Le calcul —

$$ON^2 = 169 - 25 = 144$$

$$ON = 12.$$

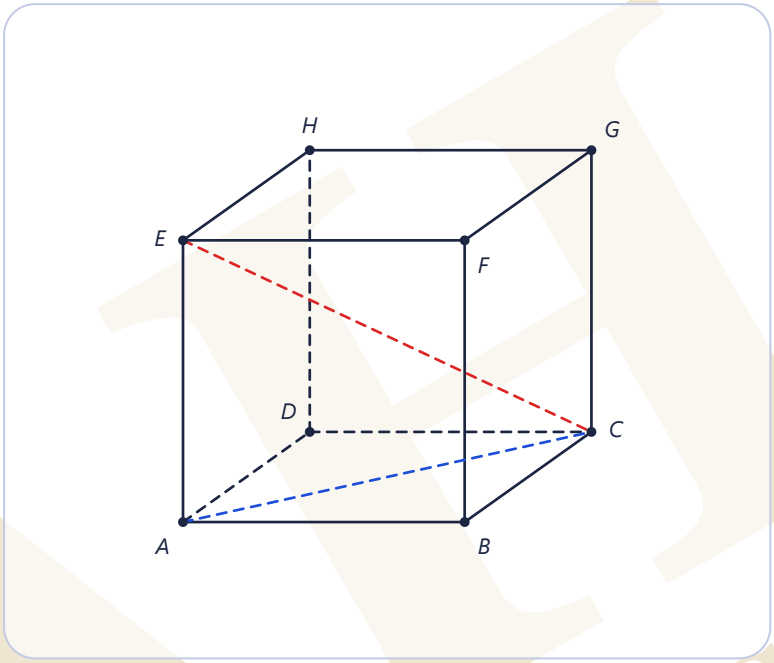
PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(194)` → L'hypoténuse est NA : on soustrait, $ON^2 = 169 - 25$.

EXERCICE 25 · PRATIQUE

La grande diagonale

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3. Calcule la longueur de la grande diagonale EC.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [AC] de la face ABCD et la grande diagonale [EC] sont tracées en pointillés, [EC] en rouge.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `3*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AE) est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (AC) : quel est l'angle $\widehat{EAC}$?
2. Dans le triangle EAC rectangle en A, $AE = 3$ et $AC = 3\sqrt{2}$.

CORRECTION

Un angle droit — (AE) est perpendiculaire au plan (ABC), donc orthogonale à (AC) : le triangle EAC est rectangle en A.

$$EC^2 = AE^2 + AC^2$$

Le calcul —

$$EC^2 = 9 + 18 = 27$$

La racine —

$$EC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

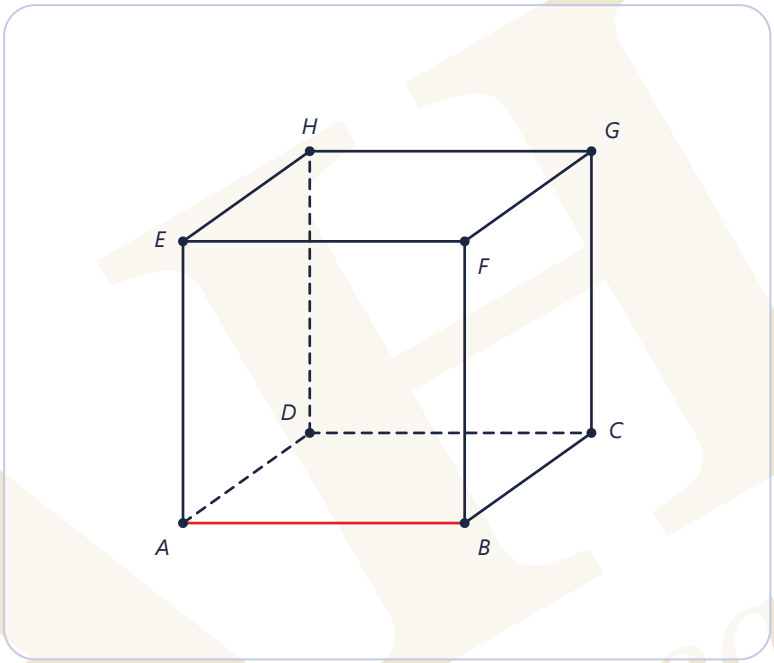
$$EC = 3\sqrt{3}.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(2) / 3sqrt(2)` → $3\sqrt{2}$ est la diagonale d'une face ; la grande diagonale traverse le cube.

EXERCICE 26 · BASE **Deux faces voisines**

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, les plans (ABF) et (BCG) sont-ils perpendiculaires ?



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [AB] est repassée en rouge.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui ils sont perpendiculaires · oui, ils sont perpendiculaires · ils sont perpendiculaires · perpendiculaires · oui perpendiculaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche, dans le plan (ABF), une droite orthogonale au plan (BCG).
2. (AB) est perpendiculaire à (BC) et à (BF).

CORRECTION

Une droite orthogonale — (AB) est perpendiculaire à (BC) et à (BF), sécantes en B dans le plan (BCG).

(AB) est orthogonale au plan (BCG)

La définition — (AB) est contenue dans le plan (ABF).

(ABF) et (BCG) sont perpendiculaires

Oui : les plans (ABF) et (BCG) sont perpendiculaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / faux / ils ne sont pas perpendiculaires / non ils ne sont pas perpendiculaires / non, ils ne sont pas perpendiculaires / pas perpendiculaires` → Ils se coupent suivant (BF), et c'est permis : le plan (ABF) contient (AB), orthogonale au plan (BCG).

EXERCICE 27 · PRATIQUE

Perpendiculaires à un même plan

Réponds par vrai ou faux : « Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles ».

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux · non, c'est faux · fausse · c'est fausse · non, c'est fausse · non c'est fausse · non, faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pense aux faces d'un cube qui touchent la face $ABCD$.
2. Les plans (ABF) et (BCG) sont-ils perpendiculaires au plan (ABC) ? Sont-ils parallèles ?

CORRECTION

Un contre-exemple — Dans le cube $ABCDEFGH$, les plans (ABF) et (BCG) sont perpendiculaires au plan (ABC) : ils contiennent (BF), orthogonale à ce plan.

$$(BF) \text{ est orthogonale au plan } (ABC)$$

Sécants — Ces deux plans se coupent suivant (BF) : ils ne sont pas parallèles.

$$(ABF) \cap (BCG) = (BF)$$

Faux. Ce sont deux plans perpendiculaires à une même **droite** qui sont parallèles.

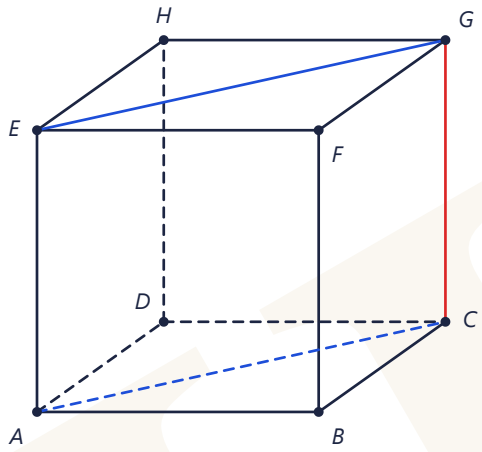
PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → C'est vrai pour deux plans perpendiculaires à une même droite, pas à un même plan : (ABF) et (BCG) se coupent.

EXERCICE 28 · BASE

Un plan diagonal et la base

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, le plan (ACG) est-il perpendiculaire au plan (ABC) ?



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le rectangle ACGE est tracé : [AC] en pointillés et [EG] en trait plein ; l'arête [CG] est repassée en rouge.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui il est perpendiculaire · oui, il est perpendiculaire · il est perpendiculaire · il est perpendiculaire au plan · oui il est perpendiculaire au plan · perpendiculaire · oui perpendiculaire · oui il l'est

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ACG) contient-il une droite orthogonale au plan (ABC) ?
2. Regarde l'arête (CG).

CORRECTION

L'arête (CG) — (CG) est perpendiculaire à (CB) et à (CD) : elle est orthogonale au plan (ABC).

(CG) est orthogonale au plan (ABC)

La définition — (CG) est contenue dans le plan (ACG).

(ACG) et (ABC) sont perpendiculaires

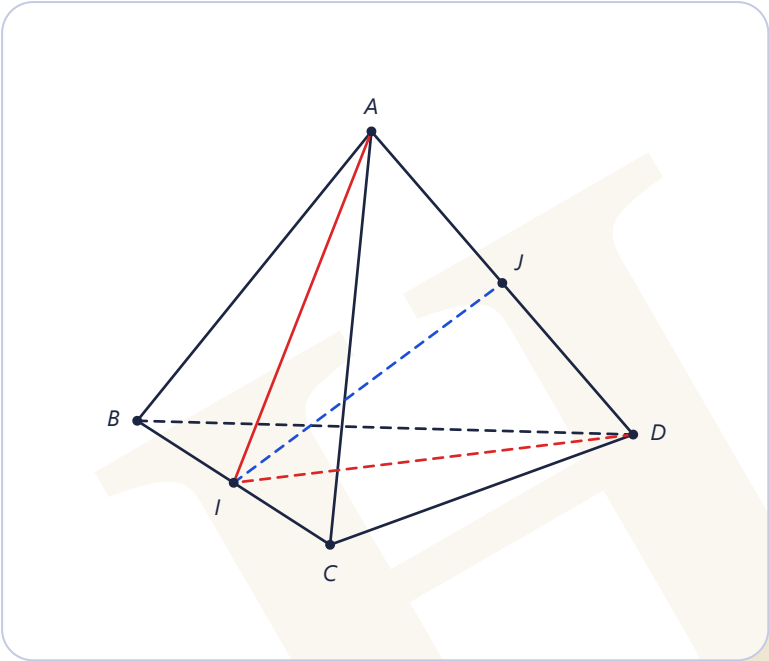
Oui : le plan (ACG) est perpendiculaire au plan (ABC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / faux / il n'est pas perpendiculaire / non il n'est pas perpendiculaire / non, il n'est pas perpendiculaire / pas perpendiculaire` → Ce n'est pas une face, mais il contient l'arête (CG), orthogonale au plan (ABC).

EXERCICE 29 · PRATIQUE **Le périmètre du triangle DIA**

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête 4, et I est le milieu de $[BC]$. Calcule le périmètre du triangle DIA.



Toutes les arêtes mesurent 4.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête cachée [BD] est en pointillés. I est le milieu de l'arête [BC] et J le milieu de l'arête [AD]. Le triangle DIA est tracé en rouge, [DI] en pointillés ; le segment [IJ] est tracé en bleu, en pointillés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `4+4*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AI]$ et $[DI]$ sont des hauteurs de triangles équilatéraux de côté 4.
2. La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 4 mesure $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

CORRECTION

Deux hauteurs — Dans les triangles équilatéraux ABC et DBC, les médianes $[AI]$ et $[DI]$ sont des hauteurs : le triangle DIA est isocèle en I.

$$AI = DI = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Le périmètre —

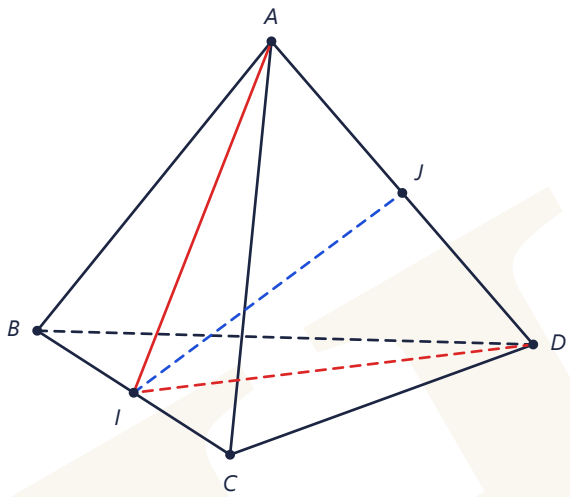
$$AD + AI + DI = 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3}$$

Le périmètre du triangle DIA est $4 + 4\sqrt{3}$.

EXERCICE 30 · RAISONNEMENT

Le cosinus de l'angle en D

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête 4, I est le milieu de $[BC]$, et $DI = AI = 2\sqrt{3}$. Calcule $\cos \widehat{IDA}$.



Toutes les arêtes mesurent 4.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête cachée [BD] est en pointillés. I est le milieu de l'arête [BC] et J le milieu de l'arête [AD]. Le triangle DIA est tracé en rouge, [DI] en pointillés ; le segment [IJ] est tracé en bleu, en pointillés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `sqrt(3)/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle DIA est isocèle en I : sa médiane (IJ), avec J milieu de $[AD]$, est aussi une hauteur.
2. Dans le triangle IJD rectangle en J, $\cos\widehat{IDA} = \frac{DJ}{DI}$, avec $DJ = 2$.

CORRECTION

Un triangle rectangle — J est le milieu de $[AD]$; dans le triangle isocèle DIA, (IJ) est perpendiculaire à (AD).

$\cos\widehat{IDA} = \frac{DJ}{DI}$

Le calcul — Avec $DJ = 2$ et $DI = 2\sqrt{3}$, on simplifie par 2, puis on rend le dénominateur rationnel :

$\cos\widehat{IDA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\widehat{IDA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; la calculatrice donne un angle d'environ $55°$.

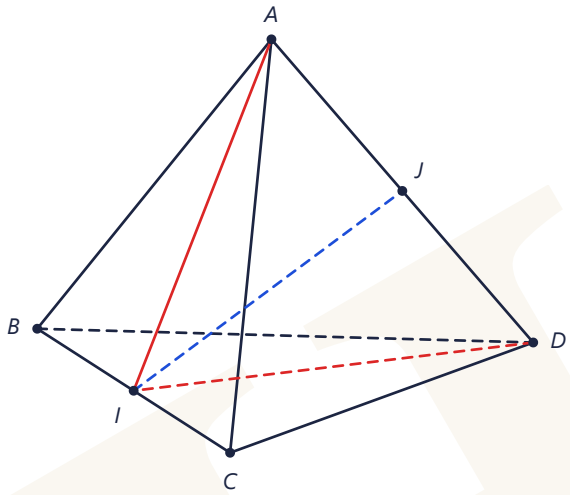
PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2 / 0.5` → $\frac{1}{2}$ serait le cosinus de $60°$, mais le triangle DIA n'est pas équilatéral : $DA = 4$ et $DI = 2\sqrt{3}$.

EXERCICE 31 · RAISONNEMENT

La distance de deux arêtes opposées

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête 4. I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AD]$, et $AI = 2\sqrt{3}$. Calcule IJ.



Toutes les arêtes mesurent 4.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête cachée [BD] est en pointillés. I est le milieu de l'arête [BC] et J le milieu de l'arête [AD]. Le triangle DIA est tracé en rouge, [DI] en pointillés ; le segment [IJ] est tracé en bleu, en pointillés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `2*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle AIJ est rectangle en J, car (IJ) est la hauteur du triangle isocèle DIA.
2. $IJ^2 = AI^2 - AJ^2$, avec $AJ = 2$.

CORRECTION

Un triangle rectangle — Dans le triangle DIA isocèle en I, la médiane (IJ) est perpendiculaire à (AD).

$IJ^2 = AI^2 - AJ^2$

Le calcul —

$IJ^2 = 12 - 4 = 8$

La racine —

$IJ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$IJ = 2\sqrt{2}.$

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → AI est l'hypoténuse du triangle AIJ : on soustrait, $IJ^2 = 12 - 4$.

EXERCICE 32 · DEFI **Trois angles de 60 degrés**

$SABC$ est un tétraèdre tel que $SA = 12$ et $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 60°$. On pose $SB = x$, et soit y la longueur SC. On admet que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$xy - 12(x+y) + 288 = 0$. On suppose que ABC est rectangle en A et que $SB = 30$. Calcule SC.

Écris la longueur SC : un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace x par 30 dans la relation.
2. $30y - 12(30+y) + 288 = 0$: développe et résous cette équation du premier degré.

CORRECTION

La relation — Avec $x = 30$:

$$30y - 360 - 12y + 288 = 0$$

L'équation —

$$18y = 72$$

Vérification — Par la formule d'El Kashi, $AB^2 = x^2 - 12x + 144 = 684$, $AC^2 = y^2 - 12y + 144 = 112$ et $BC^2 = x^2 + y^2 - xy = 796$: on a bien $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$$684 + 112 = 796$$

$$SC = 4.$$

EXERCICE 33 · RAISONNEMENT

La hauteur d'un coin de cube

$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O avec $OA = OB = OC = 6$, et H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). On admet que $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Calcule OH.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `2*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord $\frac{1}{OH^2}$.
2. $\frac{1}{OH^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

CORRECTION

La relation —

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$

OH —

$$OH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$OH = 2\sqrt{3}.$$

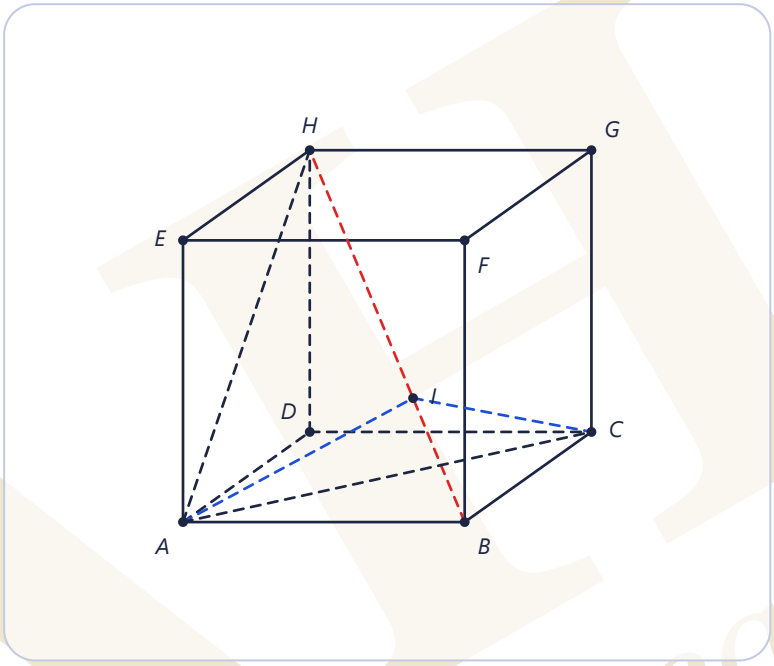
PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(3) / sqrt(108)` → On additionne les inverses des carrés, pas les carrés : OH est plus court que chaque arête.

EXERCICE 34 · DEFI

L'angle AIC dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a, et I est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH, rectangle en A. On admet que (BH) est perpendiculaire au plan (AIC), que le triangle AIC est isocèle en I et que $AI = \frac{AB \times AH}{BH}$. Donne la mesure en radian de l'angle $\widehat{AIC}$, sans écrire rad.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La grande diagonale [BH] est tracée en pointillés ; I est sur [BH]. Les segments [AH], [AI], [IC] et [AC] sont tracés en pointillés.

Écris la mesure en radian, sans l'unité, par exemple $\frac{\pi}{4}$.

Réponse attendue : `2*pi/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $AH = a\sqrt{2}$, $BH = a\sqrt{3}$, puis AI.
2. Avec K milieu de $[AC]$, le triangle AIK est rectangle en K : calcule $\sin \widehat{AIK} = \frac{AK}{AI}$.

CORRECTION

AI — $AH = a\sqrt{2}$ et $BH = a\sqrt{3}$, où a est la longueur de l'arête. On divise $a \times a\sqrt{2}$ par $a\sqrt{3}$, et on simplifie par a :

$$AI = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Le demi-angle — K est le milieu de $[AC]$ et $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; dans le triangle isocèle AIC, (IK) est perpendiculaire à (AC). On divise AK par AI, et les a se simplifient :

$$\sin \widehat{AIK} = \frac{AK}{AI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'angle — $\widehat{AIK} = \frac{\pi}{3}$, et l'angle $\widehat{AIC}$ est le double de l'angle $\widehat{AIK}$.

$$\widehat{AIC} = \frac{2\pi}{3}$$

$\widehat{AIC} = \frac{2\pi}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

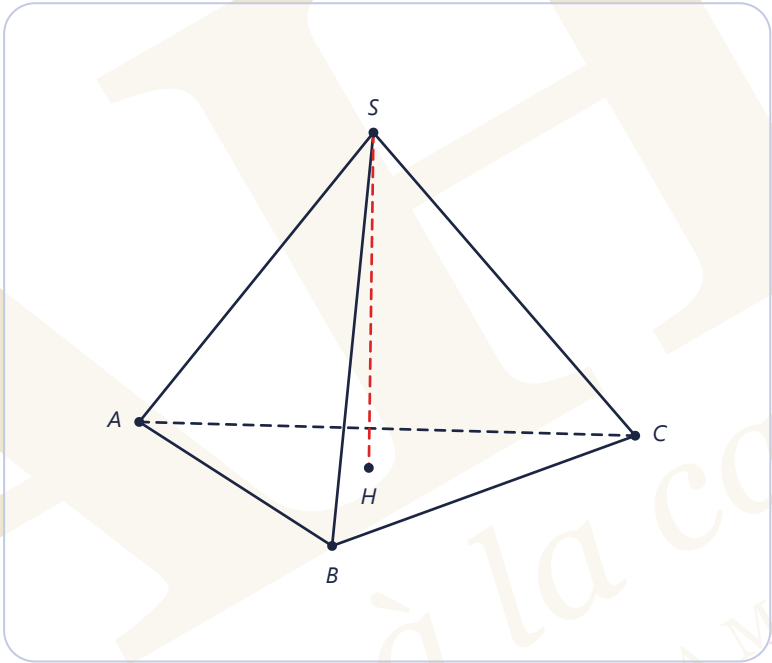
`pi/3` → $\frac{\pi}{3}$ est l'angle $\widehat{AIK}$; l'angle $\widehat{AIC}$ est le double.

`120` → $120°$, c'est la bonne mesure en degrés : on la demande en radian. $180°$ valent π radians.

EXERCICE 35 · DEFI

La hauteur d'un tétraèdre régulier

$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête 6, et H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC). Calcule SH.



Un tétraèdre régulier SABC vu en perspective : le sommet S est en haut, A à gauche, B en bas devant, C à droite. L'arête cachée [AC] est en pointillés. H, le centre du triangle ABC, est marqué, et la hauteur [SH] est tracée en rouge, en pointillés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `2*sqrt(6)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $SA = SB = SC$: H est équidistant de A, B et C. Que représente H pour le triangle équilatéral ABC ?
2. H est le centre du triangle : AH vaut les deux tiers de la hauteur $6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. Puis Pythagore dans le triangle SHA.

CORRECTION

Le centre — Les triangles SHA, SHB et SHC sont rectangles en H avec la même hypoténuse : $HA = HB = HC$. H est le centre du triangle équilatéral ABC.

$AH = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Pythagore —

$SH^2 = 36 - 12 = 24$

La racine —

$SH = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$SH = 2\sqrt{6}.$

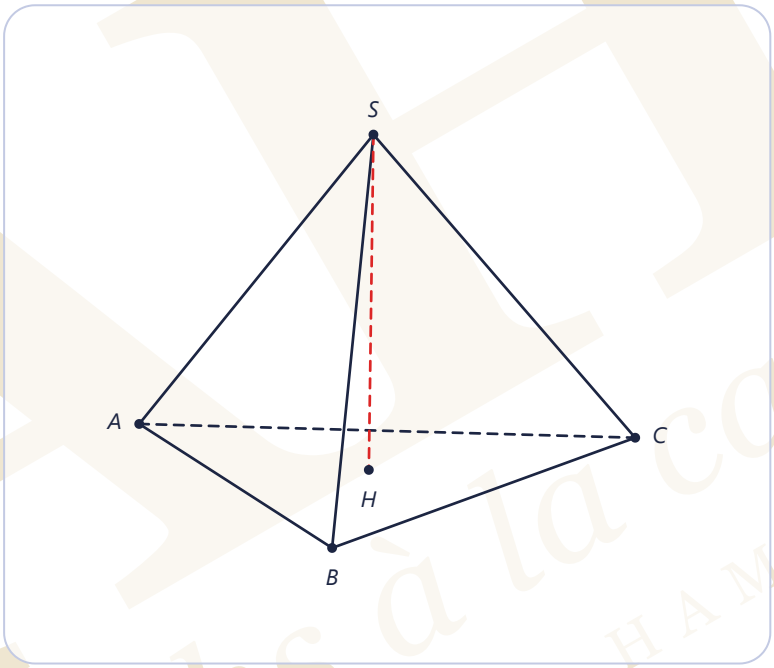
PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(3)` / `3sqrt(3)` → $3\sqrt{3}$ est la hauteur d'une face ; la hauteur du tétraèdre est SH.

EXERCICE 36 · DEFI

Le volume d'un tétraèdre régulier

$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête 6 et de hauteur $SH = 2\sqrt{6}$. Calcule son volume.



Un tétraèdre régulier SABC vu en perspective : le sommet S est en haut, A à gauche, B en bas devant, C à droite. L'arête cachée [AC] est en pointillés. H, le centre du triangle ABC, est marqué, et la hauteur [SH] est tracée en rouge, en pointillés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `18*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire d'un triangle équilatéral de côté c est $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.
2. $V = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$.

CORRECTION

La base —

$\text{aire}(ABC) = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

Le volume —

$V = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2}$

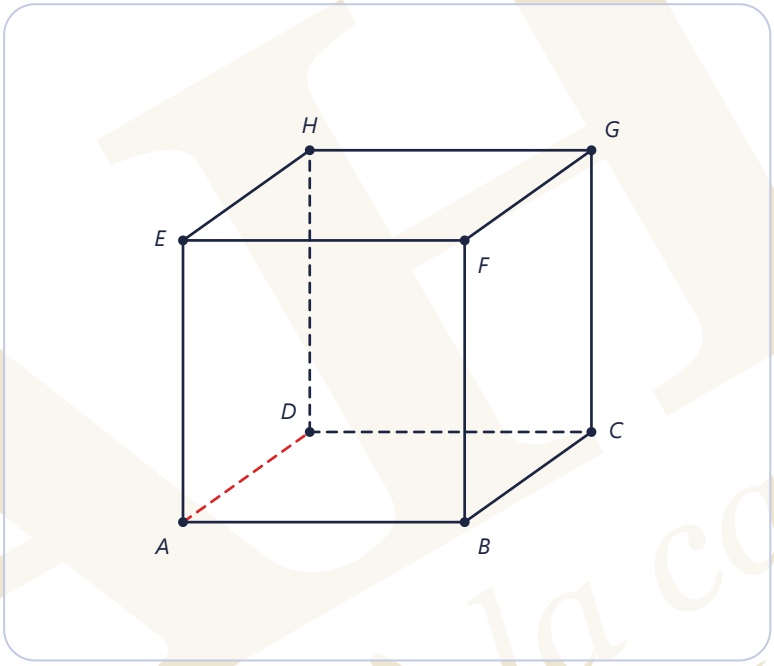
Le volume du tétraèdre est $18\sqrt{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`54*sqrt(2)` → Le volume d'une pyramide prend le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur.

EXERCICE 37 · BASE **La parallèle menée par G**

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, nommer la droite passant par G et parallèle à la droite (AD).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [AD] est repassée en rouge.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(GF)` — aussi acceptées : GF · la droite (GF) · la droite GF · droite (GF) · droite GF · c'est (GF) · c'est la droite (GF) · (FG) · FG · la droite (FG) · la droite FG · droite (FG) · droite FG · c'est (FG) · c'est la droite (FG)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les arêtes $[AD]$, $[BC]$, $[FG]$ et $[EH]$ sont parallèles : ce sont les côtés opposés de faces carrées.
2. Parmi elles, laquelle a G pour extrémité ?

CORRECTION

Deux faces — $ABCD$ est un carré : (AD) est parallèle à (BC). $BCGF$ est un carré : (BC) est parallèle à (FG).

$(AD) \parallel (BC) \parallel (FG)$

Une seule parallèle — Par le point G, il passe une seule parallèle à (AD).

(GF)

La droite cherchée est (GF) : pour passer d'une face à l'autre, on enchaîne les parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

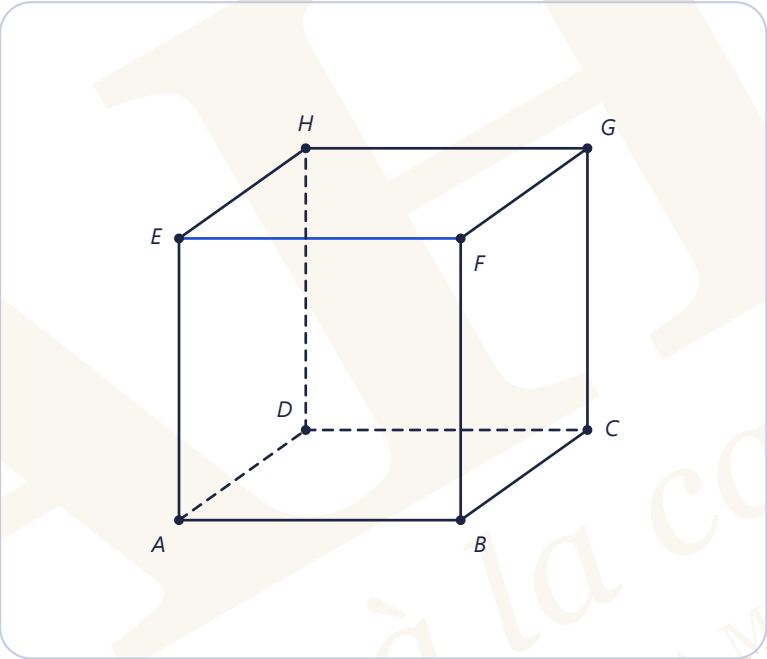
`(GH)` / `GH` / `(HG)` / `HG` → (GH) est parallèle à (AB), pas à (AD).

`(GC)` / `GC` / `(CG)` / `CG` → (GC) est une arête « verticale » : elle est parallèle à (AE).

EXERCICE 38 · BASE

Une perpendiculaire dans la face du dessus

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, nommer la droite du plan (EFG) qui passe par E et qui est perpendiculaire à la droite (EF).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [EF] est repassée en bleu.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(EH)` — aussi acceptées : EH · la droite (EH) · la droite EH · droite (EH) · droite EH · c'est (EH) · c'est la droite (EH) · (HE) · HE · la droite (HE) · la droite HE · droite (HE) · droite HE · c'est (HE) · c'est la droite (HE)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (EFG) est celui de la face $EFGH$, qui est un carré.
2. Dans un carré, deux côtés consécutifs sont perpendiculaires. Quel autre côté du carré $EFGH$ part de E ?

CORRECTION

La face EFGH — $EFGH$ est un carré du plan (EFG) : ses côtés consécutifs $[EF]$ et $[EH]$ sont perpendiculaires.

$(EH) \perp (EF)$

Une seule — Dans un plan, par un point, il passe une seule perpendiculaire à une droite.

(EH)

C'est la droite (EH) : dans une face, on retrouve la géométrie plane.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(EA) / EA / (AE) / AE` → (EA) est bien perpendiculaire à (EF), mais elle n'est pas dans le plan (EFG).

`(EG) / EG / (GE) / GE` → (EG) est une diagonale du carré : elle fait un angle de $45°$ avec (EF).

EXERCICE 39 · PRATIQUE

Orthogonales à une même droite

Réponds par vrai ou faux : « Deux droites de l'espace orthogonales à une même droite sont parallèles ».

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux · non, c'est faux · fausse · c'est fausse · non, c'est fausse · non c'est fausse · non, faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un contre-exemple dans un cube $ABCDEFGH$, avec la droite (AE).
2. Les droites (AB) et (AD) sont-elles orthogonales à (AE) ? Sont-elles parallèles ?

CORRECTION

Un contre-exemple — Dans un cube $ABCDEFGH$, (AB) et (AD) sont toutes deux perpendiculaires à (AE), dans les faces $ABFE$ et $ADHE$.

$(AB) \perp (AE) \quad ; \quad (AD) \perp (AE)$

Pas parallèles — Pourtant (AB) et (AD) sont sécantes en A.

$(AB) \cap (AD) = \{A\}$

Faux : dans l'espace, deux droites orthogonales à une même droite peuvent être sécantes. La propriété du plan ne se transporte pas.

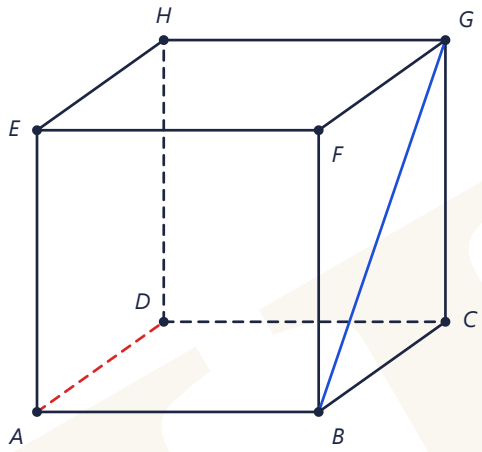
PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → C'est vrai dans un plan, pas dans l'espace : (AB) et (AD) sont orthogonales à (AE) et sécantes.

EXERCICE 40 · PRATIQUE

Une diagonale de face et une arête

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, dire si les droites (BG) et (AD) sont orthogonales.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [BG] de la face BCGF est tracée en bleu, l'arête [AD] est repassée en rouge.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non, elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · elles ne le sont pas · ils ne le sont pas · c'est non · faux · le · lé · la · pas orthogonales · non pas orthogonales · non, pas orthogonales · elles ne sont pas orthogonales · non elles ne sont pas orthogonales · non, elles ne sont pas orthogonales · ils ne sont pas orthogonales · non ils ne sont pas orthogonales · non, ils ne sont pas orthogonales · non orthogonales

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mène par B la parallèle à (AD) : c'est une arête du cube.
2. Dans le carré $BCGF$, quel angle la diagonale (BG) fait-elle avec le côté (BC) ?

CORRECTION

La parallèle par B — La parallèle à (AD) menée par B est (BC).

$(BC) \parallel (AD)$

Dans le carré BCGF — (BG) est une diagonale du carré $BCGF$: elle fait avec le côté (BC) un angle de $45°$.

$\widehat{CBG} = 45°$

Non : les parallèles menées par B ne sont pas perpendiculaires, donc (BG) et (AD) ne sont pas orthogonales.

PIÈGES ANTICIPÉS

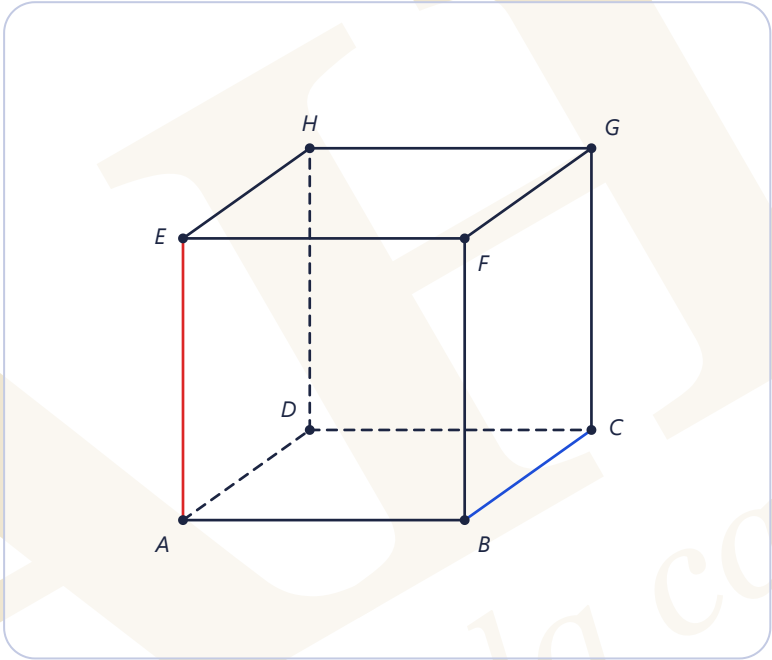
`oui / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / orthogonales / oui orthogonales / oui, orthogonales / elles sont orthogonales / oui elles sont orthogonales / oui, elles sont orthogonales / ils sont`

orthogonales / oui ils sont orthogonales / oui, ils sont orthogonales → Ramène-toi en B : (BG) et (BC), la parallèle à (AD), font un angle de $45°$, pas $90°$.

EXERCICE 41 · BASE

Une arête parallèle à (BC) issue de H

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, les droites (AE) et (BC) sont orthogonales. Nommer l'arête issue de H qui est parallèle à (BC), et qui est donc, par la propriété 13, orthogonale à (AE).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [AE] est repassée en rouge, l'arête [BC] en bleu.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : (HE) — aussi acceptées : HE · la droite (HE) · la droite HE · droite (HE) · droite HE · c'est (HE) · c'est la droite (HE) · (EH) · EH · la droite (EH) · la droite EH · droite (EH) · droite EH · c'est (EH) · c'est la droite (EH)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois arêtes partent de H : $[HD]$, $[HG]$ et $[HE]$.
2. Laquelle est parallèle à $[AD]$, donc à $[BC]$?

CORRECTION

La parallèle — $ADHE$ et $ABCD$ sont des carrés : (HE) est parallèle à (AD), elle-même parallèle à (BC).

$(HE) \parallel (BC)$

Propriété 13 — (AE) et (BC) sont orthogonales : toute parallèle à (BC) est orthogonale à (AE).

(HE) est orthogonale à (AE)

C'est l'arête (HE) : ici elle coupe même (AE) en E, et lui est perpendiculaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

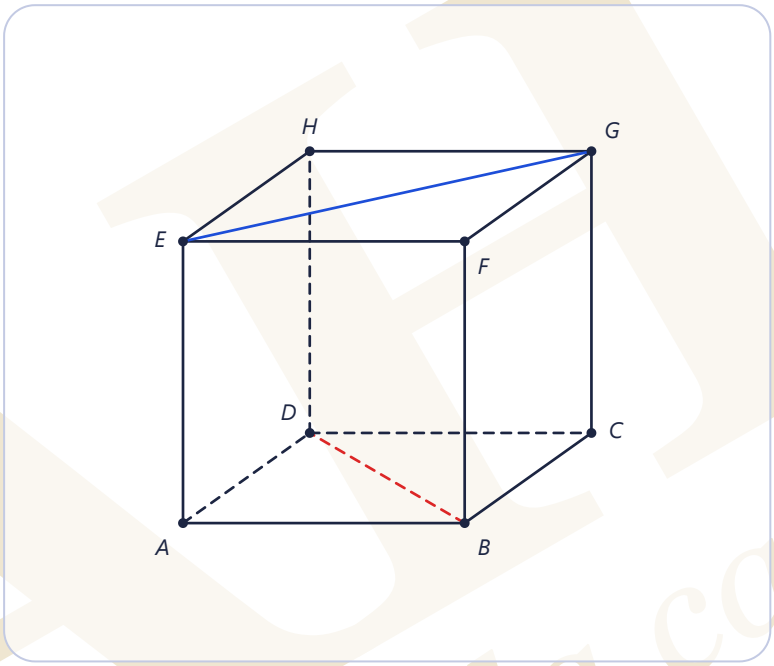
`(HG)` / `HG` / `(GH)` / `GH` → (HG) est parallèle à (AB), pas à (BC).

`(HD)` / `HD` / `(DH)` / `DH` → (HD) est parallèle à (AE) elle-même : elle ne lui est pas orthogonale.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

Deux diagonales de faces opposées

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, dire si les droites (EG) et (BD) sont orthogonales.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [EG] de la face du dessus est tracée en bleu, la diagonale [BD] de la face du dessous en rouge.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui, elles le sont · oui ils le sont · oui, ils le sont · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · orthogonales · oui orthogonales · oui, orthogonales · elles sont orthogonales · oui elles sont orthogonales · oui, elles sont orthogonales · ils sont orthogonales · oui ils sont orthogonales · oui, ils sont orthogonales

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace (EG) par une diagonale parallèle, dans la face $ABCD$.
2. $ACGE$ est un rectangle : (EG) est parallèle à (AC). Comment sont les diagonales d'un carré ?

CORRECTION

Une parallèle — $ACGE$ est un rectangle : (EG) est parallèle à (AC).

$(EG) \parallel (AC)$

Dans le carré ABCD — Les diagonales du carré $ABCD$ sont perpendiculaires.

$(AC) \perp (BD)$

Propriété 13 — (AC) et (BD) sont orthogonales, et (EG) est parallèle à (AC).

(EG) est orthogonale à (BD)

Oui : (EG) et (BD) sont orthogonales, sans avoir de point commun.

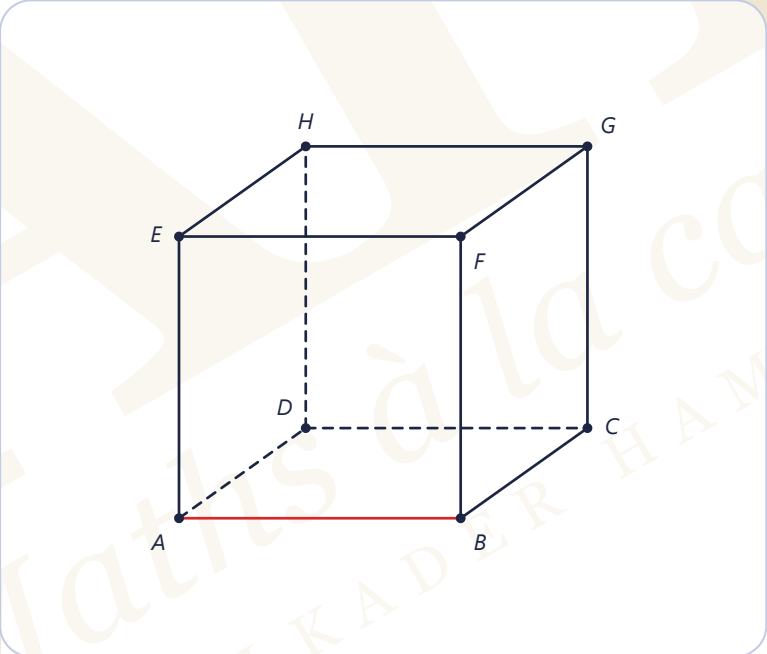
PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / elles ne le sont pas / ils ne le sont pas / c'est non / faux / le / lé / la / pas orthogonales / non pas orthogonales / non, pas orthogonales / elles ne sont pas orthogonales / non elles ne sont pas orthogonales / non, elles ne sont pas orthogonales / ils ne sont pas orthogonales / non ils ne sont pas orthogonales / non, ils ne sont pas orthogonales / non orthogonales` → Elles ne se coupent pas, mais ce n'est pas exigé : (EG) est parallèle à (AC), perpendiculaire à (BD).

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Les arêtes orthogonales à (AB)

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, déterminer le nombre d'arêtes du cube qui sont orthogonales à la droite (AB).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [AB] est repassée en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les 12 arêtes se rangent en trois paquets de 4 arêtes parallèles.
2. Les arêtes parallèles à (AB) ne lui sont pas orthogonales. Et les autres ? Pense à la propriété 13.

CORRECTION

Trois directions — Les arêtes parallèles à (AB) sont $[AB]$, $[DC]$, $[EF]$ et $[HG]$; celles parallèles à (AD) sont $[AD]$, $[BC]$, $[FG]$, $[EH]$; celles parallèles à (AE) sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$.

$12 = 4 + 4 + 4$

Propriété 13 — (AD) et (AE) sont perpendiculaires à (AB) : toutes les arêtes qui leur sont parallèles sont orthogonales à (AB), qu'elles la coupent ou non.

$4 + 4 = 8$

Il y a 8 arêtes orthogonales à (AB) : quatre la coupent, quatre ne la coupent pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

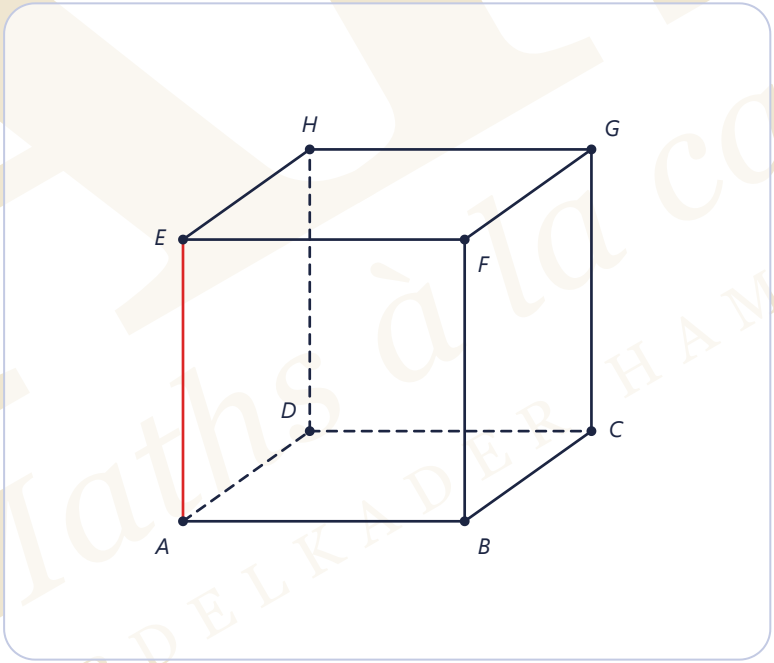
4 → Tu n'as compté qu'une partie : (CG) ou (EH), par exemple, ne coupent pas (AB) mais lui sont orthogonales.

3 → 3, ce sont les autres arêtes parallèles à (AB) : elles ne lui sont pas orthogonales.

EXERCICE 44 · RAISONNEMENT

Les diagonales de faces orthogonales à (AE)

$ABCDEFGH$ est un cube. Parmi les 12 diagonales de ses faces, déterminer le nombre de celles qui sont orthogonales à la droite (AE).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [AE] est repassée en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont perpendiculaires à (AE) : que dire de leurs diagonales ?
2. Dans une face latérale, comme $ABFE$, la diagonale (AF) fait avec (AE) un angle de $45°$; et (BE) ?

CORRECTION

Le dessous et le dessus — Dans la face $ABCD$, (AC) et (BD) sont orthogonales à (AE) : (AE) est perpendiculaire au plan (ABC). (EG) et (FH) leur sont parallèles.

$(AC),\ (BD),\ (EG),\ (FH)$

Les faces latérales — Chaque diagonale d'une face latérale fait un angle de $45°$ avec l'arête verticale de cette face, parallèle à (AE) : elle n'est pas orthogonale à (AE).

8 diagonales exclues

Le compte —

$12 - 8 = 4$

Il y a 4 diagonales de faces orthogonales à (AE) : celles des faces perpendiculaires à (AE).

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Il n'y a pas que la face $ABCD$: les diagonales de la face $EFGH$ sont aussi orthogonales à (AE).

8 → 8, ce sont les diagonales des faces latérales : elles font $45°$ avec les arêtes verticales.

EXERCICE 45 · PRATIQUE

Quand la section devient un carré

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. M est un point de l'arête $[BC]$; le plan passant par M et parallèle à (AB) et à (CD) coupe $[BD]$ en N, $[AD]$ en P et $[AC]$ en Q. On admet que (MQ) est parallèle à (AB), que (MN) est parallèle à (CD) et que $MNPQ$ est un parallélogramme. On donne $AB = CD = 10$, et M est le milieu de $[BC]$. Déterminer la nature exacte du quadrilatère $MNPQ$.

Écris la nature du quadrilatère, par exemple : losange.

Réponse attendue : `carré` — aussi acceptées : un carré · c'est un carré · MNPQ est un carré · carre · un carre

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que dit la propriété 15 des droites (MQ) et (MN), parallèles à deux droites orthogonales ?
2. M est le milieu de $[BC]$: calcule MQ dans la face ABC et MN dans la face BCD.

CORRECTION

Propriété 15 — (AB) et (CD) sont orthogonales ; (MQ) et (MN) leur sont respectivement parallèles : elles sont orthogonales, et sécantes en M.

$\widehat{QMN} = 90°$

Deux côtés consécutifs — Par la droite des milieux, dans le triangle ABC puis dans le triangle BCD :

$MQ = \frac{AB}{2} = 5 \quad ; \quad MN = \frac{CD}{2} = 5$

La nature — Un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux est un carré.

$MNPQ$ est un carré

$MNPQ$ est un carré : l'orthogonalité de (AB) et (CD) donne l'angle droit, l'égalité $AB = CD$ avec le milieu M donne les côtés égaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`rectangle / un rectangle / c'est un rectangle / MNPQ est un rectangle` → C'est vrai, mais incomplet : ici $MQ = MN = 5$, le rectangle a deux côtés consécutifs égaux.

`losange / un losange / c'est un losange / parallélogramme / un parallélogramme / c'est un parallélogramme` → C'est vrai, mais incomplet : avec (AB) et (CD) orthogonales, l'angle en M est droit, et $MQ = MN$.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Le périmètre de la section au milieu

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. M est un point de l'arête $[BC]$; le plan passant par M et parallèle à (AB) et à (CD) coupe $[BD]$ en N, $[AD]$ en P et $[AC]$ en Q. On admet que $MNPQ$ est un rectangle, avec (MQ) parallèle à (AB) et (MN) parallèle à (CD). On donne $AB = 6$, $CD = 9$, et M est le milieu de $[BC]$. Calculer le périmètre du rectangle $MNPQ$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle ABC, (MQ) est parallèle à (AB) et M est le milieu de $[BC]$: que vaut MQ ?
2. De même, dans le triangle BCD, (MN) est parallèle à (CD).

CORRECTION

MQ — Dans le triangle ABC, la droite passant par le milieu M de $[BC]$ et parallèle à (AB) coupe $[AC]$ en son milieu Q.

$MQ = \frac{AB}{2} = 3$

MN — De même dans le triangle BCD, N est le milieu de $[BD]$.

$MN = \frac{CD}{2} = 4{,}5$

Le périmètre —

$2 \times (3 + 4{,}5) = 15$

Le périmètre vaut 15 : chaque côté de la section se calcule par la droite des milieux, dans une face du tétraèdre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7.5 / 7,5` → $7{,}5$, c'est $MQ + MN$: le périmètre compte les quatre côtés.

`30` → Les côtés du rectangle sont la moitié de AB et de CD, puisque M est un milieu.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

L'aire de la section au milieu

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. M est un point de l'arête $[BC]$; le plan passant par M et parallèle à (AB) et à (CD) coupe $[BD]$ en N, $[AD]$

en P et $[AC]$ en Q. On admet que $MNPQ$ est un rectangle, avec (MQ) parallèle à (AB) et (MN) parallèle à (CD). On donne $AB = 6$, $CD = 9$, et M est le milieu de $[BC]$. Calculer l'aire du rectangle $MNPQ$, sans écrire l'unité.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 27/2 — aussi acceptées : 13.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les deux côtés MQ et MN par la propriété de la droite des milieux, dans les faces ABC et BCD.
2. L'aire d'un rectangle est le produit de ses deux dimensions.

CORRECTION

Les côtés — M est le milieu de $[BC]$: Q et N sont les milieux de $[AC]$ et de $[BD]$.

$MQ = \frac{6}{2} = 3 \quad ; \quad MN = \frac{9}{2} = 4{,}5$

L'aire —

$3 \times 4{,}5 = 13{,}5$

L'aire de $MNPQ$ vaut $13{,}5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

27 → Les deux côtés sont divisés par 2 : $MQ = 3$ et $MN = 4{,}5$.

54 → $54 = 6 \times 9$: ce sont les arêtes du tétraèdre, pas les côtés de la section.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

Un périmètre qui ne bouge pas

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. M est un point de l'arête $[BC]$; le plan passant par M et parallèle à (AB) et à (CD) coupe $[BD]$ en N, $[AD]$ en P et $[AC]$ en Q. On admet que $MNPQ$ est un rectangle, avec (MQ) parallèle à (AB) et (MN) parallèle à (CD). On donne $AB = CD = 8$ et $BM = \frac{1}{4}BC$. Calculer le périmètre du rectangle $MNPQ$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle ABC, le théorème de Thalès donne $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB}$. Que vaut $\frac{CM}{CB}$?
2. Dans le triangle BCD, $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC}$.

CORRECTION

MQ — Dans le triangle ABC, (MQ) est parallèle à (AB), et $CM = \frac{3}{4}CB$.

$MQ = \frac{3}{4} \times 8 = 6$

MN — Dans le triangle BCD, (MN) est parallèle à (CD), et $BM = \frac{1}{4}BC$.

$MN = \frac{1}{4} \times 8 = 2$

Le périmètre —

$2 \times (6 + 2) = 16$

Le périmètre vaut 16. Quand $AB = CD$, on trouve toujours $2AB$, où que soit M : les deux rapports se complètent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → 8, c'est $MQ + MN$: le périmètre compte les quatre côtés.

EXERCICE 49 · DEFI

Quand la section est un carré

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. M est un point de l'arête $[BC]$; le plan passant par M et parallèle à (AB) et à (CD) coupe $[BD]$ en N, $[AD]$ en P et $[AC]$ en Q. On admet que $MNPQ$ est un rectangle, avec (MQ) parallèle à (AB) et (MN) parallèle à (CD). On donne $AB = 6$ et $CD = 12$, et on pose $t = \frac{BM}{BC}$. Déterminer la valeur de t pour laquelle $MNPQ$ est un carré.

Écris la valeur de t, par exemple 2/5.

Réponse attendue : `1/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime MN et MQ en fonction de t, avec le théorème de Thalès dans les faces BCD et ABC.
2. $\frac{CM}{CB} = 1 - t$. Le rectangle est un carré lorsque $MN = MQ$.

CORRECTION

MN — Dans le triangle BCD, (MN) est parallèle à (CD).

$MN = t \times CD = 12t$

MQ — Dans le triangle ABC, (MQ) est parallèle à (AB), et $\frac{CM}{CB} = 1 - t$.

$MQ = (1 - t) \times AB = 6(1 - t)$

Un carré — Le rectangle $MNPQ$ est un carré lorsque $MN = MQ$.

$12t = 6 - 6t \iff t = \frac{1}{3}$

$t = \frac{1}{3}$: le carré a alors pour côté 4. On traduit la condition géométrique par une équation en t.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` / `0.5` → Au milieu, $MN = 6$ et $MQ = 3$: les arêtes $[AB]$ et $[CD]$ n'ont pas la même longueur.

`2/3` → Avec $t = \frac{2}{3}$, $MN = 8$ et $MQ = 2$: tu as échangé les rapports. MN est proportionnel à BM.

`0.33` / `0,33` / `0.333` / `0,333` / `0.3` / `0,3` → C'est une valeur approchée : donne la valeur exacte de t, une fraction.

EXERCICE 50 · DEFI

La plus grande section

$ABCD$ est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. M est un point de l'arête $[BC]$; le plan passant par M et parallèle à (AB) et à (CD) coupe $[BD]$ en N, $[AD]$ en P et $[AC]$ en Q. On admet que $MNPQ$ est un rectangle, avec (MQ) parallèle à (AB) et (MN) parallèle à (CD). On donne $AB = 6$ et $CD = 12$, et M décrit l'arête $[BC]$. Déterminer l'aire maximale du rectangle $MNPQ$, sans écrire l'unité.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $t = \frac{BM}{BC}$: par le théorème de Thalès, $MN = 12t$ et $MQ = 6(1-t)$.
2. L'aire vaut $72t(1-t)$: pour quelle valeur de t ce trinôme est-il le plus grand ?

CORRECTION

Les côtés — Avec $t = \frac{BM}{BC}$, entre 0 et 1 :

$$MN = 12t \quad ; \quad MQ = 6(1-t)$$

L'aire —

$$\mathcal{A}(t) = 72t(1-t) = -72\left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 + 18$$

Le maximum — Le carré est nul pour $t = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand M est le milieu de $[BC]$.

$$\mathcal{A}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 18$$

L'aire maximale vaut 18, atteinte quand M est le milieu de $[BC]$: on écrit l'aire comme un trinôme en t et on cherche son sommet.

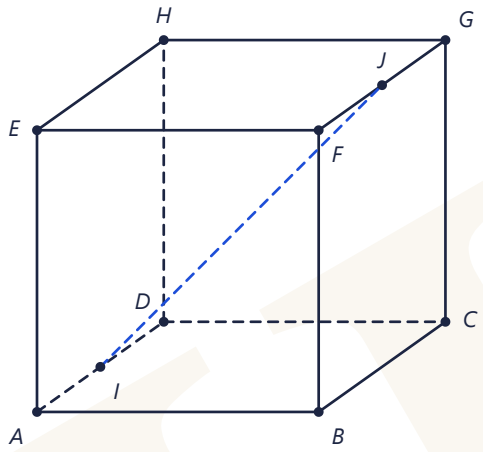
PIÈGES ANTICIPÉS

`72` → $72 = 6 \times 12$: les côtés de la section sont plus courts que les arêtes.

`1/2 / 0.5` → $\frac{1}{2}$ est la position de M qui donne le maximum : on demande l'aire.

EXERCICE 51 · BASE **La parallèle à (IJ) menée par A**

$ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont les milieux respectifs de $[AD]$ et de $[FG]$. On admet que $AIJF$ est un parallélogramme. Nommer la droite passant par A et parallèle à la droite (IJ).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. I est le milieu de [AD], J celui de [FG] ; le segment [IJ], qui traverse le cube, est tracé en bleu, en pointillés.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : (AF) — aussi acceptées : AF · la droite (AF) · la droite AF · droite (AF) · droite AF · c'est (AF) · c'est la droite (AF) · (FA) · FA · la droite (FA) · la droite FA · droite (FA) · droite FA · c'est (FA) · c'est la droite (FA)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles.
2. Dans $AIJF$, quel côté est opposé à $[IJ]$?

CORRECTION

Les côtés opposés — Dans le parallélogramme $AIJF$, les côtés $[IJ]$ et $[FA]$ sont opposés.

$(AF) \parallel (IJ)$

C'est la droite (AF), diagonale de la face $ABFE$: pour étudier la direction de (IJ), on peut la remplacer par (AF).

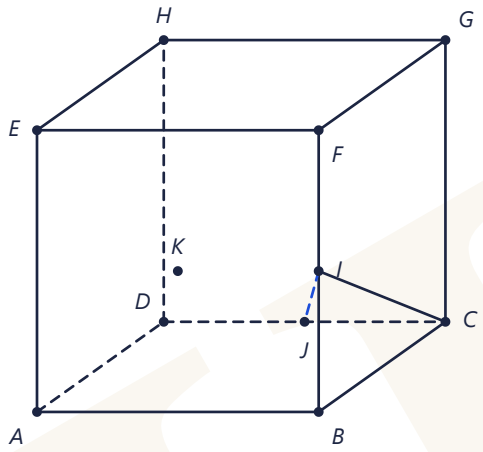
PIÈGES ANTICIPÉS

`(AI) / AI / (IA) / IA / (AD) / AD / (DA) / DA` → $[AI]$ est un côté consécutif à $[IJ]$: la droite (AI), c'est-à-dire (AD), coupe (IJ) en I.

`(AJ) / AJ / (JA) / JA` → $[AJ]$ est une diagonale du parallélogramme $AIJF$: elle coupe (IJ) en J.

EXERCICE 52 · PRATIQUE **La longueur IJ**

$ABCDEFGH$ est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[FB]$, $[CD]$ et $[BE]$. L'arête du cube mesure 2. Calculer la valeur exacte de IJ.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. I est le milieu de [FB], J celui de [CD], K celui de [BE].

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `sqrt(6)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle IJC est rectangle en C : (CD) est perpendiculaire au plan (BCG), qui contient (CI).
2. Calcule d'abord IC dans le triangle IBC, rectangle en B.

CORRECTION

IC — Le triangle IBC est rectangle en B, avec $IB = 1$ et $BC = 2$.

$IC^2 = 1 + 4 = 5$

Un angle droit en C — (CD) est perpendiculaire à (CB) et à (CG) : elle est perpendiculaire au plan (BCG), donc à (CI). Le triangle IJC est rectangle en C, avec $CJ = 1$.

$IJ^2 = IC^2 + CJ^2 = 5 + 1 = 6$

La longueur —

$IJ = \sqrt{6}$

$IJ = \sqrt{6}$: une droite perpendiculaire à un plan donne un angle droit avec toute droite de ce plan, et Pythagore s'applique.

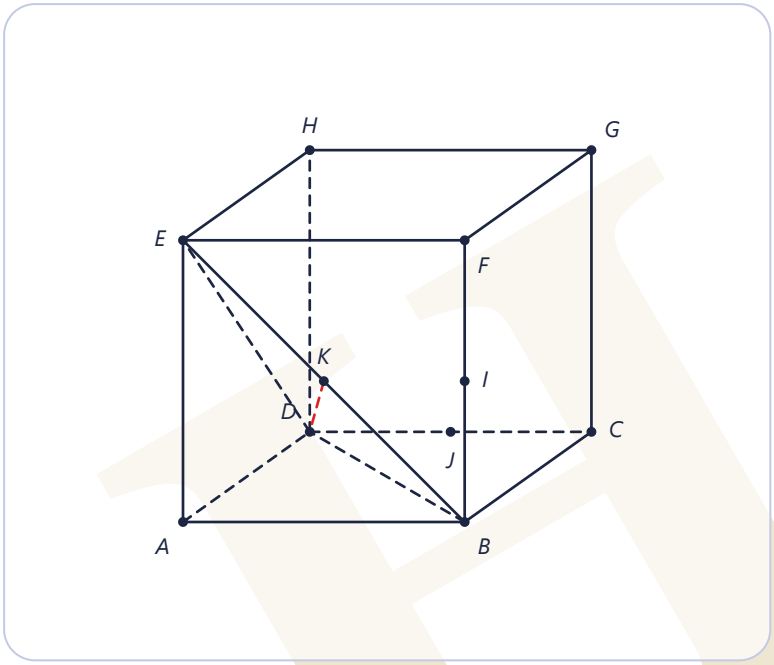
PIÈGES ANTICIPÉS

`2.45` / `2,45` / `2.4` / `2,4` / `2.449` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, $\sqrt{6}$.

`sqrt(5)` → $\sqrt{5}$, c'est IC : il reste le triangle IJC, rectangle en C.

EXERCICE 53 · RAISONNEMENT La hauteur du triangle BDE

$ABCDEFGH$ est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[FB]$, $[CD]$ et $[BE]$. L'arête du cube mesure 4. Calculer la valeur exacte de DK.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. I est le milieu de [FB], J celui de [CD], K celui de [BE]. Le triangle BDE est tracé, [BD] et [DE] en pointillés ; le segment [DK] est tracé en rouge, en pointillés.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `2*sqrt(6)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[DB]$, $[DE]$ et $[BE]$ sont trois diagonales de faces : quelle est la nature du triangle BDE ?
2. Dans un triangle équilatéral de côté c, la médiane mesure $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

CORRECTION

Le triangle BDE — $[DB]$, $[DE]$ et $[BE]$ sont des diagonales de faces carrées de côté 4 : le triangle BDE est équilatéral.

$BD = DE = BE = 4\sqrt{2}$

La médiane — K est le milieu de $[BE]$: $[DK]$ est une médiane, donc une hauteur.

$DK = \frac{4\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$

$DK = 2\sqrt{6}$. Comme (DK) est aussi une hauteur, elle est perpendiculaire à (BE) : c'est ainsi qu'on montre que (IJ), parallèle à (DK), est orthogonale à (BE).

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(2)` → $4\sqrt{2}$ est le côté du triangle BDE : DK en est la hauteur.

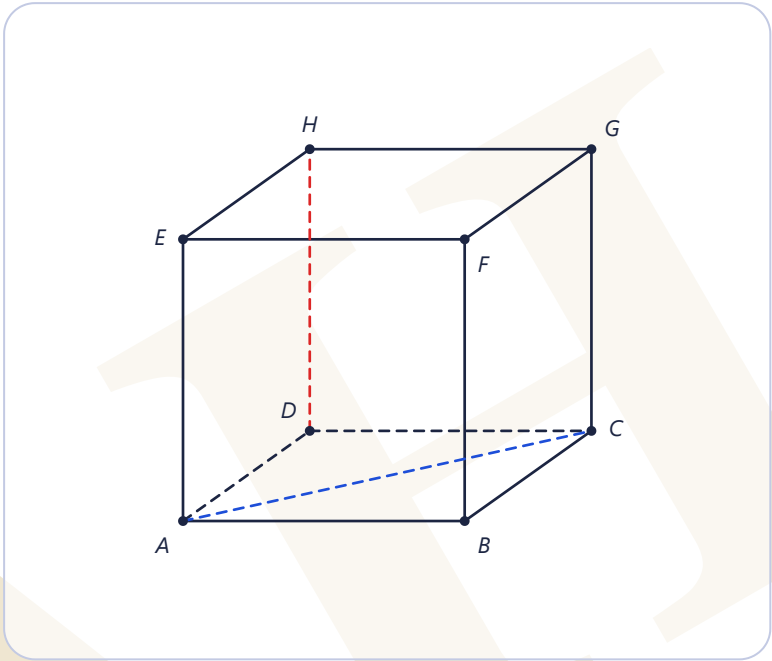
`2*sqrt(2)` → $2\sqrt{2}$, c'est BK, la moitié du côté : DK se calcule par Pythagore dans le triangle DKB.

`4.9` / `4,9` / `4.90` / `4,90` / `4.89` / `4,89` / `4.899` / `4,899` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 54 · BASE

L'arête (HD) et la diagonale (AC)

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, on sait que la droite (HD) est perpendiculaire au plan (ABC). Dire si les droites (HD) et (AC) sont orthogonales.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [DH] est repassée en rouge ; la diagonale [AC] de la face ABCD est tracée en bleu.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui, elles le sont · oui ils le sont · oui, ils le sont · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · orthogonales · oui orthogonales · oui, orthogonales · elles sont orthogonales · oui elles sont orthogonales · oui, elles sont orthogonales · ils sont orthogonales · oui ils sont orthogonales · oui, ils sont orthogonales

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite (AC) est-elle contenue dans le plan (ABC) ?
2. Une droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

CORRECTION

Dans le plan — A et C sont deux points du plan (ABC) : la droite (AC) y est contenue.

$(AC) \subset (ABC)$

Propriété 16 — (HD) est perpendiculaire au plan (ABC) : elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

(HD) est orthogonale à (AC)

Oui : (HD) et (AC) sont orthogonales, bien qu'elles ne se coupent pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

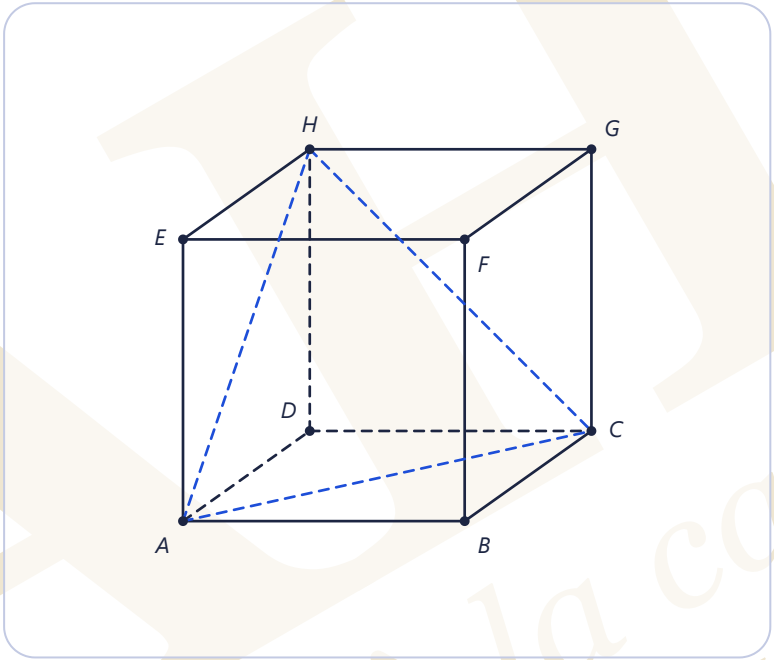
`non / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / elles ne le sont pas / ils ne le sont pas / c'est non / faux / le / lé / la / pas`

orthogonales / non pas orthogonales / non, pas orthogonales / elles ne sont pas orthogonales / non elles ne sont pas orthogonales / non, elles ne sont pas orthogonales / ils ne sont pas orthogonales / non ils ne sont pas orthogonales / non, ils ne sont pas orthogonales → Elles ne se coupent pas, mais (HD) est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (AC).

EXERCICE 55 · PRATIQUE

L'aire du triangle AHC

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle AHC, sans écrire l'unité.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le triangle AHC est tracé en bleu : [AC] dans la face du dessous, [AH] dans la face de gauche, [HC] dans la face de derrière.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `8*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AH]$, $[HC]$ et $[CA]$ sont des diagonales de faces : quelle est la nature du triangle AHC ?
2. L'aire d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

CORRECTION

Équilatéral — Les trois côtés sont des diagonales de carrés de côté 4.

$AH = HC = CA = 4\sqrt{2}$

L'aire —

$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(4\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 32 = 8\sqrt{3}$

L'aire du triangle AHC vaut $8\sqrt{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → 8 est l'aire du triangle ACD, la moitié d'une face : le triangle AHC n'est pas dans une face.

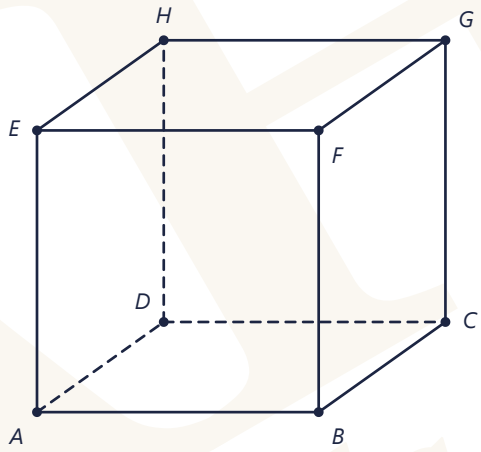
`16*sqrt(3)` → Tu as oublié de diviser par 2 : l'aire est la moitié de la base fois la hauteur.

`13.86` / `13,86` / `13.9` / `13,9` / `13.85` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 56 · BASE

Une arête perpendiculaire à la face de droite

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, nommer une arête du cube perpendiculaire au plan (BCG).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La face BCGF est la face de droite.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(AB)` — aussi acceptées : AB · la droite (AB) · la droite AB · droite (AB) · droite AB · c'est (AB) · c'est la droite (AB) · (BA) · BA · la droite (BA) · la droite BA · droite (BA) · droite BA · c'est (BA) · c'est la droite (BA) · (DC) · DC · la droite (DC) · la droite DC · droite (DC) · droite DC · c'est (DC) · c'est la droite (DC) · (CD) · CD · la droite (CD) · la droite CD · droite (CD) · droite CD · c'est (CD) · c'est la droite (CD) · (EF) · EF · la droite (EF) · la droite EF · droite (EF) · droite EF · c'est (EF) · c'est la droite (EF) · (FE) · FE · la droite (FE) · la droite FE · droite (FE) · droite FE · c'est (FE) · c'est la droite (FE) · (HG) · HG · la droite (HG) · la droite HG · droite (HG) · droite HG · c'est (HG) · c'est la droite (HG) · (GH) · GH · la droite (GH) · la droite GH · droite (GH) · droite GH · c'est (GH) · c'est la droite (GH)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche une arête orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCG), par exemple (BC) et (BF).
2. Quelle arête part de B sans être dans la face $BCGF$?

CORRECTION

Deux droites sécantes — Dans le carré $ABCD$, (AB) est perpendiculaire à (BC) ; dans le carré $ABFE$, à (BF). (BC) et (BF) sont sécantes en B dans le plan (BCG).

$(AB) \perp (BCG)$

Les autres — (DC), (EF) et (HG) sont parallèles à (AB) : elles aussi sont perpendiculaires au plan (BCG).

(AB), (DC), (EF), (HG)

Les arêtes (AB), (DC), (EF) et (HG) conviennent : chacune est orthogonale à deux droites sécantes de la face $BCGF$.

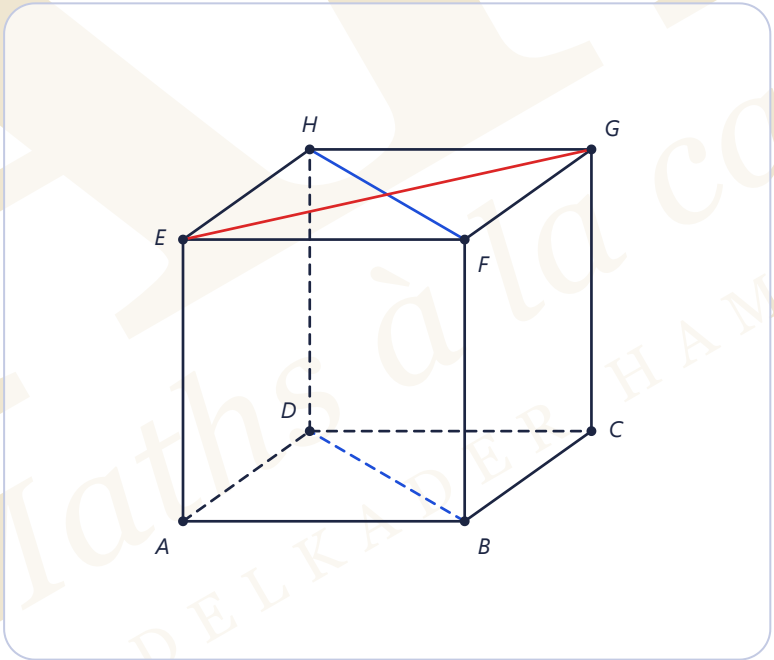
PIÈGES ANTICIPÉS

`(BF)` / `BF` / `(FB)` / `FB` / `(BC)` / `BC` / `(CB)` / `CB` / `(CG)` / `CG` / `(GC)` / `GC` / `(FG)` / `FG` / `(GF)` / `GF` → Cette arête est contenue dans le plan (BCG) : elle ne peut pas lui être perpendiculaire.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Une diagonale et un plan diagonal

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, dire si la droite (EG) est perpendiculaire au plan (BDH).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le rectangle BDHF est tracé : [BD] en pointillés, [FH] en trait plein. La diagonale [EG] de la face du dessus est tracée en rouge.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elle l'est · oui, elle l'est · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · perpendiculaire · oui perpendiculaire · oui, perpendiculaire · elle est perpendiculaire · oui elle est perpendiculaire · oui, elle est perpendiculaire · elle est perpendiculaire au plan · oui elle est perpendiculaire au plan · oui, elle est perpendiculaire au plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (BDH) contient les droites (FH) et (HD), sécantes en H.
2. (EG) est-elle perpendiculaire à (FH) dans le carré $EFGH$? Est-elle orthogonale à (HD), perpendiculaire au plan (EFG) ?

CORRECTION

Dans le carré EFGH — Les diagonales du carré $EFGH$ sont perpendiculaires.

$(EG) \perp (FH)$

L'arête (HD) — (HD) est perpendiculaire à (HE) et à (HG) : elle est perpendiculaire au plan (EFG), donc orthogonale à (EG) (propriété 16).

(EG) est orthogonale à (HD)

Deux droites sécantes — (FH) et (HD) sont sécantes en H et contenues dans le plan (BDH).

$(EG) \perp (BDH)$

Oui : (EG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDH), elle lui est perpendiculaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elle ne l'est pas / non, elle ne l'est pas / elle ne l'est pas / c'est non / faux / le / lé / la / pas perpendiculaire / non pas perpendiculaire / elle n'est pas perpendiculaire / non elle n'est pas perpendiculaire / non, elle n'est pas perpendiculaire / elle n'est pas perpendiculaire au plan` → (EG) est perpendiculaire à (FH) et orthogonale à (HD) : deux droites sécantes du plan (BDH).

EXERCICE 58 · PRATIQUE

Deux poteaux

Sur un terrain plat, un poteau $[AB]$ est perpendiculaire au sol, son pied A étant au sol. Un second poteau $[CD]$, de pied C au sol, est parallèle au premier. On donne $AB = 7$ m, $CD = 3$ m et $AC = 3$ m. Calculer la distance BD entre les sommets des deux poteaux, en m.

Donne la longueur en m.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la propriété 17 a), le poteau $[CD]$ est lui aussi perpendiculaire au sol : il est orthogonal à (AC).
2. Place le point K de $[AB]$ tel que $AK = 3$: $ACDK$ est un rectangle et le triangle BKD est rectangle en K.

CORRECTION

Propriété 17 a) — (AB) et (CD) sont parallèles, et le sol est perpendiculaire à (AB) : il est perpendiculaire à (CD). Les angles en A et en C du quadrilatère $ABDC$ sont droits.

$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 90°$

Un rectangle — Soit K le point de $[AB]$ tel que $AK = CD = 3$: $ACDK$ est un rectangle, $KD = AC = 3$ et $BK = 7 - 3 = 4$.

$BK = 4 \quad ; \quad KD = 3$

Pythagore — Dans le triangle BKD, rectangle en K :

$BD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Les sommets des poteaux sont à 5 m l'un de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

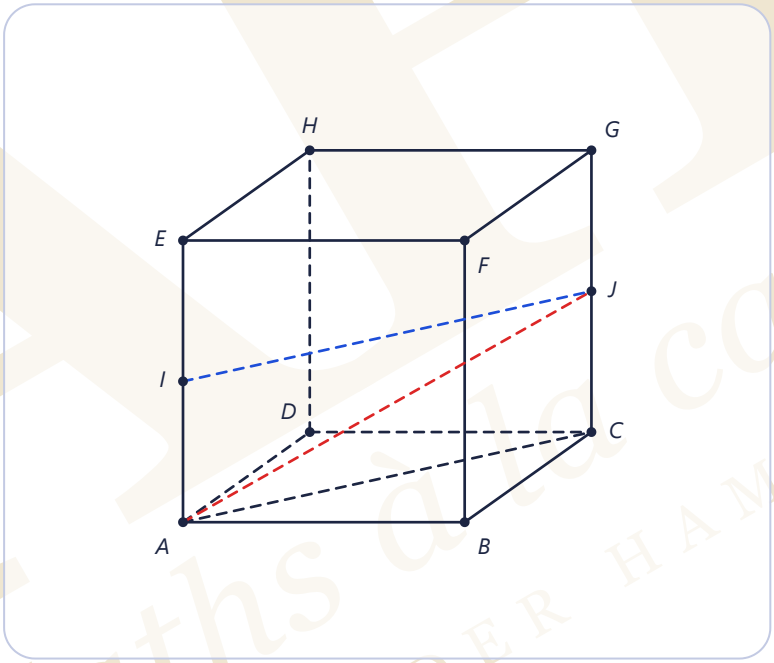
`sqrt(109)` → Tu as ajouté les hauteurs : la différence de hauteur entre les sommets est $7 - 3 = 4$ m.

`sqrt(58)` → $\sqrt{58}$, c'est la distance BC du sommet B au pied C : on demande la distance entre les sommets.

EXERCICE 59 · RAISONNEMENT

Un plan parallèle à la base

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 et I est le milieu de $[AE]$. Le plan P passant par I et parallèle au plan (ABC) coupe la droite (CG) en J. Calculer AJ.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. I est le milieu de [AE] ; J est le point de [CG] situé à la même hauteur. Le segment [AJ] est tracé en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la propriété 17 b), (CG) est perpendiculaire au plan P comme au plan (ABC) : $AIJC$ est un rectangle. Que vaut CJ ?
2. Le triangle ACJ est rectangle en C : calcule d'abord AC.

CORRECTION

Le point J — Les plans P et (ABC) sont parallèles : ils coupent le plan (ACG) suivant deux droites parallèles, (IJ) et (AC). $AIJC$ est un parallélogramme, donc $CJ = AI = 3$.

$CJ = 3$

Un angle droit en C — (CG) est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (AC) : le triangle ACJ est rectangle en C, avec $AC = 6\sqrt{2}$.

$AJ^2 = AC^2 + CJ^2 = 72 + 9 = 81$

La longueur —

$AJ = 9$

$AJ = 9$: J est le milieu de $[CG]$, et l'angle droit en C vient de l'arête perpendiculaire à la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(3)` → $6\sqrt{3}$, c'est AG : J n'est pas en G mais au milieu de $[CG]$.

`6*sqrt(2)` → $6\sqrt{2}$, c'est AC : il reste à monter de $CJ = 3$.

EXERCICE 60 · BASE

Le volume d'un tétraèdre trirectangle

$ABCD$ est un tétraèdre trirectangle en A : les triangles ABC, ABD et ACD sont rectangles en A. On donne $AB = 2$, $AC = 5$ et $AD = 6$. Calculer le volume du tétraèdre, sans écrire l'unité.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AD) est orthogonale à (AB) et à (AC), sécantes en A : elle est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Le volume d'une pyramide est le tiers de l'aire de la base fois la hauteur.

CORRECTION

La hauteur — (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) : AD est la hauteur issue de D.

$h = AD = 6$

La base — Le triangle ABC est rectangle en A.

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{2 \times 5}{2} = 5$

Le volume —

$V = \frac{1}{3} \times 5 \times 6 = 10$

Le volume vaut 10 : dans un tétraèdre trirectangle, une arête issue du sommet de l'angle droit est une hauteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → 30, c'est l'aire de la base fois la hauteur : le volume d'une pyramide en est le tiers.

`20` → La base est un triangle : son aire est $\frac{2 \times 5}{2} = 5$, pas 10.

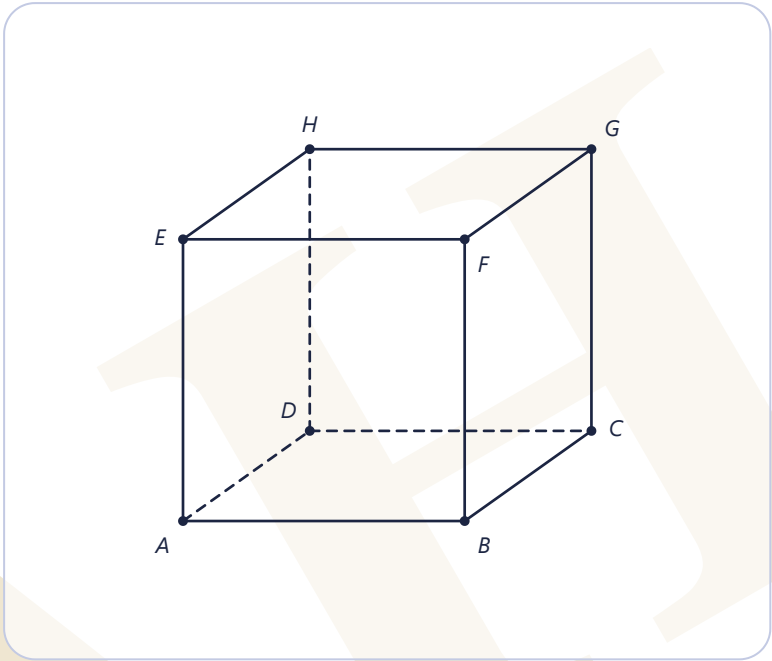
`60` → $60 = 2 \times 5 \times 6$, c'est le volume d'un pavé : le tétraèdre en est le sixième.

Maths à la carte — ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 61 · BASE

Le projeté d'un sommet sur la base

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, déterminer le projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : C — aussi acceptées : le point C · point C · c'est C · c'est le point C · en C · au point C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche la droite passant par G et perpendiculaire au plan (ABC) : c'est une arête.
2. Où cette arête perce-t-elle le plan (ABC) ?

CORRECTION

La perpendiculaire — (GC) est perpendiculaire à (CB) et à (CD), sécantes en C : elle est perpendiculaire au plan (ABC).

$(GC) \perp (ABC)$

Le point de percée — Elle perce le plan (ABC) en C.

C

Le projeté orthogonal de G sur le plan (ABC) est le point C.

PIÈGES ANTICIPÉS

H / F → Ce point n'est pas dans le plan (ABC) : le projeté est sur la face du dessous.

A → (GA) traverse le cube en diagonale : elle n'est pas perpendiculaire au plan (ABC).

EXERCICE 62 · PRATIQUE

Le sommet d'une pyramide régulière

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base est un carré $ABCD$ de côté 8 et de centre O. Le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) est O, et $SO = 3$. Calculer la valeur exacte de SA.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `sqrt(41)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (SO) est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (OA) : le triangle SOA est rectangle en O.
2. OA est la moitié de la diagonale du carré.

CORRECTION

OA — La diagonale du carré de côté 8 mesure $8\sqrt{2}$, et O en est le milieu.

$OA = 4\sqrt{2}$

Un angle droit en O — (SO) est perpendiculaire au plan (ABC) : elle est orthogonale à (OA).

$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 9 + 32 = 41$

La longueur —

$SA = \sqrt{41}$

$SA = \sqrt{41}$: le projeté orthogonal donne un triangle rectangle avec toute droite du plan qui passe par lui.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 vient de $OA = 4$: mais 4 est la moitié du côté, pas la moitié de la diagonale.

`sqrt(137)` → Tu as pris la diagonale entière : O est le milieu de $[AC]$, $OA = 4\sqrt{2}$.

`6.4 / 6,4 / 6.40 / 6,40 / 6.403` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 63 · PRATIQUE

Orthogonale à une droite perpendiculaire

Réponds par vrai ou faux : « Si une droite D est perpendiculaire à un plan P, alors toute droite orthogonale à D est contenue dans P ».

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux · non, c'est faux · fausse · c'est fausse · non, c'est fausse · non c'est fausse · non, faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la propriété 18 c) : quelle condition manque-t-il sur la droite orthogonale à D ?
2. Dans un cube $ABCDEFGH$, (AE) est perpendiculaire au plan (ABC). La droite (EF) est-elle orthogonale à (AE) ? Est-elle dans le plan (ABC) ?

CORRECTION

Un contre-exemple — Dans un cube, (AE) est perpendiculaire au plan (ABC), et (EF) est orthogonale à (AE). Mais (EF) est dans le plan de la face du dessus, parallèle à (ABC).

$(EF) \not\subset (ABC)$

La propriété 18 c) — Il faut en plus que la droite passe par un point du plan P.

et passant par un point de P

Faux : une droite orthogonale à D est contenue dans P seulement si elle passe par un point de P ; sinon elle lui est parallèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → Il manque une condition : (EF) est orthogonale à (AE) sans être dans le plan (ABC).

EXERCICE 64 · PRATIQUE

Une lampe au-dessus d'une table

Une lampe L est suspendue au-dessus d'une table horizontale. Son projeté orthogonal sur le plan de la table est le point K, avec $LK = 2{,}4$ m. Un verre posé en un point N de la table est à $1{,}8$ m de K. Calculer la distance LN entre la lampe et le verre, en m.

Donne la longueur en m.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (LK) est perpendiculaire au plan de la table, qui contient (KN) : quel angle fait-elle avec (KN) ?
2. Applique le théorème de Pythagore dans le triangle LKN.

CORRECTION

Un angle droit — (LK) est perpendiculaire au plan de la table : elle est orthogonale à la droite (KN) de ce plan.

$\widehat{LKN} = 90°$

Pythagore —

$LN^2 = 2{,}4^2 + 1{,}8^2 = 5{,}76 + 3{,}24 = 9$

La distance —

$LN = 3$

La lampe est à 3 m du verre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4.2 / 4,2` → Les longueurs ne s'ajoutent pas : L, K et N forment un triangle rectangle en K.

`9` → 9, c'est LN^2 : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 65 · RAISONNEMENT

Quand l'orthocentre est un sommet

ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 12$, et H est son orthocentre. T est la droite passant par H et perpendiculaire au plan (ABC), et M est le point de T tel que $MH = 5$. Calculer MB.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Où se coupent les hauteurs d'un triangle rectangle ?
2. Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont deux hauteurs : $H = A$. Le triangle MAB est alors rectangle en A.

CORRECTION

L'orthocentre — Dans le triangle rectangle en A, (AB) est la hauteur issue de B et (AC) celle issue de C : elles se coupent en A.

$$H = A$$

Un angle droit — $T = (MA)$ est perpendiculaire au plan (ABC), qui contient (AB) : le triangle MAB est rectangle en A.

$$MB^2 = MA^2 + AB^2 = 25 + 144 = 169$$

La longueur —

$$MB = 13$$

$MB = 13$: reconnaître l'orthocentre d'un triangle rectangle, c'est reconnaître le sommet de l'angle droit.

PIÈGES ANTICIPÉS

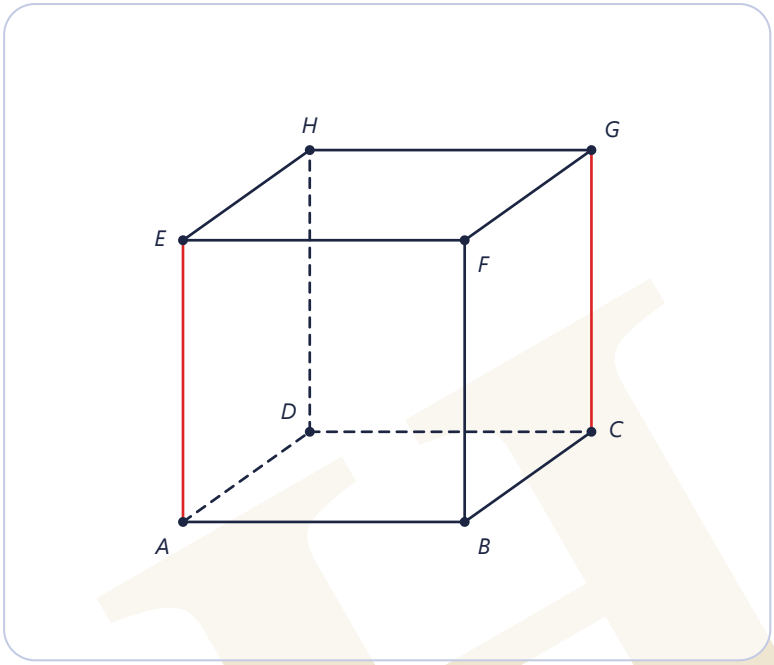
`17` → Les longueurs ne s'ajoutent pas : le triangle MAB est rectangle en A.

`sqrt(119)` → $[MB]$ est l'hypoténuse : $MB^2 = MA^2 + AB^2$, on ajoute les carrés.

EXERCICE 66 · BASE **Deux arêtes perpendiculaires à la base**

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, les droites (AE) et (CG) sont toutes deux perpendiculaires au plan (ABC). Déterminer la position relative des droites (AE) et (CG).

Maths à la carte ABDELKADER HAMMOUTE



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les arêtes [AE] et [CG] sont repassées en rouge.

Écris la position relative, par exemple : sécantes.

Réponse attendue : `parallèles` — aussi acceptées : elles sont parallèles · parallèle · les droites sont parallèles · les droites (AE) et (CG) sont parallèles · (AE) et (CG) sont parallèles · elles sont parallèles entre elles · strictement parallèles · elles sont strictement parallèles · parallèles et distinctes · elles sont parallèles et distinctes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la propriété 19 a) : deux droites perpendiculaires à un même plan…

CORRECTION

Propriété 19 a) — Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

$(AE) \parallel (CG)$

(AE) et (CG) sont parallèles : d'ailleurs $ACGE$ est un rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`orthogonales / elles sont orthogonales / perpendiculaires / elles sont perpendiculaires` → Elles sont perpendiculaires au plan (ABC), mais entre elles, elles sont parallèles.

`sécantes / elles sont sécantes / non coplanaires` → Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles, donc coplanaires et sans point commun ici.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Deux poteaux dans un même plan

Sur un terrain plat, deux poteaux $[AB]$ et $[CD]$ sont plantés perpendiculairement au sol, leurs pieds A et C étant au sol. Dire si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui, elles le sont · oui ils le sont · oui, ils le sont · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · coplanaires · oui coplanaires · oui, coplanaires · elles sont coplanaires · oui elles sont coplanaires · oui, elles sont coplanaires · ils sont coplanaires · oui ils sont coplanaires · oui, ils sont coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que dit la propriété 19 a) des droites (AB) et (CD) ?
2. Deux droites parallèles sont-elles contenues dans un même plan ?

CORRECTION

Propriété 19 a) — (AB) et (CD) sont perpendiculaires au même plan, le sol : elles sont parallèles.

$(AB) \parallel (CD)$

Un plan — Deux droites parallèles distinctes déterminent un plan, qui contient A, B, C et D.

$A,\ B,\ C,\ D$ coplanaires

Oui : les quatre points sont coplanaires, ce qui permet ensuite de raisonner dans le plan des deux poteaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / elles ne le sont pas / ils ne le sont pas / c'est non / faux / le / lé / la / pas coplanaires / non pas coplanaires / non, pas coplanaires / elles ne sont pas coplanaires / non elles ne sont pas coplanaires / non, elles ne sont pas coplanaires / ils ne sont pas coplanaires / non ils ne sont pas coplanaires / non, ils ne sont pas coplanaires` → Les deux poteaux sont parallèles (propriété 19 a) : deux parallèles sont toujours dans un même plan.

EXERCICE 68 · RAISONNEMENT

Deux points du même côté d'un plan

A et B sont deux points situés du même côté d'un plan P, et A', B' sont leurs projetés orthogonaux sur P. On donne $AA' = 5$, $BB' = 2$ et $A'B' = 4$. Calculer AB.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AA') et (BB') sont perpendiculaires à P : elles sont parallèles, et $AA'B'B$ est un trapèze rectangle en A' et B'.
2. Place le point K de $[AA']$ tel que $A'K = 2$: le triangle AKB est rectangle en K.

CORRECTION

Propriété 19 a) — (AA') et (BB') sont perpendiculaires au plan P : elles sont parallèles, et coplanaires. Elles sont orthogonales à $(A'B')$, contenue dans P.

$(AA') \parallel (BB')$

Un rectangle — Soit K le point de $[AA']$ tel que $A'K = BB' = 2$: $KA'B'B$ est un rectangle, $KB = 4$ et $AK = 3$.

$AK = 5 - 2 = 3 \quad ; \quad KB = 4$

Pythagore —

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$AB = 5$: deux perpendiculaires au même plan sont parallèles, et on se ramène à un trapèze rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(65)` → Les points sont du même côté du plan : on retranche les hauteurs, $5 - 2 = 3$.

`sqrt(41)` → $\sqrt{41}$, c'est AB' : il faut tenir compte de la hauteur de B.

EXERCICE 69 · RAISONNEMENT

Deux points de part et d'autre d'un plan

A et B sont deux points situés de part et d'autre d'un plan P, et A', B' sont leurs projetés orthogonaux sur P. On donne $AA' = 5$, $BB' = 3$ et $A'B' = 6$. Calculer AB.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AA') et (BB') sont parallèles et coplanaires ; dans leur plan, prolonge $[AA']$ au-delà de A'.
2. Place le point K de la droite (AA'), de l'autre côté de P, tel que $A'K = 3$: $KA'B'B$ est un rectangle et $AK = 8$.

CORRECTION

Propriété 19 a) — (AA') et (BB') sont perpendiculaires au plan P : elles sont parallèles, donc coplanaires, et orthogonales à $(A'B')$.

$(AA') \parallel (BB')$

Un rectangle — Soit K le point de (AA'), du côté de B, tel que $A'K = 3$: $KA'B'B$ est un rectangle, $KB = 6$, et A' est entre A et K.

$AK = 5 + 3 = 8 \quad ; \quad KB = 6$

Pythagore —

$AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

$AB = 10$: de part et d'autre du plan, les hauteurs s'ajoutent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(10)` → Tu as retranché les hauteurs, comme si A et B étaient du même côté de P : ici elles s'ajoutent, $5 + 3 = 8$.

`14` → Les longueurs ne s'ajoutent pas : on se ramène à un triangle rectangle de côtés 8 et 6.

EXERCICE 70 · PRATIQUE

Retrouver AH

T est une droite perpendiculaire à un plan P en A. D est une droite du plan P ne passant pas par A, H est le projeté orthogonal de A sur D, et M est un point de T distinct de A. On donne $AM = 6$ et $MH = 10$. Calculer AH.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AM) est perpendiculaire au plan P, qui contient (AH) : où est l'angle droit du triangle AMH ?
2. L'hypoténuse est $[MH]$.

CORRECTION

Un angle droit en A — (AM) est perpendiculaire au plan P : elle est orthogonale à (AH).

$\widehat{MAH} = 90°$

Pythagore —

$AH^2 = MH^2 - AM^2 = 100 - 36 = 64$

La longueur —

$AH = 8$

$AH = 8$: $[MH]$ est l'hypoténuse du triangle AMH, rectangle en A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(34)` → $[MH]$ est l'hypoténuse : on retranche les carrés, $100 - 36$.

`4` → Les longueurs ne se retranchent pas : ce sont leurs carrés.

EXERCICE 71 · RAISONNEMENT

L'aire d'une face

ABC est un triangle rectangle en B, avec $AB = 3$ et $BC = 12$. La droite (SA) est perpendiculaire au plan (ABC), et $SA = 4$. Calculer l'aire du triangle SBC, sans écrire l'unité.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $H = B$ est le projeté orthogonal de A sur (BC) : que dit le théorème des trois perpendiculaires des droites (SB) et (BC) ?
2. Le triangle SBC est rectangle en B ; calcule SB dans le triangle SAB.

CORRECTION

Trois perpendiculaires — (SA) est perpendiculaire au plan (ABC) et B est le projeté orthogonal de A sur (BC) : (BC) est perpendiculaire au plan (SAB), donc à (SB).

$\widehat{SBC} = 90°$

SB — Le triangle SAB est rectangle en A.

$SB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

L'aire —

$\mathcal{A}_{SBC} = \frac{SB \times BC}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = 30$

L'aire de SBC vaut 30 : le théorème des trois perpendiculaires donne l'angle droit en B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`18` → 18 est l'aire du triangle ABC : on demande celle de la face SBC.

`60` → L'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

`24` → $[SA]$ n'est pas un côté du triangle SBC : l'angle droit est en B, entre $[SB]$ et $[BC]$.

EXERCICE 72 · DEFI

La distance d'un point à une diagonale

$ABCD$ est un carré de côté 6 et de centre O. La droite (SA) est perpendiculaire au plan (ABC), et $SA = 8$. Calculer la valeur exacte de la distance du point S à la droite (BD), c'est-à-dire la longueur SK, où K est le point de (BD) tel que (SK) soit perpendiculaire à (BD).

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `sqrt(82)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quel est le projeté orthogonal de A sur la droite (BD) ? Pense aux diagonales du carré.
2. Par le théorème des trois perpendiculaires, (SO) est perpendiculaire à (BD) : $K = O$.

CORRECTION

Le projeté de A — Les diagonales du carré sont perpendiculaires et se coupent en O : O est le projeté orthogonal de A sur (BD).

$(AO) \perp (BD)$

Trois perpendiculaires — (BD) est perpendiculaire au plan (SAO), donc (SO) est perpendiculaire à (BD) : le point K est O.

$K = O$

Pythagore — $AO = 3\sqrt{2}$, et le triangle SAO est rectangle en A.

$SO^2 = 64 + 18 = 82 \quad ; \quad SK = \sqrt{82}$

La distance de S à (BD) vaut $\sqrt{82}$: le pied de la perpendiculaire se trouve en projetant d'abord A sur la droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10, c'est SB : (SB) n'est pas perpendiculaire à (BD). Le pied est en O.

`2*sqrt(34)` → Tu as pris $AC = 6\sqrt{2}$: c'est SC. Le pied est le centre O, avec $AO = 3\sqrt{2}$.

`9.06 / 9,06 / 9.1 / 9,1 / 9.055` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

La hauteur d'une pyramide aux arêtes égales

$SABCD$ est une pyramide de sommet S et de base un carré $ABCD$ de centre O ; toutes ses arêtes mesurent 10. On admet que (SO) est perpendiculaire au plan (ABC). Calculer la valeur exacte de SO.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `5*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle SOA est rectangle en O. Que vaut OA ?
2. OA est la moitié de la diagonale du carré de côté 10.

CORRECTION

OA — La diagonale $[AC]$ du carré mesure $10\sqrt{2}$, et O en est le milieu.

$$OA = 5\sqrt{2}$$

Pythagore — (SO) est perpendiculaire au plan (ABC) : le triangle SOA est rectangle en O.

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 100 - 50 = 50$$

La hauteur —

$$SO = 5\sqrt{2}$$

$SO = 5\sqrt{2} = OA$: le point O est à la même distance des cinq sommets de la pyramide.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5*sqrt(3)` → Tu as pris $OA = 5$, la moitié du côté : OA est la moitié de la diagonale, $5\sqrt{2}$.

`7.07 / 7,07 / 7.1 / 7,1 / 7.071` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

Le volume d'une pyramide régulière

$SABCD$ est une pyramide de sommet S et de base un carré $ABCD$ de côté 4 et de centre O, dont les quatre arêtes latérales mesurent 6. Calculer la valeur exacte du volume de la pyramide, sans écrire l'unité.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `32*sqrt(7)/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre que (SO) est perpendiculaire au plan (ABC) : dans les triangles isocèles SAC et SBD, la médiane (SO) est une hauteur.
2. Calcule SO dans le triangle SOA, rectangle en O, avec $OA = 2\sqrt{2}$.

CORRECTION

La hauteur — $SA = SC$ et $SB = SD$: les médianes (SO) des triangles isocèles SAC et SBD sont des hauteurs. (SO) est orthogonale à (AC) et à (BD), sécantes en O.

$$(SO) \perp (ABC)$$

SO — $OA = 2\sqrt{2}$, moitié de la diagonale.

$$SO^2 = 36 - 8 = 28 \quad ; \quad SO = 2\sqrt{7}$$

Le volume —

$$V = \frac{1}{3} \times 16 \times 2\sqrt{7} = \frac{32\sqrt{7}}{3}$$

Le volume vaut $\frac{32\sqrt{7}}{3}$: on prouve d'abord que (SO) est la hauteur, puis Pythagore donne sa longueur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`32*sqrt(7)` → Le volume d'une pyramide est le tiers de l'aire de la base fois la hauteur.

`32` → $32 = \frac{1}{3} \times 16 \times 6$: l'arête latérale n'est pas la hauteur.

`28.22 / 28,22 / 28.2 / 28,2 / 28.221` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 75 · BASE

La distance au milieu

$[AB]$ est un segment de longueur 12 et de milieu I. M est un point de l'espace tel que $MA = MB = 10$. Calculer MI.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le plan (MAB), le triangle MAB est isocèle en M : que dire de la médiane (MI) ?
2. Le triangle MIA est rectangle en I, avec $IA = 6$.

CORRECTION

Un angle droit — $MA = MB$: M est sur le plan médiateur de $[AB]$, et (MI) est perpendiculaire à (AB).

$\widehat{MIA} = 90°$

Pythagore —

$MI^2 = MA^2 - IA^2 = 100 - 36 = 64$

La longueur —

$MI = 8$

$MI = 8.$

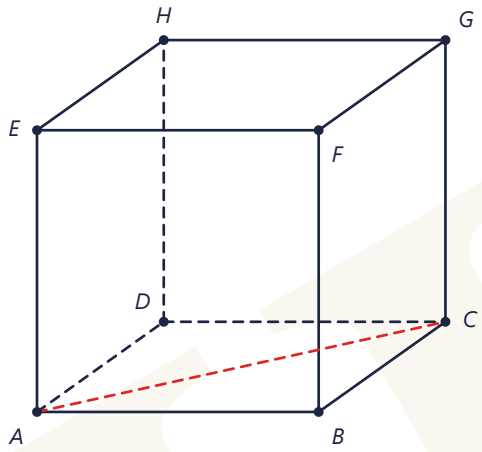
PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(34)` → $[MA]$ est l'hypoténuse du triangle MIA : on retranche les carrés.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Les sommets équidistants de A et de C

$ABCDEFGH$ est un cube. Déterminer le nombre de sommets du cube qui sont équidistants de A et de C.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [AC] de la face du dessous est tracée en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans la face $ABCD$, quels sommets sont à la même distance de A et de C ?
2. Compare aussi FA et FC, HA et HC, EA et EC.

CORRECTION

Dans la base — $BA = BC$ et $DA = DC$: ce sont des arêtes.

$B,\ D$

Au-dessus — $FA = FC$ et $HA = HC$: ce sont des diagonales de faces. En revanche EA est une arête et EC une grande diagonale ; de même pour G.

$F,\ H$

Le compte —

$B,\ D,\ F,\ H$: 4 sommets

Il y a 4 sommets : B, D, F et H. Ils sont tous dans le plan médiateur de $[AC]$, qui est le plan (BDH).

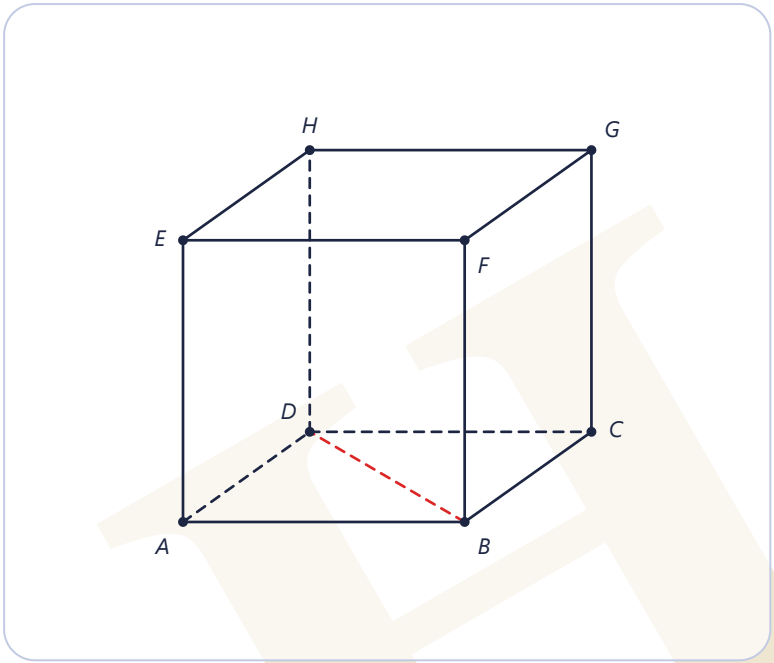
PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Il n'y a pas que B et D : F et H sont aussi équidistants de A et de C.

6 → $EA = a$ mais $EC = a\sqrt{3}$: E et G ne sont pas équidistants de A et de C.

EXERCICE 77 · PRATIQUE Le plan médiateur d'une diagonale

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, déterminer le plan médiateur du segment $[BD]$.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [BD] de la face du dessous est tracée en rouge.

Écris le nom du plan, par exemple (ABC).

Réponse attendue : `(ACG)` — aussi acceptées : ACG · le plan (ACG) · le plan ACG · plan (ACG) · plan ACG · c'est (ACG) · c'est le plan (ACG) · (AGC) · AGC · le plan (AGC) · le plan AGC · plan (AGC) · plan AGC · c'est (AGC) · c'est le plan (AGC) · (CAG) · CAG · le plan (CAG) · le plan CAG · plan (CAG) · plan CAG · c'est (CAG) · c'est le plan (CAG) · (CGA) · CGA · le plan (CGA) · le plan CGA · plan (CGA) · plan CGA · c'est (CGA) · c'est le plan (CGA) · (GAC) · GAC · le plan (GAC) · le plan GAC · plan (GAC) · plan GAC · c'est (GAC) · c'est le plan (GAC) · (GCA) · GCA · le plan (GCA) · le plan GCA · plan (GCA) · plan GCA · c'est (GCA) · c'est le plan (GCA) · (ACE) · ACE · le plan (ACE) · le plan ACE · plan (ACE) · plan ACE · c'est (ACE) · c'est le plan (ACE) · (AEC) · AEC · le plan (AEC) · le plan AEC · plan (AEC) · plan AEC · c'est (AEC) · c'est le plan (AEC) · (CAE) · CAE · le plan (CAE) · le plan CAE · plan (CAE) · plan CAE · c'est (CAE) · c'est le plan (CAE) · (CEA) · CEA · le plan (CEA) · le plan CEA · plan (CEA) · plan CEA · c'est (CEA) · c'est le plan (CEA) · (EAC) · EAC · le plan (EAC) · le plan EAC · plan (EAC) · plan EAC · c'est (EAC) · c'est le plan (EAC) · (ECA) · ECA · le plan (ECA) · le plan ECA · plan (ECA) · plan ECA · c'est (ECA) · c'est le plan (ECA) · (AGE) · AGE · le plan (AGE) · le plan AGE · plan (AGE) · plan AGE · c'est (AGE) · c'est le plan (AGE) · (AEG) · AEG · le plan (AEG) · le plan AEG · plan (AEG) · plan AEG · c'est (AEG) · c'est le plan (AEG) · (GAE) · GAE · le plan (GAE) · le plan GAE · plan (GAE) · plan GAE · c'est (GAE) · c'est le plan (GAE) · (GEA) · GEA · le plan (GEA) · le plan GEA · plan (GEA) · plan GEA · c'est (GEA) · c'est le plan (GEA) · (EAG) · EAG · le plan (EAG) · le plan EAG · plan (EAG) · plan EAG · c'est (EAG) · c'est le plan (EAG) · (EGA) · EGA · le plan (EGA) · le plan EGA · plan (EGA) · plan EGA · c'est (EGA) · c'est le plan (EGA) · (CGE) · CGE · le plan (CGE) · le plan CGE · plan (CGE) · plan CGE · c'est (CGE) · c'est le plan (CGE) · (CEG) · CEG · le plan (CEG) · le plan CEG · plan (CEG) · plan CEG · c'est (CEG) · c'est le plan (CEG) · (GCE) · GCE · le plan (GCE) · le plan GCE · plan (GCE) · plan GCE · c'est (GCE) · c'est le plan (GCE) · (GEC) · GEC · le plan (GEC) · le plan GEC · plan (GEC) · plan GEC · c'est (GEC) · c'est le plan (GEC) · (ECG) · ECG · le plan (ECG) · le plan ECG · plan (ECG) · plan ECG · c'est (ECG) · c'est le plan (ECG) · (EGC) · EGC · le plan (EGC) · le plan EGC · plan (EGC) · plan EGC · c'est (EGC) · c'est le plan (EGC) · (ACGE) · ACGE · le plan (ACGE) · le plan ACGE · plan (ACGE) · plan ACGE · c'est (ACGE) · c'est le plan (ACGE) · (CGEA) · CGEA · le

plan (CGEA) · le plan CGEA · plan (CGEA) · plan CGEA · c'est (CGEA) · c'est le plan (CGEA) · (GEAC) · GEAC · le plan (GEAC) · le plan GEAC · plan (GEAC) · plan GEAC · c'est (GEAC) · c'est le plan (GEAC) · (EACG) · EACG · le plan (EACG) · le plan EACG · plan (EACG) · plan EACG · c'est (EACG) · c'est le plan (EACG) · (EGCA) · EGCA · le plan (EGCA) · le plan EGCA · plan (EGCA) · plan EGCA · c'est (EGCA) · c'est le plan (EGCA) · (GCAE) · GCAE · le plan (GCAE) · le plan GCAE · plan (GCAE) · plan GCAE · c'est (GCAE) · c'est le plan (GCAE) · (CAEG) · CAEG · le plan (CAEG) · le plan CAEG · plan (CAEG) · plan CAEG · c'est (CAEG) · c'est le plan (CAEG) · (AEGC) · AEGC · le plan (AEGC) · le plan AEGC · plan (AEGC) · plan AEGC · c'est (AEGC) · c'est le plan (AEGC)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche trois sommets non alignés équidistants de B et de D.
2. $AB = AD$ et $CB = CD$. Et G, E ?

CORRECTION

Des points équidistants — $AB = AD$ et $CB = CD$ sont des arêtes ; $GB = GD$ et $EB = ED$ sont des diagonales de faces.

$A,\ C,\ G,\ E$ sont équidistants de B et de D

Le plan — A, C et G ne sont pas alignés : ils déterminent le plan médiateur de $[BD]$.

le plan (ACG)

Le plan médiateur de $[BD]$ est le plan (ACG), celui du rectangle $ACGE$.

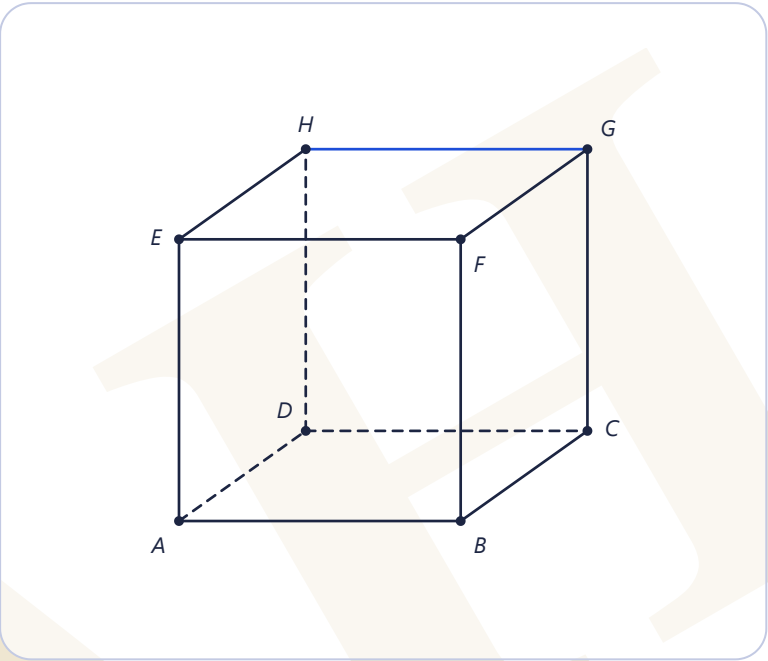
PIÈGES ANTICIPÉS

(BDH) / BDH / le plan (BDH) / le plan BDH / plan (BDH) / plan BDH / c'est (BDH) / c'est le plan (BDH) / (BHD) / BHD / le plan (BHD) / le plan BHD / plan (BHD) / plan BHD / c'est (BHD) / c'est le plan (BHD) / (DBH) / DBH / le plan (DBH) / le plan DBH / plan (DBH) / plan DBH / c'est (DBH) / c'est le plan (DBH) / (DHB) / DHB / le plan (DHB) / le plan DHB / plan (DHB) / plan DHB / c'est (DHB) / c'est le plan (DHB) / (HBD) / HBD / le plan (HBD) / le plan HBD / plan (HBD) / plan HBD / c'est (HBD) / c'est le plan (HBD) / (HDB) / HDB / le plan (HDB) / le plan HDB / plan (HDB) / plan HDB / c'est (HDB) / c'est le plan (HDB) / (BDF) / BDF / le plan (BDF) / le plan BDF / plan (BDF) / plan BDF / c'est (BDF) / c'est le plan (BDF) / (BFD) / BFD / le plan (BFD) / le plan BFD / plan (BFD) / plan BFD / c'est (BFD) / c'est le plan (BFD) / (DBF) / DBF / le plan (DBF) / le plan DBF / plan (DBF) / plan DBF / c'est (DBF) / c'est le plan (DBF) / (DFB) / DFB / le plan (DFB) / le plan DFB / plan (DFB) / plan DFB / c'est (DFB) / c'est le plan (DFB) / (FBD) / FBD / le plan (FBD) / le plan FBD / plan (FBD) / plan FBD / c'est (FBD) / c'est le plan (FBD) / (FDB) / FDB / le plan (FDB) / le plan FDB / plan (FDB) / plan FDB / c'est (FDB) / c'est le plan (FDB) / (BDHF) / BDHF / le plan (BDHF) / le plan BDHF / plan (BDHF) / plan BDHF / c'est (BDHF) / c'est le plan (BDHF) / (DHFB) / DHFB / le plan (DHFB) / le plan DHFB / plan (DHFB) / plan DHFB / c'est (DHFB) / c'est le plan (DHFB) / (HFBD) / HFBD / le plan (HFBD) / le plan HFBD / plan (HFBD) / plan HFBD / c'est (HFBD) / c'est le plan (HFBD) / (FBDH) / FBDH / le plan (FBDH) / le plan FBDH / plan (FBDH) / plan FBDH / c'est (FBDH) / c'est le plan (FBDH) / (FHDB) / FHDB / le plan (FHDB) / le plan FHDB / plan (FHDB) / plan FHDB / c'est (FHDB) / c'est le plan (FHDB) / (HDBF) / HDBF / le plan (HDBF) / le plan HDBF / plan (HDBF) / plan HDBF / c'est (HDBF) / c'est le plan (HDBF) / (DBFH) / DBFH / le plan (DBFH) / le plan DBFH / plan (DBFH) / plan DBFH / c'est (DBFH) / c'est le plan (DBFH) / (BFHD) / BFHD / le plan (BFHD) / le plan BFHD / plan (BFHD) / plan BFHD / c'est (BFHD) / c'est le plan (BFHD) → Ce plan contient $[BD]$: le plan médiateur coupe le segment en son milieu, perpendiculairement.

EXERCICE 78 · RAISONNEMENT

Un point d'une arête équidistant de A et de B

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2. M est le point de l'arête $[GH]$ tel que $MA = MB$. Calculer MA.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [GH] est repassée en bleu.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est dans le plan médiateur de $[AB]$. Ce plan passe aussi par les milieux de $[DC]$, $[EF]$ et $[HG]$.
2. M est le milieu de $[GH]$. Soit L le milieu de $[DC]$: calcule AL, puis utilise le triangle ALM rectangle en L.

CORRECTION

Le point M — Les points de $[GH]$ équidistants de A et de B sont dans le plan médiateur de $[AB]$, perpendiculaire à (AB) en son milieu : il coupe $[GH]$, parallèle à (AB), en son milieu. Donc M est le milieu de $[GH]$.

$HM = 1$

Le milieu L de [DC] — (ML) est parallèle à (DH) : elle est perpendiculaire au plan (ABC), et le triangle ALM est rectangle en L. Dans le triangle ADL, rectangle en D : $AL^2 = 4 + 1 = 5$.

$AL^2 = 5 \quad ; \quad ML = 2$

Pythagore —

$MA^2 = AL^2 + ML^2 = 5 + 4 = 9 \quad ; \quad MA = 3$

$MA = 3$: le plan médiateur situe le point, puis deux triangles rectangles donnent la distance.

PIÈGES ANTICIPÉS

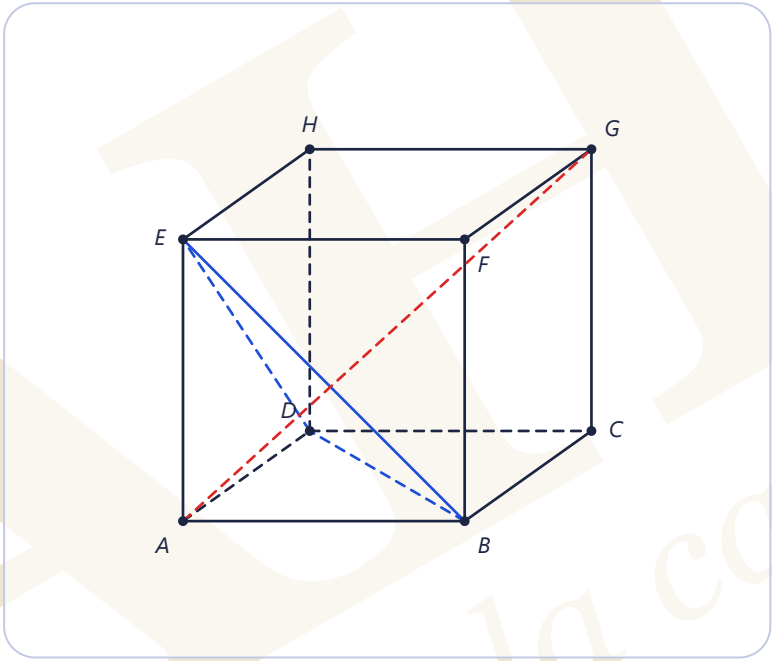
`sqrt(5)` → $\sqrt{5}$, c'est AL dans la base : il faut encore monter de 2.

`2*sqrt(3)` → $2\sqrt{3}$, c'est AG : M est au milieu de $[GH]$, pas en G.

EXERCICE 79 · RAISONNEMENT

La grande diagonale et le triangle BDE

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, dire si la grande diagonale (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le triangle BDE est tracé en bleu ; la grande diagonale [AG] est tracée en rouge.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elle l'est · oui, elle l'est · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · perpendiculaire · oui perpendiculaire · oui, perpendiculaire · elle est perpendiculaire · oui elle est perpendiculaire · oui, elle est perpendiculaire · elle est perpendiculaire au plan · oui elle est perpendiculaire au plan · oui, elle est perpendiculaire au plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre que A et G sont tous deux dans le plan médiateur de $[BD]$, puis dans celui de $[BE]$.
2. Si la droite (AG) est contenue dans le plan médiateur de $[BD]$, elle est orthogonale à (BD).

CORRECTION

Plan médiateur de [BD] — $AB = AD$ (arêtes) et $GB = GD$ (diagonales de faces) : A et G sont dans le plan médiateur de $[BD]$, perpendiculaire à (BD).

(AG) est orthogonale à (BD)

Plan médiateur de [BE] — De même $AB = AE$ et $GB = GE$.

(AG) est orthogonale à (BE)

Conclusion — (BD) et (BE) sont sécantes en B dans le plan (BDE).

$(AG) \perp (BDE)$

Oui : la grande diagonale (AG) est perpendiculaire au plan (BDE). Deux points équidistants des extrémités d'un segment donnent une droite orthogonale à ce segment.

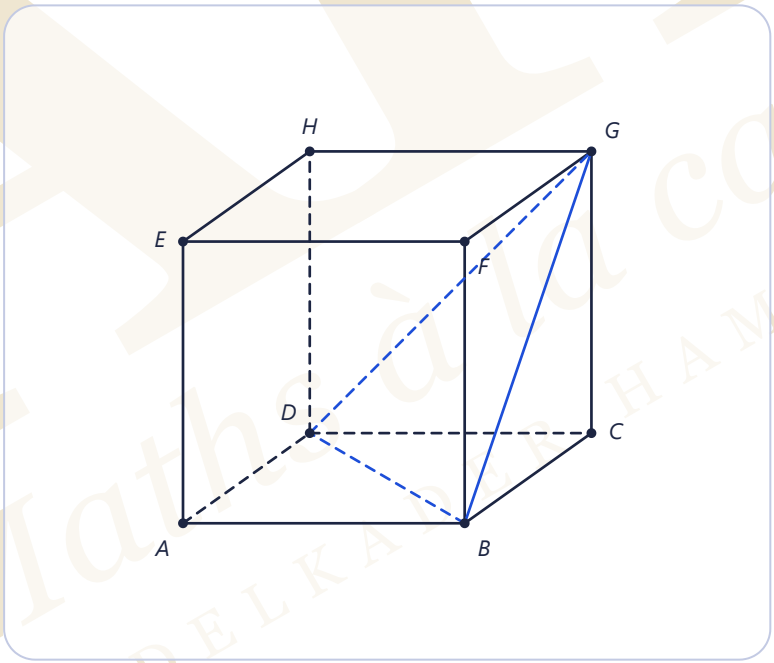
PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elle ne l'est pas / non, elle ne l'est pas / elle ne l'est pas / c'est non / faux / le / lé / la / pas perpendiculaire / non pas perpendiculaire / elle n'est pas perpendiculaire / non elle n'est pas perpendiculaire / non, elle n'est pas perpendiculaire / elle n'est pas perpendiculaire au plan` → A et G sont équidistants de B et de D, et de B et de E : (AG) est orthogonale à (BD) et à (BE).

EXERCICE 80 · DEFI

La distance d'un sommet au plan BDG

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 9, et I est le centre du triangle équilatéral BDG. On admet que la droite (CI) est perpendiculaire au plan (BDG). Calculer la valeur exacte de CI.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le triangle BDG est tracé en bleu.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `3*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle CIB est rectangle en I, avec $CB = 9$. Il reste à calculer IB.
2. Dans un triangle équilatéral de côté c, le centre est aux deux tiers de la médiane : $IB = \frac{2}{3} \times \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

CORRECTION

IB — Le triangle BDG a pour côté $9\sqrt{2}$, diagonale de face. Sa médiane mesure $\frac{9\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$.

$IB = \frac{2}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$

Un angle droit en I — (CI) est perpendiculaire au plan (BDG), qui contient (IB).

$CI^2 = CB^2 - IB^2 = 81 - 54 = 27$

La distance —

$CI = 3\sqrt{3}$

$CI = 3\sqrt{3}$, soit le tiers de la grande diagonale $EC = 9\sqrt{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(3)` → $9\sqrt{3}$ est toute la grande diagonale EC : I est entre E et C.

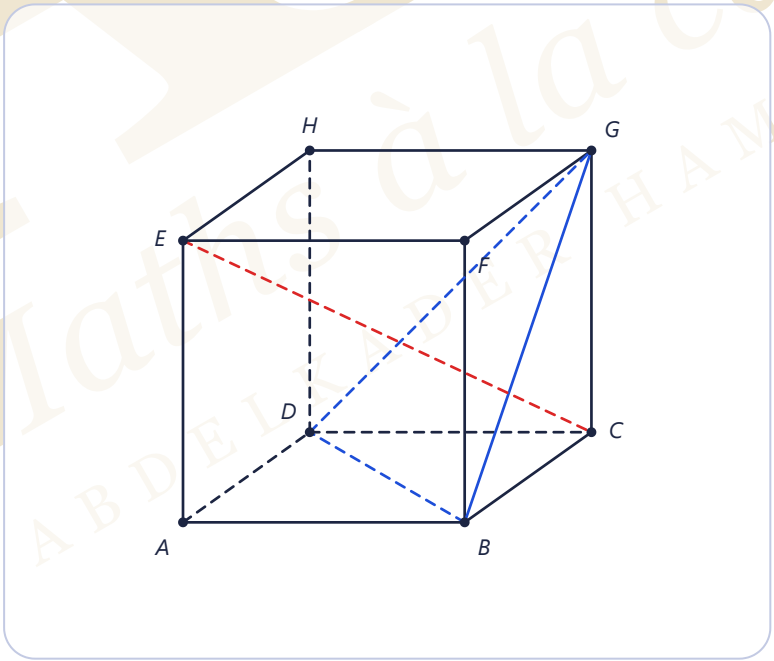
`3*sqrt(6)` → $3\sqrt{6}$, c'est IB : il reste le triangle CIB, rectangle en I.

`5.2 / 5,2 / 5.20 / 5,20 / 5.19 / 5,19 / 5.196 / 5,196` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 81 · DEFI

Le point I sur la grande diagonale

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6, et I est le centre du triangle équilatéral BDG. On admet que les points E, I et C sont alignés, que I est entre E et C, et que $CI = 2\sqrt{3}$. Calculer la valeur exacte de EI.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le triangle BDG est tracé en bleu ; la grande diagonale [EC] est tracée en rouge.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

Réponse attendue : `4*sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule la grande diagonale EC : le triangle EAC est rectangle en A.
2. $EI = EC - CI$.

CORRECTION

EC — (EA) est perpendiculaire au plan (ABC) : le triangle EAC est rectangle en A, avec $AC = 6\sqrt{2}$.

$EC^2 = 36 + 72 = 108 \quad ; \quad EC = 6\sqrt{3}$

EI — I est entre E et C.

$EI = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$EI = 4\sqrt{3} = 2\,CI$: le plan (BDG) coupe la grande diagonale au tiers de sa longueur, à partir de C.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(3)` → $6\sqrt{3}$ est toute la diagonale EC : il faut retrancher CI.

`6*sqrt(2)-2*sqrt(3)` → La grande diagonale ne mesure pas $6\sqrt{2}$: c'est une diagonale de face.

`6.93` / `6,93` / `6.9` / `6,9` / `6.928` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 82 · BASE

Un point de l'axe et un point du cercle

Un cercle a pour centre O et pour rayon 8. N est le point de son axe tel que $ON = 15$, et A est un point du cercle. Calculer NA.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `17`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'axe est perpendiculaire au plan du cercle, qui contient (OA) : où est l'angle droit du triangle NOA ?

CORRECTION

Un angle droit en O — L'axe (ON) est perpendiculaire au plan du cercle : il est orthogonal à (OA).

$\widehat{NOA} = 90°$

Pythagore —

$NA = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$

$NA = 17$, et c'est vrai pour tous les points A du cercle : N en est équidistant.

PIÈGES ANTICIPÉS

`23` → Les longueurs ne s'ajoutent pas : on ajoute leurs carrés.

`sqrt(161)` → $[NA]$ est l'hypoténuse : on ajoute les carrés, $64 + 225$.

EXERCICE 83 · PRATIQUE

Retrouver le cercle

N est un point de l'axe d'un cercle de centre O, avec $ON = 6$, et la distance de N à chaque point du cercle vaut 10. Calculer la valeur exacte de la longueur du cercle.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `16*pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour un point A du cercle, le triangle NOA est rectangle en O : calcule le rayon OA.
2. La longueur d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$.

CORRECTION

Le rayon — L'axe est perpendiculaire au plan du cercle : le triangle NOA est rectangle en O.

$OA^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \quad ; \quad R = 8$

La longueur —

$L = 2\pi \times 8 = 16\pi$

Le cercle a pour longueur 16π.

PIÈGES ANTICIPÉS

`64*pi` → 64π est l'aire du disque : on demande la longueur du cercle, $2\pi R$.

`8` → 8 est le rayon : il reste à calculer la longueur $2\pi R$.

`50.27 / 50,27 / 50.3 / 50,3 / 50.26` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, avec π.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

Au-dessus d'un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A contenu dans un plan P, avec $AB = 6$ et $AC = 8$. O est le centre de son cercle circonscrit, et N est un point de l'axe de ce cercle tel que $NA = 13$. Calculer NO.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Où est le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle ? Quel est son rayon ?
2. Le rayon est la moitié de l'hypoténuse $[BC]$. Le triangle NOA est rectangle en O.

CORRECTION

Le rayon — Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

$BC = \sqrt{36 + 64} = 10 \quad ; \quad OA = 5$

Un angle droit en O — L'axe (ON) est perpendiculaire au plan P, qui contient (OA).

$NO^2 = NA^2 - OA^2 = 169 - 25 = 144$

La longueur —

$NO = 12$

$NO = 12$: on repère d'abord le centre du cercle circonscrit, puis l'axe donne un triangle rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

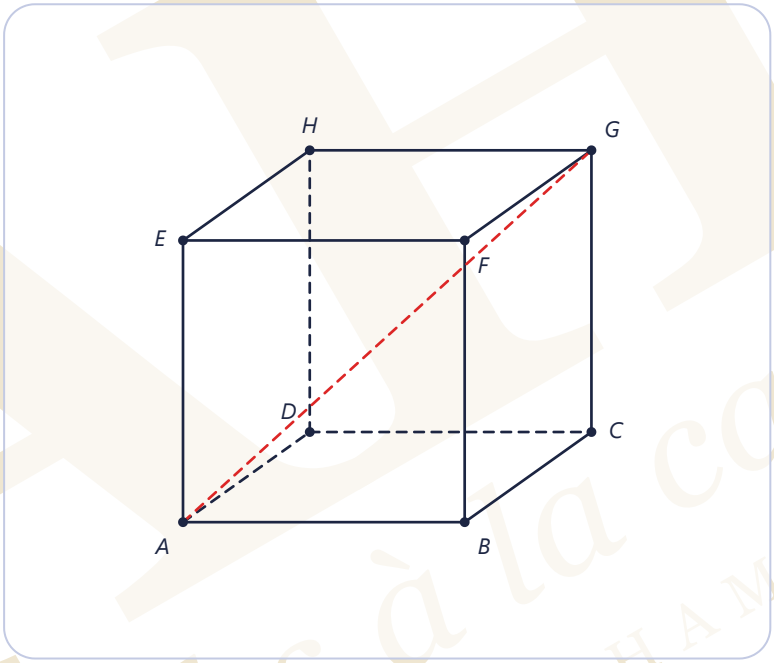
`sqrt(69)` → Le rayon est la moitié de BC : $OA = 5$, pas 10.

`sqrt(194)` → $[NA]$ est l'hypoténuse du triangle NOA : on retranche les carrés.

EXERCICE 85 · PRATIQUE

La sphère circonscrite à un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2. On admet que le milieu O de la grande diagonale $[AG]$ est équidistant des huit sommets du cube. Calculer la valeur exacte du rayon de la sphère qui passe par les huit sommets.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La grande diagonale [AG] est tracée en rouge.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `sqrt(3)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon vaut $OA = \frac{AG}{2}$.
2. Le triangle ACG est rectangle en C : calcule d'abord AC, diagonale d'une face.

CORRECTION

AG — (CG) est perpendiculaire au plan (ABC) : le triangle ACG est rectangle en C, avec $AC = 2\sqrt{2}$.

$AG^2 = 8 + 4 = 12 \quad ; \quad AG = 2\sqrt{3}$

Le rayon —

$R = OA = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Le rayon de la sphère circonscrite au cube vaut $\sqrt{3}$, la moitié de la grande diagonale.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(3)` → $2\sqrt{3}$ est la grande diagonale, donc le diamètre : le rayon en est la moitié.

`sqrt(2)` → $\sqrt{2}$ est la moitié d'une diagonale de face : le centre est au milieu de la grande diagonale.

`1.73 / 1,73 / 1.7 / 1,7 / 1.732` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 86 · RAISONNEMENT

La sphère d'un tétraèdre trirectangle

$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O, avec $OA = 2$, $OB = 4$ et $OC = 4$. On le complète en un parallélépipède rectangle d'arêtes $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$, et on note K le sommet opposé à O. On admet que le milieu de $[OK]$ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre. Calculer le rayon de cette sphère.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon est la moitié de la grande diagonale OK du parallélépipède.
2. Comme pour un cube, deux Pythagore donnent $OK^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$.

CORRECTION

La grande diagonale — Soit L le sommet du parallélépipède tel que $OALB$ soit un rectangle : $OL^2 = OA^2 + OB^2$. (LK) est parallèle à (OC), perpendiculaire au plan (OAB) : le triangle OLK est rectangle en L.

$$OK^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 = 4 + 16 + 16 = 36$$

Le rayon —

$$OK = 6 \quad ; \quad R = \frac{OK}{2} = 3$$

Le rayon vaut 3 : la sphère circonscrite au tétraèdre trirectangle est celle du parallélépipède.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est la grande diagonale OK, c'est-à-dire le diamètre : le rayon en est la moitié.

9 → 9, c'est R^2 : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 87 · RAISONNEMENT

La sphère d'une pyramide aux arêtes égales

$SABCD$ est une pyramide de sommet S et de base un carré $ABCD$ de centre O ; toutes ses arêtes mesurent 4, et (SO) est perpendiculaire au plan (ABC). Calculer la valeur exacte du rayon de la sphère qui passe par S, A, B, C et D, sachant que son centre est sur la droite (SO).

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `2*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule OA, puis SO dans le triangle SOA rectangle en O.
2. Compare SO et OA : le point O lui-même ne serait-il pas le centre ?

CORRECTION

OA — O est le milieu de la diagonale $[AC]$, qui mesure $4\sqrt{2}$: $OA = OB = OC = OD$.

$$OA = 2\sqrt{2}$$

SO — Le triangle SOA est rectangle en O.

$$SO^2 = 16 - 8 = 8 \quad ; \quad SO = 2\sqrt{2}$$

Le centre — O est sur (SO) et à la distance $2\sqrt{2}$ des cinq sommets : c'est le centre de la sphère.

$$R = 2\sqrt{2}$$

Le rayon vaut $2\sqrt{2}$: quand toutes les arêtes sont égales, le centre de la base est équidistant des cinq sommets.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 est l'arête : le centre O est à $2\sqrt{2}$ de chaque sommet.

`4*sqrt(2)` → $4\sqrt{2}$ est la diagonale AC, donc le diamètre : le rayon en est la moitié.

`2.83` / `2,83` / `2.8` / `2,8` / `2.828` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 88 · DEFI

La sphère d'un tétraèdre régulier

$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête 6, et H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) ; on sait que $SH = 2\sqrt{6}$ et $HA = 2\sqrt{3}$. Le centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre est sur le segment $[SH]$. Calculer la valeur exacte du rayon R de cette sphère.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `3*sqrt(6)/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On a $\Omega S = \Omega A = R$, et $\Omega H = SH - R$.
2. Le triangle ΩHA est rectangle en H : écris le théorème de Pythagore et résous l'équation en R.

CORRECTION

Un angle droit en H — (SH) est perpendiculaire au plan (ABC) : le triangle ΩHA est rectangle en H, avec $\Omega H = 2\sqrt{6} - R$.

$$\left(2\sqrt{6} - R\right)^2 + 12 = R^2$$

L'équation — Les termes en R^2 s'éliminent.

$$24 - 4\sqrt{6}\,R + 12 = 0 \iff R = \frac{36}{4\sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{6}}$$

Le rayon —

$$R = \frac{9\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, soit les trois quarts de la hauteur SH : le centre est l'intersection de l'axe du cercle circonscrit à ABC avec le plan médiateur d'une arête.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(3)` → $2\sqrt{3}$ est le rayon du cercle circonscrit à la base : le centre de la sphère est plus haut, sur $[SH]$.

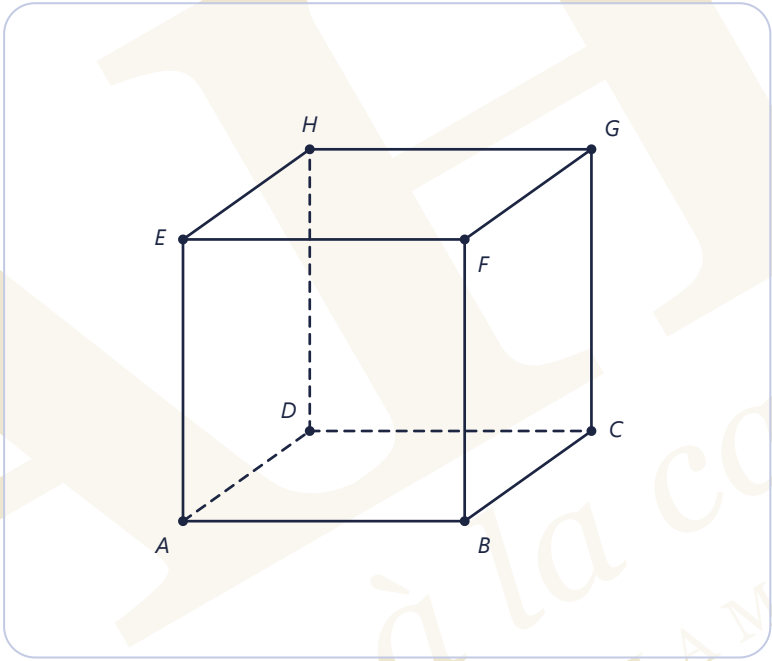
`sqrt(6)` → Le centre n'est pas au milieu de $[SH]$: écris $\Omega S = \Omega A$.

`3.67 / 3,67 / 3.7 / 3,7 / 3.674` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 89 · BASE

Une droite de la base orthogonale à une face

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, nommer une arête contenue dans le plan (ABC) et orthogonale au plan (ADH).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La face ADHE est la face de gauche, ABCD la face du dessous.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(AB)` — aussi acceptées : AB · la droite (AB) · la droite AB · droite (AB) · droite AB · c'est (AB) · c'est la droite (AB) · (BA) · BA · la droite (BA) · la droite BA · droite (BA) · droite BA · c'est (BA) · c'est la droite (BA) · (DC) · DC · la droite (DC) · la droite DC · droite (DC) · droite DC · c'est (DC) · c'est la droite (DC) · (CD) · CD · la droite (CD) · la droite CD · droite (CD) · droite CD · c'est (CD) · c'est la droite (CD)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ADH) est celui de la face $ADHE$. Cherche une arête de la face $ABCD$ orthogonale à (AD) et à (AE).
2. Quelle arête de la base part de A sans être dans la face $ADHE$?

CORRECTION

L'arête (AB) — (AB) est perpendiculaire à (AD) dans le carré $ABCD$, et à (AE) dans le carré $ABFE$. (AD) et (AE) sont sécantes en A dans le plan (ADH).
$(AB) \perp (ADH)$

Une autre — (DC) est parallèle à (AB) et contenue dans le plan (ABC) : elle convient aussi.
(AB) ou (DC)

(AB) ou (DC) : le plan (ABC) contient une droite orthogonale au plan (ADH), les deux plans sont donc perpendiculaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

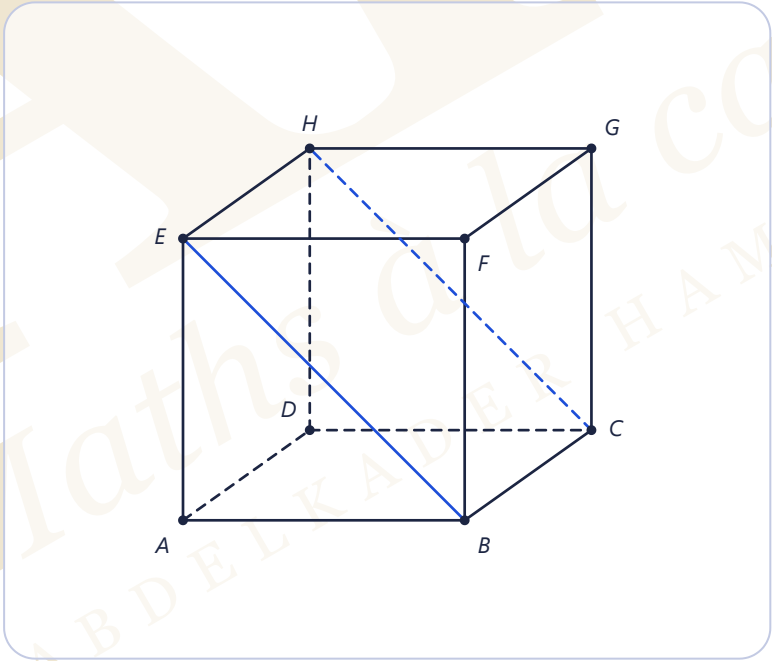
`(AD) / AD / (DA) / DA` → (AD) est contenue dans les deux plans : elle n'est pas orthogonale au plan (ADH).

`(EF) / EF / (FE) / FE / (HG) / HG / (GH) / GH` → Cette arête est bien orthogonale au plan (ADH), mais elle n'est pas dans le plan (ABC).

EXERCICE 90 · PRATIQUE

Une droite d'un plan diagonal

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, nommer une droite passant par deux sommets du cube, contenue dans le plan (BCH) et orthogonale au plan (ABF).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le rectangle BCHE est tracé : sa diagonale de face [BE] en bleu, en trait plein, et [CH] en bleu, en pointillés.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(BC)` — aussi acceptées : BC · la droite (BC) · la droite BC · droite (BC) · droite BC · c'est (BC) · c'est la droite (BC) · (CB) · CB · la droite (CB) · la droite CB · droite (CB) · droite CB · c'est (CB) ·

c'est la droite (CB) · (EH) · EH · la droite (EH) · la droite EH · droite (EH) · droite EH · c'est (EH) · c'est la droite (EH) · (HE) · HE · la droite (HE) · la droite HE · droite (HE) · droite HE · c'est (HE) · c'est la droite (HE)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (BCH) est celui du rectangle $BCHE$. Le plan (ABF) contient (AB) et (BF), sécantes en B.
2. Parmi les côtés du rectangle $BCHE$, lequel part de B sans être dans la face $ABFE$?

CORRECTION

L'arête (BC) — (BC) est perpendiculaire à (AB) dans le carré $ABCD$, et à (BF) dans le carré $BCGF$. (AB) et (BF) sont sécantes en B dans le plan (ABF).

$(BC) \perp (ABF)$

Une autre — (EH) est parallèle à (BC) et contenue dans le plan (BCH) : elle convient aussi.

(BC) ou (EH)

(BC) ou (EH) : le plan (BCH) contient une droite orthogonale au plan (ABF), les deux plans sont donc perpendiculaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(BE) / BE / (EB) / EB` → (BE) est la diagonale de la face $ABFE$: elle est contenue dans le plan (ABF).

`(CH) / CH / (HC) / HC` → (CH) est parallèle à (BE), donc parallèle au plan (ABF) : elle ne lui est pas orthogonale.

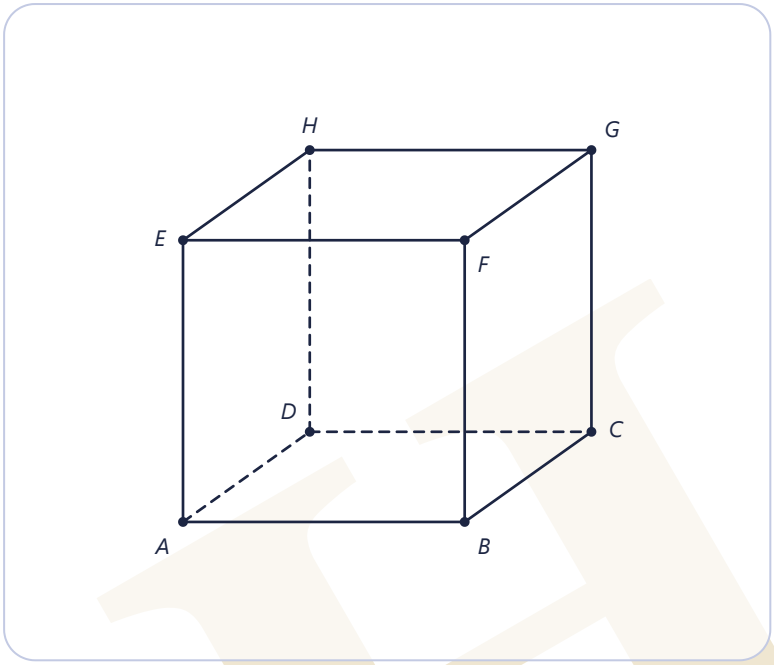
`(BH) / BH / (HB) / HB / (CE) / CE / (EC) / EC` → Une grande diagonale n'est orthogonale ni à (AB) ni à (BF) : cherche parmi les côtés du rectangle $BCHE$.

`(AD) / AD / (DA) / DA / (FG) / FG / (GF) / GF` → Cette arête est bien orthogonale au plan (ABF), mais elle n'est pas contenue dans le plan (BCH) : cherche parmi les côtés du rectangle $BCHE$.

EXERCICE 91 · BASE **Deux faces opposées**

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, dire si les plans (ABC) et (EFG) sont perpendiculaires.

Maths à la carte ABDELKADER HA



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non, elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · elles ne le sont pas · ils ne le sont pas · c'est non · faux · le · lé · la · pas perpendiculaires · non pas perpendiculaires · non, pas perpendiculaires · elles ne sont pas perpendiculaires · non elles ne sont pas perpendiculaires · non, elles ne sont pas perpendiculaires · ils ne sont pas perpendiculaires · non ils ne sont pas perpendiculaires · non, ils ne sont pas perpendiculaires · parallèles · ils sont parallèles · elles sont parallèles · non ils sont parallèles · non, ils sont parallèles · non elles sont parallèles · non, elles sont parallèles · les plans sont parallèles · non, les plans sont parallèles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont opposées : ont-elles un point commun ?
2. Deux plans perpendiculaires sont sécants : l'un contient une droite orthogonale à l'autre, qui le perce.

CORRECTION

Des faces opposées — Les plans (ABC) et (EFG) des faces opposées sont parallèles.

$(ABC) \parallel (EFG)$

Pas perpendiculaires — Une droite orthogonale à (EFG), comme (AE), est perpendiculaire aussi à (ABC) (propriété 17 b) : elle n'est pas contenue dans (ABC). Aucune droite de (ABC) n'est orthogonale à (EFG).

non perpendiculaires

Non : les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles, pas perpendiculaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

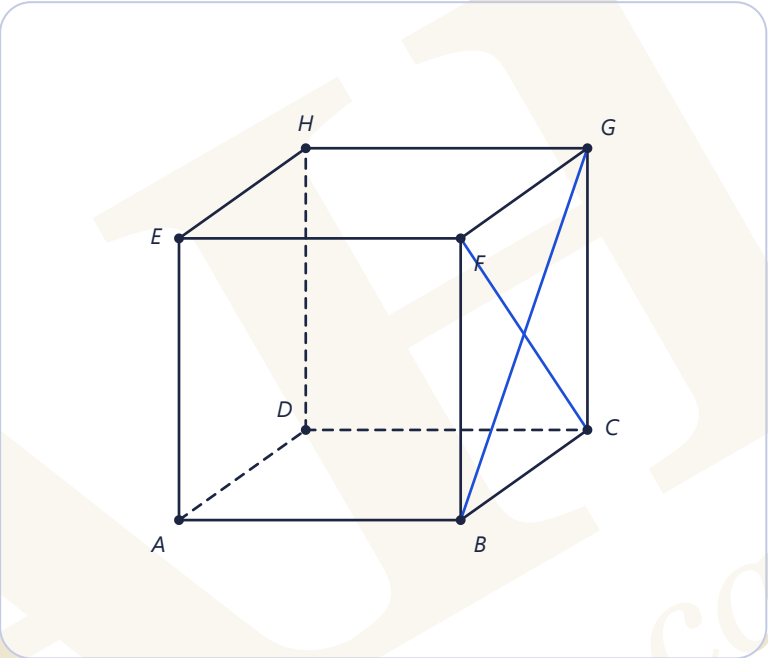
`oui / oui elles le sont / oui, elles le sont / oui ils le sont / oui, ils le sont / c'est oui / vrai / ouii / yes / ey / eyh / ih / iyeh / perpendiculaires / oui perpendiculaires / oui, perpendiculaires / elles sont perpendiculaires / oui elles sont perpendiculaires / oui, elles sont perpendiculaires / ils sont perpendiculaires / oui ils sont perpendiculaires / oui, ils sont`

`perpendiculaires` → Ce sont deux faces opposées : leurs plans sont parallèles. C'est (ABC) et (ABF) qui sont perpendiculaires.

EXERCICE 92 · DEFI

Deux plans diagonaux qui se croisent

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, dire si les plans (ABG) et (CDE) sont perpendiculaires.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les diagonales [BG] et [CF] de la face BCGF sont tracées en bleu.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui, elles le sont · oui ils le sont · oui, ils le sont · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · perpendiculaires · oui perpendiculaires · oui, perpendiculaires · elles sont perpendiculaires · oui elles sont perpendiculaires · oui, elles sont perpendiculaires · ils sont perpendiculaires · oui ils sont perpendiculaires · oui, ils sont perpendiculaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ABG) est celui du rectangle $ABGH$, le plan (CDE) celui du rectangle $CDEF$. Cherche dans (CDE) une droite orthogonale à (ABG).
2. Essaie (CF) : elle est perpendiculaire à (BG) dans le carré $BCGF$. Est-elle orthogonale à (AB) ?

CORRECTION

Dans le carré BCGF — Les diagonales du carré $BCGF$ sont perpendiculaires.
$(CF) \perp (BG)$

L'arête (AB) — (AB) est perpendiculaire au plan (BCG), qui contient (CF).
(CF) est orthogonale à (AB)

Une droite orthogonale — (AB) et (BG) sont sécantes en B dans le plan (ABG) : (CF) est orthogonale à ce plan. Or C et F sont dans le plan (CDE), celui du rectangle $CDEF$.

$(CF) \perp (ABG) \quad ; \quad (CF) \subset (CDE)$

Oui : le plan (CDE) contient la droite (CF), orthogonale au plan (ABG). Les deux plans sont perpendiculaires.

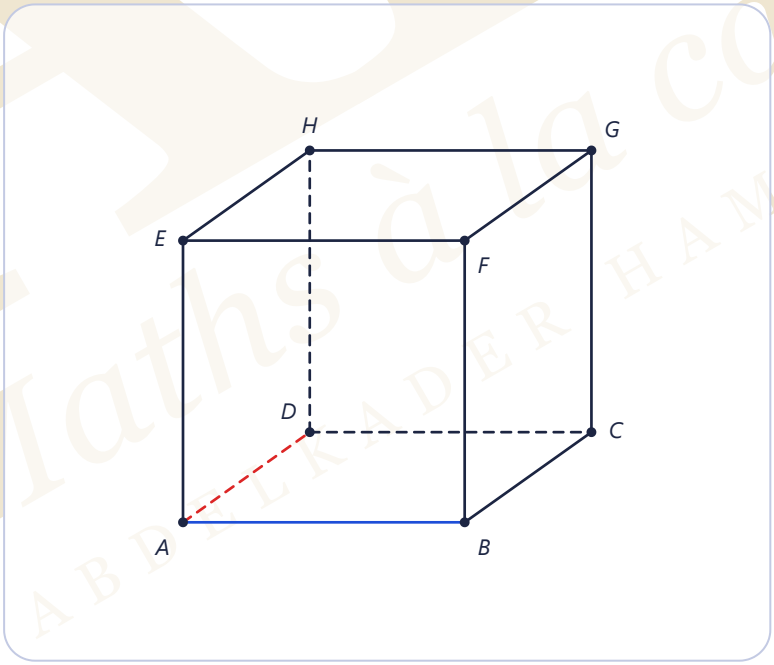
PIÈGES ANTICIPÉS

non / non elles ne le sont pas / non, elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / elles ne le sont pas / ils ne le sont pas / c'est non / faux / le / lé / la / pas perpendiculaires / non pas perpendiculaires / non, pas perpendiculaires / elles ne sont pas perpendiculaires / non elles ne sont pas perpendiculaires / non, elles ne sont pas perpendiculaires / ils ne sont pas perpendiculaires / non ils ne sont pas perpendiculaires / non, ils ne sont pas perpendiculaires → Cherche dans le plan (CDE) la diagonale (CF) : elle est orthogonale à (BG) et à (AB).

EXERCICE 93 · BASE

Perpendiculaire à l'intersection

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, les plans (ABF) et (ABC) sont perpendiculaires et se coupent suivant la droite (AB). La droite (AD), contenue dans le plan (ABC), est perpendiculaire à (AB). Dire si la droite (AD) est orthogonale au plan (ABF).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [AB] est repassée en bleu, l'arête [AD] en rouge.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elle l'est · oui, elle l'est · c'est oui · vrai · ouii · yes · ey · eyh · ih · iyeh · orthogonale · oui orthogonale · oui, orthogonale · elle est orthogonale · oui elle est

orthogonale · oui, elle est orthogonale · elle est orthogonale au plan · oui elle est orthogonale au plan · oui, elle est orthogonale au plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la propriété 20 : une droite d'un des deux plans, perpendiculaire à leur droite d'intersection…

CORRECTION

Propriété 20 — (ABF) et (ABC) sont perpendiculaires, d'intersection (AB). (AD) est contenue dans (ABC) et perpendiculaire à (AB).

$(AD) \perp (ABF)$

Oui : (AD) est orthogonale au plan (ABF), celui de la face $ABFE$.

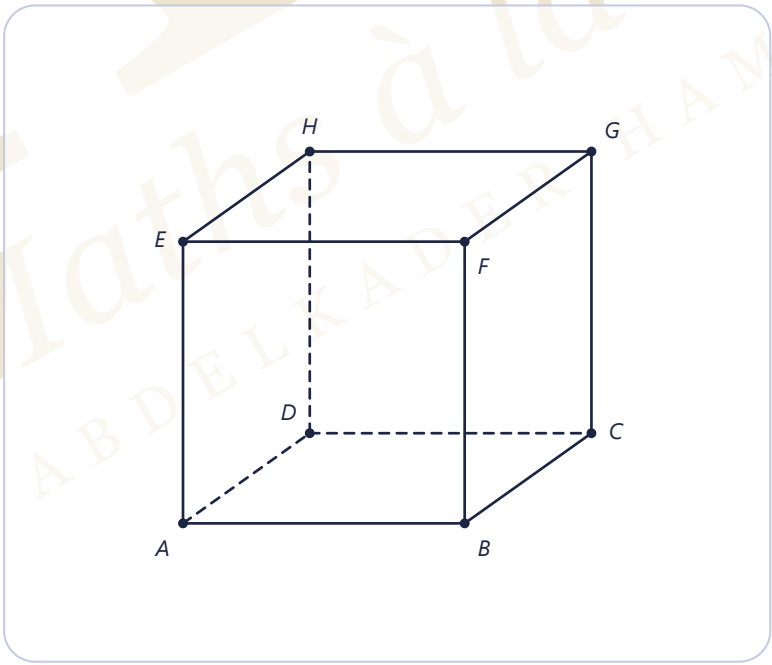
PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non elle ne l'est pas / non, elle ne l'est pas / elle ne l'est pas / c'est non / faux / le / lé / la / pas orthogonale / non pas orthogonale / elle n'est pas orthogonale / non elle n'est pas orthogonale / non, elle n'est pas orthogonale / elle n'est pas orthogonale au plan` → C'est exactement la situation de la propriété 20 : (AD) est dans un des plans et perpendiculaire à l'intersection (AB).

EXERCICE 94 · BASE

L'intersection de deux faces latérales

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, les plans (ABF) et (BCG) sont tous deux perpendiculaires au plan (EFG). Nommer leur droite d'intersection, qui est donc, par la propriété 22, orthogonale au plan (EFG).



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(BF)` — aussi acceptées : BF · la droite (BF) · la droite BF · droite (BF) · droite BF · c'est (BF) · c'est la droite (BF) · (FB) · FB · la droite (FB) · la droite FB · droite (FB) · droite FB · c'est (FB) · c'est la droite (FB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ABF) est celui de la face $ABFE$, le plan (BCG) celui de la face $BCGF$.
2. Quelle arête ces deux faces ont-elles en commun ?

CORRECTION

L'arête commune — Les faces $ABFE$ et $BCGF$ ont en commun l'arête $[BF]$.

$$(ABF) \cap (BCG) = (BF)$$

Propriété 22 — Deux plans sécants perpendiculaires au plan (EFG) : leur intersection lui est orthogonale.

$$(BF) \perp (EFG)$$

C'est la droite (BF), orthogonale au plan (EFG).

PIÈGES ANTICIPÉS

`B / F` → Deux plans sécants se coupent suivant une droite, pas en un point : nomme-la avec deux points.

`(EF) / EF / (FE) / FE / (FG) / FG / (GF) / GF` → Cette arête est dans le plan (EFG) : elle ne peut pas lui être orthogonale.

EXERCICE 95 · PRATIQUE

Perpendiculaires à un même plan

Réponds par vrai ou faux : « Deux plans perpendiculaires à un même plan sont perpendiculaires entre eux ».

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux · non, c'est faux · fausse · c'est fausse · non, c'est fausse · non c'est fausse · non, faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un contre-exemple dans un cube $ABCDEFGH$, avec le plan (ABC) de la base.
2. Les plans (ABF) et (DCG) sont-ils perpendiculaires à (ABC) ? Le sont-ils entre eux ?

CORRECTION

Un contre-exemple — Dans un cube, les plans (ABF) et (DCG) des faces avant et arrière sont perpendiculaires à la base (ABC).

$$(ABF) \perp (ABC) \quad ; \quad (DCG) \perp (ABC)$$

Parallèles — Pourtant ce sont deux faces opposées : leurs plans sont parallèles.

$$(ABF) \parallel (DCG)$$

Faux : deux plans perpendiculaires à un même plan peuvent être parallèles. S'ils sont sécants, c'est leur droite d'intersection qui est orthogonale au plan (propriété 22).

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → Les faces $ABFE$ et $DCGH$ sont toutes deux perpendiculaires à la base, et pourtant parallèles.

EXERCICE 96 · RAISONNEMENT

Deux points sur deux plans perpendiculaires

Deux plans P et Q sont perpendiculaires et se coupent suivant la droite D. A est un point de P et B un point de Q ; A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et de B sur la droite D. On donne $AA' = 3$, $BB' = 4$ et $A'B' = 12$. Calculer AB.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la propriété 20, (AA'), contenue dans P et perpendiculaire à D, est orthogonale au plan Q. Le triangle $AA'B$ est donc rectangle en A'.
2. Calcule d'abord $A'B$ dans le triangle $A'B'B$, rectangle en B' dans le plan Q.

CORRECTION

Dans le plan Q — Le triangle $A'B'B$ est rectangle en B'.

$$A'B^2 = 12^2 + 4^2 = 160$$

Propriété 20 — (AA') est dans P et perpendiculaire à l'intersection D : elle est orthogonale au plan Q, qui contient $(A'B)$. Le triangle $AA'B$ est rectangle en A'.

$$AB^2 = AA'^2 + A'B^2 = 9 + 160 = 169$$

La longueur —

$$AB = 13$$

$AB = 13$: la propriété 20 fournit le deuxième angle droit, et on enchaîne deux fois Pythagore.

PIÈGES ANTICIPÉS

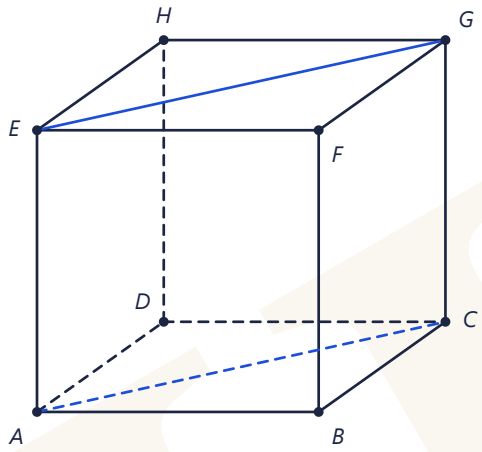
`4*sqrt(10)` → $4\sqrt{10}$, c'est $A'B$: il reste le triangle $AA'B$, rectangle en A'.

`3*sqrt(17)` → Tu as oublié BB' : B n'est pas sur la droite D.

EXERCICE 97 · PRATIQUE

L'aire d'un rectangle diagonal

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 5. Calculer la valeur exacte de l'aire du rectangle $ACGE$, sans écrire l'unité.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le rectangle ACGE est tracé en bleu : [AC] en pointillés, [EG] en trait plein.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `25*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les côtés du rectangle $ACGE$ sont une diagonale de face et une arête.
2. La diagonale d'un carré de côté c mesure $c\sqrt{2}$.

CORRECTION

Les côtés — $[AC]$ est la diagonale du carré $ABCD$, $[CG]$ une arête.

$AC = 5\sqrt{2} \quad ; \quad CG = 5$

L'aire —

$\mathcal{A} = 5\sqrt{2} \times 5 = 25\sqrt{2}$

L'aire du rectangle $ACGE$ vaut $25\sqrt{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

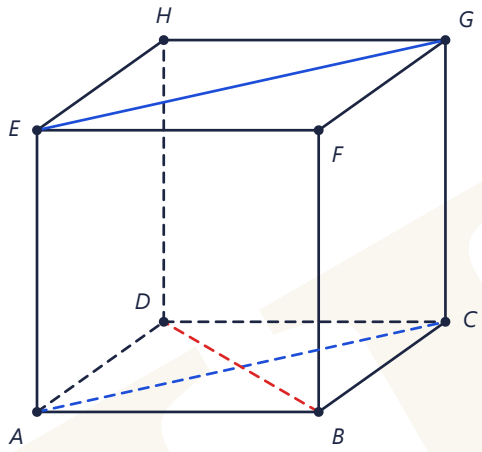
`25` → 25 est l'aire d'une face : le côté $[AC]$ est une diagonale, plus longue que l'arête.

`35.36` / `35,36` / `35.4` / `35,4` / `35.35` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 98 · RAISONNEMENT

La distance d'un sommet à un plan diagonal

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 10. Calculer la valeur exacte de la distance du point B au plan (ACG), c'est-à-dire la longueur BK, où K est le projeté orthogonal de B sur ce plan.



Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le rectangle ACGE est tracé en bleu ; la diagonale [BD] de la face du dessous est tracée en rouge.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `5*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre que (BD) est perpendiculaire au plan (ACG) : elle est perpendiculaire à (AC) et orthogonale à (AE).
2. La perpendiculaire au plan menée par B est donc (BD) : où perce-t-elle le plan (ACG) ?

CORRECTION

(BD) et le plan — (BD) est perpendiculaire à (AC) (diagonales du carré) et orthogonale à (AE), perpendiculaire au plan (ABC). (AC) et (AE) sont sécantes en A dans le plan (ACG).

$$(BD) \perp (ACG)$$

Le projeté — (BD) perce le plan (ACG) au point commun des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, le centre O du carré.

$$K = O$$

La distance —

$$BK = BO = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

La distance de B au plan (ACG) vaut $5\sqrt{2}$, la demi-diagonale du carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10*sqrt(2)` → $10\sqrt{2}$, c'est BD : le plan (ACG) coupe $[BD]$ en son milieu.

`10` → 10 est la distance de B à A ou à C : le point le plus proche du plan est le centre du carré.

`7.07` / `7,07` / `7.1` / `7,1` / `7.071` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 99 · BASE

Le volume d'un coin de cube

$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O, avec $OA = OB = OC = 3$. Calculer son volume, sans écrire l'unité.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (OC) est perpendiculaire au plan (OAB) : c'est une hauteur du tétraèdre.
2. La base OAB est un triangle rectangle en O.

CORRECTION

La base —

$\mathcal{A}_{OAB} = \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2}$

Le volume — (OC) est orthogonale à (OA) et à (OB) : OC est la hauteur.

$V = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$

Le volume vaut $\frac{9}{2}$, le sixième du cube d'arête 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`27/2 / 13.5` → Le volume d'une pyramide est le tiers de l'aire de la base fois la hauteur.

`9` → La base est un triangle, pas un carré : son aire est $\frac{9}{2}$.

`27` → 27 est le volume du cube d'arête 3 : le tétraèdre en est le sixième.

EXERCICE 100 · PRATIQUE

La hauteur issue du sommet trirectangle

$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O, avec $OA = OB = 4$ et $OC = 2\sqrt{2}$. H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC), et on admet que $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Calculer OH.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule chaque inverse : $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}$.
2. Ajoute, puis inverse et prends la racine carrée.

CORRECTION

Les inverses —

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1+1+2}{16} = \frac{1}{4}$

OH —

$OH^2 = 4 \quad ; \quad OH = 2$

$OH = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4, c'est OH^2 : il reste à prendre la racine carrée.

`1/4 / 0.25 / 1/2 / 0.5` → $\frac{1}{4}$ est la valeur de $\frac{1}{OH^2}$: il faut l'inverser.

EXERCICE 101 · DEFI

L'aire de la face ABC par le volume

$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O, avec $OA = 2$ et $OB = OC = 4$. H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC), et on admet que $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. En calculant de deux façons le volume du tétraèdre, calculer la valeur exacte de l'aire du triangle ABC, sans écrire l'unité.

Écris la valeur exacte, par exemple 5 racine 3.

Réponse attendue : `4*sqrt(6)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec la base OBC et la hauteur OA : $V = \frac{1}{3} \times \frac{4\times4}{2} \times 2$.
2. Avec la base ABC et la hauteur OH : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times OH$. Calcule OH par la relation donnée.

CORRECTION

Le volume — (OA) est perpendiculaire au plan (OBC).

$V = \frac{1}{3} \times 8 \times 2 = \frac{16}{3}$

OH —

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$; $OH = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

L'aire — Avec la base ABC et la hauteur OH : $V = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC} \times OH$.

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3V}{OH} = \frac{16}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{24}{\sqrt{6}} = 4\sqrt{6}$

L'aire de ABC vaut $4\sqrt{6}$: le volume, calculé avec deux bases, relie l'aire d'une face à la hauteur correspondante.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(6)/3` → Le tiers apparaît des deux côtés : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3V}{OH}$.

`9.8 / 9,8 / 9.80 / 9,80 / 9.798` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte.

EXERCICE 102 · DEFI

Retrouver l'arête d'un coin de cube

$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O, avec $OA = OB = OC = a$. H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC), et on admet que $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Sachant que $OH = \sqrt{3}$, déterminer a.

Écris la valeur de a.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec trois arêtes égales, la relation devient $\frac{1}{OH^2} = \frac{3}{a^2}$.
2. Remplace OH^2 par 3 et résous l'équation, avec $a > 0$.

CORRECTION

La relation —

$\frac{1}{3} = \frac{3}{a^2}$

L'équation — a est une longueur, donc positive.

$a^2 = 9 \quad ; \quad a = 3$

$a = 3$: dans un coin de cube d'arête a, la hauteur issue du sommet vaut $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → 9, c'est a^2 : il reste à prendre la racine carrée.

`3*sqrt(3)` → Tu as utilisé $OH = 3$ au lieu de $OH^2 = 3$: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{3}$.

`sqrt(3)` → Il y a trois termes dans la somme : $\frac{3}{a^2} = \frac{1}{3}$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI