— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Parallélisme dans l’espace

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU’IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum bech nfassrou m3a b3adhna le chapitre numéro dix-sept : parallélisme dans l'espace. Fi le chapitre elli fet, chofna les positions relatives mta3 les droites w les plans. Lyoum nrakkzou 3la le parallélisme. Nabdew b les droites parallèles fi l'espace. Ba3d nchoufou droite parallèle à un plan, w le théorème du toit. W ba3d les plans parallèles, w kifech nbayynou elli deux plans parallèles. W nkammlou b les sections planes : kifech plan y9oss cube walla pyramide. Yalla, nabdew.

عسلامة ! ليوم باش نفسّرو مع بعضنا le chapitre numéro dix-sept : parallélisme dans l'espace في . le chapitre اللي فات ، شفنا les positions relatives متاع les droites w les plans . ليوم نركّزو على le parallélisme . بعد نشوفو l'espace في les droites parallèles نبداو بـ droite parallèle à un plan ، w le théorème du toit . w بعد ، les plans parallèles كيفاش نبيّنو اللي deux plans parallèles . w نكمّلو بـ les sections planes : كيفاش يقصّ plan ولّا cube pyramide . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Aujourd'hui, on va expliquer ensemble le chapitre numéro dix-sept : parallélisme dans l'espace. Dans le chapitre précédent, nous avons vu les positions relatives des droites et des plans. Aujourd'hui, nous nous concentrons sur le parallélisme. Nous commencerons par les droites parallèles dans l'espace. Puis nous verrons une droite parallèle à un plan, et le théorème du toit. Ensuite les plans parallèles, et comment montrer que deux plans sont parallèles. Et nous terminerons par les sections planes : comment un plan coupe un cube ou une pyramide. Allez, on commence.

Ce chapitre poursuit la **géométrie dans l'espace** : après les positions relatives de droites et de plans, on étudie le **parallélisme**.

On y définit deux droites parallèles, une droite parallèle à un plan et deux plans parallèles, avec douze propriétés — dont le théorème du toit — qui permettent de démontrer un parallélisme, de trouver l'intersection de deux plans et de construire la section d'un cube ou d'une pyramide par un plan.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU’IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Reconnaître et démontrer que deux droites de l'espace sont parallèles
  > Reconnaître et démontrer que deux droites de l'espace sont parallèles.
  > *Reconnaître et démontrer que deux droites de l'espace sont parallèles.*
- Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan
  > Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan.
  > *Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan.*
- Utiliser le théorème du toit pour déterminer l'intersection de deux plans
  > Utiliser le théorème du toit pour déterminer l'intersection de deux plans.
  > *Utiliser le théorème du toit pour déterminer l'intersection de deux plans.*
- Démontrer que deux plans sont parallèles
  > Démontrer que deux plans sont parallèles.
  > *Démontrer que deux plans sont parallèles.*
- Utiliser les propriétés des plans parallèles pour construire la section d'un solide par un plan
  > Utiliser les propriétés des plans parallèles pour construire la section d'un solide par un plan.
  > *Utiliser les propriétés des plans parallèles pour construire la section d'un solide par un plan.*

1. ACTIVITÉ

Pour comprendre : des parallèles dans un tétraèdre

CE QU'IL DIT

Nabdew b tétraèdre ABCD. I milieu de [AB], J milieu de [CD], K milieu de [IJ], w L milieu de [BJ]. La droite (KL) w la droite (IB), parallèles walla le ? Chouf le triangle IJB : K w L houma les milieux mta3 [IJ] w [BJ], donc la droite (KL) parallèle à la droite (IB). Kif kif fi le triangle ABJ : la droite (IL) parallèle à la droite (AJ). W la droite (IJ) w la droite (AD) ? Hedhom mouch fi nafs el plan, donc mouch parallèles. Thabbet mli7 : fi l'espace, 9bal ma t9oul parallèles, lawwej 3la plan fih ez-zouz droites.

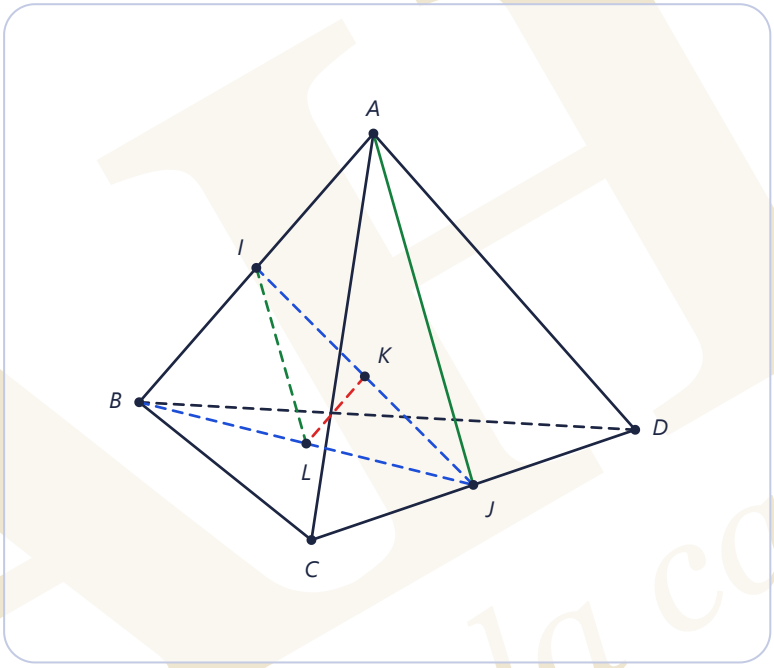
tétraèdre A B C D . I milieu de A B ، J milieu de C D ، K milieu de I J ، w L milieu de B J . la droite K نبداو بـ I J w B J ، donc la متاع les milieux هوما le triangle I J B : K w L شوف ؟ ولّا لا L w la droite I B ، parallèles le triangle A B J : la droite I L parallèle à la droite A J . w كيف كيف في . droite K L parallèle à la droite I B هاذم موش في نفس الـ ؟ la droite I J w la droite A D ، donc plan موش parallèles . ثبّت مليح : في l'espace ، قُبَلْ ما تقول parallèles ، لوّج على plan فيه الزوز droites .

Commençons par un tétraèdre A B C D. I est le milieu de A B, J le milieu de C D, K le milieu de I J, et L le milieu de B J. La droite K L et la droite I B sont-elles parallèles ? Regarde le triangle I J B : K et L sont les milieux de I J et de B J, donc la droite K L est parallèle à la droite I B. De même, dans le triangle A B J, la droite I L est parallèle à la droite A J. Et la droite I J et la droite A D ? Elles ne sont pas dans un même

plan, donc elles ne sont pas parallèles. Fais bien attention : dans l'espace, avant de dire parallèles, cherche un plan qui contient les deux droites.

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$, $[IJ]$ et $[BJ]$.

Dans l'espace, avant de dire que deux droites sont parallèles, on cherche **un plan qui les contient toutes les deux** : c'est dans ce plan qu'on applique la géométrie plane, par exemple le théorème des milieux.



I, J, K et L sont les milieux de [AB], [CD], [IJ] et [BJ].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est le milieu de l'arête [AB] et le point J le milieu de l'arête [CD]. Le segment [IJ] est tracé en bleu, K est son milieu. Le segment [BJ] est tracé dans la face BCD, L est son milieu. Les segments [KL], [IL] et [AJ] sont tracés.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Les droites (KL) et (IB) sont-elles parallèles ? 2) Les droites (AJ) et (IL) sont-elles parallèles ? 3) Les droites (IJ) et (AD) sont-elles parallèles ?

(KL) et (IB) — Dans le triangle IJB, K est le milieu de $[IJ]$ et L est le milieu de $[BJ]$: la droite des milieux (KL) est parallèle à (IB).

1) oui

(AJ) et (IL) — Dans le triangle ABJ, I est le milieu de $[AB]$ et L est le milieu de $[BJ]$: la droite (IL) est parallèle à (AJ).

2) oui

(IJ) et (AD) — Le seul plan qui contient la droite (AD) et le point J est le plan (ACD). Or I est sur (AB) et distinct de A : il n'est pas dans le plan (ACD). Les droites (IJ) et (AD) ne sont pas coplanaires : elles ne sont pas parallèles.

3) non

1) oui ; 2) oui ; 3) non

À ne pas faire : Les droites (IJ) et (AD) ne se coupent pas, donc elles sont parallèles — Les droites (IJ) et (AD) ne sont pas coplanaires : elles ne sont ni sécantes ni parallèles. Dans l'espace, deux droites sans point commun ne sont parallèles que si un même plan les contient.

---

2. DÉFINITION

Droites parallèles

CE QU'IL DIT

Tawa la définition. Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont contenues dans un même plan et si elles sont parallèles dans ce plan. Ya3ni lezem zouz 7ajet : ez-zouz droites fi nafs el plan, w fel plan hedha houma parallèles. Deux droites parallèles, ya confondues, ya distinctes. W ken houma distinctes, n9oulou 3lihom strictement parallèles. W thabbet mli7 : zouz droites ma 3andhomch 7atta point commun, mouch dima parallèles. Chouf la figure 2 : la droite D perce le plan en A, w la droite D' fel plan w ma tet3addech men A. Ma yetle9awch, ama mouch parallèles, 5ater mouch fi nafs el plan.

la définition . deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont contenues dans un même plan et توّة هذا plan في الـ plan ، w في نفس الـ droites الزوز : يعني لازم زوز حاجات . si elles sont parallèles dans ce plan هوما parallèles . deux droites parallèles ، يا confondues ، يا w . distinctes كان هوما distinctes ، نقولو عليهم . parallèles موش ديما ، point commun ما عندهمش حتّى droites زوز : ثبّت مليح strictement parallèles . w شوف la droite D prime ، w la droite D perce le plan en A : la figure deux في الـ plan w ما تتعدّاش من A . ما يتلاقاوش ، أما موش parallèles ، خاطر موش في نفس الـ plan .

Voici maintenant la définition. Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont contenues dans un même plan et si elles sont parallèles dans ce plan. Il faut donc deux choses : les deux droites sont dans un même plan, et dans ce plan elles sont parallèles. Deux droites parallèles sont soit confondues, soit distinctes. Et si elles sont distinctes, on dit qu'elles sont strictement parallèles. Fais bien attention : deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas toujours parallèles. Regarde la figure deux : la droite D perce le plan en A, et la droite D prime est dans le plan et ne passe pas par A. Elles ne se rencontrent pas, mais elles ne sont pas parallèles, parce qu'elles ne sont pas dans un même plan.

Définition. Deux droites de l'espace sont **parallèles** si elles sont contenues dans un même plan et si elles sont parallèles dans ce plan.

Vocabulaire. Deux droites parallèles sont soit confondues, soit distinctes. Lorsqu'elles sont distinctes, on dit qu'elles sont **strictement parallèles**.

Remarque. Deux droites D et D' de l'espace telles que $D \cap D' = \varnothing$ ne sont pas forcément parallèles.

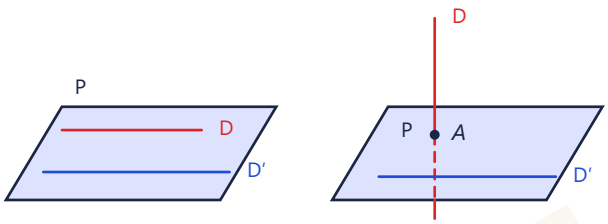


Fig. 1 : D et D' sont parallèles. Fig. 2 : D et D' n'ont aucun point commun, mais ne sont pas parallèles.

Deux figures côte à côte. Figure 1 : un plan P dessiné comme un parallélogramme, et dans ce plan deux droites D et D' tracées l'une au-dessus de l'autre, parallèles. Figure 2 : un plan P, une droite D verticale qui le traverse en un point A, et une droite D' tracée dans le plan P, qui ne passe pas par A.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure 2, la droite D perce le plan P au point A, et la droite D' est contenue dans le plan P sans passer par A. Les droites D et D' sont-elles parallèles ?

Aucun point commun — La droite D ne rencontre le plan P qu'au point A, et A n'est pas sur D' : les deux droites n'ont aucun point commun.

$D \cap D' = \varnothing$

Pas coplanaires — Un plan qui contiendrait D et D' contiendrait la droite D' et le point A : ce serait le plan P. Or la droite D n'est pas contenue dans P.

aucun plan ne contient D et D'

Conclusion — Les droites D et D' ne sont pas coplanaires : elles ne sont pas parallèles, bien qu'elles n'aient aucun point commun.

non

D et D' ne sont pas parallèles

À ne pas faire : $D \cap D' = \varnothing$, donc D et D' sont parallèles — D et D' sont parallèles si, en plus, elles sont contenues dans un même plan. Dans le plan, deux droites sans point commun sont parallèles ; dans l'espace, elles peuvent aussi être non coplanaires.

À ne pas faire : Deux droites parallèles sont toujours distinctes — Deux droites parallèles sont soit confondues, soit strictement parallèles. Une droite est parallèle à elle-même : « strictement » précise que les deux droites sont distinctes.

3. THÉORÈME

Une parallèle par un point, un plan par deux parallèles

CE QU'IL DIT

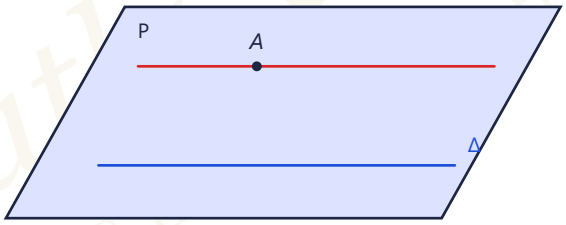
3andna zouz nata2ej mohemmin. Le premier résultat : ne5dhou droite Δ, w point A elli ma houch 3la Δ. Il existe une droite et une seule passant par A et parallèle à Δ. 3lech ? La droite Δ w le point A y3arrfou plan wa7ed, nsammiwh P. W koll droite tet3adda men A w parallèle à Δ, lezem tkoun fel plan P. W fel plan P, men A tet3adda parallèle wa7da bark. Le deuxième résultat : deux droites strictement parallèles, yet3adda menhom plan wa7ed bark. Ya3ni deux droites strictement parallèles y3arrfou plan, kima trois points non alignés.

عندنا زوز نتايج مهمّين . le premier résultat : ناخذو point A ، droite delta اللي ما هوش على delta . il existe يعرّفو plan la droite delta w le point A ؟ علاش . une droite et une seule passant par A et parallèle à delta من ، plan P في الـ plan P . w لازم تكون في الـ ، A w parallèle à delta تتعدّى droite كل P . w نسمّيوه واحد ، A تتعدّى parallèle وحدة برك . le deuxième résultat : deux droites strictement parallèles ، يتعدّى منهم plan يعرّفو deux droites strictement parallèles يعني . واحد برك ، كيما plan . trois points non alignés

Nous avons deux résultats importants. Le premier résultat : prenons une droite delta, et un point A qui n'est pas sur delta. Il existe une droite et une seule passant par A et parallèle à delta. Pourquoi ? La droite delta et le point A définissent un seul plan, qu'on appelle P. Et toute droite qui passe par A et qui est parallèle à delta doit être dans le plan P. Or, dans le plan P, il passe par A une seule parallèle. Le deuxième résultat : par deux droites strictement parallèles, il passe un seul plan. Autrement dit, deux droites strictement parallèles définissent un plan, comme trois points non alignés.

1. Soit Δ une droite de l'espace et A un point n'appartenant pas à Δ. **Il existe une droite et une seule passant par A et parallèle à la droite Δ.**

2. Soient D et D' deux droites strictement parallèles. **Il existe un unique plan contenant D et D'.**



Dans le plan P défini par la droite Δ et le point A, une seule parallèle à Δ passe par A.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Une droite Δ est tracée en bleu dans ce plan. Un point A du plan, qui n'est pas sur Δ, est marqué. La droite qui passe par A et qui est parallèle à Δ est tracée en rouge, dans le plan P.

DÉMONSTRATION

1. On considère le plan P défini par la droite Δ et le point A. Une droite passant par A et parallèle à Δ est, par définition, dans un même plan que Δ ; ce plan contient Δ et A : c'est le plan P. Or, dans le plan

P, il passe par A une parallèle à Δ et une seule. Il existe donc une droite et une seule passant par A et parallèle à Δ.

2. Par définition, deux droites parallèles sont contenues dans un même plan : il existe un plan contenant D et D'. Soit A un point de D' ; comme les droites sont strictement parallèles, A n'est pas sur D. Tout plan contenant D et D' contient la droite D et le point A : c'est le plan défini par D et A. Ce plan est donc unique.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. a) Quelle est la parallèle à (BC) passant par I ? b) Quel est le plan déterminé par les droites (IJ) et (BC) ?

La parallèle — Dans le triangle ABC, la droite des milieux (IJ) est parallèle à (BC) et passe par I. Comme il n'existe qu'une seule parallèle à (BC) passant par I, c'est elle.

a) la droite (IJ)

Le plan — Les droites (IJ) et (BC) sont strictement parallèles : un seul plan les contient. Elles sont toutes les deux dans le plan (ABC).

b) le plan (ABC)

la droite (IJ) et le plan (ABC)

À ne pas faire : Par un point de l'espace, il passe une infinité de droites parallèles à une droite donnée — Par un point de l'espace, il passe une seule droite parallèle à une droite donnée. Toute parallèle est dans le plan défini par la droite et le point, et dans ce plan la parallèle est unique.

4. PROPRIÉTÉ

Propriétés 1 et 2

CE QU'IL DIT

Tawa zouz propriétés na9blouhom men ghir démonstration. La propriété 1 : si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre. Ya3ni el plan elli y9oss wa7da, y9oss lo5ra zeda. La propriété 2 : si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles. Hedhi ta3rafha fi le plan, w hiya s7i7a zeda fi l'espace. Ne5dhou exemple fi parallélépipède ABCDEFGH. La droite (AB) parallèle à la droite (DC), w la droite (HG) parallèle à la droite (DC). Donc la droite (AB) parallèle à la droite (HG).

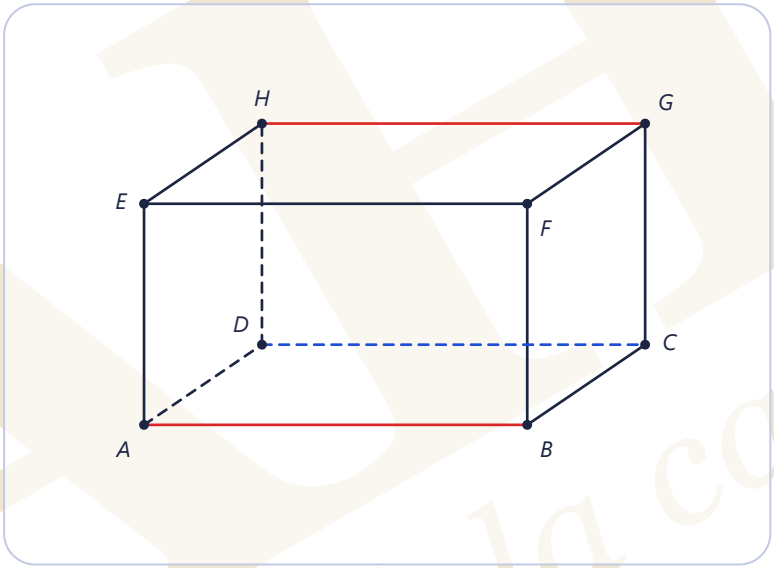
توّة زوز propriétés نقبلوهم من غير démonstration . la propriété un : si deux droites sont parallèles ، tout plan qui coupe l'une coupe l'autre . يعني الـ plan اللي يقصّ وحدة ، يقصّ الأخرى زادة . la propriété deux : si deux droites sont parallèles à une même troisième ، elles sont parallèles entre elles . هاذي تعرفها في le parallélépipède A B C D E F G H . la droite A B في exemple ناخذو . l'espace في زادة صحيحة هي plan ، w parallèle à la droite D C ، w la droite H G parallèle à la droite D C . donc la droite A B parallèle à la droite H G .

Voici maintenant deux propriétés qu'on admet sans démonstration. La propriété un : si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre. Autrement dit, un plan qui coupe l'une coupe aussi l'autre. La propriété deux : si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles. Tu la connais dans le plan, et elle est vraie aussi dans l'espace. Prenons un exemple dans un parallélépipède A B C D E F G H. La droite A B est parallèle à la droite D C, et la droite H G est parallèle à la droite D C. Donc la droite A B est parallèle à la droite H G.

On admet les deux propriétés suivantes.

Propriété 1. Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

Propriété 2. Si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.



(AB) et (DC) sont parallèles, (DC) et (HG) aussi : (AB) et (HG) sont parallèles.

Un parallélépipède ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. L'arête [AB] est repassée en rouge, l'arête [DC] en bleu et l'arête [HG] en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède : chacune de ses faces est un parallélogramme. Montrer que les droites (AB) et (HG) sont parallèles.

Dans la face ABCD — $ABCD$ est un parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles.
(AB) est parallèle à (DC)

Dans la face DCGH — $DCGH$ est un parallélogramme.
(HG) est parallèle à (DC)

Propriété 2 — Les droites (AB) et (HG) sont parallèles à une même troisième, la droite (DC) : elles sont parallèles entre elles.
(AB) est parallèle à (HG)

(AB) et (HG) sont parallèles

À ne pas faire : (AB) et (HG) ne sont pas dans une même face, donc on ne peut rien dire — (AB) et (HG) sont toutes les deux parallèles à (DC) : elles sont parallèles. La propriété 2 remplace la recherche d'un plan commun : il suffit d'une troisième droite parallèle aux deux.

---

5. APPLICATION

Exemple : les milieux des arêtes d'un tétraèdre

CE QU'IL DIT

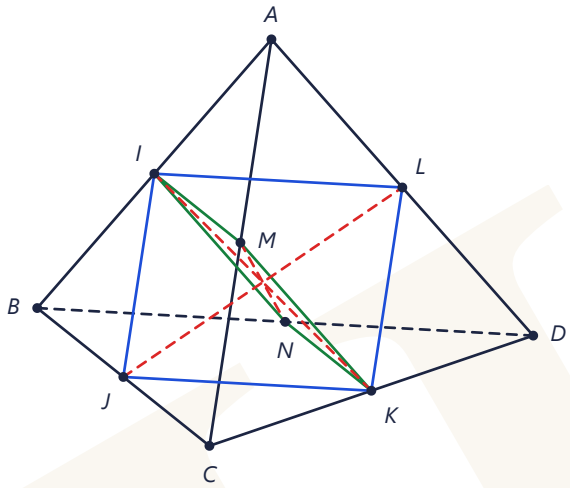
Ne5dhou tétraèdre ABCD, w I, J, K, L houma les milieux mta3 [AB], [BC], [CD] w [DA]. Fi le triangle ABC, la droite (IJ) parallèle à la droite (AC), w IJ égale la moitié de AC. W fi le triangle ADC, la droite (LK) parallèle à la droite (AC), w LK égale la moitié de AC. Donc b la propriété 2, la droite (IJ) parallèle à la droite (LK), w IJ égale LK. El 7asel : IJKL parallélogramme. W b nafs et-tari9a, m3a M milieu de [AC] w N milieu de [BD], nal9aw IMKN parallélogramme. Ez-zouz parallélogrammes 3andhom nafs la diagonale [IK]. Donc les trois droites (IK), (JL) w (MN) yetle9aw fi point wa7ed : le milieu de [IK].

le triangle A B C ، la في . A B ، B C ، C D w D A متاع les milieux هوما tétraèdre A B C D ، w I ، J ، K ، L ناخذو le triangle A D C ، la droite L K في droite I J parallèle à la droite A C ، w I J égale la moitié de A C . w la propriété deux ، la droite I J parallèle à بـ parallèle à la droite A C ، w L K égale la moitié de A C . donc M milieu de A C w مع ، بنفس الطريقة I J K L parallélogramme . w : الحاصل . la droite L K ، w I J égale L K la diagonale I K . عندهم نفس parallélogrammes الزوج . I M K N parallélogramme نلقاو ، N milieu de B D . le milieu de I K : واحد point يتلاقاو في donc les trois droites I K ، J L w M N

Prenons un tétraèdre A B C D, et I, J, K, L les milieux de A B, B C, C D et D A. Dans le triangle A B C, la droite I J est parallèle à la droite A C, et I J égale la moitié de A C. Et dans le triangle A D C, la droite L K est parallèle à la droite A C, et L K égale la moitié de A C. Donc, par la propriété deux, la droite I J est parallèle à la droite L K, et I J égale L K. En résumé : I J K L est un parallélogramme. Et de la même façon, avec M milieu de A C et N milieu de B D, on trouve que I M K N est un parallélogramme. Les deux parallélogrammes ont la même diagonale I K. Donc les trois droites I K, J L et M N se coupent en un même point : le milieu de I K.

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit M et N les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

Dans chaque face, le théorème des milieux donne une parallèle à une arête ; la propriété 2 relie ensuite ces parallèles d'une face à l'autre.



IJKL et IMKN sont deux parallélogrammes : ils ont la même diagonale [IK].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes [AB], [BC], [CD] et [DA] ; le quadrilatère IJKL est tracé en bleu. Les points M et N sont les milieux des arêtes [AC] et [BD] ; le quadrilatère IMKN est tracé en vert. Les trois segments [IK], [JL] et [MN] sont tracés en rouge et se coupent en un même point.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme. 2) Montrer que $IMKN$ est un parallélogramme. 3) En déduire que, dans un tétraèdre, les trois droites joignant les milieux des arêtes opposées sont concourantes.

Dans le triangle ABC — I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$: (IJ) est parallèle à (AC).

$$IJ = \frac{1}{2}AC$$

Dans le triangle ADC — L et K sont les milieux de $[DA]$ et $[CD]$: (LK) est parallèle à (AC).

$$LK = \frac{1}{2}AC$$

IJKL — D'après la propriété 2, (IJ) et (LK) sont parallèles ; de plus $IJ = LK$. Le quadrilatère $IJKL$ a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

$$IJKL \text{ est un parallélogramme}$$

IMKN — De même, dans les triangles ABC et DBC, les droites (IM) et (NK) sont parallèles à (BC), avec IM et NK égaux à la moitié de BC.

$$IMKN \text{ est un parallélogramme}$$

Les diagonales — Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Le milieu de $[IK]$ est donc aussi le milieu de $[JL]$, dans $IJKL$, et le milieu de $[MN]$, dans $IMKN$.

$$(IK),\ (JL) \text{ et } (MN) \text{ sont concourantes}$$

(IK), (JL) et (MN) sont concourantes

À ne pas faire : (IJ) et (LK) sont parallèles, donc $IJKL$ est un parallélogramme — (IJ) et (LK) sont parallèles **et** $IJ = LK$, donc $IJKL$ est un parallélogramme. Deux côtés opposés parallèles donnent seulement un trapèze : il faut aussi l'égalité des longueurs, ou le parallélisme des deux autres côtés.

---

6. EXEMPLE

Exemple : des parallèles dans une pyramide

CE QU'IL DIT

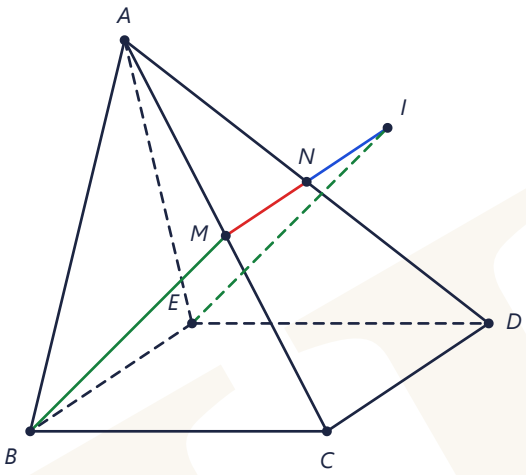
Ne5dhou pyramide ABCDE, le sommet A, w la base BCDE parallélogramme. M milieu de [AC], w N milieu de [AD]. Fi le triangle ACD, la droite (MN) parallèle à la droite (CD). W fi la base, la droite (CD) parallèle à la droite (EB), 5ater BCDE parallélogramme. Donc b la propriété 2, la droite (MN) parallèle à la droite (EB). Tawa I houwa le symétrique de M par rapport à N. Ya3ni MI égale deux fois MN, ya3ni MI égale CD, w CD égale EB. Donc fi le quadrilatère BMIE, zouz côtés parallèles w 3andhom nafs la longueur : houwa parallélogramme. El 7asel : la droite (BM) parallèle à la droite (EI).

pyramide A B C D E ، le sommet A ، w la base B C D E parallélogramme . M milieu de A C ، w N ناخذو la base ، la droite C D في le triangle A C D ، la droite M N parallèle à la droite C D . w في . milieu de A D la propriété deux ، la droite M N بـ B C D E parallélogramme . donc خاطر ، parallèle à la droite E B ، M I égale deux fois M N يعني . le symétrique de M par rapport à N هو I توّة . parallèle à la droite E B عندهم côtés parallèles w زوز ، le quadrilatère B M I E في M I égale C D ، w C D égale E B . donc يعني . la droite B M parallèle à la droite E I : الحاصل . parallélogramme هو : la longueur نفس

Prenons une pyramide A B C D E, de sommet A, dont la base B C D E est un parallélogramme. M est le milieu de A C, et N le milieu de A D. Dans le triangle A C D, la droite M N est parallèle à la droite C D. Et dans la base, la droite C D est parallèle à la droite E B, parce que B C D E est un parallélogramme. Donc, par la propriété deux, la droite M N est parallèle à la droite E B. Maintenant, I est le symétrique de M par rapport à N. Donc M I égale deux fois M N, c'est-à-dire M I égale C D, et C D égale E B. Donc, dans le quadrilatère B M I E, deux côtés sont parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme. En résumé : la droite B M est parallèle à la droite E I.

Dans la figure, $ABCDE$ est une pyramide de sommet A dont la base $BCDE$ est un parallélogramme. Les points M et N sont les milieux respectifs des arêtes $[AC]$ et $[AD]$.

Dans le plan (ACD), on désigne par I le symétrique de M par rapport à N.



M et N sont les milieux de [AC] et [AD] ; I est le symétrique de M par rapport à N.

Une pyramide ABCDE de sommet A, vue en perspective. Sa base BCDE est un parallélogramme : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, E derrière à gauche. Les arêtes cachées [EB], [ED] et [AE] sont en pointillés. Le point M est le milieu de l'arête [AC] et le point N le milieu de l'arête [AD]. Le point I est sur la droite (MN), au-delà de N, avec N milieu de [MI]. Les segments [MN], [EB], [BM] et [EI] sont tracés.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que les droites (MN) et (EB) sont parallèles. 2) Montrer que les droites (BM) et (EI) sont parallèles.

Dans le triangle ACD — M et N sont les milieux de $[AC]$ et $[AD]$: (MN) est parallèle à (CD).

$$MN = \frac{1}{2}CD$$

Dans la base — $BCDE$ est un parallélogramme : (CD) est parallèle à (EB). D'après la propriété 2, (MN) est parallèle à (EB).

$$(MN) \text{ est parallèle à } (EB)$$

Le point I — N est le milieu de $[MI]$: I est sur la droite (MN) et $MI = 2MN = CD$. Or $CD = EB$.

$$MI = EB$$

Un parallélogramme — Dans le quadrilatère $BMIE$, les côtés $[MI]$ et $[BE]$ sont parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme. Ses deux autres côtés sont donc parallèles.

$$(BM) \text{ est parallèle à } (EI)$$

$$(MN) \text{ parallèle à } (EB) \text{ et } (BM) \text{ parallèle à } (EI)$$

À ne pas faire : (MN) est dans la face ACD et (EB) dans la base : elles ne peuvent pas être parallèles — (MN) et (EB) sont toutes les deux parallèles à (CD) : elles sont parallèles. Deux droites de deux faces différentes peuvent être parallèles : la propriété 2 le montre sans chercher leur plan commun.

7. ACTIVITÉ

Pour comprendre : une droite et un plan

CE QU'IL DIT

Tawa nchoufou droite w plan. Ne5dhou parallélépipède ABCDEFGH. La droite (AB), sécante au plan (ABC) ? Le, 5ater hiya el koll fel plan hedha. W la droite (EG) ? Hiya parallèle à la droite (AC), w ma tetle9ach m3a le plan (ABC). W la droite (DH) ? Hedhi 3andha point wa7ed commun m3a le plan (ABC), houwa D : la droite (DH) perce le plan en D. Ya3ni famma trois cas : la droite fel plan, walla perce le plan, walla ma tetle9ach m3ah. W chouf la droite (AD) : hiya parallèle à la droite (BC), elli hiya fi le plan (BCG). N9oulou elli la droite (AD) parallèle au plan (BCG).

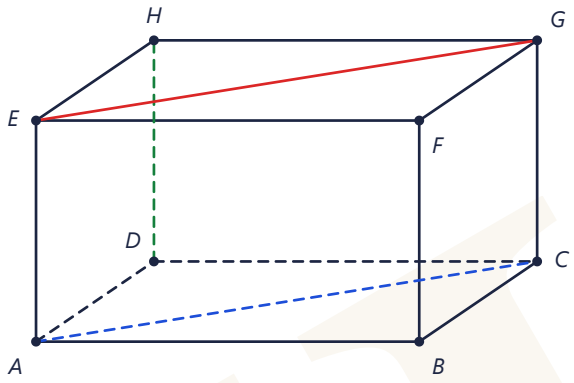
تو‌ّة نشوفو droite w plan . ناخذو sécante au plan A B C ، la droite A B . parallélépipède A B C D E F G H ؟ لا
خاطر هي الكل في الـ plan هذا . w la droite E G ؟ هي w ، la droite A C parallèle à la ما تتلاقاش مع le plan A
D : la droite D H perce le هو ، le plan A B C مع commun واحد point هاذي عندها ؟ B C . w la droite D H
شوف la w . ولّا ما تتلاقاش معاه ، perce le plan ، ولّا plan في الـ trois cas : la droite يعني فمّا . plan en D
la droite A D parallèle au نقولو اللي . le plan B C G اللي هي في ، parallèle à la droite B C هي : droite A D
. plan B C G

Voyons maintenant une droite et un plan. Prenons un parallélépipède A B C D E F G H. La droite A B est-elle sécante au plan A B C ? Non, parce qu'elle est tout entière dans ce plan. Et la droite E G ? Elle est parallèle à la droite A C, et elle ne rencontre pas le plan A B C. Et la droite D H ? Celle-ci a un seul point commun avec le plan A B C, c'est D : la droite D H perce le plan en D. Il y a donc trois cas : la droite est dans le plan, ou elle perce le plan, ou elle ne le rencontre pas. Et regarde la droite A D : elle est parallèle à la droite B C, qui est dans le plan B C G. On dit que la droite A D est parallèle au plan B C G.

Dans la figure, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède : E, F, G et H sont au-dessus de A, B, C et D, et chaque face est un parallélogramme.

On regarde comment une droite se place par rapport à un plan : elle peut y être contenue, le percer en un point, ou ne pas le rencontrer du tout.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Le parallélépipède ABCDEFGH : (EG) ne rencontre pas le plan (ABC), (DH) le perce en D.

Un parallélépipède ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. La diagonale [EG] de la face du dessus est tracée en rouge, la diagonale [AC] de la face du dessous en bleu, et l'arête [DH] est repassée en vert.

EXEMPLE TRAITÉ

1) a) La droite (AB) est-elle sécante au plan (ABC) ? b) La droite (EG) est-elle sécante au plan (ABC) ? c) La droite (DH) est-elle sécante au plan (ABC) ? 2) Nommer des droites parallèles au plan (BCG). 3) Nommer des droites parallèles au plan (AEC).

(AB) — La droite (AB) est contenue dans le plan (ABC) : leur intersection n'est pas un point, c'est la droite tout entière.

a) non

(EG) — $AEGC$ est un parallélogramme, car $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur : (EG) est parallèle à (AC). La droite (EG) ne rencontre pas le plan (ABC).

b) non

(DH) — La droite (DH) a un seul point commun avec le plan (ABC) : le point D. Elle perce le plan en D.

c) oui, en D

Le plan (BCG) — Les droites (AD) et (EH) sont parallèles à (BC) ; les droites (AE) et (DH) sont parallèles à (BF). Aucune ne rencontre le plan (BCG).

(AD), (EH), (AE), (DH)

Le plan (AEC) — Le plan (AEC) contient la droite (AE). Les droites (BF) et (DH) sont parallèles à (AE) et ne rencontrent pas ce plan.

(BF), (DH)

a) non ; b) non ; c) oui, en D

À ne pas faire : La droite (AB) a des points communs avec le plan (ABC), donc elle lui est sécante — La droite (AB) est contenue dans le plan (ABC) : elle ne lui est pas sécante. Une droite et un plan sont sécants lorsque leur intersection est un seul point.

---

8. DÉFINITION

Droite parallèle à un plan

CE QU'IL DIT

Hedhi la définition. On dit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Ya3ni yekfi nal9aw droite wa7da fel plan, parallèle à la droite mte3na. N9oulou zeda : le plan P parallèle à la droite D. W ken zid la droite D w le plan P ma 3andhomch 7atta point commun, n9oulou elli houma strictement parallèles. W thabbet mli7 : la droite parallèle à un plan, mouch parallèle l koll les droites mta3 el plan. Mathalan fi le parallélépipède, la droite (EF) parallèle au plan (ABC), ama mouch parallèle à la droite (BC).

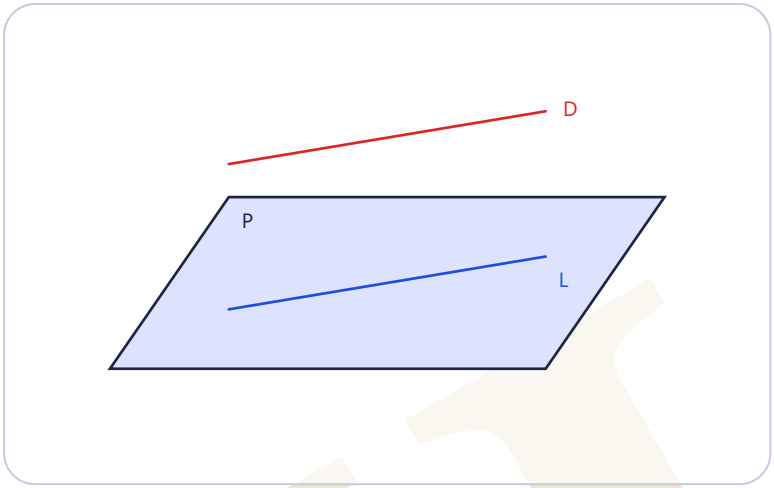
la définition . on dit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce هاذي le plan P parallèle à : نقولو زادة . متاعنا plan ، parallèle à la droite الـ وحدة في droite يعني يكفي نلقاو . plan la droite D w le plan P كان زيد la droite D . w point commun حتّى ما عندهمش ، نقولو اللي هوما les droites لكل parallèle موش ، la droite parallèle à un plan : ثبّت مليح strictement parallèles . w متاع الـ . parallèle à la droite B C أما موش ، le parallélépipède ، la droite E F parallèle au plan A B C في مثلاً . plan

Voici la définition. On dit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Il suffit donc de trouver une seule droite du plan qui soit parallèle à notre droite. On dit aussi : le plan P est parallèle à la droite D. Et si, de plus, la droite D et le plan P n'ont aucun point commun, on dit qu'ils sont strictement parallèles. Fais bien attention : une droite parallèle à un plan n'est pas parallèle à toutes les droites de ce plan. Par exemple, dans le parallélépipède, la droite E F est parallèle au plan A B C, mais elle n'est pas parallèle à la droite B C.

Définition. On dit qu'une droite est **parallèle à un plan** si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Vocabulaire. Si une droite D est parallèle à un plan P, on dit aussi que le plan P est parallèle à la droite D, ou que le plan P et la droite D sont parallèles, et on écrit $D \parallel P$ ou $P \parallel D$.

Si, de plus, $D \cap P = \varnothing$, on dit que D et P sont **strictement parallèles**.



D est parallèle à une droite L du plan P : D est parallèle à P.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme. Une droite L est tracée en bleu dans ce plan. Au-dessus du plan, une droite D est tracée en rouge, parallèle à la droite L ; elle ne rencontre pas le plan.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un parallélépipède $ABCDEFGH$: a) la droite (EF) est-elle parallèle au plan (ABC) ? b) La droite (AB) est-elle parallèle au plan (ABC) ? c) La droite (EF) est-elle parallèle à la droite (BC) ?

(EF) — $ABFE$ est un parallélogramme : (EF) est parallèle à (AB), qui est une droite du plan (ABC).

a) oui

(AB) — La droite (AB) est une droite du plan (ABC), et elle est parallèle à elle-même : elle est parallèle au plan, sans lui être strictement parallèle.

b) oui

(EF) et (BC) — La parallèle à (EF) passant par B est (AB), et non (BC). Les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles, alors que (EF) est parallèle au plan (ABC), qui contient (BC).

c) non

a) oui ; b) oui ; c) non

À ne pas faire : Si une droite est parallèle à un plan, alors elle est parallèle à toute droite de ce plan — Si une droite est parallèle à un plan, alors elle est parallèle à **une** droite de ce plan. Dans le parallélépipède, (EF) est parallèle au plan (ABC), mais elle n'est pas parallèle à (BC).

À ne pas faire : Une droite contenue dans un plan n'est pas parallèle à ce plan — Une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan, mais pas strictement. Elle est parallèle à une droite du plan : elle-même.

9. THÉORÈME

Propriété 3

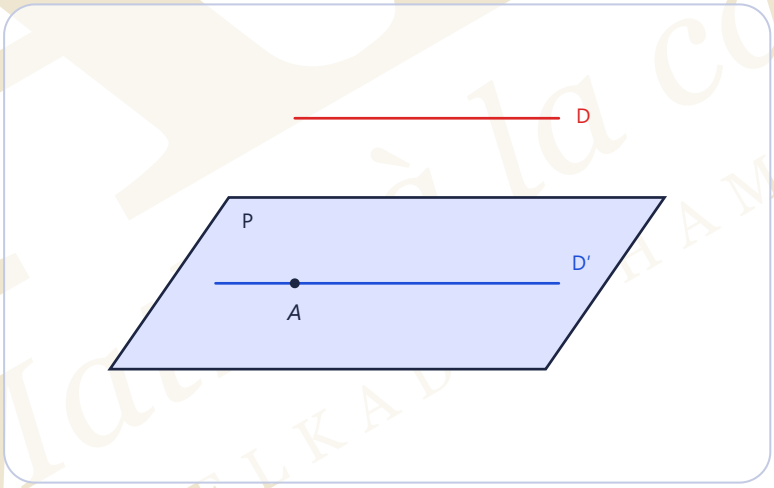
CE QU'IL DIT

La propriété 3. 3andna droite D parallèle à un plan P, w point A fel plan P. Narsmou men A la droite D', parallèle à D. La propriété t9oul : D' est incluse dans le plan P. Nbayynouha par l'absurde. Nafrdhou elli D' mouch fel plan P. Wa9tha D' coupe le plan P en A bark. D parallèle à P, ya3ni parallèle à une droite Δ mta3 P, w b la propriété 2, D' parallèle à Δ. W b la propriété 1, el plan elli coupe D', coupe Δ zeda. Ama Δ hiya el koll fel plan P : hedha ma yjich. Donc D' est incluse dans le plan P.

A la droite D نرسمو من . plan P الـ في droite D parallèle à un plan P ، w point A عندنا . la propriété trois نفرضو . par l'absurde نبيّنوها . D prime est incluse dans le plan P : تقول prime ، parallèle à D . la propriété اللي D prime موش في الـ plan P . وقتها A en coupe le plan P prime D . برك P à parallèle D . يعني ، parallèle à une droite delta . w بـ P ، w متاع à une droite delta plan الـ ، la propriété un بـ la propriété deux ، D prime parallèle à delta donc D prime est . هذا ما يجيش : plan P الـ في الكل هي delta أما . زادة coupe D prime ، coupe delta اللي . incluse dans le plan P

La propriété trois. On a une droite D parallèle à un plan P, et un point A du plan P. On trace par A la droite D prime, parallèle à D. La propriété dit : D prime est incluse dans le plan P. Montrons-la par l'absurde. Supposons que D prime n'est pas dans le plan P. Alors D prime coupe le plan P au seul point A. D est parallèle à P, donc parallèle à une droite delta de P, et, par la propriété deux, D prime est parallèle à delta. Et par la propriété un, un plan qui coupe D prime coupe aussi delta. Mais delta est tout entière dans le plan P : c'est impossible. Donc D prime est incluse dans le plan P.

Propriété 3. Si une droite D et un plan P sont parallèles, alors toute droite parallèle à D et passant par un point de P est incluse dans le plan P.



D est parallèle à P ; la parallèle à D passant par le point A de P est incluse dans P.

Un plan P dessiné comme un parallélogramme, avec un point A marqué dans ce plan. Au-dessus du plan, une droite D est tracée en rouge, parallèle au plan. La droite D', qui passe par A et qui est parallèle à D, est tracée en bleu : elle est dans le plan P.

DÉMONSTRATION

Soit D une droite parallèle à un plan P et soit A un point de P. On désigne par D' la droite passant par A et parallèle à la droite D.

Comme D est parallèle à P, elle est parallèle à une droite Δ du plan P. D'après la propriété 2, D' et Δ sont parallèles.

On raisonne par l'absurde : supposons que D' n'est pas incluse dans P. Comme elle passe par le point A de P, elle coupe le plan P au seul point A. D'après la propriété 1, le plan P, qui coupe D', coupe aussi sa parallèle Δ. C'est impossible, puisque Δ est contenue dans P.

Donc D' est incluse dans le plan P.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un parallélépipède $ABCDEFGH$, la droite (EF) est parallèle au plan (ABC). Quelle est la parallèle à (EF) passant par C ? Dans quel plan est-elle ?

La parallèle — (EF) est parallèle à (AB), et (AB) est parallèle à (DC) : d'après la propriété 2, (DC) est la parallèle à (EF) passant par C.

la droite (DC)

Propriété 3 — (EF) est parallèle au plan (ABC) et C est un point de ce plan : la parallèle à (EF) passant par C est incluse dans le plan (ABC). C'est bien le cas de (DC).

$(DC) \subset (ABC)$

$$(DC) \subset (ABC)$$

À ne pas faire : La parallèle à D passant par un point A de P peut percer le plan P en A — Si D est parallèle à P, la parallèle à D passant par A est incluse dans P. C'est la propriété 3 : cette parallèle ne sort pas du plan.

10. PROPRIÉTÉ

Propriétés 4 et 5

CE QU'IL DIT

Tawa zouz propriétés o5rin. La propriété 4 : si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre. W la propriété 5 : si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection. Chouf la figure : les deux plans P w P' yetle9aw fi la droite Δ. La droite D parallèle à P w parallèle à P'. Donc D parallèle à Δ. 3lech ? Ne5dhou point A 3la Δ. B la propriété 3, la parallèle à D elli tet3adda men A hiya fel plan P, w hiya zeda fel plan P'. Donc hiya la droite Δ bidha.

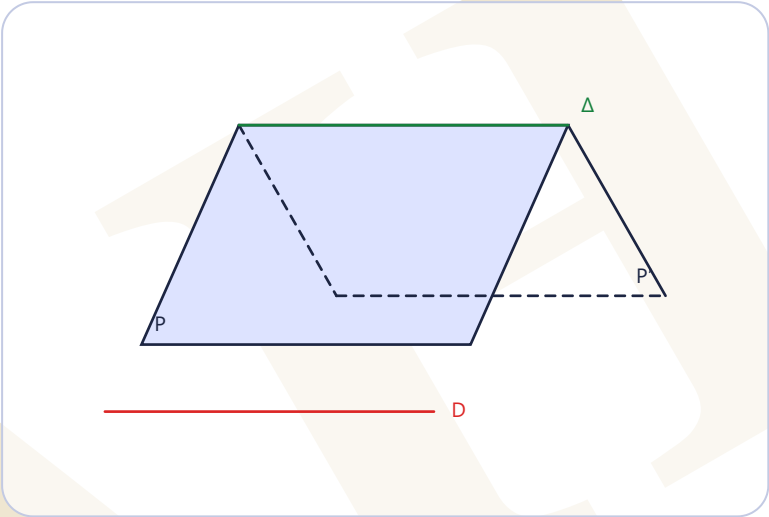
la propriété quatre : si deux droites sont parallèles ، tout plan parallèle à l'une . أخرين propriétés زوز توّة est parallèle à l'autre . w la propriété cinq : si une droite est parallèle à deux plans sécants ، alors elle est la droite في يتلاقاو la figure : les deux plans P w P prime شوف . parallèle à leur droite d'intersection point A ناخذو ؟ علاش . delta . la droite D parallèle à P w parallèle à P prime . donc D parallèle à delta plan الـ في زادة هي plan P ، w الـ في هي A من تتعدّى اللي la propriété trois ، la parallèle à D بـ . delta على بيدها la droite delta هي P prime . donc

Voici deux autres propriétés. La propriété quatre : si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre. Et la propriété cinq : si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection. Regarde la figure : les deux plans P et P prime se coupent suivant la

droite delta. La droite D est parallèle à P et parallèle à P prime. Donc D est parallèle à delta. Pourquoi ? Prenons un point A sur delta. Par la propriété trois, la parallèle à D qui passe par A est dans le plan P, et elle est aussi dans le plan P prime. Donc c'est la droite delta elle-même.

Propriété 4. Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Propriété 5. Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.



D est parallèle aux plans sécants P et P′ : D est parallèle à leur droite d'intersection Δ.

Deux plans P et P' dessinés comme les deux pans d'un toit : ils se coupent suivant une droite Δ, tracée en vert, qui est l'arête du haut. Le plan P est le pan de devant, le plan P' le pan de derrière. En bas, devant le toit, une droite D est tracée en rouge, parallèle à la droite Δ.

DÉMONSTRATION

Propriété 4. Soient D et D' deux droites parallèles et P un plan parallèle à D. On raisonne par l'absurde : si P n'était pas parallèle à D', il couperait D' ; d'après la propriété 1, il couperait aussi D. C'est impossible, puisque D est parallèle à P. Donc P est parallèle à D'.

Propriété 5. Soit D une droite parallèle à deux plans P et Q, sécants suivant une droite Δ, et soit A un point de Δ. D'après la propriété 3, la parallèle à D passant par A est contenue dans le plan P, et aussi dans le plan Q : c'est donc la droite Δ. Ainsi Δ est parallèle à D.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un parallélépipède $ABCDEFGH$, retrouver, avec la propriété 5, que la droite (AE) est parallèle à la droite (CG).

Le plan (BCG) — (AE) est parallèle à (BF), qui est une droite du plan (BCG).
(AE) est parallèle au plan (BCG)

Le plan (DCG) — (AE) est parallèle à (DH), qui est une droite du plan (DCG).
(AE) est parallèle au plan (DCG)

Propriété 5 — Les plans (BCG) et (DCG) sont sécants suivant la droite (CG). La droite (AE), parallèle à ces deux plans, est parallèle à leur droite d'intersection.

(AE) est parallèle à (CG)

(AE) est parallèle à (CG)

À ne pas faire : Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à toutes les droites de ces plans — Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection. La seule droite qui soit à la fois dans les deux plans est leur droite d'intersection.

---

11. THÉORÈME

Propriété 6 : le théorème du toit

CE QU'IL DIT

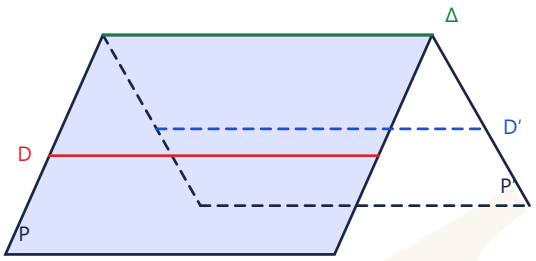
Hedhi la propriété 6, w tetsamma le théorème du toit. 3andna deux droites parallèles D w D'. La droite D fi plan P, w la droite D' fi plan P'. Ken les deux plans sécants, alors leur droite d'intersection Δ est parallèle à D et à D'. 3lech sammineh théorème du toit ? Chouf la figure : les deux plans kima sa9f ed-dar, w la droite Δ hiya el fou9. D w D' houma les bords mta3 es-sa9f, w les trois droites parallèles. La démonstration sehla : D parallèle à P w parallèle à P', donc b la propriété 5, D parallèle à Δ. W b la propriété 2, D' parallèle à Δ zeda.

deux droites parallèles D w D prime . la droite عندنا . le théorème du toit تتسمّى la propriété six ، w هاذي les deux plans sécants ، alors leur droite كان . plan P prime في plan P ، w la droite D prime في D la figure : les شوف ؟ théorème du toit سمّيناه علاش . d'intersection delta est parallèle à D et à D prime w les ، متاع السقف les bords هوما D w D prime . هي الفوق w la droite delta ، كيما سقف الدار deux plans la بـ D parallèle à P w parallèle à P prime ، donc : ساهلة trois droites parallèles . la démonstration . زادة la propriété deux ، D prime parallèle à delta بـ propriété cinq ، D parallèle à delta . w

Voici la propriété six, qu'on appelle le théorème du toit. On a deux droites parallèles D et D prime. La droite D est dans un plan P, et la droite D prime dans un plan P prime. Si les deux plans sont sécants, alors leur droite d'intersection delta est parallèle à D et à D prime. Pourquoi l'appelle-t-on théorème du toit ? Regarde la figure : les deux plans sont comme le toit d'une maison, et la droite delta en est le sommet. D et D prime sont les bords du toit, et les trois droites sont parallèles. La démonstration est simple : D est parallèle à P et parallèle à P prime, donc, par la propriété cinq, D est parallèle à delta. Et par la propriété deux, D prime est aussi parallèle à delta.

Propriété 6 (théorème du toit). Soit D et D' deux droites parallèles, et P et P' deux plans contenant respectivement D et D'.

Si P et P' sont sécants, alors leur droite d'intersection Δ est parallèle à D et à D'.



D est dans P, D' est dans P', D et D' sont parallèles : la droite d'intersection Δ leur est parallèle.

Deux plans P et P' dessinés comme les deux pans d'un toit : ils se coupent suivant une droite Δ, tracée en vert, qui est l'arête du haut. Une droite D est tracée en rouge dans le pan de devant P, et une droite D' en bleu dans le pan de derrière P'. Les trois droites D, D' et Δ sont parallèles.

DÉMONSTRATION

La droite D est contenue dans P : elle est parallèle à P. Elle est parallèle à D', qui est une droite de P' : elle est aussi parallèle à P'.

La droite D est donc parallèle aux deux plans sécants P et P' : d'après la propriété 5, elle est parallèle à leur droite d'intersection Δ.

Enfin D' et Δ sont toutes les deux parallèles à D : d'après la propriété 2, D' est parallèle à Δ.

À ne pas faire : Deux plans qui contiennent deux droites parallèles sont parallèles — Deux plans qui contiennent deux droites parallèles peuvent être sécants : leur droite d'intersection est alors parallèle à ces deux droites. Les deux pans d'un toit contiennent deux bords parallèles, et pourtant ils se coupent le long du faîte.

12. APPLICATION

Exemple : le théorème du toit dans une pyramide

CE QU'IL DIT

Ne5dhou pyramide SABCD, w fi la base, la droite (AB) parallèle à la droite (CD). Nlawwjou 3la l'intersection mta3 le plan (SAD) w le plan (SBC). Le point S fez-zouz plans. W la droite (AD) w la droite (BC) yetle9aw fi point E. E 3la la droite (AD), donc fi le plan (SAD), w E 3la la droite (BC), donc fi le plan (SBC). El 7asel : l'intersection hiya la droite (SE). Tawa le plan (SAB) w le plan (SCD). Houni ma 3andnech point e5er, ama 3andna deux droites parallèles : la droite (AB) fi plan, w la droite (CD) fel plan le5er. Donc b le théorème du toit, l'intersection hiya la droite elli tet3adda men S w parallèle à la droite (AB).

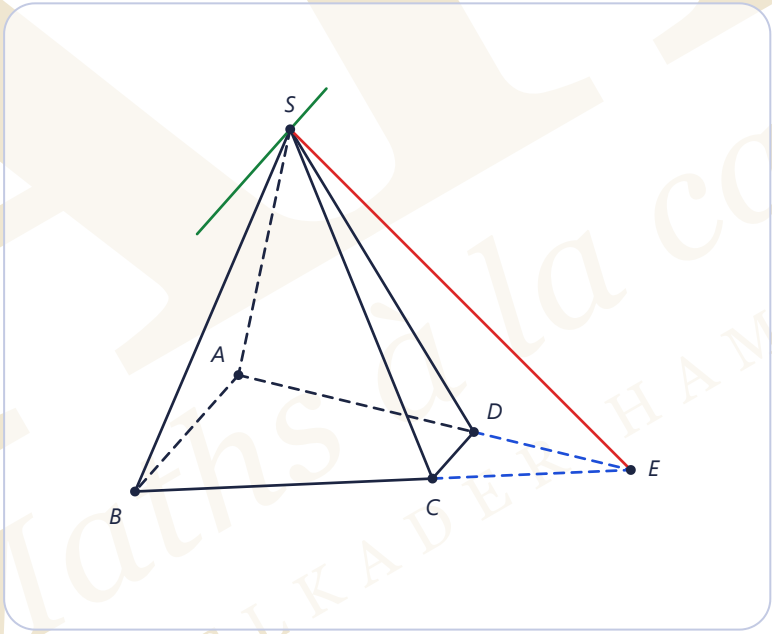
l'intersection على نلوّجو . la base ، la droite A B parallèle à la droite C D في pyramide S A B C D ، w ناخذو يتلاقاو في plans . w la droite A D w la droite B C في الزوز le plan S A D w le plan S B C . le point S متاع

. le plan S B C في la droite B C ، donc على le plan S A D ، w E في la droite A D ، donc على point E . E
الحاصل : l'intersection هي la droite S E . la droite C D في deux droites parallèles : la droite A B عندنا
le بـ donc . الآخر plan الـ في plan ، w
. S w parallèle à la droite A B من اللي تتعدّى la droite هي théorème du toit ، l'intersection

Prenons une pyramide S A B C D dont la base vérifie : la droite A B est parallèle à la droite C D. Cherchons l'intersection du plan S A D et du plan S B C. Le point S est dans les deux plans. Et la droite A D et la droite B C se coupent en un point E. E est sur la droite A D, donc dans le plan S A D, et E est sur la droite B C, donc dans le plan S B C. En résumé : l'intersection est la droite S E. Passons au plan S A B et au plan S C D. Ici, nous n'avons pas d'autre point, mais nous avons deux droites parallèles : la droite A B dans l'un des plans, et la droite C D dans l'autre. Donc, par le théorème du toit, l'intersection est la droite qui passe par S et qui est parallèle à la droite A B.

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S et de base $ABCD$ telle que les droites (AB) et (CD) soient parallèles. Sur la figure, les droites (AD) et (BC) se coupent en un point E.

Deux faces opposées d'une pyramide ont toujours le sommet S en commun : leurs plans sont sécants suivant une droite qui passe par S. Il reste à en trouver un deuxième point, ou la direction.



(SAD) et (SBC) se coupent suivant (SE) ; (SAB) et (SCD) suivant la parallèle à (AB) passant par S.

Une pyramide SABCD de sommet S, vue en perspective. Sa base ABCD est un trapèze : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche ; les côtés [AB] et [CD] sont parallèles, et [CD] est plus court que [AB]. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés. Les droites (AD) et (BC), prolongées en pointillés bleus, se coupent en un point E, à droite de la base. La droite (SE) est tracée en rouge. Une droite verte passe par S, parallèle à (AB).

EXEMPLE TRAITÉ

1) Construire l'intersection des plans (SAD) et (SBC). 2) Construire l'intersection des plans (SAB) et (SCD).

Un point commun — Le point S appartient aux quatre plans.

$$S \in (SAD) \quad \text{et} \quad S \in (SBC)$$

Le point E — E est sur (AD), contenue dans le plan (SAD), et sur (BC), contenue dans le plan (SBC).

$$(SAD) \cap (SBC) = (SE)$$

Deux parallèles — Le plan (SAB) contient (AB), le plan (SCD) contient (CD), et (AB) est parallèle à (CD). Ces deux plans sont sécants, puisqu'ils ont le point S en commun.

$$(AB) \text{ est parallèle à } (CD)$$

Théorème du toit — Leur droite d'intersection est parallèle à (AB) et à (CD), et elle passe par S : c'est la parallèle à (AB) passant par S.

$$\text{la parallèle à } (AB) \text{ passant par } S$$

$$(SE) \quad ; \quad \text{la parallèle à } (AB) \text{ passant par } S$$

À ne pas faire : Les plans (SAB) et (SCD) n'ont que le point S en commun — Les plans (SAB) et (SCD) ont en commun toute la parallèle à (AB) passant par S. Deux plans distincts qui ont un point commun sont sécants suivant une droite ; le théorème du toit en donne la direction.

13. EXEMPLE

Exemple : des droites parallèles à un plan

CE QU'IL DIT

Ne5dhou parallélépipède ABCDEFGH, w I, J, K houma les milieux mta3 [EF], [FG] w [GH]. N7ebbou nbayynou elli la droite (AC) parallèle au plan (IJK). La méthode : nlawwjou fel plan 3la droite wa7da parallèle à la droite (AC). Fi le triangle EFG, la droite (IJ) parallèle à la droite (EG). W AEGC parallélogramme, donc la droite (EG) parallèle à la droite (AC). B la propriété 2, la droite (AC) parallèle à la droite (IJ). W la droite (IJ) hiya fi le plan (IJK). Donc la droite (AC) parallèle au plan (IJK). W kif kif : la droite (BC) parallèle à la droite (FG), w la droite (FG) parallèle à la droite (IK). Donc la droite (BC) parallèle au plan (IJK).

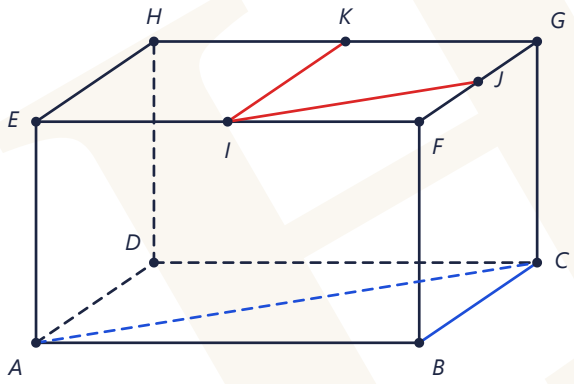
ناخذو K ، J ، I w H G F E متاع les milieux هوما parallélépipède A B C D E F G H ، w droite A C parallèle à la droite وحدة على droite plan الـ في نلوّجو : droite A C parallèle au plan I J K . la méthode le triangle E F G ، la droite I J parallèle à la droite E G . w A E G C parallélogramme ، donc la droite E في . هي la propriété deux ، la droite A C parallèle à la droite I J . w la droite I J بـ . G parallèle à la droite A C la droite B C parallèle à la droite : كيف كيف le plan I J K . donc la droite A C parallèle au plan I J K . w في . F G ، w la droite F G parallèle à la droite I K . donc la droite B C parallèle au plan I J K

Prenons un parallélépipède A B C D E F G H, et I, J, K les milieux de E F, F G et G H. Nous voulons montrer que la droite A C est parallèle au plan I J K. La méthode : on cherche dans le plan une seule droite parallèle à la droite A C. Dans le triangle E F G, la droite I J est parallèle à la droite E G. Et A E G C est un parallélogramme, donc la droite E G est parallèle à la droite A C. Par la propriété deux, la droite A C est parallèle à la droite I J. Et la droite I J est dans le plan I J K. Donc la droite A C est parallèle au plan I J K.

De même : la droite B C est parallèle à la droite F G, et la droite F G est parallèle à la droite I K. Donc la droite B C est parallèle au plan I J K.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède et soit I, J et K les milieux respectifs de $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$.

Pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan, on cherche dans ce plan **une** droite qui lui est parallèle.



I, J et K sont les milieux de [EF], [FG] et [GH] : le plan (IJK) est le plan de la face du dessus.

Un parallélépipède ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les points I, J et K sont les milieux des arêtes [EF], [FG] et [GH] de la face du dessus. Les segments [IJ] et [IK] sont tracés en rouge, la diagonale [AC] de la face du dessous en bleu et l'arête [BC] est repassée en bleu.

EXEMPLE TRAITÉ

Montrer que les droites (BC) et (AC) sont parallèles au plan (IJK).

(IJ) et (EG) — Dans le triangle EFG, I et J sont les milieux de $[EF]$ et $[FG]$: (IJ) est parallèle à (EG).

(IJ) est parallèle à (EG)

(EG) et (AC) — $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur : $AEGC$ est un parallélogramme, donc (EG) est parallèle à (AC). D'après la propriété 2, (AC) est parallèle à (IJ).

(AC) est parallèle au plan (IJK)

(IK) et (FG) — Dans le parallélogramme $EFGH$, I et K sont les milieux de deux côtés opposés : (IK) est parallèle à (FG). Or (FG) est parallèle à (BC).

(BC) est parallèle au plan (IJK)

(AC) et (BC) sont parallèles au plan (IJK)

À ne pas faire : (AC) ne rencontre pas le triangle IJK, donc elle est parallèle au plan (IJK) — (AC) est parallèle à (IJ), une droite du plan (IJK), donc elle est parallèle à ce plan. Un plan est illimité : ne pas rencontrer un triangle tracé dans le plan ne prouve rien. On applique la définition.

---

14. APPLICATION

Un plan parallèle à deux droites

CE QU'IL DIT

Ne5dhou zouz droites D w D' non coplanaires, w point A. Men A narsmou Δ parallèle à D, w Δ' parallèle à D'. Δ w Δ' sécantes en A, donc y3arrfou plan. El plan hedha parallèle à D w parallèle à D', w houwa el wa7id elli yet3adda men A. Tawa exemple : tétraèdre ABCD, w point M 3la le segment [AC]. Ne5dhou el plan elli yet3adda men M w parallèle à la droite (AB) w à la droite (CD). B la propriété 3, fih la parallèle à la droite (AB) elli tet3adda men M : hiya coupe la droite (BC) en N. W fih la parallèle à la droite (CD) elli tet3adda men M : hiya coupe la droite (AD) en Q. W men N, la parallèle à la droite (CD) coupe la droite (BD) en P. El 7asel : la droite (MN) parallèle à la droite (PQ), w la droite (MQ) parallèle à la droite (NP). Donc MNPQ parallélogramme.

delta parallèle à D ، w delta نرسمو A من . droites D w D prime non coplanaires ، w point A ناخذو زوز parallèle à D هذا plan الـ . plan يعرّفو prime parallèle à D prime . delta w delta prime sécantes en A ، donc le على exemple : tétraèdre A B C D ، w point M توّة . A من يتعدّى اللي الوحيد هو w parallèle à D prime ، w la propriété بـ . M w parallèle à la droite A B w à la droite C D من يتعدّى اللي plan الـ ناخذو . segment A C la parallèle à فيه coupe la droite B C en N . w هي : M من تتعدّى اللي la parallèle à la droite A B فيه ، trois N ، la parallèle à la droite C D من coupe la droite A D en Q . w هي : M من تتعدّى اللي la droite C D la droite M N parallèle à la droite P Q ، w la droite M Q parallèle à la : الحاصل . coupe la droite B D en P . droite N P . donc M N P Q parallélogramme

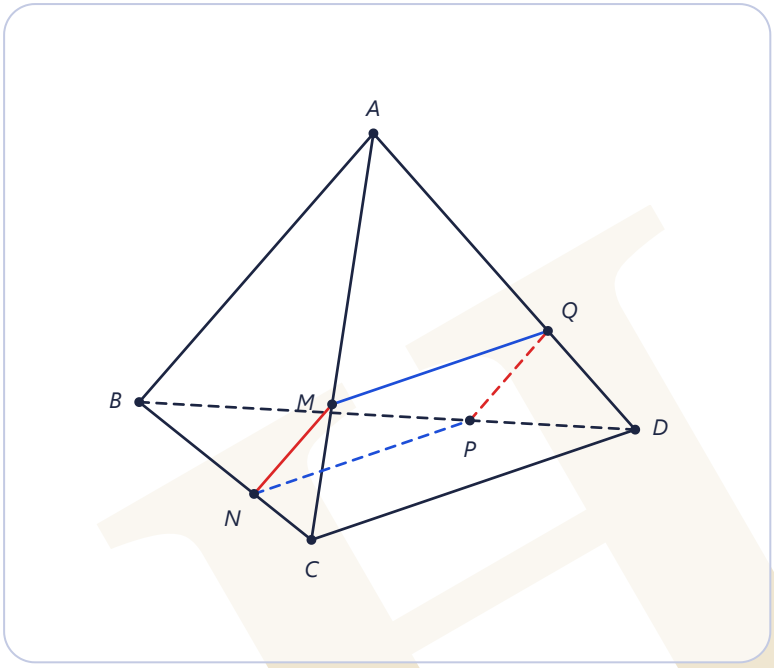
Prenons deux droites D et D prime non coplanaires, et un point A. Par A, traçons delta parallèle à D, et delta prime parallèle à D prime. Delta et delta prime sont sécantes en A, donc elles définissent un plan. Ce plan est parallèle à D et parallèle à D prime, et c'est le seul qui passe par A. Voici un exemple : un tétraèdre A B C D, et un point M sur le segment A C. Prenons le plan qui passe par M et qui est parallèle à la droite A B et à la droite C D. Par la propriété trois, il contient la parallèle à la droite A B qui passe par M : elle coupe la droite B C en N. Et il contient la parallèle à la droite C D qui passe par M : elle coupe la droite A D en Q. Et par N, la parallèle à la droite C D coupe la droite B D en P. En résumé : la droite M N est parallèle à la droite P Q, et la droite M Q est parallèle à la droite N P. Donc M N P Q est un parallélogramme.

1. Soient D et D' deux droites non coplanaires et A un point. On désigne par Δ la parallèle à la droite D passant par A et par Δ' la parallèle à la droite D' passant par A.

Il existe un plan et un seul passant par A et parallèle à la droite D et à la droite D' : c'est le plan défini par les droites Δ et Δ'.

2. Soit $ABCD$ un tétraèdre et M un point du segment $[AC]$ distinct de A et de C. Le plan passant par M et parallèle aux droites (AB) et (CD) coupe les droites (BC), (BD) et (AD)

en N, P et Q.



Le plan passant par M et parallèle à (AB) et à (CD) coupe le tétraèdre suivant MNPQ.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point M est sur l'arête [AC], le point N sur l'arête [BC], le point P sur l'arête [BD] et le point Q sur l'arête [AD]. Les segments [MN] et [PQ], tracés en rouge, sont parallèles à (AB) ; les segments [MQ] et [NP], tracés en bleu, sont parallèles à (CD).

DÉMONSTRATION

Les droites Δ et Δ' passent par A et sont distinctes, sinon D et D' seraient parallèles, donc coplanaires. Elles sont sécantes en A et définissent un plan.

Ce plan contient Δ, parallèle à D : il est parallèle à D. Il contient Δ', parallèle à D' : il est parallèle à D'.

Inversement, un plan passant par A et parallèle à D et à D' contient, d'après la propriété 3, la parallèle à D passant par A et la parallèle à D' passant par A : il contient Δ et Δ'. C'est donc le plan défini par Δ et Δ', et il est unique.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Construire les points N, P et Q. b) Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

Le point N — Le plan passe par M et il est parallèle à (AB) : d'après la propriété 3, il contient la parallèle à (AB) passant par M. Cette droite est dans le plan (ABC) ; elle coupe (BC) en N.
(MN) est parallèle à (AB)

Le point Q — De même, le plan contient la parallèle à (CD) passant par M. Elle est dans le plan (ACD) et coupe (AD) en Q.
(MQ) est parallèle à (CD)

Le point P — Le plan contient aussi la parallèle à (CD) passant par N. Elle est dans le plan (BCD) et coupe (BD) en P.

(NP) est parallèle à (CD)

Le côté [PQ] — Les droites (MN) et (AB) sont parallèles ; l'une est dans le plan (MNP), l'autre dans le plan (ABD), et ces deux plans se coupent suivant (PQ). D'après le théorème du toit, (PQ) est parallèle à (AB), donc à (MN).

(PQ) est parallèle à (MN)

Conclusion — (MQ) et (NP) sont toutes les deux parallèles à (CD) : elles sont parallèles. Les côtés opposés de $MNPQ$ sont parallèles deux à deux.

$MNPQ$ est un parallélogramme

$MNPQ$ est un parallélogramme

À ne pas faire : Le plan passant par M et parallèle à (AB) coupe la face ABC suivant une droite quelconque passant par M — Il coupe la face ABC suivant la parallèle à (AB) passant par M. D'après la propriété 3, la parallèle à (AB) passant par M est incluse dans ce plan.

---

15. DÉFINITION

Plans parallèles

CE QU'IL DIT

Tawa deux plans. La définition : on dit que deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus. Ya3ni P parallèle à Q ma3neha : P inter Q égale l'ensemble vide, walla P égale Q. W ken ma 3andhomch 7atta point commun, n9oulou 3lihom strictement parallèles. Mathalan fi parallélépipède, la face mta3 el louta w la face mta3 el fou9 fi zouz plans strictement parallèles. W thabbet mli7 : el plan ma youfech. Zouz faces elli ma yetle9awch 3la el dessin, les plans mte3hom ynajjmou ykounou sécants.

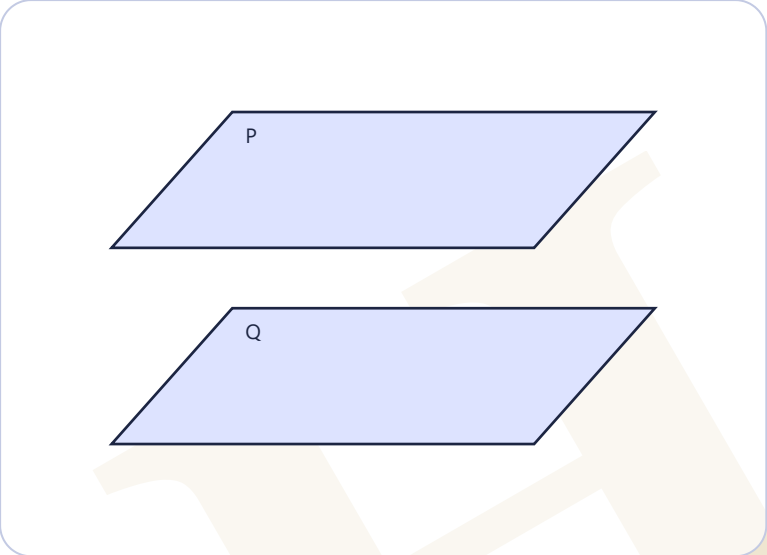
deux plans . la définition : on dit que deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point توّة
ولّا ، P inter Q égale l'ensemble vide : معناها P parallèle à Q يعني . commun ou lorsqu'ils sont confondus
مثلاً في . strictement parallèles نقولو عليهم ، point commun حتّى ما عندهمش كان P égale Q . w
: ثبّت مليح plans strictement parallèles . w متاع الفوق في زوز w la face متاع اللوطة parallélépipède ، la face
. sécants متاعهم ينجّمو يكونو dessin ، les plans الـ على يتلاقاوش ما اللي faces زوز . الـ plan ما يوفاش

Passons à deux plans. La définition : on dit que deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus. Autrement dit, P parallèle à Q signifie : P inter Q égale l'ensemble vide, ou bien P égale Q. Et s'ils n'ont aucun point commun, on dit qu'ils sont strictement parallèles. Par exemple, dans un parallélépipède, la face du dessous et la face du dessus sont dans deux plans strictement parallèles. Fais bien attention : un plan ne s'arrête pas. Deux faces qui ne se rencontrent pas sur le dessin peuvent être dans deux plans sécants.

Définition. On dit que deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus.

Ainsi, si P et Q sont deux plans : $P \parallel Q$ équivaut à $P \cap Q = \varnothing$ ou $P = Q$.

Vocabulaire. Si P et Q sont deux plans tels que $P \cap Q = \varnothing$, on dit qu'ils sont **strictement parallèles**.



P et Q n'ont aucun point commun : ils sont strictement parallèles.

Deux plans P et Q dessinés comme deux parallélogrammes, l'un au-dessus de l'autre : le plan P en haut, le plan Q en bas. Ils n'ont aucun point commun.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un parallélépipède $ABCDEFGH$: a) les plans (ABC) et (EFG) sont-ils parallèles ? b) Les plans (ABC) et (ABF) sont-ils parallèles ?

(ABC) et (EFG) — Ce sont les plans de deux faces opposées, celle du dessous et celle du dessus : ils n'ont aucun point commun. Ils sont strictement parallèles.

a) oui

(ABC) et (ABF) — Ces deux plans sont distincts et ils ont en commun la droite (AB) : ils sont sécants.

b) non

a) oui ; b) non

À ne pas faire : Deux faces d'un solide qui ne se touchent pas sont dans deux plans parallèles — Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun, même en les prolongeant. Un plan est illimité : deux faces qui ne se touchent pas peuvent être dans deux plans sécants.

16. PROPRIÉTÉ

Propriétés 7, 8 et 9

CE QU'IL DIT

Ki ykounou deux plans parallèles, 3andna trois propriétés. La propriété 7 : toute droite de l'un est parallèle à l'autre. La propriété 8 : toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre. W la propriété 9 : toute droite qui perce l'un perce l'autre. Chouf la figure : P w Q parallèles. La droite D fel plan P, donc D

parallèle au plan Q. W la droite Δ perce le plan P en A, donc perce le plan Q zeda, en B. Ama thabbet mli7 : la droite D parallèle au plan Q, mouch l koll droite mta3 Q.

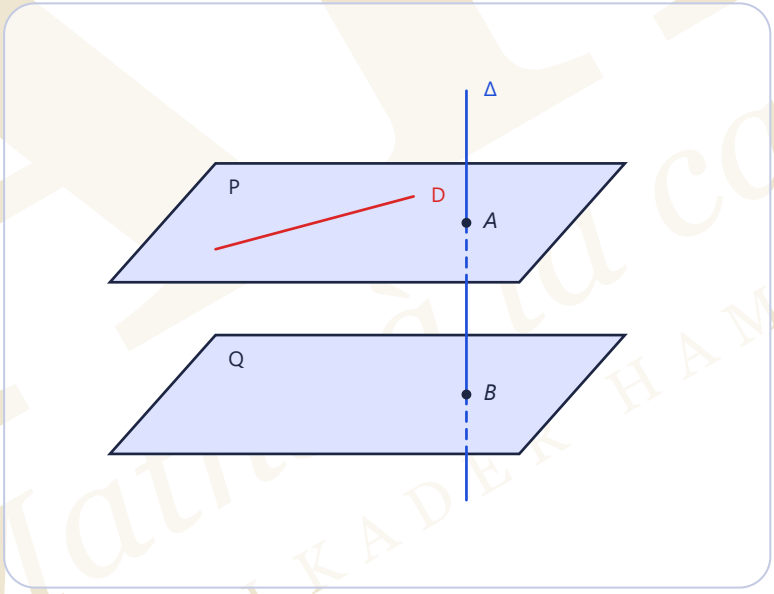
trois propriétés . la propriété sept : toute droite de l'un est عندنا ، deux plans parallèles كي يكونو parallèle à l'autre . la propriété huit : toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre . w la propriété plan الـ في la figure : P w Q parallèles . la droite D شوف . neuf : toute droite qui perce l'un perce l'autre . en B ، زادة P ، donc D parallèle au plan Q . w la droite delta perce le plan P en A ، donc perce le plan Q أما ثبّت مليح : la droite D parallèle au plan Q ، موش لكل droite متاع Q .

Quand deux plans sont parallèles, nous avons trois propriétés. La propriété sept : toute droite de l'un est parallèle à l'autre. La propriété huit : toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre. Et la propriété neuf : toute droite qui perce l'un perce l'autre. Regarde la figure : P et Q sont parallèles. La droite D est dans le plan P, donc D est parallèle au plan Q. Et la droite delta perce le plan P en A, donc elle perce aussi le plan Q, en B. Mais fais bien attention : la droite D est parallèle au plan Q, pas à toutes les droites de Q.

Propriété 7. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

Propriété 8. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

Propriété 9. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite qui perce l'un perce l'autre.



P et Q sont parallèles : D, contenue dans P, est parallèle à Q ; Δ, qui perce P en A, perce Q en B.

Deux plans parallèles dessinés comme deux parallélogrammes : le plan P en haut, le plan Q en bas. Une droite D est tracée en rouge dans le plan P. Une droite Δ, verticale, tracée en bleu, traverse le plan P au point A puis le plan Q au point B.

DÉMONSTRATION

Soient P et Q deux plans strictement parallèles (s'ils sont confondus, il n'y a rien à démontrer).

Propriété 7. Soit D une droite de P. Comme $P \cap Q = \varnothing$, la droite D n'a aucun point commun avec Q : elle ne perce pas Q, elle lui est donc parallèle.

Propriété 8. Soit D une droite parallèle à P : elle est parallèle à une droite Δ de P. D'après la propriété 7, Δ est parallèle à Q, donc à une droite Δ' de Q. D'après la propriété 2, D est parallèle à Δ' : elle est

parallèle à Q.

Propriété 9. Soit D une droite qui perce P. Si elle ne perçait pas Q, elle serait parallèle à Q, donc à P d'après la propriété 8 : c'est impossible. Donc D perce Q.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un parallélépipède $ABCDEFGH$, les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles. a) La droite (EG) est-elle parallèle au plan (ABC) ? b) La droite (AE) perce le plan (ABC) en A : perce-t-elle le plan (EFG) ? c) Les droites (EG) et (AB) sont-elles parallèles ?

Propriété 7 — (EG) est une droite du plan (EFG), qui est parallèle au plan (ABC).

a) oui

Propriété 9 — (AE) perce l'un des deux plans parallèles : elle perce l'autre. Elle perce le plan (EFG) au point E.

b) oui, en E

(EG) et (AB) — La parallèle à (AB) passant par E est (EF), et non (EG) : les droites (EG) et (AB) ne sont pas parallèles.

c) non

a) oui ; b) oui, en E ; c) non

À ne pas faire : Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre — Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre **plan**. Dans le parallélépipède, (EG) et (AB) sont dans deux plans parallèles, mais elles ne sont pas parallèles : elles ne sont pas coplanaires.

17. THÉORÈME

Propriété 10 : montrer que deux plans sont parallèles

CE QU'IL DIT

Kifech nbayynou elli deux plans parallèles ? B la propriété 10. Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan P', alors les plans P et P' sont parallèles. Chouf la figure : D w Δ sécantes fel plan P, D' w Δ' sécantes fel plan P'. D parallèle à D', w Δ parallèle à Δ'. Donc P parallèle à P'. Nbayynouha par l'absurde : ken P w P' sécants, l'intersection mte3hom droite δ. B la propriété 5, D parallèle à δ, w Δ parallèle à δ. Donc D parallèle à Δ : hedha ma yjich, 5ater D w Δ sécantes. W thabbet mli7 : lezem zouz droites sécantes. Droite wa7da ma tekfich.

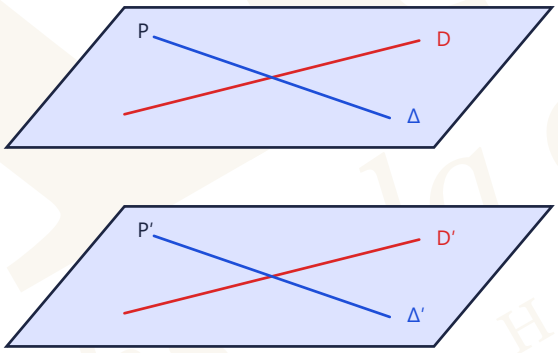
كيفاش نبيّنو اللي deux plans parallèles ؟ بـ la propriété dix . si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan P prime ، alors les plans P et P prime sont parallèles . شوف la figure : D w delta sécantes في الـ plan P ، D prime w delta prime sécantes في الـ plan P prime . D parallèle à D prime ، w delta parallèle à delta prime . donc P parallèle à P prime : par l'absurde نبيّنوها P w P prime sécants ، l'intersection كان متاعهم droite petit delta . بـ petit D parallèle à la propriété cinq ، delta : هذا ما يجيش ، خاطر . D w delta sécantes droite : لازم زوز droites sécantes . وحدة ما تكفيش w ثبّت مليح

Comment montrer que deux plans sont parallèles ? Avec la propriété dix. Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan P prime, alors les plans P et P prime sont parallèles. Regarde la figure : D et delta sont sécantes dans le plan P, D prime et delta prime sont sécantes dans le plan P prime. D est parallèle à D prime, et delta est parallèle à delta prime. Donc P est parallèle à P prime. Montrons-la par l'absurde : si P et P prime étaient sécants, leur intersection serait une droite petit delta. Par la propriété cinq, D serait parallèle à petit delta, et delta parallèle à petit delta. Donc D serait parallèle à delta : c'est impossible, puisque D et delta sont sécantes. Fais bien attention : il faut deux droites sécantes. Une seule droite ne suffit pas.

Propriété 10. Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan P', alors les plans P et P' sont parallèles.

Remarque. On utilise souvent la propriété 10 pour montrer que deux plans sont parallèles.

Synthèse. Deux plans sont parallèles **si et seulement si** deux droites sécantes de l'un des plans sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre. La réciproque vient de la propriété 7 : si les plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.



D et Δ sont sécantes dans P, D' et Δ' sécantes dans P', D parallèle à D' et Δ parallèle à Δ' : P et P' sont parallèles.

Deux plans dessinés comme deux parallélogrammes, l'un au-dessus de l'autre : le plan P en haut, le plan P' en bas. Dans le plan P, deux droites sécantes : D en rouge et Δ en bleu. Dans le plan P', deux droites sécantes : D' en rouge, parallèle à D, et Δ' en bleu, parallèle à Δ.

DÉMONSTRATION

Soient D et Δ deux droites sécantes du plan P, et D' et Δ' deux droites sécantes du plan P', telles que D est parallèle à D' et Δ est parallèle à Δ'.

1. D est parallèle à D', une droite de P' : D est parallèle au plan P'. De même, Δ est parallèle au plan P'.

2. On raisonne par l'absurde : supposons que les plans P et P' sont sécants, et désignons par δ leur droite d'intersection. La droite D est parallèle aux deux plans sécants P et P' : d'après la propriété 5, D

est parallèle à δ. De même, Δ est parallèle à δ.

D'après la propriété 2, D et Δ sont alors parallèles : c'est impossible, puisqu'elles sont sécantes. Donc les plans P et P' sont parallèles.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Démontrer que les plans (AFC) et (DEG) sont parallèles.

(AC) et (EG) — $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur : $AEGC$ est un parallélogramme.
(AC) est parallèle à (EG)

(AF) et (DG) — $[AD]$ et $[FG]$ sont parallèles et de même longueur : $ADGF$ est un parallélogramme.
(AF) est parallèle à (DG)

Propriété 10 — Les droites (AC) et (AF), sécantes en A, sont deux droites du plan (AFC). Elles sont parallèles aux droites (EG) et (DG), sécantes en G, du plan (DEG).
(AFC) est parallèle à (DEG)

(AFC) et (DEG) sont parallèles

À ne pas faire : Une droite de P est parallèle à une droite de P', donc P et P' sont parallèles — Il faut deux droites **sécantes** de P parallèles à deux droites sécantes de P'. Avec une seule direction commune, les deux plans peuvent être sécants : c'est la situation du théorème du toit.

À ne pas faire : Deux droites parallèles de P sont parallèles à deux droites de P', donc P et P' sont parallèles — Les deux droites de P doivent être sécantes. Deux droites parallèles ne donnent qu'une seule direction.

---

18. THÉORÈME

Propriétés 11 et 12

CE QU'IL DIT

Zouz propriétés o5rin. La propriété 11 : par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan donné. W la propriété 12 : si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles. Chouf la figure : P w P' parallèles, w el plan Q coupe P suivant la droite D. Donc Q coupe P' zeda, suivant droite D'. W D parallèle à D'. 3lech parallèles ? Ez-zouz fel plan Q, donc coplanaires. W ma 3andhomch 7atta point commun, 5ater P w P' ma yetle9awch. La propriété 12 hedhi nesta3mlouha barcha fi les sections.

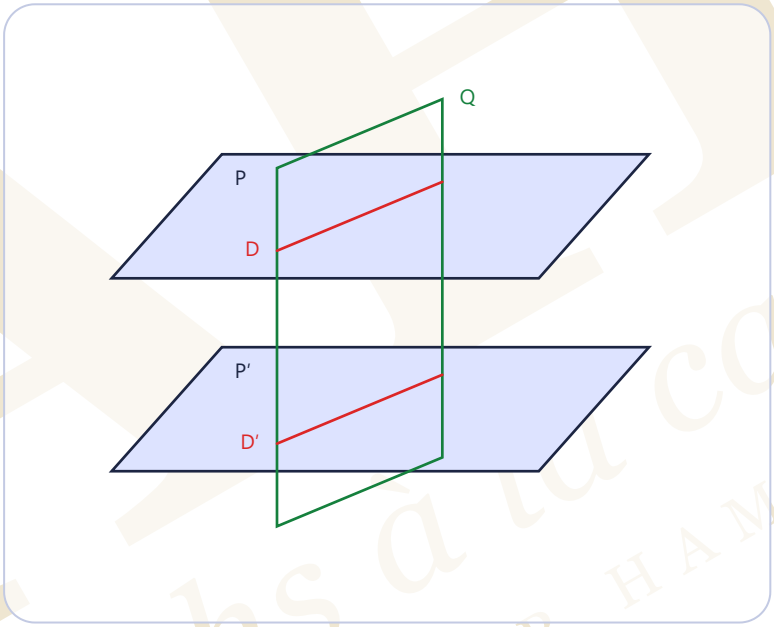
la propriété onze : par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan . زوز propriétés أخرين donné . w la propriété douze : si deux plans sont parallèles ، alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre plan Q coupe الـ la figure : P w P prime parallèles ، w شوف . ، et les droites d'intersection sont parallèles . suivant droite D prime . w D parallèle à D prime ، زادة P suivant la droite D . donc Q coupe P prime P w P خاطر ، point commun ما عندهمش حتّى plan Q ، donc coplanaires . w الزوز في الـ ؟ parallèles علاش . les sections في نستعملوها برشا هاذي la propriété douze . ما يتلاقاوش prime

Voici deux autres propriétés. La propriété onze : par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan donné. Et la propriété douze : si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles. Regarde la figure : P et P prime sont parallèles, et le plan Q coupe P suivant la droite D. Donc Q coupe aussi P prime, suivant une droite D prime. Et D est parallèle à D prime. Pourquoi parallèles ? Elles sont toutes les deux dans le plan Q, donc coplanaires. Et elles n'ont aucun point commun, puisque P et P prime ne se rencontrent pas. Cette propriété douze, nous l'utiliserons beaucoup dans les sections.

Propriété 11. Par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.

Propriété 12. Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles.

On retient aussi : deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles.



P et P′ sont parallèles : le plan Q les coupe suivant deux droites parallèles D et D′.

Deux plans parallèles dessinés comme deux parallélogrammes : le plan P en haut, le plan P' en bas. Un troisième plan Q, vertical, tracé en vert, les traverse tous les deux. Il coupe le plan P suivant une droite D et le plan P' suivant une droite D', tracées en rouge ; D et D' sont parallèles.

DÉMONSTRATION

Propriété 11. Soit A un point et P un plan. On choisit dans P deux droites sécantes ; leurs parallèles passant par A sont sécantes en A et définissent un plan Q. D'après la propriété 10, Q est parallèle à P. Inversement, un plan passant par A et parallèle à P est parallèle à ces deux droites (propriété 8) ; d'après la propriété 3, il contient leurs parallèles passant par A : c'est le plan Q.

Propriété 12. Soient P et P' deux plans strictement parallèles et Q un plan qui coupe P suivant une droite D.

1. Supposons que les plans Q et P' sont parallèles, et désignons par A un point de la droite D. Alors Q et P sont deux plans passant par A et parallèles au plan P' : d'après la propriété 11, ils sont confondus.

C'est impossible, puisque Q coupe P suivant une droite. Donc le plan Q coupe le plan P', suivant une droite D'.

2. Les droites D et D' sont contenues dans le plan Q : elles sont coplanaires. De plus D est dans P, D' est dans P', et $P \cap P' = \varnothing$: elles n'ont aucun point commun. Deux droites coplanaires sans point commun sont parallèles : D et D' sont parallèles.

EXEMPLE TRAITÉ

P et P' sont deux plans parallèles. Une droite Δ coupe P en A et P' en B. Une droite Δ', parallèle à Δ et distincte de Δ, coupe P en C et P' en D. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

P et P' sont deux plans parallèles. Une droite Δ coupe P en A et P' en B. Une droite Δ', parallèle à Δ et distincte de Δ, coupe P en C et P' en D. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

P et P prime sont deux plans parallèles. Une droite delta coupe P en A et P prime en B. Une droite delta prime, parallèle à delta et distincte de delta, coupe P en C et P prime en D. Quelle est la nature ? du quadrilatère ABDC

Un plan — Les droites Δ et Δ' sont strictement parallèles : elles sont contenues dans un plan Q, qui contient les quatre points A, B, C et D.

(AB) est parallèle à (CD)

Un plan. Les droites Δ et Δ' sont strictement parallèles : elles sont contenues dans un plan Q, qui contient les quatre points A, B, C et D.

Un plan. Les droites delta et delta prime sont strictement parallèles : elles sont contenues dans un .plan Q, qui contient les quatre points A, B, C et D

Propriété 12 — Le plan Q coupe le plan P suivant la droite (AC) et le plan P' suivant la droite (BD). Comme P et P' sont parallèles, ces deux droites sont parallèles.

(AC) est parallèle à (BD)

Conclusion — Les côtés opposés du quadrilatère $ABDC$ sont parallèles deux à deux.

$ABDC$ est un parallélogramme

$ABDC$ est un parallélogramme

À ne pas faire : Par un point, il passe plusieurs plans parallèles à un plan donné — Par un point, il passe un seul plan parallèle à un plan donné. C'est la propriété 11 : elle permet de parler « du » plan passant par un point et parallèle à un plan.

19. APPLICATION

Exemple : un plan parallèle à une face

CE QU'IL DIT

Ne5dhou tétraèdre ABCD, w point I 3la le segment [AD], DI égale un quart de DA. El plan elli yet3adda men I w parallèle au plan (ABC), coupe la droite (DB) en J w la droite (DC) en K. Le plan (ABD) coupe les

deux plans parallèles : suivant la droite (AB) w suivant la droite (IJ). Donc b la propriété 12, la droite (IJ) parallèle à la droite (AB). W b le théorème de Thalès fi le triangle DAB, DJ égale un quart de DB. Kif kif, le plan (BCD) coupe les deux plans suivant la droite (BC) w la droite (JK), donc la droite (JK) parallèle à la droite (BC). W b le théorème de Thalès fi le triangle DBC, JK sur BC égale un quart.

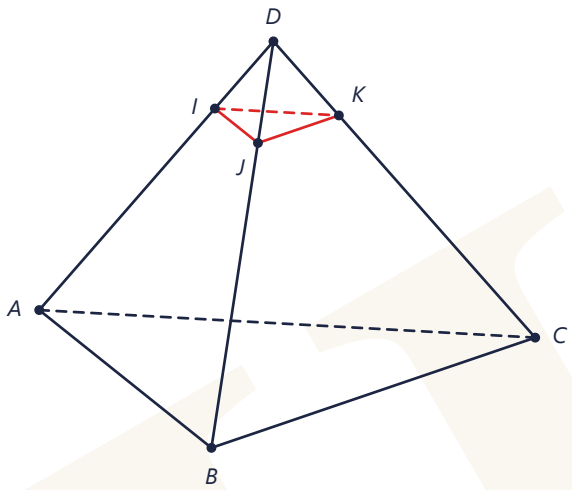
ناخذو I point w ، D I égale un quart de D A على tétraèdre A B C D اللي يتعدّى plan الـ . le segment A D
من les I w parallèle au plan A B C ، coupe la droite D B en J w la droite D C en K . le plan A B D coupe
la propriété douze ، la droite I بـ deux plans parallèles : suivant la droite A B w suivant la droite I J . donc
. le triangle D A B ، D J égale un quart de D B في le théorème de Thalès بـ J parallèle à la droite A B . w
le plan B C D coupe les deux plans suivant la droite B C w la droite J K ، donc la droite J K ، كيف كيف
. le triangle D B C ، J K sur B C égale un quart في le théorème de Thalès بـ parallèle à la droite B C . w

Prenons un tétraèdre A B C D, et un point I sur le segment A D, avec D I égale un quart de D A. Le plan qui passe par I et qui est parallèle au plan A B C coupe la droite D B en J et la droite D C en K. Le plan A B D coupe les deux plans parallèles : suivant la droite A B et suivant la droite I J. Donc, par la propriété douze, la droite I J est parallèle à la droite A B. Et par le théorème de Thalès dans le triangle D A B, D J égale un quart de D B. De même, le plan B C D coupe les deux plans suivant la droite B C et la droite J K, donc la droite J K est parallèle à la droite B C. Et par le théorème de Thalès dans le triangle D B C, J K sur B C égale un quart.

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on désigne par I le point du segment $[AD]$ tel que $DI = \frac{1}{4}DA$. Le plan passant par I et parallèle au plan (ABC) coupe les droites (DB) et (DC) respectivement en J et K.

Chaque face issue de D coupe ces deux plans parallèles : la propriété 12 donne des droites parallèles, et le théorème de Thalès donne les longueurs.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



DI = ¼ DA ; le plan passant par I et parallèle à (ABC) coupe (DB) en J et (DC) en K.

Un tétraèdre ABCD vu en perspective, posé sur sa face ABC : le sommet D est en haut, A à gauche, B en bas devant, C à droite. L'arête [AC], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [DA], près de D, au quart de l'arête. Le point J est sur l'arête [DB] et le point K sur l'arête [DC], à la même hauteur. Le triangle IJK est tracé en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Montrer que les droites (AB) et (IJ) sont parallèles. b) Placer les points J et K. c) Montrer que les droites (BC) et (JK) sont parallèles. d) Calculer $\dfrac{JK}{BC}$.

(IJ) et (AB) — Le plan (ABD) coupe le plan (ABC) suivant (AB) et le plan (IJK) suivant (IJ). Ces deux plans sont parallèles : d'après la propriété 12, les droites d'intersection sont parallèles.

(IJ) est parallèle à (AB)

Le point J — Dans le triangle DAB, (IJ) est parallèle à (AB) : d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{DJ}{DB} = \dfrac{DI}{DA}$.

$DJ = \dfrac{1}{4}DB$

Le point K — De même, dans le plan (ACD), (IK) est parallèle à (AC).

$DK = \dfrac{1}{4}DC$

(JK) et (BC) — Le plan (BCD) coupe les deux plans parallèles suivant (BC) et (JK).

(JK) est parallèle à (BC)

Le rapport — Dans le triangle DBC, d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{JK}{BC} = \dfrac{DJ}{DB}$.

$\dfrac{JK}{BC} = \dfrac{1}{4}$

$$\frac{JK}{BC} = \frac{1}{4}$$

À ne pas faire : $DI = \frac{1}{4}DA$, donc $\frac{JK}{BC} = \frac{3}{4} - \frac{JK}{BC} = \frac{DJ}{DB} = \frac{DI}{DA} = \frac{1}{4}$. Le rapport de Thalès se lit à partir du sommet D : $\frac{3}{4}$ est le rapport $\frac{AI}{AD}$.

20. EXEMPLE

Exemple : passer par un plan parallèle

CE QU'IL DIT

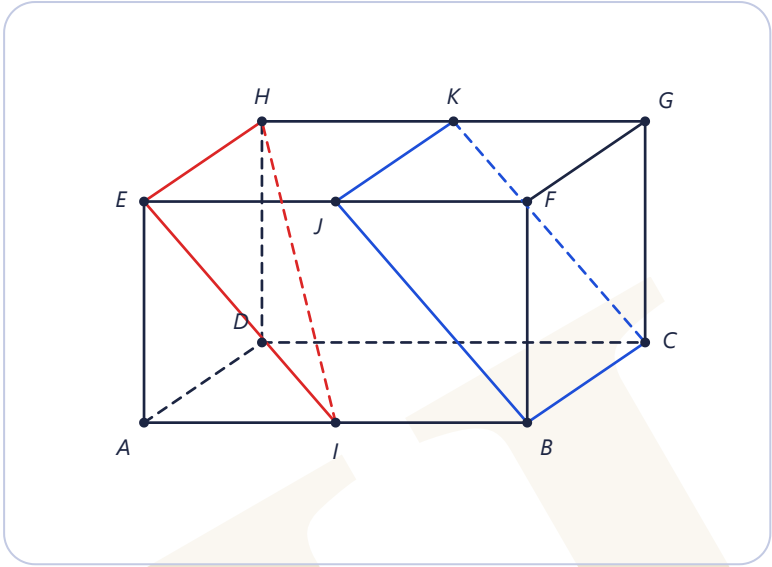
Ne5dhou parallélépipède ABCDEFGH, w I, J, K houma les milieux mta3 [AB], [EF] w [GH]. La droite (JK) parallèle à la droite (FG), w la droite (FG) parallèle à la droite (BC). Donc B, C, K w J coplanaires : nsammiw el plan mte3hom P. N7ebbou nbayynou elli la droite (IH) parallèle au plan P. Famma tari9a o5ra : nal9aw plan fih la droite (IH), w parallèle au plan P. Ne5dhou le plan (IEH). La droite (IE) parallèle à la droite (BJ), 5ater IBJE parallélogramme. W la droite (EH) parallèle à la droite (BC). Donc b la propriété 10, le plan (IEH) parallèle au plan P. W b la propriété 7, la droite (IH) parallèle au plan P.

A B ، E F w G H . la droite J K متاع les milieux هوما parallélépipède A B C D E F G H ، w I ، J ، K ناخذو
نسمّيو : parallèle à la droite F G ، w la droite F G parallèle à la droite B C . donc B ، C ، K w J coplanaires
la droite I فيه plan نلقاو : فمّا طريقة أخرى . la droite I H parallèle au plan P نحبّو نبيّنو اللي . P متاعهم الـ plan
I B J E خاطر ، le plan I E H . la droite I E parallèle à la droite B J ناخذو . H ، w parallèle au plan P
la propriété dix ، le plan I E H بـ parallélogramme . w la droite E H parallèle à la droite B C . donc
. la propriété sept ، la droite I H parallèle au plan P بـ parallèle au plan P . w

Prenons un parallélépipède A B C D E F G H, et I, J, K les milieux de A B, E F et G H. La droite J K est parallèle à la droite F G, et la droite F G est parallèle à la droite B C. Donc B, C, K et J sont coplanaires : appelons P leur plan. Nous voulons montrer que la droite I H est parallèle au plan P. Il y a une autre méthode : trouver un plan qui contient la droite I H et qui est parallèle au plan P. Prenons le plan I E H. La droite I E est parallèle à la droite B J, parce que I B J E est un parallélogramme. Et la droite E H est parallèle à la droite B C. Donc, par la propriété dix, le plan I E H est parallèle au plan P. Et par la propriété sept, la droite I H est parallèle au plan P.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède et I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[EF]$ et $[GH]$.

Pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan, on peut aussi montrer qu'elle est contenue dans un plan parallèle à ce plan : on conclut par la propriété 7.



I, J et K sont les milieux de [AB], [EF] et [GH]. Le plan (IEH) est parallèle au plan (BCK).

Un parallélépipède ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point I est le milieu de l'arête [AB], le point J le milieu de l'arête [EF] et le point K le milieu de l'arête [GH]. Le quadrilatère BCKJ est tracé en bleu, le triangle IEH en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que les points B, C, K et J sont coplanaires. Soit P le plan qui les contient. 2) Montrer que la droite (IH) est parallèle au plan P.

(JK) et (FG) — Dans le parallélogramme $EFGH$, J et K sont les milieux des côtés opposés $[EF]$ et $[GH]$.

(JK) est parallèle à (FG)

Coplanaires — (FG) est parallèle à (BC) : d'après la propriété 2, (JK) est parallèle à (BC). Deux droites parallèles sont contenues dans un même plan.

B, C, K et J sont coplanaires

(IE) et (BJ) — $[IB]$ et $[EJ]$ sont parallèles et de même longueur, car I et J sont les milieux de deux côtés opposés du parallélogramme $ABFE$: $IBJE$ est un parallélogramme.

(IE) est parallèle à (BJ)

(EH) et (BC) — (EH) est parallèle à (FG), elle-même parallèle à (BC).

(EH) est parallèle à (BC)

Propriété 10 — Les droites (IE) et (EH), sécantes en E, sont parallèles aux droites (BJ) et (BC), sécantes en B.

le plan (IEH) est parallèle au plan P

Propriété 7 — La droite (IH) est une droite du plan (IEH), qui est parallèle au plan P.

(IH) est parallèle au plan P

(IH) est parallèle au plan P

À ne pas faire : Pour montrer que (IH) est parallèle à P, il faut absolument trouver dans P une droite parallèle à (IH) — On peut aussi montrer que (IH) est contenue dans un plan parallèle à P. D'après la propriété 7, toute droite d'un plan est parallèle à tout plan qui lui est parallèle.

---

21. EXEMPLE

Exemple : les milieux des arêtes d'une pyramide

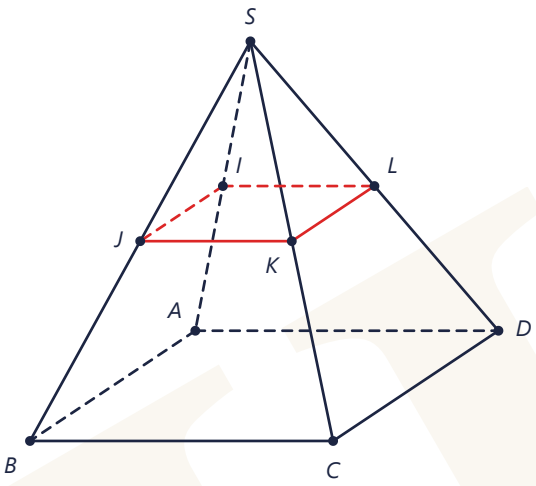
CE QU'IL DIT

Ne5dhou pyramide SABCD, la base ABCD carré, w I, J, K houma les milieux mta3 [SA], [SB] w [SC]. La droite (IJ) parallèle à la droite (AB), w la droite (JK) parallèle à la droite (BC). Donc b la propriété 10, le plan (IJK) parallèle au plan (ABC). La droite (SD) perce le plan (ABC) en D, donc b la propriété 9, perce le plan (IJK) zeda, fi point L. Le plan (SAD) coupe les deux plans parallèles suivant la droite (AD) w la droite (IL), donc la droite (IL) parallèle à la droite (AD). W I milieu de [SA], donc L milieu de [SD]. El 7asel : IJKL 3andou quatre côtés égaux w deux diagonales égales : houwa carré.

S A ، S B w S C . la متاع les milieux هوما pyramide S A B C D ، la base A B C D carré ، w I ، J ، K ناخذو la propriété dix ، le بـ droite I J parallèle à la droite A B ، w la droite J K parallèle à la droite B C . donc la propriété neuf ، بـ plan I J K parallèle au plan A B C . la droite S D perce le plan A B C en D ، donc point L . le plan S A D coupe les deux plans parallèles suivant la droite A D w زادة ، في perce le plan I J K الحاصل . la droite I L ، donc la droite I L parallèle à la droite A D . w I milieu de S A ، donc L milieu de S D عندو I J K L : quatre côtés égaux w deux diagonales égales هو : carré .

Prenons une pyramide S A B C D dont la base A B C D est un carré, et I, J, K les milieux de S A, S B et S C. La droite I J est parallèle à la droite A B, et la droite J K est parallèle à la droite B C. Donc, par la propriété dix, le plan I J K est parallèle au plan A B C. La droite S D perce le plan A B C en D, donc, par la propriété neuf, elle perce aussi le plan I J K, en un point L. Le plan S A D coupe les deux plans parallèles suivant la droite A D et la droite I L, donc la droite I L est parallèle à la droite A D. Et I est le milieu de S A, donc L est le milieu de S D. En résumé : I J K L a quatre côtés égaux et deux diagonales égales : c'est un carré.

Dans la pyramide $SABCD$, la base $ABCD$ est un carré. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.



I, J, K et L sont les milieux de [SA], [SB], [SC] et [SD].

Une pyramide SABCD de sommet S, vue en perspective. Sa base ABCD est un carré : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés. Les points I, J et K sont les milieux des arêtes [SA], [SB] et [SC] ; le point L est sur l'arête [SD]. Le quadrilatère IJKL est tracé en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles. 2) Justifier que la droite (SD) perce le plan (IJK) en un point L. 3) Montrer que les droites (IL) et (AD) sont parallèles, puis que L est le milieu du segment $[SD]$. 4) Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Deux droites sécantes — Dans les triangles SAB et SBC, la droite des milieux (IJ) est parallèle à (AB) et la droite des milieux (JK) est parallèle à (BC). On applique la propriété 10.

$$\text{le plan } (IJK) \text{ est parallèle au plan } (ABC)$$

Le point L — La droite (SD) perce le plan (ABC) en D. D'après la propriété 9, elle perce aussi le plan (IJK), en un point L.

$$(SD) \cap (IJK) = \{L\}$$

(IL) et (AD) — Le plan (SAD) coupe les deux plans parallèles suivant (AD) et (IL) : d'après la propriété 12, ces deux droites sont parallèles.

$$(IL) \text{ est parallèle à } (AD)$$

Le milieu — Dans le triangle SAD, la droite (IL) passe par le milieu I de $[SA]$ et elle est parallèle à (AD) : elle coupe $[SD]$ en son milieu.

$$L \text{ est le milieu de } [SD]$$

IJKL — Chaque côté de $IJKL$ mesure la moitié d'un côté du carré $ABCD$, et ses diagonales mesurent la moitié de celles du carré : IK est la moitié de AC et JL la moitié de BD. Il a donc quatre côtés de même longueur et deux diagonales de même longueur.

$$IJKL \text{ est un carré}$$

$IJKL$ est un carré

À ne pas faire : I, J et K sont des milieux, donc L est le milieu de $[SD]$ — L est le milieu de $[SD]$ parce que (IL) est parallèle à (AD) et que I est le milieu de $[SA]$. L est défini comme le point où (SD) perce le plan (IJK) : qu'il soit au milieu se démontre.

---

22. MÉTHODE

Sections planes : la section d'un cube

CE QU'IL DIT

Tawa les sections planes. La section mta3 solide b plan, hiya l'intersection mta3 el plan m3a les faces mta3 el solide. Ne5dhou cube ABCDEFGH, I 3la l'arête [EH], J 3la l'arête [EF] w K 3la l'arête [CG]. Nlawwjou 3la la section b le plan (IJK). Fi la face mta3 el fou9, 3andna le segment [IJ]. Ntawwlou la droite (IJ) 7atta tetle9a m3a la droite (HG) fi point M. M fi le plan (IJK), w M fel plan mta3 la face CDHG. K zeda fez-zouz. Donc la droite (MK) coupe l'arête [DH] en N : 3andna le segment [NK] w le segment [IN]. Tawa la face BCGF parallèle à la face ADHE. B la propriété 12, narsmou men K la parallèle à la droite (IN) : hiya coupe l'arête [BF] en R. W nkammlou b le segment [JR]. El 7asel : la section hiya le pentagone IJRKN.

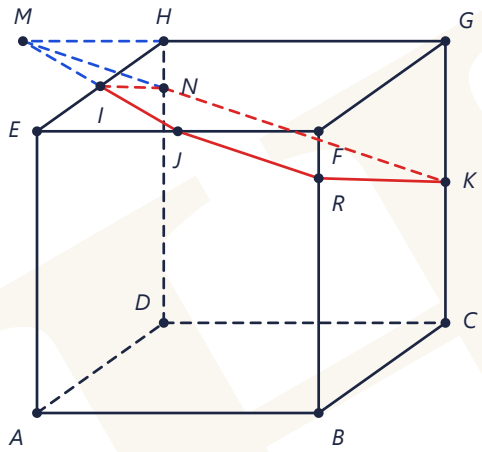
توّة section بـ plan ، solide متاع les sections planes . la section هي l'intersection متاع الـ plan مع les faces متاع الـ cube A B C D E F G H ، I ناخذو . solide la نلوّجو على l'arête C G على l'arête E F w K على l'arête E H ، J على le plan I J K في . la face متاع الفوق ، عندنا le segment I J . la droite I J نطوّلو la droite حتّى تتلاقى مع la droite H G في . M point M في w le plan I J K ، le plan I J K في متاع plan . K la face C D H G زادة في الزوز . donc la face B C G F توّة . le segment N K w le segment I N عندنا : la droite M K coupe l'arête D H en N coupe هي : K la parallèle à la droite I N نرسمو من ، la propriété douze بـ . parallèle à la face A D H E . le pentagone I J R K N هي la section : الحاصل . le segment J R نكمّلو بـ l'arête B F en R . w

Passons aux sections planes. La section d'un solide par un plan, c'est l'intersection de ce plan avec les faces du solide. Prenons un cube A B C D E F G H, I sur l'arête E H, J sur l'arête E F et K sur l'arête C G. Cherchons la section par le plan I J K. Sur la face du dessus, nous avons le segment I J. Prolongeons la droite I J jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite H G en un point M. M est dans le plan I J K, et M est dans le plan de la face C D H G. K est aussi dans les deux. Donc la droite M K coupe l'arête D H en N : nous avons le segment N K et le segment I N. Maintenant, la face B C G F est parallèle à la face A D H E. Par la propriété douze, traçons par K la parallèle à la droite I N : elle coupe l'arête B F en R. Et nous terminons par le segment J R. En résumé : la section est le pentagone I J R K N.

La **section** d'un solide par un plan est l'intersection de ce plan avec les faces du solide.

Dans la figure, $ABCDEFGH$ est un cube ; les points I, J et K appartiennent respectivement aux arêtes $[EH]$, $[EF]$ et $[CG]$. On se propose de représenter la section du cube par le plan (IJK).

Méthode. Sur chaque face, on cherche deux points du plan : on les obtient en prolongeant une droite déjà connue jusqu'à une droite de cette face. Sur deux faces parallèles, les deux segments de la section sont parallèles (propriété 12).



La section du cube par le plan (IJK) est le pentagone IJRKN.

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point I est sur l'arête [EH], le point J sur l'arête [EF] et le point K sur l'arête [CG]. La droite (IJ), prolongée, coupe la droite (HG) en un point M, à gauche de H. La droite (MK) coupe l'arête [DH] en N. Le point R est sur l'arête [BF]. Le pentagone IJRKN est tracé en rouge.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Construire le point M, intersection des droites (IJ) et (HG). 2) Construire l'intersection du plan (IJK) avec la face $CDHG$, puis avec la face $ADHE$. 3) Construire les intersections du plan (IJK) avec la face $BCGF$ et avec la face $ABFE$. 4) Conclure.

Le point M — (IJ) et (HG) sont deux droites du plan de la face $EFGH$, et elles ne sont pas parallèles : on les prolonge jusqu'à leur point d'intersection M.

$(IJ) \cap (HG) = \{M\}$

Deux plans — M est sur (IJ), donc dans le plan (IJK) ; M est sur (HG), donc dans le plan de la face $CDHG$. Le point K est lui aussi dans ces deux plans.

$(IJK) \cap (CDH) = (MK)$

La face CDHG — La droite (MK) coupe l'arête $[DH]$ en un point N : sur cette face, la section est le segment $[NK]$.

$[NK]$

La face ADHE — I et N sont dans le plan (IJK) et sur la face $ADHE$: la section y est le segment $[IN]$.

$[IN]$

La face BCGF — Les faces $ADHE$ et $BCGF$ sont parallèles : d'après la propriété 12, le plan (IJK) les coupe suivant deux droites parallèles. On trace par K la parallèle à (IN) ; elle coupe $[BF]$ en R.
(KR) est parallèle à (IN)

La face ABFE — J et R sont dans le plan (IJK) et sur la face $ABFE$: la section y est le segment $[JR]$, parallèle à (NK).
$[JR]$

la section est le pentagone $IJRKN$

À ne pas faire : On joint K à I et à J : la section est le triangle IJK — Les segments $[KI]$ et $[KJ]$ traversent l'intérieur du cube : la section est faite de segments tracés sur les faces. Un côté de la section joint deux points d'une même face.

---

23. EXEMPLE

Exemple : une section parallèle à la base

CE QU'IL DIT

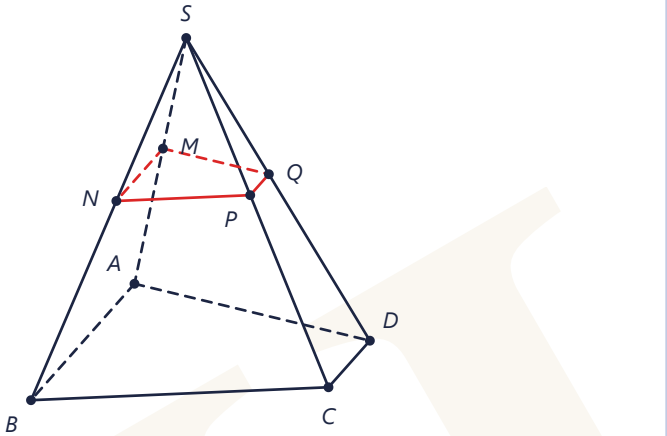
Exemple e5er : pyramide SABCD, la base trapèze, w point M 3la l'arête [SA]. Nlawwjou 3la la section bel plan elli yet3adda men M w parallèle au plan (ABC). B la propriété 12, koll face coupe les deux plans parallèles suivant deux droites parallèles. Fi la face SAB, narsmou men M la parallèle à la droite (AB) : hiya coupe l'arête [SB] en N. Men N, la parallèle à la droite (BC) coupe l'arête [SC] en P. Men P, la parallèle à la droite (CD) coupe l'arête [SD] en Q. W nsakkrou b le segment [QM], parallèle à la droite (DA). La section hiya le quadrilatère MNPQ : trapèze kima la base.

آخر exemple : M w point ، la base trapèze ، pyramide S A B C D على l'arête S A . نلوّجو على la section بالـ
اللي يتعدّى من plan A B C w parallèle au plan . M w ، la propriété douze بـ . كل ، plans les deux coupe face
في la face S A B ، نرسمو من A B la droite à la parallèle M : هي
. parallèles suivant deux droites parallèles
. coupe l'arête S B en N من
. N ، la parallèle à la droite B C coupe l'arête S C en P من
P ، la parallèle à la من
droite C D coupe l'arête S D en Q . w نسكّرو بـ . la section
هي le segment Q M ، parallèle à la droite D A
. la base كيما le quadrilatère M N P Q : trapèze

Un autre exemple : une pyramide S A B C D dont la base est un trapèze, et un point M sur l'arête S A. Cherchons la section par le plan qui passe par M et qui est parallèle au plan A B C. Par la propriété douze, chaque face coupe les deux plans parallèles suivant deux droites parallèles. Dans la face S A B, traçons par M la parallèle à la droite A B : elle coupe l'arête S B en N. Par N, la parallèle à la droite B C coupe l'arête S C en P. Par P, la parallèle à la droite C D coupe l'arête S D en Q. Et nous fermons par le segment Q M, parallèle à la droite D A. La section est le quadrilatère M N P Q : un trapèze, comme la base.

$SABCD$ est une pyramide dont la base est un trapèze $ABCD$, de côtés parallèles $[AB]$ et $[CD]$. M est un point de l'arête $[SA]$.

On construit la section de cette pyramide par le plan passant par M et parallèle au plan (ABC).



Le plan passant par M et parallèle à (ABC) coupe la pyramide suivant MNPQ.

Une pyramide SABCD de sommet S, vue en perspective. Sa base ABCD est un trapèze : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche ; les côtés [AB] et [CD] sont parallèles, et [CD] est plus court que [AB]. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés. Le point M est sur l'arête [SA], le point N sur l'arête [SB], le point P sur l'arête [SC] et le point Q sur l'arête [SD]. Le quadrilatère MNPQ, tracé en rouge, a ses côtés parallèles à ceux de la base.

EXEMPLE TRAITÉ

Construire la section de la pyramide par le plan passant par M et parallèle au plan (ABC).

Dans la face SAB — Le plan (SAB) coupe le plan (ABC) suivant (AB). D'après la propriété 12, il coupe le plan parallèle suivant la parallèle à (AB) passant par M ; elle coupe $[SB]$ en N.
(MN) est parallèle à (AB)

Dans la face SBC — On trace par N la parallèle à (BC) ; elle coupe $[SC]$ en P.
(NP) est parallèle à (BC)

Dans la face SCD — On trace par P la parallèle à (CD) ; elle coupe $[SD]$ en Q.
(PQ) est parallèle à (CD)

On ferme — Dans la face SAD, le segment $[QM]$ est parallèle à (DA).
(QM) est parallèle à (DA)

la section est le quadrilatère $MNPQ$

À ne pas faire : (MN) est parallèle à (AB) et (PQ) est parallèle à (CD) : on ne peut rien dire de (MN) et (PQ) — Comme (AB) et (CD) sont parallèles, (MN) et (PQ) sont parallèles : la section est un trapèze, comme la base. C'est la propriété 2, appliquée deux fois.

24. PROPRIÉTÉ

Positions relatives de droites et de plans

CE QU'IL DIT

Nlemmou les positions relatives. Deux droites distinctes de l'espace : ya coplanaires, ya non coplanaires. Ken coplanaires, ya sécantes en un point, ya strictement parallèles. Droite w plan : ya sécants, 3andhom point d'intersection, ya parallèles. W parallèles ma3neha : strictement parallèles, walla la droite fel plan. Deux plans : ya sécants, 3andhom droite d'intersection, ya parallèles. W parallèles ma3neha : strictement parallèles, walla confondus. Thabbet mli7 : fi l'espace, zouz droites ynajjmou ma ykounouch la sécantes la parallèles.

نلمّو les positions relatives : يا coplanaires ، يا non coplanaires . كان deux droites distinctes de l'espace point عندهم ، يا sécants : strictement parallèles . droite w plan يا ، sécantes en un point يا ، coplanaires plan . deux الـ في la droite ولّا ، strictement parallèles : معناها parallèles . w parallèles يا ، d'intersection ، strictement parallèles : معناها parallèles . w parallèles يا ، droite d'intersection عندهم ، يا sécants : plans ولّا confondus . ثبّت مليح : في l'espace ، زوز droites ينجّمو ما يكونوش لا sécantes لا parallèles .

Rassemblons les positions relatives. Deux droites distinctes de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires. Si elles sont coplanaires, elles sont soit sécantes en un point, soit strictement parallèles. Une droite et un plan sont soit sécants, avec un point d'intersection, soit parallèles. Et parallèles signifie : strictement parallèles, ou bien la droite est dans le plan. Deux plans sont soit sécants, avec une droite d'intersection, soit parallèles. Et parallèles signifie : strictement parallèles, ou bien confondus. Fais bien attention : dans l'espace, deux droites peuvent n'être ni sécantes ni parallèles.

Deux droites distinctes de l'espace sont :

- soit **coplanaires** : elles sont alors sécantes en un point, ou strictement parallèles ;
- soit **non coplanaires** : aucun plan ne les contient toutes les deux.

Une droite et un plan de l'espace sont :

- soit **sécants** : ils ont un point d'intersection ;
- soit **parallèles** : ils sont strictement parallèles, ou la droite est contenue dans le plan.

Deux plans sont :

- soit **sécants** : ils ont une droite d'intersection ;
- soit **parallèles** : ils sont strictement parallèles, ou confondus.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un cube $ABCDEFGH$, donner la position relative : a) des droites (AB) et (CG) ; b) de la droite (AC) et du plan (EFG) ; c) des plans (ABF) et (DCG).

(AB) et (CG) — Le seul plan qui contient (AB) et C est le plan (ABC), et G n'y est pas.

a) non coplanaires

(AC) et (EFG) — (AC) est parallèle à (EG), une droite du plan (EFG), et elle n'a aucun point dans ce plan.

b) strictement parallèles

(ABF) et (DCG) — (AB) et (BF), sécantes en B, sont parallèles à (DC) et (CG), sécantes en C : d'après la propriété 10, les deux plans sont parallèles. Ce sont deux faces opposées, sans point commun.

c) strictement parallèles

a) non coplanaires ; b) et c) strictement parallèles

À ne pas faire : Deux droites de l'espace sont soit sécantes, soit parallèles — Deux droites de l'espace sont soit sécantes, soit parallèles, soit non coplanaires. Le troisième cas n'existe pas dans le plan : c'est celui qu'on oublie.

---

25. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : le lieu des milieux

CE QU'IL DIT

Ne5tmou b problème. 3andna tétraèdre ABCD, point E yemchi 3la la droite (AB), w point F yemchi 3la la droite (CD). G houwa le milieu de [EF]. Win yemchi G ? I, J, K w L houma les milieux mta3 [AC], [BC], [BD] w [AD]. Ki E fi A w F fi C, G houwa I. W kif kif nal9aw J, K w L. Donc le lieu fih les quatre points hedhom, w houma el koll fi le plan (IJK). Tawa nebniw M w N, bech EBJM w FCJN ykounou parallélogrammes. M 3la la droite (IJ), w N 3la la droite (JK), donc ez-zouz fi le plan (IJK). W G houwa le milieu de [MN], donc G fi le plan (IJK). El 7asel : le lieu des points G houwa le plan (IJK).

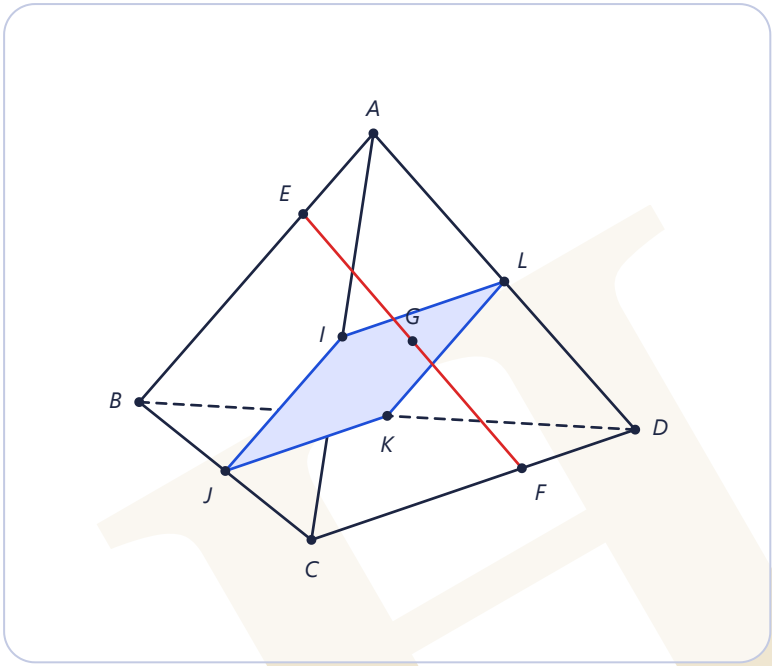
نختمو بـ problème . عندنا point E ، tétraèdre A B C D يمشي على point F ، w la droite A B يمشي على la droite C D . G هو milieu de E F . وين يمشي G ؟ I ، J ، K w L هوما les milieux متاع A D w A C ، B C ، B D . كي E فـ A w F فـ C ، G هو w I . كيف كيف نلقاو les quatre points فيه J ، K w L . donc le lieu هاذم ، w هوما parallélogrammes . M يكونو E B J M w F C J N باش ، M w N تو̈ة نبنيو . le plan I J K الكل في la droite I على la droite J K ، donc على J ، w N الزوز في la droite J K . w G هو le plan I J K donc G ، le milieu de M N في le plan I J K . الحاصل : le lieu des points G هو le plan I J K .

Terminons par un problème. On a un tétraèdre A B C D, un point E qui se déplace sur la droite A B, et un point F qui se déplace sur la droite C D. G est le milieu de E F. Où se déplace G ? I, J, K et L sont les milieux de A C, B C, B D et A D. Quand E est en A et F en C, G est I. Et de la même façon, on trouve J, K et L. Donc le lieu contient ces quatre points, et ils sont tous dans le plan I J K. Construisons maintenant M et N, de sorte que E B J M et F C J N soient des parallélogrammes. M est sur la droite I J, et N est sur la droite J K, donc tous les deux sont dans le plan I J K. Et G est le milieu de M N, donc G est dans le plan I J K. En résumé : le lieu des points G est le plan I J K.

Soient $ABCD$ un tétraèdre, E un point variable de la droite (AB) et F un point variable de la droite (CD). On note G le milieu de $[EF]$.

On cherche le **lieu géométrique** des points G, c'est-à-dire l'ensemble des positions de G lorsque le point E décrit la droite (AB) et le point F décrit la droite (CD).

On note I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes $[AC]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[AD]$.



I, J, K et L sont les milieux de [AC], [BC], [BD] et [AD] ; G est le milieu de [EF].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes [AC], [BC], [BD] et [AD] ; le quadrilatère IJKL est tracé en bleu. Un point E est placé sur l'arête [AB] et un point F sur l'arête [CD]. Le segment [EF] est tracé en rouge, et G est son milieu : il est dans le quadrilatère IJKL.

EXEMPLE TRAITÉ

1) Montrer que l'ensemble cherché contient les points I, J, K et L. 2) On suppose que E est fixé en A. Quel est l'ensemble des points G lorsque le point F décrit (CD) ? 3) On construit les points M et N tels que $EBJM$ et $FCJN$ soient des parallélogrammes. Montrer que M et N appartiennent au plan (IJK), puis préciser le milieu de $[MN]$. 4) Conclure.

Quatre positions — Quand E est en A et F en C, G est le milieu de $[AC]$: c'est I. De même, E en B et F en C donnent J ; E en B et F en D donnent K ; E en A et F en D donnent L.

$I,\ J,\ K$ et L sont des positions de G

E fixé en A — G est le milieu de $[AF]$, où F décrit (CD). Dans le plan (ACD), d'après le théorème des milieux, G décrit la droite parallèle à (CD) qui passe par I et par L.

G décrit la droite (IL)

Le point M — $EBJM$ est un parallélogramme : (JM) est parallèle à (BE), c'est-à-dire à (AB). Or, dans le triangle ABC, la droite (IJ) est la parallèle à (AB) passant par J.

$M \in (IJ)$

Le point N — $FCJN$ est un parallélogramme : (JN) est parallèle à (CF), c'est-à-dire à (CD). Or, dans le triangle BCD, la droite (JK) est la parallèle à (CD) passant par J.

$N \in (JK)$

Le milieu de [MN] — Les segments $[EM]$ et $[BJ]$ sont parallèles et de même longueur, ainsi que $[FN]$ et $[CJ]$. Comme J est le milieu de $[BC]$, les segments $[EM]$ et $[NF]$ sont parallèles, de

même longueur et de même sens : $EMFN$ est un parallélogramme. Ses diagonales $[EF]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

G est le milieu de $[MN]$

Conclusion — M et N sont dans le plan (IJK), donc la droite (MN) y est contenue, et le milieu G de $[MN]$ aussi. Inversement, on admet que tout point de ce plan est le milieu d'un tel segment $[EF]$.

$G \in (IJK)$

le lieu des points G est le plan (IJK)

À ne pas faire : Le lieu des points G est le parallélogramme $IJKL$ — Le lieu des points G est le plan (IJK) tout entier. E et F décrivent les droites (AB) et (CD), pas seulement les arêtes : G sort du parallélogramme $IJKL$.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont contenues dans un même plan et si elles sont parallèles dans ce plan. Deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles : elles peuvent être non coplanaires.

   > Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont contenues dans un même plan et si elles sont parallèles dans ce plan. W zouz droites ma 3andhomch 7atta point commun, mouch dima parallèles : ynajjmou ykounou non coplanaires.
   > *Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont contenues dans un même plan et si elles sont parallèles dans ce plan. Et deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas toujours parallèles : elles peuvent être non coplanaires.*

2. Par un point de l'espace passe une unique droite parallèle à une droite donnée. Deux droites strictement parallèles déterminent un unique plan.

   > Par un point de l'espace passe une unique droite parallèle à une droite donnée. W deux droites strictement parallèles y3arrfou plan wa7ed bark.
   > *Par un point de l'espace passe une unique droite parallèle à une droite donnée. Et deux droites strictement parallèles déterminent un unique plan.*

3. Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.

   > Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre. W deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.
   > *Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre. Et deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.*

4. Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Toute droite qui lui est parallèle et qui passe par un point du plan est alors incluse dans ce plan.

   > Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. W wa9tha koll droite parallèle liha w tet3adda men point mta3 el plan, hiya el koll fel plan.
   > *Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Et dans ce cas, toute droite qui lui est parallèle et qui passe par un point du plan est tout entière dans le plan.*

5. Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre. Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

   > Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre. W si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.
   > *Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre. Et si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.*

6. Théorème du toit : si deux droites parallèles sont contenues respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.

   > Le théorème du toit : si deux droites parallèles sont contenues respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.
   > *Le théorème du toit : si deux droites parallèles sont contenues respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.*

7. Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus. Si deux plans sont parallèles : toute droite de l'un est parallèle à l'autre, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre, toute droite qui perce l'un perce l'autre.

   > Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus. W ki ykounou parallèles : toute droite de l'un est parallèle à l'autre, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre, w toute droite qui perce l'un perce l'autre.
   > *Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus. Et quand ils sont parallèles : toute droite de l'un est parallèle à l'autre, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre, et toute droite qui perce l'un perce l'autre.*

8. Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

   > Bech tbayyen deux plans parallèles : deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
   > *Pour montrer que deux plans sont parallèles : deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.*

9. Par un point donné passe un unique plan parallèle à un plan donné. Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles.

   > Par un point donné passe un unique plan parallèle à un plan donné. W deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles.
   > *Par un point donné passe un unique plan parallèle à un plan donné. Et deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles.*

10. Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles : c'est ce qui sert à construire les sections.

> Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles. Hedhi elli nesta3mlouha bech nebniw les sections.
> *Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles. C'est ce qu'on utilise pour construire les sections.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : deux droites parallèles lezem ykounou fi nafs el plan. Bech tbayyen droite parallèle à un plan, lawwej fel plan 3la droite parallèle liha. Bech tbayyen deux plans parallèles, lawwej 3la deux droites sécantes fi wa7ed, parallèles à deux droites sécantes fel e5er. W fi les sections, tfakker la propriété 12 : deux faces parallèles ya3tiw deux segments parallèles. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : deux droites parallèles لازم يكونو في نفس الـ plan . باش تبيّن droite parallèle à
un plan ، لوّج في الـ plan على droite parallèle ليها . باش تبيّن deux plans parallèles ، لوّج على deux droites
sécantes في واحد ، parallèles à deux droites sécantes في الآخر w . les sections في ، تفكّر la propriété
douze : deux faces parallèles يعطيو deux segments parallèles . يالله للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : deux droites parallèles doivent être dans un même plan. Pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan, cherche dans le plan une droite qui lui est parallèle. Pour montrer que deux plans sont parallèles, cherche deux droites sécantes dans l'un, parallèles à deux droites sécantes dans l'autre. Et dans les sections, souviens-toi de la propriété douze : deux faces parallèles donnent deux segments parallèles. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · DROITES PARALLÈLES

c'est quoi deux droites parallèles dans l'espace | chnowa ma3neha droites parallèles fi l espace | définition de deux droites parallèles de l espace | deux droites parallèles ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

parallèles : dans un même plan, et parallèles dans ce plan

CE QU'IL RÉPOND

Deux droites de l'espace parallèles, ma3neha zouz 7ajet : houma fi nafs el plan, w fel plan hedha houma parallèles. Ya3ni lezem dima tal9a plan fih ez-zouz droites.

deux droites de l'espace parallèles ، معناها زوز حاجات : هوما في نفس الـ w ، plan في الـ plan هذا هوما
parallèles . يعني لازم ديما تلقى plan فيه الزوز droites .

Deux droites de l'espace sont parallèles quand deux choses sont vraies : elles sont dans un même plan, et dans ce plan elles sont parallèles. Il faut donc toujours trouver un plan qui contient les deux droites.

QUESTION 2 · DROITES PARALLÈLES

que veut dire strictement parallèles | chnowa strictement parallèles | strictement parallèles ma3neha | différence entre parallèles et strictement parallèles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

strictement parallèles : parallèles et sans point commun

CE QU'IL RÉPOND

Strictement parallèles ma3neha parallèles w distinctes. Deux droites strictement parallèles ma 3andhomch 7atta point commun. Kif kif droite w plan, walla deux plans : strictement parallèles ki ma 3andhomch 7atta point commun.

strictement parallèles معناها parallèles w distinctes . deux droites strictement parallèles ما عندهمش حتّى point commun . كيف كيف droite w plan ، ولّا strictement parallèles : deux plans كي ما عندهمش حتّى point commun .

Strictement parallèles veut dire parallèles et distinctes. Deux droites strictement parallèles n'ont aucun point commun. C'est pareil pour une droite et un plan, ou pour deux plans : ils sont strictement parallèles quand ils n'ont aucun point commun.

QUESTION 3 · DROITES PARALLÈLES

deux droites confondues sont parallèles ? | confondues ma3neha chnowa | c est quoi des droites confondues | deux plans confondus sont parallèles ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

parallèles = confondues ou strictement parallèles

CE QU'IL RÉPOND

Confondues ma3neha hiya nafs el droite. W ih, n9oulou 3liha parallèles : droite parallèle l rou7ha. Kif kif deux plans confondus : houma parallèles. Ama mouch strictement parallèles.

confondues معناها هي نفس الـ w droite . إيه ، نقولو عليها parallèles : droite parallèle لروحها . كيف كيف deux plans confondus : هوما parallèles . أما موش strictement parallèles .

Confondues veut dire que c'est la même droite. Et oui, on dit qu'elles sont parallèles : une droite est parallèle à elle-même. De même, deux plans confondus sont parallèles. Mais ils ne sont pas strictement parallèles.

QUESTION 4 · DROITES PARALLÈLES

deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles ? | zouz droites ma yetle9awch donc parallèles ?

deux droites sans point commun sont toujours parallèles ? | pas de point commun ma3neha parallèles ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$D \cap D' = \varnothing$ ne suffit pas

CE QU'IL RÉPOND

Le, mouch dima. Fi le plan ih, ama fi l'espace le. Zouz droites ma yetle9awch, ynajjmou ykounou parallèles, w ynajjmou ykounou non coplanaires. Mathalan fi cube ABCDEFGH, la droite (AB) w la droite (CG) ma yetle9awch, w mouch parallèles.

لا ، موش ديما . في le plan إيه ، أما في l'espace لا . زوز droites ما يتلاقاوش ، ينجّمو يكونو w ، ينجّمو parallèles
يكونو non coplanaires . مثلاً في cube A B C D E F G H ، la droite A B w la droite C G ما يتلاقاوش ، w موش
parallèles .

Non, pas toujours. Dans le plan oui, mais dans l'espace non. Deux droites qui ne se rencontrent pas peuvent être parallèles, et elles peuvent aussi être non coplanaires. Par exemple, dans un cube A B C D E F G H, la droite A B et la droite C G ne se rencontrent pas, et elles ne sont pas parallèles.

QUESTION 5 · POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET DE PLANS

c'est quoi deux droites non coplanaires | non coplanaires ma3neha chnowa | chnowa droites non coplanaires | que veut dire coplanaires

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

non coplanaires : ni sécantes, ni parallèles

CE QU'IL RÉPOND

Deux droites coplanaires ma3neha famma plan fih ez-zouz. W non coplanaires ma3neha ma fammech 7atta plan fih ez-zouz. Deux droites non coplanaires mouch sécantes w mouch parallèles.

deux droites coplanaires معناها فمّا plan فيه الزوز . non coplanaires w معناها ما فمّاش حتّى plan فيه الزوز .
deux droites non coplanaires موش sécantes w موش parallèles .

Deux droites coplanaires, cela veut dire qu'il existe un plan qui les contient toutes les deux. Et non coplanaires veut dire qu'aucun plan ne les contient toutes les deux. Deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes ni parallèles.

QUESTION 6 · UNE PARALLÈLE PAR UN POINT, UN PLAN PAR DEUX PARALLÈLES

combien de droites parallèles à une droite passent par un point | 9adech men droite parallèle tet3adda men point | par un point combien de droites parallèles à une droite donnée | est-ce que la droite parallèle passant par un point est unique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

par un point : une seule parallèle à une droite donnée

CE QU'IL RÉPOND

Droite wa7da bark. Par un point de l'espace, passe une unique droite parallèle à une droite donnée. 5ater el droite w el point y3arrfou plan wa7ed, w fel plan hedha la parallèle wa7da bark.

خاطر . par un point de l'espace ، passe une unique droite parallèle à une droite donnée . وحدة برك droite
الـ droite w الـ point يعرّفو plan واحد ، w في الـ plan هذا la parallèle وحدة برك .

Une seule. Par un point de l'espace passe une unique droite parallèle à une droite donnée. En effet, la droite et le point définissent un seul plan, et dans ce plan la parallèle est unique.

QUESTION 7 · PROPRIÉTÉS 1 ET 2

deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles dans l espace ?

zouz droites parallèles l troisième droite

la propriété de la troisième droite marche dans l espace ?

parallèles à une même troisième

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles

CE QU'IL RÉPOND

Ih, la propriété hedhi s7i7a fi l'espace kima fi le plan : si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles. W hiya t3awen barcha : ma 3adech lezem nlawwjou 3la plan fih ez-zouz droites.

le plan : si deux droites sont parallèles à une même كيما في l'espace في هاذي صحيحة la propriété ، إيه
troisième ، elles sont parallèles entre elles . w هي تعاون برشا : ما عادش لازم نلوّجو على plan فيه الزوز
droites .

Oui, cette propriété est vraie dans l'espace comme dans le plan : si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles. Et elle aide beaucoup : on n'a plus besoin de chercher un plan qui contient les deux droites.

QUESTION 8 · PROPRIÉTÉS 1 ET 2

pourquoi on admet la propriété 1

3lech propriété admise

c est quoi une propriété admise

on admet ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

admise : acceptée sans démonstration

CE QU'IL RÉPOND

Propriété admise ma3neha na9blouha men ghir démonstration. Hiya s7i7a, ama la démonstration mte3ha mouch fi le programme. Nesta3mlouha kima ay propriété o5ra bech nbayynou el be9i.

propriété admise معناها نقبلوها من غير démonstration . هي صحيحة ، أما la démonstration متاعها موش
في le programme . نستعملوها كيما أيّ propriété أخرى باش نبيّنو الباقي .

Une propriété admise, c'est une propriété qu'on accepte sans démonstration. Elle est vraie, mais sa démonstration n'est pas au programme. On l'utilise comme n'importe quelle autre propriété pour

démontrer le reste.

QUESTION 9 · EXEMPLE : LES MILIEUX DES ARÊTES D'UN TÉTRAÈDRE

c'est quoi le théorème des milieux | chnowa théorème des milieux | la droite des milieux dans un triangle | théorème des milieux fi l espace

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(IJ) \text{ parallèle à } (BC) \quad \text{et} \quad IJ = \frac{1}{2}BC$$

CE QU'IL RÉPOND

Le théorème des milieux y9oul : fi triangle, la droite elli tet3adda men les milieux mta3 deux côtés, parallèle au troisième côté, w le segment mte3ha égale la moitié du troisième côté. Fi l'espace nesta3mlouh fi le plan mta3 koll triangle.

يقول le théorème des milieux : في triangle، la droite اللي تتعدّى من les milieux متاع deux côtés، égale la moitié du troisième côté متاعها parallèle au troisième côté، w le segment في l'espace . نستعملوه في le plan متاع كل triangle .

Le théorème des milieux dit : dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté, et le segment qui joint ces milieux mesure la moitié du troisième côté. Dans l'espace, on l'utilise dans le plan de chaque triangle.

QUESTION 10 · EXEMPLE : LES MILIEUX DES ARÊTES D'UN TÉTRAÈDRE

que veut dire droites concourantes | chnowa concourantes | concourantes ma3neha | trois droites concourantes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

concourantes : elles passent par un même point

CE QU'IL RÉPOND

Des droites concourantes ma3neha yet3addew el koll men nafs el point. Bech nbayynou elli trois droites concourantes, nal9aw point wa7ed elli houwa 3la eth-thletha. Fi le tétraèdre, houwa le milieu commun mta3 les trois segments.

des droites concourantes معناها يتعدّاو الكل من نفس الـ point . باش نبيّنو اللي trois droites concourantes، نلقاو point واحد اللي هو على الثلاثة . في le tétraèdre، هو le milieu commun متاع les trois segments .

Des droites concourantes sont des droites qui passent toutes par un même point. Pour montrer que trois droites sont concourantes, on trouve un point qui est sur les trois. Dans le tétraèdre, c'est le milieu commun des trois segments.

QUESTION 11 · DROITE PARALLÈLE À UN PLAN

c'est quoi une droite parallèle à un plan | chnowa ma3neha droite parallèle à un plan

définition droite parallèle à un plan | droite et plan parallèles ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

D parallèle à P : D parallèle à une droite de P

CE QU'IL RÉPOND

On dit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Ya3ni yekfi tal9a fel plan droite wa7da parallèle liha.

يعني يكفي تلقى . on dit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan في الـ plan droite وحدة parallèle ليها .

On dit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Il suffit donc de trouver dans le plan une seule droite qui lui soit parallèle.

QUESTION 12 · EXEMPLE : DES DROITES PARALLÈLES À UN PLAN

comment montrer qu'une droite est parallèle à un plan | kifech nbayen droite parallèle à un plan

méthode pour prouver droite parallèle à un plan | démontrer qu une droite est parallèle à un plan

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

une droite du plan parallèle à D

ou un plan parallèle qui contient D

CE QU'IL RÉPOND

3andek zouz toro9. Wa7da : tal9a fel plan droite parallèle à la droite mte3ek. W lo5ra : tbayyen elli la droite mte3ek hiya fi plan e5er, parallèle au plan hedha, w testa3mel la propriété 7.

عندك زوز طرق . وحدة : تلقى في الـ plan droite parallèle à la droite متاعك . w الأخرى : تبيّن اللي la droite متاعك هي في plan آخر ، parallèle au plan هذا ، w تستعمل la propriété sept .

Tu as deux méthodes. L'une : trouver dans le plan une droite parallèle à ta droite. L'autre : montrer que ta droite est contenue dans un autre plan, parallèle à celui-ci, puis utiliser la propriété sept.

QUESTION 13 · DROITE PARALLÈLE À UN PLAN

une droite parallèle à un plan est parallèle à toutes les droites du plan ?

droite parallèle à un plan parallèle l koll droite fel plan ? | parallèle à toute droite du plan ?

est-elle parallèle à toutes les droites de ce plan

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

(EF) parallèle au plan (ABC), mais pas à (BC)

CE QU'IL RÉPOND

Le. La droite parallèle à un plan, parallèle l des droites mta3 el plan, mouch lel koll. Mathalan fi parallélépipède ABCDEFGH, la droite (EF) parallèle au plan (ABC), ama mouch parallèle à la droite (BC).

لا . la droite parallèle à un plan ، parallèle لـ des droites متاع الـ plan ، موش للكل . مثلاً في parallélépipède A B C D E F G H ، la droite E F parallèle au plan A B C أما موش ، parallèle à la droite B C .

Non. Une droite parallèle à un plan est parallèle à certaines droites de ce plan, pas à toutes. Par exemple, dans un parallélépipède A B C D E F G H, la droite E F est parallèle au plan A B C, mais elle n'est pas parallèle à la droite B C.

QUESTION 14 · PROPRIÉTÉ 3

c'est quoi un raisonnement par l'absurde | chnowa par l absurde | kifech nesta3mel l absurde | raisonner par l absurde ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

on suppose le contraire $\Rightarrow$ impossible

CE QU'IL RÉPOND

Le raisonnement par l'absurde : nafrdhou elli el 7aja elli n7ebbou nbayynouha ghalta, w nemchiw m3a el faradhiya hedhi 7atta nouslou l 7aja ma tjich. Wa9tha n9oulou : el faradhiya ghalta, donc el 7aja s7i7a. Hakka bayyanna la propriété 3.

le raisonnement par l'absurde : نفرضو اللي الحاجة اللي نحبّو نبيّنوها غالطة ، w نمشيو مع الفرضيّة هاذي حتّى نوصلو لحاجة ما تجيش . وقتها نقولو : الفرضيّة غالطة ، donc الحاجة صحيحة . هكّا بيّنّا la propriété trois .

Le raisonnement par l'absurde : on suppose que ce qu'on veut démontrer est faux, et on suit cette hypothèse jusqu'à arriver à quelque chose d'impossible. On conclut alors que l'hypothèse est fausse, donc que la propriété est vraie. C'est ainsi que nous avons démontré la propriété trois.

QUESTION 15 · PROPRIÉTÉ 6 : LE THÉORÈME DU TOIT

c'est quoi le théorème du toit | chnowa théorème du toit | théorème du toit y9oul chnowa | pourquoi on l appelle théorème du toit

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

D parallèle à D', $D \subset P$, $D' \subset P'$

$P \cap P' = \Delta \Rightarrow \Delta$ parallèle à D et à D'

CE QU'IL RÉPOND

Le théorème du toit y9oul : deux droites parallèles, koll wa7da fi plan, w les deux plans sécants. Wa9tha la droite d'intersection mta3 les deux plans parallèle lez-zouz droites. Sammineh hakka 5ater les deux plans kima sa9f ed-dar, w l'intersection hiya el fou9 mta3 es-sa9f.

le théorème du toit y9oul : deux droites parallèles ، كل وحدة في plan ، w les deux plans sécants وقتها . سمّيناه هكّا خاطر droite d'intersection متاع les deux plans parallèle للزوز droites . كيما سقف الدار ، w l'intersection هي الفوق متاع السقف .

Le théorème du toit dit : on a deux droites parallèles, chacune dans un plan, et les deux plans sont sécants. Alors la droite d'intersection des deux plans est parallèle aux deux droites. On l'appelle ainsi parce que les deux plans sont comme le toit d'une maison, et l'intersection en est le sommet.

QUESTION 16 · PLANS PARALLÈLES

c'est quoi deux plans parallèles | chnowa ma3neha plans parallèles | définition de deux plans parallèles | deux plans parallèles ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$P \cap Q = \varnothing \quad \text{ou} \quad P = Q$

CE QU'IL RÉPOND

On dit que deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus. Mathalan fi parallélépipède, les faces opposées fi plans parallèles.

on dit que deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus . plans parallèles في parallélépipède ، les faces opposées في مثلاً .

On dit que deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun ou lorsqu'ils sont confondus. Par exemple, dans un parallélépipède, les faces opposées sont dans des plans parallèles.

QUESTION 17 · PROPRIÉTÉ 10 : MONTRER QUE DEUX PLANS SONT PARALLÈLES

comment montrer que deux plans sont parallèles | kifech nbayen deux plans parallèles | méthode pour prouver que deux plans sont parallèles | démontrer que deux plans sont parallèles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

deux droites sécantes de l'un parallèles à deux droites sécantes de l'autre

CE QU'IL RÉPOND

B la propriété 10 : tal9a fi wa7ed mel les plans deux droites sécantes, w tbayyen elli houma parallèles à deux droites sécantes mta3 el plan le5er. Wa9tha les deux plans parallèles.

parallèles à deux هوما اللي تبيّن les plans deux droites sécantes ، w من واحد في تلقى : la propriété dix بـ . les deux plans parallèles وقتها . الآخر plan الـ متاع droites sécantes

Avec la propriété dix : tu trouves dans l'un des plans deux droites sécantes, et tu montres qu'elles sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre plan. Alors les deux plans sont parallèles.

QUESTION 18 · PROPRIÉTÉ 10 : MONTRER QUE DEUX PLANS SONT PARALLÈLES

une seule droite parallèle suffit pour deux plans parallèles ? | droite wa7da tekfi bech les plans ykounou parallèles ? | est-ce qu une droite suffit pour montrer que les plans sont parallèles | ça suffit une droite parallèle ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

une seule direction ne suffit pas

CE QU'IL RÉPOND

Le, droite wa7da ma tekfich. Deux plans ynajjmou ykoun fihom deux droites parallèles w ykounou sécants : hedhi bedhabt la situation mta3 le théorème du toit. Lezem deux droites sécantes.

هاذي : sécants يكونو deux droites parallèles w فيهم يكون ينجّمو deux plans . وحدة ما تكفيش droite ، لا
بالضبط la situation متاع le théorème du toit . لازم deux droites sécantes .

Non, une seule droite ne suffit pas. Deux plans peuvent contenir deux droites parallèles et être sécants : c'est exactement la situation du théorème du toit. Il faut deux droites sécantes.

QUESTION 19 · PROPRIÉTÉ 10 : MONTRER QUE DEUX PLANS SONT PARALLÈLES

pourquoi les deux droites doivent être sécantes | 3lech lezem les droites sécantes | pourquoi sécantes dans la propriété 10 | 3lech sécantes fi la propriété 10

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

deux droites sécantes = deux directions du plan

CE QU'IL RÉPOND

5ater deux droites parallèles ya3tiw direction wa7da bark, w direction wa7da ma tthabbetch el plan. Deux droites sécantes ya3tiw zouz directions, w houma elli y3arrfou el plan.

خاطر deux droites parallèles يعطيو direction وحدة برك ، w direction وحدة ما تثبّتش الـ deux droites . plan
sécantes يعطيو زوز ، w directions هوما اللي يعرّفو الـ plan .

Parce que deux droites parallèles ne donnent qu'une seule direction, et une seule direction ne fixe pas le plan. Deux droites sécantes donnent deux directions, et ce sont elles qui définissent le plan.

QUESTION 20 · PROPRIÉTÉS 11 ET 12

combien de plans parallèles à un plan passent par un point | 9adech men plan parallèle yet3adda men point | par un point combien de plans parallèles à un plan donné | le plan parallèle passant par un point est unique ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

par un point : un seul plan parallèle à un plan donné

CE QU'IL RÉPOND

Plan wa7ed bark. Par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan donné : hedhi la propriété 11. 3la hedheka nnajjmou n9oulou : le plan elli yet3adda men I w parallèle au plan (ABC).

la هاذي : par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan donné . واحد برك plan
. I w parallèle au plan A B C من يتعدّى اللي le plan : نقولو ننجّمو هذاكا على . propriété onze

Un seul. Par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan donné : c'est la propriété onze. C'est pour cela qu'on peut dire : le plan qui passe par I et qui est parallèle au plan A B C.

QUESTION 21 · PROPRIÉTÉS 11 ET 12

un plan coupe deux plans parallèles que dire des intersections

plan y9oss deux plans parallèles les intersections kifech

les droites d intersection avec deux plans parallèles

que dit la propriété 12 sur les plans parallèles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

P parallèle à P' : $Q \cap P$ et $Q \cap P'$ sont parallèles

CE QU'IL RÉPOND

La propriété 12 : si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles. Ya3ni tal9a deux droites parallèles, wa7da fi koll plan.

la propriété douze : si deux plans sont parallèles ، alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre ، et les droites d'intersection sont parallèles . يعني تلقى deux droites parallèles ، وحدة في كل plan .

La propriété douze : si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles. On obtient donc deux droites parallèles, une dans chaque plan.

QUESTION 22 · PROPRIÉTÉS 7, 8 ET 9

que veut dire une droite perce un plan

chnowa perce le plan

perce ma3neha chnowa

la droite perce le plan ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

D perce P : $D \cap P = \{A\}$

CE QU'IL RÉPOND

La droite perce le plan ma3neha la droite w le plan sécants : 3andhom point wa7ed commun. N9oulou zeda : le plan coupe la droite. W ken deux plans parallèles, la droite elli perce wa7ed, perce le5er zeda.

le plan : نقولو زادة . commun واحد point عندهم : la droite w le plan sécants معناها la droite perce le plan deux plans parallèles ، la droite كان coupe la droite . w واحد perce اللي perce ، الآخر زادة .

La droite perce le plan veut dire que la droite et le plan sont sécants : ils ont un seul point commun. On dit aussi : le plan coupe la droite. Et si deux plans sont parallèles, une droite qui perce l'un perce aussi l'autre.

QUESTION 23 · SECTIONS PLANES : LA SECTION D'UN CUBE

c'est quoi la section d'un solide par un plan

chnowa la section mta3 cube

section plane ma3neha chnowa

définition de la section d un cube

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

section : intersection du plan avec les faces du solide

CE QU'IL RÉPOND

La section mta3 solide b plan, hiya l'intersection mta3 el plan m3a les faces mta3 el solide. Tatla3 polygone : koll côté mte3ou 3la face.

: polygone تطلع . solide متاع الـ les faces مع plan متاع الـ l'intersection هي ، plan بـ solide متاع la section
. face كل côté متاعو على

La section d'un solide par un plan, c'est l'intersection de ce plan avec les faces du solide. On obtient un polygone : chacun de ses côtés est tracé sur une face.

QUESTION 24 · SECTIONS PLANES : LA SECTION D'UN CUBE

comment construire la section d un cube par un plan | kifech nebni la section mta3 cube | méthode pour tracer une section | comment tracer la section d une pyramide

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

face par face : deux points du plan sur chaque face

CE QU'IL RÉPOND

Ne5dmou face b face. Fi koll face, lezemna deux points mta3 el plan. Ken 3andna point wa7ed, ntawwlou droite na3rfouha 7atta tetle9a m3a droite mta3 el face. W fi deux faces parallèles, les deux segments parallèles : hedhi la propriété 12.

نعرفوها droite نطوّلو ، واحد point كان عندنا . plan متاع الـ deux points لازمنا ، face كل في . face بـ face نخدمو
la هاذي : deux faces parallèles ، les deux segments parallèles في face . w متاع الـ droite مع تتلاقى حتّى
. propriété douze

On travaille face par face. Sur chaque face, il nous faut deux points du plan. Si nous n'en avons qu'un, nous prolongeons une droite connue jusqu'à ce qu'elle rencontre une droite de la face. Et sur deux faces parallèles, les deux segments sont parallèles : c'est la propriété douze.

QUESTION 25 · SECTIONS PLANES : LA SECTION D'UN CUBE

quelle forme peut avoir la section d un cube | la section d un cube est toujours un triangle ? | la section peut être un hexagone ? | chnowa el forme mta3 la section

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

au plus six côtés : un par face

CE QU'IL RÉPOND

La section mta3 cube b plan hiya polygone, w koll côté mte3ou 3la face. El cube 3andou six faces, donc la section 3andha six côtés 3al akther : triangle, quadrilatère, pentagone walla hexagone.

six faces ، donc la عندو cube الـ . face متاعو على côté كل polygone ، w هي plan بـ cube متاع la section
. hexagone ولّا triangle ، quadrilatère ، pentagone : على الأكثر six côtés عندها section

La section d'un cube par un plan est un polygone, dont chaque côté est sur une face. Le cube a six faces, donc la section a au plus six côtés : un triangle, un quadrilatère, un pentagone ou un hexagone.

QUESTION 26 · EXEMPLE : UN PLAN PARALLÈLE À UNE FACE

est-ce qu on peut utiliser Thalès dans l espace | nnajem nesta3mel Thalès fi l espace ? | théorème de Thalès dans un tétraèdre | Thalès fi tétraèdre kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

Thalès : dans le plan d'un triangle

CE QU'IL RÉPOND

Ih, ama dima fi plan. Le théorème de Thalès mta3 la géométrie plane, donc nesta3mlouh fi face, walla fi plan fih le triangle. Lezem tsammi el plan w tbayyen elli les deux droites parallèles 9bal ma tekteb les rapports.

إيه ، أما ديما في plan . le théorème de Thalès متاع donc ، la géométrie plane نستعملوه في face ، ولّا في plan فيه le triangle . لازم تسمّي الـ plan w تبيّن اللي les deux droites parallèles قُبَلْ ما تكتب les rapports .

Oui, mais toujours dans un plan. Le théorème de Thalès est un théorème de géométrie plane, donc on l'utilise dans une face, ou dans un plan qui contient le triangle. Il faut nommer le plan et montrer que les deux droites sont parallèles avant d'écrire les rapports.

QUESTION 27 · POUR COMPRENDRE : UNE DROITE ET UN PLAN

c'est quoi un parallélépipède | chnowa parallélépipède | parallélépipède ma3neha | différence entre cube et parallélépipède

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

six faces, toutes des parallélogrammes

CE QU'IL RÉPOND

Le parallélépipède houwa solide 3andou six faces, w koll face parallélogramme. Les faces opposées parallèles. W le cube houwa parallélépipède 5ass : les faces mte3ou el koll carrés.

le parallélépipède هو solide عندو ، w six faces كل . les faces opposées parallèles face parallélogramme

w le cube هو parallélépipède خاصّ : les faces متاعو الكل carrés .

Un parallélépipède est un solide à six faces dont chaque face est un parallélogramme. Ses faces opposées sont parallèles. Et le cube est un parallélépipède particulier : toutes ses faces sont des carrés.

QUESTION 28 · UN PROBLÈME POUR ALLER PLUS LOIN : LE LIEU DES MILIEUX

c'est quoi un lieu géométrique | chnowa lieu géométrique | lieu des points ma3neha chnowa | que veut dire chercher un lieu

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

lieu : l'ensemble des positions du point

CE QU'IL RÉPOND

Le lieu géométrique houwa l'ensemble mta3 les positions el koll elli ynajjem ye5edhhom point ki yet7arrek. Bech nal9awh : njarrbou des positions, na3mlou conjecture, w ba3d nbayynouha.

: باش نلقاوه . كي يتحرّك point ياخذهم ينجّم اللي الكل les positions متاع l'ensemble هو le lieu géométrique
نجرّبو des positions ، نعملو w conjecture بعد نبيّنوها .

Le lieu géométrique, c'est l'ensemble de toutes les positions que peut prendre un point quand il se déplace. Pour le trouver : on essaie des positions, on fait une conjecture, puis on la démontre.

QUESTION 29 · DROITE PARALLÈLE À UN PLAN

que veut dire le symbole des deux barres | chnowa el symbole mta3 parallèle | comment on note parallèle | notation de parallèle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D \parallel P$$

CE QU'IL RÉPOND

Bech nektbou parallèle, n7ottou deux petites barres bin ez-zouz : $D \parallel P$, w tet9ra D parallèle à P. Nektbouha bin deux droites, bin droite w plan, walla bin deux plans.

باش نكتبو parallèle ، نحطّو deux petites barres بين الزوز : w ، P ، deux barres ، D تتقرا D parallèle à P .
نكتبوها بين deux droites ، بين droite w plan ، ولّا بين deux plans .

Pour écrire parallèle, on met deux petites barres entre les deux : D, deux barres, P, et cela se lit D parallèle à P. On l'écrit entre deux droites, entre une droite et un plan, ou entre deux plans.

QUESTION 30 · SECTIONS PLANES : LA SECTION D'UN CUBE

sur le dessin en perspective les parallèles restent parallèles ? | fel dessin les droites parallèles yo93dou parallèles ? | c est quoi la perspective cavalière | le dessin en perspective garde le parallélisme ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

le dessin conserve le parallélisme et les milieux

CE QU'IL RÉPOND

Ih. Fi la perspective cavalière, les droites elli houma parallèles fi l'espace yeb9aw parallèles 3la el dessin, w les milieux yeb9aw milieux. Ama les longueurs w les angles mouch dima ma7foudhin. 3la hedheka narsmou les parallèles, w ma n9isouch 3la el dessin.

إيه . في les droites ، la perspective cavalière اللي هوما parallèles في l'espace يبقاو parallèles على الـ
موش ديما محفوظين . على هذاكا نرسمو les longueurs w les angles أما . milieux يبقاو dessin ، w les milieux
ما نقيسوش على الـ dessin . w ، les parallèles

Oui. En perspective cavalière, les droites qui sont parallèles dans l'espace restent parallèles sur le dessin, et les milieux restent des milieux. Mais les longueurs et les angles ne sont pas toujours conservés. C'est pour cela qu'on trace les parallèles, mais qu'on ne mesure pas sur le dessin.

QUESTION 31 · POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET DE PLANS

quelles sont les positions relatives de deux droites dans l espace | les positions relatives d une droite et d un plan | chnowa les positions relatives | positions relatives de deux plans

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

deux droites : sécantes, parallèles ou non coplanaires

CE QU'IL RÉPOND

Deux droites distinctes : sécantes, strictement parallèles, walla non coplanaires. Droite w plan : sécants walla parallèles. Deux plans : sécants walla parallèles. W ma tensech le troisième cas mta3 les droites : non coplanaires.

non coplanaires . droite w plan : sécants ولّا ، deux droites distinctes : sécantes ، strictement parallèles
les droites : non متاع le troisième cas ما تنساش parallèles . w ولّا parallèles . deux plans : sécants ولّا
. coplanaires

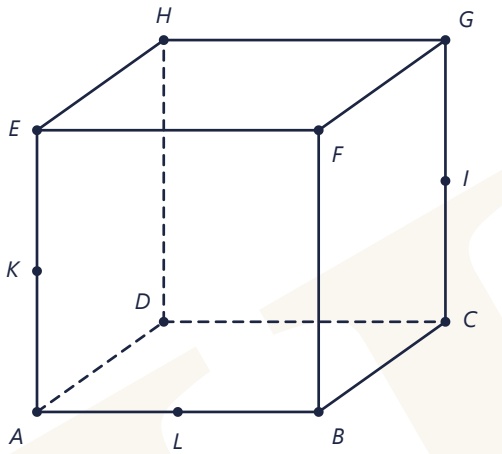
Deux droites distinctes sont sécantes, strictement parallèles, ou non coplanaires. Une droite et un plan sont sécants ou parallèles. Deux plans sont sécants ou parallèles. Et n'oublie pas le troisième cas pour les droites : non coplanaires.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **La droite des milieux dans une face**

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, K est le milieu de $[AE]$ et L le milieu de $[AB]$. Les droites (KL) et (EB) sont-elles parallèles ?

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



I, K et L sont les milieux de [CG], [AE] et [AB].

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point K est le milieu de l'arête [AE], le point L le milieu de l'arête [AB] et le point I le milieu de l'arête [CG].

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui elles sont parallèles · oui, elles sont parallèles · oui parallèles · oui, parallèles · parallèles · elles sont parallèles · oui ils sont parallèles · ils sont parallèles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les quatre points K, L, E et B sont dans le plan d'une même face du cube. Laquelle ?
2. Dans le triangle AEB, que sait-on de la droite qui joint les milieux de deux côtés ?

CORRECTION

Un plan — K est sur $[AE]$ et L sur $[AB]$: les deux droites sont dans le plan de la face $ABFE$.
(KL) et (EB) sont dans le plan (ABF)

Les milieux — Dans le triangle AEB, K et L sont les milieux de $[AE]$ et $[AB]$.
(KL) est parallèle à (EB)

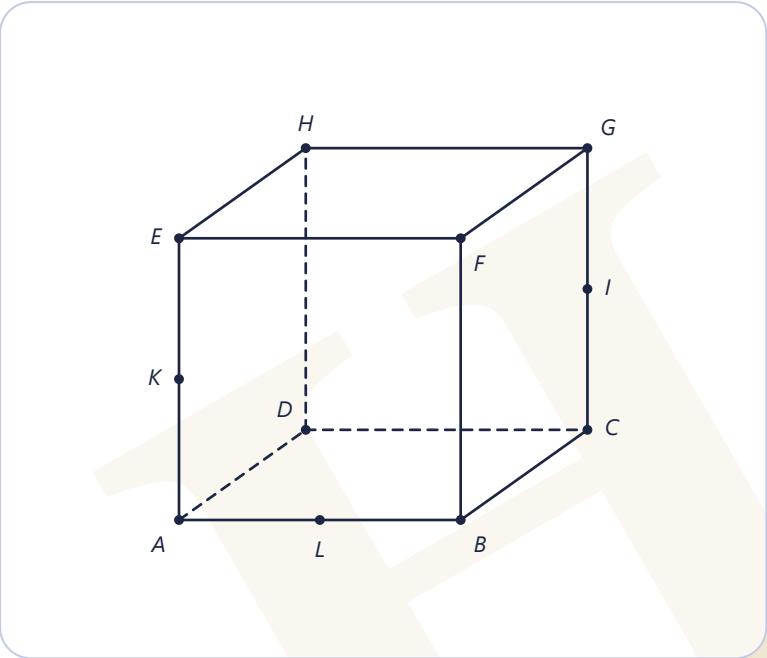
Oui : les droites (KL) et (EB) sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / pas parallèles / elles ne sont pas parallèles` → Regarde le triangle AEB : K et L sont les milieux de deux de ses côtés, donc (KL) est parallèle au troisième côté (EB).

EXERCICE 2 · BASE Deux droites d'une même face

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, L est le milieu de $[AB]$. Les droites (EL) et (BF) sont-elles sécantes ?



I, K et L sont les milieux de [CG], [AE] et [AB].

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point K est le milieu de l'arête [AE], le point L le milieu de l'arête [AB] et le point I le milieu de l'arête [CG].

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui elles sont sécantes · oui, elles sont sécantes · oui sécantes · sécantes · elles sont sécantes · elles se coupent · oui elles se coupent

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un plan qui contient les deux droites.
2. Les deux droites sont dans le plan de la face $ABFE$. Dans un plan, deux droites sont parallèles ou sécantes : la parallèle à (BF) passant par E est-elle (EL) ?

CORRECTION

Coplanaires — E, L, B et F sont dans le plan de la face $ABFE$.

(EL) et (BF) sont dans le plan (ABF)

Pas parallèles — La parallèle à (BF) passant par E est (AE), et le point L n'est pas sur (AE) : (EL) n'est pas parallèle à (BF).

(EL) et (BF) sont sécantes

Oui : (EL) et (BF) sont coplanaires et non parallèles, elles sont sécantes.

PIÈGES ANTICIPÉS

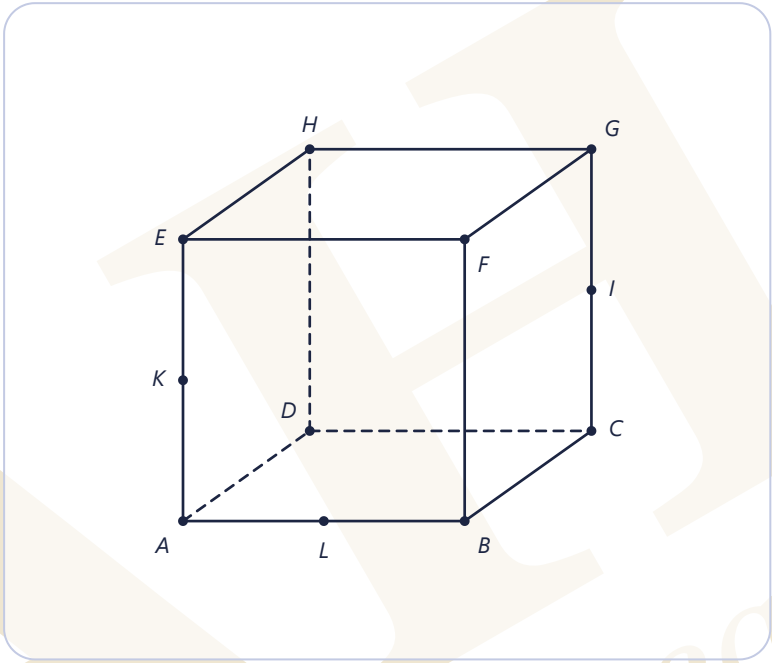
`non / pas sécantes / elles ne sont pas sécantes` → Les segments $[EL]$ et $[BF]$ ne se touchent pas, mais ce sont les droites qu'on regarde : dans le plan (ABF), elles ne sont pas parallèles, donc elles se

coupent.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Sécantes sur le dessin seulement ?

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, K est le milieu de $[AE]$ et I le milieu de $[CG]$. Les droites (HK) et (IA) sont-elles sécantes ?



I, K et L sont les milieux de [CG], [AE] et [AB].

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point K est le milieu de l'arête [AE], le point L le milieu de l'arête [AB] et le point I le milieu de l'arête [CG].

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · non elles ne sont pas sécantes · non, elles ne sont pas sécantes · non pas sécantes · pas sécantes · elles ne sont pas sécantes · non coplanaires · non, non coplanaires · elles sont non coplanaires · elles ne se coupent pas

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite (HK) est contenue dans le plan de la face $ADHE$. En quel point la droite (IA) rencontre-t-elle ce plan ?
2. (IA) ne rencontre le plan (ADH) qu'au point A. Ce point est-il sur la droite (HK) ?

CORRECTION

Le plan (ADH) — H et K sont dans le plan de la face $ADHE$: la droite (HK) y est contenue.

$(HK) \subset (ADH)$

La droite (IA) — I n'est pas dans le plan (ADH) : la droite (IA) perce ce plan au seul point A.

$(IA) \cap (ADH) = \{A\}$

Le point A — Un point commun à (HK) et (IA) serait dans le plan (ADH) et sur (IA) : ce serait A. Or A n'est pas sur (HK).

$A \notin (HK)$

Non : les droites (HK) et (IA) n'ont aucun point commun, elles ne sont pas sécantes.

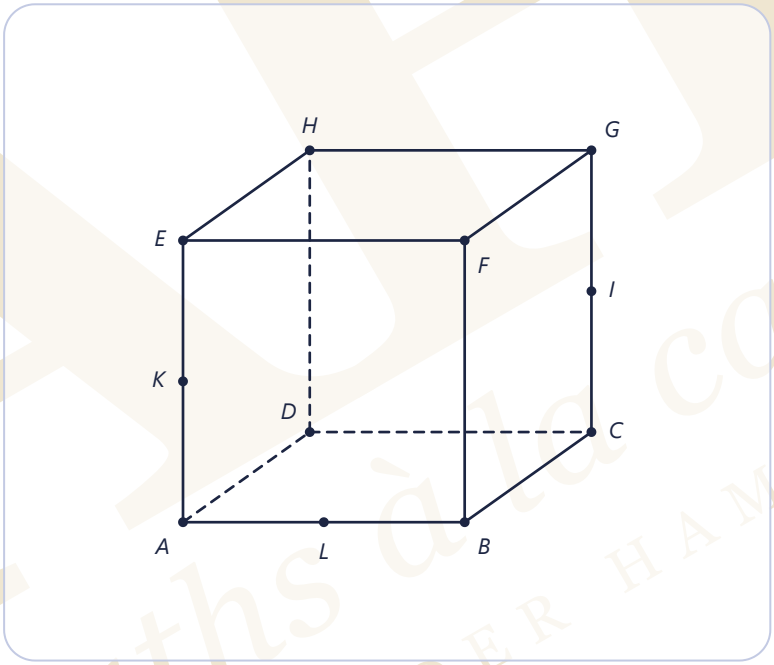
PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / sécantes / elles sont sécantes` → Sur le dessin les deux traits peuvent se croiser, mais dans l'espace (IA) ne touche le plan (ADH) qu'en A, et A n'est pas sur (HK).

EXERCICE 4 · RAISONNEMENT

Parallèles ou non ?

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, K est le milieu de $[AE]$ et L le milieu de $[AB]$. Les droites (FL) et (HK) sont-elles parallèles ?



I, K et L sont les milieux de [CG], [AE] et [AB].

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point K est le milieu de l'arête [AE], le point L le milieu de l'arête [AB] et le point I le milieu de l'arête [CG].

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · non elles ne sont pas parallèles · non, elles ne sont pas parallèles · non pas parallèles · pas parallèles · elles ne sont pas parallèles · non ils ne sont pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · non coplanaires · elles sont non coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (FL) est dans le plan (ABF) et (HK) dans le plan (ADH). Suivant quelle droite ces deux plans se coupent-ils ?

2. Si (FL) et (HK) étaient parallèles, le théorème du toit dirait qu'elles sont parallèles à (AE). Est-ce le cas de (FL) ?

CORRECTION

Deux plans — (FL) est contenue dans le plan (ABF), (HK) dans le plan (ADH). Ces deux plans sont sécants suivant (AE).

$$(ABF) \cap (ADH) = (AE)$$

Théorème du toit — Si (FL) et (HK) étaient parallèles, elles seraient toutes les deux parallèles à (AE).

$$(FL) \text{ serait parallèle à } (AE)$$

Impossible — Dans le plan (ABF), la parallèle à (AE) passant par F est (BF), et le point L n'est pas sur (BF).

$$(FL) \text{ n'est pas parallèle à } (AE)$$

Non : les droites (FL) et (HK) ne sont pas parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / parallèles / elles sont parallèles` → Deux droites parallèles situées dans les plans (ABF) et (ADH) seraient parallèles à leur intersection (AE) : ce n'est pas le cas de (FL).

EXERCICE 5 · BASE Vrai ou faux : sans point commun

Vrai ou faux ? « Deux droites de l'espace qui n'ont aucun point commun sont parallèles. »

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la définition : deux droites parallèles doivent d'abord être contenues dans un même plan.
2. Dans un cube $ABCDEFGH$, pense aux droites (AB) et (CG) : ont-elles un point commun ? Sont-elles dans un même plan ?

CORRECTION

La définition — Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont contenues dans un même plan et parallèles dans ce plan.

Un contre-exemple — Dans un cube $ABCDEFGH$, les droites (AB) et (CG) n'ont aucun point commun, mais aucun plan ne les contient toutes les deux.

$$(AB) \text{ et } (CG) \text{ ne sont pas parallèles}$$

Faux : deux droites sans point commun peuvent être non coplanaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → C'est vrai dans le plan, pas dans l'espace : deux droites sans point commun peuvent ne pas être coplanaires, comme (AB) et (CG) dans un cube.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Deux parallélogrammes

$ABCD$ et $BEDF$ sont deux parallélogrammes qui ont la même diagonale $[BD]$ et qui ne sont pas dans un même plan. Les droites (EC) et (AF) sont-elles parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Considère le milieu O du segment $[BD]$: que représente-t-il pour chacun des deux parallélogrammes ?
2. O est le milieu de $[AC]$ et le milieu de $[EF]$. Quelle est alors la nature du quadrilatère $AECF$?

CORRECTION

Le milieu O — Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : le milieu O de $[BD]$ est aussi le milieu de $[AC]$, dans $ABCD$, et le milieu de $[EF]$, dans $BEDF$.

O est le milieu de $[AC]$ et de $[EF]$

AECF — Les diagonales $[AC]$ et $[EF]$ du quadrilatère $AECF$ se coupent en leur milieu : c'est un parallélogramme.

(EC) est parallèle à (AF)

Oui : $AECF$ est un parallélogramme, donc (EC) et (AF) sont parallèles, de même que (AE) et (CF).

PIÈGES ANTICIPÉS

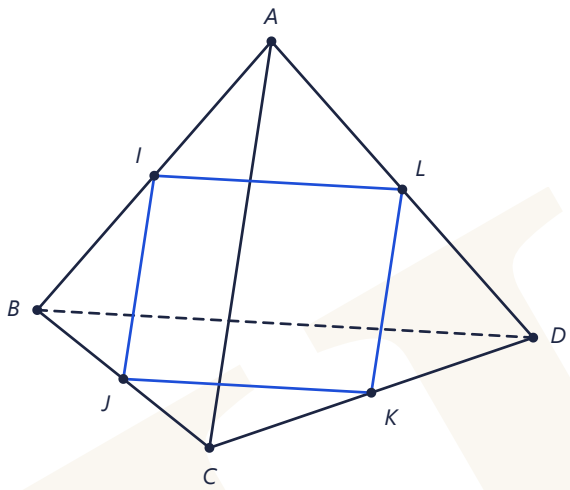
`non / pas parallèles / elles ne sont pas parallèles` → Les deux parallélogrammes sont dans deux plans différents, mais $[AC]$ et $[EF]$ ont le même milieu : $AECF$ est un parallélogramme, donc (EC) et (AF) sont parallèles.

EXERCICE 7 · BASE

Un côté du quadrilatère des milieux

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On donne $AC = 8$. Calculer IJ.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMOUTE



I, J, K et L sont les milieux de [AB], [BC], [CD] et [DA].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes [AB], [BC], [CD] et [DA] ; le quadrilatère IJKL est tracé en bleu.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. I et J sont les milieux de deux côtés du triangle ABC.
2. La droite des milieux est parallèle au troisième côté, et le segment qui joint les milieux mesure la moitié de ce côté.

$$IJ = \frac{1}{2}AC$$

CORRECTION

Dans le triangle ABC — I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.

$$IJ = \frac{1}{2}AC$$

Le calcul —

$$IJ = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$IJ = 4.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

16 → Le segment des milieux mesure la moitié du troisième côté, pas le double : IJ est la moitié de AC.

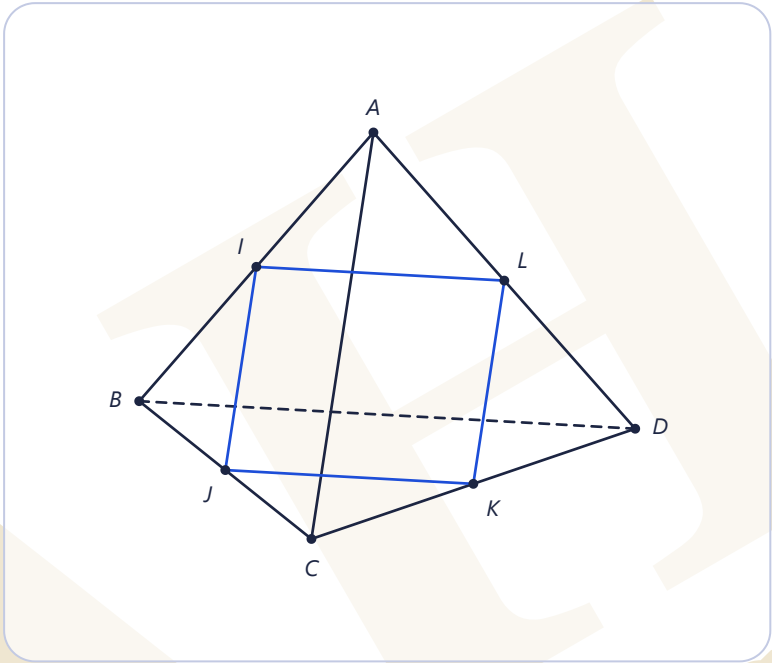
8 → 8 est la longueur AC ; le segment $[IJ]$ en mesure la moitié.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 8 · PRATIQUE

Le périmètre du parallélogramme des milieux

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On donne $AC = 8$ et $BD = 6$. Calculer le périmètre du parallélogramme $IJKL$.



I, J, K et L sont les milieux de [AB], [BC], [CD] et [DA].

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes [AB], [BC], [CD] et [DA] ; le quadrilatère IJKL est tracé en bleu.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[IJ]$ et $[LK]$ sont des segments de milieux dans les triangles ABC et ADC : ils mesurent la moitié de AC.
2. $[JK]$ et $[IL]$ sont des segments de milieux dans les triangles BCD et ABD : ils mesurent la moitié de BD.

CORRECTION

Deux côtés — Dans les triangles ABC et ADC :

$$IJ = LK = \frac{1}{2}AC = 4$$

Les deux autres — Dans les triangles BCD et ABD :

$$JK = IL = \frac{1}{2}BD = 3$$

Le périmètre —

$$2 \times (4 + 3) = 14$$

Le périmètre de $IJKL$ est 14.

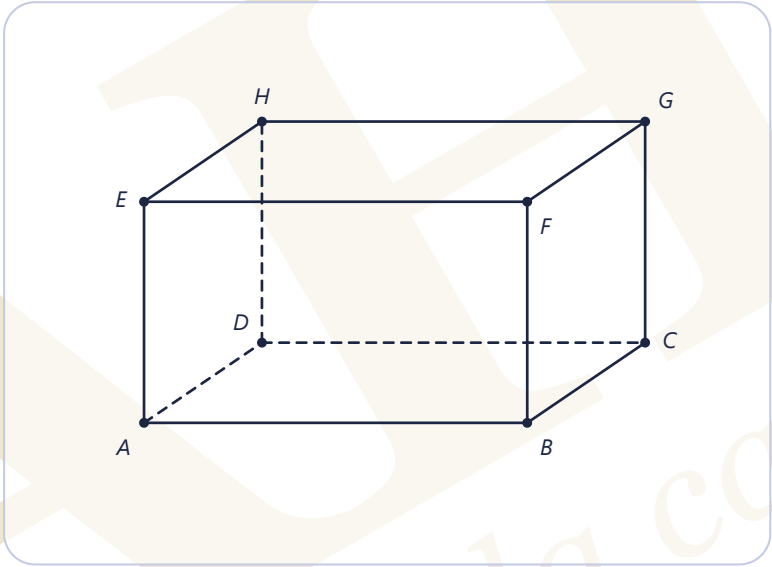
PIÈGES ANTICIPÉS

7 → $4 + 3 = 7$ est la somme de deux côtés consécutifs : le parallélogramme a quatre côtés.

28 → Les côtés de $IJKL$ mesurent la moitié de AC et la moitié de BD, pas AC et BD.

EXERCICE 9 · BASE **Sécante au plan ?**

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ de la figure, la droite (EG) est-elle sécante au plan (ABC) ?



Le parallélépipède ABCDEFGH.

Un parallélépipède ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · c'est non · faux · non elle est parallèle · non, elle est parallèle · non elle est parallèle au plan · elle est parallèle au plan · elle est parallèle · parallèle · strictement parallèle · non strictement parallèle · elle est strictement parallèle · non elle est strictement parallèle · elle est strictement parallèle au plan · non elle n'est pas sécante · pas sécante · elle n'est pas sécante

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une droite et un plan sont sécants lorsqu'ils ont un seul point commun.
2. Compare la droite (EG) à la droite (AC) : le quadrilatère $AEGC$ est un parallélogramme.

CORRECTION

Une parallèle — $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur : $AEGC$ est un parallélogramme. (EG) est parallèle à (AC)

Le plan — (AC) est une droite du plan (ABC) : la droite (EG) est parallèle à ce plan, et elle ne le rencontre pas.

$(EG) \cap (ABC) = \varnothing$

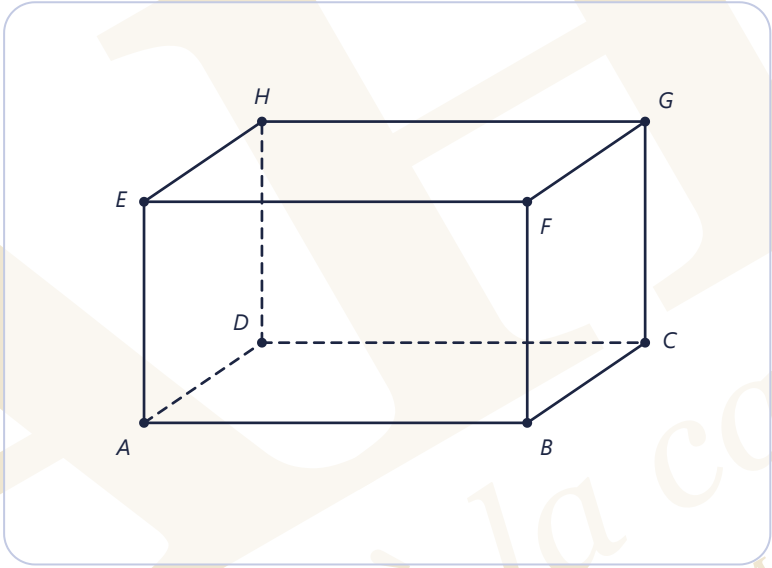
Non : la droite (EG) est strictement parallèle au plan (ABC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / sécante / elle est sécante` → (EG) est parallèle à (AC), une droite du plan (ABC) : elle est parallèle à ce plan et ne le perce pas.

EXERCICE 10 · BASE **Où la droite perce le plan**

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ de la figure, en quel point la droite (DH) perce-t-elle le plan (ABC) ?



Le parallélépipède ABCDEFGH.

Un parallélépipède ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : D — aussi acceptées : le point D · en D · point D · au point D · c'est D · {D} · (DH)∩(ABC)={D} · (DH) ∩ (ABC) = {D}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le point de la droite qui est aussi un point du plan (ABC).
2. Le plan (ABC) est le plan de la face du dessous : lequel des deux points nommés sur la droite est dans cette face ?

CORRECTION

Un point commun — D est sur la droite (DH) et dans le plan de la face $ABCD$.

$D \in (ABC)$

Un seul — H n'est pas dans le plan (ABC) : la droite (DH) n'est pas contenue dans ce plan, elle n'a qu'un point commun avec lui.

$(DH) \cap (ABC) = \{D\}$

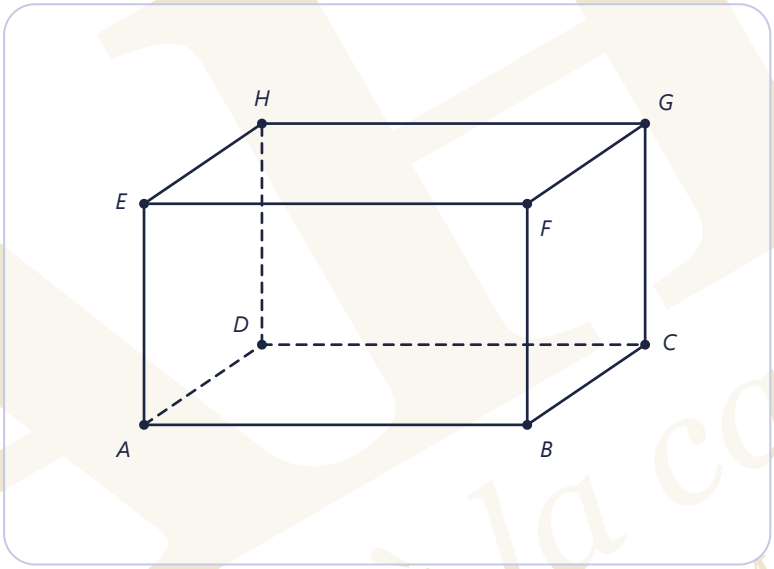
La droite (DH) perce le plan (ABC) au point D.

PIÈGES ANTICIPÉS

`H / le point H / en H` → H est sur la droite, mais il est dans la face du dessus : il n'est pas dans le plan (ABC).

EXERCICE 11 · PRATIQUE **Une droite parallèle à un plan diagonal**

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ de la figure, laquelle des trois droites (BC), (BF) et (EF) est parallèle au plan (AEC) ?



Le parallélépipède ABCDEFGH.

Un parallélépipède ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(BF)` — aussi acceptées : BF · la droite (BF) · la droite BF · droite (BF) · droite BF · c'est (BF) · c'est la droite (BF) · (FB) · FB · la droite (FB) · la droite FB · droite (FB) · droite FB

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan. Le plan (AEC) contient les droites (AE), (AC) et (CG).
2. Élimine les droites qui percent le plan : une droite qui passe par C ou par E sans être contenue dans le plan le perce en ce point.

CORRECTION

(BC) — (BC) passe par C, qui est dans le plan, et B n'y est pas : elle perce le plan en C.
$(BC) \cap (AEC) = \{C\}$

(EF) — (EF) passe par E, qui est dans le plan, et F n'y est pas : elle perce le plan en E.

$(EF) \cap (AEC) = \{E\}$

(BF) — $ABFE$ est un parallélogramme : (BF) est parallèle à (AE), une droite du plan (AEC).

(BF) est parallèle au plan (AEC)

C'est la droite (BF) qui est parallèle au plan (AEC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`(BC) / BC / (CB) / CB / la droite (BC)` → (BC) passe par C, qui est un point du plan (AEC) : elle perce ce plan en C.

`(EF) / EF / (FE) / FE / la droite (EF)` → (EF) passe par E, qui est un point du plan (AEC) : elle perce ce plan en E.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Vrai ou faux : parallèle à toutes les droites ?

Vrai ou faux ? « Si une droite est parallèle à un plan, alors elle est parallèle à toute droite de ce plan. »

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La définition demande que la droite soit parallèle à **une** droite du plan.
2. Dans un parallélépipède $ABCDEFGH$, la droite (EF) est parallèle au plan (ABC). Est-elle parallèle à (BC) ?

CORRECTION

La définition — Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Un contre-exemple — Dans un parallélépipède $ABCDEFGH$, (EF) est parallèle à (AB), donc au plan (ABC). Mais (EF) et (BC) ne sont pas coplanaires.

(EF) n'est pas parallèle à (BC)

Faux : une droite parallèle à un plan est parallèle à certaines droites de ce plan, pas à toutes.

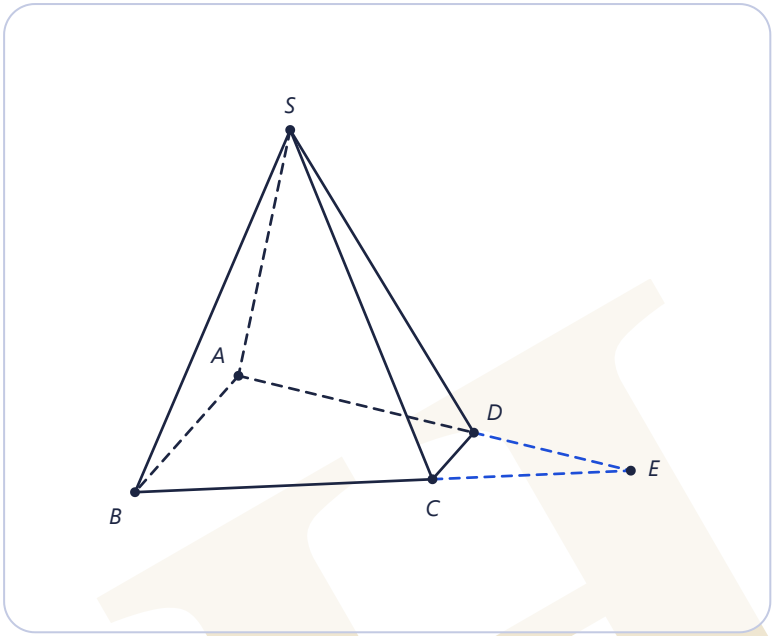
PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → La droite est parallèle à une droite du plan, pas à toutes : dans un parallélépipède, (EF) est parallèle au plan (ABC) sans être parallèle à (BC).

EXERCICE 13 · PRATIQUE

Deux faces opposées d'une pyramide

Dans la pyramide $SABCD$ de la figure, les droites (AD) et (BC) se coupent en E. Quelle est la droite d'intersection des plans (SAD) et (SBC) ?



Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.

Une pyramide SABCD de sommet S, vue en perspective. Sa base ABCD est un trapèze : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche ; les côtés [AB] et [CD] sont parallèles, et [CD] est plus court que [AB]. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés. Les droites (AD) et (BC), prolongées en pointillés bleus, se coupent en un point E, à droite de la base.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(SE)` — aussi acceptées : SE · la droite (SE) · la droite SE · droite (SE) · droite SE · c'est (SE) · c'est la droite (SE) · (ES) · ES · la droite (ES) · la droite ES · droite (ES) · droite ES · (SAD)∩(SBC)=(SE) · (SAD) ∩ (SBC) = (SE)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'intersection de deux plans sécants est une droite : cherche deux points communs aux deux plans.
2. Le sommet de la pyramide est un point commun. Le point où (AD) et (BC) se coupent est-il dans les deux plans ?

CORRECTION

Un point commun — S appartient aux deux plans.

$S \in (SAD)$ et $S \in (SBC)$

Un autre — E est sur (AD), contenue dans le plan (SAD), et sur (BC), contenue dans le plan (SBC).

$E \in (SAD)$ et $E \in (SBC)$

La droite —

$(SAD) \cap (SBC) = (SE)$

L'intersection des plans (SAD) et (SBC) est la droite (SE).

PIÈGES ANTICIPÉS

`S / le point S / E / le point E` → L'intersection de deux plans sécants est une droite, pas un point : il faut deux points communs.

`(AD) / AD / (DA) / DA / la droite (AD) / (BC) / BC / (CB) / CB / la droite (BC) / (SA) / SA / (AS) / AS / la droite (SA) / (SB) / SB / (BS) / BS / la droite (SB)` → Cette droite est contenue dans un

seul des deux plans. Cherche deux points qui sont dans les deux plans à la fois.

EXERCICE 14 · PRATIQUE

Le théorème du toit dans une pyramide

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. La droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) passe par S. À laquelle de ces trois droites est-elle parallèle : (AB), (BC) ou (SA) ?

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(AB)` — aussi acceptées : AB · la droite (AB) · la droite AB · droite (AB) · droite AB · c'est (AB) · c'est la droite (AB) · (BA) · BA · la droite (BA) · la droite BA · droite (BA) · droite BA · (CD) · CD · (DC) · DC

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux plans contiennent chacun un côté de la base. Ces deux côtés sont-ils parallèles ?
2. Applique le théorème du toit : deux plans sécants qui contiennent deux droites parallèles se coupent suivant une droite parallèle à ces deux droites.

CORRECTION

Deux parallèles — Le plan (SAB) contient (AB), le plan (SCD) contient (CD), et (AB) est parallèle à (CD) car $ABCD$ est un parallélogramme.

(AB) est parallèle à (CD)

Théorème du toit — Les deux plans sont sécants, puisqu'ils ont le point S en commun : leur droite d'intersection est parallèle à (AB) et à (CD).

la parallèle à (AB) passant par S

La droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) est parallèle à (AB).

PIÈGES ANTICIPÉS

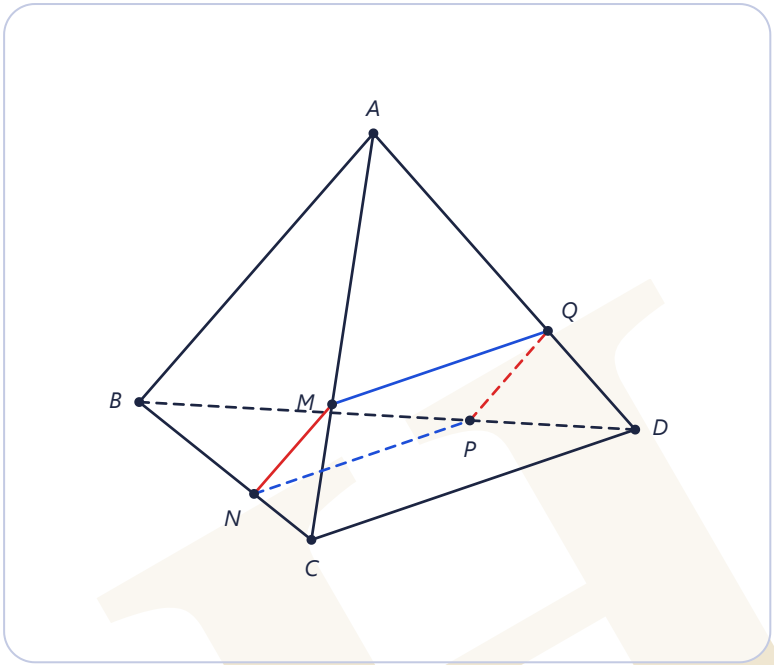
`(BC) / BC / (CB) / CB / la droite (BC) / (AD) / AD / (DA) / DA / la droite (AD)` → (BC) est parallèle à (AD) : c'est l'intersection des plans (SBC) et (SAD) qui lui est parallèle.

`(SA) / SA / (AS) / AS / la droite (SA)` → (SA) est contenue dans le plan (SAB), mais elle perce le plan (SCD) en S : elle n'est pas commune aux deux plans.

EXERCICE 15 · RAISONNEMENT

Un parallélogramme dans un tétraèdre

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, M est le point de $[AC]$ tel que AM soit égal aux deux tiers de AC. Le plan passant par M et parallèle aux droites (AB) et (CD) coupe le tétraèdre suivant le parallélogramme $MNPQ$, avec N sur $[BC]$ et Q sur $[AD]$. On donne $AB = 12$ et $CD = 6$. Calculer le périmètre de $MNPQ$.



MNPQ est la section du tétraèdre par le plan passant par M et parallèle à (AB) et à (CD).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point M est sur l'arête [AC], le point N sur l'arête [BC], le point P sur l'arête [BD] et le point Q sur l'arête [AD]. Les segments [MN] et [PQ], tracés en rouge, sont parallèles à (AB) ; les segments [MQ] et [NP], tracés en bleu, sont parallèles à (CD).

Écris un nombre.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (MN) est parallèle à (AB) dans le triangle CAB, et (MQ) est parallèle à (CD) dans le triangle ACD : applique le théorème de Thalès dans chacun.
2. Dans le triangle CAB, le rapport se lit à partir de C : $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CA}$. Dans le triangle ACD, il se lit à partir de A.
   $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{2}{3}$

CORRECTION

Le côté [MN] — Dans le triangle CAB, (MN) est parallèle à (AB) : $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{1}{3}$.

$MN = \dfrac{1}{3} \times 12 = 4$

Le côté [MQ] — Dans le triangle ACD, (MQ) est parallèle à (CD) : $\dfrac{MQ}{CD} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{2}{3}$.

$MQ = \dfrac{2}{3} \times 6 = 4$

Le périmètre —

$2 \times (4 + 4) = 16$

Le périmètre de $MNPQ$ est 16.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → $4 + 4 = 8$ est la somme de deux côtés consécutifs : le parallélogramme a quatre côtés.

`20` → Les deux rapports sont échangés : M est aux deux tiers à partir de A, donc $\frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}$ pour MN et $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$ pour MQ.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

Vrai ou faux : deux droites parallèles

Vrai ou faux ? « Si deux plans contiennent respectivement deux droites parallèles, alors ces deux plans sont parallèles. »

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pense au théorème du toit : que suppose-t-il sur les deux plans ?
2. Dans une pyramide $SABCD$ dont la base est un parallélogramme, les plans (SAB) et (SCD) contiennent (AB) et (CD). Ont-ils un point commun ?

CORRECTION

Un contre-exemple — Dans une pyramide $SABCD$ dont la base est un parallélogramme, les plans (SAB) et (SCD) contiennent les droites parallèles (AB) et (CD), et ils ont le point S en commun. (SAB) et (SCD) sont sécants

La bonne propriété — Pour que deux plans soient parallèles, il faut deux droites sécantes de l'un parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

Faux : deux plans qui contiennent deux droites parallèles peuvent être sécants.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → Une seule direction commune ne suffit pas : les deux pans d'un toit contiennent deux bords parallèles, et pourtant ils se coupent.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Quatre points sur deux plans parallèles

P et Q sont deux plans parallèles. Une droite Δ coupe P en A et Q en B. Une droite Δ', parallèle à Δ et distincte de Δ, coupe P en C et Q en D. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

Écris le nom du quadrilatère.

> P et Q sont deux plans parallèles. Une droite Δ coupe P en A et Q en B. Une droite Δ', parallèle à Δ et distincte de Δ, coupe P en C et Q en D. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Écris le nom du quadrilatère.
>
> P et Q sont deux plans parallèles. Une droite delta coupe P en A et Q en B. Une droite delta prime, parallèle à delta et distincte de delta, coupe P en C et Q en D. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Écris le

.nom du quadrilatère

Réponse attendue : `parallélogramme` — aussi acceptées : un parallélogramme · c'est un parallélogramme · parallelogramme · un parallelogramme · ABDC est un parallélogramme · abdc est un parallelogramme · le quadrilatère ABDC est un parallélogramme

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les droites Δ et Δ' sont strictement parallèles : elles sont contenues dans un même plan. Suivant quelles droites ce plan coupe-t-il P et Q ?

   > Les droites Δ et Δ' sont strictement parallèles : elles sont contenues dans un même plan. Suivant quelles droites ce plan coupe-t-il P et Q ?
   >
   > Les droites delta et delta prime sont strictement parallèles : elles sont contenues dans un même plan. ? Suivant quelles droites ce plan coupe-t-il P et Q

2. Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles : compare (AC) et (BD).

CORRECTION

Deux côtés — (AB) est la droite Δ et (CD) la droite Δ'.

(AB) est parallèle à (CD)

> Deux côtés. (AB) est la droite Δ et (CD) la droite Δ'. (AB) est parallèle à (CD).
>
> .Deux côtés. La droite AB est la droite delta, et la droite CD la droite delta prime. AB est parallèle à CD

Propriété 12 — Le plan qui contient Δ et Δ' coupe P suivant (AC) et Q suivant (BD) ; comme P et Q sont parallèles, ces droites sont parallèles.

(AC) est parallèle à (BD)

> Propriété 12. Le plan qui contient Δ et Δ' coupe P suivant (AC) et Q suivant (BD) ; comme P et Q sont parallèles, ces droites sont parallèles. (AC) est parallèle à (BD).
>
> Propriété 12. Le plan qui contient delta et delta prime coupe P suivant AC et Q suivant BD ; comme P et Q .sont parallèles, ces droites sont parallèles. AC est parallèle à BD

Les côtés opposés de $ABDC$ sont parallèles deux à deux : c'est un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

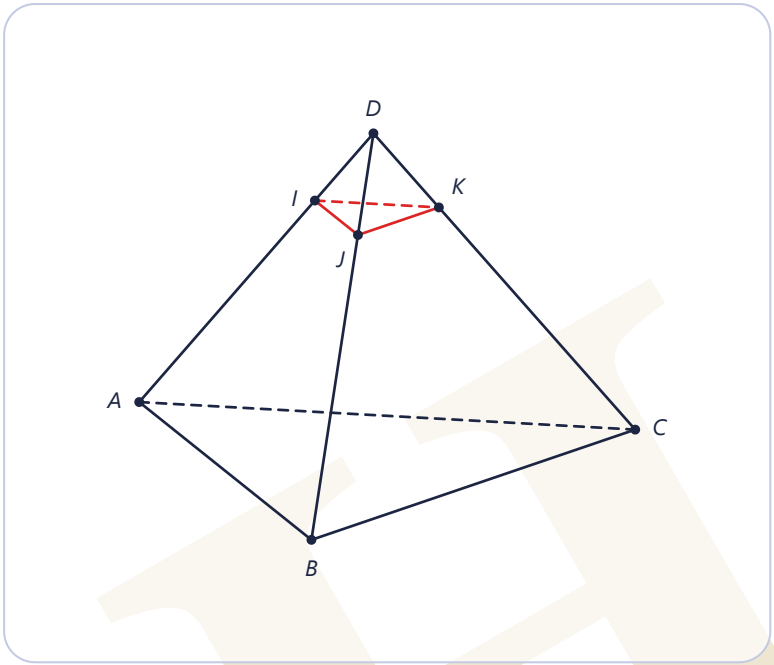
`rectangle / un rectangle / carré / un carré / losange / un losange` → Rien ne dit que les angles sont droits ni que les côtés sont égaux : on sait seulement que les côtés opposés sont parallèles.

`trapèze / un trapèze` → (AB) et (CD) sont parallèles, mais (AC) et (BD) le sont aussi, d'après la propriété 12.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

Un plan parallèle à une face

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I est le point de $[AD]$ tel que DI soit égal au quart de DA. Le plan passant par I et parallèle au plan (ABC) coupe (DB) en J et (DC) en K. On donne $BC = 12$. Calculer JK.



DI = ¼ DA ; le plan (IJK) est parallèle au plan (ABC).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective, posé sur sa face ABC : le sommet D est en haut, A à gauche, B en bas devant, C à droite. L'arête [AC], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [DA], au quart à partir de D ; le point J est sur l'arête [DB] et le point K sur l'arête [DC]. Le triangle IJK est tracé en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (BCD) coupe les deux plans parallèles suivant (BC) et (JK) : ces droites sont parallèles.
2. Applique le théorème de Thalès dans le triangle DBC, après l'avoir appliqué dans le triangle DAB pour trouver $\dfrac{DJ}{DB}$.

$$\frac{JK}{BC} = \frac{DJ}{DB} = \frac{DI}{DA}$$

CORRECTION

Dans la face DAB — D'après la propriété 12, (IJ) est parallèle à (AB). Par le théorème de Thalès :

$$\frac{DJ}{DB} = \frac{DI}{DA} = \frac{1}{4}$$

Dans la face DBC — De même, (JK) est parallèle à (BC).

$$\frac{JK}{BC} = \frac{DJ}{DB} = \frac{1}{4}$$

Le calcul —

$$JK = \frac{1}{4} \times 12 = 3$$

$$\boxed{JK = 3.}$$

PIÈGES ANTICIPÉS

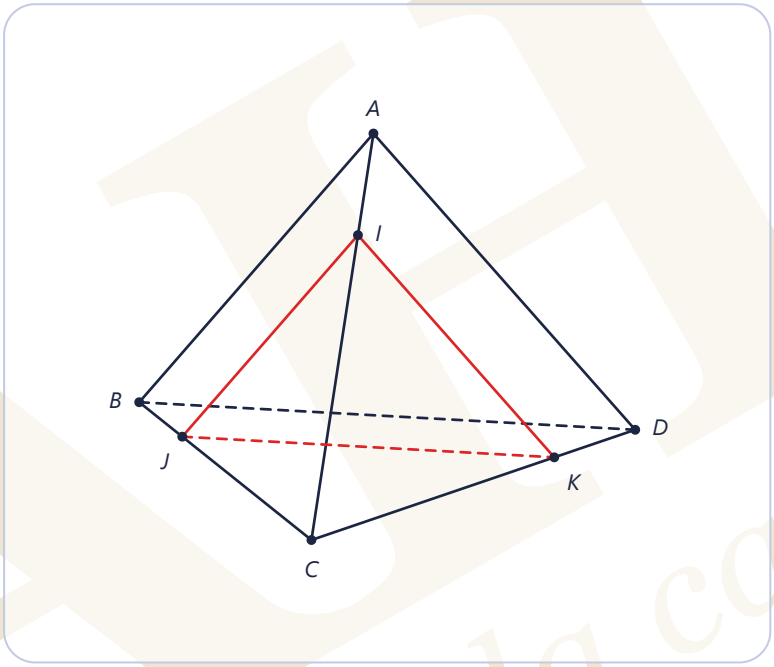
9 → $\dfrac{3}{4}$ est le rapport $\dfrac{AI}{AD}$: le rapport de Thalès se lit à partir du sommet D, et vaut $\dfrac{1}{4}$.

48 → $[JK]$ est plus court que $[BC]$: on multiplie par $\frac{1}{4}$, on ne divise pas.

EXERCICE 19 · RAISONNEMENT

Deux plans parallèles dans un tétraèdre

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I est le point de $[AC]$ tel que AI soit égal au quart de AC et J le point de $[BC]$ tel que BJ soit égal au quart de BC. La droite passant par J et parallèle à (BD) coupe le segment $[CD]$ en K. Les plans (IJK) et (ABD) sont-ils parallèles ?



AI = ¼ AC, BJ = ¼ BC, et (JK) est parallèle à (BD).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [AC], au quart à partir de A. Le point J est sur l'arête [BC], au quart à partir de B. Le point K est sur l'arête [CD], au quart à partir de D. Le triangle IJK est tracé en rouge.

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elles le sont · oui ils le sont · c'est oui · vrai · oui elles sont parallèles · oui, elles sont parallèles · oui parallèles · oui, parallèles · parallèles · elles sont parallèles · oui ils sont parallèles · ils sont parallèles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche dans le plan (IJK) deux droites sécantes, chacune parallèle à une droite du plan (ABD).
2. (JK) est parallèle à (BD) par construction. Pour (IJ), compare $\frac{CI}{CA}$ et $\frac{CJ}{CB}$ dans le triangle ABC.

CORRECTION

(IJ) et (AB) — Dans le triangle CAB, $\frac{CI}{CA} = \frac{3}{4}$ et $\frac{CJ}{CB} = \frac{3}{4}$: d'après la réciproque du théorème de Thalès :

(IJ) est parallèle à (AB)

(JK) et (BD) — Par construction :

(JK) est parallèle à (BD)

Propriété 10 — (IJ) et (JK), sécantes en J, sont parallèles à (AB) et (BD), sécantes en B.
le plan (IJK) est parallèle au plan (ABD)

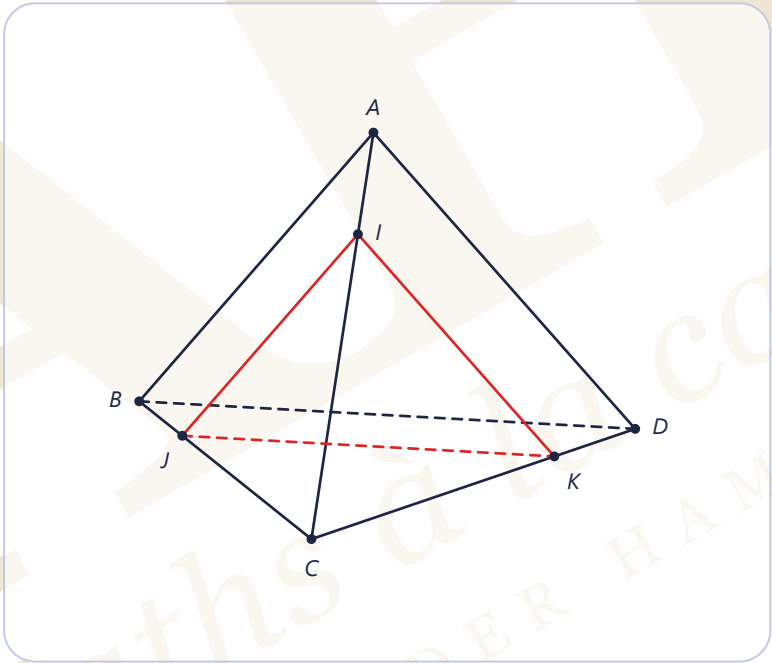
Oui : les plans (IJK) et (ABD) sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / pas parallèles / ils ne sont pas parallèles` → (IJ) est parallèle à (AB) et (JK) à (BD) : deux droites sécantes de l'un parallèles à deux droites sécantes de l'autre, donc les plans sont parallèles.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT **Une longueur par la réciproque de Thalès**

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, I est le point de $[AC]$ tel que AI soit égal au quart de AC et J le point de $[BC]$ tel que BJ soit égal au quart de BC. On donne $AB = 8$. Calculer IJ.



AI = ¼ AC, BJ = ¼ BC, et (JK) est parallèle à (BD).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [AC], au quart à partir de A. Le point J est sur l'arête [BC], au quart à partir de B. Le point K est sur l'arête [CD], au quart à partir de D. Le triangle IJK est tracé en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Travaille dans le triangle CAB : calcule $\dfrac{CI}{CA}$ et $\dfrac{CJ}{CB}$.
2. Les deux rapports sont égaux : (IJ) est parallèle à (AB), et $\dfrac{IJ}{AB}$ vaut ce même rapport.

$$\frac{IJ}{AB} = \frac{CI}{CA}$$

CORRECTION

Les rapports — AI est le quart de AC, donc CI vaut les trois quarts de CA ; de même, CJ vaut les trois quarts de CB.

$$\frac{CI}{CA} = \frac{CJ}{CB} = \frac{3}{4}$$

Thalès — (IJ) est donc parallèle à (AB), et $\dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{3}{4}$.

$$IJ = \frac{3}{4} \times 8 = 6$$

$$IJ = 6.$$

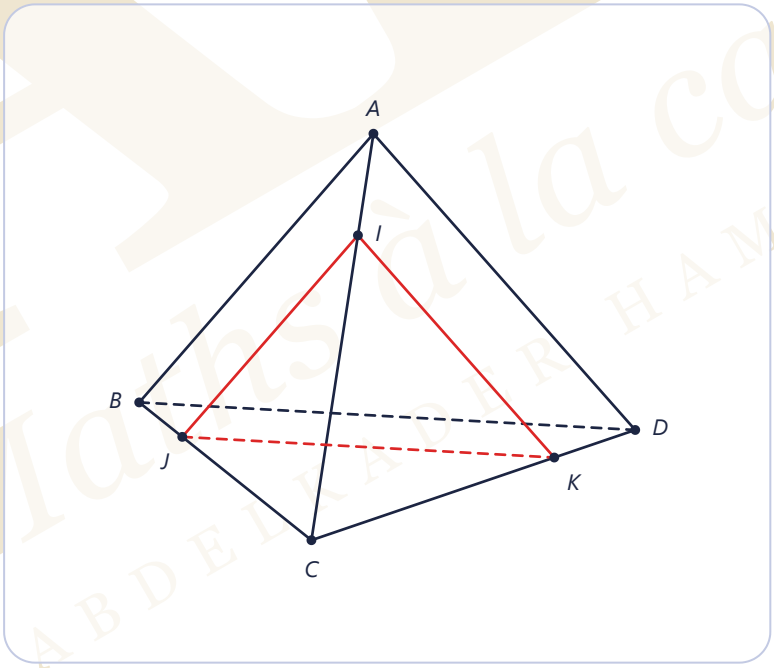
PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $\dfrac{1}{4}$ est le rapport $\dfrac{AI}{AC}$: dans le triangle CAB, le rapport de Thalès se lit à partir de C, et vaut $\dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

Couper deux plans parallèles

Dans le tétraèdre $ABCD$ de la figure, AI est le quart de AC, BJ le quart de BC, et la parallèle à (BD) passant par J coupe $[CD]$ en K. Les plans (IJK) et (ABD) sont parallèles. On donne $AD = 12$. Calculer IK.



AI = ¼ AC, BJ = ¼ BC, et (JK) est parallèle à (BD).

Un tétraèdre ABCD vu en perspective : le sommet A est en haut, B à gauche, C en bas devant, D à droite. L'arête [BD], cachée, est en pointillés. Le point I est sur l'arête [AC], au quart à partir de A. Le point J est sur l'arête [BC], au quart à partir de B. Le point K est sur l'arête [CD], au quart à partir de D. Le triangle IJK est tracé en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ACD) coupe les deux plans parallèles : suivant quelles droites ?
2. (IK) est parallèle à (AD) : applique le théorème de Thalès dans le triangle CAD.

$$\frac{IK}{AD} = \frac{CI}{CA}$$

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (ACD) coupe le plan (ABD) suivant (AD) et le plan (IJK) suivant (IK) : ces droites sont parallèles.

(IK) est parallèle à (AD)

Thalès — Dans le triangle CAD : $\dfrac{IK}{AD} = \dfrac{CI}{CA} = \dfrac{3}{4}$.

$$IK = \frac{3}{4} \times 12 = 9$$

$$IK = 9.$$

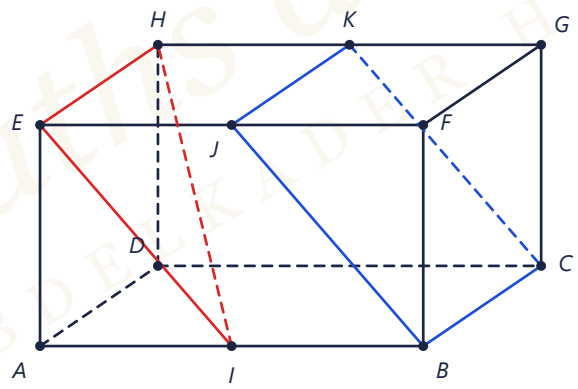
PIÈGES ANTICIPÉS

3 → I est au quart de $[AC]$ à partir de A, donc aux trois quarts à partir de C : $\dfrac{CI}{CA} = \dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

Une parallèle par un sommet

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ de la figure, I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[EF]$ et $[GH]$. Laquelle des trois droites (EA), (EI) et (EH) est parallèle à la droite (BJ) ?



I, J et K sont les milieux de [AB], [EF] et [GH]. Le plan (IEH) est parallèle au plan (BCK).

Un parallélépipède ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point I est le milieu de l'arête [AB], le point J le milieu de l'arête [EF] et le point K le milieu de l'arête [GH]. Le quadrilatère BCKJ est tracé en bleu, le triangle IEH en rouge.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(EI)` — aussi acceptées : EI · la droite (EI) · la droite EI · droite (EI) · droite EI · c'est (EI) · c'est la droite (EI) · (IE) · IE · la droite (IE) · la droite IE · droite (IE) · droite IE

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (BJ) est dans le plan de la face $ABFE$: la droite cherchée aussi.
2. I et J sont les milieux de deux côtés opposés du parallélogramme $ABFE$: compare les segments $[IB]$ et $[EJ]$.

CORRECTION

Deux segments — I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[EF]$: $[IB]$ et $[EJ]$ sont parallèles et de même longueur.

$IBJE$ est un parallélogramme

Les autres côtés —

(EI) est parallèle à (BJ)

C'est la droite (EI) qui est parallèle à (BJ).

PIÈGES ANTICIPÉS

`(EA) / EA / (AE) / AE / la droite (EA)` → (EA) est parallèle à (BF), pas à (BJ) : J n'est pas en F.

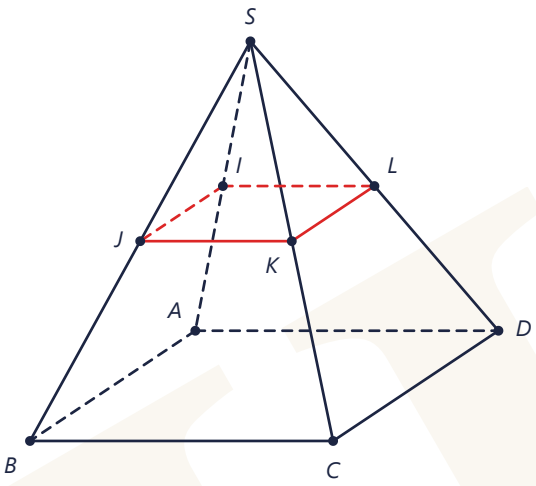
`(EH) / EH / (HE) / HE / la droite (EH)` → (EH) n'est pas dans le plan de la face $ABFE$: elle est parallèle à (BC), pas à (BJ).

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Le milieu de la quatrième arête

Dans la pyramide $SABCD$ de la figure, la base $ABCD$ est un carré, et I, J et K sont les milieux de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$. La droite (SD) perce le plan (IJK) en L. On donne $SD = 10$. Calculer SL.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



I, J, K et L sont les milieux de [SA], [SB], [SC] et [SD].

Une pyramide SABCD de sommet S, vue en perspective. Sa base ABCD est un carré : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés. Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD]. Le quadrilatère IJKL est tracé en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (IJK) est parallèle au plan (ABC). Le plan (SAD) les coupe suivant deux droites parallèles.
2. (IL) est parallèle à (AD) et I est le milieu de $[SA]$: où se trouve L sur $[SD]$?

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (SAD) coupe les plans parallèles (ABC) et (IJK) suivant (AD) et (IL).

(IL) est parallèle à (AD)

Le milieu — Dans le triangle SAD, la parallèle à (AD) passant par le milieu I de $[SA]$ coupe $[SD]$ en son milieu.

$$SL = \frac{1}{2}SD = 5$$

$SL = 5$: L est le milieu de $[SD]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

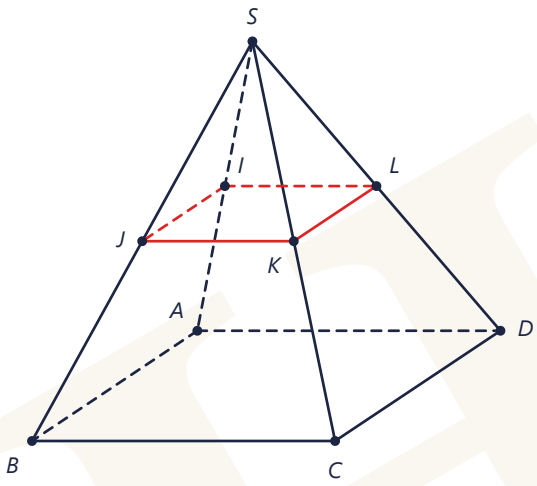
`10` → 10 est la longueur SD : L est le milieu de $[SD]$, donc SL en est la moitié.

EXERCICE 24 · RAISONNEMENT

L'aire de la section

Dans la pyramide $SABCD$ de la figure, la base $ABCD$ est un carré de côté 6, et I, J, K et L sont les milieux de $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$. Le quadrilatère $IJKL$ est un carré. Calculer son

aire.



I, J, K et L sont les milieux de [SA], [SB], [SC] et [SD].

Une pyramide SABCD de sommet S, vue en perspective. Sa base ABCD est un carré : B devant à gauche, C devant à droite, D derrière à droite, A derrière à gauche. Les arêtes cachées [AB], [AD] et [SA] sont en pointillés. Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD]. Le quadrilatère IJKL est tracé en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord le côté IJ : I et J sont les milieux de deux côtés du triangle SAB.
2. Le côté du petit carré mesure la moitié de celui de la base.

$$IJ = \frac{1}{2}AB$$

CORRECTION

Le côté — Dans le triangle SAB, I et J sont les milieux de $[SA]$ et $[SB]$.

$$IJ = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

L'aire —

$$3^2 = 9$$

L'aire du carré $IJKL$ est 9 : le quart de l'aire de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → C'est le côté qui est divisé par 2 : l'aire, elle, est divisée par 4.

3 → 3 est le côté du carré $IJKL$: on demande son aire.

36 → 36 est l'aire de la base $ABCD$; le carré $IJKL$ a un côté deux fois plus petit.

EXERCICE 25 · RAISONNEMENT

Un plan parallèle à la base

$OABCD$ est une pyramide de sommet O dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Un plan parallèle au plan de la base coupe les arêtes $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$ respectivement en I, J, K et L, avec OI égal aux deux tiers de OA. On donne $AB = 9$. Calculer IJ.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (OAB) coupe les deux plans parallèles suivant (AB) et (IJ) : que peut-on dire de ces deux droites ?
2. (IJ) est parallèle à (AB) : applique le théorème de Thalès dans le triangle OAB.
   $\dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{OI}{OA}$

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (OAB) coupe le plan de la base suivant (AB) et le plan parallèle suivant (IJ).
(IJ) est parallèle à (AB)

Thalès — Dans le triangle OAB : $\dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{OI}{OA} = \dfrac{2}{3}$.

$IJ = \dfrac{2}{3} \times 9 = 6$

$IJ = 6$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → $\dfrac{1}{3}$ est le rapport $\dfrac{AI}{AO}$: le rapport de Thalès se lit à partir du sommet O, et vaut $\dfrac{2}{3}$.

`13.5 / 27/2` → $[IJ]$ est plus court que $[AB]$: on multiplie par $\dfrac{2}{3}$, pas par $\dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 26 · PRATIQUE

Un parallélogramme entre deux plans

$ABCD$ est un parallélogramme et P un plan contenant la droite (AB) et ne contenant ni C ni D. Un plan P', strictement parallèle à P, coupe $[AD]$ en I et $[BC]$ en J. On donne $AB = 7$. Calculer IJ.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan du parallélogramme $ABCD$ coupe P suivant (AB) et P' suivant (IJ) : ces deux droites sont parallèles.

2. (AI) et (BJ) sont aussi parallèles, car ce sont les droites (AD) et (BC). Quelle est la nature du quadrilatère $AIJB$?

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (ABC) coupe les plans parallèles P et P' suivant (AB) et (IJ).

(IJ) est parallèle à (AB)

Un parallélogramme — (AI) et (BJ) sont parallèles, car (AD) et (BC) le sont : $AIJB$ a ses côtés opposés parallèles deux à deux.

$AIJB$ est un parallélogramme

La longueur —

$IJ = AB = 7$

$IJ = 7.$

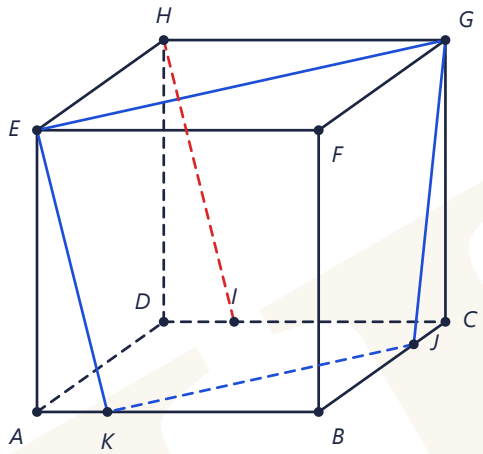
PIÈGES ANTICIPÉS

3.5 / 7/2 → Rien ne dit que I et J sont des milieux, et ce n'est pas un triangle : $AIJB$ est un parallélogramme, donc $IJ = AB$.

EXERCICE 27 · RAISONNEMENT **Une droite du plan de base**

Sur les arêtes d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 8, on place les points I et J tels que DI soit égal au quart de DC et CJ au quart de CB. Le plan (EGJ) coupe le plan (ABC) suivant une droite qui coupe (AB) en K. Calculer AK.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



DI = ¼ DC, CJ = ¼ CB ; K est le point où la parallèle à (AC) passant par J coupe (AB).

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point I est sur l'arête [DC], au quart à partir de D. Le point J est sur l'arête [CB], au quart à partir de C. Le point K est sur l'arête [AB]. Le triangle EGJ est tracé en bleu, le segment [JK] en bleu pointillé et le segment [HI] en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles, et le plan (EGJ) les coupe tous les deux : compare ses deux droites d'intersection.
2. La droite (JK) est parallèle à (EG), donc à (AC) : applique le théorème de Thalès dans le triangle BAC.
   $$\frac{BK}{BA} = \frac{BJ}{BC}$$

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (EGJ) coupe le plan (EFG) suivant (EG) et le plan parallèle (ABC) suivant (JK). Or (EG) est parallèle à (AC).

(JK) est parallèle à (AC)

Thalès — Dans le triangle BAC : $\frac{BK}{BA} = \frac{BJ}{BC} = \frac{3}{4}$.

$$BK = \frac{3}{4} \times 8 = 6$$

La longueur AK —

$$AK = 8 - 6 = 2$$

$AK = 2$: AK est le quart de AB.

PIÈGES ANTICIPÉS

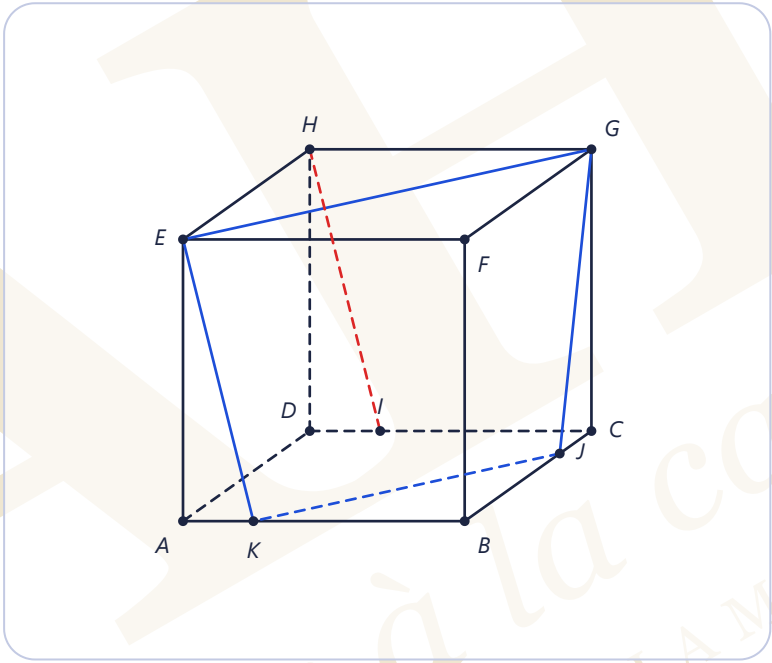
6 → 6 est la longueur BK : on demande $AK = AB - BK$.

4 → K n'est pas le milieu de $[AB]$: (JK) est parallèle à (AC) et J est aux trois quarts de $[BC]$ à partir de B.

EXERCICE 28 · RAISONNEMENT

Une droite parallèle à un plan du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, DI, CJ et AK sont respectivement le quart de DC, de CB et de AB. La droite (HI) est parallèle au plan (EGJ), qui contient K. À laquelle de ces trois droites du plan est-elle parallèle : (EG), (EK) ou (GJ) ?



DI = ¼ DC, CJ = ¼ CB ; K est le point où la parallèle à (AC) passant par J coupe (AB).

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point I est sur l'arête [DC], au quart à partir de D. Le point J est sur l'arête [CB], au quart à partir de C. Le point K est sur l'arête [AB]. Le triangle EGJ est tracé en bleu, le segment [JK] en bleu pointillé et le segment [HI] en rouge.

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : (EK) — aussi acceptées : EK · la droite (EK) · la droite EK · droite (EK) · droite EK · c'est (EK) · c'est la droite (EK) · (KE) · KE · la droite (KE) · la droite KE · droite (KE) · droite KE

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare les segments $[AK]$ et $[DI]$: quelle est la nature du quadrilatère $AKID$?
2. $[KI]$ est parallèle à $[AD]$ et de même longueur ; $[EH]$ aussi. Regarde alors le quadrilatère de sommets H, I, K et E.

CORRECTION

AKID — $[AK]$ et $[DI]$ sont parallèles et de même longueur : $AKID$ est un parallélogramme.

(KI) est parallèle à (AD) et $KI = AD$

HIKE — $[EH]$ est parallèle à $[AD]$ et de même longueur : $[KI]$ et $[EH]$ sont parallèles et de même longueur.

$HIKE$ est un parallélogramme

La parallèle —

(HI) est parallèle à (EK)

(HI) est parallèle à (EK), une droite du plan (EGJ) : elle est donc parallèle à ce plan.

PIÈGES ANTICIPÉS

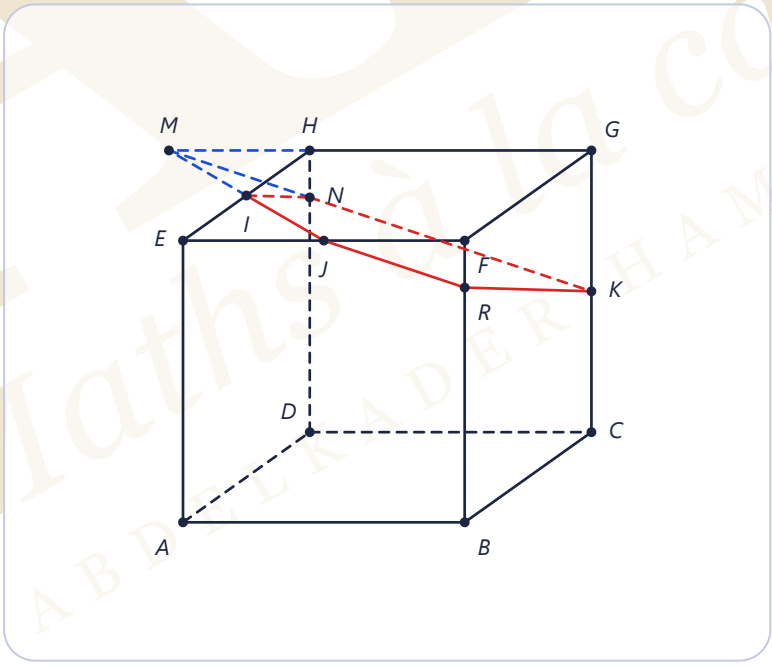
`(EG) / EG / (GE) / GE / la droite (EG)` → (EG) est parallèle à (AC) : (HI), qui descend de la face du dessus à celle du dessous, ne lui est pas parallèle.

`(GJ) / GJ / (JG) / JG / la droite (GJ)` → Regarde le quadrilatère $HIKE$: c'est un parallélogramme, ce qui donne une parallèle à (HI) passant par E.

EXERCICE 29 · PRATIQUE

Compter les côtés d'une section

Sur la figure, I, J et K sont sur les arêtes $[EH]$, $[EF]$ et $[CG]$ du cube, et la section du cube par le plan (IJK) est tracée en rouge. Combien de côtés ce polygone a-t-il ?



La section du cube par le plan (IJK) est le pentagone IJRKN.

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point I est sur l'arête [EH], le point J sur l'arête [EF] et le point K sur l'arête [CG]. La droite (IJ), prolongée, coupe la droite (HG) en un point M, à gauche de H. La droite (MK) coupe l'arête [DH] en N. Le point R est sur l'arête [BF]. Le pentagone IJRKN est tracé en rouge.

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La section a un côté sur chaque face que le plan traverse.
2. Compte les faces qui portent un segment rouge : la face du dessus, puis les faces latérales. La face du dessous est-elle traversée ?

CORRECTION

Les faces traversées — Le plan coupe la face du dessus suivant $[IJ]$, puis les quatre faces latérales suivant $[JR]$, $[RK]$, $[KN]$ et $[NI]$. Il ne rencontre pas la face du dessous.

$[IJ]$, $[JR]$, $[RK]$, $[KN]$, $[NI]$

La section est le pentagone $IJRKN$: elle a 5 côtés.

PIÈGES ANTICIPÉS

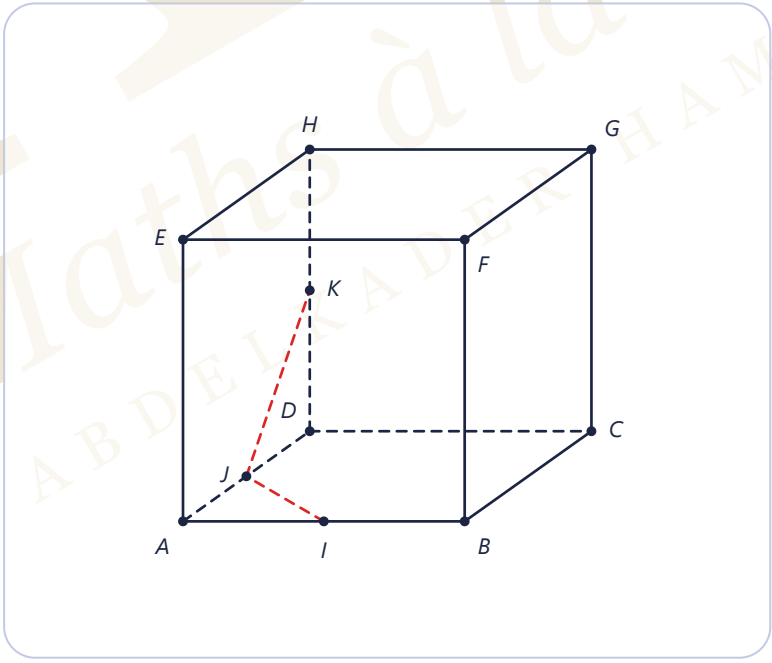
3 → Le triangle IJK n'est pas la section : $[KI]$ et $[KJ]$ traversent l'intérieur du cube. La section suit les faces.

6 → Le plan ne coupe pas la face du dessous : la section n'a de côté que sur cinq faces.

EXERCICE 30 · RAISONNEMENT

La section par trois milieux

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[DH]$. Le plan (IJK) coupe aussi les arêtes $[GH]$, $[FG]$ et $[BF]$ en leurs milieux. Combien de côtés la section du cube par le plan (IJK) a-t-elle ?



I, J et K sont les milieux de [AB], [AD] et [DH].

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les points I, J et K sont les milieux des arêtes [AB], [AD] et [DH]. Le triangle IJK est tracé en rouge.

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les sommets de la section sont les points où le plan coupe les arêtes du cube.
2. Compte les arêtes que le plan coupe : $[AB]$, $[AD]$ et $[DH]$, puis les trois autres. Chaque point d'intersection est un sommet de la section.

CORRECTION

Les sommets — Le plan coupe les arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[DH]$, $[GH]$, $[FG]$ et $[BF]$: la section a six sommets.

Les côtés — Chaque côté joint deux sommets voisins situés sur une même face : il y a un côté sur chacune des six faces.

6 côtés

La section est un hexagone : elle a 6 côtés.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Le triangle IJK n'est qu'un morceau du plan : la section continue sur les autres faces, jusqu'à se refermer.

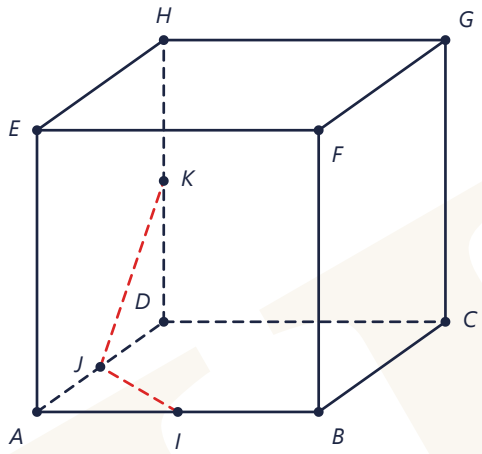
4 / 5 → Le plan coupe six arêtes du cube, donc la section a six sommets.

EXERCICE 31 · DEFI

Le périmètre de l'hexagone

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, d'arête 4, la section par le plan (IJK) est un hexagone dont les sommets sont les milieux des arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[DH]$, $[GH]$, $[FG]$ et $[BF]$. Calculer le périmètre de cet hexagone.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



I, J et K sont les milieux de [AB], [AD] et [DH].

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Les points I, J et K sont les milieux des arêtes [AB], [AD] et [DH]. Le triangle IJK est tracé en rouge.

Écris la valeur exacte, par exemple 5*sqrt(3).

Réponse attendue : `12*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord un côté, par exemple IJ : dans la face $ABCD$, le triangle AIJ est rectangle en A.
2. $AI = AJ = 2$: le théorème de Pythagore donne IJ. Les six côtés se calculent de la même façon.

$$IJ^2 = AI^2 + AJ^2$$

CORRECTION

Un côté — Dans la face $ABCD$, le triangle AIJ est rectangle en A, avec $AI = AJ = 2$.

$$IJ = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Les six côtés — Chaque côté de l'hexagone joint les milieux de deux arêtes voisines d'une même face : les six côtés ont la même longueur.

Le périmètre —

$$6 \times 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Le périmètre de l'hexagone est $12\sqrt{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(2)` → $2\sqrt{2}$ est la longueur d'un côté : l'hexagone en a six.

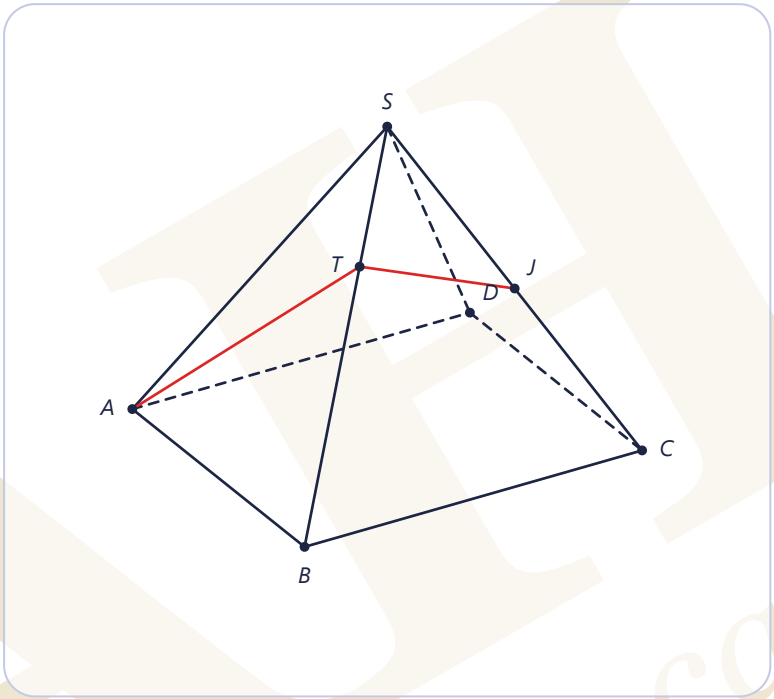
`6*sqrt(2)` → La section n'est pas un triangle : elle a six côtés de longueur $2\sqrt{2}$.

`12 / 24` → Un côté de l'hexagone est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 2 : il mesure $2\sqrt{2}$.

EXERCICE 32 · DEFI

Le plus court chemin : où passer ?

La pyramide $SABCD$ de la figure a pour base un carré de côté 6, et ses faces latérales sont quatre triangles équilatéraux. En se déplaçant à la surface de cette pyramide, une souris va du point A au point J, milieu de l'arête $[SC]$, par le plus court chemin : elle traverse l'arête $[SB]$ en un point T. Calculer ST.



La base ABCD est un carré de côté 6 ; les faces latérales sont des triangles équilatéraux. J est le milieu de [SC].

Une pyramide SABCD de sommet S, vue en perspective. Sa base ABCD est un carré : A à gauche, B devant, C à droite, D derrière. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [SD] sont en pointillés. Le point J est le milieu de l'arête [SC]. Un point T est marqué sur l'arête [SB]. Le chemin de A à T sur la face SAB, puis de T à J sur la face SBC, est tracé en rouge.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trace un patron des deux faces SAB et SBC, à plat de part et d'autre de $[SB]$: sur ce patron, le plus court chemin de A à J est un segment.
2. Sur le patron, $ASCB$ est un losange. Dans le triangle SAC, que représentent la droite (AJ) et la droite (SB) ?

CORRECTION

Le patron — On met à plat les faces SAB et SBC : les quatre côtés SA, AB, BC et CS mesurent 6, donc $ASCB$ est un losange. Le plus court chemin est le segment $[AJ]$, et T est son point d'intersection avec $[SB]$.

Deux médianes — Les diagonales du losange se coupent en leur milieu O : (SB) passe par le milieu O de $[AC]$. Dans le triangle SAC, (SO) et (AJ) sont deux médianes : T est le centre de gravité.

$$ST = \frac{2}{3}SO$$

Le calcul — O est aussi le milieu de $[SB]$: $SO = 3$.

$$ST = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

$ST = 2$: le point T est au tiers de l'arête $[SB]$ à partir de S.

PIÈGES ANTICIPÉS

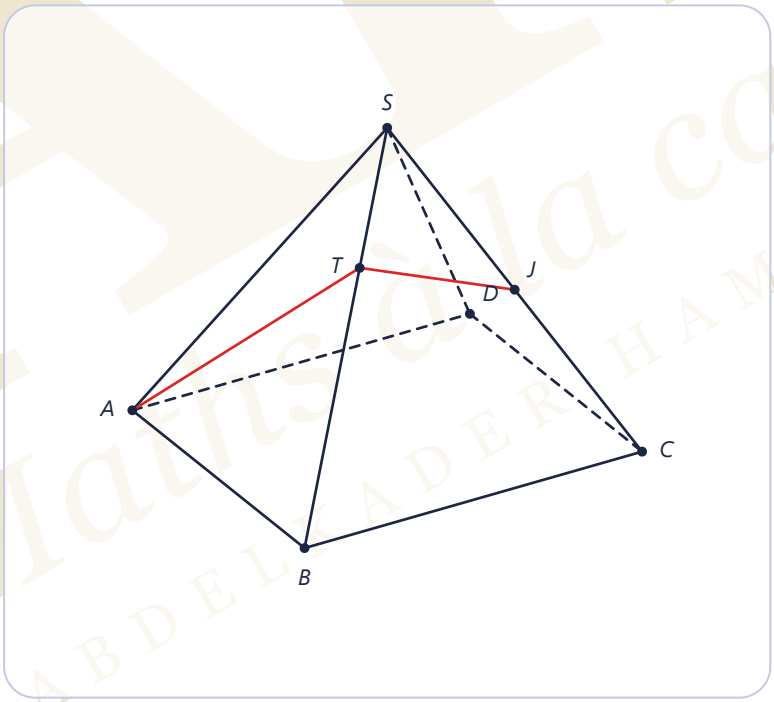
3 → T n'est pas le milieu de $[SB]$: sur le patron, c'est le centre de gravité du triangle SAC, aux deux tiers de la médiane $[SO]$.

4 → 4 est la longueur BT : on demande ST.

EXERCICE 33 · DEFI

Le plus court chemin : sa longueur

La pyramide $SABCD$ de la figure a pour base un carré de côté 6, et ses faces latérales sont quatre triangles équilatéraux. Une souris va du point A au point J, milieu de $[SC]$, par le plus court chemin à la surface de la pyramide, en traversant l'arête $[SB]$. Calculer la longueur de ce trajet.



La base ABCD est un carré de côté 6 ; les faces latérales sont des triangles équilatéraux. J est le milieu de [SC].

Une pyramide SABCD de sommet S, vue en perspective. Sa base ABCD est un carré : A à gauche, B devant, C à droite, D derrière. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [SD] sont en pointillés. Le point J est le milieu de l'arête [SC]. Un point T est marqué sur l'arête [SB]. Le chemin de A à T sur la face SAB, puis de T à J sur la face SBC, est tracé en rouge.

Écris la valeur exacte, par exemple 5*sqrt(3).

Réponse attendue : `3*sqrt(7)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur le patron des faces SAB et SBC, le trajet est le segment $[AJ]$. Appelle O le milieu de $[AC]$: (SO) est perpendiculaire à (AC), et $AO = 3\sqrt{3}$.
2. Appelle U le pied de la perpendiculaire menée de J à (AC) : U est le milieu de $[OC]$ et JU est la moitié de SO. Applique le théorème de Pythagore dans le triangle AUJ.
   $AJ^2 = AU^2 + UJ^2$

CORRECTION

Le patron — Sur le patron, $ASCB$ est un losange formé de deux triangles équilatéraux de côté 6 ; ses diagonales se coupent perpendiculairement en O, avec $SO = 3$ et $AO = OC = 3\sqrt{3}$.

Le point U — Dans le triangle SOC, la parallèle à (SO) passant par le milieu J de $[SC]$ coupe $[OC]$ en son milieu U, et JU est la moitié de SO.

$$JU = \frac{3}{2} \quad ; \quad AU = 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Pythagore — Le triangle AUJ est rectangle en U.

$$AJ^2 = \frac{243}{4} + \frac{9}{4} = 63$$

La longueur —

$$AJ = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

Le plus court trajet mesure $3\sqrt{7}$, soit environ $7{,}94$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → $6 + 3 = 9$ est le trajet qui passe par le sommet S : le segment $[AJ]$ du patron est plus court.

`6+3*sqrt(3) / 3*sqrt(3)+6` → C'est le trajet qui passe par B : il est plus long que le segment $[AJ]$ tracé sur le patron.

EXERCICE 34 · RAISONNEMENT

La médiane parallèle au plan

Soit un plan P et un triangle ABC tels que les droites (AB) et (AC) soient parallèles à P. On note I le milieu de $[BC]$. La médiane (AI) du triangle ABC est-elle parallèle au plan P ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui elle l'est · c'est oui · vrai · oui elle est parallèle · oui, elle est parallèle · oui parallèle · parallèle · elle est parallèle · elle est parallèle au plan · oui elle est parallèle au plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (AB) et (AC) sont deux droites sécantes du plan (ABC), toutes les deux parallèles à P. Que peut-on dire des plans (ABC) et P ?
2. Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre. La médiane (AI) est-elle une droite du plan (ABC) ?

CORRECTION

Le plan (ABC) — (AB) et (AC) sont parallèles à deux droites de P, et ces deux droites sont sécantes, sinon (AB) et (AC) seraient parallèles. Deux droites sécantes du plan (ABC) sont donc parallèles à deux droites sécantes de P : d'après la propriété 10,

le plan (ABC) est parallèle au plan P

La médiane — I est sur $[BC]$: la médiane (AI) est une droite du plan (ABC). D'après la propriété 7, elle est parallèle au plan P.

(AI) est parallèle à P

Oui : la médiane (AI) est parallèle au plan P.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / pas parallèle / elle n'est pas parallèle / non elle n'est pas parallèle` → La médiane est une droite du plan (ABC), et ce plan est parallèle à P : toute droite de (ABC) est parallèle à P.

EXERCICE 35 · BASE

La parallèle à une arête par un sommet

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), quelle est la droite passant par H et parallèle à la droite (BF) ?

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(DH)` — aussi acceptées : DH · la droite (DH) · la droite DH · droite (DH) · droite DH · c'est (DH) · c'est la droite (DH) · (HD) · HD · la droite (HD) · la droite HD · droite (HD) · droite HD · c'est (HD) · c'est la droite (HD)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par un point extérieur à une droite passe une seule parallèle à cette droite : cherche-la parmi les arêtes du cube issues de H.
2. Les faces $ABFE$ et $ADHE$ ont l'arête $[AE]$ en commun : compare (BF) à (AE), puis (AE) à l'arête verticale issue de H.

CORRECTION

Deux faces — La face $ABFE$ est un carré, donc (BF) est parallèle à (AE) ; la face $ADHE$ aussi, donc (AE) est parallèle à (DH).

(BF) est parallèle à (AE) et (AE) est parallèle à (DH)

Propriété 2 — Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles, et H est sur (DH).

(DH) est parallèle à (BF)

La parallèle à (BF) passant par H est la droite (DH) : la propriété 2 la donne, et elle est unique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(HF) / HF / (FH) / FH / la droite (HF)` → (HF) coupe (BF) au point F : deux droites sécantes ne sont pas parallèles.

`(HE) / HE / (EH) / EH / la droite (HE) / (HG) / HG / (GH) / GH / la droite (HG)` → Cette arête est dans la face du dessus : elle est parallèle à une arête de la base, pas à l'arête verticale (BF).

EXERCICE 36 · BASE

Deux arêtes de deux faces

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D, chaque face est un parallélogramme), les droites (AD) et (FG) sont-elles parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : c'est oui · vrai · parallèles · parallèle · elles sont parallèles · ils sont parallèles · elles le sont · ils le sont · elles sont parallèle · oui parallèles · oui parallèle · oui elles sont parallèles · oui ils sont parallèles · oui elles le sont · oui ils le sont · oui elles sont parallèle · oui, parallèles · oui, parallèle · oui, elles sont parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, elles le sont · oui, ils le sont · oui, elles sont parallèle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare chacune des deux droites à la droite (BC).
2. Les faces $ABCD$ et $BCGF$ sont des parallélogrammes ; relis ensuite la propriété 2.

CORRECTION

Dans la base — $ABCD$ est un parallélogramme.

(AD) est parallèle à (BC)

Dans la face BCGF — $BCGF$ est un parallélogramme.

(FG) est parallèle à (BC)

Propriété 2 — Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

(AD) est parallèle à (FG)

Oui : (AD) et (FG) sont parallèles à (BC), donc parallèles entre elles (propriété 2).

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / c'est non / faux / pas parallèles / pas parallèle / elles ne sont pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / ne sont pas parallèles / elles ne le sont pas / ils ne le sont pas / non pas parallèles / non pas parallèle / non elles ne sont pas parallèles / non ils ne sont pas parallèles / non ne sont pas parallèles / non elles ne le sont pas / non ils ne le sont pas / non, pas parallèles / non, pas parallèle / non, elles ne sont pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / non, ne sont pas parallèles / non, elles ne le sont pas / non, ils ne le sont pas` → (AD) et (FG) ne sont pas dans une même face, mais elles sont toutes les deux parallèles à (BC) : d'après la propriété 2, elles sont parallèles.

EXERCICE 37 · PRATIQUE

Deux segments de milieux

Dans le tétraèdre $ABCD$, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, K et L les milieux de $[DB]$ et $[DC]$. On donne $KL = 4{,}5$. Calculer IJ.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `4.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[KL]$ est le segment des milieux de deux côtés du triangle DBC : il te donne la longueur BC.
2. $[IJ]$ est le segment des milieux de deux côtés du triangle ABC, qui a le même côté $[BC]$.

CORRECTION

Dans le triangle DBC — K et L sont les milieux de $[DB]$ et $[DC]$.

$$KL = \frac{1}{2}BC \quad \text{donc} \quad BC = 9$$

Dans le triangle ABC — I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

$$IJ = \frac{1}{2}BC = 4{,}5$$

$IJ = KL = 4{,}5$: (IJ) et (KL) sont parallèles à (BC), donc parallèles entre elles, et de même longueur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → 9 est la longueur BC ; $[IJ]$ en est la moitié, comme $[KL]$.

`2.25` → $[IJ]$ n'est pas la moitié de $[KL]$: les deux segments mesurent chacun la moitié de BC.

EXERCICE 38 · RAISONNEMENT

Thalès dans une face de la pyramide

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme, avec $CD = 8$. M est le point de $[SA]$ tel que $SM = 3$, avec $SA = 12$, et la parallèle à (AB) passant par M coupe $[SB]$ en N. Calculer MN.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par la longueur AB : $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Dans le triangle SAB, applique le théorème de Thalès à partir du sommet S.
   $$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA}$$

CORRECTION

Le côté AB — Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.

$$AB = CD = 8$$

Thalès — Dans le triangle SAB, (MN) est parallèle à (AB).

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Le calcul —

$$MN = \frac{1}{4} \times 8 = 2$$

$MN = 2$. De plus, (MN) est parallèle à (AB), elle-même parallèle à (CD) : (MN) est parallèle à (CD) (propriété 2).

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{9}{12}$ n'est pas le bon rapport : dans le triangle SAB, le rapport de Thalès se lit à partir du sommet S.

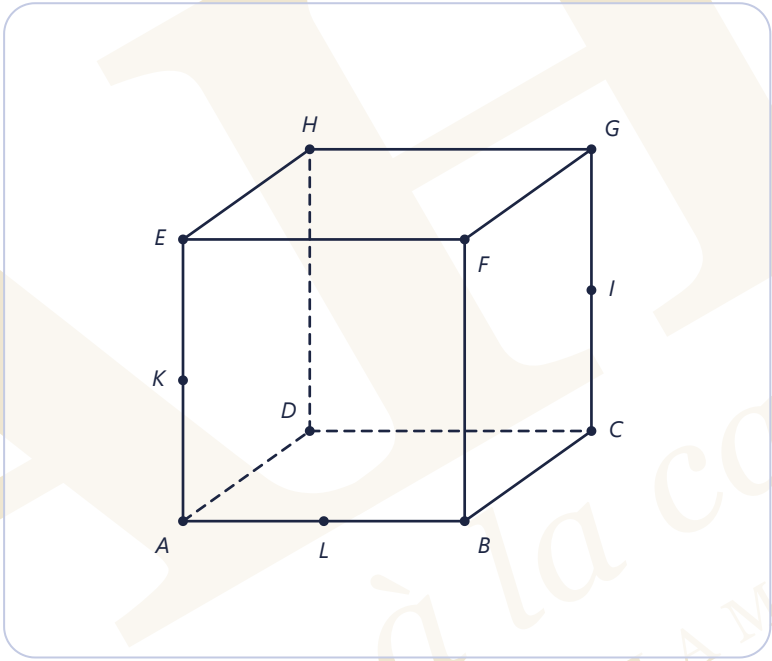
8 → 8 est la longueur AB : $[MN]$ en est seulement le quart.

32 → $[MN]$ est plus court que $[AB]$: on multiplie par $\dfrac{1}{4}$, on ne multiplie pas par 4.

EXERCICE 39 · DEFI

Le périmètre d'un trapèze du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, d'arête 4, K est le milieu de $[AE]$ et L le milieu de $[AB]$. Le quadrilatère $KLCH$ est un trapèze. Calculer son périmètre, en valeur exacte.



I, K et L sont les milieux de [CG], [AE] et [AB].

Un cube ABCDEFGH vu en perspective : A est devant en bas à gauche, B devant en bas à droite, C derrière à droite et D derrière à gauche ; E, F, G et H sont juste au-dessus de A, B, C et D. Les arêtes cachées [AD], [DC] et [DH] sont en pointillés. Le point K est le milieu de l'arête [AE], le point L le milieu de l'arête [AB] et le point I le milieu de l'arête [CG].

Écris la valeur exacte, par exemple 3*sqrt(2)+5sqrt(3).

Réponse attendue : `6*sqrt(2)+4*sqrt(5)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque côté de $KLCH$ est dans une face du cube : calcule-le dans un triangle rectangle de cette face.
2. Par exemple, dans la face $ABCD$, le triangle LBC est rectangle en B, avec $LB = 2$ et $BC = 4$.
   $LC^2 = LB^2 + BC^2$
3. $[KL]$ est un segment de milieux du triangle AEB : il mesure la moitié de EB, et $EB = HC$.

CORRECTION

Un trapèze — Dans le triangle AEB, (KL) est parallèle à (EB) ; $[EH]$ et $[BC]$ sont parallèles et de même longueur, donc $EBCH$ est un parallélogramme et (EB) est parallèle à (HC).

(KL) est parallèle à (HC)

Les bases — HC est une diagonale de face, et KL en est la moitié.

$HC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \quad ; \quad KL = 2\sqrt{2}$

Les côtés obliques — Dans la face $ABCD$, $LB = 2$ et $BC = 4$; dans la face $ADHE$, $EK = 2$ et $EH = 4$.

$LC = HK = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

Le périmètre —

$2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

Le périmètre de $KLCH$ est $6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$, soit environ $17{,}43$: chaque côté se calcule dans la face du cube qui le contient.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8*sqrt(2)+4*sqrt(5)` → $KLCH$ est un trapèze, pas un parallélogramme : KL est la moitié de HC, soit $2\sqrt{2}$.

`17.43 / 17.42 / 17.4 / 17` → On attend la valeur exacte : $6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$, sans arrondir.

EXERCICE 40 · BASE

Vrai ou faux : une droite du plan

Vrai ou faux ? « Une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan. »

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `vrai` — aussi acceptées : c'est vrai · il est vrai · oui · oui c'est vrai

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la définition : une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à **une** droite de ce plan.
2. Deux droites confondues sont-elles parallèles ?

CORRECTION

La définition — Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Elle-même — Une droite D contenue dans P est une droite de P, et elle est parallèle à elle-même : deux droites confondues sont parallèles.

$D \subset P \;\Rightarrow\; D \parallel P$

Vrai : une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan, sans lui être strictement parallèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`faux / non / c'est faux` → Deux droites confondues sont parallèles : une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan. Elle ne lui est simplement pas strictement parallèle.

EXERCICE 41 · BASE

Quel plan pour cette droite ?

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), lequel des trois plans (ABF), (BCG) et (DCG) est parallèle à la droite (EH) ?

Écris le nom du plan, par exemple (ABC).

Réponse attendue : `(BCG)` — aussi acceptées : (BCF) · BCF · le plan (BCF) · plan (BCF) · (BFC) · BFC · le plan (BFC) · plan (BFC) · (CBF) · CBF · le plan (CBF) · plan (CBF) · (CFB) · CFB · le plan (CFB) · plan (CFB) · (FBC) · FBC · le plan (FBC) · plan (FBC) · (FCB) · FCB · le plan (FCB) · plan (FCB) · BCG · le plan (BCG) · plan (BCG) · (BGC) · BGC · le plan (BGC) · plan (BGC) · (CBG) · CBG · le plan (CBG) · plan (CBG) · (CGB) · CGB · le plan (CGB) · plan (CGB) · (GBC) · GBC · le plan (GBC) · plan (GBC) · (GCB) · GCB · le plan (GCB) · plan (GCB) · (BFG) · BFG · le plan (BFG) · plan (BFG) · (BGF) · BGF · le plan (BGF) · plan (BGF) · (FBG) · FBG · le plan (FBG) · plan (FBG) · (FGB) · FGB · le plan (FGB) · plan (FGB) · (GBF) · GBF · le plan (GBF) · plan (GBF) · (GFB) · GFB · le plan (GFB) · plan (GFB) · (CFG) · CFG · le plan (CFG) · plan (CFG) · (CGF) · CGF · le plan (CGF) · plan (CGF) · (FCG) · FCG · le plan (FCG) · plan (FCG) · (FGC) · FGC · le plan (FGC) · plan (FGC) · (GCF) · GCF · le plan (GCF) · plan (GCF) · (GFC) · GFC · le plan (GFC) · plan (GFC) · (BCGF) · BCGF · le plan (BCGF) · (BCFG) · BCFG · le plan (BCFG) · (BGCF) · BGCF · le plan (BGCF) · (BGFC) · BGFC · le plan (BGFC) · (BFCG) · BFCG · le plan (BFCG) · (BFGC) · BFGC · le plan (BFGC) · (CBGF) · CBGF · le plan (CBGF) · (CBFG) · CBFG · le plan (CBFG) · (CGBF) · CGBF · le plan (CGBF) · (CGFB) · CGFB · le plan (CGFB) · (CFBG) · CFBG · le plan (CFBG) · (CFGB) · CFGB · le plan (CFGB) · (GBCF) · GBCF · le plan (GBCF) · (GBFC) · GBFC · le plan (GBFC) · (GCBF) · GCBF · le plan (GCBF) · (GCFB) · GCFB · le plan (GCFB) · (GFBC) · GFBC · le plan (GFBC) · (GFCB) · GFCB · le plan (GFCB) · (FBCG) · FBCG · le plan (FBCG) · (FBGC) · FBGC · le plan (FBGC) · (FCBG) · FCBG · le plan (FCBG) · (FCGB) · FCGB · le plan (FCGB) · (FGBC) · FGBC · le plan (FGBC) · (FGCB) · FGCB · le plan (FGCB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.
2. La face $EFGH$ est un carré : à quelle arête $[EH]$ est-elle parallèle ? Et un plan qui contient E ou H sans contenir la droite, que fait-il ?

CORRECTION

(ABF) — Le plan (ABF) contient E mais pas H : la droite (EH) le perce en E.

$(EH) \cap (ABF) = \{E\}$

(DCG) — Le plan (DCG) contient H mais pas E : la droite (EH) le perce en H.

$(EH) \cap (DCG) = \{H\}$

(BCG) — Dans le carré $EFGH$, (EH) est parallèle à (FG), une droite du plan (BCG).

(EH) est parallèle au plan (BCG)

C'est le plan (BCG) : pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan, on cherche dans ce plan une droite qui lui est parallèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(ABE)` / `ABE` / `(AEB)` / `AEB` / `(BAE)` / `BAE` / `(BEA)` / `BEA` / `(EAB)` / `EAB` / `(EBA)` / `EBA` / `(ABF)` / `ABF` / `(AFB)` / `AFB` / `(BAF)` / `BAF` / `(BFA)` / `BFA` / `(FAB)` / `FAB` / `(FBA)` / `FBA` / `(AEF)` / `AEF` / `(AFE)` / `AFE` / `(EAF)` / `EAF` / `(EFA)` / `EFA` / `(FAE)` / `FAE` / `(FEA)` / `FEA` / `(BEF)` / `BEF` / `(BFE)` / `BFE` / `(EBF)` / `EBF` / `(EFB)` / `EFB` / `(FBE)` / `FBE` / `(FEB)` / `FEB` / `(ABFE)` / `ABFE` / `(ABEF)` / `ABEF` / `(AFBE)` / `AFBE` / `(AFEB)` / `AFEB` / `(AEBF)` / `AEBF` / `(AEFB)` / `AEFB` / `(BAFE)` / `BAFE` / `(BAEF)` / `BAEF` / `(BFAE)` / `BFAE` / `(BFEA)` / `BFEA` / `(BEAF)` / `BEAF` / `(BEFA)` / `BEFA` / `(FABE)` / `FABE` / `(FAEB)` / `FAEB` / `(FBAE)` / `FBAE` / `(FBEA)` / `FBEA` / `(FEAB)` / `FEAB` / `(FEBA)` / `FEBA` / `(EABF)` / `EABF` / `(EAFB)` / `EAFB` / `(EBAF)` / `EBAF` / `(EBFA)` / `EBFA` / `(EFAB)` / `EFAB` / `(EFBA)` / `EFBA` → Le plan (ABF) contient le point E : la droite (EH) le perce en E.

`(CDG)` / `CDG` / `(CGD)` / `CGD` / `(DCG)` / `DCG` / `(DGC)` / `DGC` / `(GCD)` / `GCD` / `(GDC)` / `GDC` / `(CDH)` / `CDH` / `(CHD)` / `CHD` / `(DCH)` / `DCH` / `(DHC)` / `DHC` / `(HCD)` / `HCD` / `(HDC)` / `HDC` / `(CGH)` / `CGH` / `(CHG)` / `CHG` /

(GCH) / GCH / (GHC) / GHC / (HCG) / HCG / (HGC) / HGC / (DGH) / DGH / (DHG) / DHG / (GDH) / GDH / (GHD) / GHD / (HDG) / HDG / (HGD) / HGD / (DCGH) / DCGH / (DCHG) / DCHG / (DGCH) / DGCH / (DGHC) / DGHC / (DHCG) / DHCG / (DHGC) / DHGC / (CDGH) / CDGH / (CDHG) / CDHG / (CGDH) / CGDH / (CGHD) / CGHD / (CHDG) / CHDG / (CHGD) / CHGD / (GDCH) / GDCH / (GDHC) / GDHC / (GCDH) / GCDH / (GCHD) / GCHD / (GHDC) / GHDC / (GHCD) / GHCD / (HDCG) / HDCG / (HDGC) / HDGC / (HCDG) / HCDG / (HCGD) / HCGD / (HGDC) / HGDC / (HGCD) / HGCD → Le plan (DCG) contient le point H : la droite (EH) le perce en H.

EXERCICE 42 · BASE

La droite des milieux d'une face

Dans le tétraèdre $ABCD$, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. À quelle arête du tétraèdre la droite (IJ) est-elle parallèle ?

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : (BC) — aussi acceptées : BC · la droite (BC) · la droite BC · droite (BC) · droite BC · c'est (BC) · c'est la droite (BC) · (CB) · CB · la droite (CB) · la droite CB · droite (CB) · droite CB · c'est (CB) · c'est la droite (CB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points I et J sont sur deux côtés du triangle ABC.
2. Dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

CORRECTION

Le triangle ABC — I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

(IJ) est parallèle à (BC)

Et le plan — (BC) est une droite du plan (BCD).

(IJ) est parallèle au plan (BCD)

(IJ) est parallèle à l'arête (BC), donc aussi au plan (BCD) de la face opposée à A.

PIÈGES ANTICIPÉS

(AB) / AB / (BA) / BA / la droite (AB) / (AC) / AC / (CA) / CA / la droite (AC) → (IJ) coupe cette arête en I ou en J : deux droites sécantes ne sont pas parallèles.

(AD) / AD / (DA) / DA / la droite (AD) / (BD) / BD / (DB) / DB / la droite (BD) / (CD) / CD / (DC) / DC / la droite (CD) → Cette arête n'est pas dans le plan (ABC) qui contient (IJ) : cherche le troisième côté du triangle ABC.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Vrai ou faux : toute parallèle ?

Vrai ou faux ? « Si une droite D est parallèle à un plan P, alors toute droite parallèle à D est contenue dans P. »

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : faux — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux

---

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la propriété 3 : quelle condition met-elle sur la droite parallèle à D ?
2. Dans un cube $ABCDEFGH$, (AB) est contenue dans le plan (ABC). La droite (EF), parallèle à (AB), est-elle dans ce plan ?

CORRECTION

La propriété 3 — Elle ne parle que des droites parallèles à D **qui passent par un point de** P.

Un contre-exemple — Dans un cube $ABCDEFGH$, (AB) est parallèle au plan (ABC), (EF) est parallèle à (AB), mais E n'est pas dans ce plan.

$(EF) \not\subset (ABC)$

Faux : une droite parallèle à D n'est contenue dans P que si elle passe par un point de P (propriété 3).

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → Il manque une condition : la parallèle à D doit passer par un point de P. Dans un cube, (EF) est parallèle à (AB) sans être dans le plan (ABC).

EXERCICE 44 · RAISONNEMENT

Un côté de la section du tétraèdre

Dans le tétraèdre $ABCD$, M est le point de $[AB]$ tel que AM soit égal au quart de AB. Le plan passant par M et parallèle aux droites (BC) et (AD) coupe $[AC]$ en N, $[CD]$ en P et $[BD]$ en Q. On donne $AD = 12$. Calculer MQ.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La parallèle à (AD) passant par M est dans le plan (ABD), et elle est aussi dans le plan de la section (propriété 3) : c'est la droite (MQ).
2. Applique alors le théorème de Thalès dans le triangle BAD, à partir du sommet B.

$$\frac{MQ}{AD} = \frac{BM}{BA}$$

CORRECTION

La droite (MQ) — La parallèle à (AD) passant par M est dans le plan (ABD), et dans le plan de la section d'après la propriété 3 : c'est leur intersection (MQ).

(MQ) est parallèle à (AD)

Le rapport — AM est le quart de AB, donc BM en vaut les trois quarts.

$$\frac{BM}{BA} = \frac{3}{4}$$

Thalès — Dans le triangle BAD :

$$MQ = \frac{3}{4} \times 12 = 9$$

$MQ = 9$: dans la face ABD, le côté de la section est parallèle à (AD), et le rapport se lit à partir de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → $\frac{1}{4}$ est le rapport $\frac{AM}{AB}$: dans le triangle BAD, le rapport de Thalès se lit à partir de B, et vaut $\frac{3}{4}$.

EXERCICE 45 · DEFI

Quand la section est un losange

Dans le tétraèdre $ABCD$, on donne $AB = 10$, $BC = 8$ et $AD = 12$. M est un point de $[AB]$, et le plan passant par M et parallèle aux droites (BC) et (AD) coupe le tétraèdre suivant le parallélogramme $MNPQ$, avec N sur $[AC]$ et Q sur $[BD]$. Calculer AM pour que $MNPQ$ soit un losange.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $AM = x$. Dans le triangle ABC, (MN) est parallèle à (BC) ; dans le triangle BAD, (MQ) est parallèle à (AD). Exprime MN et MQ en fonction de x.
2. Un parallélogramme est un losange lorsque deux côtés consécutifs sont égaux : résous $MN = MQ$.

$$MN = \frac{8x}{10} \quad ; \quad MQ = \frac{12(10-x)}{10}$$

CORRECTION

Le côté [MN] — Dans le triangle ABC, Thalès à partir de A :

$$MN = BC \times \frac{AM}{AB} = \frac{8x}{10}$$

Le côté [MQ] — Dans le triangle BAD, Thalès à partir de B :

$$MQ = AD \times \frac{BM}{BA} = \frac{12(10-x)}{10}$$

L'équation —

$$8x = 120 - 12x \iff 20x = 120 \iff x = 6$$

$MNPQ$ est un losange pour $AM = 6$: alors $MN = MQ = 4{,}8$. On exprime deux côtés consécutifs avec le même x, puis on les égale.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Les deux rapports sont échangés : MN se calcule à partir de A, avec $\frac{AM}{AB}$, et MQ à partir de B, avec $\frac{BM}{BA}$.

5 → Au milieu de $[AB]$, $MN = 4$ et $MQ = 6$: les côtés consécutifs ne sont pas égaux.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Un plan qui contient une arête

Dans le tétraèdre $ABCD$, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, et K est un point de l'arête $[AD]$ distinct de A et de D. La droite (IJ) est-elle parallèle au plan (BCK) ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : c'est oui · vrai · parallèle · elle est parallèle · elle est parallèle au plan · elle l'est · strictement parallèle · elle est strictement parallèle · oui parallèle · oui elle est parallèle · oui elle est parallèle au plan · oui elle l'est · oui strictement parallèle · oui elle est strictement parallèle · oui, parallèle · oui, elle est parallèle · oui, elle est parallèle au plan · oui, elle l'est · oui, strictement parallèle · oui, elle est strictement parallèle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (BCK) contient une arête du triangle ABC. Laquelle ?
2. Compare (IJ) à cette arête, dans le triangle ABC.

CORRECTION

Les milieux — Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

(IJ) est parallèle à (BC)

La définition — (BC) est une droite du plan (BCK).

(IJ) est parallèle au plan (BCK)

Oui : (IJ) est parallèle à (BC), une droite du plan (BCK). Elle lui est même strictement parallèle, car I n'est pas dans ce plan.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / c'est non / faux / pas parallèle / elle n'est pas parallèle / elle n'est pas parallèle au plan / elle ne l'est pas / sécante / elle est sécante / elle perce le plan / non pas parallèle / non elle n'est pas parallèle / non elle n'est pas parallèle au plan / non elle ne l'est pas / non sécante / non elle est sécante / non elle perce le plan / non, pas parallèle / non, elle n'est pas parallèle / non, elle n'est pas parallèle au plan / non, elle ne l'est pas / non, sécante / non, elle est sécante / non, elle perce le plan` → Le plan (BCK) contient (BC), et (IJ) est parallèle à (BC) par le théorème des milieux : (IJ) est donc parallèle au plan.

EXERCICE 47 · RAISONNEMENT

Parallèle à deux faces

Une droite, notée d, est parallèle au plan (ABC) et au plan (ABD) d'un tétraèdre $ABCD$. À quelle arête du tétraèdre est-elle parallèle ?

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(AB)` — aussi acceptées : AB · la droite (AB) · la droite AB · droite (AB) · droite AB · c'est (AB) · c'est la droite (AB) · (BA) · BA · la droite (BA) · la droite BA · droite (BA) · droite BA · c'est (BA) · c'est la droite (BA)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les plans (ABC) et (ABD) sont sécants : suivant quelle droite ?
2. Relis la propriété 5 : une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.

CORRECTION

Deux plans sécants — Les plans (ABC) et (ABD) sont distincts et ont en commun les points A et B.

$(ABC) \cap (ABD) = (AB)$

Propriété 5 — La droite d est parallèle à ces deux plans sécants.

d est parallèle à (AB)

d est parallèle à l'arête (AB), la droite d'intersection des deux plans (propriété 5).

PIÈGES ANTICIPÉS

`(CD) / CD / (DC) / DC / la droite (CD)` → (CD) perce le plan (ABC) en C : une droite parallèle à (CD) percerait aussi ce plan (propriété 1).

`(AC) / AC / (CA) / CA / la droite (AC) / (BC) / BC / (CB) / CB / la droite (BC) / (AD) / AD / (DA) / DA / la droite (AD) / (BD) / BD / (DB) / DB / la droite (BD)` → Cette arête n'est que dans un des deux plans, et elle perce l'autre : une droite qui lui est parallèle percerait aussi cet autre plan.

EXERCICE 48 · PRATIQUE

Les arêtes parallèles à la base

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), combien des douze arêtes du cube sont portées par une droite parallèle au plan (ABC) ? On rappelle qu'une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan.

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Range les arêtes en trois groupes : celles de la face du dessous, celles de la face du dessus, et les arêtes verticales.
2. Une arête verticale a une extrémité dans le plan (ABC) et l'autre au-dessus : elle perce ce plan.

CORRECTION

La base — $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ sont contenues dans le plan (ABC) : elles lui sont parallèles.

Le dessus — $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$ sont parallèles à $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$: elles sont strictement parallèles au plan.

Les verticales — $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ percent le plan en A, B, C et D.

$4 + 4 = 8$

8 arêtes sont parallèles au plan (ABC) : les 4 qui y sont contenues et les 4 de la face du dessus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → Il y a deux groupes : les arêtes de la face du dessus, strictement parallèles, et celles de la base, contenues dans le plan, donc parallèles aussi.

`12` → Les quatre arêtes verticales percent le plan (ABC) en un sommet de la base : elles ne lui sont pas parallèles.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Les arêtes parallèles à un plan diagonal

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), combien des douze arêtes du cube sont portées par une droite parallèle au plan (BDH) ?

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (BDH) contient aussi le point F : il contient les arêtes $[BF]$ et $[DH]$.
2. Une arête dont une seule extrémité est parmi B, D, F et H perce le plan en cette extrémité. Il reste deux arêtes à examiner.

CORRECTION

Contenues — $[BF]$ et $[DH]$ sont contenues dans le plan (BDH).

Parallèles — $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles à $[BF]$, une droite du plan, et ne passent ni par B, ni par D, ni par F, ni par H.

$$(AE) \text{ et } (CG) \text{ sont parallèles au plan } (BDH)$$

Les autres — Les huit autres arêtes ont exactement une extrémité parmi B, D, F et H : elles percent le plan.

$$2 + 2 = 4$$

4 arêtes sont parallèles au plan (BDH) : $[BF]$ et $[DH]$, qui y sont contenues, et $[AE]$ et $[CG]$, qui leur sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Il faut compter deux groupes : les arêtes contenues dans le plan, et celles qui leur sont parallèles, $[AE]$ et $[CG]$.

6 / 8 → Une arête comme $[AB]$ a l'extrémité B dans le plan et l'autre en dehors : elle perce le plan en B.

EXERCICE 50 · BASE

Vrai ou faux : le théorème du toit

Vrai ou faux ? « Si deux plans sécants contiennent respectivement deux droites parallèles, alors leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites. »

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `vrai` — aussi acceptées : c'est vrai · il est vrai · oui · oui c'est vrai

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pense aux deux pans d'un toit : chacun contient un bord du toit, et ces bords sont parallèles.
2. Relis la propriété 6.

CORRECTION

Propriété 6 — C'est l'énoncé du théorème du toit : deux plans sécants P et P' qui contiennent deux droites parallèles D et D' se coupent suivant une droite parallèle à D et à D'.

Vrai : c'est le théorème du toit. L'hypothèse « sécants » compte : deux plans parallèles peuvent aussi contenir deux droites parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`faux / non / c'est faux` → C'est exactement le théorème du toit (propriété 6) : la ligne de faîte d'un toit est parallèle aux deux bords.

EXERCICE 51 · PRATIQUE

Le faîte dans un prisme

$ABCDEF$ est un prisme dont les bases sont les triangles ABC et DEF, avec D, E et F au-dessus de A, B et C ; ses faces latérales $ABED$, $BCFE$ et $ACFD$ sont des parallélogrammes. Les diagonales de la face $ACFD$ se coupent en I, celles de la face $BCFE$ en J. À laquelle des droites (AB), (BC) et (AD) la droite (IJ) est-elle parallèle ?

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(AB)` — aussi acceptées : AB · la droite (AB) · la droite AB · droite (AB) · droite AB · c'est (AB) · c'est la droite (AB) · (BA) · BA · la droite (BA) · la droite BA · droite (BA) · droite BA · c'est (BA) · c'est la droite (BA) · (DE) · DE · la droite (DE) · (ED) · ED · la droite (ED)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. I et J sont dans le plan (ABF) et dans le plan (DEC) : la droite (IJ) est l'intersection de ces deux plans.
2. Chacun de ces deux plans contient un côté d'une base du prisme, et ces deux côtés sont parallèles : applique le théorème du toit.

CORRECTION

Deux plans — I est sur (AF) et sur (CD), J sur (BF) et sur (CE) : I et J sont communs aux plans (ABF) et (DEC).

$(ABF) \cap (DEC) = (IJ)$

Deux parallèles — $ABED$ est un parallélogramme : (AB), contenue dans (ABF), est parallèle à (DE), contenue dans (DEC).

(AB) est parallèle à (DE)

Théorème du toit —

(IJ) est parallèle à (AB)

(IJ) est parallèle à (AB). On le retrouve aussi dans le triangle FAB : I et J sont les milieux de $[AF]$ et de $[BF]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(BC) / BC / (CB) / CB / la droite (BC)` → (BC) est contenue dans le plan (DEC), mais elle perce le plan (ABF) en B : elle n'est pas parallèle à (IJ).

`(AD) / AD / (DA) / DA / la droite (AD)` → (AD) est une arête latérale : elle relie les deux bases, alors que (IJ) est parallèle aux bases.

EXERCICE 52 · BASE

Le segment des centres de deux faces

$ABCDEF$ est un prisme dont les bases sont les triangles ABC et DEF, avec D, E et F au-dessus de A, B et C ; ses faces latérales $ABED$, $BCFE$ et $ACFD$ sont des parallélogrammes. Les diagonales de la face $ACFD$ se coupent en I, celles de la face $BCFE$ en J. On donne $AB = 7$. Calculer IJ.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `3.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : I est le milieu de $[AF]$, et J celui de $[BF]$.
2. Applique le théorème des milieux dans le triangle FAB.

CORRECTION

Deux milieux — I est le milieu de la diagonale $[AF]$ de $ACFD$, J celui de la diagonale $[BF]$ de $BCFE$.

Le triangle FAB —

$$IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$IJ = 3{,}5$: le segment qui joint les centres des deux faces est un segment de milieux du triangle FAB.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → 7 est la longueur AB : $[IJ]$ joint deux milieux du triangle FAB, il en mesure la moitié.

`14` → Le segment des milieux mesure la moitié du troisième côté, pas le double.

EXERCICE 53 · PRATIQUE

Le toit dans un tétraèdre

Dans le tétraèdre $ABCD$, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Les plans (DIJ) et (DBC) se coupent suivant une droite qui passe par D. À laquelle des droites (BC), (AD) et (BD) est-elle parallèle ?

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(BC)` — aussi acceptées : BC · la droite (BC) · la droite BC · droite (BC) · droite BC · c'est (BC) · c'est la droite (BC) · (CB) · CB · la droite (CB) · la droite CB · droite (CB) · droite CB · c'est (CB) · c'est la droite (CB) · (IJ) · IJ · la droite (IJ) · (JI) · JI · la droite (JI)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (DIJ) contient la droite (IJ), et le plan (DBC) contient un côté du triangle ABC. Ces deux droites sont-elles parallèles ?
2. Les deux plans ont le point D en commun : applique le théorème du toit.

CORRECTION

Deux parallèles — Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

(IJ) est parallèle à (BC)

Théorème du toit — Le plan (DIJ) contient (IJ), le plan (DBC) contient (BC), et ces plans sont sécants en une droite passant par D.

la parallèle à (BC) passant par D

La droite d'intersection des plans (DIJ) et (DBC) est la parallèle à (BC) passant par D.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(AD)` / `AD` / `(DA)` / `DA` / `la droite (AD)` / `(BD)` / `BD` / `(DB)` / `DB` / `la droite (BD)` → Cette arête passe bien par D, mais elle n'est pas contenue dans les deux plans à la fois : elle perce l'un des deux en D.

EXERCICE 54 · DEFI

Le faîte au centre du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), les plans (ABG) et (CDE) sont sécants. Leur droite d'intersection coupe la face $ADHE$ en un point K. De quel segment le point K est-il le milieu : $[AH]$, $[AE]$ ou $[AD]$?

Écris le segment, par exemple [AB].

Réponse attendue : `[AH]` — aussi acceptées : le segment [AH] · segment [AH] · c'est [AH] · le milieu de [AH] · [HA] · le segment [HA] · segment [HA] · c'est [HA] · le milieu de [HA] · [DE] · le segment [DE] · segment [DE] · c'est [DE] · le milieu de [DE] · [ED] · le segment [ED] · segment [ED] · c'est [ED] · le milieu de [ED] · AH · HA · DE · ED

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ABG) contient aussi H, et le plan (CDE) contient aussi F : quelles diagonales de la face $ADHE$ sont dans chacun d'eux ?
2. Le point K est dans les deux plans et dans la face $ADHE$: c'est le point commun d'une diagonale de cette face contenue dans (ABG) et d'une diagonale contenue dans (CDE).
3. Les deux plans contiennent (AB) et (DC), qui sont parallèles : leur intersection leur est parallèle (théorème du toit).

CORRECTION

Les deux plans — $[AB]$ et $[HG]$ sont parallèles et de même longueur : H est dans le plan (ABG). De même, $[DC]$ et $[EF]$ le sont : F est dans le plan (CDE).

Un point commun — La diagonale $[AH]$ de la face $ADHE$ est dans (ABG), la diagonale $[DE]$ est dans (CDE) : leur point commun, le centre de la face, est dans les deux plans.

$K = (AH) \cap (DE)$

Théorème du toit — (AB) et (DC) sont parallèles : l'intersection des deux plans est la parallèle à (AB) passant par ce centre, qui ne coupe la face $ADHE$ qu'en ce point.

K est le milieu de $[AH]$

K est le centre de la face $ADHE$, milieu de $[AH]$ et de $[DE]$: on cherche un point commun aux deux plans en croisant deux droites, une de chaque plan, situées dans une même face.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[AE] / [EA] / [AD] / [DA] / le segment [AE] / le segment [AD]` → Le milieu de cette arête n'est pas dans le plan (CDE) : le point cherché est sur une diagonale de la face contenue dans chacun des deux plans.

EXERCICE 55 · RAISONNEMENT

Le toit puis Thalès

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme, avec $AB = 10$. M est le point de $[SA]$ tel que SM soit égal aux deux cinquièmes de SA. Le plan (MCD) coupe l'arête $[SB]$ en N. Calculer MN.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les plans (MCD) et (SAB) se coupent suivant (MN). Quelles droites parallèles contiennent-ils ?
2. D'après le théorème du toit, (MN) est parallèle à (AB) : applique Thalès dans le triangle SAB.

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA}$$

CORRECTION

Théorème du toit — Le plan (MCD) contient (CD), le plan (SAB) contient (AB), ces droites sont parallèles, et les plans sont sécants suivant (MN).

(MN) est parallèle à (AB)

Thalès — Dans le triangle SAB :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{5}$$

Le calcul —

$$MN = \frac{2}{5} \times 10 = 4$$

$MN = 4$: le théorème du toit donne la direction de (MN), puis Thalès donne sa longueur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → $\frac{3}{5}$ est le rapport $\frac{AM}{AS}$: dans le triangle SAB, le rapport de Thalès se lit à partir de S.

`10` → 10 est la longueur AB : M n'est pas en A, le segment $[MN]$ est plus court.

`25` → $[MN]$ est plus court que $[AB]$: on multiplie par $\frac{2}{5}$, pas par $\frac{5}{2}$.

EXERCICE 56 · PRATIQUE

La nature de la section

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. M est le point de $[SA]$ tel que SM soit égal au tiers de SA, et le plan (MCD) coupe l'arête $[SB]$ en N. Quelle est la nature du quadrilatère $MNCD$?

Écris le nom du quadrilatère.

Réponse attendue : `trapèze` — aussi acceptées : un trapèze · c'est un trapèze · trapeze · un trapeze · MNCD est un trapèze · le quadrilatère MNCD est un trapèze

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les plans (MCD) et (SAB) se coupent suivant (MN) : applique le théorème du toit.
2. Compare ensuite les longueurs MN et CD : dans le triangle SAB, que vaut $\frac{MN}{AB}$?

CORRECTION

Deux côtés parallèles — (CD) et (AB) sont parallèles, et contenues dans les plans sécants (MCD) et (SAB) : d'après le théorème du toit, (MN) est parallèle à (AB), donc à (CD).

(MN) est parallèle à (CD)

Pas un parallélogramme — Dans le triangle SAB, Thalès donne $MN = \frac{1}{3}AB$, donc $MN \neq CD$.

$MN = \frac{1}{3}CD$

La nature —

$MNCD$ est un trapèze

$MNCD$ a deux côtés parallèles de longueurs différentes : c'est un trapèze.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallélogramme / un parallélogramme / c'est un parallélogramme / parallelogramme` → (MN) est bien parallèle à (CD), mais MN n'est que le tiers de CD : les côtés parallèles n'ont pas la même longueur.

`rectangle / un rectangle / carré / un carré / losange / un losange` → Rien ne dit que les côtés sont égaux ou les angles droits, et $MN \neq CD$: ce n'est même pas un parallélogramme.

EXERCICE 57 · DEFI

Le périmètre d'une section du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), I est le milieu de $[AE]$. Le plan (IBC) coupe l'arête $[DH]$ en J, et la section du cube par ce plan est le quadrilatère $IBCJ$. Calculer son périmètre, en valeur exacte.

Écris la valeur exacte, par exemple 4+2*sqrt(3).

Réponse attendue : `12+6*sqrt(5)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (IBC) contient (BC), parallèle à (AD) : le théorème du toit donne son intersection (IJ) avec le plan (ADH). Quelle est alors la nature de $AIJD$?
2. IB se calcule dans la face $ABFE$, dans le triangle IAB rectangle en A.
   $IB^2 = IA^2 + AB^2$

CORRECTION

Théorème du toit — (BC) et (AD) sont parallèles et contenues dans les plans sécants (IBC) et (ADH) : (IJ) est parallèle à (AD), et $AIJD$ est un parallélogramme.

$IJ = AD = 6 \quad ; \quad DJ = AI = 3$

Les côtés obliques — Dans la face $ABFE$, puis dans la face $CDHG$:

$IB = JC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Le périmètre —

$6 + 6 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 12 + 6\sqrt{5}$

Le périmètre de $IBCJ$ est $12 + 6\sqrt{5}$, soit environ $25{,}42$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6+3*sqrt(5)` → $6 + 3\sqrt{5}$ est la somme de deux côtés consécutifs : le quadrilatère a quatre côtés.

`24` → $IBCJ$ n'est pas un carré de côté 6 : $[IB]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 3 et 6.

`25.42 / 25.41 / 25.4 / 25` → On attend la valeur exacte : $12 + 6\sqrt{5}$, sans arrondir.

EXERCICE 58 · PRATIQUE

Où le plan coupe l'arête

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), I est le point de $[AE]$ tel que $AI = 2$. Le plan (IBC) coupe la droite (DH) en J. Calculer DJ.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (IBC) contient (BC) et le plan (ADH) contient (AD) : ces droites sont parallèles, et les deux plans se coupent suivant (IJ).
2. (IJ) est donc parallèle à (AD), et (AI) à (DJ) : quelle est la nature du quadrilatère $AIJD$?

CORRECTION

Théorème du toit — Les plans (IBC) et (ADH) sont sécants suivant (IJ) et contiennent les parallèles (BC) et (AD).

(IJ) est parallèle à (AD)

Un parallélogramme — (AI) et (DJ) sont les droites (AE) et (DH), parallèles : $AIJD$ a ses côtés opposés parallèles.

$AIJD$ est un parallélogramme

La longueur —

$DJ = AI = 2$

$DJ = 2$: le plan (IBC) coupe la face $ADHE$ suivant la parallèle à (AD) passant par I.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est la longueur HJ : on demande DJ, égale à AI.

3 → J n'est pas forcément au milieu de $[DH]$: il est à la même hauteur que I, donc $DJ = AI$.

EXERCICE 59 · BASE

Deux faces opposées

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), les plans (ADH) et (BCG) sont-ils parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : c'est oui · vrai · parallèles · ils sont parallèles · ils le sont · parallèle · ils sont parallèle · strictement parallèles · ils sont strictement parallèles · oui parallèles · oui ils sont parallèles · oui ils le sont · oui parallèle · oui ils sont parallèle · oui strictement parallèles · oui ils sont strictement parallèles · oui, parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, ils le sont · oui, parallèle · oui, ils sont parallèle · oui, strictement parallèles · oui, ils sont strictement parallèles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ce sont les plans de deux faces opposées du cube.
2. Cherche dans le plan (ADH) deux droites sécantes parallèles à deux droites sécantes du plan (BCG) (propriété 10).

CORRECTION

Deux paires de parallèles — (AD) est parallèle à (BC), et (AE) à (BF) : (AD) et (AE) sont sécantes en A, (BC) et (BF) sécantes en B.

Propriété 10 —

(ADH) est parallèle à (BCG)

Oui : les plans de deux faces opposées d'un cube sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / c'est non / faux / pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / ne sont pas parallèles / ils ne le sont pas / pas parallèle / sécants / ils sont sécants / ils se coupent / non pas parallèles / non ils ne sont pas parallèles / non ne sont pas parallèles / non ils ne le sont pas / non pas parallèle / non sécants / non ils sont sécants / non ils se coupent / non, pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / non, ne sont pas parallèles / non, ils ne le sont pas / non, pas parallèle / non, sécants / non, ils sont sécants / non, ils se coupent` → Ce sont deux faces opposées : (AD) et (AE), sécantes, sont parallèles à (BC) et (BF), sécantes. D'après la propriété 10, les plans sont parallèles.

EXERCICE 60 · BASE

Deux faces voisines

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), les plans (ABC) et (BCG) sont-ils parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : c'est non · faux · pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · ne sont pas parallèles · ils ne le sont pas · pas parallèle · sécants · ils sont sécants · ils se coupent · non pas parallèles · non ils ne sont pas parallèles · non ne sont pas parallèles · non ils ne le sont pas · non pas parallèle · non sécants · non ils sont sécants · non ils se coupent · non, pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · non, ne sont pas parallèles · non, ils ne le sont pas · non, pas parallèle · non, sécants · non, ils sont sécants · non, ils se coupent

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche des points communs aux deux plans.
2. Deux plans parallèles sont soit confondus, soit sans aucun point commun.

CORRECTION

Des points communs — B et C appartiennent aux deux plans.

$(ABC) \cap (BCG) = (BC)$

Ni confondus, ni disjoints — A est dans (ABC) mais pas dans (BCG) : les plans sont distincts, et ils ont des points communs.

Non : les plans (ABC) et (BCG) sont sécants suivant la droite (BC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / c'est oui / vrai / parallèles / ils sont parallèles / ils le sont / parallèle / ils sont parallèle / strictement parallèles / ils sont strictement parallèles / oui parallèles / oui ils sont parallèles / oui ils le sont / oui parallèle / oui ils sont parallèle / oui strictement parallèles / oui ils sont strictement parallèles / oui, parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, ils le sont / oui, parallèle / oui, ils sont parallèle / oui, strictement parallèles / oui, ils sont strictement parallèles` → Les deux faces ont l'arête $[BC]$ en commun : leurs plans sont sécants suivant (BC), ils ne sont pas parallèles.

EXERCICE 61 · BASE Vrai ou faux : un point commun

Vrai ou faux ? « Deux plans distincts qui ont un point commun sont parallèles. »

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `faux` — aussi acceptées : c'est faux · il est faux · non · non c'est faux

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la définition : deux plans parallèles distincts ont-ils des points communs ?
2. Pense à deux faces voisines d'un cube.

CORRECTION

La définition — Deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou s'ils n'ont aucun point commun.

Le cas présent — Deux plans distincts ayant un point commun ne sont ni confondus ni disjoints : ils sont sécants suivant une droite.

Faux : deux plans distincts qui ont un point commun sont sécants.

PIÈGES ANTICIPÉS

`vrai / oui / c'est vrai` → C'est le contraire : deux plans distincts et parallèles n'ont aucun point commun. S'ils en ont un, ils se coupent suivant une droite.

EXERCICE 62 · PRATIQUE

Percer la face du dessus

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), la droite (BH) perce le plan (ABC) en B. En quel point perce-t-elle le plan (EFG) ?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : H — aussi acceptées : le point H · en H · point H · au point H · c'est H · c'est le point H

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles : d'après la propriété 9, une droite qui perce l'un perce l'autre.
2. Cherche, parmi les points nommés sur la droite, celui qui est dans la face du dessus.

CORRECTION

Propriété 9 — Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles et (BH) perce (ABC) : elle perce aussi (EFG).

Le point — H est sur la droite (BH) et dans la face $EFGH$.

$(BH) \cap (EFG) = \{H\}$

La droite (BH) perce le plan (EFG) en H.

PIÈGES ANTICIPÉS

`F / le point F / en F` → F est au-dessus de B, mais il n'est pas sur la droite (BH), qui traverse le solide en diagonale.

`B / le point B / en B` → B est le point où la droite perce le plan (ABC) ; le plan (EFG), parallèle, ne contient pas B.

EXERCICE 63 · BASE

Parallèle au plan, pas à toutes ses droites

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), la droite (EG) est parallèle au plan (ABC). Les droites (EG) et (BD) sont-elles parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : c'est non · faux · pas parallèles · pas parallèle · elles ne sont pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · ne sont pas parallèles · elles ne le sont pas · ils ne le sont pas · non coplanaires · elles sont non coplanaires · non pas parallèles · non pas parallèle · non elles ne sont pas parallèles · non ils ne sont pas parallèles · non ne sont pas parallèles · non elles ne le sont pas · non ils ne le sont pas · non non coplanaires · non elles sont non coplanaires · non, pas parallèles · non, pas parallèle

· non, elles ne sont pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · non, ne sont pas parallèles · non, elles ne le sont pas · non, ils ne le sont pas · non, non coplanaires · non, elles sont non coplanaires

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (EG) est parallèle à la diagonale (AC) de la base.
2. Dans le carré $ABCD$, les diagonales (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

CORRECTION

Une parallèle — $AEGC$ est un parallélogramme.

(EG) est parallèle à (AC)

Par l'absurde — Si (EG) était parallèle à (BD), alors (AC) serait parallèle à (BD) (propriété 2). Or les diagonales du carré $ABCD$ se coupent.

(EG) n'est pas parallèle à (BD)

Non : (EG) est parallèle au plan (ABC) sans être parallèle à toutes ses droites. (EG) et (BD) sont non coplanaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / c'est oui / vrai / parallèles / parallèle / elles sont parallèles / ils sont parallèles / elles le sont / ils le sont / elles sont parallèle / oui parallèles / oui parallèle / oui elles sont parallèles / oui ils sont parallèles / oui elles le sont / oui ils le sont / oui elles sont parallèle / oui, parallèles / oui, parallèle / oui, elles sont parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, elles le sont / oui, ils le sont / oui, elles sont parallèle` → Une droite parallèle à un plan n'est parallèle qu'à certaines de ses droites : (EG) est parallèle à (AC), et (AC) coupe (BD).

EXERCICE 64 · RAISONNEMENT

Une parallèle par un point de l'autre plan

P et Q sont deux plans parallèles, A est un point de Q, et d est une droite parallèle au plan P passant par A. La droite d est-elle contenue dans le plan Q ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : c'est oui · vrai · elle est contenue dans Q · elle est contenue dans le plan Q · elle est contenue · contenue · elle l'est · elle est dans Q · incluse · elle est incluse dans Q · oui elle est contenue dans Q · oui elle est contenue dans le plan Q · oui elle est contenue · oui contenue · oui elle l'est · oui elle est dans Q · oui incluse · oui elle est incluse dans Q · oui, elle est contenue dans Q · oui, elle est contenue dans le plan Q · oui, elle est contenue · oui, contenue · oui, elle l'est · oui, elle est dans Q · oui, incluse · oui, elle est incluse dans Q

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la propriété 8 : une droite parallèle à P est-elle parallèle à Q ?
2. Relis ensuite la propriété 3 : une droite parallèle à un plan et passant par un point de ce plan…

CORRECTION

Propriété 8 — P et Q sont parallèles et d est parallèle à P.

d est parallèle à Q

Propriété 3 — La parallèle à d passant par le point A de Q, c'est-à-dire d elle-même, est incluse dans Q.

$d \subset Q$

Oui : d est contenue dans Q. Toutes les parallèles à P passant par A sont dans le plan Q : c'est le plan parallèle à P passant par A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / c'est non / faux / elle n'est pas contenue dans Q / elle n'est pas contenue / pas contenue / elle ne l'est pas / elle perce Q / sécante / elle est sécante / non elle n'est pas contenue dans Q / non elle n'est pas contenue / non pas contenue / non elle ne l'est pas / non elle perce Q / non sécante / non elle est sécante / non, elle n'est pas contenue dans Q / non, elle n'est pas contenue / non, pas contenue / non, elle ne l'est pas / non, elle perce Q / non, sécante / non, elle est sécante` → d est parallèle à Q (propriété 8) et passe par un point de Q : d'après la propriété 3, elle est contenue dans Q.

EXERCICE 65 · RAISONNEMENT

Les faces parallèles à la face du dessus

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), combien des six faces du cube sont dans un plan parallèle au plan (EFG) ?

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Passe les six faces en revue : le plan de chacune a-t-il des points communs avec le plan (EFG) ?
2. Relis la définition des plans parallèles : elle compte deux cas.

CORRECTION

Les faces latérales — Chacune des quatre faces latérales a une arête dans la face $EFGH$: son plan coupe (EFG) suivant cette arête.

Deux cas — Le plan de $ABCD$ n'a aucun point commun avec (EFG) : ils sont strictement parallèles. Le plan de $EFGH$ est le plan (EFG) lui-même : ils sont confondus, donc parallèles.

$1 + 1 = 2$

2 faces : $ABCD$, strictement parallèle, et $EFGH$, dont le plan est confondu avec (EFG). Deux plans confondus sont parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Deux plans confondus sont parallèles : la face $EFGH$ elle-même compte, en plus de la face $ABCD$.

`0` → La face $ABCD$ est opposée à $EFGH$: son plan n'a aucun point commun avec (EFG), il lui est parallèle.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

Une droite du plan parallèle

Dans le tétraèdre $ABCD$, I, J et K sont les milieux de $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$, et les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles. Laquelle des droites (IJ), (IB) et (JC) est parallèle au plan (ABC) ?

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(IJ)` — aussi acceptées : IJ · la droite (IJ) · la droite IJ · droite (IJ) · droite IJ · c'est (IJ) · c'est la droite (IJ) · (JI) · JI · la droite (JI) · la droite JI · droite (JI) · droite JI · c'est (JI) · c'est la droite (JI) · (JK) · JK · la droite (JK) · (KJ) · KJ · la droite (KJ) · (IK) · IK · la droite (IK) · (KI) · KI · la droite (KI)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une droite qui passe par un point du plan (ABC) sans y être contenue perce ce plan.
2. Propriété 7 : si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

CORRECTION

Deux droites qui percent — (IB) passe par B et (JC) par C, points du plan (ABC), sans y être contenues.

$(IB) \cap (ABC) = \{B\} \quad ; \quad (JC) \cap (ABC) = \{C\}$

Propriété 7 — (IJ) est une droite du plan (IJK), parallèle au plan (ABC).

(IJ) est parallèle au plan (ABC)

C'est (IJ) : toute droite du plan (IJK) est parallèle au plan (ABC) (propriété 7).

PIÈGES ANTICIPÉS

`(IB) / IB / (BI) / BI / la droite (IB)` → (IB) passe par B, qui est dans le plan (ABC), et I n'y est pas : elle perce le plan en B.

`(JC) / JC / (CJ) / CJ / la droite (JC)` → (JC) passe par C, qui est dans le plan (ABC), et J n'y est pas : elle perce le plan en C.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Une droite de chaque plan

P et Q sont deux plans strictement parallèles. Une droite contenue dans P et une droite contenue dans Q peuvent-elles être sécantes ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : c'est non · faux · elles ne peuvent pas · elles ne peuvent pas être sécantes · jamais · impossible · ce n'est pas possible · pas possible · elles ne sont jamais sécantes · non elles ne peuvent pas · non elles ne peuvent pas être sécantes · non jamais · non impossible · non ce n'est pas possible · non pas possible · non elles ne sont jamais sécantes · non, elles ne peuvent pas · non, elles ne peuvent pas être sécantes · non, jamais · non, impossible · non, ce n'est pas possible · non, pas possible · non, elles ne sont jamais sécantes

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un point commun aux deux droites serait dans P et dans Q.
2. Deux plans strictement parallèles ont-ils des points communs ?

CORRECTION

Un point commun ? — Si les deux droites avaient un point commun, ce point serait à la fois dans P et dans Q.

Impossible — P et Q sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun.

$$P \cap Q = \varnothing$$

Non : une droite de P et une droite de Q n'ont jamais de point commun. Elles sont strictement parallèles ou non coplanaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / c'est oui / vrai / elles peuvent / elles peuvent être sécantes / c'est possible / possible / sécantes / elles sont sécantes / oui elles peuvent / oui elles peuvent être sécantes / oui c'est possible / oui possible / oui sécantes / oui elles sont sécantes / oui, elles peuvent / oui, elles peuvent être sécantes / oui, c'est possible / oui, possible / oui, sécantes / oui, elles sont sécantes` → Un point commun aux deux droites serait dans P et dans Q ; or deux plans strictement parallèles n'ont aucun point commun.

EXERCICE 68 · DEFI

Thalès entre trois plans parallèles

Trois plans P, Q et R sont parallèles. Une droite les coupe en A, B et C, avec B entre A et C ; une autre droite, non coplanaire avec la première, les coupe en E, F et G. On donne $AB = 4$, $BC = 6$ et $EG = 15$. Calculer EF.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trace la parallèle à (EG) passant par A : elle coupe Q en U et R en V (propriété 9). Le plan qui contient cette parallèle et (EG) coupe P, Q et R suivant trois droites parallèles : que dire de $AUFE$ et de $AVGE$?
2. Le plan (ACV) coupe Q et R suivant (BU) et (CV), parallèles : applique le théorème de Thalès dans le triangle ACV.
   $$\frac{AU}{AV} = \frac{AB}{AC}$$

CORRECTION

Deux parallélogrammes — Le plan des droites (AV) et (EG) coupe P, Q et R suivant (AE), (UF) et (VG), parallèles (propriété 12) : $AUFE$ et $AVGE$ sont des parallélogrammes.

$$AU = EF \quad ; \quad AV = EG = 15$$

Thalès — Le plan (ACV) coupe Q et R suivant (BU) et (CV), parallèles. Dans le triangle ACV :

$$\frac{AU}{AV} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{10}$$

Le calcul —

$$EF = AU = \frac{4}{10} \times 15 = 6$$

$EF = 6$: des plans parallèles découpent sur deux droites des segments proportionnels. On s'y ramène par une parallèle auxiliaire et deux fois la propriété 12.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → 9 est la longueur FG, qui correspond à BC : on demande EF, qui correspond à AB.

`22.5` → Le rapport n'est pas $\frac{BC}{AB} : \frac{EF}{EG} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{10}$, et $[EF]$ est plus court que $[EG]$.

EXERCICE 69 · BASE

Le plan des trois milieux

Dans le tétraèdre $ABCD$, I, J et K sont les milieux de $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$. Les plans (IJK) et (ABC) sont-ils parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : c'est oui · vrai · parallèles · ils sont parallèles · ils le sont · parallèle · ils sont parallèle · strictement parallèles · ils sont strictement parallèles · oui parallèles · oui ils sont parallèles · oui ils le sont · oui parallèle · oui ils sont parallèle · oui strictement parallèles · oui ils sont strictement parallèles · oui, parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, ils le sont · oui, parallèle · oui, ils sont parallèle · oui, strictement parallèles · oui, ils sont strictement parallèles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle DAB, que dire de la droite (IJ) ? Et dans le triangle DBC, de la droite (JK) ?
2. Relis la propriété 10 : deux droites sécantes de l'un parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

CORRECTION

Les milieux — Dans les triangles DAB et DBC :

(IJ) est parallèle à (AB) ; (JK) est parallèle à (BC)

Propriété 10 — (IJ) et (JK) sont sécantes en J, (AB) et (BC) sécantes en B.

(IJK) est parallèle à (ABC)

Oui : les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles (propriété 10).

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / c'est non / faux / pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / ne sont pas parallèles / ils ne le sont pas / pas parallèle / sécants / ils sont sécants / ils se coupent / non pas parallèles / non ils ne sont pas parallèles / non ne sont pas parallèles / non ils ne le sont pas / non pas parallèle / non sécants / non ils sont sécants / non ils se coupent / non, pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / non, ne sont pas parallèles / non, ils ne le sont pas / non, pas parallèle / non, sécants / non, ils sont sécants / non, ils se coupent` → (IJ) et (JK), sécantes, sont parallèles à (AB) et (BC), sécantes : d'après la propriété 10, les plans sont parallèles.

EXERCICE 70 · BASE

Combien de droites faut-il ?

Pour démontrer avec la propriété 10 que deux plans sont parallèles, combien de droites sécantes de l'un des plans faut-il trouver, chacune parallèle à une droite de l'autre plan ?

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis l'énoncé de la propriété 10.
2. Pense aux deux pans d'un toit : ils contiennent deux droites parallèles, et pourtant ils se coupent.

CORRECTION

Propriété 10 — Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan P', alors P et P' sont parallèles.

Pourquoi pas une — Une seule droite ne suffit pas : les deux pans d'un toit contiennent deux bords parallèles et se coupent.

2

Il faut 2 droites sécantes de l'un des plans, parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Une seule direction commune ne suffit pas : deux plans qui contiennent deux droites parallèles peuvent se couper (théorème du toit).

3 → Deux droites sécantes suffisent : elles déterminent le plan.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

Deux plans diagonaux du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), les plans (BDE) et (CFH) sont-ils parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : c'est oui · vrai · parallèles · ils sont parallèles · ils le sont · parallèle · ils sont parallèle · strictement parallèles · ils sont strictement parallèles · oui parallèles · oui ils sont parallèles · oui ils le sont · oui parallèle · oui ils sont parallèle · oui strictement parallèles · oui ils sont strictement parallèles · oui, parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, ils le sont · oui, parallèle · oui, ils sont parallèle · oui, strictement parallèles · oui, ils sont strictement parallèles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche dans le plan (BDE) deux droites sécantes, et dans le plan (CFH) deux droites qui leur sont parallèles.
2. Regarde le quadrilatère $BDHF$, puis le quadrilatère $CDEF$: ce sont des parallélogrammes.

CORRECTION

BDHF — $[BF]$ et $[DH]$ sont parallèles et de même longueur : $BDHF$ est un parallélogramme.

(BD) est parallèle à (FH)

CDEF — $[DC]$ et $[EF]$ sont parallèles et de même longueur : $CDEF$ est un parallélogramme.

(DE) est parallèle à (CF)

Propriété 10 — (BD) et (DE) sont sécantes en D, (FH) et (CF) sécantes en F.
(BDE) est parallèle à (CFH)

Oui : les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles. On a trouvé chaque parallèle grâce à un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / c'est non / faux / pas parallèles / ils ne sont pas parallèles / ne sont pas parallèles / ils ne le sont pas / pas parallèle / sécants / ils sont sécants / ils se coupent / non pas parallèles / non ils ne sont pas parallèles / non ne sont pas parallèles / non ils ne le sont pas / non pas parallèle / non sécants / non ils sont sécants / non ils se coupent / non, pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / non, ne sont pas parallèles / non, ils ne le sont pas / non, pas parallèle / non, sécants / non, ils sont sécants / non, ils se coupent` → (BD) est parallèle à (FH) et (DE) à (CF) : deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

EXERCICE 72 · PRATIQUE

Chercher la parallèle dans l'autre plan

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), laquelle des droites (FH), (FC) et (CH) du plan (CFH) est parallèle à la droite (BD) ?

Écris le nom de la droite, par exemple (AB).

Réponse attendue : `(FH)` — aussi acceptées : FH · la droite (FH) · la droite FH · droite (FH) · droite FH · c'est (FH) · c'est la droite (FH) · (HF) · HF · la droite (HF) · la droite HF · droite (HF) · droite HF · c'est (HF) · c'est la droite (HF)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un parallélogramme qui a $[BD]$ pour côté.
2. $[BF]$ et $[DH]$ sont deux arêtes parallèles et de même longueur.

CORRECTION

Un parallélogramme — $[BF]$ et $[DH]$ sont parallèles et de même longueur.
$BDHF$ est un parallélogramme

Les côtés opposés —
(FH) est parallèle à (BD)

C'est (FH) : la diagonale de la face du dessus est parallèle à la diagonale (BD) de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(FC) / FC / (CF) / CF / la droite (FC)` → (FC) est parallèle à (ED), dans le parallélogramme $CDEF$: elle n'est pas parallèle à (BD).

`(CH) / CH / (HC) / HC / la droite (CH)` → (CH) est parallèle à (BE), dans le parallélogramme $BCHE$: elle n'est pas parallèle à (BD).

EXERCICE 73 · RAISONNEMENT

Des rapports différents

Dans le tétraèdre $ABCD$, I est le point de $[DA]$ tel que DI soit égal au tiers de DA, J le point de $[DB]$ tel que DJ soit égal au tiers de DB, et K le point de $[DC]$ tel que DK soit égal à la moitié de DC. Les plans (IJK) et (ABC) sont-ils parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : c'est non · faux · pas parallèles · ils ne sont pas parallèles · ne sont pas parallèles · ils ne le sont pas · pas parallèle · sécants · ils sont sécants · ils se coupent · non pas parallèles · non ils ne sont pas parallèles · non ne sont pas parallèles · non ils ne le sont pas · non pas parallèle · non sécants · non ils sont sécants · non ils se coupent · non, pas parallèles · non, ils ne sont pas parallèles · non, ne sont pas parallèles · non, ils ne le sont pas · non, pas parallèle · non, sécants · non, ils sont sécants · non, ils se coupent

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (IJ) est parallèle à (AB) d'après la réciproque du théorème de Thalès. Mais regarde aussi le triangle DAC.
2. Si les plans étaient parallèles, le plan (DAC) les couperait suivant deux droites parallèles : (IK) et (AC). Que dirait alors Thalès ?

CORRECTION

Par l'absurde — Si (IJK) et (ABC) étaient parallèles, le plan (DAC) les couperait suivant (IK) et (AC), parallèles (propriété 12).

Thalès — Dans le triangle DAC, on aurait alors $\frac{DI}{DA} = \frac{DK}{DC}$.

$$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

Conclusion —

(IJK) n'est pas parallèle à (ABC)

Non : (IK) n'est pas parallèle à (AC), donc les plans ne sont pas parallèles. Une seule paire de droites parallèles ne suffit pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / c'est oui / vrai / parallèles / ils sont parallèles / ils le sont / parallèle / ils sont parallèle / strictement parallèles / ils sont strictement parallèles / oui parallèles / oui ils sont parallèles / oui ils le sont / oui parallèle / oui ils sont parallèle / oui strictement parallèles / oui ils sont strictement parallèles / oui, parallèles / oui, ils sont parallèles / oui, ils le sont / oui, parallèle / oui, ils sont parallèle / oui, strictement parallèles / oui, ils sont strictement parallèles` → (IJ) est bien parallèle à (AB), mais il faudrait une deuxième paire : (IK) n'est pas parallèle à (AC), car $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

Placer le troisième point

Dans le tétraèdre $ABCD$, on donne $DA = 5$, $DB = 7{,}5$ et $DC = 10$. I est le point de $[DA]$ tel que $DI = 2$, J le point de $[DB]$ tel que $DJ = 3$, et K un point de $[DC]$. Calculer DK pour que les plans (IJK) et (ABC) soient parallèles.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si les plans sont parallèles, la propriété 12 donne (IK) parallèle à (AC).
2. Calcule $\dfrac{DI}{DA}$: le même rapport doit valoir pour K sur $[DC]$.

CORRECTION

Condition nécessaire — Si les plans sont parallèles, le plan (DAC) les coupe suivant (IK) et (AC), parallèles ; Thalès dans le triangle DAC :

$$\frac{DK}{DC} = \frac{DI}{DA} = \frac{2}{5} \quad \text{donc} \quad DK = 4$$

Elle suffit — Avec $DK = 4$: $\dfrac{DJ}{DB} = \dfrac{3}{7{,}5} = \dfrac{2}{5}$ aussi. Par la réciproque de Thalès, (IJ) est parallèle à (AB) et (IK) à (AC) : la propriété 10 conclut.

$DK = 4$

$DK = 4$: les trois points doivent partager le même rapport $\dfrac{2}{5}$ à partir du sommet D.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est la longueur CK : le rapport $\dfrac{2}{5}$ se lit à partir de D, donc $DK = \dfrac{2}{5} \times 10$.

5 → Le milieu de $[DC]$ ne convient pas : $\dfrac{1}{2}$ n'est pas le rapport $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{2}{5}$.

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT

Le petit triangle du coin

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 4 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), I, J et K sont les milieux de $[EF]$, $[EH]$ et $[EA]$. Le plan (IJK) est parallèle au plan (AFH). Calculer le périmètre du triangle IJK, en valeur exacte.

Écris la valeur exacte, par exemple 5*sqrt(3).

Réponse attendue : `6*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle EFH, (IJ) joint les milieux de deux côtés : compare IJ et FH.
2. FH est une diagonale de la face $EFGH$, un carré de côté 4. Les trois côtés de IJK se calculent de la même façon.
   $FH^2 = EF^2 + EH^2$

CORRECTION

Un côté — Dans le triangle EFH, I et J sont les milieux de $[EF]$ et $[EH]$.

$$IJ = \frac{1}{2}FH = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Les trois côtés — De même, $JK = \frac{1}{2}HA$ et $KI = \frac{1}{2}AF$: HA et AF sont aussi des diagonales de faces.

$$IJ = JK = KI = 2\sqrt{2}$$

Le périmètre —

$$3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Le périmètre de IJK est $6\sqrt{2}$, soit environ $8{,}49$: la moitié de celui du triangle AFH.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12*sqrt(2)` → $12\sqrt{2}$ est le périmètre du triangle AFH : les côtés de IJK en sont les moitiés.

`6` → $[IJ]$ n'est pas une demi-arête : c'est la moitié d'une diagonale de face, $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2}$.

`8.49` / `8.48` / `8.5` → On attend la valeur exacte : $6\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Le coin coupé du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 4 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), I, J et K sont les milieux de $[EF]$, $[EH]$ et $[EA]$. Les plans (IJK) et (AFH) sont-ils parallèles ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : c'est oui · vrai · parallèles · ils sont parallèles · ils le sont · parallèle · ils sont parallèle · strictement parallèles · ils sont strictement parallèles · oui parallèles · oui ils sont parallèles · oui ils le sont · oui parallèle · oui ils sont parallèle · oui strictement parallèles · oui ils sont strictement parallèles · oui, parallèles · oui, ils sont parallèles · oui, ils le sont · oui, parallèle · oui, ils sont parallèle · oui, strictement parallèles · oui, ils sont strictement parallèles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle EFH, que dire de la droite (IJ) ?
2. Fais de même dans le triangle EHA, puis applique la propriété 10.

CORRECTION

Deux paires — Dans les triangles EFH et EHA :

(IJ) est parallèle à (FH) ; (JK) est parallèle à (HA)

Propriété 10 — (IJ) et (JK) sont sécantes en J, (FH) et (HA) sécantes en H.

(IJK) est parallèle à (AFH)

Oui : les plans (IJK) et (AFH) sont parallèles (propriété 10).

PIÈGES ANTICIPÉS

`non` / `c'est non` / `faux` / `pas parallèles` / `ils ne sont pas parallèles` / `ne sont pas parallèles` / `ils ne le sont pas` / `pas parallèle` / `sécants` / `ils sont sécants` / `ils se coupent` / `non pas parallèles` / `non ils ne sont pas parallèles` / `non ne sont pas parallèles` / `non ils ne le sont pas`

`/ non pas parallèle / non sécants / non ils sont sécants / non ils se coupent / non, pas parallèles / non, ils ne sont pas parallèles / non, ne sont pas parallèles / non, ils ne le sont pas / non, pas parallèle / non, sécants / non, ils sont sécants / non, ils se coupent` → Le théorème des milieux donne (IJ) parallèle à (FH) et (JK) parallèle à (HA) : deux droites sécantes de chaque plan, donc les plans sont parallèles.

EXERCICE 77 · DEFI

L'aire d'une section parallèle

Dans le tétraèdre $ABCD$, le triangle BCD a pour aire 50. I est le point de $[AB]$ tel que AI soit égal aux deux cinquièmes de AB, et le plan passant par I et parallèle au plan (BCD) coupe $[AC]$ en J et $[AD]$ en K. Calculer l'aire du triangle IJK.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La propriété 12 donne (IJ) parallèle à (BC), (JK) parallèle à (CD) et (IK) parallèle à (BD). Avec Thalès, compare chaque côté de IJK au côté correspondant de BCD.
2. Le tétraèdre est une pyramide de sommet A et de base BCD : sa section par un plan parallèle à la base est une réduction de la base. Par quel nombre une réduction de coefficient k multiplie-t-elle les aires ?

CORRECTION

Propriété 12 — Les plans (ABC), (ACD) et (ABD) coupent les deux plans parallèles suivant des droites parallèles.

$$(IJ) \parallel (BC) \quad ; \quad (JK) \parallel (CD) \quad ; \quad (IK) \parallel (BD)$$

Une réduction — Par Thalès, $\dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{2}{5}$: les côtés de IJK valent les $\dfrac{2}{5}$ de ceux de BCD. Le triangle IJK est une réduction de BCD de coefficient $\dfrac{2}{5}$.

L'aire — Une réduction de coefficient k multiplie les aires par k^2.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 50 = \frac{4}{25} \times 50 = 8$$

L'aire de IJK est 8 : les longueurs sont multipliées par $\dfrac{2}{5}$, les aires par $\dfrac{4}{25}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20` → Les longueurs sont multipliées par $\dfrac{2}{5}$, mais les aires par $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$.

`30 / 18` → Le rapport se lit à partir du sommet A : il vaut $\dfrac{2}{5}$, pas $\dfrac{3}{5}$.

EXERCICE 78 · BASE

Un seul plan parallèle

Soit P un plan et A un point qui n'appartient pas à P. Combien de plans passent par A et sont parallèles à P ?

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la propriété 11.
2. Deux plans parallèles à P passant tous les deux par A seraient parallèles entre eux et auraient un point commun.

CORRECTION

Propriété 11 — Par un point donné passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.

1

Il passe par A un seul plan parallèle à P (propriété 11).

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Il en existe un : par exemple, le plan défini par deux droites sécantes passant par A et parallèles à deux droites sécantes de P.

`2` → Deux plans parallèles à P sont parallèles entre eux ; s'ils passent tous les deux par A, ils sont confondus.

EXERCICE 79 · PRATIQUE

Deux droites issues d'un même point

Deux plans parallèles P et Q sont coupés par deux droites sécantes en un point O situé hors de ces plans. La première coupe P en A et Q en B, la seconde coupe P en C et Q en D, avec A entre O et B, et C entre O et D. On donne $OA = 3$, $OB = 7{,}5$ et $AC = 4$. Calculer BD.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan défini par les deux droites sécantes coupe P suivant (AC) et Q suivant (BD) : propriété 12.
2. (AC) et (BD) sont parallèles : applique le théorème de Thalès dans le triangle OBD.
$$\frac{BD}{AC} = \frac{OB}{OA}$$

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (OAC) coupe les plans parallèles P et Q suivant (AC) et (BD).

(AC) est parallèle à (BD)

Thalès — Dans le triangle OBD :

$$\frac{BD}{AC} = \frac{OB}{OA} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5$$

Le calcul —

$BD = 2{,}5 \times 4 = 10$

$BD = 10$: la propriété 12 ramène le problème à un théorème de Thalès dans le plan des deux droites.

PIÈGES ANTICIPÉS

1.6 → $[BD]$ est plus loin de O que $[AC]$: il est plus long. On multiplie AC par $\dfrac{OB}{OA}$.

8.5 → Les longueurs ne s'ajoutent pas : elles sont proportionnelles. $BD = AC \times \dfrac{OB}{OA}$.

EXERCICE 80 · RAISONNEMENT

Le point entre les deux plans

Deux plans parallèles P et Q sont coupés par deux droites sécantes en un point O situé entre ces plans. La première coupe P en A et Q en B, la seconde coupe P en C et Q en D. On donne $OA = 2$, $OB = 5$ et $BD = 7$. Calculer AC.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `2.8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (OAC) coupe P et Q suivant (AC) et (BD) : ces droites sont parallèles.
2. La configuration de Thalès est « papillon » : A et B sont de part et d'autre de O.

$$\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB}$$

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (OAC) contient aussi B et D : il coupe P suivant (AC) et Q suivant (BD).

(AC) est parallèle à (BD)

Thalès — Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O :

$$\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{5}$$

Le calcul —

$$AC = \frac{2}{5} \times 7 = 2{,}8$$

$AC = 2{,}8$: même quand O est entre les plans, la propriété 12 donne deux droites parallèles et Thalès s'applique en papillon.

PIÈGES ANTICIPÉS

17.5 → A est plus près de O que B : $[AC]$ est plus court que $[BD]$. On multiplie BD par $\dfrac{OA}{OB}$.

2 → Le rapport de Thalès compare OA et OB, pas OA et $AB = 7$.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Une section à mi-hauteur

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), la face $ABCD$ a pour aire 15. Le plan passant par le milieu I de $[AE]$ et parallèle au plan (ABC) coupe $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ en J, K et L. Calculer l'aire du parallélogramme $IJKL$.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ABF) coupe les deux plans parallèles suivant (AB) et (IJ) : quelle est la nature de $ABJI$?
2. De même, $BCKJ$ et $ACKI$ sont des parallélogrammes : compare les côtés du triangle IJK à ceux du triangle ABC.

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (ABF) coupe les plans parallèles suivant (AB) et (IJ), et (AI) est parallèle à (BJ) : $ABJI$ est un parallélogramme.

$$IJ = AB$$

Des triangles isométriques — De même, $BCKJ$ et $ACKI$ sont des parallélogrammes : $JK = BC$ et $IK = AC$. Les triangles IJK et ABC ont leurs trois côtés égaux : ils sont isométriques, et de même IKL et ACD.

L'aire — Deux triangles isométriques ont la même aire : $IJKL$ a la même aire que $ABCD$.

$$15$$

L'aire de $IJKL$ est 15, comme celle de la base : la section d'un parallélépipède par un plan parallèle à une face est isométrique à cette face.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7.5` → I est au milieu de $[AE]$, mais les côtés de la section ne sont pas divisés par 2 : $IJ = AB$, car $ABJI$ est un parallélogramme.

`3.75` → Dans une pyramide les côtés rétréciraient ; ici les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont parallèles, et $IJKL$ a les mêmes côtés que $ABCD$.

EXERCICE 82 · DEFI

Le côté du haut de la section

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), M est le point de $[FG]$ tel que $FM = 2$, et le plan (ACM) coupe l'arête $[EF]$ en N. Calculer MN, en valeur exacte.

Écris la valeur exacte, par exemple 5*sqrt(3).

Réponse attendue : `2*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ACM) coupe les plans parallèles (ABC) et (EFG) suivant (AC) et (MN) : propriété 12.
2. (AC) est parallèle à (EG), donc (MN) aussi : applique Thalès dans le triangle FGE, à partir de F.

$$\frac{MN}{GE} = \frac{FM}{FG}$$

CORRECTION

Propriété 12 — Le plan (ACM) coupe le plan (ABC) suivant (AC) et le plan parallèle (EFG) suivant (MN). Or $AEGC$ est un parallélogramme.

(MN) est parallèle à (EG)

Thalès — Dans le triangle FGE :

$$\frac{MN}{GE} = \frac{FM}{FG} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Le calcul — GE est une diagonale de la face $EFGH$.

$$MN = \frac{1}{4} \times 8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$MN = 2\sqrt{2}$, soit environ $2{,}83$: le côté de la section dans la face du dessus est parallèle à (AC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 est la longueur FM : $[MN]$ est l'hypoténuse du triangle FMN, rectangle et isocèle en F.

`8*sqrt(2)` → $8\sqrt{2}$ est la longueur AC : $[MN]$ n'en est que le quart.

`6*sqrt(2)` → Le rapport de Thalès se lit à partir de F, le sommet du triangle FGE où se trouvent M et N : il vaut $\frac{2}{8}$.

`2.83` / `2.82` / `2.8` → On attend la valeur exacte : $2\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 83 · DEFI

Le périmètre de la section trapèze

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), M est le point de $[FG]$ tel que $FM = 2$, et le plan (ACM) coupe l'arête $[EF]$ en N. La section du cube par le plan (ACM) est le trapèze $ACMN$. Calculer son périmètre, en valeur exacte.

Écris la valeur exacte, par exemple `4+2*sqrt(3)`.

Réponse attendue : `20+10*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ACM) coupe le plan (EFG) suivant une parallèle à (AC) : commence par placer N sur $[EF]$ et calculer FN.
2. AN se calcule dans la face $ABFE$, dans le triangle AEN rectangle en E ; CM dans la face $BCGF$.
   $AN^2 = AE^2 + EN^2$

CORRECTION

Les bases — Comme (MN) est parallèle à (EG) et $FM = 2$, Thalès dans le triangle FGE donne $FN = 2$ et $MN = 2\sqrt{2}$.

$AC = 8\sqrt{2}$; $MN = 2\sqrt{2}$

Les côtés obliques — $EN = 8 - 2 = 6$ et $GM = 6$.

$AN = CM = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

Le périmètre —

$8\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 10 + 10 = 20 + 10\sqrt{2}$

Le périmètre de $ACMN$ est $20 + 10\sqrt{2}$, soit environ $34{,}14$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20+8*sqrt(2)` → Il manque le petit côté $[MN]$, de longueur $2\sqrt{2}$.

`34.14 / 34.1 / 34` → On attend la valeur exacte : $20 + 10\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 84 · BASE

La section à mi-hauteur d'un cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 5 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), le plan passant par le milieu de $[AE]$ et parallèle au plan (ABC) coupe le cube suivant un carré. Calculer le périmètre de ce carré.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque face latérale coupe les deux plans parallèles suivant deux droites parallèles (propriété 12).
2. Dans la face $ABFE$, le côté de la section et l'arête $[AB]$ forment un parallélogramme avec deux morceaux d'arêtes verticales : compare leurs longueurs.

CORRECTION

Un côté — Dans la face $ABFE$, le côté de la section est parallèle à $[AB]$ et joint deux points de $[AE]$ et $[BF]$: il forme un parallélogramme avec $[AB]$.

côté $= AB = 5$

Le périmètre —

$4 \times 5 = 20$

Le périmètre est 20 : la section d'un cube par un plan parallèle à une face est un carré de même côté que l'arête.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Le plan passe par un milieu, mais le côté de la section n'est pas divisé par 2 : il est égal à l'arête.

`25` → 25 est l'aire du carré ; on demande son périmètre.

EXERCICE 85 · BASE

La section par un milieu

Dans le tétraèdre $ABCD$, on donne $BC = 6$, $CD = 8$ et $BD = 10$. Le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et parallèle au plan (BCD) coupe $[AC]$ en J et $[AD]$ en K. Calculer le périmètre du triangle IJK.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plan (ABC) coupe les deux plans parallèles suivant (BC) et (IJ) : ces droites sont parallèles, et J est le milieu de $[AC]$.
2. Chaque côté de IJK est un segment de milieux d'une face issue de A.

CORRECTION

Les milieux — D'après la propriété 12 et le théorème des milieux, J et K sont les milieux de $[AC]$ et $[AD]$.

$IJ = 3 \quad ; \quad JK = 4 \quad ; \quad IK = 5$

Le périmètre —

$3 + 4 + 5 = 12$

Le périmètre de IJK est 12, la moitié de celui du triangle BCD.

PIÈGES ANTICIPÉS

24 → 24 est le périmètre du triangle BCD : chaque côté de IJK en est la moitié.

6 → Les longueurs sont divisées par 2, pas par 4 : $IJ = \dfrac{1}{2}BC$.

EXERCICE 86 · PRATIQUE

Le triangle de trois diagonales

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 4 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), la section du cube par le plan (ACH) est le triangle ACH. Calculer son périmètre, en valeur exacte.

Écris la valeur exacte, par exemple 5*sqrt(3).

Réponse attendue : `12*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque côté du triangle ACH est une diagonale d'une face du cube.
2. Une diagonale d'un carré de côté 4 se calcule avec le théorème de Pythagore.
   $AC^2 = AB^2 + BC^2$

CORRECTION

Un côté — $[AC]$ est une diagonale de la face $ABCD$.

$AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

Les trois côtés — $[CH]$ et $[HA]$ sont les diagonales des faces $CDHG$ et $ADHE$: elles ont la même longueur.

$AC = CH = HA = 4\sqrt{2}$

Le périmètre —

$3 \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Le périmètre de la section est $12\sqrt{2}$, soit environ $16{,}97$: un triangle équilatéral dont les côtés sont des diagonales de faces.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12` → Les côtés du triangle ne sont pas des arêtes : ce sont des diagonales de faces, de longueur $4\sqrt{2}$.

`4*sqrt(2)` → $4\sqrt{2}$ est la longueur d'un côté : le triangle en a trois.

`16.97` / `16.9` / `17` → On attend la valeur exacte : $12\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 87 · RAISONNEMENT

Une section à cinq côtés ?

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AD]$. On admet que le plan (IJG) coupe les arêtes $[BF]$ et $[DH]$, et qu'il ne coupe la face $EFGH$ qu'au point G. Combien de côtés la section du cube par le plan (IJG) a-t-elle ?

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La section a un côté sur chaque face que le plan traverse : passe les six faces en revue.
2. Sur la face du dessus, le plan ne laisse qu'un point : il n'y trace aucun côté. Combien de faces restent traversées ?

CORRECTION

Les sommets — Le plan coupe $[AB]$ en I, $[AD]$ en J, $[BF]$ en un point K, $[DH]$ en un point L, et passe par le sommet G.

$I,\ K,\ G,\ L,\ J$

Les côtés — Un côté sur chacune des faces $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ et $ADHE$; aucun sur $EFGH$.

$[IK],\ [KG],\ [GL],\ [LJ],\ [JI]$

La section est le pentagone $IKGLJ$: elle a 5 côtés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Le triangle IJG n'est pas la section : $[IG]$ et $[JG]$ traversent l'intérieur du cube. La section suit les faces.

`6` → Le plan ne coupe la face $EFGH$ qu'au point G : il n'y a pas de côté sur cette face.

`4` → Compte les sommets : I, J, G, et les deux points sur $[BF]$ et $[DH]$.

EXERCICE 88 · DEFI

L'aire du coin coupé

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 9 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), M, N et P sont les points de $[GF]$, $[GH]$ et $[GC]$ tels que $GM = GN = GP = 3$. La section du cube par le plan (MNP) est le triangle MNP. Calculer son aire, en valeur exacte.

Écris la valeur exacte, par exemple `5*sqrt(3)/2`.

Réponse attendue : `9*sqrt(3)/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque côté du triangle est dans une face issue de G : c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côtés 3.
2. Le triangle MNP est équilatéral. Calcule sa hauteur avec le théorème de Pythagore, puis son aire.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

CORRECTION

Le côté — Dans la face $EFGH$, le triangle GMN est rectangle en G.

$MN = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

Équilatéral — De même $NP = PM = 3\sqrt{2}$: le triangle MNP est équilatéral, de hauteur $h = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

L'aire —

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{12}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

L'aire de la section est $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, soit environ $7{,}79$: on calcule le côté dans une face, puis l'aire du triangle équilatéral.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(3)` → L'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur.

`18` → $18 = (3\sqrt{2})^2$ est l'aire d'un carré de côté $3\sqrt{2}$, pas celle du triangle.

`7.79 / 7.8 / 7.7` → On attend la valeur exacte : $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

La section d'un tétraèdre régulier

Toutes les arêtes du tétraèdre $ABCD$ mesurent 10. Le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et parallèle aux droites (BC) et (AD) coupe le tétraèdre suivant un parallélogramme. Calculer son périmètre.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans la face ABC, le côté de la section issu de I est parallèle à (BC) ; dans la face ABD, il est parallèle à (AD).
2. Ces côtés partent du milieu I : le théorème des milieux donne leurs longueurs.

CORRECTION

Dans la face ABC — La parallèle à (BC) passant par le milieu I de $[AB]$ coupe $[AC]$ en son milieu N.

$IN = \frac{1}{2}BC = 5$

Dans la face ABD — La parallèle à (AD) passant par I coupe $[BD]$ en son milieu Q.

$IQ = \frac{1}{2}AD = 5$

Le périmètre —

$2 \times (5 + 5) = 20$

Le périmètre de la section est 20 : ses côtés sont des segments de milieux, chacun égal à la moitié d'une arête.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40` → Les côtés de la section joignent des milieux : ils mesurent la moitié des arêtes, soit 5.

`10` → $5 + 5 = 10$ est la somme de deux côtés consécutifs : le parallélogramme en a quatre.

EXERCICE 90 · PRATIQUE

La section par un plan diagonal

Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), $AB = 6$, $AD = 8$ et $AE = 5$. La section par le plan (ACG) est le parallélogramme $ACGE$. Calculer son périmètre.

Écris un nombre.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AC]$ est une diagonale du rectangle $ABCD$: théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B.
2. $[CG]$ est une arête verticale, de même longueur que $[AE]$.

CORRECTION

La diagonale — Dans le triangle ABC, rectangle en B, avec $BC = AD = 8$:

$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Le périmètre — $ACGE$ a deux côtés de longueur $AC = 10$ et deux côtés de longueur $AE = 5$.

$2 \times (10 + 5) = 30$

Le périmètre de $ACGE$ est 30.

PIÈGES ANTICIPÉS

`38` → AC n'est pas $AB + BC = 14$: c'est l'hypoténuse du triangle ABC, $\sqrt{36 + 64} = 10$.

`15` → $10 + 5$ est la somme de deux côtés consécutifs : le parallélogramme en a quatre.

`50` → 10×5 serait une aire ; on demande le périmètre.

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

La section d'une pyramide à base trapèze

$SABCD$ est une pyramide dont la base est un trapèze $ABCD$ de côtés parallèles $[AB]$ et $[CD]$, avec $AB = 10$, $BC = 4$, $CD = 6$ et $DA = 4$. M est le point de $[SA]$ tel que SM soit égal au tiers de SA. Calculer le périmètre de la section de la pyramide par le plan passant par M et parallèle au plan (ABC).

Écris un nombre.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque face latérale coupe les deux plans parallèles suivant deux droites parallèles (propriété 12) : chaque côté de la section est parallèle à un côté de la base.
2. Avec Thalès à partir du sommet S, de face en face, chaque côté de la section vaut le tiers du côté correspondant de la base.

CORRECTION

Les côtés — Dans la face SAB, Thalès donne $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$, et N est au tiers de $[SB]$; on continue de même dans SBC, SCD et SDA.

Le périmètre — Le périmètre de la base vaut $10 + 4 + 6 + 4 = 24$.

$$\frac{1}{3} \times 24 = 8$$

Le périmètre de la section est 8 : la section est un trapèze dont chaque côté est le tiers du côté correspondant de la base.

PIÈGES ANTICIPÉS

16 → Le rapport se lit à partir du sommet S : $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$, pas $\frac{2}{3}$.

24 → 24 est le périmètre de la base : la section, plus près du sommet, est plus petite.

EXERCICE 92 · DEFI

Le périmètre d'un pentagone

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. On admet que la section du cube par le plan (IJH) est le pentagone $IJKHL$, où K est le point de $[CG]$ tel que $CK = 2$ et L le point de $[AE]$ tel que $AL = 2$. Calculer son périmètre, en valeur exacte.

Écris la valeur exacte, par exemple 3*sqrt(2)+5sqrt(3).

Réponse attendue : `3*sqrt(2)+6*sqrt(13)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque côté du pentagone est dans une face du cube : calcule-le dans un triangle rectangle de cette face.
2. Par exemple, $[KH]$ est dans la face $CDHG$: $GK = 6 - 2 = 4$ et $GH = 6$.
   $KH^2 = GK^2 + GH^2$

CORRECTION

Dans la base — Le triangle IBJ est rectangle en B, avec $IB = BJ = 3$.

$$IJ = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Deux petits côtés — Dans les faces $BCGF$ et $ABFE$: $JC = 3$, $CK = 2$; $AI = 3$, $AL = 2$.

$$JK = LI = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Deux grands côtés — Dans les faces $CDHG$ et $ADHE$: $GK = EL = 4$ et $GH = EH = 6$.

$$KH = HL = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Le périmètre —

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{13} + 4\sqrt{13} = 3\sqrt{2} + 6\sqrt{13}$$

Le périmètre du pentagone est $3\sqrt{2} + 6\sqrt{13}$, soit environ $25{,}88$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(2)+4*sqrt(13)` → $[KH]$ et $[HL]$ ne mesurent pas $\sqrt{13}$: dans la face $CDHG$, $GK = 4$ et $GH = 6$, donc $KH = 2\sqrt{13}$.

`25.88 / 25.87 / 25.9` → On attend la valeur exacte : $3\sqrt{2} + 6\sqrt{13}$, sans arrondir.

EXERCICE 93 · DEFI

Construire un sommet de la section

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 9 (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. La droite (IJ) coupe la droite (AD) en P, et le plan (IJH) coupe l'arête $[AE]$ en L. Calculer AL.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le carré $ABCD$, compare les triangles PAI et JBI pour obtenir AP.
2. P et H sont dans le plan (IJH) et dans le plan (ADH) : leur intersection est la droite (PH), qui coupe $[AE]$ en L. Applique Thalès dans le triangle PDH.
   $$\frac{AL}{DH} = \frac{PA}{PD}$$

CORRECTION

Le point P — Les triangles PAI et JBI sont rectangles en A et B, ont des angles opposés par le sommet en I et $AI = BI = 4{,}5$: ils sont isométriques.

$$AP = BJ = 4{,}5 \quad ; \quad PD = 4{,}5 + 9 = 13{,}5$$

La droite (PH) — P et H sont communs aux plans (IJH) et (ADH) : leur intersection est (PH), et L est le point où (PH) coupe $[AE]$.

Thalès — Dans le triangle PDH, (AL) est parallèle à (DH).

$$AL = DH \times \frac{PA}{PD} = 9 \times \frac{4{,}5}{13{,}5} = 3$$

$AL = 3$: pour trouver un sommet de la section, on prolonge une droite connue jusqu'à une droite d'une autre face, puis on calcule dans cette face.

PIÈGES ANTICIPÉS

4.5 → $4{,}5$ est la longueur AP : L se trouve ensuite par Thalès dans le triangle PDH.

6 → 6 est la longueur EL : on demande AL.

EXERCICE 94 · PRATIQUE

Le nombre de côtés d'une section de tétraèdre

Au plus combien de côtés peut avoir la section d'un tétraèdre par un plan ?

Écris un nombre en chiffres.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La section a au plus un côté sur chaque face du solide.
2. Combien de faces un tétraèdre a-t-il ?

CORRECTION

Un côté par face — Le plan coupe chaque face suivant au plus un segment : la section a au plus autant de côtés que le solide a de faces.

Le tétraèdre — Un tétraèdre a 4 faces, et une section parallèle à deux arêtes opposées est un quadrilatère.

4

Au plus 4 côtés : la section d'un tétraèdre est un triangle ou un quadrilatère.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Une section peut avoir quatre côtés : par exemple la section par un plan parallèle à deux arêtes opposées est un parallélogramme.

5 / 6 → Un cube a six faces, un tétraèdre seulement quatre : la section ne peut pas avoir plus de quatre côtés.

EXERCICE 95 · BASE

Deux côtés d'un rectangle du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), quelle est la position relative des droites (BG) et (AH) : sécantes, strictement parallèles ou non coplanaires ?

Écris : sécantes, strictement parallèles ou non coplanaires.

Réponse attendue : `strictement parallèles` — aussi acceptées : parallèles · parallèle · elles sont parallèles · elles sont strictement parallèles · strictement parallèle · elles sont strictement parallèle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AB]$ et $[HG]$ sont deux arêtes parallèles et de même longueur : quelle est la nature du quadrilatère $ABGH$?

2. Dans ce quadrilatère, $[BG]$ et $[AH]$ sont deux côtés opposés.

CORRECTION

Un parallélogramme — $[AB]$ et $[HG]$ sont parallèles et de même longueur.

$ABGH$ est un parallélogramme

Côtés opposés — (BG) et (AH) sont deux côtés opposés : parallèles, et distinctes.

(BG) et (AH) sont strictement parallèles

(BG) et (AH) sont strictement parallèles : ce sont deux côtés opposés du parallélogramme $ABGH$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non coplanaires / elles sont non coplanaires / non coplanaire` → (BG) et (AH) sont dans deux faces différentes, mais elles sont toutes les deux dans le plan (ABG) : elles sont coplanaires.

`sécantes / elles sont sécantes / elles se coupent` → Dans le parallélogramme $ABGH$, $[BG]$ et $[AH]$ sont des côtés opposés, pas des diagonales.

EXERCICE 96 · BASE

Deux arêtes sans plan commun

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), quelle est la position relative des droites (AB) et (FG) : sécantes, strictement parallèles ou non coplanaires ?

Écris : sécantes, strictement parallèles ou non coplanaires.

Réponse attendue : non `coplanaires` — aussi acceptées : elles sont non coplanaires · non coplanaire · ne sont pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas dans un même plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les droites (AB) et (FG) ont-elles un point commun ?
2. (FG) est parallèle à (BC). Si (AB) était parallèle à (FG), que serait-elle par rapport à (BC) ?

CORRECTION

Aucun point commun — (AB) est dans le plan (ABC), (FG) dans le plan (EFG), et ces plans sont strictement parallèles.

Pas parallèles — (FG) est parallèle à (BC) ; si (AB) était parallèle à (FG), elle serait parallèle à (BC) (propriété 2). Or (AB) et (BC) se coupent en B.

(AB) et (FG) sont non coplanaires

(AB) et (FG) sont non coplanaires : elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`strictement parallèles / parallèles / elles sont parallèles / parallèle` → Pas de point commun ne veut pas dire parallèles : (FG) est parallèle à (BC), qui coupe (AB).

`sécantes / elles sont sécantes / elles se coupent` → (AB) est dans la face du dessous et (FG) dans celle du dessus : elles n'ont aucun point commun.

EXERCICE 97 · PRATIQUE

Deux grandes diagonales

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), quelle est la position relative des droites (AG) et (CE) : sécantes, strictement parallèles ou non coplanaires ?

Écris : sécantes, strictement parallèles ou non coplanaires.

Réponse attendue : `sécantes` — aussi acceptées : elles sont sécantes · sécante · elles se coupent · elles sont sécante

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche un plan qui contient les quatre points A, G, C et E.
2. Dans ce plan, $[AG]$ et $[CE]$ sont les diagonales d'un parallélogramme.

CORRECTION

Un plan — $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur : $ACGE$ est un parallélogramme.

$ACGE$ est un parallélogramme

Ses diagonales — Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, le centre du cube.

(AG) et (CE) sont sécantes

(AG) et (CE) sont sécantes : ce sont les diagonales du parallélogramme $ACGE$, et elles se coupent au centre du cube.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non coplanaires / elles sont non coplanaires / non coplanaire` → Les quatre points A, C, G et E sont dans un même plan : celui du parallélogramme $ACGE$.

`strictement parallèles / parallèles / elles sont parallèles` → Dans $ACGE$, $[AG]$ et $[CE]$ sont les diagonales, pas des côtés opposés.

EXERCICE 98 · BASE

Une diagonale face à une face

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), quelle est la position relative de la droite (DG) et du plan (ABE) : sécants, strictement parallèles, ou droite contenue dans le plan ?

Écris : sécants, strictement parallèles ou contenue.

Réponse attendue : `strictement parallèles` — aussi acceptées : parallèles · parallèle · strictement parallèle · ils sont strictement parallèles · ils sont parallèles · elle est strictement parallèle · elle est parallèle · elle est parallèle au plan · elle est strictement parallèle au plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $[AD]$ et $[FG]$ sont parallèles et de même longueur : quelle est la nature du quadrilatère $ADGF$?
2. La droite (AF) est dans le plan (ABE). Le point D y est-il ?

CORRECTION

Une parallèle — $ADGF$ est un parallélogramme.

(DG) est parallèle à (AF)

Strictement — (AF) est une droite du plan (ABE), donc (DG) est parallèle à ce plan ; et D n'est pas dans le plan (ABE).

$(DG) \cap (ABE) = \varnothing$

(DG) et le plan (ABE) sont strictement parallèles : (DG) est dans la face opposée à $ABFE$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sécants / sécante / ils sont sécants / elle est sécante / elle perce le plan` → (DG) est dans le plan de la face $CDHG$, parallèle au plan (ABE) : elle ne peut pas le percer.

`contenue / elle est contenue / elle est contenue dans le plan` → Le point D n'est pas dans la face $ABFE$: la droite (DG) n'est pas contenue dans le plan (ABE).

EXERCICE 99 · PRATIQUE

Deux plans diagonaux

Dans le cube $ABCDEFGH$ (E, F, G et H au-dessus de A, B, C et D), quelle est la position relative des plans (ACG) et (BDF) : sécants ou parallèles ?

Écris : sécants ou parallèles.

Réponse attendue : `sécants` — aussi acceptées : ils sont sécants · sécant · ils se coupent · ils sont sécant

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche des points communs aux deux plans.
2. Le centre de la face $ABCD$ est sur (AC) et sur (BD). Et le centre de la face $EFGH$?

CORRECTION

Deux points communs — Le centre O de $ABCD$ est sur (AC) et sur (BD) ; le centre O_1 de $EFGH$ est sur (EG) et sur (FH). Or (EG) est dans (ACG) et (FH) dans (BDF).

Distincts — A est dans (ACG) mais pas dans (BDF) : les plans sont distincts, et ils ont deux points communs.

$(ACG) \cap (BDF) = (OO_1)$

Les plans (ACG) et (BDF) sont sécants, suivant la droite qui joint les centres des faces du dessous et du dessus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`parallèles / ils sont parallèles / strictement parallèles / parallèle` → Les deux plans ont des points communs, comme le centre de la face $ABCD$, sans être confondus : ils sont sécants.

`confondus / ils sont confondus` → Le point A est dans le plan (ACG) mais pas dans le plan (BDF) : les plans ne sont pas confondus.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT

Deux droites d'un tétraèdre

Dans le tétraèdre $ABCD$, I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Quelle est la position relative des droites (IJ) et (BC) : sécantes, strictement parallèles ou non coplanaires ?

Écris : sécantes, strictement parallèles ou non coplanaires.

Réponse attendue : `non coplanaires` — aussi acceptées : elles sont non coplanaires · non coplanaire · ne sont pas coplanaires · elles ne sont pas coplanaires · pas coplanaires · elles ne sont pas dans un même plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Suppose qu'un plan contienne (IJ) et (BC) : il contient I et B, donc toute la droite (AB).
2. Il contient aussi C et J, donc toute la droite (CD). Que dire alors des quatre sommets ?

CORRECTION

Par l'absurde — Si un plan contenait (IJ) et (BC), il contiendrait I et B, donc A, puis C et J, donc D.

Impossible — Les quatre sommets d'un tétraèdre ne sont pas coplanaires.

(IJ) et (BC) sont non coplanaires

(IJ) et (BC) sont non coplanaires : un plan qui les contiendrait contiendrait les quatre sommets du tétraèdre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sécantes / elles sont sécantes / elles se coupent` → Deux droites sécantes sont coplanaires ; or un plan contenant (IJ) et (BC) contiendrait A, B, C et D.

`strictement parallèles / parallèles / elles sont parallèles` → Deux droites parallèles sont coplanaires ; or un plan contenant (IJ) et (BC) contiendrait les quatre sommets.

EXERCICE 101 · RAISONNEMENT

Une droite face à la base

Dans le tétraèdre $ABCD$, I est le point de $[AB]$ tel que AI soit égal au tiers de AB, et J le milieu de $[AC]$. Quelle est la position relative de la droite (IJ) et du plan (BCD) : sécants, strictement parallèles, ou droite contenue dans le plan ?

Écris : sécants, strictement parallèles ou contenue.

Réponse attendue : `sécants` — aussi acceptées : ils sont sécants · sécant · sécante · elle est sécante · elle perce le plan · elle est sécante au plan

INDICES, DANS L'ORDRE

1. (IJ) et (BC) sont dans le plan (ABC) : compare $\dfrac{AI}{AB}$ et $\dfrac{AJ}{AC}$.
2. Deux droites coplanaires qui ne sont pas parallèles se coupent : où se trouve leur point commun ?

CORRECTION

Pas parallèles — Dans le triangle ABC, $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{1}{2}$: d'après le théorème de Thalès, (IJ) n'est pas parallèle à (BC).

Un point commun — Coplanaires et non parallèles, (IJ) et (BC) se coupent en un point K, qui est dans le plan (BCD). Et I n'est pas dans ce plan.

$(IJ) \cap (BCD) = \{K\}$

(IJ) et le plan (BCD) sont sécants, en un point de la droite (BC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`strictement parallèles / parallèles / parallèle / strictement parallèle` → Il faudrait (IJ) parallèle à (BC), donc $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$; or $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$.

`contenue / elle est contenue` → I n'est pas dans le plan (BCD) : la droite (IJ) n'y est pas contenue.

EXERCICE 102 · PRATIQUE

Vrai ou faux : non coplanaires

Vrai ou faux ? « Deux droites non coplanaires n'ont aucun point commun. »

Réponds par vrai ou par faux.

Réponse attendue : `vrai` — aussi acceptées : c'est vrai · il est vrai · oui · oui c'est vrai

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux droites qui ont un point commun sont-elles dans un même plan ?
2. Deux droites sécantes déterminent un plan ; deux droites confondues sont dans une infinité de plans.

CORRECTION

La contraposée — Si deux droites ont un point commun, elles sont sécantes ou confondues : dans les deux cas, un plan les contient.

Donc — Deux droites non coplanaires ne peuvent pas avoir de point commun.

Vrai : deux droites qui se coupent sont toujours coplanaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`faux / non / c'est faux` → Deux droites qui ont un point commun sont coplanaires : sécantes, elles définissent un plan. Des droites non coplanaires n'ont donc aucun point commun.

EXERCICE 103 · DEFI

Le domaine balayé par le milieu

$ABCD$ est un tétraèdre avec $AB = 10$ et $CD = 7$. Un point E parcourt le segment $[AB]$ et un point F parcourt le segment $[CD]$; on note G le milieu de $[EF]$. L'ensemble des positions de G est un parallélogramme. Calculer son périmètre.

Écris un nombre.

Réponse attendue : 17

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les sommets du parallélogramme s'obtiennent quand E et F sont aux extrémités de leurs segments : G est alors le milieu de $[AC]$, de $[BC]$, de $[BD]$ ou de $[AD]$.
2. Nomme I, J, K, L les milieux de $[AC]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[AD]$: $[IJ]$ est un segment de milieux du triangle ABC, et $[JK]$ du triangle BCD.

CORRECTION

Les sommets — Pour $(E,F) = (A,C)$, (B,C), (B,D) et (A,D), G est en I, J, K et L, milieux de $[AC]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[AD]$.

Les côtés — Dans les triangles ABC et BCD :

$$IJ = \frac{1}{2}AB = 5 \quad ; \quad JK = \frac{1}{2}CD = 3{,}5$$

Le périmètre —

$$2 \times (5 + 3{,}5) = 17$$

Le périmètre est 17 : G balaie le parallélogramme $IJKL$, dont les côtés valent la moitié de AB et la moitié de CD.

PIÈGES ANTICIPÉS

34 → Les côtés du parallélogramme sont des segments de milieux : ils mesurent la moitié de AB et la moitié de CD.

8.5 → $5 + 3{,}5$ est la somme de deux côtés consécutifs : le parallélogramme en a quatre.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI