– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Problèmes du 1er degré et problèmes du second degré

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro deux : problèmes du premier degré w problèmes du second degré. Bech nt3allmou kifech n7ottou problème en équation, w kifech n7ellouha : el premier degré b la valeur absolue w les racines carrées, w ba3d el second degré b la forme canonique w le discriminant delta.

عسلامة ! الـ chapitre numéro deux : problèmes du premier degré w problèmes du second degré . باش نتعلّمو كيفاش نحطّو problème en équation ، w كيفاش نحلّوها : الـ premier degré بـ la valeur absolue w les racines carrées ، w ba3d الـ second degré بـ la forme canonique w le discriminant delta .

Bonjour ! Le chapitre numéro deux : problèmes du premier degré et problèmes du second degré. Nous allons apprendre à mettre un problème en équation, puis à la résoudre : le premier degré avec la valeur absolue et les racines carrées, puis le second degré avec la forme canonique et le discriminant delta.

Ce chapitre apprend à **mettre un problème en équation**, puis à la résoudre : au premier degré d'abord — avec valeurs absolues, quotients et racines carrées —, puis au **second degré**, avec la forme canonique et le discriminant.

On y avance par problèmes : des aires, des tarifs, une pierre lancée, un astronaute. Tout se résume dans un seul tableau : racines, factorisation et signe de $ax^2 + bx + c$ selon le signe de Δ.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Mettre un problème en équation ou en inéquation, et vérifier que la solution convient

> Mettre un problème en équation ou en inéquation, et vérifier que la solution convient.

> *Mettre un problème en équation ou en inéquation, et vérifier que la solution convient.*

- Résoudre des équations et inéquations avec valeur absolue, quotients ou racines carrées

  > Résoudre des équations et des inéquations avec valeur absolue, quotients ou racines carrées.
  > *Résoudre des équations et des inéquations avec valeur absolue, quotients ou racines carrées.*

- Résoudre une équation du second degré avec Δ, Δ', une racine évidente ou la somme et le produit

  > Résoudre une équation du second degré avec delta, delta prime, une racine évidente ou la somme et le produit.
  > *Résoudre une équation du second degré avec delta, delta prime, une racine évidente ou la somme et le produit.*

- Factoriser $ax^2 + bx + c$ et donner son signe

  > Factoriser a x carré plus b x plus c et donner son signe.
  > *Factoriser a x carré plus b x plus c et donner son signe.*

- Résoudre des inéquations du second degré et des problèmes qui y mènent

  > Résoudre des inéquations du second degré et des problèmes qui y mènent.
  > *Résoudre des inéquations du second degré et des problèmes qui y mènent.*

---

1. MÉTHODE

Mettre un problème en équation

CE QU'IL DIT

Bech n7ellou problème, 3andna quatre étapes : n5tarou l'inconnue w n9oulou chnowa ech-chourout mte3ha, nektbou l'énoncé fi chakl équation, n7ellou l'équation, w fel e5er nthabtou elli la solution tsla7 lel problème. Fi l'exemple du carré w du rectangle, x hiya A M, bin zéro w deux. L'aire du carré x carré, w l'aire du rectangle deux moins x fois trois moins x. Ki ndévelopper, les x carré yemchiw, w yo93ed cinq x égale six : x égale six cinquièmes.

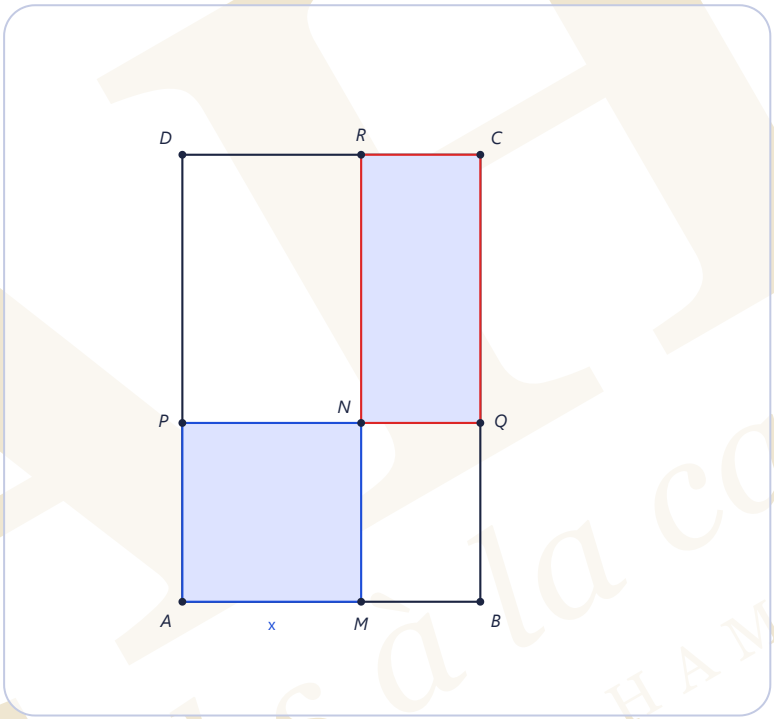
باش نحلّو problème ، عندنا quatre étapes : نختارو l'inconnue w نقولو شنوّة الشروط متاعها ، نكتبو l'énoncé في شكل équation ، نحلّو w ، l'équation في الآخر نثبّتو إلّي la solution تصلح للـ problème . في l'exemple du carré w du rectangle ، x هي A M بين zéro w deux . l'aire du carré x carré ، w l'aire du rectangle deux كي نـ les x carré ، développer ، يمشيو w ، يقعد x égale six : x égale six cinquièmes . moins x fois trois moins x

Pour résoudre un problème, il y a quatre étapes : choisir l'inconnue en disant ses conditions, traduire l'énoncé par une équation, résoudre l'équation, et enfin vérifier que la solution convient au problème. Dans l'exemple du carré et du rectangle, x est A M, entre zéro et deux. L'aire du carré est x carré, celle du rectangle deux moins x fois trois moins x. En développant, les x carré s'en vont, et il reste cinq x égale six : x égale six cinquièmes.

Pour résoudre un problème, on suit toujours le même chemin :

1. **choisir l'inconnue** et dire ce qu'elle représente — avec ses conditions (une longueur est positive, un point est sur un segment…) ;
2. **traduire** l'énoncé par une équation ;
3. **résoudre** l'équation ;
4. **vérifier** que la solution convient au problème, puis conclure par une phrase.

Exemple : « je pense un nombre, je lui retranche 5, je multiplie le résultat par 2, puis j'ajoute 6 et je divise par 5 : j'obtiens 2 ». Si x est le nombre pensé, l'énoncé se traduit par $\dfrac{2(x-5)+6}{5} = 2$, soit $2x - 4 = 10$, d'où $x = 7$.



Le carré MNPA et le rectangle NQCR, ici pour x = 6/5.

Un rectangle ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche, avec AB = 2 et BC = 3. Le point M est sur le côté [AB], à la distance x de A. Le carré MNPA a pour côté x : N est au-dessus de M, P sur [AD]. Le rectangle NQCR a Q sur [BC] et R sur [DC] : ses côtés mesurent 2 − x et 3 − x.

LE NOMBRE PENSÉ

$$\frac{2(x-5)+6}{5} = 2 \iff 2x - 4 = 10 \iff x = 7$$

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 2$ et $BC = 3$. M est un point de $[AB]$; on construit le carré $MNPA$ et le rectangle $NQCR$. Où placer M pour que le carré et le rectangle aient la même aire ?

L'inconnue — On pose $x = AM$: comme M est sur $[AB]$, x est entre 0 et 2.

$0 \leq x \leq 2$

Les deux aires — Le carré a pour côté x ; le rectangle a pour côtés $NQ = 2 - x$ et $QC = 3 - x$.

$\mathcal{A}(MNPA) = x^2 \qquad \mathcal{A}(NQCR) = (2-x)(3-x)$

L'équation — Les deux aires sont égales.

$x^2 = (2-x)(3-x) \iff x^2 = 6 - 5x + x^2$

Résoudre — Les x^2 s'en vont : il reste une équation du premier degré.

$5x = 6 \iff x = \frac{6}{5}$

Vérifier — La solution est bien entre 0 et 2 : elle convient.

$0 \leq \frac{6}{5} \leq 2$

$$AM = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

À ne pas faire : $x^2 = (2-x)(3-x)$ a deux solutions, puisqu'il y a des carrés — En développant, $x^2 = 6 - 5x + x^2$ se réduit à $5x = 6$. On développe et on réduit avant de parler de degré : les x^2 peuvent s'éliminer.

À ne pas faire : Conclure par la solution de l'équation sans regarder le problème — Vérifier que la solution respecte les conditions de l'inconnue. Une longueur négative, ou un point hors du segment, ne répond pas au problème.

---

2. APPLICATION

Comparer deux tarifs

CE QU'IL DIT

L'agence A : trente-six dinars w zéro virgule quatre cent cinquante l koll kilomètre. L'agence B : vingt dinars w zéro virgule six cent cinquante l koll kilomètre. Bech na3rfou chkoun ar5as, n7ellou l'inéquation trente-six plus zéro virgule quarante-cinq x inférieur à vingt plus zéro virgule soixante-cinq x. Ta3tina x supérieur à quatre-vingts. Ya3ni ta7t quatre-vingts kilomètres, B ar5as, w fou9 quatre-vingts, A ar5as.

kilomètre . l'agence B : vingt لكل l'agence A : trente-six dinars w zéro virgule quatre cent cinquante l'inéquation trente- باش نعرفو شكون أرخص ، نحلّو . kilomètre لكل dinars w zéro virgule six cent cinquante x تعطينا . six plus zéro virgule quarante-cinq x inférieur à vingt plus zéro virgule soixante-cinq x أرخص quatre-vingts ، A فوق w ، أرخص quatre-vingts kilomètres ، B تحت يعني . supérieur à quatre-vingts .

Agence A : trente-six dinars plus zéro virgule quatre cent cinquante par kilomètre. Agence B : vingt dinars plus zéro virgule six cent cinquante par kilomètre. Pour savoir laquelle est la moins chère, on résout l'inéquation trente-six plus zéro virgule quarante-cinq x inférieur à vingt plus zéro virgule soixante-cinq x. On obtient x supérieur à quatre-vingts. Donc en dessous de quatre-vingts kilomètres, B est moins chère, et au-delà, c'est A.

Deux agences louent des voitures identiques. Agence A : un forfait de 36 dinars par jour, plus $0{,}450$ dinar par kilomètre. Agence B : un forfait de 20 dinars par jour, plus $0{,}650$ dinar par kilomètre.

Pour x kilomètres dans la journée, les prix sont $p_A = 36 + 0{,}45x$ et $p_B = 20 + 0{,}65x$. Comparer les deux tarifs, c'est résoudre une **inéquation du premier degré** : on étudie le signe de la différence $p_A - p_B$.

LES DEUX TARIFS

$$p_A = 36 + 0{,}45x \qquad p_B = 20 + 0{,}65x$$

EXEMPLE TRAITÉ

Selon le nombre x de kilomètres parcourus dans la journée, quelle agence est la plus avantageuse ?

Deux essais — Pour 50 km, l'agence B coûte moins cher.

$$p_A(50) = 58{,}5 \quad ; \quad p_B(50) = 52{,}5$$

Pour 150 km, c'est l'agence A.

$$p_A(150) = 103{,}5 \quad ; \quad p_B(150) = 117{,}5$$

L'inéquation — On cherche quand A est moins chère.

$$p_A < p_B \iff 36 + 0{,}45x < 20 + 0{,}65x \iff 16 < 0{,}2x$$

On divise par $0{,}2$, qui est positif : le sens ne change pas.

$$16 < 0{,}2x \iff x > 80$$

$$x < 80 : \text{agence B} \quad ; \quad x = 80 : \text{même prix} \quad ; \quad x > 80 : \text{agence A}$$

À ne pas faire : L'agence B est toujours la moins chère, son forfait est plus petit — Au-delà de 80 km, l'agence A devient moins chère. Le prix au kilomètre de B est plus élevé : sur un long trajet, il finit par l'emporter sur le forfait.

3. MÉTHODE

Inéquations du premier degré

CE QU'IL DIT

L'inéquation tet7all kif l'équation, ama b précaution wa7da : ki todhrob walla t9assem ezzouz membres 3la nombre négatif, le sens mta3 l'inégalité yetbaddel. Fi l'exemple du trapèze, l'aire du triangle B M C hiya la parenthèse x moins deux, fois h, le tout sur deux. Ki n7ottouha inférieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze, nal9aw x inférieur ou égal à huit. W 5ater x supérieur à deux, l'ensemble mte3na houwa deux exclu jusqu'à huit inclus.

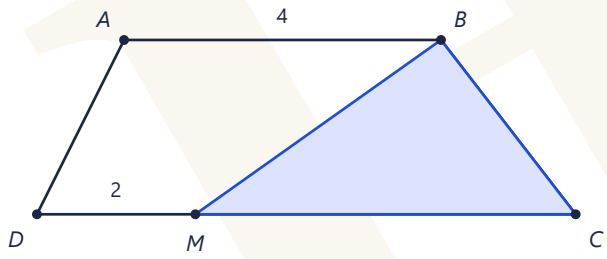
l'inéquation تتحلّ كيف l'équation ، أما بـ précaution وحدة : كي تضرب ولّا تقسم الزوز membres على nombre négatif ، le sens متاع l'inégalité يتبدّل . في triangle B M C l'aire ، l'exemple du trapèze هي la parenthèse x moins deux, fois h, le tout sur deux . كي نحطّوها inférieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze ، w نلقاو x inférieur ou égal à huit . خاطر x supérieur à deux ، l'ensemble متاعنا هو deux exclu . jusqu'à huit inclus

Une inéquation se résout comme une équation, avec une seule précaution : quand on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change. Dans l'exemple du trapèze, l'aire

du triangle B M C vaut la parenthèse x moins deux, fois h, le tout sur deux. En l'écrivant inférieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze, on trouve x inférieur ou égal à huit. Et comme x est supérieur à deux, on obtient l'intervalle de deux exclu à huit inclus.

On résout une inéquation comme une équation, avec **une seule précaution** : multiplier ou diviser les deux membres par un nombre **négatif** change le sens de l'inégalité. Ajouter ou retrancher un même nombre, multiplier ou diviser par un nombre positif, ne le change pas.

Dans un problème, l'inconnue a souvent déjà une condition (ici $x > 2$) : l'ensemble des solutions est la partie commune à cette condition et à la solution de l'inéquation.



Le triangle BMC dans le trapèze ABCD.

Un trapèze ABCD de hauteur h : la grande base [DC] en bas, de longueur x, avec D à gauche et C à droite ; la petite base [AB] en haut, de longueur 4. Le point M est sur [DC], avec DM = 2. Le segment [BM] découpe le triangle BMC, à droite.

ON PEUT AJOUTER

$$a < b \iff a + c < b + c$$

MULTIPLIER

$$k > 0 : \ a < b \iff ka < kb \qquad k < 0 : \ a < b \iff ka > kb$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un trapèze $ABCD$ de hauteur h a pour bases $AB = 4$ et $CD = x$, avec $x > 2$; M est le point de $[CD]$ tel que $DM = 2$. Pour quels x l'aire du triangle BMC est-elle inférieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze ? comprise entre le quart et le tiers ?

Les aires — La base MC vaut $x - 2$, et la hauteur est celle du trapèze.

$$\mathcal{A}(BMC) = \tfrac{(x-2)h}{2} \qquad \mathcal{A}(ABCD) = \tfrac{(4+x)h}{2}$$

La moitié — On multiplie par $\dfrac{4}{h}$, qui est positif.

$$\tfrac{(x-2)h}{2} \leq \tfrac{(4+x)h}{4} \iff 2(x-2) \leq 4 + x$$

Avec $x > 2$: $x \in]2; 8]$.

$$2x - 4 \leq 4 + x \iff x \leq 8$$

Entre le quart et le tiers — Après simplification par $\frac{h}{2}$.

$\frac{4+x}{4} \leq x-2 \leq \frac{4+x}{3}$

On résout les deux inégalités, puis on garde les deux à la fois.

$4+x \leq 4x-8 \iff x \geq 4 \qquad 3x-6 \leq 4+x \iff x \leq 5$

$$x \in]2;8] \quad ; \quad x \in [4;5]$$

À ne pas faire : $-2x < 6 \iff x < -3$ — $-2x < 6 \iff x > -3$. On a divisé par -2, un nombre négatif : le sens de l'inégalité change.

À ne pas faire : Répondre $x \leq 8$ au problème — $x \in]2;8]$. L'énoncé impose $x > 2$: on garde la partie commune.

---

4. PROPRIÉTÉ

Valeur absolue et distance

CE QU'IL DIT

Valeur absolue de x moins a hiya la distance bin M w le point A elli l'abscisse mte3ou a. Valeur absolue de x moins trois égale deux, ya3ni ennou9at elli 3la distance deux men trois : un w cinq. Inférieur ou égal à r, nob9aw 9rib men A : intervalle fermé. Supérieur ou égal à r, nob3dou : l'extérieur. W redd belek, valeur absolue de x plus deux, le centre mte3ha moins deux, mouch deux.

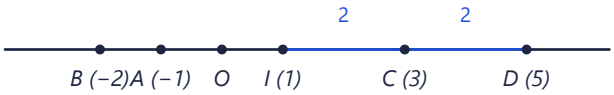
a . valeur absolue de متاعو l'abscisse اللي M w le point A بين la distance هي valeur absolue de x moins a ، trois : un w cinq . inférieur ou égal à r من distance deux على النقاط اللي يعني ، x moins trois égale deux valeur absolue ، رد بالك l'extérieur . w : نبعدو ، A : intervalle fermé . supérieur ou égal à r نبقاو قريب من . deux موش ، moins deux متاعها centre الـ ، de x plus deux

Valeur absolue de x moins a, c'est la distance entre M et le point A d'abscisse a. Valeur absolue de x moins trois égale deux désigne les points à la distance deux de trois : un et cinq. Inférieur ou égal à r, on reste près de A : un intervalle fermé. Supérieur ou égal à r, on s'éloigne : l'extérieur. Et attention, pour valeur absolue de x plus deux, le centre est moins deux, pas deux.

Sur une droite Δ munie d'un repère $(O, \vec{OI})$, si M a pour abscisse x et A pour abscisse a, alors $AM = |x-a|$. Ainsi $|x-3|$ est la distance de M au point d'abscisse 3, et $|x+2| = |x-(-2)|$ la distance de M au point d'abscisse -2.

Pour un réel $r > 0$, cette lecture donne trois résultats :

- $|x-a| = r$: les deux points à la distance r de A ;
- $|x-a| \leq r$: le segment de centre A et de « rayon » r ;
- $|x-a| \geq r$: tout ce qui est à l'extérieur de l'intervalle ouvert $]a-r; a+r[$.



Sur Δ, |x − 3| est la distance de M au point C : |x − 3| = 2 donne x = 1 ou x = 5.

Une droite graduée Δ munie du repère (O, I). On y place B d'abscisse moins 2, A d'abscisse moins 1, O d'abscisse 0, I d'abscisse 1, C d'abscisse 3 et D d'abscisse 5. Les points à la distance 2 de C sont I, d'abscisse 1, et D, d'abscisse 5 : ce sont les solutions de |x − 3| = 2.

DISTANCE

$$AM = |x - a|$$

R > 0

$$|x - a| = r \iff x = a - r \text{ ou } x = a + r$$

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r$$

$$|x - a| \geq r \iff x \leq a - r \text{ ou } x \geq a + r$$

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer les points M de la droite Δ tels que $|x - 3| = 2$, puis ceux tels que $|x + 2| \leq \frac{1}{2}$, puis ceux tels que $|x + 1| \geq 3$.

Une égalité — Les points à la distance 2 du point C d'abscisse 3.

$|x - 3| = 2 \iff x = 1 \text{ ou } x = 5$

Au plus 1/2 — Le centre est le point B d'abscisse -2, le rayon $\frac{1}{2}$.

$|x + 2| \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$

Au moins 3 — Le centre est le point A d'abscisse -1 : on va à 3 de part et d'autre, et on garde l'extérieur.

$|x + 1| \geq 3 \iff x \leq -4 \text{ ou } x \geq 2$

$$\{1; 5\} \quad ; \quad \left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right] \quad ; \quad]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$$

À ne pas faire : $|x + 2|$ est la distance de M au point d'abscisse 2 — $|x + 2| = |x - (-2)|$: la distance au point d'abscisse -2. On écrit toujours $|x - a|$: avec un $+$, le centre est l'opposé.

À ne pas faire : $|x + 1| \geq 3 \iff -4 \leq x \leq 2$ — $|x + 1| \geq 3 \iff x \leq -4$ ou $x \geq 2$. « Au moins 3 » du centre, c'est à l'extérieur, pas entre les deux points.

5. MÉTHODE

Équations et inéquations avec valeur absolue

CE QU'IL DIT

Valeur absolue de A égale k : ken k négatif, ma fammech solution ; w ken le, A égale k walla A égale moins k. Valeur absolue de A égale valeur absolue de B : A w B ya égaux ya opposés, zouz cas. Valeur absolue de A inférieure à k, ya3ni moins k inférieur à A inférieur à k. W valeur absolue de A supérieure à k, A ykoun asghar men moins k walla akbar men k.

valeur absolue de A égale k : كان k négatif ، ما فمّاش solution ؛ w كان لا ، A égale k وﻷّ A égale moins k . valeur absolue de A égale valeur absolue de B : A w B يا égaux يا opposés ، زوز cas . valeur absolue de A inférieure à k ، A يعني ، inférieure à k يكون moins k inférieur à A inférieur à k . w valeur absolue de A supérieure à k ، أصغر من moins k وﻷّ أكبر من k .

Valeur absolue de A égale k : si k est négatif, il n'y a pas de solution ; sinon, A égale k ou A égale moins k. Valeur absolue de A égale valeur absolue de B : A et B sont égaux ou opposés, deux cas. Valeur absolue de A inférieure à k signifie moins k inférieur à A inférieur à k. Et valeur absolue de A supérieure à k, c'est A inférieur à moins k ou A supérieur à k.

Quatre formes reviennent, pour une expression A et un réel k :

- $|A| = k$: pas de solution si $k < 0$; sinon $A = k$ ou $A = -k$;
- $|A| = |B|$: $A = B$ ou $A = -B$ (deux nombres de même valeur absolue sont égaux ou opposés) ;
- $|A| < k$ (avec $k > 0$) : $-k < A < k$;
- $|A| > k$ (avec $k \geq 0$) : $A < -k$ ou $A > k$.

Quand le coefficient de x est négatif, on peut d'abord écrire $|-x+3| = |x-3|$: un nombre et son opposé ont la même valeur absolue.

$$|A| = |B| \iff A = B \text{ ou } A = -B$$

$$|A| < k \iff -k < A < k \qquad (k > 0)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x+3| = 2$, puis $|3-4x| = |x-2\sqrt{5}|$, puis $|-x+3| < 2$.

Une valeur absolue égale à un nombre — $2 > 0$: deux cas.

$2x+3 = 2$ ou $2x+3 = -2 \iff x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{5}{2}$

Deux valeurs absolues égales — Les deux nombres sont égaux…

$3-4x = x-2\sqrt{5} \iff x = \frac{3+2\sqrt{5}}{5}$

… ou opposés.

$3-4x = -x+2\sqrt{5} \iff x = \frac{3-2\sqrt{5}}{3}$

Une inéquation — La distance de x à 3 est inférieure à 2.

$|-x+3| = |x-3| < 2 \iff 1 < x < 5$

$S_1 = \left\{-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right\} \quad ; \quad S_2 = \left\{\frac{3-2\sqrt{5}}{3}; \frac{3+2\sqrt{5}}{5}\right\} \quad ; \quad S_3 =]1;5[$

À ne pas faire : $|2x+1| = -3 \iff 2x+1 = -3$ ou $2x+1 = 3$ — $|2x+1| = -3$ n'a pas de solution. Une valeur absolue est positive ou nulle : elle ne vaut jamais -3.

À ne pas faire : $|A| = |B| \iff A = B$ — $|A| = |B| \iff A = B$ ou $A = -B$. On oublie le cas des nombres opposés, et on perd une solution.

---

6. MÉTHODE

Équations avec des quotients

CE QU'IL DIT

Quotient A sur B ma ykoun défini ken ki B mouch nul. Donc 9bal ma t7ell, ekteb les valeurs interdites. Ba3d, A sur B égale C sur D twalli A fois D égale B fois C : hedha le produit en croix. T7ell, w fel e5er tna77i ay solution hiya valeur interdite.

les valeurs interdites . ba3d ، اكتب ، قُبَلْ ما تحلّ nul . donc موش B كان كي défini ما يكون quotient A sur B
أي الآخر في تنحّي w ، تحلّ . le produit en croix هذا : A fois D égale B fois C تولّي A sur B égale C sur D
. valeur interdite هي solution

Un quotient A sur B n'est défini que si B n'est pas nul. Donc, avant de résoudre, écris les valeurs interdites. Ensuite, A sur B égale C sur D devient A fois D égale B fois C : c'est le produit en croix. On résout, et à la fin on écarte toute solution qui est une valeur interdite.

Un quotient $\frac{A}{B}$ n'est **défini** que si son dénominateur B n'est pas nul. Avant de résoudre, on écrit donc les valeurs **interdites**.

Pour $B \neq 0$ et $D \neq 0$: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff A \times D = B \times C$ (produit en croix). On résout l'équation obtenue, puis on **écarte** toute solution qui est une valeur interdite.

PRODUIT EN CROIX

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC \qquad (B \neq 0,\ D \neq 0)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\frac{x-1}{x+3} = \frac{5}{4}$, puis $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x}{2x+3}$.

Les valeurs interdites — Le premier quotient est défini pour $x + 3 \neq 0$.

$x \neq -3$

Produit en croix — Produit en croix ; $-19 \neq -3$, la solution convient.

$4(x-1) = 5(x+3) \iff 4x - 4 = 5x + 15 \iff x = -19$

Les valeurs interdites — Pour la seconde équation, les deux dénominateurs doivent être non nuls.
$x \neq 1$ et $x \neq -\frac{3}{2}$

Produit en croix — Produit en croix, puis on développe.
$(2x+3)^2 = 4x(x-1) \iff 4x^2 + 12x + 9 = 4x^2 - 4x$

Les $4x^2$ s'en vont ; $-\dfrac{9}{16}$ n'est pas interdit.
$16x = -9 \iff x = -\frac{9}{16}$

$$S_1 = \{-19\} \quad ; \quad S_2 = \left\{-\tfrac{9}{16}\right\}$$

À ne pas faire : Résoudre sans écrire les valeurs interdites — Écrire d'abord $x \neq \ldots$, puis vérifier chaque solution. Une solution qui annule un dénominateur rend l'équation de départ sans sens : elle est à rejeter.

---

7. MÉTHODE

Équations et inéquations avec des racines carrées

CE QU'IL DIT

Racine carrée de A ma tkoun définie ken ki A positif ou nul : nebdew dima bech-chourout. Ba3d, zouz nombres positifs yetrattbou kif les carrés mte3hom : racine de A égale racine de B ma3neha A égale B. W racine de A égale k, m3a k positif, ma3neha A égale k carré. W fel e5er, nchoufou elli la solution t7tarem les conditions.

racine carrée de A ما تكون définie كان كي A positif ou nul : نبدأو ديما بالشروط ، ba3d . زوز nombres
positifs يتّرتّبو كيف les carrés متاعهم : racine de A égale racine de B معناها racine de A égale A égale B . w
. les conditions تحترم la solution نشوفو إلّي في الآخر ، A égale k carré . w معناها ، k positif مع ، k

Racine carrée de A n'est définie que si A est positif ou nul : on commence toujours par ces conditions. Ensuite, deux nombres positifs se rangent comme leurs carrés : racine de A égale racine de B signifie A égale B. Et racine de A égale k, avec k positif, signifie A égale k carré. Enfin, on vérifie que la solution respecte les conditions.

$\sqrt{A}$ n'est **définie** que si $A \geq 0$: on commence par ces conditions.

Pour $A \geq 0$ et $B \geq 0$, deux réels positifs se rangent comme leurs carrés : $\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff A = B$ et $\sqrt{A} \leq \sqrt{B} \iff A \leq B$. Pour un réel $k \geq 0$: $\sqrt{A} = k \iff A = k^2$. Et si $k < 0$, $\sqrt{A} = k$ n'a pas de solution.

$$\sqrt{A} = k \iff A = k^2 \qquad (k \geq 0)$$

$$\sqrt{A} \leq \sqrt{B} \iff A \leq B \qquad (A \geq 0,\ B \geq 0)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x-4}=\sqrt{22-x}$, puis $\sqrt{1-3x}\leq\sqrt{2}$.

Les conditions — Les deux racines doivent être définies.

$x-4\geq 0$ et $22-x\geq 0 \iff 4\leq x\leq 22$

On compare les carrés — 13 est bien entre 4 et 22.

$x-4=22-x \iff 2x=26 \iff x=13$

La condition — La racine est définie.

$1-3x\geq 0 \iff x\leq \frac{1}{3}$

On compare les carrés — On divise par -3 : le sens change.

$1-3x\leq 2 \iff -3x\leq 1 \iff x\geq -\frac{1}{3}$

$$S_1=\{13\} \quad ; \quad S_2=\left[-\tfrac{1}{3};\tfrac{1}{3}\right]$$

À ne pas faire : $\sqrt{3-2x}=5 \iff 3-2x=5-\sqrt{3-2x}=5 \iff 3-2x=25 \iff x=-11$. On élève les deux membres au carré : $5^2=25$.

À ne pas faire : $\sqrt{1-3x}\leq\sqrt{2} \iff x\geq -\frac{1}{3}--\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{3}$. On oublie la condition d'existence $1-3x\geq 0$.

---

8. DÉFINITION

L'équation du second degré

CE QU'IL DIT

A, b w c trois réels, w a différent de zéro. L'équation a x carré plus b x plus c égale zéro nsammiwha équation du second degré. Ech-chart el wa7id houwa a différent de zéro ; b w c ynajmou ykounou zéro. Fi l'exemple du triangle, Pythagore ya3tina six x carré plus dix x égale zéro. Nfactoriser b deux x : x égale zéro walla moins cinq tiers. X positif, donc x égale zéro, w nal9aw le triangle trois, quatre, cinq.

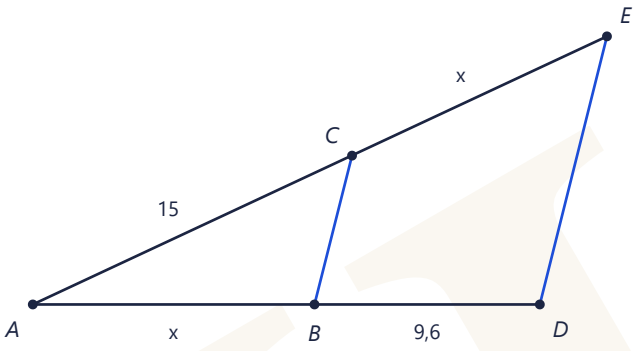
نسمّيوها a ، b w c trois réels ، w a différent de zéro . l'équation a x carré plus b x plus c égale zéro l'exemple في . zéro ينجّمو يكونو b w c ؛ a différent de zéro هو الشرط الوحيد . équation du second degré ولّا deux x : x égale zéro بـ factoriser نـ . six x carré plus dix x égale zéro يعطينا du triangle ، Pythagore . le triangle trois ، quatre ، cinq نلقاو moins cinq tiers . x positif ، donc x égale zéro ، w

Soient a, b et c trois réels, avec a différent de zéro. L'équation a x carré plus b x plus c égale zéro s'appelle une équation du second degré. La seule condition est a différent de zéro ; b et c peuvent être nuls. Dans l'exemple du triangle, Pythagore donne six x carré plus dix x égale zéro. On factorise par deux x : x égale zéro ou moins cinq tiers. Comme x est positif, x égale zéro, et on retrouve le triangle trois, quatre, cinq.

Définition. Soient a, b et c trois réels avec $a\neq 0$. L'équation $ax^2+bx+c=0$ est dite **équation du second degré** d'inconnue x.

Beaucoup de problèmes y mènent. Par exemple, la droite (BC) est parallèle à (DE), avec $AB=x$, $BD=9{,}6$, $AC=15$ et $CE=x$; Thalès donne $\dfrac{x}{x+9{,}6}=\dfrac{15}{15+x}$, soit $x(15+x)=$

$15(x + 9{,}6)$, c'est-à-dire $x^2 = 144$, et $x = 12$ puisque x est une longueur.



(BC) parallèle à (DE), AB = x, BD = 9,6, AC = 15 et CE = x.

Deux demi-droites issues du point A. Sur la première, horizontale, on place B puis D, avec AB = x et BD = 9,6. Sur la seconde, on place C puis E, avec AC = 15 et CE = x. La droite (BC) est parallèle à la droite (DE).

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

EXEMPLE TRAITÉ

ABC est un triangle tel que $AB = x + 3$, $AC = 3x + 4$ et $BC = 2x + 5$, où x est un réel positif. Déterminer x pour que ce triangle soit rectangle en A.

Pythagore — Le triangle est rectangle en A si et seulement si (Pythagore et sa réciproque)…

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$(x + 3)^2 + (3x + 4)^2 = (2x + 5)^2$$

Développer — On développe, puis on regroupe tout dans un membre : une équation du second degré, avec $c = 0$.

$$10x^2 + 30x + 25 = 4x^2 + 20x + 25 \iff 6x^2 + 10x = 0$$

Factoriser — On factorise par $2x$.

$$2x(3x + 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -\tfrac{5}{3}$$

Conclure — x est positif : seule $x = 0$ convient, et l'on retrouve le triangle $3, 4, 5$.

$$x = 0 : \ AB = 3, \ AC = 4, \ BC = 5$$

$$x = 0$$

À ne pas faire : $2x^2 - 3 = 0$ n'est pas du second degré, il manque le terme en x — C'est une équation du second degré, avec $a = 2$, $b = 0$ et $c = -3$. Seul a doit être non nul ; b et c peuvent valoir 0.

À ne pas faire : $6x^2 + 10x = 0 \iff 6x + 10 = 0$ — $6x^2 + 10x = 0 \iff 2x(3x + 5) = 0$. Diviser par x fait perdre la solution $x = 0$: on factorise.

9. VOCABULAIRE

Forme canonique et discriminant

CE QU'IL DIT

Bech nal9aw la forme canonique, n5arrjou a en facteur, w x carré plus b sur a x houwa bidayet carré : x plus b sur deux a, le tout au carré, moins b carré sur quatre a carré. Le réel b carré moins quatre a c nsammiwh le discriminant, w nektbouh delta. La forme canonique : a fois, entre crochets, x plus b sur deux a, le tout au carré, moins delta sur quatre a carré.

باش نلقاو la forme canonique ، نخرّجو a x carré plus b sur a x ، w x carré plus b sur a en facteur هو بداية carré : x plus b sur deux a ، le tout au carré ، moins b carré sur quatre a carré . le réel b carré moins quatre a c نسمّيوه le discriminant ، w نكتبوه delta . la forme canonique : a fois ، entre crochets ، x plus b sur deux a ، le tout au carré ، moins delta sur quatre a carré .

Pour obtenir la forme canonique, on met a en facteur, et x carré plus b sur a x est le début d'un carré : x plus b sur deux a, le tout au carré, moins b carré sur quatre a carré. Le réel b carré moins quatre a c s'appelle le discriminant, et on le note delta. La forme canonique est : a fois, entre crochets, x plus b sur deux a, le tout au carré, moins delta sur quatre a carré.

Pour $a \neq 0$, on met a en facteur puis on reconnaît le début d'un carré : $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$. On obtient

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Vocabulaire. Le réel $b^2 - 4ac$ est noté Δ et appelé le **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. L'écriture ci-dessus est appelée la **forme canonique** de $ax^2 + bx + c$.

FORME CANONIQUE

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}\right]$$

DISCRIMINANT

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

DÉMONSTRATION

$a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right] = ax^2 + bx + c.$

EXEMPLE TRAITÉ

Écrire $-3x^2 + 4x + 7$ et $2x^2 + x + 5$ sous la forme $a\left[(x+p)^2 + q\right]$.

Mettre a en facteur — On met $a = -3$ en facteur.

$-3x^2+4x+7=-3\left[x^2-\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right]$

Le début d'un carré — La moitié de $\frac{4}{3}$ est $\frac{2}{3}$.

$x^2-\frac{4}{3}x=\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}$

$-\frac{4}{9}-\frac{21}{9}=-\frac{25}{9}$.

$-3x^2+4x+7=-3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]$

Le second — Même méthode avec $a=2$: $x^2+\frac{1}{2}x=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$.

$2x^2+x+5=2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{40}{16}\right]=2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right]$

$$-3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right] \quad ; \quad 2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right]$$

À ne pas faire : $x^2-6x=(x-6)^2-36$ — $x^2-6x=(x-3)^2-9$. Dans le carré, on met la MOITIÉ du coefficient de x, et l'on retranche son carré.

À ne pas faire : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times3\times7$ pour $-3x^2+4x+7$ — $\Delta=4^2-4\times(-3)\times7=16+84=100$. On garde le signe de a et de c : ici $a=-3$.

---

10. ACTIVITÉ

La méthode géométrique d'Al-Khawarizmi

CE QU'IL DIT

Al-Khawarizmi ken y7ell x carré plus dix x égale trente-neuf b figure : carré de côté x, w 7dhah zouz rectangles de côtés x w cinq. L'aire mte3hom x carré plus dix x, w hiya zeda l'aire du grand carré de côté x plus cinq, moins le petit carré de côté cinq. Donc x plus cinq, le tout au carré, égale soixante-quatre, w x égale trois. Hedhi hiya la forme canonique, ama ma9rouya 3la figure.

حذاه زوز figure : carré de côté x ، w بـ x carré plus dix x égale trente-neuf كان يحلّ Al-Khawarizmi l'aire du grand carré de côté x زادة هي x carré plus dix x ، w متاعهم rectangles de côtés x w cinq . l'aire plus cinq ، moins le petit carré de côté cinq . donc x plus cinq ، le tout au carré ، égale soixante-quatre ، figure على مقروّة أما ، la forme canonique هي هذي . w x égale trois .

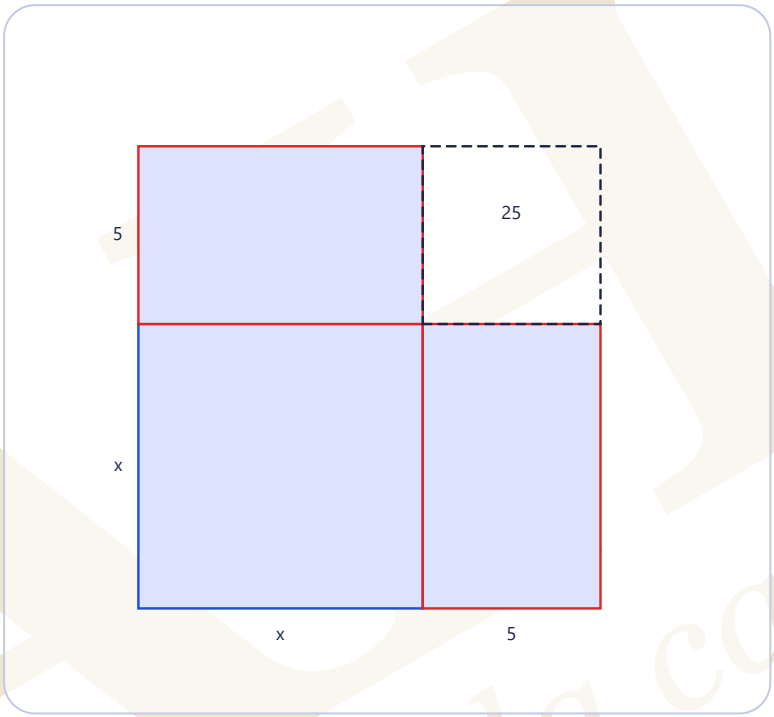
Al-Khawarizmi résolvait x carré plus dix x égale trente-neuf avec une figure : un carré de côté x, bordé de deux rectangles de côtés x et cinq. Leur aire est x carré plus dix x, et c'est aussi l'aire du grand carré de côté x plus cinq, moins le petit carré de côté cinq. Donc x plus cinq, le tout au carré, égale soixante-quatre, et x égale trois. C'est la forme canonique, lue sur une figure.

Le mathématicien Al-Khawarizmi (780-850) résolvait les équations du type $x^2+bx=c$ par une figure. Pour $x^2+10x=39$:

- il considère un carré de côté x, bordé de deux rectangles de côtés x et 5 ;

- il exprime de deux façons l'aire de la partie colorée : d'une part $x^2 + 10x$; d'autre part l'aire du grand carré de côté $x + 5$ moins celle du petit carré de côté 5. D'où $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$;
- il cherche la solution **positive** de $(x + 5)^2 - 25 = 39$: $(x + 5)^2 = 64$, $x + 5 = 8$, $x = 3$.

C'est exactement la forme canonique, lue sur une figure. À son époque, on ne connaissait pas les nombres négatifs : il ne cherchait que les racines positives.



La figure d'Al-Khawarizmi : $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

Un carré de côté x, en bas à gauche, bordé à droite et en haut de deux rectangles de côtés x et 5. Les trois pièces colorées forment le grand carré de côté x + 5, auquel il manque le petit carré de côté 5, en haut à droite, dessiné en pointillés.

LA FIGURE

$$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$$

EXEMPLE TRAITÉ

Utiliser la méthode d'Al-Khawarizmi pour trouver la solution positive de $x^2 + 4x = 5$ et de $x^2 + 20x - 156 = 0$.

Première équation — On borde le carré de côté x de deux rectangles de côtés x et 2.

$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

$x + 2$ est positif.

$(x + 2)^2 - 4 = 5 \iff (x + 2)^2 = 9 \iff x + 2 = 3$

$x = 1$

Seconde équation — Des rectangles de côtés x et 10.

$x^2 + 20x = 156 \iff (x + 10)^2 - 100 = 156 \iff (x + 10)^2 = 256$

$x + 10 = 16 \iff x = 6$

$$x = 1 \quad ; \quad x = 6$$

11. THÉORÈME

Résoudre une équation du second degré

CE QU'IL DIT

Bech n7ellou a x carré plus b x plus c égale zéro, na7sbou delta égale b carré moins quatre a c. Ken delta négatif, ma fammech racine. Ken delta égale zéro, famma racine wa7da : moins b sur deux a. W ken delta positif, famma zouz racines : moins b moins racine de delta, le tout sur deux a, w moins b plus racine de delta, le tout sur deux a. W redd belek : sur deux a, mouch sur deux.

باش نحلّو a x carré plus b x plus c égale zéro ، نحسبو a c delta égale b carré moins quatre . كان delta
négatif ، ما فمّاش racine . كان delta égale zéro ، فمّا racine وحدة : w . a sur deux moins b كان delta positif ،
racines : moins b moins racine de delta ، le tout sur deux a ، w moins b plus racine de delta ، le فمّا زوز
. sur deux موش ، sur deux a : رد بالك tout sur deux a . w

Pour résoudre a x carré plus b x plus c égale zéro, on calcule delta égale b carré moins quatre a c. Si delta est négatif, il n'y a pas de racine. Si delta est nul, il y a une seule racine : moins b sur deux a. Et si delta est positif, il y a deux racines : moins b moins racine de delta, le tout sur deux a, et moins b plus racine de delta, le tout sur deux a. Attention : sur deux a, pas sur deux.

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Grâce à la forme canonique, elle équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$, et tout dépend du signe de Δ :

- si $\Delta < 0$, l'équation **n'a pas de racine** ;
- si $\Delta = 0$, elle a **une seule racine** $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$, elle a **deux racines distinctes** $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque. Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est aussi appelée **racine** de cette équation.

PAS DE RACINE

$\Delta < 0 : \ S = \varnothing$

UNE RACINE

$\Delta = 0 : \ x_0 = -\frac{b}{2a}$

DEUX RACINES

$\Delta > 0 : \; x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

DÉMONSTRATION

Comme $a \neq 0$, $ax^2+bx+c = 0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Si $\Delta < 0$, le second membre est négatif alors qu'un carré est positif ou nul : pas de solution. Si $\Delta = 0$, $x+\frac{b}{2a} = 0$. Si $\Delta > 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, donc $x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x^2+2x-2=0$, $5y^2-3y+1=0$ et $\frac{1}{4}z^2 - z\sqrt{3}+3=0$.

Première équation — Deux racines ; $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-2) = 12 > 0$

$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1-\sqrt{3} \qquad x_2 = -1+\sqrt{3}$

Deuxième équation — Pas de racine.

$\Delta = (-3)^2 - 4\times 5\times 1 = -11 < 0$

Troisième équation — Une seule racine.

$\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4\times\frac{1}{4}\times 3 = 3-3 = 0$

$z_0 = -\frac{-\sqrt{3}}{2\times\frac{1}{4}} = 2\sqrt{3}$

$S_1 = \{-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}\} \quad ; \quad S_2 = \varnothing \quad ; \quad S_3 = \{2\sqrt{3}\}$

À ne pas faire : $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ — $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Le dénominateur est $2a$: on l'oublie dès que $a \neq 1$.

À ne pas faire : $\Delta = b^2 - 4ac = -11$, donc les racines sont $\frac{3\pm\sqrt{-11}}{10}$ — $\Delta < 0$: pas de racine réelle. La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

À ne pas faire : $3t^2 - 2t = 0$: calculer Δ obligatoirement — $t(3t-2) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \frac{2}{3}$. Quand $c = 0$, on factorise directement par t : c'est plus court.

12. APPLICATION

Problèmes : aire d'un rectangle, hauteur d'une pierre

CE QU'IL DIT

La forme canonique tnaf3na bech nal9aw maximum. H de t égale moins un demi fois t moins trois, le tout au carré, plus treize demis. Moins un demi fois carré dima négatif walla nul, donc h de t ma yfoutech treize demis, ya3ni six virgule cinq mètres, w youselha ki t égale trois. W la pierre traja3 lel ardh ki h de t égale zéro : t égale trois plus racine carrée de treize.

maximum . h de t égale moins un demi fois t moins trois ، le tout au تنفعنا باش نلقاو la forme canonique treize ما يفوتش nul ، donc h de t ولّا négatif ديما carré ، plus treize demis . moins un demi fois carré h de t égale كي ترجع للأرض t égale trois . w la pierre كي يوصلها six virgule cinq mètres ، w يعني ، demis . zéro : t égale trois plus racine carrée de treize

La forme canonique sert à trouver un maximum. H de t égale moins un demi fois t moins trois, le tout au carré, plus treize demis. Moins un demi fois un carré est toujours négatif ou nul, donc h de t ne dépasse pas treize demis, soit six virgule cinq mètres, atteint pour t égale trois. Et la pierre retombe au sol quand h de t égale zéro : t égale trois plus racine carrée de treize.

Un rectangle de périmètre 20 cm et de longueur x cm a pour largeur $10 - x$, donc pour aire $a(x) = x(10 - x)$. L'aire vaut 16 cm² si $x^2 - 10x + 16 = 0$: $\Delta = 36$, $x = 2$ ou $x = 8$ — le rectangle de 8 cm sur 2 cm. Peut-il avoir une aire de 30 cm² ? $x^2 - 10x + 30 = 0$ a pour discriminant $100 - 120 = -20 < 0$: non.

La forme canonique sert aussi à trouver un **maximum** : $a\left[(x+p)^2 + q\right]$ avec $a < 0$ est le plus grand quand le carré est nul.

LA PIERRE

$$h(t) = -\tfrac{1}{2}t^2 + 3t + 2 = -\tfrac{1}{2}\left[(t-3)^2 - 13\right]$$

EXEMPLE TRAITÉ

Une pierre lancée vers le haut atteint à l'instant t (en secondes) une hauteur $h(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 3t + 2$ (en mètres). Écrire $h(t)$ sous forme canonique, trouver la hauteur maximale, puis l'instant où la pierre retombe au sol.

Forme canonique — On met $-\dfrac{1}{2}$ en facteur, puis $t^2 - 6t = (t-3)^2 - 9$.

$h(t) = -\tfrac{1}{2}\left[t^2 - 6t - 4\right] = -\tfrac{1}{2}\left[(t-3)^2 - 9 - 4\right]$

On distribue.

$h(t) = -\tfrac{1}{2}(t-3)^2 + \tfrac{13}{2}$

Le maximum — $-\dfrac{1}{2}(t-3)^2$ est négatif ou nul, et nul pour $t = 3$.

$h(t) \leq \tfrac{13}{2} \quad \text{et} \quad h(3) = \tfrac{13}{2}$

Le retour au sol — La pierre est au sol quand $h(t) = 0$.

$h(t) = 0 \iff (t-3)^2 = 13 \iff t = 3 - \sqrt{13} \text{ ou } t = 3 + \sqrt{13}$

Le temps est positif : on garde $3 + \sqrt{13}$.

$t = 3 + \sqrt{13} \approx 6{,}61$

$$h_{\max} = 6{,}5 \text{ m pour } t = 3 \text{ s} \quad ; \quad t = 3 + \sqrt{13} \approx 6{,}61 \text{ s}$$

À ne pas faire : La hauteur maximale est atteinte pour $t = -3$ — Elle est atteinte pour $t = 3$. $(t-3)^2$ s'annule pour $t = 3$: on lit le signe à l'intérieur de la parenthèse.

13. PROPRIÉTÉ

Le discriminant réduit

CE QU'IL DIT

Ki b pair, najjmou nesta3mlou le discriminant réduit : b prime égale b sur deux, w delta prime égale b prime carré moins a c. Delta égale quatre delta prime, donc 3andhom nafs le signe. W ki delta prime positif, les racines houma moins b prime moins racine de delta prime, le tout sur a, w moins b prime plus racine de delta prime, le tout sur a. Sur a, mouch sur deux a.

le discriminant réduit : b prime égale b sur deux ، w delta prime égale b prime نستعملو نجّمو ، b pair كي delta prime positif ، كي le signe . w عندهم نفس carré moins a c . delta égale quatre delta prime ، donc moins b prime moins racine de delta prime ، le tout sur a ، w moins b prime plus racine هوما les racines . sur deux a موش ، de delta prime ، le tout sur a . sur a

Quand b est pair, on peut utiliser le discriminant réduit : b prime égale b sur deux, et delta prime égale b prime carré moins a c. Delta égale quatre delta prime, donc ils ont le même signe. Et quand delta prime est positif, les racines sont moins b prime moins racine de delta prime, le tout sur a, et moins b prime plus racine de delta prime, le tout sur a. Sur a, pas sur deux a.

Quand b est pair, il est parfois commode d'utiliser le **discriminant réduit** $\Delta' = b'^2 - ac$, où $b' = \dfrac{b}{2}$. On a $\Delta = 4\Delta'$, donc Δ' a le même signe que Δ :

- $\Delta' < 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de racine ;
- $\Delta' = 0$: une seule racine $x_0 = -\dfrac{b'}{a}$;
- $\Delta' > 0$: deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.

DISCRIMINANT RÉDUIT

$$b' = \frac{b}{2} \qquad \Delta' = b'^2 - ac \qquad \Delta = 4\Delta'$$

Δ' > 0

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \qquad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

DÉMONSTRATION

Avec $b = 2b'$: $\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'$. Alors $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\Delta'}$ et $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b' \pm 2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre $5x^2 - 16x + 3 = 0$ à l'aide du discriminant réduit.

b prime — $b = -16$ est pair.

$b' = \frac{-16}{2} = -8$

Le discriminant réduit — Deux racines, et $\sqrt{49} = 7$.

$\Delta' = (-8)^2 - 5 \times 3 = 64 - 15 = 49 > 0$

Les racines — $-b' = 8$, et l'on divise par $a = 5$, pas par $2a$.

$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5} \qquad x_2 = \frac{8+7}{5} = 3$

$$S = \left\{\tfrac{1}{5}; 3\right\}$$

À ne pas faire : $x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{2a}$ — $x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$. Avec le discriminant réduit, le 2 s'est simplifié : on divise par a.

À ne pas faire : $\Delta' = b'^2 - 4ac$ — $\Delta' = b'^2 - ac$. Le 4 est déjà pris en compte : le discriminant vaut quatre fois le discriminant réduit.

---

14. PROPRIÉTÉ

Somme et produit des racines

CE QU'IL DIT

Ki l'équation 3andha zouz racines x un w x deux : la somme mte3hom moins b sur a, w le produit mte3hom c sur a. Hedha ynaf3na barcha : ki ta3ref racine wa7da, tal9a el o5ra blech ma te7seb delta. Mathalan deux x carré moins quatre x moins six, trois racine, w le produit moins six sur deux, ya3ni moins trois : donc el o5ra moins un.

كي l'équation عندها زوز racines x un w x deux : la somme متاعهم c متاعهم moins b sur a ، w le produit هذا ينفعنا برشا : كي تعرف racine وحدة ، تلقى الأخرى بلاش ما تحسب delta . مثلا deux x carré moins quatre x moins six ، trois racine ، w le produit moins six sur deux sur a . يعني ، donc moins trois : الأخرى moins un .

Quand l'équation a deux racines x un et x deux : leur somme vaut moins b sur a, et leur produit c sur a. C'est très utile : quand tu connais une racine, tu trouves l'autre sans calculer delta. Par exemple pour deux x carré moins quatre x moins six, trois est racine, et le produit vaut moins six sur deux, soit moins trois : l'autre racine est moins un.

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2, on a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Usage : quand on connaît **une** racine, le produit (ou la somme) donne l'autre **sans calculer** Δ. Par exemple, pour $A(x) = x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3}$, on calcule $A(2) = 4 + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} = 0$; le produit des racines vaut $-2\sqrt{3}$, donc l'autre racine est $-\sqrt{3}$.

SOMME ET PRODUIT

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

DÉMONSTRATION

Avec $x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$: la somme vaut $\dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$; le produit vaut $\dfrac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$. Si $\Delta = 0$, on prend $x_1 = x_2 = x_0$.

EXEMPLE TRAITÉ

Vérifier que x_1 est une racine, puis trouver l'autre. a) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ et $x_1 = 3$; b) $-4x^2 + x\sqrt{3} + 9 = 0$ et $x_1 = \sqrt{3}$.

a) Vérifier — 3 est bien racine.

$2 \times 9 - 4 \times 3 - 6 = 18 - 12 - 6 = 0$

a) L'autre racine — Le produit des racines.

$3 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3 \iff x_2 = -1$

b) Vérifier — $\sqrt{3}$ est bien racine.

$-4 \times 3 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 9 = -12 + 3 + 9 = 0$

b) L'autre racine — On multiplie haut et bas par $\sqrt{3}$: $\dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.

$\sqrt{3} \times x_2 = \frac{9}{-4} \iff x_2 = -\frac{9}{4\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$x_2 = -1 \quad ; \quad x_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

À ne pas faire : $x_1 + x_2 = \dfrac{b}{a}$ — $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$. Le signe moins est dans la formule : pour $x^2 - 5x + 6$, la somme vaut 5.

À ne pas faire : Utiliser $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ pour une équation sans racine — Calculer d'abord Δ, ou connaître une racine. Les formules valent quand les racines existent.

15. REMARQUE

Racines évidentes : a + b + c = 0, a − b + c = 0

CE QU'IL DIT

9bal ma te7seb delta, chouf a plus b plus c : ken zéro, un racine, w el o5ra c sur a. W ken a moins b plus c égale zéro, moins un racine, w el o5ra moins c sur a. Mathalan trois x carré plus cinq x moins huit : trois plus cinq moins huit égale zéro, donc un w moins huit tiers.

قُبَيْلَ ما تحسب delta ، شوف a plus b plus c : كان w ، un racine ، zéro الأخرى w كان c sur a . a moins b plus c
trois x carré plus cinq x moins huit : trois plus مثلا . moins c sur a الأخرى égale zéro ، moins un racine ، w
. cinq moins huit égale zéro ، donc un w moins huit tiers

Avant de calculer delta, regarde a plus b plus c : s'il est nul, un est racine, et l'autre est c sur a. Et si a moins b plus c est nul, moins un est racine, et l'autre est moins c sur a. Par exemple trois x carré plus cinq x moins huit : trois plus cinq moins huit égale zéro, donc un et moins huit tiers.

Deux racines évidentes à repérer avant tout calcul :

- Si $a+b+c=0$, alors 1 est une racine de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et l'autre racine est $\frac{c}{a}$.
- Si $a-b+c=0$, alors -1 est une racine et l'autre racine est $-\frac{c}{a}$.

En effet, $a\times 1^2+b\times 1+c=a+b+c$ et $a\times(-1)^2+b\times(-1)+c=a-b+c$; l'autre racine vient du produit $\frac{c}{a}$.

$$a+b+c=0 :\ x_1=1,\ x_2=\tfrac{c}{a}$$

$$a-b+c=0 :\ x_1=-1,\ x_2=-\tfrac{c}{a}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre $3x^2+5x-8=0$ et $x^2+x\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=0$.

Première équation — Donc 1 est racine.

$a+b+c=3+5-8=0$

$x_1=1 \qquad x_2=\frac{c}{a}=-\frac{8}{3}$

Seconde équation — Donc -1 est racine.

$a-b+c=1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=0$

$x_1=-1 \qquad x_2=-\frac{c}{a}=-(\sqrt{3}-1)=1-\sqrt{3}$

$$S_1=\left\{-\tfrac{8}{3};1\right\} \quad ; \quad S_2=\{-1;1-\sqrt{3}\}$$

À ne pas faire : $a-b+c=0$, donc les racines sont -1 et $\frac{c}{a}$ — Les racines sont -1 et $-\frac{c}{a}$. Le produit vaut $\frac{c}{a}$ et l'une des racines est -1 : l'autre est l'opposé.

16. MÉTHODE

Deux nombres dont on connaît la somme et le produit

CE QU'IL DIT

Bech nal9aw zouz nombres, la somme mte3hom S w le produit mte3hom P, n7ellou X carré moins S X plus P égale zéro : houma les racines mte3ha. Le terrain : périmètre cent vingt-deux, donc L plus l égale soixante et un, w L fois l égale neuf cents. Nal9aw trente-six w vingt-cinq. W ken delta négatif, ezzouz nombres hedhouma ma ywjdouch.

X carré moins S X plus P égale نحلّو ، P متاعهم S w le produit متاعهم nombres ، la somme باش نلقاو زوز terrain : périmètre cent vingt-deux ، donc L plus l égale soixante et un ، الـ . متاعها les racines هوما : zéro هاذوما ما nombres الزوز ، delta négatif كان trente-six w vingt-cinq . w نلقاو . w L fois l égale neuf cents يوجدوش .

Pour trouver deux nombres de somme S et de produit P, on résout X carré moins S X plus P égale zéro : ce sont ses racines. Pour le terrain : périmètre cent vingt-deux, donc L plus l égale soixante et un, et L fois l égale neuf cents. On trouve trente-six et vingt-cinq. Et si delta est négatif, ces deux nombres n'existent pas.

Chercher deux réels u et v tels que $u+v=S$ et $uv=P$ revient à résoudre l'équation

$$X^2-SX+P=0.$$

En effet, si u et v conviennent, $(X-u)(X-v)=X^2-(u+v)X+uv=X^2-SX+P$: u et v en sont les racines. Si $\Delta=S^2-4P<0$, de tels nombres **n'existent pas**.

$$u+v=S,\ uv=P \iff u \text{ et } v \text{ sont les racines de } X^2-SX+P=0$$

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre 122 m et d'aire 900 m². Existe-t-il un rectangle de périmètre 100 m et d'aire 700 m² ?

Somme et produit — Le demi-périmètre est 61.

$L+\ell=61 \qquad L\ell=900$

L'équation — $\sqrt{121}=11$.

$X^2-61X+900=0 \qquad \Delta=3721-3600=121$

Le terrain mesure 36 m sur 25 m.

$X=\frac{61-11}{2}=25 \quad \text{ou} \quad X=\frac{61+11}{2}=36$

Le second rectangle — Somme 50, produit 700 : pas de racine.

$X^2-50X+700=0 \qquad \Delta=2500-2800=-300<0$

$36\text{ m}\times 25\text{ m}$; pas de rectangle de périmètre 100 m et d'aire 700 m²

À ne pas faire : $X^2+SX+P=0$ — $X^2-SX+P=0$. La somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$: le coefficient de X est $-S$.

À ne pas faire : La somme vaut 122 pour un périmètre de 122 m — $L+\ell=61$. Le périmètre est $2(L+\ell)$.

17. MÉTHODE

Équations se ramenant au second degré

CE QU'IL DIT

9bal koll chay, chouf l'équation définie wa9tech : les dénominateurs mouch nuls, w elli ta7t la racine positif. Ba3d nraj3ouha lel second degré. Racine de A égale B, ma3neha A égale B carré, w B positif ; w ken tensa B positif, tjik solutions zeyda. W l'équation bicarrée, n7ottou X égale x carré, w ki nal9aw X, nraj3ou l x.

la racine positif . تحت اللي nuls ، w موش les dénominateurs : وقتاش l'équation définie شوف ، كل شي قُبَلْ
B كان تنسى w ؛ A égale B carré ، w B positif معناها ، second degré . racine de A égale B نرجّعوها للـ ba3d
. x لـ نرجعو ، X نلقاو X égale x carré ، w ki نحطّو ، w l'équation bicarrée . زايدة solutions تجيك ، positif

Avant tout, regarde quand l'équation est définie : dénominateurs non nuls, et ce qui est sous la racine positif. Ensuite on se ramène au second degré. Racine de A égale B signifie A égale B carré, avec B positif ; si tu oublies B positif, des solutions en trop apparaissent. Et pour une équation bicarrée, on pose X égale x carré, et une fois X trouvé, on revient à x.

On commence toujours par chercher **pour quelles valeurs de x** l'équation est définie (dénominateurs non nuls, expression sous une racine positive ou nulle). Puis on se ramène à une équation du second degré :

- avec des **quotients**, on réduit au même dénominateur ;
- avec une **racine carrée**, $\sqrt{A} = B \iff A = B^2$ et $B \geq 0$;
- une équation **bicarrée** $ax^4 + bx^2 + c = 0$ devient $aX^2 + bX + c = 0$ en posant $X = x^2$, avec $X \geq 0$.

À la fin, on garde seulement les solutions qui respectent les conditions.

$$\sqrt{A} = B \iff A = B^2 \text{ et } B \geq 0$$

BICARRÉE

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{X = x^2} aX^2 + bX + c = 0$$

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x + \dfrac{1}{x} + 2 = 0$, $\sqrt{x-2} = x + 1$ et $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

Un quotient — On multiplie par x, non nul.

$x \neq 0 :\ x + \frac{1}{x} + 2 = 0 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0$

$x = -1$

Une racine carrée — Le discriminant vaut $1 - 12 = -11$, il est négatif : pas de solution.

$x \geq 2 :\ x - 2 = (x+1)^2 \iff x^2 + x + 3 = 0$

Une bicarrée — $a + b + c = 3 - 5 + 2 = 0$: $X = 1$ ou $X = \dfrac{2}{3}$, tous deux positifs.

$X = x^2 :\ 3X^2 - 5X + 2 = 0$

$\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

$x^2 = 1 \iff x = \pm 1 \qquad x^2 = \frac{2}{3} \iff x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$S_1 = \{-1\} \quad ; \quad S_2 = \varnothing \quad ; \quad S_3 = \left\{-1; -\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}; 1\right\}$$

À ne pas faire : $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0 \iff x = 1$ ou $x = \dfrac{2}{3}$ — $x^2 = 1$ ou $x^2 = \dfrac{2}{3}$, soit quatre solutions. On a trouvé $X = x^2$: il reste à revenir à x.

À ne pas faire : $\sqrt{2x+6} = x - 1 \iff 2x + 6 = (x-1)^2$ — Il faut aussi $x - 1 \geq 0$. Élever au carré ajoute des solutions : -1 vérifie l'équation au carré, mais pas l'équation de départ.

---

18. PROPRIÉTÉ

Factoriser ax² + bx + c

CE QU'IL DIT

Ki l'équation 3andha zouz racines x un w x deux, a x carré plus b x plus c yetekteb a fois x moins x un fois x moins x deux. Ki delta égale zéro, a fois x moins x zéro, le tout au carré. W ki delta négatif, ma najjmouch nfactoriser. W redd belek ma tensech le a elli l9oddem.

a fois x moins x un fois x يتكتب racines x un w x deux ، a x carré plus b x plus c عندها زوز l'équation كي
ما ، delta négatif كي delta égale zéro ، a fois x moins x zéro ، le tout au carré . w كي . moins x deux
نجّموش نـ w . factoriser رد بالك ما تنساش le a اللي القدّام .

Quand l'équation a deux racines x un et x deux, a x carré plus b x plus c s'écrit a fois x moins x un fois x moins x deux. Quand delta est nul, c'est a fois x moins x zéro, le tout au carré. Et quand delta est négatif, on ne peut pas factoriser. Attention à ne pas oublier le a devant.

Si x_1 et x_2 sont deux racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Selon le signe de Δ (avec $f(x) = ax^2 + bx + c$) :

- $\Delta < 0$: on ne peut pas factoriser $f(x)$;
- $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Δ > 0

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

DÉMONSTRATION

$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] = a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right] = ax^2 + bx + c$, grâce à la somme et au produit des racines.

EXEMPLE TRAITÉ

Factoriser $2x^2 - 14x + 24$, $-9x^2 + 12x - 4$ et $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$.

Premier — Les racines de $x^2 - 7x + 12$ ont pour somme 7 et pour produit 12 : ce sont 3 et 4.
$2x^2 - 14x + 24 = 2(x^2 - 7x + 12)$

$2x^2 - 14x + 24 = 2(x-3)(x-4)$

Deuxième — $b' = 6$: une seule racine.

$\Delta' = 6^2 - (-9) \times (-4) = 36 - 36 = 0 \qquad x_0 = -\frac{6}{-9} = \frac{2}{3}$

$-9x^2 + 12x - 4 = -9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = -(3x-2)^2$

Troisième — Donc 1 est racine, et l'autre vaut $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

$a + b + c = 1 - 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

$x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = (x-1)(x-\sqrt{2})$

$$2(x-3)(x-4) \quad ; \quad -(3x-2)^2 \quad ; \quad (x-1)(x-\sqrt{2})$$

À ne pas faire : $2x^2 - 14x + 24 = (x-3)(x-4)$ — $2x^2 - 14x + 24 = 2(x-3)(x-4)$. On oublie le coefficient a devant les facteurs.

À ne pas faire : $x^2 - x + 3 = (x - x_1)(x - x_2)$ — $\Delta = 1 - 12 < 0$: on ne peut pas factoriser. Sans racine, pas de facteur $(x - x_1)$.

---

19. THÉORÈME

Signe de ax² + bx + c

CE QU'IL DIT

Le signe mta3 a x carré plus b x plus c yet9ra b delta. Ken delta négatif, el trinôme dima b signe de a. Ken delta égale zéro, b signe de a, ella fi x zéro win ywalli zéro. W ken delta positif : b signe de a barra les racines, w b signe de moins a bin les racines. A7fadhha hakka : bin les racines, 3aks a.

كان . signe de a ديما بـ trinôme الـ ، delta négatif كان . delta يتقرا بـ a x carré plus b x plus c متاع le signe
les برّا signe de a بـ : delta positif كان zéro . w وين يولّي x zéro إلّا في ، signe de a بـ ، delta égale zéro
. a عكس ، les racines بين : احفظها هكّا . les racines بين signe de moins a بـ racines ، w

Le signe de a x carré plus b x plus c se lit grâce à delta. Si delta est négatif, le trinôme a toujours le signe de a. Si delta est nul, il a le signe de a, sauf en x zéro où il s'annule. Et si delta est positif : signe de a à l'extérieur des racines, signe de moins a entre les racines. Retiens-le ainsi : entre les racines, le contraire de a.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et Δ son discriminant.

- $\Delta < 0$: pour tout réel x, $f(x)$ est **du signe de a**.
- $\Delta = 0$: pour tout réel $x \neq x_0$, $f(x)$ est du signe de a (et $f(x_0) = 0$).
- $\Delta > 0$: $f(x)$ est du signe de a **à l'extérieur des racines**, et du signe de $(-a)$ **entre les racines**.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

ON LIT LE SIGNE SUR LA FORME CANONIQUE

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

DÉMONSTRATION

Si $\Delta < 0$, le crochet de la forme canonique est une somme d'un carré et d'un nombre strictement positif : il est positif, et $f(x)$ a le signe de a. Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$. Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$: le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ est négatif entre x_1 et x_2, positif à l'extérieur.

EXEMPLE TRAITÉ

Déterminer le signe de $B(x) = x^2 - 5x + 6$, de $C(x) = -2x^2 + x + 1$ et de $P(x) = -2x^2 + x - 1$.

B — Racines 2 et 3 (somme 5, produit 6), et $a = 1 > 0$.

$B(x) = (x - 2)(x - 3)$

Signe de a à l'extérieur, signe contraire entre.

$B(x) > 0$ sur $]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$ $\quad$ $B(x) < 0$ sur $]2; 3[$

C — L'autre racine est $\frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$, et $a = -2 < 0$.

$a + b + c = -2 + 1 + 1 = 0$: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$

Entre les racines, $C(x)$ a le signe de $-a$: positif.

$C(x) > 0$ sur $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$ $\quad$ $C(x) < 0$ ailleurs, hors des racines

P — Pas de racine : $P(x)$ a partout le signe de $a = -2$.

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

$B(x) > 0$ hors de $[2; 3]$, $B(x) < 0$ sur $]2; 3[$; $C(x) > 0$ sur $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$, $C(x) < 0$ hors de $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$; $P(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

À ne pas faire : $\Delta < 0$, donc $f(x) > 0$ — $\Delta < 0$, donc $f(x)$ a le signe de a. Pour $-2x^2 + x - 1$, le discriminant est négatif, et $f(x)$ est toujours négatif, du signe de $a = -2$.

À ne pas faire : $x^2 - 5x + 6$ est négatif à l'extérieur des racines — Il est négatif entre 2 et 3. Entre les racines, c'est le signe de $-a$; à l'extérieur, celui de a.

20. MÉTHODE

Inéquations du second degré

CE QU'IL DIT

Bech t7ell inéquation du second degré : 7ott koll chay fi membre wa7ed, lawwej 3la les racines, w ba3d e9ra le signe. X carré moins cinq x plus six, les racines deux w trois, a positif, donc négatif bin deux w trois. W ki l'inéquation fiha inférieur ou égal, les racines yodkhlou : crochets fermés.

باش تحلّ inéquation du second degré : حطّ كل شي في membre واحد ، لوّج على ba3d w ، les racines اقرا le
deux w trois . بين signe . x carré moins cinq x plus six ، les racines deux w trois ، a positif ، donc négatif

. crochets fermés : يدخلو inférieur ou égal ، les racines فيها l'inéquation كي w

Pour résoudre une inéquation du second degré : mets tout dans un seul membre, cherche les racines, puis lis le signe. Pour x carré moins cinq x plus six, les racines sont deux et trois, a est positif, donc le trinôme est négatif entre deux et trois. Et quand l'inéquation contient inférieur ou égal, les racines sont comprises : crochets fermés.

Pour résoudre une inéquation du second degré :

1. on ramène tout dans un membre : $ax^2+bx+c>0$ (ou $<, \geq, \leq$) ;
2. on cherche les racines (Δ, racine évidente, factorisation) ;
3. on lit le signe dans le tableau du signe de ax^2+bx+c, et on écrit l'ensemble des solutions — en incluant les racines pour $\geq$ ou $\leq$.

Exemple : un rectangle de côtés x et 2, surmonté d'un demi-disque de diamètre x. L'aire du rectangle est plus grande que celle du demi-disque si $2x > \dfrac{\pi x^2}{8}$, soit $x(16-\pi x)>0$: pour $x>0$, cela donne $x < \dfrac{16}{\pi}$.

$\Delta > 0$

$$ax^2+bx+c \text{ du signe de } -a \iff x_1 < x < x_2$$

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x^2-5x+6<0$, $-x^2+4x-3\leq 0$, $4x^2-4x+1\leq 0$ et $3x^2+8x+5<0$.

Premier — Racines 2 et 3, $a>0$: négatif entre les racines.

$x^2-5x+6<0 \iff 2<x<3$

Deuxième — $a+b+c=0$: racines 1 et 3. $a<0$: négatif à l'extérieur, et nul aux racines.

$-x^2+4x-3\leq 0 \iff x\leq 1 \text{ ou } x\geq 3$

Troisième — Un carré n'est jamais négatif : il ne reste que le cas où il est nul.

$4x^2-4x+1=(2x-1)^2\leq 0 \iff x=\frac{1}{2}$

Quatrième — $a-b+c=3-8+5=0$: racines -1 et $-\dfrac{5}{3}$; $a>0$, négatif entre.

$3x^2+8x+5<0 \iff -\frac{5}{3}<x<-1$

$$]2;3[\quad ; \quad]-\infty;1]\cup[3;+\infty[\quad ; \quad \left\{\tfrac{1}{2}\right\} \quad ; \quad \left]-\tfrac{5}{3};-1\right[$$

À ne pas faire : $x^2-5x+6<0 \iff x<2$ ou $x>3$ — $x^2-5x+6<0 \iff 2<x<3$. $a>0$: le trinôme est négatif ENTRE les racines.

À ne pas faire : $4x^2-4x+1\leq 0$ n'a pas de solution — $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Avec $\leq$, la valeur où le carré est nul convient.

À ne pas faire : $-x^2+4x-3\leq 0 \iff x<1$ ou $x>3$ — $x\leq 1$ ou $x\geq 3$. Avec $\leq$, les racines font partie des solutions : crochets fermés.

---

21. MÉTHODE

Signe d'un produit ou d'un quotient

CE QU'IL DIT

Bech tal9a le signe mta3 produit, a3mel tableau de signes : ligne l koll facteur, les racines lkoll mratbin, w ba3d la règle des signes fi koll colonne. W le quotient nafs ech-chay, ama les racines mta3 le dénominateur houma valeurs interdites : dima exclues, double barre fel tableau.

باش تلقى signe متاع produit ، اعمل tableau de signes : ligne لكل les racines ، facteur الكل مرتّبين ، w le quotient في كل ba3d la règle des signes colonne . w نفس الشي ، أما les racines متاع le dénominateur هوما : valeurs interdites ديما ، double barre exclues في الـ tableau .

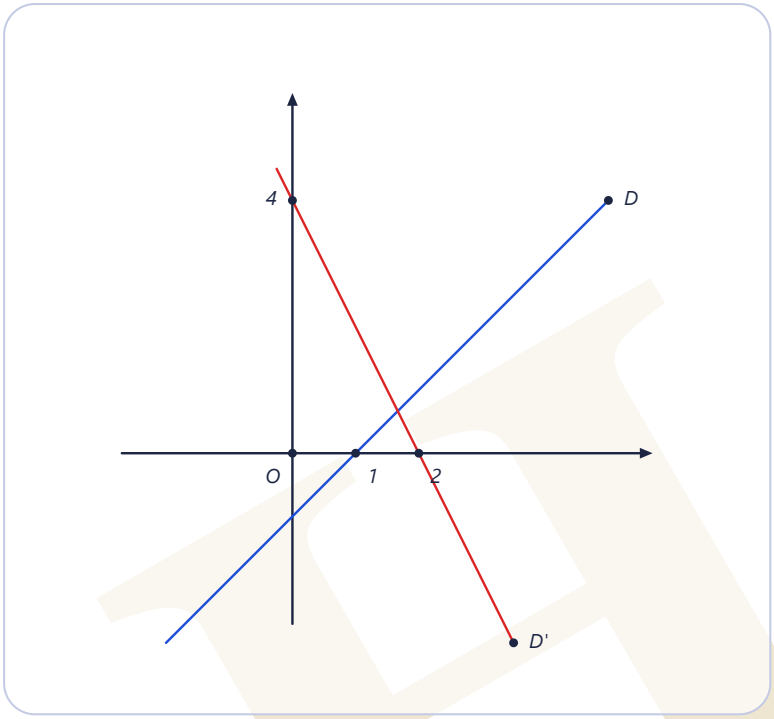
Pour trouver le signe d'un produit, fais un tableau de signes : une ligne par facteur, toutes les racines rangées dans l'ordre, puis la règle des signes dans chaque colonne. Pour un quotient, c'est pareil, mais les racines du dénominateur sont des valeurs interdites : toujours exclues, avec une double barre dans le tableau.

Pour le signe d'un produit de facteurs du premier ou du second degré, on dresse un **tableau de signes** : une ligne par facteur, rangée dans l'ordre de toutes leurs racines, puis la règle des signes dans chaque colonne.

Exemple : $f(x)=x-1$ est positif pour $x>1$ (la droite D est au-dessus de l'axe), $g(x)=-2x+4$ pour $x<2$; le produit $(x-1)(-2x+4)$ est donc positif sur $]1;2[$ et négatif à l'extérieur.

Pour un **quotient**, même tableau, mais les racines du dénominateur sont des **valeurs interdites** : on les exclut toujours (double barre).

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



D est au-dessus de l'axe pour x > 1, D' pour x < 2.

Un repère d'origine O. La droite D, représentation de f(x) = x − 1, monte et coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. La droite D', représentation de g(x) = −2x + 4, descend : elle coupe l'axe des ordonnées en 4 et l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.

$\frac{A}{B}$ a le signe de $A \times B, \quad B \neq 0$

EXEMPLE TRAITÉ

Résoudre $(x-1)(-x^2+2) < 0$. Puis étudier le signe de $Q(x) = \dfrac{-3x^2+2x+1}{x^2-x-2}$.

Les racines — On range : $-\sqrt{2} < 1 < \sqrt{2}$. $-x^2+2$ est positif entre ses racines.

$x-1=0 \iff x=1 \qquad -x^2+2=0 \iff x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{2}$

Le tableau — La règle des signes, colonne par colonne.

$+$ sur $]-\infty;-\sqrt{2}[, \quad -$ sur $]-\sqrt{2};1[, \quad +$ sur $]1;\sqrt{2}[, \quad -$ sur $]\sqrt{2};+\infty[$

$S =]-\sqrt{2};1[\cup]\sqrt{2};+\infty[$

Le quotient — $a+b+c=0$ en haut, $a-b+c=0$ en bas ; -1 et 2 sont interdites.

$-3x^2+2x+1$: $x=-\frac{1}{3}, \ x=1 \qquad x^2-x-2$: $x=-1, \ x=2$

Le numérateur est positif entre $-\dfrac{1}{3}$ et 1, le dénominateur négatif entre -1 et 2.

$Q(x) > 0 \iff x \in \left]-1;-\frac{1}{3}\right[\cup]1;2[$

$S =]-\sqrt{2};1[\cup]\sqrt{2};+\infty[\quad ; \quad Q(x) > 0$ sur $\left]-1;-\frac{1}{3}\right[\cup]1;2[, \quad Q(x) < 0$ sur $]-\infty;-1[\cup \left]-\frac{1}{3};1\right[\cup]2;+\infty[$

À ne pas faire : $\dfrac{A}{B} \geq 0$: on ferme les crochets aux racines de B — Les racines de B sont toujours exclues. Un quotient n'existe pas quand son dénominateur est nul.

À ne pas faire : $(x-1)(-x^2+2)<0 \iff x-1<0$ et $-x^2+2<0$ — On fait le tableau de signes. Un produit est négatif quand ses facteurs sont de signes contraires — dans un sens ou dans l'autre.

22. APPLICATION

Problèmes : aires et astronaute

CE QU'IL DIT

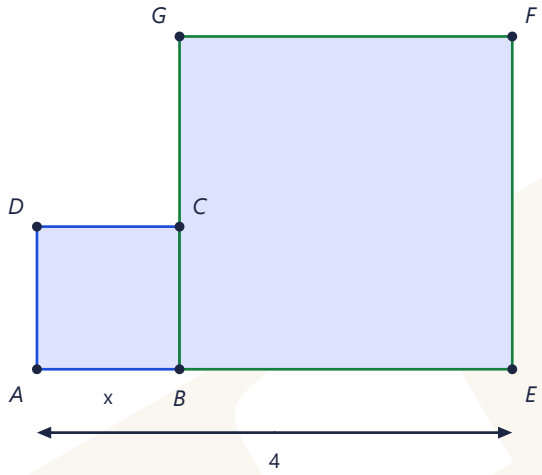
Fel problèmes, l'inéquation mta3 el second degré tji men aire walla poids, w dima 3andha conditions. Fi l'exemple des deux carrés, x carré plus quatre moins x, le tout au carré, supérieur à dix, ta3tina x carré moins quatre x plus trois supérieur à zéro : x asghar men un walla akbar men trois. Ama x bin zéro w quatre, donc n5alliw zéro un w trois quatre, intervalles ouverts.

في . conditions ديما عندها poids ، w ولّا aire من تجي second degré متاع الـ problèmes ، l'inéquation في الـ x carré تعطينا ، l'exemple des deux carrés ، x carré plus quatre moins x ، le tout au carré ، supérieur à dix zéro w quatre ، donc بين x أما . trois من أكبر ولّا un من أصغر moins quatre x plus trois supérieur à zéro : x . zéro un w trois quatre ، intervalles ouverts نخلّيو

Dans les problèmes, l'inéquation du second degré vient d'une aire ou d'un poids, et l'inconnue a toujours des conditions. Dans l'exemple des deux carrés, x carré plus quatre moins x, le tout au carré, supérieur à dix, donne x carré moins quatre x plus trois supérieur à zéro : x inférieur à un ou supérieur à trois. Mais x est entre zéro et quatre, donc on garde de zéro à un et de trois à quatre, intervalles ouverts.

Premier problème : dans un rectangle $ABCD$ ($AB=2$, $AD=3$), I milieu de $[AB]$ et M sur $[AD]$ avec $AM=x$, on trouve $F(x)=IM^2+MC^2=(1+x^2)+\left((3-x)^2+4\right)=2x^2-6x+14$. Comme $F(x)-\dfrac{19}{2}=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\geq 0$, $F(x)$ est minimal pour $x=\dfrac{3}{2}$: M au milieu de $[AD]$.

Deuxième problème : un astronaute qui pèse p kg sur terre pèse $P(x)=p\left(\dfrac{6400}{6400+x}\right)^2$ à l'altitude x km. Pour $p=81$, il pèse 25 kg quand $\dfrac{6400}{6400+x}=\dfrac{5}{9}$, soit $x=5120$ km, et moins de 9 kg dès que $\dfrac{6400}{6400+x}<\dfrac{1}{3}$, soit $x>12800$ km.



La somme des aires des carrés ABCD et BEFG.

Deux carrés posés côte à côte sur un segment [AE] de longueur 4. Le petit carré ABCD a pour côté AB = x ; le grand carré BEFG a pour côté BE = 4 − x. Les points A, B et E sont alignés, dans cet ordre.

LE MINIMUM

$$F(x) = 2x^2 - 6x + 14 = 2\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{19}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés, avec A, B, E alignés, $AB = x$ et $AE = 4$. Déterminer les réels x pour que la somme des aires des deux carrés soit supérieure à 10.

L'inconnue — B est entre A et E.

$0 < x < 4 \qquad BE = 4 - x$

L'inéquation — On développe et on divise par 2, positif.

$x^2 + (4-x)^2 > 10 \iff 2x^2 - 8x + 6 > 0 \iff x^2 - 4x + 3 > 0$

Le signe — $a + b + c = 0$: racines 1 et 3 ; $a > 0$: positif à l'extérieur.

$x^2 - 4x + 3 > 0 \iff x < 1 \text{ ou } x > 3$

Conclure — On garde la partie commune avec $]0;4[$.

$x \in]0;1[\cup]3;4[$

$$x \in]0;1[\cup]3;4[$$

À ne pas faire : Répondre $x \in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ — $x \in]0;1[\cup]3;4[$. x est une longueur et B est sur $[AE]$: on intersecte avec $]0;4[$.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Un problème : choisir l'inconnue et ses conditions, traduire, résoudre, vérifier.
   > Fi problème : l'inconnue w ech-chourout mte3ha, nektbou, n7ellou, w nthabtou.
   > *Dans un problème : l'inconnue et ses conditions, on traduit, on résout, on vérifie.*
2. Multiplier ou diviser une inégalité par un négatif change son sens.
   > Ki todhrob inégalité fi nombre négatif, le sens yetbaddel.
   > *Multiplier une inégalité par un nombre négatif change son sens.*
3. $|x-a|$ est la distance de x à a ; $|A|=|B| \iff A=B$ ou $A=-B$.
   > Valeur absolue de x moins a hiya la distance bin x w a ; w zouz valeurs absolues égales, ya3ni les nombres égaux walla opposés.
   > *Valeur absolue de x moins a est la distance entre x et a ; deux valeurs absolues égales, c'est deux nombres égaux ou opposés.*
4. Quotient : dénominateur non nul ; racine carrée : $\sqrt{A}$ définie si $A \geq 0$, et $\sqrt{A}=k \iff A=k^2$ pour $k \geq 0$.
   > Le dénominateur ma ykounech nul, w elli ta7t la racine lezem positif ; racine de A égale k ma3neha A égale k carré.
   > *Le dénominateur n'est jamais nul, et ce qui est sous la racine doit être positif ; racine de A égale k signifie A égale k carré.*
5. $\Delta=b^2-4ac$: pas de racine si $\Delta<0$; $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta>0$.
   > Delta égale b carré moins quatre a c : négatif, ma fammech racine ; nul, racine wa7da ; positif, zouz racines.
   > *Delta égale b carré moins quatre a c : négatif, pas de racine ; nul, une racine ; positif, deux racines.*
6. $\Delta'=b'^2-ac$ avec $b'=\dfrac{b}{2}$; racines $\dfrac{-b'\mp\sqrt{\Delta'}}{a}$.
   > Delta prime égale b prime carré moins a c, w les racines sur a, mouch sur deux a.
   > *Delta prime égale b prime carré moins a c, et les racines se divisent par a, pas par deux a.*
7. $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$; si $a+b+c=0$, les racines sont 1 et $\dfrac{c}{a}$.
   > La somme des racines moins b sur a, le produit c sur a ; w ken a plus b plus c égale zéro, un racine.
   > *La somme des racines vaut moins b sur a, le produit c sur a ; et si a plus b plus c est nul, un est racine.*
8. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$; signe de a à l'extérieur des racines, de $-a$ entre.
   > A x carré plus b x plus c yetekteb a fois x moins x un fois x moins x deux, w bin les racines 3aks a.

A x carré plus b x plus c s'écrit a fois x moins x un fois x moins x deux, et entre les racines, le signe est le contraire de a.

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : fi koll problème, e5tar l'inconnue w chouf chnowa ech-chourout mte3ha ; w fel second degré, a7seb delta w chouf le signe mte3ou. W dima, ki tal9a solution, thabbet elli hiya tsla7 lel problème. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : في كل problème ، اختار l'inconnue w شوف شنوّة الشروط متاعها ؛ w في الـ second degré ، احسب delta w شوف le signe متاعو . w ديما ، كي تلقى solution ، ثبّت إلّي هي تصلح للـ problème . يالله للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : dans chaque problème, choisis l'inconnue et regarde ses conditions ; au second degré, calcule delta et regarde son signe. Et toujours, quand tu trouves une solution, vérifie qu'elle convient au problème. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · METTRE UN PROBLÈME EN ÉQUATION

kifech n7ott probleme en equation | comment mettre un problème en équation | mise en équation d'un problème kifech | probleme ma3raftech nektbou equation

CE QU'IL RÉPOND

Awwel 7aja e5tar l'inconnue : 9oul chnowa tmathel w chnowa ech-chourout mte3ha. Ba3d ekteb koll jomla men l'énoncé b x, to5rjlek l'équation. 7ellha, w fel e5er thabbet elli la solution tsla7 lel problème.

أوّل حاجة اختار l'inconnue : قول شنوّة تمثّل w شنوّة الشروط متاعها . ba3d اكتب كل جملة من l'énoncé بـ x ، تخرجلك l'équation . حلّها ، w في الآخر ثبّت إلّي la solution تصلح للـ problème .

D'abord, choisis l'inconnue : dis ce qu'elle représente et quelles sont ses conditions. Ensuite, traduis chaque phrase de l'énoncé avec x : tu obtiens l'équation. Résous-la, et à la fin vérifie que la solution convient au problème.

QUESTION 2 · METTRE UN PROBLÈME EN ÉQUATION

3lech lezem nverifi la solution | pourquoi vérifier la solution d'un problème | est-ce qu'il faut vérifier la solution | nverifi solution walla le

CE QU'IL RÉPOND

5ater l'équation ma ta3refch el problème : tnajjem ta3tik longueur négative walla point barra el segment. W zeda bech tchedd el aghlat mta3 el 7seb. 3awedh la solution fi l'énoncé w chouf idha yemchi.

خاطر l'équation ما تعرفش الـ problème : تنجّم تعطيك longueur négative ولّا point برّا الـ segment زادة . w باش تشدّ الأغلاط متاع الحساب . عوّض la solution في l'énoncé w شوف إذا يمشي .

Parce que l'équation ne connaît pas le problème : elle peut donner une longueur négative ou un point hors du segment. Et cela permet aussi d'attraper les erreurs de calcul. Remplace la solution dans l'énoncé et regarde si tout marche.

QUESTION 3 · INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

3lech le sens yetbaddel ki nodhrob fi negatif | pourquoi le sens de l'inégalité change avec un négatif | diviser par un négatif inégalité sens | ki n9assem 3la négatif le sens

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$2 < 3 \quad \text{mais} \quad -2 > -3$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater el négatif yo9leb l'ordre : $2 < 3$, ama $-2 > -3$. Donc ki todhrob walla t9assem ezzouz membres 3la nombre négatif, le sens yetbaddel. W ki tzid walla tna99es nombre, ma yetbaddel chay.

خاطر الـ négatif يقلب l'ordre : deux أصغر من trois ، أما moins deux أكبر من moins trois . donc كي تضرب ولّا تقسم الزوز membres على le sens ، nombre négatif يتبدّل . w كي تزيد ولّا تنقص nombre ، ما يتبدّل شي .

Parce que passer à l'opposé inverse l'ordre : deux est inférieur à trois, mais moins deux est supérieur à moins trois. Donc quand on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif, le sens change. Ajouter ou retrancher un nombre ne change rien.

QUESTION 4 · VALEUR ABSOLUE ET DISTANCE

valeur absolue w distance chnowa el 3ala9a | pourquoi la valeur absolue est une distance | valeur absolue de x moins 3 distance | lien entre valeur absolue et distance

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AM = |x - a|$$

CE QU'IL RÉPOND

3la droite graduée, ken M 3andou l'abscisse x w A 3andou l'abscisse a, la distance A M hiya $|x - a|$. Donc $|x - 3|$ hiya la distance bin x w 3, w $|x + 2|$ hiya la distance bin x w -2.

على droite graduée ، كان M عندو l'abscisse x w A عندو la distance A M ، l'abscisse a هي valeur absolue de x moins a . donc valeur absolue de x moins trois هي la distance بين x w trois ، w valeur absolue de x هي plus deux la distance بين x w moins deux .

Sur une droite graduée, si M a pour abscisse x et A pour abscisse a, la distance A M est valeur absolue de x moins a. Donc valeur absolue de x moins trois est la distance entre x et trois, et valeur absolue de x plus

deux, la distance entre x et moins deux.

QUESTION 5 · ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS AVEC VALEUR ABSOLUE

valeur absolue egale a un nombre negatif | |2x+1| = -3 valeur absolue négative | valeur absolue tnajjem tkoun negative | une valeur absolue peut-elle être négative

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$|2x+1| = -3 \iff S = \varnothing$$

CE QU'IL RÉPOND

Le, valeur absolue dima positive walla nulle, 5ater hiya distance. Donc équation kif $|2x + 1| = -3$ ma 3andha 7atta solution. Chouf le signe mta3 el membre le5or 9bal ma t7ell.

valeur absolue de deux كيف distance . donc équation هي خاطر ، nulle ولّا positive ديما valeur absolue ، لا . الآخر قُبَلْ ما تحلّ membre الـ متاع le signe شوف . solution حتّى ما عندها x plus un égale moins trois

Non, une valeur absolue est toujours positive ou nulle, puisque c'est une distance. Donc une équation comme valeur absolue de deux x plus un égale moins trois n'a aucune solution. Regarde le signe du second membre avant de résoudre.

QUESTION 6 · ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS AVEC VALEUR ABSOLUE

deux valeurs absolues egales kifech n7ell | |A| = |B| comment résoudre | résoudre une équation avec deux valeurs absolues | valeurs absolues egales deux cas

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$|A| = |B| \iff A = B \text{ ou } A = -B$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz nombres 3andhom nafs valeur absolue, ya égaux ya opposés. Donc $|A| = |B|$ ta3tik zouz équations : $A = B$, w $A = -B$. T7ell ezzouz, w tejma3 les solutions.

opposés . donc valeur absolue de A égale valeur يا égaux يا ، valeur absolue عندهم نفس nombres زوز . les solutions تجمع w ، تحلّ الزوز . équations : A égale B ، w A égale moins B زوز تعطيك absolue de B

Deux nombres qui ont la même valeur absolue sont égaux ou opposés. Donc valeur absolue de A égale valeur absolue de B donne deux équations : A égale B, et A égale moins B. On résout les deux et on réunit les solutions.

QUESTION 7 · ÉQUATIONS AVEC DES QUOTIENTS

3lech nchoufou wa9tech le denominateur nul | pourquoi chercher les valeurs interdites | valeur interdite c'est quoi | denominateur zero chnowa na3mel

CE QU'IL RÉPOND

5ater ma najjmouch n9asmou 3la zéro : quotient elli le dénominateur mte3ou nul ma 3andou 7atta ma3na. Les valeurs elli ta3mel le dénominateur zéro nsammiwhom valeurs interdites. Nektbouhom mel bdeya, w ken solution tal3et wa7da menhom, nna77iwha.

خاطر ما نجّموش نقسمو على quotient : zéro اللي le dénominateur متاعو nul ما عندو حتّى معنى les valeurs . اللي تعمل le dénominateur zéro نسمّيوهم valeurs interdites . نكتبوهم من البداية ، w كان solution طلعت وحدة منهم ، ننحّيوها .

Parce qu'on ne peut pas diviser par zéro : un quotient dont le dénominateur est nul n'a aucun sens. Les valeurs qui annulent le dénominateur s'appellent valeurs interdites. On les écrit au départ, et si une solution en fait partie, on l'écarte.

QUESTION 8 · ÉQUATIONS AVEC DES QUOTIENTS

produit en croix kifech | quand utiliser le produit en croix | el produit en croix ya3ni chnowa | a/b = c/d produit en croix

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki 3andek $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, w B w D mouch nuls, tnajjem tekteb $AD = BC$. Hedha le produit en croix : yna77i les dénominateurs. Ama ma tensech les valeurs interdites 9bal.

كي عندك A sur B égale C sur D ، w B w D موش nuls ، تنجّم تكتب le produit en هذا . A fois D égale B fois C : croix ينحّي les dénominateurs . أما ما تنساش les valeurs interdites قُبَلْ .

Quand tu as A sur B égale C sur D, avec B et D non nuls, tu peux écrire A fois D égale B fois C. C'est le produit en croix : il fait disparaître les dénominateurs. Mais n'oublie pas d'écrire les valeurs interdites avant.

QUESTION 9 · ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS AVEC DES RACINES CARRÉES

racine carree definie wa9tech | quand est-ce qu'une racine carrée est définie | racine de 3-2x definie pour quelles valeurs | racine carrée d'un nombre négatif existe

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{3-2x} \text{ définie} \iff x \leq \frac{3}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Racine carrée de A ma tkoun définie ken ki A positif walla nul. Mathalan $\sqrt{3 - 2x}$, lezem $3 - 2x \ge 0$, ya3ni $x \le \frac{3}{2}$. Racine carrée mta3 nombre négatif ma tewjedch.

ما تكون racine carrée de A كي définie كان A positif ولّا nul . مثلا x moins deux ، racine de trois لازم trois . racine carrée يعني ، x أصغر ولّا يساوي zéro ولّا يساوي x moins deux أكبر متاع nombre négatif trois demis ما توجدش .

Racine carrée de A n'est définie que si A est positif ou nul. Par exemple, pour racine de trois moins deux x, il faut trois moins deux x supérieur ou égal à zéro, c'est-à-dire x inférieur ou égal à trois demis. La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

QUESTION 10 · ÉQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRÉ

3lech ki nrabba3 tjini solution zeyda | pourquoi élever au carré ajoute des solutions | solution parasite apres le carré | élever au carré une équation avec racine

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sqrt{A} = B \iff A = B^2 \text{ et } B \geq 0$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater $A^{2} = B^{2}$ tse77 zeda ki $A = -B$. Mathalan $\sqrt{2x + 6} = x - 1$: ki nrabb3ou nal9aw -1 w 5, ama -1 ta3ti $\sqrt{4} = -2$, w hedha ghalet. Donc lezem $x - 1 \ge 0$, walla t3awedh w tthabbet.

racine de deux x plus six égale x moins un مثلا . A égale moins B تصحّ زادة كي A carré égale B carré خاطر
. طلط هذا racine de quatre égale moins deux ، w تعطي moins un أما ، moins un w cinq نلقاو نربّعو كي :
. تثبّت w ، ولّا تعوّض x moins un positif لازم donc

Parce que A carré égale B carré est vrai aussi quand A égale moins B. Par exemple pour racine de deux x plus six égale x moins un : en élevant au carré, on trouve moins un et cinq, mais moins un donnerait racine de quatre égale moins deux, ce qui est faux. Il faut donc x moins un positif, ou bien remplacer et vérifier.

QUESTION 11 · L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

3lech a lezem different de zero fel second degre | pourquoi a non nul dans une équation du second degré | si a est nul c'est encore du second degré | second degre a egal zero

CE QU'IL RÉPOND

Ken a égale zéro, le terme ax^{2} yemchi, w yo93ed $bx + c = 0$: hedhi équation du premier degré. Donc bech tkoun du second degré, lezem $a \ne 0$. Ama b w c ynajjmou ykounou zéro.

équation du premier هذي : b x plus c égale zéro يقعد w ، يمشي a égale zéro ، le terme a x carré كان
. zéro ينجّمو يكونو b w c أما . a différent de zéro لازم ، du second degré باش تكون degré . donc

Si a est nul, le terme a x carré disparaît et il reste b x plus c égale zéro : c'est une équation du premier degré. Pour qu'elle soit du second degré, il faut donc a différent de zéro. En revanche, b et c peuvent être nuls.

QUESTION 12 · FORME CANONIQUE ET DISCRIMINANT

chnowa la forme canonique | à quoi sert la forme canonique | forme canonique kifech nal9aha

---

comment trouver la forme canonique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$$

CE QU'IL RÉPOND

La forme canonique hiya $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2} - \frac{\Delta}{4a^{2}}\right]$. Bech tal9aha, 5arrej a en facteur, w kammel el carré : $x^{2} - 6x = (x - 3)^{2} - 9$. Tnaf3na bech n7ellou l'équation, w nal9aw maximum walla minimum.

a fois ، entre crochets ، x plus b sur deux a ، le tout au carré ، moins delta sur هي la forme canonique
x moins trois ، le هو carré : x carré moins six x الـ كمّل a en facteur ، w خرّج ، باش تلقاها . quatre a carré
. minimum ولّا maximum نلقاو l'équation ، w نحلّو باش تنفعنا . tout au carré ، moins neuf

La forme canonique est : a fois, entre crochets, x plus b sur deux a, le tout au carré, moins delta sur quatre a carré. Pour la trouver, on met a en facteur et on complète le carré : x carré moins six x égale x moins trois, le tout au carré, moins neuf. Elle sert à résoudre l'équation et à trouver un maximum ou un minimum.

QUESTION 13 · FORME CANONIQUE ET DISCRIMINANT

chnowa delta | c'est quoi le discriminant | discriminant ya3ni chnowa | delta b2-4ac pourquoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

CE QU'IL RÉPOND

Le discriminant houwa le réel $b^{2} - 4ac$, w nektbouh Δ. Esmou jey men « discriminer », ya3ni yfarre9 : le signe mte3ou y9ollek 9addech men racine 3andha l'équation : zéro, wa7da, walla zouz.

يعني ، « discriminer » من جاي اسمو . delta نكتبوه le réel b carré moins quatre a c ، w هو le discriminant
. وحدة ، ولّا زوز l'équation : zéro عندها racine من قدّاش يقلّك متاعو le signe : يفرّق

Le discriminant est le réel b carré moins quatre a c, noté delta. Son nom vient de « discriminer », distinguer : son signe dit combien de racines a l'équation, zéro, une ou deux.

QUESTION 14 · RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

delta negatif chnowa na3mel | que faire si le discriminant est négatif | delta inferieur a zero pas de solution | discriminant négatif racine

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\Delta < 0 \Rightarrow S = \varnothing$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $\Delta < 0$, l'équation ma 3andha 7atta racine fi $\mathbb{R}$, 5ater racine carrée mta3 négatif ma tewjedch. Tekteb $S = \varnothing$. W ma najjmouch nfactoriser $ax^{2} + bx + c$, w houwa dima b signe de a.

كان l'équation ، négatif delta ما عندها حتّى racine في R ، racine carrée خاطر négatif متاع racine ما توجدش . تكتب
. signe de a هو ديما بـ factoriser a x carré plus b x plus c ، w ما نجّموش نـ S égale l'ensemble vide . w

Si delta est négatif, l'équation n'a aucune racine dans R, puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. On écrit S égale l'ensemble vide. Et a x carré plus b x plus c ne se factorise pas : il a toujours le signe de a.

QUESTION 15 · RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

delta egal zero chnowa | discriminant nul une seule racine | si delta = 0 combien de solutions | delta nul racine double

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $\Delta = 0$, l'équation 3andha racine wa7da : $x_{0} = -\frac{b}{2a}$. W $ax^{2} + bx + c$ ywalli $a(x - x_{0})^{2}$. Mathalan $4x^{2} + 12x + 9 = (2x + 3)^{2}$, w la racine $-\frac{3}{2}$.

x zéro égale moins b sur deux a . w a x carré plus b : وحدة racine عندها delta égale zéro ، l'équation كان
deux x هو quatre x carré plus douze x plus neuf مثلا . a fois x moins x zéro ، le tout au carré يولّي x plus c
. plus trois ، le tout au carré ، w la racine moins trois demis

Si delta est nul, l'équation a une seule racine : x zéro égale moins b sur deux a. Et a x carré plus b x plus c devient a fois x moins x zéro, le tout au carré. Par exemple, quatre x carré plus douze x plus neuf égale deux x plus trois, le tout au carré, de racine moins trois demis.

QUESTION 16 · RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

formule des racines second degre | moins b plus ou moins racine de delta sur 2a | comment calculer x1 et x2 | kifech na7seb x1 w x2

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki $\Delta > 0$, $x_{1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ w $x_{2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Redd belek men zouz 7ajet : $-b$, ya3ni baddel le signe mta3 b, w t9assem 3la $2a$ kemel, mouch 3la 2.

delta positif ، x un égale moins b moins racine de delta ، le tout sur deux a ، w x deux égale moins b كي
b ، w متاع le signe يعني بدّل ، moins b : رد بالك من زوز حاجات . plus racine de delta ، le tout sur deux a
. تقسم على deux a كامل ، موش على deux

Quand delta est positif, x un égale moins b moins racine de delta, le tout sur deux a, et x deux égale moins b plus racine de delta, le tout sur deux a. Attention à deux choses : moins b, c'est-à-dire changer le signe de b, et diviser par deux a en entier, pas par deux.

QUESTION 17 · LE DISCRIMINANT RÉDUIT

delta prime wa9tech nesta3mlou | quand utiliser le discriminant réduit | c'est quoi delta prime | discriminant reduit b'

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\Delta' = b'^2 - ac, \quad x = \frac{-b' \mp \sqrt{\Delta'}}{a}$$

CE QU'IL RÉPOND

Δ' nesta3mlouh ki b pair : $b' = \frac{b}{2}$, w $\Delta' = b'^{2} - ac$. Les nombres ykounou asghar, w les racines $\frac{-b' \mp \sqrt{\Delta'}}{a}$. Mathalan $5x^{2} - 16x + 3$: $b' = -8$, $\Delta' = 49$.

b pair : b prime égale b sur deux ، w delta prime égale b prime carré moins a c نستعملوه كي delta prime plus racine de delta prime ، le tout sur ولّا w les racines moins b prime moins ، يكونو أصغر . les nombres . cinq x carré moins seize x plus trois : b prime moins huit ، delta prime quarante-neuf مثلا . a

On utilise delta prime quand b est pair : b prime égale b sur deux, et delta prime égale b prime carré moins a c. Les nombres sont plus petits, et les racines valent moins b prime moins ou plus racine de delta prime, le tout sur a. Par exemple pour cinq x carré moins seize x plus trois : b prime vaut moins huit et delta prime quarante-neuf.

QUESTION 18 · SOMME ET PRODUIT DES RACINES

somme et produit des racines | formule de la somme des racines et de leur produit | somme w produit des racines 3lech | somme w produit mta3 les racines

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki l'équation 3andha zouz racines, la somme mte3hom $-\frac{b}{a}$, w le produit $\frac{c}{a}$. Hedha yji men la formule : ki tejma3, les racines de delta yemchiw ; w ki todhrob, tal9a $\frac{b^{2} - \Delta}{4a^{2}}$, ya3ni $\frac{c}{a}$. Ynaf3ek bech tal9a racine men o5ra.

la هذا يجي من . moins b sur a ، w le produit c sur a متاعهم racines ، la somme زوز عندها l'équation كي b carré moins delta ، le tout sur تلقى ، كي تضرب w ؛ يمشيو les racines de delta ، كي تجمع : formule . ينفعك باش تلقى racine من أخرى . c sur a يعني ، quatre a carré

Quand l'équation a deux racines, leur somme vaut moins b sur a et leur produit c sur a. Cela vient de la formule : en additionnant, les racines de delta s'en vont ; en multipliant, on trouve b carré moins delta, le tout sur quatre a carré, c'est-à-dire c sur a. C'est utile pour trouver une racine à partir de l'autre.

QUESTION 19 · RACINES ÉVIDENTES : A + B + C = 0, A − B + C = 0

a+b+c=0 chnowa ya3ni | racine évidente comment la trouver | quand 1 est racine evidente

a moins b plus c egal zero

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $a + b + c = 0$, 1 racine, w el o5ra $\frac{c}{a}$. Ken $a - b + c = 0$, -1 racine, w el o5ra $-\frac{c}{a}$. 5ater ki t3awedh x b 1, tal9a $a + b + c$, w b -1 tal9a $a - b + c$. Choufha dima 9bal delta.

a moins b plus c égale zéro ، moins un كان . c sur a الأخرى a plus b plus c égale zéro ، un racine ، w كان a moins تلقى moins un بـ a plus b plus c ، w تلقى ، un بـ x خاطر كي تعوّض . moins c sur a الأخرى racine ، w . delta شوفها ديما قُبَيْل . b plus c

Si a plus b plus c est nul, un est racine, et l'autre est c sur a. Si a moins b plus c est nul, moins un est racine, et l'autre est moins c sur a. En effet, remplacer x par un donne a plus b plus c, et par moins un, a moins b plus c. Regarde-le toujours avant de calculer delta.

QUESTION 20 · DEUX NOMBRES DONT ON CONNAÎT LA SOMME ET LE PRODUIT

trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit | deux nombres somme 11 produit 30 | deux nombres u et v u+v et uv | kifech nal9a deux nombres ki na3ref somme w produit

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$X^2 - SX + P = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz nombres, la somme mte3hom S w le produit mte3hom P, houma les racines mta3 $X^{2} - SX + P = 0$. Mathalan somme 11 w produit 30 : $X^{2} - 11X + 30 = 0$, nal9aw 5 w 6. W ken Δ négatif, ezzouz nombres ma ywjdouch.

X carré moins S X plus P متاع les racines هوما ، P متاعهم S w le produit متاعهم nombres ، la somme زوز cinq w six . w نلقاو ، somme onze w produit trente : X carré moins onze X plus trente مثلا . égale zéro ما يوجدوش nombres الزوز ، delta négatif كان .

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de X carré moins S X plus P égale zéro. Par exemple, somme onze et produit trente : X carré moins onze X plus trente égale zéro donne cinq et six. Et si delta est négatif, ces deux nombres n'existent pas.

QUESTION 21 · ÉQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRÉ

chnowa equation bicarree | comment résoudre une équation bicarrée | x puissance 4 kifech n7ell | equation avec x4 et x2

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$X = x^2 :\ aX^2 + bX + c = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Équation bicarrée hiya $ax^{4} + bx^{2} + c = 0$. N7ottou $X = x^{2}$, w twalli $aX^{2} + bX + c = 0$. N7ellouha, w ba3d nraj3ou l x : koll X positive ta3ti zouz valeurs, $\pm\sqrt{X}$, w X négative ma ta3ti chay.

X égale x carré ، w نحطّو . a x puissance quatre plus b x carré plus c égale zéro هي équation bicarrée valeurs ، زوز تعطي X positive كل : x نرجعو لـ w ba3d ، نحلّوها . a X carré plus b X plus c égale zéro تولّي plus ولّا X négative w ، moins racine de X ما تعطي شي .

Une équation bicarrée s'écrit a x puissance quatre plus b x carré plus c égale zéro. On pose X égale x carré, et elle devient a X carré plus b X plus c égale zéro. On la résout, puis on revient à x : chaque X positif donne deux valeurs, plus ou moins racine de X, et un X négatif n'en donne aucune.

QUESTION 22 · FACTORISER AX² + BX + C

kifech nfactoriser ax2+bx+c | comment factoriser un trinôme du second degré | factoriser avec les racines | factorisation trinome a(x-x1)(x-x2)

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

CE QU'IL RÉPOND

Tal9a les racines x_{1} w x_{2}, w tekteb $a(x - x_{1})(x - x_{2})$. Ma tensech a l9oddem. Ken $\Delta = 0$, $a(x - x_{0})^{2}$. W ken $\Delta < 0$, ma najjmouch nfactoriser.

كان . القدّام a ما تنساش . a fois x moins x un fois x moins x deux تكتب les racines x un w x deux ، w تلقى . factoriser نـ ما نجّموش ، delta négatif كان delta égale zéro ، a fois x moins x zéro ، le tout au carré . w

On cherche les racines x un et x deux, et on écrit a fois x moins x un fois x moins x deux. N'oublie pas le a devant. Si delta est nul, c'est a fois x moins x zéro, le tout au carré. Et si delta est négatif, on ne peut pas factoriser.

QUESTION 23 · SIGNE DE AX² + BX + C

signe de ax2+bx+c | comment trouver le signe d'un trinôme | signe du trinome kifech | tableau de signe second degre

CE QU'IL RÉPOND

Chouf Δ. Ken $\Delta < 0$, el trinôme dima b signe de a. Ken $\Delta = 0$, b signe de a w ywalli zéro fi x_{0}. W ken $\Delta > 0$, b signe de a barra les racines, w b signe de $-a$ bin les racines.

في zéro يولّي signe de a w بـ ، delta nul كان . signe de a بـ ديما trinôme الـ ، delta négatif كان . delta شوف . les racines بين signe de moins a بـ les racines ، w برّا signe de a بـ ، delta positif كان x zéro . w

Regarde delta. Si delta est négatif, le trinôme a toujours le signe de a. Si delta est nul, il a le signe de a et s'annule en x zéro. Et si delta est positif, il a le signe de a à l'extérieur des racines, et le signe de moins a entre les racines.

QUESTION 24 · SIGNE DE AX² + BX + C

3lech bin les racines signe contraire de a | pourquoi entre les racines c'est le signe de moins a | signe entre les racines | a l'exterieur des racines signe de a pourquoi

CE QU'IL RÉPOND

5ater $ax^{2} + bx + c = a(x - x_{1})(x - x_{2})$. Bin x_{1} w x_{2}, $x - x_{1}$ positif w $x - x_{2}$ négatif, donc le produit négatif, w lkoll b signe de $-a$. Barra, ezzouz facteurs 3andhom nafs le signe, donc lkoll b signe de a.

خاطر x un w x deux ، x moins بين . a x carré plus b x plus c égale a fois x moins x un fois x moins x deux الزوز . برّا ، signe de moins a بـ الكل x un positif w x moins x deux négatif ، donc le produit négatif ، w facteurs عندهم نفس donc ، le signe الكل بـ signe de a .

Parce que a x carré plus b x plus c égale a fois x moins x un fois x moins x deux. Entre x un et x deux, x moins x un est positif et x moins x deux négatif : leur produit est négatif, et le tout a le signe de moins a. À l'extérieur, les deux facteurs ont le même signe : le tout a le signe de a.

QUESTION 25 · INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

kifech n7ell inequation du second degre | comment résoudre une inéquation du second degré | résoudre l'inéquation x2-5x+6<0 | inequation avec x carre

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \iff x \in]2;3[$$

CE QU'IL RÉPOND

7ott koll chay fi membre wa7ed, lawwej 3la les racines, w e9ra le signe : b signe de a barra les racines, b signe de $-a$ bin. Mathalan $x^{2} - 5x + 6 < 0$: les racines 2 w 3, a positif, donc $S = \]2 ; 3[$.

حطّ كل شي في membre واحد ، لوّج على w ، اقرا les racines signe de a بـ : le signe برّا les racines ، signe de بـ
x carré moins cinq x plus six inférieur à zéro : les racines deux w trois ، a positif ، donc مثلا . بين moins a
. S égale l'intervalle ouvert deux trois

Mets tout dans un seul membre, cherche les racines et lis le signe : signe de a à l'extérieur des racines, signe de moins a entre. Par exemple, pour x carré moins cinq x plus six inférieur à zéro : les racines sont deux et trois, a est positif, donc S est l'intervalle ouvert de deux à trois.

QUESTION 26 · INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

crochet ouvert ou fermé aux racines | kifech na3ref crochet ferme walla ouvert | inférieur ou égal crochets fermés

crochets ouverts ou fermes

CE QU'IL RÉPOND

Ken l'inéquation fiha $\le$ walla $\ge$, les racines y7a99ouha, donc crochets fermés. Ken strictement, les racines ma yodkhlouch, crochets ouverts. W dima ouvert 3and l'infini, w 3and valeur interdite.

كان l'inéquation فيها inférieur ou égal ولّا les racines ، supérieur ou égal يحقّقوها ، donc crochets fermés . كان les racines ، strictement ما يدخلوش ، w . crochets ouverts ديما ouvert عند w ، valeur عند l'infini interdite .

Si l'inéquation contient inférieur ou égal ou supérieur ou égal, les racines la vérifient : crochets fermés. Si elle est stricte, les racines ne sont pas comprises : crochets ouverts. Et toujours ouvert en l'infini et en une valeur interdite.

QUESTION 27 · SIGNE D'UN PRODUIT OU D'UN QUOTIENT

signe d'un quotient tableau | comment étudier le signe d'un quotient | inequation avec quotient kifech | signe d'un produit de deux facteurs

CE QU'IL RÉPOND

A3mel tableau de signes : ligne l koll facteur, les racines lkoll mratbin, w la règle des signes fi koll colonne. Le quotient kif le produit, ama les racines mta3 le dénominateur valeurs interdites : double barre, w dima exclues.

اعمل tableau de signes : ligne لكل facteur ، les racines الكل مرتّبين ، w la règle des signes في كل colonne . كيف le quotient ، le produit أما ، les racines متاع w ، double barre : valeurs interdites le dénominateur ديما exclues .

Fais un tableau de signes : une ligne par facteur, toutes les racines rangées dans l'ordre, puis la règle des signes dans chaque colonne. Un quotient se traite comme un produit, mais les racines du dénominateur sont des valeurs interdites : double barre, et toujours exclues.

QUESTION 28 · LA MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE D'AL-KHAWARIZMI

chkoun al khawarizmi | qui était Al-Khawarizmi | méthode d'Al Khawarizmi | al-khawarizmi algebre

CE QU'IL RÉPOND

Al-Khawarizmi 3alem, tewled fi 780 w met fi Bagdad fi 850. Kteb ktab el jabr, w mennou jet el kelma « algèbre », w men esmou jet « algorithme ». Ken y7ell les équations b des figures, w ma ye9bel ken les racines positives.

Al-Khawarizmi عالم ، تولد في sept cent quatre-vingts w مات في Bagdad في huit cent cinquante . كتب كتاب الجبر ، w منّو جات الكلمة « algèbre » ، w من اسمو جات « algorithme » . كان يحلّ les équations بـ figures ، w ما يقبل كان les racines positives .

Al-Khawarizmi est un savant né en sept cent quatre-vingts et mort à Bagdad en huit cent cinquante. Il a écrit le livre d'al-jabr, d'où vient le mot « algèbre », et son nom a donné « algorithme ». Il résolvait les

équations par des figures et n'acceptait que les racines positives.

QUESTION 29 · PROBLÈMES : AIRE D'UN RECTANGLE, HAUTEUR D'UNE PIERRE

kifech nal9a hauteur maximale | comment trouver le maximum d'une expression | maximum d'un trinôme | valeur minimale ax2+bx+c

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$h(t) = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{13}{2} \leq \frac{13}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ekteb bel forme canonique, w wazza3 a : tal9a a fois un carré, plus un nombre. El carré dima positif walla nul. Ken a négatif, l'expression ma tfoutech el nombre hedha, w twoslou ki el carré ywalli nul : hedha le maximum. Ken a positif, el nombre hedha houwa le minimum. Mathalan $h(t) = -\frac{1}{2}(t - 3)^{2} + \frac{13}{2}$: le maximum $\frac{13}{2}$, ki $t = 3$.

. nul ولّا positif ديما carré الـ . a fois un carré ، plus un nombre تلقى : a وزّع forme canonique ، w اكتبو بالـ
. le maximum هذا : nul يولّي carré الـ توصلو كي w ، هذا nombre الـ ما تفوتش a négatif ، l'expression كان
h de t égale moins un demi fois ، t moins trois ، le tout مثلا . le minimum هذا هو nombre الـ ، a positif كان
. t égale trois كي ، au carré ، plus treize demis : le maximum treize demis

Écris-le sous forme canonique, puis distribue a : tu obtiens a fois un carré, plus un nombre. Le carré est toujours positif ou nul. Si a est négatif, l'expression ne dépasse jamais ce nombre, et elle l'atteint quand le carré est nul : c'est le maximum. Si a est positif, ce nombre est le minimum. Par exemple, h de t égale moins un demi fois, t moins trois, le tout au carré, plus treize demis : le maximum est treize demis, pour t égale trois.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Le nombre pensé**

Je pense un nombre, je lui retranche 5, je multiplie le résultat obtenu par 2, puis j'ajoute 6 et je divise le résultat par 5 : j'obtiens 2. Quel nombre ai-je pensé ?

Donne le nombre pensé.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle x le nombre pensé et suis les opérations dans l'ordre.
2. L'énoncé se traduit par :
   $\frac{2(x-5)+6}{5} = 2$
3. Multiplie les deux membres par 5, puis développe $2(x-5)$.

CORRECTION

Traduire —

$\frac{2(x-5)+6}{5} = 2$

Multiplier par 5 —

$2(x-5)+6 = 10 \iff 2x-4 = 10$

$2x = 14 \iff x = 7$

Vérifier — On vérifie.

$\frac{2(7-5)+6}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Le nombre pensé est 7.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4.5` → Tu as multiplié seulement x par 2 : c'est tout le résultat $x-5$ qui est multiplié, $2(x-5) = 2x-10$.

EXERCICE 2 · BASE

Ajouter le même entier en haut et en bas

Quel entier faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de $\frac{3}{5}$ pour obtenir $\frac{1}{2}$?

Donne l'entier à ajouter.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle n l'entier ajouté : la nouvelle fraction est $\frac{3+n}{5+n}$.
2. Écris l'égalité avec $\frac{1}{2}$ et fais le produit en croix.
3. Le résultat peut être négatif : « ajouter » un entier négatif, c'est retrancher.

CORRECTION

L'équation —

$\frac{3+n}{5+n} = \frac{1}{2}$

Produit en croix — Produit en croix ($n \neq -5$).

$2(3+n) = 5+n \iff 6+2n = 5+n$

$n = -1$

Vérifier —

$\frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Il faut ajouter -1, c'est-à-dire retrancher 1.

PIÈGES ANTICIPÉS

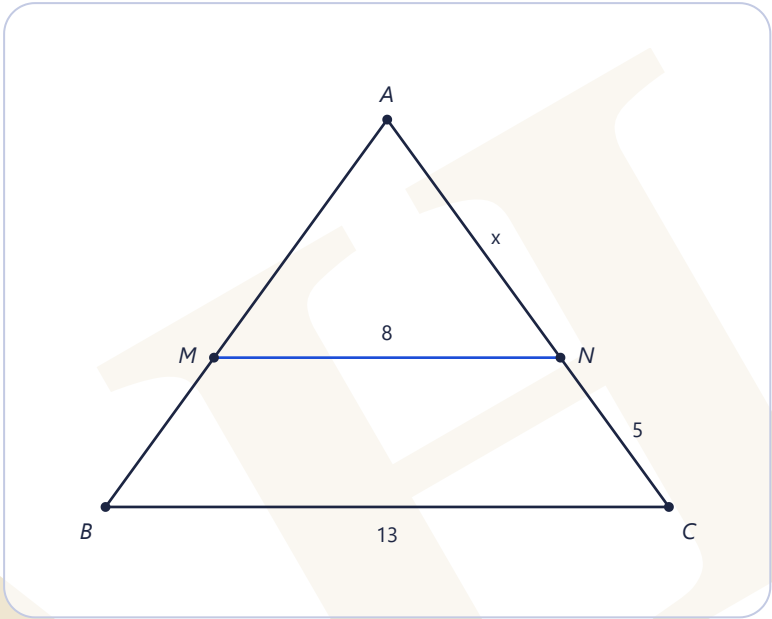
`-0.5` → Tu as ajouté n au numérateur seulement : l'énoncé l'ajoute aussi au dénominateur.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 3 · BASE

Thalès dans un triangle

Dans le triangle ABC, M est sur $[AB]$, N sur $[AC]$, et (MN) est parallèle à (BC). On donne $AN = x$, $NC = 5$, $MN = 8$ et $BC = 13$. Déterminer x.



(MN) parallèle à (BC).

Un triangle ABC, A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite, avec BC = 13. Le point M est sur [AB], le point N sur [AC], et la droite (MN) est parallèle à (BC), avec MN = 8. On note AN = x et NC = 5.

Donne la valeur de x.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Applique le théorème de Thalès dans le triangle ABC.
2. Attention : $AC = AN + NC = x + 5$.
3. Le rapport s'écrit :
   $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

CORRECTION

Thalès — (MN) est parallèle à (BC).

$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \iff \frac{x}{x+5} = \frac{8}{13}$

Produit en croix —

$13x = 8(x+5) \iff 13x = 8x + 40$

$5x = 40 \iff x = 8$

$AN = 8$, donc $AC = 13$: le triangle ABC a ici $AC = BC$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40/13` → Tu as écrit $\frac{x}{5}$: Thalès compare AN à $AC = x + 5$, pas à NC.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

Deux agences de location

Agence A : 36 dinars par jour plus $0{,}450$ dinar par km. Agence B : 20 dinars par jour plus $0{,}650$ dinar par km. Pour quel nombre x de kilomètres parcourus dans la journée les deux tarifs sont-ils égaux ? Au-delà, quelle agence est la moins chère ?

Donne le nombre de kilomètres où les deux prix sont égaux.

Réponse attendue : `80`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris le prix de chaque agence en fonction de x.
2. Les deux prix sont égaux quand :
   $36 + 0{,}45x = 20 + 0{,}65x$
3. Regroupe les x d'un côté et les nombres de l'autre.

CORRECTION

L'équation —

$36 + 0{,}45x = 20 + 0{,}65x$

$16 = 0{,}2x \iff x = \frac{16}{0{,}2} = 80$

Au-delà — Au-delà de 80 km, A est la moins chère.

$p_A < p_B \iff 16 < 0{,}2x \iff x > 80$

Les tarifs sont égaux pour 80 km ; au-delà, l'agence A est plus avantageuse, en deçà l'agence B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3.2` → Tu as multiplié 16 par $0{,}2$: pour isoler x dans $0{,}2x = 16$, on divise par $0{,}2$.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Entre le quart et le tiers

Un trapèze $ABCD$ de hauteur h a pour bases $AB = 4$ et $CD = x$, avec $x > 2$; M est le point de $[CD]$ tel que $DM = 2$. Déterminer les réels x tels que l'aire du triangle BMC soit comprise (au sens large) entre le quart et le tiers de l'aire du trapèze.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `[4;5]` — aussi acceptées : [4,5]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire de BMC vaut $\dfrac{(x-2)h}{2}$, et celle de $ABCD$ vaut $\dfrac{(4+x)h}{2}$.
2. Après simplification par $\dfrac{h}{2}$, il faut :
   $\frac{4+x}{4} \leq x - 2 \leq \frac{4+x}{3}$
3. Résous chaque inégalité séparément, puis garde les x qui vérifient les deux.

CORRECTION

Traduire —

$\frac{4+x}{4} \leq x-2 \leq \frac{4+x}{3}$

Le quart —

$4+x \leq 4x-8 \iff 12 \leq 3x \iff x \geq 4$

Le tiers —

$3x-6 \leq 4+x \iff 2x \leq 10 \iff x \leq 5$

Ces valeurs vérifient bien $x > 2$.

$4 \leq x \leq 5$

$S = [4;5]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]4;5[` → « Au sens large » : $x = 4$ et $x = 5$ conviennent, les crochets sont fermés.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Une valeur absolue majorée

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x+1| \leq \dfrac{3}{4}$.

Écris l'intervalle, par exemple « [-1/2;3/4] ».

Réponse attendue : `[-7/8;-1/8]` — aussi acceptées : [-0.875;-0.125]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $|A| \leq k$, avec $k > 0$, équivaut à $-k \leq A \leq k$.
2. Écris l'encadrement :
   $-\frac{3}{4} \leq 2x+1 \leq \frac{3}{4}$
3. Retranche 1, puis divise par 2 (positif) dans les trois membres.

CORRECTION

Encadrer —

$-\frac{3}{4} \leq 2x+1 \leq \frac{3}{4}$

On retranche 1.

$-\frac{7}{4} \leq 2x \leq -\frac{1}{4}$

On divise par 2.

$-\frac{7}{8} \leq x \leq -\frac{1}{8}$

$S = \left[-\dfrac{7}{8};-\dfrac{1}{8}\right]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-7/4;-1/4]` → Tu t'es arrêté à l'encadrement de $2x$: il reste à diviser par 2.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAM

EXERCICE 7 · PRATIQUE

Une valeur absolue minorée

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+2| > 1$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;1[U]2;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;-3[U]-1;+inf[` — aussi acceptées :]-∞;-3[∪]-1;+∞[·]-inf;-3[U]-1;+inf[· x<-3 ou x>-1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $|x+2|$ est la distance de x au réel -2.
2. « Plus de 1 » de -2 : on est à l'extérieur de l'intervalle $[-3;-1]$.
3. $|A| > k$ équivaut à $A < -k$ ou $A > k$.

CORRECTION

Deux cas —

$|x+2| > 1 \iff x+2 < -1$ ou $x+2 > 1$

$x < -3$ ou $x > -1$

$S =]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-3;-1[` → Tu as donné les points à moins de 1 de -2 : l'inéquation demande ceux à plus de 1, donc l'extérieur.

EXERCICE 8 · PRATIQUE

Deux quotients égaux

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2x}{x+4}$.

Donne la solution.

Réponse attendue : `-4/9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par les valeurs interdites : $x \neq 0$ et $x \neq -4$.
2. Fais le produit en croix :
   $(2x+1)(x+4) = 2x \times x$
3. Développe : les $2x^2$ s'en vont.

CORRECTION

Valeurs interdites —

$x \neq 0$ et $x \neq -4$

Produit en croix —

$(2x+1)(x+4) = 2x^2 \iff 2x^2 + 9x + 4 = 2x^2$

Ce n'est pas une valeur interdite.

$9x = -4 \iff x = -\frac{4}{9}$

$S = \left\{-\frac{4}{9}\right\}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4/9 → Vérifie le signe : $9x + 4 = 0$ donne $x = -\frac{4}{9}$.

EXERCICE 9 · PRATIQUE

Une racine d'une valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{|4x+5|} = 6$.

Écris l'ensemble, par exemple « {-1;2} ».

Réponse attendue : `{-41/4;31/4}` — aussi acceptées : {-10.25;7.75}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La racine est toujours définie : $|4x+5| \geq 0$.
2. $\sqrt{A} = 6 \iff A = 36$: on obtient une équation avec valeur absolue.
3. $|4x+5| = 36 \iff 4x+5 = 36$ ou $4x+5 = -36$.

CORRECTION

Élever au carré — $6 \geq 0$: on élève au carré.

$\sqrt{|4x+5|} = 6 \iff |4x+5| = 36$

Premier cas —

$4x + 5 = 36 \iff x = \frac{31}{4}$

Second cas —

$4x + 5 = -36 \iff x = -\frac{41}{4}$

$S = \left\{-\frac{41}{4}; \frac{31}{4}\right\}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

{31/4} → Une valeur absolue égale à 36 : le nombre vaut 36 OU -36. Il manque un cas.

{-11/4;1/4} → Tu as écrit $|4x+5| = 6$: pour enlever la racine, on élève au carré, $6^2 = 36$.

EXERCICE 10 · RAISONNEMENT

Comparer deux racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{5x-4} \geq \sqrt{x+1}$.

Écris l'intervalle, par exemple « [2;+inf[».

Réponse attendue : `[5/4;+inf[` — aussi acceptées : [1.25;+inf[· [5/4;+∞[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux racines doivent être définies : $5x - 4 \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$.

2. Deux nombres positifs se rangent comme leurs carrés.
3. Il reste à résoudre $5x - 4 \geq x + 1$, puis à garder la partie commune avec les conditions.

CORRECTION

Les conditions —

$x \geq \frac{4}{5}$ et $x \geq -1 \iff x \geq \frac{4}{5}$

Les carrés —

$5x - 4 \geq x + 1 \iff 4x \geq 5 \iff x \geq \frac{5}{4}$

La condition est automatiquement vérifiée.

$\frac{5}{4} \geq \frac{4}{5}$

$S = \left[\frac{5}{4}; +\infty\right[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[4/5;+inf[` → Tu as gardé seulement la condition d'existence : il faut aussi $5x - 4 \geq x + 1$.

EXERCICE 11 · BASE **Un triangle rectangle**

ABC est un triangle tel que $AB = x + 3$, $AC = 3x + 4$ et $BC = 2x + 5$, où x est un réel positif. Déterminer x pour que ce triangle soit rectangle en A.

Donne la valeur de x.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
2. Développe : tu dois obtenir $6x^2 + 10x = 0$.
3. Factorise par $2x$, puis regarde la condition « x positif ».

CORRECTION

Pythagore —

$(x + 3)^2 + (3x + 4)^2 = (2x + 5)^2$

$10x^2 + 30x + 25 = 4x^2 + 20x + 25 \iff 6x^2 + 10x = 0$

Factoriser —

$2x(3x + 5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{5}{3}$

x est positif ; on obtient $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$.

$x = 0$

$x = 0$: c'est le triangle $3, 4, 5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-5/3` → $-\frac{5}{3}$ est bien solution de l'équation, mais l'énoncé impose x positif.

EXERCICE 12 · BASE

Un discriminant nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 12x + 9 = 0$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {2} ».

Réponse attendue : `{-3/2}` — aussi acceptées : {-1.5} · -1,5 · x=-1,5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule le discriminant $b^2 - 4ac$.
2. Tu peux aussi reconnaître une identité remarquable : $(2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$.
3. Si le discriminant est nul, la racine est $-\dfrac{b}{2a}$.

CORRECTION

Le discriminant —

$b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$

Une racine —

$x_0 = -\frac{12}{2\times4} = -\frac{3}{2}$

On le vérifie avec l'identité remarquable.

$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

{3/2} → $(2x + 3)^2 = 0$ donne $2x = -3$: la racine est négative.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

Deux racines irrationnelles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Écris l'ensemble, par exemple « {2-√5;2+√5} ».

Réponse attendue : `{-1-√3;-1+√3}` — aussi acceptées : {-1-sqrt(3);-1+sqrt(3)} · {-1-sqrt3;-1+sqrt3} · {-1-√(3);-1+√(3)} · -1±√3 · {-1±√3}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule le discriminant $b^2 - 4ac$ avec $a = 1, b = 2, c = -2$.
2. Le discriminant vaut 12, et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
3. Les racines s'écrivent moins b, plus ou moins la racine carrée du discriminant, le tout sur $2a$: simplifie par 2.

CORRECTION

Le discriminant —

$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Les racines —

$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1-\sqrt{3} \qquad x_2 = -1+\sqrt{3}$

$S = \{-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}\}.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2-2√3;-2+2√3}` → Tu as oublié de diviser par $2a = 2$.

`{1-√3;1+√3}` → Le numérateur commence par $-b = -2$, pas par b.

EXERCICE 14 · PRATIQUE

Avec le discriminant réduit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x^2 - 16x + 3 = 0$ à l'aide du discriminant réduit.

Écris l'ensemble, par exemple « {1/2;4} ».

Réponse attendue : `{1/5;3}` — aussi acceptées : {0.2;3}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $b = -16$ est pair : $b' = \dfrac{b}{2} = -8$.
2. Calcule le discriminant réduit $b'^2 - ac$.
3. Les racines s'écrivent moins b', plus ou moins la racine carrée du discriminant réduit, le tout sur a, et non sur $2a$.

CORRECTION

Le discriminant réduit — Avec $b' = -8$:

$b'^2 - ac = 64 - 15 = 49$

Les racines —

$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5} \qquad x_2 = \frac{8+7}{5} = 3$

$S = \left\{\dfrac{1}{5}; 3\right\}$. On vérifie : $\dfrac{1}{5} \times 3 = \dfrac{3}{5} = \dfrac{c}{a}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1/10;3/2}` → Avec le discriminant réduit, on divise par a, pas par $2a$.

EXERCICE 15 · BASE

Sans calculer le discriminant

Résoudre l'équation $x^2 - 7x + 6 = 0$ sans calculer son discriminant.

Écris l'ensemble, par exemple « {2;5} ».

Réponse attendue : `{1;6}` — aussi acceptées : x=1 ou x=6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $a + b + c$.
2. Si $a + b + c = 0$, 1 est racine.

3. L'autre racine est $\frac{c}{a}$.

CORRECTION

Racine évidente —

$a+b+c=1-7+6=0$

$x_1=1 \qquad x_2=\frac{c}{a}=6$

$S=\{1;6\}$: la somme 7 et le produit 6 sont bien $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-1;-6}` → La somme des racines vaut $-\frac{b}{a}=7$: elles sont positives.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

L'autre racine

Vérifier que $x_1=\sqrt{3}$ est une racine de l'équation $-4x^2+x\sqrt{3}+9=0$, puis déterminer l'autre racine x_2.

Donne x_2, sans racine au dénominateur.

Réponse attendue : `-3*sqrt(3)/4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace x par $\sqrt{3}$: tu dois trouver 0.
2. Utilise le produit des racines :
   $x_1x_2=\frac{c}{a}$
3. $\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$: multiplie haut et bas par $\sqrt{3}$.

CORRECTION

Vérifier —

$-4\times 3+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+9=-12+3+9=0$

Le produit —

$\sqrt{3}\times x_2=\frac{9}{-4}$

$x_2=-\frac{9}{4\sqrt{3}}=-\frac{9\sqrt{3}}{12}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x_2=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$; la somme $\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ vaut bien $-\frac{b}{a}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(3)/4` → Le produit $\frac{c}{a}=\frac{9}{-4}$ est négatif : les deux racines sont de signes contraires.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Un terrain rectangulaire

Un terrain rectangulaire a pour périmètre 122 m et pour aire 900 m². Déterminer sa longueur.

Donne la longueur en mètres.

Réponse attendue : 36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le demi-périmètre donne la somme $L + \ell = 61$.
2. L et ℓ sont les racines de :
   $X^2 - 61X + 900 = 0$
3. La longueur est la plus grande des deux racines.

CORRECTION

Somme et produit —

$L + \ell = 61 \qquad L\ell = 900$

$X^2 - 61X + 900 = 0$

Le discriminant —

$b^2 - 4ac = 3721 - 3600 = 121$

Les racines —

$X = \frac{61-11}{2} = 25 \quad \text{ou} \quad X = \frac{61+11}{2} = 36$

Le terrain mesure 36 m sur 25 m.

PIÈGES ANTICIPÉS

25 → 25 m est la largeur : la longueur est la plus grande des deux dimensions.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

Somme et somme des inverses

Trouver deux nombres dont la somme est 11 et dont la somme des inverses est $\dfrac{11}{30}$.

Écris les deux nombres entre accolades, par exemple « {2;9} ».

Réponse attendue : `{5;6}` — aussi acceptées : 5 et 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{u+v}{uv}$.
2. Avec $u + v = 11$, la somme des inverses donne le produit uv.
3. u et v sont les racines de $X^2 - SX + P = 0$.

CORRECTION

Le produit —

$\frac{u+v}{uv} = \frac{11}{30} \iff \frac{11}{uv} = \frac{11}{30} \iff uv = 30$

L'équation —

$X^2 - 11X + 30 = 0$

Le discriminant —

$b^2 - 4ac = 121 - 120 = 1$

$X = \frac{11-1}{2} = 5 \quad \text{ou} \quad X = 6$

Les deux nombres sont 5 et 6 : $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-5;-6}` → La somme doit valoir 11 : l'équation est $X^2 - 11X + 30 = 0$, de racines positives.

EXERCICE 19 · RAISONNEMENT

Les bandes du peintre

Un peintre dispose d'un tissu rectangulaire de longueur 3 m et de largeur 2 m. Il veut y dessiner deux bandes de même largeur x, l'une le long d'une longueur et l'autre le long d'une largeur, de sorte que l'aire des deux bandes soit égale à l'aire de la partie restante. Déterminer la largeur x.

Donne la valeur exacte de x, en mètres.

Réponse attendue : `5/2-sqrt(13)/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La partie restante est un rectangle de côtés $3 - x$ et $2 - x$.
2. Les bandes et la partie restante ont la même aire : chacune vaut la moitié de 6 m².
3. Résous $(3 - x)(2 - x) = 3$, puis garde la solution compatible avec $0 < x < 2$.

CORRECTION

L'équation —

$(3 - x)(2 - x) = 3 \iff x^2 - 5x + 3 = 0$

Les racines — Le discriminant vaut $25 - 12 = 13$.

$x = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ ou $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$

Choisir — Une bande ne peut pas être plus large que le tissu.

$\frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4{,}30 > 2$

$x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \approx 0{,}70$ m.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5+sqrt(13))/2` → Cette racine vaut environ $4{,}30$ m : plus que la largeur du tissu, elle ne convient pas.

EXERCICE 20 · PRATIQUE

Une équation bicarrée

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

Écris l'ensemble, par exemple « {-2;2;-√5;√5} ».

Réponse attendue : `{-1;1;-√6/3;√6/3}` — aussi acceptées : {-1;1;-sqrt(6)/3;sqrt(6)/3}

Maths à la carte
EL KADER HAMMAMI

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $X = x^2$: l'équation devient $3X^2 - 5X + 2 = 0$.
2. Regarde $a + b + c$.
3. Reviens à x : chaque valeur positive de X donne deux valeurs de x.

CORRECTION

Changer d'inconnue —

$X = x^2 \geq 0 : \ 3X^2 - 5X + 2 = 0$

Racine évidente —

$a + b + c = 0 : \ X = 1$ ou $X = \frac{2}{3}$

Revenir à x —

$x^2 = 1 \iff x = \pm 1 \qquad x^2 = \frac{2}{3} \iff x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$S = \left\{-1; -\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}; 1\right\}$: quatre solutions.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1;2/3}` → Ce sont les valeurs de $X = x^2$: il reste à revenir à x.

EXERCICE 21 · PRATIQUE

Une racine égale à une expression

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x + 6} = x - 1$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {2} ».

Réponse attendue : `{5}` — aussi acceptées : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une racine est positive : il faut $x - 1 \geq 0$.
2. Élève au carré : $2x + 6 = (x - 1)^2$.
3. Résous, puis garde seulement les solutions telles que $x \geq 1$.

CORRECTION

La condition —

$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

Élever au carré —

$2x + 6 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 - 4x - 5 = 0$

Les racines —

$a - b + c = 1 + 4 - 5 = 0 : \ x = -1$ ou $x = 5$

Trier — -1 ne vérifie pas $x \geq 1$: $\sqrt{4} = 2 \neq -2$.

$x = 5$

$S = \{5\}$; on vérifie : $\sqrt{16} = 4 = 5 - 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-1;5}` → -1 est solution de l'équation élevée au carré, pas de l'équation de départ : $\sqrt{4} = 2$, pas -2.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

Factoriser un trinôme

Factoriser $A(x) = 5x^2 + 9x - 2$.

Donne A(x) sous forme d'un produit de facteurs.

Réponse attendue : `(5x-1)*(x+2)` — aussi acceptées : 5*(x-1/5)*(x+2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche les racines : calcule le discriminant $b^2 - 4ac$.
2. Le discriminant vaut 121, et sa racine carrée vaut 11.
3. Puis $A(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, sans oublier $a = 5$.

CORRECTION

Le discriminant —

$b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 81 + 40 = 121$

Les racines —

$x_1 = \frac{-9-11}{10} = -2 \qquad x_2 = \frac{-9+11}{10} = \frac{1}{5}$

Factoriser —

$A(x) = 5(x+2)\left(x - \frac{1}{5}\right) = (5x-1)(x+2)$

$A(x) = (5x-1)(x+2)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(x-1/5)*(x+2)` → Il manque le coefficient $a = 5$ devant les facteurs.

EXERCICE 23 · BASE

Tout dans un membre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 - 6x \leq x^2 + x$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;3] ».

Réponse attendue : `[0;7]` — aussi acceptées : [0,7]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ramène tout dans le premier membre.
2. Tu obtiens $x^2 - 7x \leq 0$, que l'on factorise par x.
3. $a > 0$: le trinôme est négatif entre ses racines.

CORRECTION

Un seul membre —

$2x^2 - 6x \leq x^2 + x \iff x^2 - 7x \leq 0$

Factoriser — Racines 0 et 7, $a = 1 > 0$.

$x(x-7) \leq 0$

Le signe —

$0 \leq x \leq 7$

$S = [0;7]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;0]U[7;+inf[` → Avec $a > 0$, le trinôme est négatif ENTRE les racines.

EXERCICE 24 · PRATIQUE

Un trinôme positif ou nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 4x \geq 0$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;1]U[3;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;0]U[4;+inf[` — aussi acceptées :]-∞;0]∪[4;+∞[·]-inf;0] U [4;+inf[· x<=0 ou x>=4 · x≤0 ou x≥4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Factorise : $x^2 - 4x = x(x-4)$.
2. Les racines sont 0 et 4, et $a = 1 > 0$.
3. Le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines, et s'annule aux racines.

CORRECTION

Factoriser —

$x^2 - 4x = x(x-4)$

Le signe — Signe de a, positif, à l'extérieur ; les racines conviennent.

$x(x-4) \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x \geq 4$

$S =]-\infty;0] \cup [4;+\infty[$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[0;4]` → Entre 0 et 4, $x(x-4)$ est négatif : c'est l'extérieur qui convient.

EXERCICE 25 · BASE

Un discriminant négatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + \frac{3}{4}x - 1 \geq 0$.

Écris l'ensemble des solutions ; « ∅ » ou « pas de solution » s'il est vide.

Réponse attendue : ∅

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule le discriminant.
2. Le discriminant vaut $\frac{9}{16} - 4$, il est négatif : pas de racine.

3. Sans racine, le trinôme a partout le signe de a.

CORRECTION

Le discriminant —

$b^2 - 4ac = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = \frac{9}{16} - 4 = -\frac{55}{16} < 0$

Le signe — Signe de $a = -1$.

$-x^2 + \frac{3}{4}x - 1 < 0$ pour tout réel x

Le trinôme est toujours strictement négatif : $S = \varnothing$.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

Un produit positif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(-2x + 3)(4x^2 + 5x + 1) \geq 0$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;-2]U[0;1] ».

Réponse attendue : `]-inf;-1]U[-1/4;3/2]` — aussi acceptées :]-∞;-1]∪[-1/4;3/2] ·]-inf;-1]U[-0.25;1.5] ·]-inf;-1]U[-0,25;1,5] ·]-inf;-1]U[-0,25;3/2] ·]-inf;-1]U[-1/4;1,5] ·]-∞;-1]∪[-1/4;1,5] ·]-∞;-1]∪[-0,25;1,5] · x<=-1 ou -1/4<=x<=3/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche les racines de chaque facteur : $-2x + 3$ s'annule en $\frac{3}{2}$.
2. Pour $4x^2 + 5x + 1$, regarde $a - b + c$.
3. Range -1, $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$ dans un tableau de signes.

CORRECTION

Premier facteur — Positif pour $x < \frac{3}{2}$.

$-2x + 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$

Second facteur — $4x^2 + 5x + 1$ est négatif entre -1 et $-\frac{1}{4}$, positif ailleurs.

$a - b + c = 4 - 5 + 1 = 0 : \ x = -1$ ou $x = -\frac{1}{4}$

Le tableau —

$+$ sur $]-\infty; -1[$, $-$ sur $]-1; -\frac{1}{4}[$, $+$ sur $]-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}[$, $-$ sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$

$S =]-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$, racines comprises.

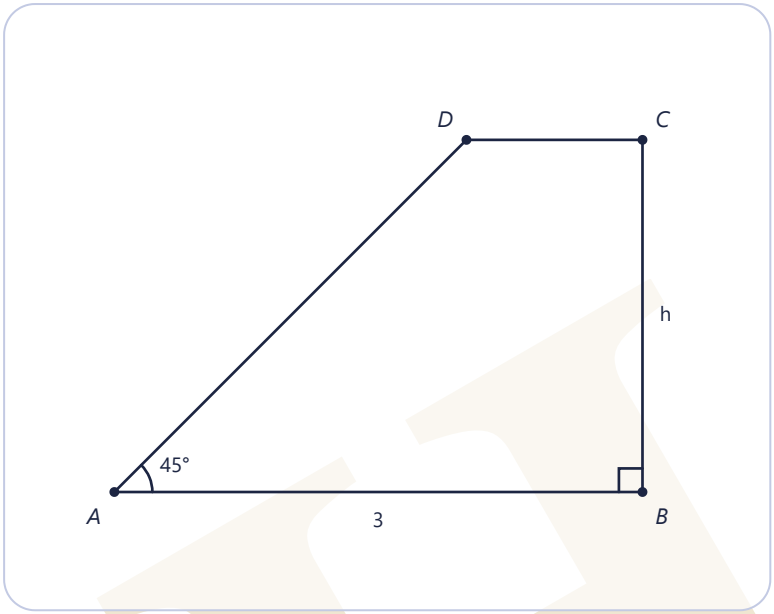
PIÈGES ANTICIPÉS

`[-1;-1/4]U[3/2;+inf[` → Tu as pris les colonnes où le produit est négatif : l'inéquation demande ≥ 0.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

La hauteur du trapèze

Le trapèze rectangle $ABCD$ a pour grande base $AB = 3$, un angle de 45° en A et un angle droit en B. Déterminer sa hauteur $h = BC$ sachant que son aire est égale à 4.



Un trapèze d'aire 4.

Un trapèze rectangle ABCD : la grande base [AB], en bas, mesure 3 ; le côté [BC], à droite, est vertical, perpendiculaire à (AB), et sa longueur est la hauteur h ; la petite base [DC] est en haut. L'angle en A, entre [AB] et [AD], mesure 45°.

Donne la hauteur h.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'angle de 45° fait de la partie gauche un triangle rectangle isocèle : la petite base vaut $3 - h$.
2. Aire d'un trapèze : (grande base + petite base) × hauteur $\div 2$.
3. Tu obtiens $h^2 - 6h + 8 = 0$; garde la racine compatible avec $h < 3$.

CORRECTION

La petite base — Le triangle rectangle de sommet A a deux côtés égaux à h.

$$DC = 3 - h$$

L'aire —

$$\frac{(3+3-h)h}{2} = 4 \iff (6-h)h = 8 \iff h^2 - 6h + 8 = 0$$

Les racines — Le discriminant réduit vaut $9 - 8 = 1$.

$$h = 3 - 1 = 2 \text{ ou } h = 3 + 1 = 4$$

Choisir — Il faut $h < 3$ pour que la petite base $3 - h$ soit positive.

$$h = 2$$

La hauteur vaut 2 (et la petite base 1).

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Avec $h = 4$, la petite base $3 - h$ serait négative : cette racine ne convient pas.

EXERCICE 28 · RAISONNEMENT Le cycliste

Un cycliste effectue un trajet aller et retour entre deux endroits A et B distants de 90 km. Il met au total 5 heures et 15 minutes. Calculer sa vitesse moyenne à l'aller, sachant qu'elle est supérieure de 10 km/h à celle du retour.

Donne la vitesse à l'aller, en km/h.

Réponse attendue : `40`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle v la vitesse du retour : à l'aller, c'est $v+10$. Et 5 h 15 min $= \dfrac{21}{4}$ h.
2. Temps = distance ÷ vitesse : $\dfrac{90}{v+10} + \dfrac{90}{v} = \dfrac{21}{4}$.
3. En chassant les dénominateurs, tu dois obtenir $7v^2 - 170v - 1200 = 0$.

CORRECTION

L'équation —

$\frac{90}{v+10} + \frac{90}{v} = \frac{21}{4}$

Chasser les dénominateurs — On multiplie par $4v(v+10)$.

$360v + 360(v+10) = 21v(v+10) \iff 21v^2 - 510v - 3600 = 0$

Résoudre — On divise par 3.

$7v^2 - 170v - 1200 = 0$

Le discriminant réduit — Avec $b' = -85$:

$b'^2 - ac = 85^2 + 7 \times 1200 = 15625 = 125^2$

Une vitesse est positive.

$v = \frac{85+125}{7} = 30 \quad \text{ou} \quad v = \frac{85-125}{7} < 0$

L'aller —

$v + 10 = 40$

À l'aller, il roule à 40 km/h (et à 30 km/h au retour) : $\dfrac{90}{40} + \dfrac{90}{30} = 2{,}25 + 3 = 5{,}25$ h.

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → 30 km/h est la vitesse du retour : l'aller est plus rapide de 10 km/h.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

Un triangle rectangle de périmètre 56

Déterminer la longueur des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont le périmètre est égal à 56 et l'hypoténuse à 25.

Écris les deux longueurs entre accolades, par exemple « {5;12} ».

Réponse attendue : `{7;24}` — aussi acceptées : 7 et 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si a et b sont les côtés de l'angle droit : $a + b = 56 - 25 = 31$ et $a^2 + b^2 = 625$.

2. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ donne le produit ab.
3. a et b sont alors les racines de $X^2 - 31X + ab = 0$.

CORRECTION

Les données —

$a + b = 31 \qquad a^2 + b^2 = 25^2 = 625$

Le produit —

$2ab = 31^2 - 625 = 961 - 625 = 336 \iff ab = 168$

L'équation —

$X^2 - 31X + 168 = 0$

Le discriminant —

$b^2 - 4ac = 961 - 672 = 289 = 17^2$

$X = \frac{31-17}{2} = 7 \quad \text{ou} \quad X = \frac{31+17}{2} = 24$

Les côtés mesurent 7 et 24 : $7 + 24 + 25 = 56$ et $49 + 576 = 625$.

EXERCICE 30 · DEFI

La pierre dans le puits

Je laisse tomber une pierre dans un puits et, au bout de 3 secondes, j'entends le « plouf ». Un caillou lâché sans vitesse initiale parcourt en t secondes la distance $5t^2$ (en mètres), et le son va à 340 m/s. Quelle est la profondeur du puits ?

Donne la profondeur en mètres, arrondie au dixième.

Réponse attendue : `41.4`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle t la durée de la chute : le son remonte pendant $3 - t$ secondes.
2. La pierre et le son parcourent la même distance :
   $5t^2 = 340(3 - t)$
3. Résous $t^2 + 68t - 204 = 0$ avec le discriminant réduit, garde la racine positive, puis calcule $5t^2$.

CORRECTION

L'équation — On divise par 5.

$5t^2 = 340(3 - t) \iff t^2 + 68t - 204 = 0$

La durée de la chute — Le discriminant réduit vaut $34^2 + 204 = 1360$, et l'autre racine est négative.

$t = -34 + \sqrt{1360} \approx 2{,}878$

La profondeur —

$d = 5t^2 \approx 5 \times 8{,}284 \approx 41{,}4$

Le puits a une profondeur d'environ $41{,}4$ m.

PIÈGES ANTICIPÉS

`45` → Tu as compté 3 secondes de chute : une partie de ces 3 s sert au son pour remonter.

`41.41` / `41.42` → La valeur est la bonne, mais on la demande arrondie au dixième : $41{,}4$ m.

EXERCICE 31 · DEFI

Un facteur commun caché

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 3x - 4 = x^3 - 1$.

Écris l'ensemble, par exemple « {-2;0;2} ».

Réponse attendue : `{-√3;1;√3}` — aussi acceptées : {-sqrt(3);1;sqrt(3)}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. 1 annule les deux membres : factorise chacun par $x - 1$.
2. $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$ et $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.
3. Mets $x - 1$ en facteur dans la différence des deux membres — sans diviser par $x - 1$.

CORRECTION

Factoriser —

$$(x - 1)(x + 4) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x + 4 - x^2 - x - 1) = 0 \iff (x - 1)(3 - x^2) = 0$$

Produit nul —

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 3 \iff x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$$

$$S = \{-\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}\}.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

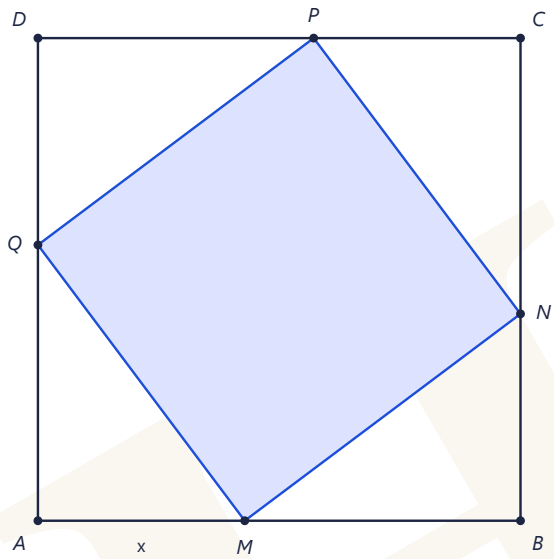
`{-√3;√3}` → En divisant par $x - 1$, tu as perdu la solution $x = 1$: on factorise, on ne divise pas.

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT

Le carré inscrit

$ABCD$ est un carré de côté 7. On place M, N, P, Q respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, avec $AM = BN = CP = DQ = x$. On note $S(x)$ l'aire du quadrilatère $MNPQ$. Déterminer x pour que $S(x) = 25$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAM



Le quadrilatère MNPQ.

Un carré ABCD de côté 7 : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. M est sur [AB], N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA], avec AM = BN = CP = DQ = x. Le quadrilatère MNPQ est dessiné à l'intérieur.

Écris l'ensemble des valeurs de x, par exemple « {1;6} ».

Réponse attendue : `{3;4}` — aussi acceptées : x=3 ou x=4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $S(x)$ est l'aire du carré moins celle des quatre triangles rectangles des coins.
2. Chaque triangle a pour côtés de l'angle droit x et $7-x$: $S(x) = 49 - 2x(7-x)$.
3. Résous $2x^2 - 14x + 49 = 25$.

CORRECTION

L'aire —

$S(x) = 49 - 4 \times \frac{x(7-x)}{2} = 2x^2 - 14x + 49$

L'équation —

$2x^2 - 14x + 49 = 25 \iff x^2 - 7x + 12 = 0$

Somme 7, produit 12 ; les deux sont entre 0 et 7.

$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 4$

$S(x) = 25$ pour $x = 3$ ou $x = 4$: $MN^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

EXERCICE 33 · DEFI

Le poids de l'astronaute

Un astronaute qui pèse 81 kg sur terre pèse $P(x) = 81\left(\dfrac{6400}{6400+x}\right)^2$ kg à l'altitude x km. À quelle altitude pèsera-t-il 25 kg ?

Donne l'altitude en kilomètres.

Réponse attendue : `5120`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $P(x) = 25$, puis divise par 81.
2. $\left(\dfrac{6400}{6400+x}\right)^2 = \dfrac{25}{81}$, et le quotient est positif.
3. $\dfrac{6400}{6400+x} = \dfrac{5}{9}$: fais le produit en croix.

CORRECTION

L'équation —

$\left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2 = \frac{25}{81}$

Le quotient est positif ($x \geq 0$).

$\frac{6400}{6400+x} = \frac{5}{9}$

Produit en croix —

$$5(6400+x) = 57600 \iff 6400 + x = 11520 \iff x = 5120$$

Il pèsera 25 kg à 5120 km d'altitude.

PIÈGES ANTICIPÉS

`14336` → Tu as oublié le carré : $\dfrac{6400}{6400+x}$ vaut $\dfrac{5}{9}$, pas $\dfrac{25}{81}$.

EXERCICE 34 · BASE

L'âge du père

Un père a 41 ans et son fils 9 ans. Déterminer dans combien d'années l'âge du père sera le triple de celui de son fils.

Donne le nombre d'années.

Réponse attendue : `7`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle x le nombre d'années cherché : dans x ans, le père aura $41 + x$ ans. Et le fils ?
2. Les deux âges augmentent de x :
   $41 + x = 3(9 + x)$
3. Développe $3(9+x)$, puis regroupe les x dans un membre.

CORRECTION

Traduire — Dans x ans, le père aura $41 + x$ ans et le fils $9 + x$ ans.

$41 + x = 3(9 + x)$

Résoudre —

$$41 + x = 27 + 3x \iff 14 = 2x \iff x = 7$$

Vérifier — Dans 7 ans : 48 ans et 16 ans.

$48 = 3 \times 16$

Dans 7 ans. On fait vieillir **les deux** personnes de x ans, puis on vérifie.

PIÈGES ANTICIPÉS

14/3 → Le père vieillit aussi : dans x ans, il a $41 + x$ ans, pas 41.

EXERCICE 35 · PRATIQUE

Le réservoir

Un réservoir d'eau est rempli aux $\frac{2}{5}$ de sa capacité. On y verse 120 L : il est alors rempli aux $\frac{7}{10}$. Déterminer la capacité du réservoir en litres.

Donne la capacité en litres.

Réponse attendue : `400`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle C la capacité en litres et traduis : ce qu'il y avait, plus 120, égale ce qu'il y a.
2. L'équation :
   $\frac{2}{5}C + 120 = \frac{7}{10}C$
3. Les 120 L représentent la différence $\frac{7}{10} - \frac{2}{5}$ de la capacité.

CORRECTION

Traduire —

$\frac{2}{5}C + 120 = \frac{7}{10}C$

La différence — $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

$120 = \frac{7}{10}C - \frac{4}{10}C = \frac{3}{10}C$

Résoudre —

$C = \frac{120 \times 10}{3} = 400$

Vérifier —

$\frac{2}{5} \times 400 + 120 = 160 + 120 = 280 = \frac{7}{10} \times 400$

La capacité est 400 L : la quantité ajoutée correspond à la **différence** des deux fractions.

PIÈGES ANTICIPÉS

300 → 120 L ne sont pas les $\frac{2}{5}$ du réservoir : ils font passer de $\frac{2}{5}$ à $\frac{7}{10}$, soit $\frac{3}{10}$ de la capacité.

EXERCICE 36 · BASE

La salle de sport

Une salle de sport propose deux formules. Formule A : 15 dinars la séance. Formule B : un abonnement de 120 dinars, puis 7 dinars la séance. Déterminer à partir de combien de séances la

formule B est strictement moins chère.

Donne le nombre de séances.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour x séances, écris le prix p_A et le prix p_B.
2. Résous l'inéquation :
   $120 + 7x < 15x$
3. Le nombre de séances est un entier : prends le premier entier qui convient.

CORRECTION

Les prix —

$p_A = 15x \qquad p_B = 120 + 7x$

L'inéquation —

$120 + 7x < 15x \iff 120 < 8x \iff x > 15$

Un nombre entier — Pour 15 séances, les deux prix valent 225 dinars ; la formule B gagne dès la séance suivante.

$x = 16$

À partir de 16 séances. On résout $p_B < p_A$, puis on prend le premier entier **strictement** au-delà de 15.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → Pour 15 séances les deux formules coûtent autant (225 dinars) : B n'est pas encore strictement moins chère.

EXERCICE 37 · PRATIQUE

Deux forfaits téléphoniques

Un opérateur A facture 12 dinars par mois plus $0{,}150$ dinar par minute d'appel. Un opérateur B facture seulement $0{,}250$ dinar par minute. Déterminer la durée mensuelle d'appel, en minutes, pour laquelle les deux factures sont égales.

Donne la durée en minutes.

Réponse attendue : 120

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour x minutes : $p_A = 12 + 0{,}15x$ et $p_B = 0{,}25x$.
2. Écris $p_A = p_B$, puis regroupe les termes en x.
3. Il reste $12 = 0{,}1x$.

CORRECTION

Les prix —

$p_A = 12 + 0{,}15x \qquad p_B = 0{,}25x$

Égalité —

$12 + 0{,}15x = 0{,}25x \iff 12 = 0{,}1x \iff x = 120$

Vérifier —

$12 + 0{,}15 \times 120 = 30 = 0{,}25 \times 120$

120 minutes : en dessous, B est moins cher ; au-delà, c'est A. On égale les deux prix et l'on résout.

PIÈGES ANTICIPÉS

`48` → $\dfrac{12}{0{,}25}$ ne tient pas compte des $0{,}150$ dinar par minute de A : c'est la **différence** des prix par minute, $0{,}1$, qui compense le forfait.

`80` → $\dfrac{12}{0{,}15}$ ne compare pas les deux tarifs : écris $12 + 0{,}15x = 0{,}25x$.

EXERCICE 38 · DEFI

Trois tarifs pour imprimer

Une imprimerie propose trois tarifs. Tarif A : $0{,}080$ dinar la page. Tarif B : 30 dinars de forfait plus $0{,}020$ dinar la page. Tarif C : 50 dinars de forfait plus $0{,}005$ dinar la page. Déterminer le plus grand nombre de pages pour lequel le tarif B est strictement le moins cher des trois.

Donne le nombre de pages.

Réponse attendue : `1333`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour x pages, B doit battre A **et** battre C : deux inéquations.
2. B moins cher que C :
   $30 + 0{,}02x < 50 + 0{,}005x$
3. Garde les x qui vérifient les deux conditions, puis le plus grand entier.

CORRECTION

B contre A —

$30 + 0{,}02x < 0{,}08x \iff 30 < 0{,}06x \iff x > 500$

B contre C —

$30 + 0{,}02x < 50 + 0{,}005x \iff 0{,}015x < 20 \iff x < \frac{4000}{3}$

Les deux à la fois — $\dfrac{4000}{3} \approx 1333{,}3.$

$500 < x < \frac{4000}{3}$

Le plus grand entier —

$n = 1333$

1333 pages. Pour être le moins cher des trois, un tarif doit gagner **chaque** comparaison : on résout les deux inéquations et on garde la partie commune.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1334` → Pour 1334 pages, $0{,}015 \times 1334 = 20{,}01 > 20$: C est déjà moins cher. On garde l'entier **en dessous** de $1333{,}3$.

`500` → 500 est le seuil entre A et B : en dessous de 500 pages, A est moins cher. La question demande la limite du côté de C.

EXERCICE 39 · BASE

Diviser par un négatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3 - 2x \geq 7$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `]-inf;-2]` — aussi acceptées :]-∞;-2] ·]-inf,-2]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Retranche 3 aux deux membres.
2. Tu obtiens $-2x \geq 4$: par quel nombre divises-tu, et quel est son signe ?

CORRECTION

Retrancher 3 —

$3 - 2x \geq 7 \iff -2x \geq 4$

Diviser par −2 — On divise par -2, qui est négatif : le sens change.

$x \leq -2$

$S =]-\infty; -2]$. Diviser par un nombre **négatif** change le sens de l'inégalité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-2;+inf[` → Tu as divisé par -2 sans changer le sens : diviser par un nombre négatif retourne l'inégalité.

EXERCICE 40 · PRATIQUE

Une inéquation avec des fractions

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x-3}{4} - \dfrac{2x+1}{6} < \dfrac{1}{3}$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `]-15;+inf[` — aussi acceptées :]-15;+∞[·]-15,+inf[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Multiplie les deux membres par 12, positif : le sens ne change pas.
2. Attention au signe moins devant la deuxième fraction :
   $3(x-3) - 2(2x+1) < 4$
3. Tu obtiens $-x < 15$: divise par -1.

CORRECTION

Multiplier par 12 —

$3(x-3) - 2(2x+1) < 4$

Développer —

$3x - 9 - 4x - 2 < 4 \iff -x - 11 < 4 \iff -x < 15$

Diviser par −1 — Le sens change.

$x > -15$

$S =]-15; +\infty[$. On chasse les dénominateurs avec un multiple commun **positif**, et le moins devant une fraction porte sur tout son numérateur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;-15[` → $-x < 15$ donne $x > -15$: diviser par -1 change le sens.

`]-11;+inf[` → Le moins devant $\dfrac{2x+1}{6}$ porte sur tout le numérateur : $-2(2x+1) = -4x - 2$.

EXERCICE 41 · RAISONNEMENT

La note du troisième devoir

Une élève a obtenu 11 et 8 à deux devoirs de coefficient 1. Le troisième devoir a le coefficient 2. Déterminer la note minimale qu'elle doit obtenir au troisième devoir pour que sa moyenne soit au moins égale à 12.

Donne la note minimale.

Réponse attendue : `29/2` — aussi acceptées : `14.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec les coefficients 1, 1 et 2, la moyenne se calcule sur 4 : $\frac{11+8+2x}{4}$
2. Écris que cette moyenne est supérieure ou égale à 12, puis multiplie par 4.

CORRECTION

L'inéquation —

$\frac{11+8+2x}{4} \geq 12$

Multiplier par 4 —

$19 + 2x \geq 48 \iff 2x \geq 29 \iff x \geq 14{,}5$

Vérifier —

$\frac{11+8+2\times 14{,}5}{4} = \frac{48}{4} = 12$

Il lui faut au moins $14{,}5$. Une moyenne pondérée divise par la **somme des coefficients**.

PIÈGES ANTICIPÉS

`17` → Le troisième devoir compte double : la moyenne est $\dfrac{11+8+2x}{4}$, pas $\dfrac{11+8+x}{3}$.

`8.5` → Avec le coefficient 2, on divise par $1+1+2 = 4$, pas par 3.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

Un segment de centre 1/2

Sur une droite graduée, M a pour abscisse x. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{5}{2}$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `]-2;3[` — aussi acceptées :]-2,3[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\left|x-\frac{1}{2}\right|$ est la distance de M au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
2. On cherche les points à moins de $\frac{5}{2}$ de ce centre :
   $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}<x<\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

CORRECTION

Lire une distance — Le centre est le point d'abscisse $\frac{1}{2}$, le « rayon » $\frac{5}{2}$.

$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{5}{2} \iff -\frac{5}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$

Ajouter 1/2 —

$-2<x<3$

$S=]-2;3[$: l'intervalle **ouvert** de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-2;3]` → L'inégalité est stricte : les bornes -2 et 3, à la distance exactement $\frac{5}{2}$, ne conviennent pas.

`]-3;2[` → $\left|x-\frac{1}{2}\right|$ est la distance au point d'abscisse $+\frac{1}{2}$, pas $-\frac{1}{2}$.

EXERCICE 43 · RAISONNEMENT

Deux fois plus loin

Sur une droite graduée, A et B ont pour abscisses -1 et 5, et M a pour abscisse x. Déterminer les abscisses x des points M tels que $MA=2MB$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;2} ».

Réponse attendue : `{3;11}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis les distances : $MA=|x+1|$ et $MB=|x-5|$.
2. $|x+1|=|2x-10|$: deux nombres de même valeur absolue sont égaux ou opposés.
3. Résous $x+1=2x-10$, puis $x+1=-(2x-10)$.

CORRECTION

Les distances —

$MA=|x+1| \qquad MB=|x-5|$

L'équation —

$|x+1|=2|x-5|=|2x-10|$

Égaux —

$x + 1 = 2x - 10 \iff x = 11$

Opposés —

$x + 1 = -2x + 10 \iff 3x = 9 \iff x = 3$

Vérifier — Pour $x = 3$: $MA = 4$, $MB = 2$. Pour $x = 11$: $MA = 12$, $MB = 6$.

$S = \{3; 11\}$

$x = 3$ ou $x = 11$: un point entre A et B, un autre au-delà de B. Avec $|A| = |B|$, on n'oublie jamais le cas « opposés ».

PIÈGES ANTICIPÉS

`{11}` / `{3}` → Deux nombres de même valeur absolue sont égaux **ou opposés** : il y a deux points M.

EXERCICE 44 · DEFI

Une somme de deux distances

Sur une droite graduée, M a pour abscisse x. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 1| + |x - 5| = 6$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;2} ».

Réponse attendue : `{0;6}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $|x - 1| + |x - 5|$ est la somme des distances de M aux points d'abscisses 1 et 5.
2. Si M est entre 1 et 5, la somme vaut toujours 4. Où M doit-il donc être ?
3. Pour $x > 5$, les deux valeurs absolues s'enlèvent sans changer de signe : $(x - 1) + (x - 5) = 6$.

CORRECTION

Entre 1 et 5 — Pour $1 \leq x \leq 5$, la somme des distances est la longueur du segment.

$|x - 1| + |x - 5| = (x - 1) + (5 - x) = 4 \neq 6$

À droite de 5 —

$x > 5$: $(x - 1) + (x - 5) = 6 \iff 2x = 12 \iff x = 6$

À gauche de 1 —

$x < 1$: $(1 - x) + (5 - x) = 6 \iff -2x = 0 \iff x = 0$

Conclure —

$S = \{0; 6\}$

$S = \{0; 6\}$: deux points symétriques par rapport au milieu 3. On découpe la droite selon les points où chaque valeur absolue change d'écriture.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{6}` / `{0}` → La situation est symétrique par rapport au point d'abscisse 3 : regarde aussi à gauche de 1.

EXERCICE 45 · BASE

Une valeur absolue égale à 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|3x - 6| = 9$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;2} ».

Réponse attendue : `{-1;5}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $9 > 0$: le nombre $3x - 6$ vaut 9 ou -9.
2. Résous les deux équations du premier degré.

CORRECTION

Deux cas —

$3x - 6 = 9 \quad \text{ou} \quad 3x - 6 = -9$

Résoudre —

$3x = 15 \iff x = 5 \qquad 3x = -3 \iff x = -1$

$S = \{-1; 5\}$. $|A| = k$ avec $k > 0$ donne **deux** équations : $A = k$ ou $A = -k$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{5}` → Une valeur absolue égale à 9 : le nombre vaut 9 **ou** -9. Il manque une solution.

EXERCICE 46 · BASE

Une valeur absolue négative ?

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x + 7| = -3$.

Écris l'ensemble des solutions ; « ∅ » ou « pas de solution » s'il est vide.

Réponse attendue : `∅`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quel est le signe d'une valeur absolue ?
2. Une valeur absolue peut-elle être égale à -3 ?

CORRECTION

Le signe — Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.

$|2x + 7| \geq 0 > -3$

Conclure —

$S = \varnothing$

$S = \varnothing$. Avant d'écrire deux cas, on regarde le signe du second membre : $|A| = k$ avec $k < 0$ n'a **pas** de solution.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-2;-5}` → Tu as résolu $2x + 7 = 3$ ou $2x + 7 = -3$: mais l'équation demande une valeur absolue égale à -3, ce qui est impossible.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Deux valeurs absolues égales

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-4| = |3x+2|$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;2} ».

Réponse attendue : `{-3;1/2}` — aussi acceptées : {-3;0.5}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux nombres de même valeur absolue sont égaux ou opposés.
2. Résous $x-4 = 3x+2$, puis $x-4 = -(3x+2)$.

CORRECTION

Égaux —

$x-4 = 3x+2 \iff -6 = 2x \iff x = -3$

Opposés —

$x-4 = -3x-2 \iff 4x = 2 \iff x = \frac{1}{2}$

Vérifier —

$|-7| = |-7| \qquad \left|-\frac{7}{2}\right| = \left|\frac{7}{2}\right|$

$S = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$. $|A| = |B| \iff A = B$ ou $A = -B$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-3}` / `{1/2}` → Deux nombres de même valeur absolue peuvent aussi être **opposés** : il manque un cas.

`{-3;3/2}` → $-(3x+2) = -3x-2$: le moins porte sur les deux termes.

EXERCICE 48 · PRATIQUE

Au moins à distance 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|5-2x| \geq 3$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;1]U[2;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;1]U[4;+inf[` — aussi acceptées :]-inf;1]U[4;+inf[·]-∞;1]U[4;+∞[·]-inf;1]∪[4;+inf[·]-∞;1]∪[4;+∞[· x<=1 ou x>=4 · x≤1 ou x≥4 · [4;+inf[U]-inf;1] · [4;+∞[∪]-∞;1]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $|5-2x| = |2x-5|$: un nombre et son opposé ont la même valeur absolue.
2. $|A| \geq 3$: $A \leq -3$ ou $A \geq 3$.
3. Résous $2x-5 \leq -3$, puis $2x-5 \geq 3$.

CORRECTION

Retourner le signe —

$|5-2x| = |2x-5|$

Deux inéquations —

$2x-5 \leq -3 \iff x \leq 1 \qquad 2x-5 \geq 3 \iff x \geq 4$

Réunir —

$S =]-\infty; 1] \cup [4; +\infty[$

$S =]-\infty;1] \cup [4;+\infty[$: $|A| \geq k$ donne l'**extérieur** de l'intervalle, bornes comprises.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[1;4] / ]1;4[` → $|A| \geq 3$: on garde les nombres **loin** de $\frac{5}{2}$, à l'extérieur, pas ceux de l'intérieur.

EXERCICE 49 · PRATIQUE

Un quotient égal à 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3x+1}{x-2} = 4$.

Donne la solution x.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris d'abord la valeur interdite : le dénominateur ne doit pas être nul.
2. Pour $x \neq 2$, multiplie les deux membres par $x-2$:
   $3x+1 = 4(x-2)$
3. Vérifie que la solution trouvée n'est pas la valeur interdite.

CORRECTION

Valeur interdite —

$x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2$

Chasser le dénominateur —

$3x+1 = 4(x-2) \iff 3x+1 = 4x-8 \iff x = 9$

Vérifier — $9 \neq 2$ et :

$\frac{3\times9+1}{9-2} = \frac{28}{7} = 4$

$S = \{9\}$. Valeur interdite d'abord, puis produit en croix, puis vérification.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Tout le dénominateur est multiplié par 4 : $4(x-2) = 4x-8$, pas $4x-2$.

EXERCICE 50 · PRATIQUE

Deux quotients égaux

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x+5}{x-1} = \dfrac{x-3}{x+2}$.

Donne la solution x, sous forme de fraction irréductible.

Réponse attendue : `-7/11`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Valeurs interdites : $x \neq 1$ et $x \neq -2$.
2. Produit en croix :
   $(x+5)(x+2) = (x-3)(x-1)$

3. Développe : les x^2 disparaissent.

CORRECTION

Valeurs interdites —

$x \neq 1 \quad \text{et} \quad x \neq -2$

Produit en croix —

$(x+5)(x+2) = (x-3)(x-1)$

Développer —

$x^2 + 7x + 10 = x^2 - 4x + 3 \iff 11x = -7$

Conclure — $-\dfrac{7}{11}$ n'est pas une valeur interdite.

$x = -\frac{7}{11}$

$S = \left\{-\dfrac{7}{11}\right\}$. Après le produit en croix, on développe **avant** de parler de degré : ici les carrés s'éliminent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7/11` → $11x = -7$ donne $x = -\dfrac{7}{11}$: le signe compte.

`-0.64 / -0.63 / -0.6` → On demande la valeur exacte : $-\dfrac{7}{11}$.

EXERCICE 51 · RAISONNEMENT **Une solution interdite**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2x+4}{x-1} = \dfrac{6}{x-1}$.

Écris l'ensemble des solutions ; « ∅ » ou « pas de solution » s'il est vide.

Réponse attendue : ∅

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est la valeur interdite ?
2. Pour $x \neq 1$, les dénominateurs sont égaux : il reste $2x + 4 = 6$.
3. La valeur trouvée est-elle permise ?

CORRECTION

Valeur interdite —

$x \neq 1$

Les numérateurs —

$2x + 4 = 6 \iff x = 1$

Écarter — 1 est la valeur interdite : les deux quotients n'existent pas pour $x = 1$.

$S = \varnothing$

$S = \varnothing$. Une solution de l'équation « sans dénominateur » qui est une valeur interdite **s'écarte**.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{1} / 1` → Pour $x = 1$, le dénominateur $x - 1$ est nul : les quotients n'existent pas. Cette valeur est interdite.

EXERCICE 52 · RAISONNEMENT

Deux robinets

Un robinet A remplit seul un bassin en 6 heures. Avec un second robinet B ouvert en même temps, le bassin se remplit en 4 heures. Déterminer le temps, en heures, que mettrait B pour remplir seul le bassin.

Donne le temps en heures, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En une heure, A remplit $\dfrac{1}{6}$ du bassin. Si B le remplit seul en x heures, il en remplit $\dfrac{1}{x}$ par heure.
2. Ensemble, ils remplissent $\dfrac{1}{4}$ du bassin par heure :
   $\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$
3. Isole $\dfrac{1}{x}$.

CORRECTION

Par heure —

$\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \qquad (x > 0)$

Isoler —

$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$

Conclure —

$x = 12$

B seul met 12 heures. Dans un problème de débits, ce sont les **fractions remplies par heure** qui s'ajoutent, pas les durées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Les durées ne se soustraient pas : ce sont les débits $\dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{x}$ (fractions du bassin par heure) qui s'additionnent.

`10` → Avec deux robinets, on va **plus vite** : B seul met plus de 4 heures, mais on ne l'obtient pas en ajoutant les durées.

EXERCICE 53 · BASE

Une racine égale à 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x - 1} = 3$.

Donne la solution x.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La racine est définie pour $2x - 1 \geq 0$.
2. $3 \geq 0$: $\sqrt{A} = 3 \iff A = 3^2$.

CORRECTION

La condition —

$2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$

Élever au carré —

$2x - 1 = 9 \iff x = 5$

Vérifier —

$\sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$

$S = \{5\}$. $\sqrt{A} = k$, avec $k \geq 0$, équivaut à $A = k^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Pour enlever la racine, on élève au carré : $2x - 1 = 3^2 = 9$, pas 3.

EXERCICE 54 · RAISONNEMENT

Comparer deux racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{4 - x} \leq \sqrt{2x + 1}$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `[1;4]` — aussi acceptées : [1,4]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux racines doivent être définies : $4 - x \geq 0$ et $2x + 1 \geq 0$.
2. Deux nombres positifs se rangent comme leurs carrés :
   $4 - x \leq 2x + 1$
3. Garde les x qui vérifient les conditions **et** l'inéquation.

CORRECTION

Les conditions —

$4 - x \geq 0$ et $2x + 1 \geq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

Comparer les carrés —

$4 - x \leq 2x + 1 \iff 3 \leq 3x \iff x \geq 1$

Partie commune —

$S = [1; 4]$

$S = [1; 4]$. On écrit les conditions d'existence, on compare les carrés, puis on prend la **partie commune**.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[1;+inf[` → Pour $x > 4$, $\sqrt{4 - x}$ n'existe pas : il faut garder la condition $x \leq 4$.

EXERCICE 55 · RAISONNEMENT

Où la racine existe

Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $\sqrt{5-|x-2|}$ est définie.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `[-3;7]` — aussi acceptées : [-3,7]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une racine carrée est définie quand le nombre sous la racine est positif ou nul.
2. $5-|x-2| \geq 0 \iff |x-2| \leq 5$: une distance au point d'abscisse 2.
3. $|x-a| \leq r \iff a-r \leq x \leq a+r$.

CORRECTION

La condition —

$$5-|x-2| \geq 0 \iff |x-2| \leq 5$$

Une distance — Les points à au plus 5 du point d'abscisse 2.

$$2-5 \leq x \leq 2+5$$

Conclure —

$$S=[-3;7]$$

L'expression est définie sur $[-3;7]$: la condition d'une racine devient ici une inéquation avec une valeur absolue.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-3;7[` → Pour $x=-3$ ou $x=7$, on a $\sqrt{0}=0$: la racine existe, les bornes sont comprises.

`[-7;3]` → $|x-2|$ est la distance au point d'abscisse $+2$: le centre est 2, pas -2.

EXERCICE 56 · DEFI

Une somme de deux racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$.

Donne la solution x.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Conditions : $x \geq 2$. Élève au carré les deux membres (ils sont positifs).
2. $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2 = A+B+2\sqrt{AB}$: isole la racine qui reste.
   $2\sqrt{(x+3)(x-2)} = 24-2x$
3. Élève encore au carré, en exigeant $12-x \geq 0$: les x^2 s'éliminent.

CORRECTION

Conditions —

$$x+3 \geq 0 \text{ et } x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$$

Premier carré —

$(x+3)+(x-2)+2\sqrt{(x+3)(x-2)}=25 \iff \sqrt{(x+3)(x-2)}=12-x$

Second carré — Avec $x \leq 12$:

$x^2+x-6=144-24x+x^2 \iff 25x=150 \iff x=6$

Vérifier —

$\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$

$S=\{6\}$. Le carré d'une somme a un **double produit** : on isole la racine restante, on élève encore au carré, et l'on vérifie.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2 \neq A+B$: il manque le double produit $2\sqrt{AB}$. D'ailleurs $\sqrt{15}+\sqrt{10} \neq 5$.

EXERCICE 57 · BASE

Factoriser par x

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2-12x=0$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;2} ».

Réponse attendue : `{0;4}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il n'y a pas de terme constant : mets $3x$ en facteur.
2. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

CORRECTION

Factoriser —

$3x^2-12x=3x(x-4)$

Produit nul —

$3x=0$ ou $x-4=0 \iff x=0$ ou $x=4$

$S=\{0;4\}$. Quand $c=0$, on factorise par x ; on ne divise jamais par x.

PIÈGES ANTICIPÉS

{4} → En divisant par x, tu as perdu la solution $x=0$: on factorise.

EXERCICE 58 · RAISONNEMENT

Un carré dont l'aire quadruple

Quand on augmente de 4 cm le côté d'un carré, son aire est multipliée par 4. Déterminer le côté du carré de départ, en cm.

Donne le côté en cm.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle x le côté (en cm, $x>0$) : la nouvelle aire est $(x+4)^2$.

2. L'équation :
   $(x+4)^2 = 4x^2$
3. $4x^2 = (2x)^2$: deux carrés égaux, et des nombres positifs.

CORRECTION

Traduire —

$(x+4)^2 = 4x^2 = (2x)^2$

Des longueurs positives — $x+4$ et $2x$ sont positifs : leurs carrés sont égaux si et seulement s'ils sont égaux.

$x+4 = 2x \iff x = 4$

Vérifier —

$8^2 = 64 = 4 \times 4^2$

Le carré mesure 4 cm de côté. On aurait aussi pu développer : $3x^2 - 8x - 16 = 0$ a pour racines 4 et $-\frac{4}{3}$, et une longueur est positive.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/sqrt(3) / 4*sqrt(3)/3` → $(x+4)^2 \neq x^2 + 16$: il manque le double produit $8x$.

`-4/3` → $-\frac{4}{3}$ est bien une racine de l'équation, mais une longueur est positive.

EXERCICE 59 · DEFI

Deux robinets, une équation du second degré

Deux robinets ouverts ensemble remplissent un bassin en 6 heures. Seul, le robinet A met 5 heures de moins que le robinet B. Déterminer le temps, en heures, que met B seul pour remplir le bassin.

Donne le temps en heures, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si B met x heures, A met $x-5$ heures (donc $x > 5$). Additionne les fractions remplies en une heure.
2. L'équation :
   $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6}$
3. Multiplie par $6x(x-5)$: tu obtiens une équation du second degré. Garde la racine qui respecte $x > 5$.

CORRECTION

Par heure —

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6} \qquad (x > 5)$

Chasser les dénominateurs —

$6(x-5) + 6x = x(x-5) \iff x^2 - 17x + 30 = 0$

Résoudre —

$\Delta = 289 - 120 = 169 = 13^2 \qquad x = \frac{17-13}{2} = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{17+13}{2} = 15$

Choisir — $x = 2$ donnerait à A un temps négatif ; on garde 15, et A met 10 heures.

$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{2+3}{30} = \frac{1}{6}$

B seul met 15 heures. Le problème mène à une équation du second degré : on vérifie **chaque** racine contre les conditions du problème.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Avec $x = 2$, A mettrait $2 - 5 = -3$ heures : cette racine ne convient pas au problème.

`10` → 10 heures, c'est le temps de A. La question porte sur B, qui met 5 heures de plus.

EXERCICE 60 · BASE

Le début d'un carré

On écrit $x^2 + 8x + 3$ sous la forme $(x + p)^2 + q$. Déterminer le réel q.

Donne la valeur de q.

Réponse attendue : `-13`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La moitié de 8 est 4 : développe $(x + 4)^2$.
2. $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$: ajoute ensuite 3.

CORRECTION

Le début du carré —

$$x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$$

Ajouter 3 —

$$x^2 + 8x + 3 = (x + 4)^2 - 13$$

$q = -13$ (et $p = 4$) : on prend la **moitié** du coefficient de x, et l'on retranche son carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-5` → Tu as retranché 8 : c'est le **carré** de 4, soit 16, qu'il faut retrancher.

`19` → $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$: il y a 16 de trop, on le **retranche**.

EXERCICE 61 · PRATIQUE

Mettre a en facteur

On écrit $2x^2 - 12x + 7$ sous la forme $2\left[(x + p)^2 + q\right]$. Déterminer le réel q, en valeur exacte.

Donne la valeur de q.

Réponse attendue : `-11/2` — aussi acceptées : -5.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mets 2 en facteur : $2x^2 - 12x + 7 = 2\left[x^2 - 6x + \frac{7}{2}\right]$.
2. $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$.

CORRECTION

Mettre 2 en facteur —

$2x^2 - 12x + 7 = 2\left[x^2 - 6x + \frac{7}{2}\right]$

Le début du carré —

$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$

Réduire — $-9 + \dfrac{7}{2} = -\dfrac{11}{2}$.

$2x^2 - 12x + 7 = 2\left[(x-3)^2 - \frac{11}{2}\right]$

$q = -\dfrac{11}{2}$ et $p = -3$. On met d'abord a en facteur — **y compris** devant le terme constant.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → En mettant 2 en facteur, le terme constant devient $\dfrac{7}{2}$, pas 7.

EXERCICE 62 · BASE

Calculer un discriminant

Calculer le discriminant Δ de l'équation $-3x^2 + 5x + 2 = 0$.

Donne la valeur de Δ.

Réponse attendue : 49

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = -3, b = 5, c = 2$.
2. Garde le signe de a : $-4ac = -4 \times (-3) \times 2$.

CORRECTION

Les coefficients —

$a = -3 \qquad b = 5 \qquad c = 2$

Le discriminant —

$\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25 + 24 = 49$

$\Delta = 49$. On remplace a, b et c **avec leurs signes**.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → $a = -3$ est négatif : $-4ac = -4 \times (-3) \times 2 = +24$.

EXERCICE 63 · RAISONNEMENT

Une valeur maximale

Soit $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$. En écrivant $f(x)$ sous forme canonique, déterminer la plus grande valeur que peut prendre $f(x)$, en valeur exacte.

Donne la valeur maximale.

Réponse attendue : 11/2 — aussi acceptées : 5.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mets -2 en facteur, puis $x^2 - 3x = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$.
2. Tu dois trouver :
   $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$
3. $-2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$ est négatif ou nul : quand est-il nul ?

CORRECTION

Mettre −2 en facteur —
$f(x) = -2\left[x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right]$

Le début du carré —
$f(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\right] = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$

Le maximum — Le carré est nul pour $x = \dfrac{3}{2}$, positif sinon.

$f(x) \leq \frac{11}{2}$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{2}$

Le maximum vaut $\dfrac{11}{2}$, atteint pour $x = \dfrac{3}{2}$: avec $a < 0$, la forme canonique est la plus grande quand le carré est nul.

PIÈGES ANTICIPÉS

3/2 → $\dfrac{3}{2}$ est la valeur de x où le maximum est atteint ; la question demande la valeur de $f(x)$.

1 → $f(0) = 1$, mais $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{11}{2}$ est plus grand : regarde la forme canonique.

EXERCICE 64 · BASE

À la manière d'Al-Khawarizmi

Utiliser la méthode d'Al-Khawarizmi pour trouver la solution positive de l'équation $x^2 + 6x = 16$.

Donne la solution positive.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Borde le carré de côté x de deux rectangles de côtés x et 3 : il manque un petit carré de côté 3.
2. La figure donne :
   $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$

CORRECTION

La figure —
$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$

L'équation —
$(x + 3)^2 - 9 = 16 \iff (x + 3)^2 = 25$

La solution positive — $x + 3$ est positif.

$x + 3 = 5 \iff x = 2$

$x = 2$. Compléter le carré, c'est ajouter le petit carré de côté la **moitié** du coefficient de x.

PIÈGES ANTICIPÉS

-8 → -8 vérifie bien l'équation, mais on demande la solution **positive**.

5 → 5 est le côté $x + 3$ du grand carré : il reste à retrancher 3.

EXERCICE 65 · PRATIQUE

Le grand carré

Pour résoudre $x^2 + 14x = 51$, on borde un carré de côté x de deux rectangles de côtés x et 7, puis on complète la figure par un petit carré pour obtenir un grand carré de côté $x + 7$. Calculer l'aire du grand carré, sans écrire l'unité.

Donne l'aire du grand carré.

Réponse attendue : `100`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La partie colorée (le carré et les deux rectangles) a pour aire $x^2 + 14x$, c'est-à-dire 51.
2. Le grand carré, c'est la partie colorée plus le petit carré de côté 7.

CORRECTION

La partie colorée —

$x^2 + 2 \times 7x = 51$

Ajouter le petit carré —

$(x + 7)^2 = 51 + 7^2 = 100$

La solution — On en déduit $x + 7 = 10$, soit $x = 3$.

$(x + 7)^2 = 100$

Le grand carré a pour aire 100, donc pour côté 10, et $x = 3$. L'aire du grand carré, c'est le second membre **plus** le petit carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

51 → 51 est l'aire de la partie colorée seulement ; il faut lui ajouter le petit carré de côté 7.

65 → Le petit carré a pour côté 7, donc pour aire 49, pas 14.

EXERCICE 66 · RAISONNEMENT

Des rectangles de largeur 3/2

Utiliser la méthode d'Al-Khawarizmi pour trouver la solution positive de l'équation $x^2 + 3x = 10$.

Donne la solution positive.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux rectangles ont pour côtés x et $\frac{3}{2}$: le petit carré a pour côté $\frac{3}{2}$.
2. La figure donne :
   $x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$
3. $10 + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$.

CORRECTION

La figure —

$x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

L'équation —

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$

La solution positive —

$x + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \iff x = 2$

$x = 2$. Même avec un coefficient impair, chaque rectangle a pour largeur la **moitié** du coefficient de x.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-5` → -5 vérifie l'équation, mais Al-Khawarizmi ne cherchait que la solution **positive**.

`sqrt(19)-3` → Chaque rectangle a pour largeur $\frac{3}{2}$, pas 3 : le petit carré a pour aire $\frac{9}{4}$.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Avec la formule des racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;2} ».

Réponse attendue : `{-2;1/2}` — aussi acceptées : {-2;0.5}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. $\Delta = 25$: deux racines $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Le dénominateur est $2a = 4$.

CORRECTION

Le discriminant —

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

Les racines —

$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \qquad x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$. $\Delta > 0$: deux racines, $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2;-1/2}` → Le numérateur commence par $-b = -3$, pas par b.

`{-4;1}` → On divise par $2a = 4$, pas par 2.

EXERCICE 68 · PRATIQUE

Des racines irrationnelles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 4x - 2 = 0$. Donner les valeurs exactes.

Écris l'ensemble, par exemple « {(1-√5)/2;(1+√5)/2} ».

Réponse attendue : `{(2-√10)/3;(2+√10)/3}` — aussi acceptées : {(2-sqrt(10))/3;(2+sqrt(10))/3} · {(2-√(10))/3;(2+√(10))/3} · (2±√10)/3 · {(4-2√10)/6;(4+2√10)/6} · {2/3-√10/3;2/3+√10/3}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-2)$.
2. $\Delta = 40$ et $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
3. Simplifie $\dfrac{4 \pm 2\sqrt{10}}{6}$ par 2.

CORRECTION

Le discriminant —

$\Delta = 16 + 24 = 40 > 0 \qquad \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Les racines —

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$

Conclure —

$S = \left\{ \frac{2-\sqrt{10}}{3} ; \frac{2+\sqrt{10}}{3} \right\}$

Deux racines irrationnelles : on simplifie $\sqrt{\Delta}$, puis la fraction.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{(-2-√10)/3;(-2+√10)/3}` → Le numérateur commence par $-b = +4$: les racines sont $\dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$.

`{-0.39;1.72}` / `{-0.4;1.7}` → On demande les valeurs exactes : garde $\sqrt{10}$.

EXERCICE 69 · RAISONNEMENT

Une seule racine

Déterminer le réel m pour lequel l'équation $x^2 - 6x + m = 0$ admet une seule racine.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une seule racine : le discriminant est nul.
2. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times m = 36 - 4m$.

CORRECTION

Le discriminant —

$\Delta = 36 - 4m$

Une seule racine —

$\Delta = 0 \iff 36 - 4m = 0 \iff m = 9$

Vérifier — La racine est 3.

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

$m = 9$: l'équation devient $(x - 3)^2 = 0$. Une seule racine $\iff \Delta = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

36 → $\Delta = 36 - 4m$ s'annule pour $m = \dfrac{36}{4}$: il faut diviser par 4.

-9 → $36 - 4m = 0$ donne $4m = 36$: m est positif.

EXERCICE 70 · RAISONNEMENT

L'enclos contre le mur

Un éleveur dispose de 60 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire adossé à un mur : le grillage ne couvre que trois côtés, deux largeurs x et une longueur. Déterminer l'aire maximale de l'enclos, sans écrire l'unité.

Donne l'aire maximale.

Réponse attendue : `450`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La longueur vaut $60 - 2x$, donc l'aire vaut $x(60 - 2x)$, avec $0 < x < 30$.
2. Forme canonique :
   $-2x^2 + 60x = -2\left[(x - 15)^2 - 225\right]$
3. Le carré est nul pour $x = 15$.

CORRECTION

L'aire —

$\mathcal{A}(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$

Forme canonique —

$\mathcal{A}(x) = -2\left[(x - 15)^2 - 225\right] = -2(x - 15)^2 + 450$

Le maximum — Pour $x = 15$ m, la longueur vaut 30 m.

$\mathcal{A}(x) \leq 450 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(15) = 450$

L'aire maximale est 450 m², pour un enclos de 15 m sur 30 m. La forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a < 0$ donne le maximum β.

PIÈGES ANTICIPÉS

225 → Le mur sert de quatrième côté : le grillage ne fait que trois côtés, la longueur vaut $60 - 2x$.

15 → 15 m est la largeur qui donne le maximum ; on demande l'aire.

Maths à la carte · ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 71 · DEFI

La recette maximale

Un commerçant vend 200 articles par jour au prix de 5 dinars. Il constate que chaque baisse de $0{,}100$ dinar du prix lui fait vendre 10 articles de plus. Déterminer sa recette journalière maximale, en dinars.

Donne la recette maximale en dinars.

Réponse attendue : 1225

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Après n baisses, le prix est $5 - 0{,}1n$ et il vend $200 + 10n$ articles.
2. La recette :
   $R = (5 - 0{,}1n)(200 + 10n) = -n^2 + 30n + 1000$
3. Écris R sous forme canonique.

CORRECTION

La recette —

$$R = (5 - 0{,}1n)(200 + 10n) = 1000 + 50n - 20n - n^2 = -n^2 + 30n + 1000$$

Forme canonique —

$$R = -\left[(n - 15)^2 - 225\right] + 1000 = -(n - 15)^2 + 1225$$

Le maximum — Pour $n = 15$: prix $3{,}500$ dinars, 350 articles.

$$R_{\max} = 3{,}5 \times 350 = 1225$$

La recette maximale est 1225 dinars, au prix de $3{,}500$ dinars. On exprime la grandeur en fonction **d'une seule** inconnue, puis on lit le maximum sur la forme canonique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1000` → 1000 dinars est la recette sans baisse ; en baissant un peu le prix, il vend davantage et gagne plus.

`3.5` → $3{,}500$ dinars est le meilleur prix ; la question demande la recette.

EXERCICE 72 · BASE

Calculer Δ'

Calculer le discriminant réduit Δ' de l'équation $3x^2 - 10x + 2 = 0.$

Donne la valeur de Δ'.

Réponse attendue : 19

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $b = -10$ est pair : $b' = \dfrac{b}{2}.$
2. $\Delta' = b'^2 - ac.$

CORRECTION

b prime —

$b' = \frac{-10}{2} = -5$

Le discriminant réduit —

$\Delta' = (-5)^2 - 3 \times 2 = 25 - 6 = 19$

$\Delta' = 19$ (et $\Delta = 4\Delta' = 76$). Avec Δ', on retranche ac, sans le facteur 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`76` → 76 est $\Delta = b^2 - 4ac$; le discriminant réduit est $b'^2 - ac = \dfrac{\Delta}{4}$.

`31` → $\Delta' = b'^2 - ac$: on **retranche** $ac = 6$.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

Deux racines avec Δ'

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 4x - 1 = 0$ à l'aide du discriminant réduit.

Écris l'ensemble, par exemple « {1-√2;1+√2} ».

Réponse attendue : `{-2-√5;-2+√5}` — aussi acceptées : {-2-sqrt(5);-2+sqrt(5)} · {-2-√(5);-2+√(5)} · -2±√5 · {-2±√5}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $b' = 2$, puis $\Delta' = b'^2 - ac$.
2. $x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$: on divise par a, pas par $2a$.

CORRECTION

b prime —

$b' = 2 \qquad \Delta' = 2^2 - 1 \times (-1) = 5 > 0$

Les racines —

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{5}}{1} = -2 - \sqrt{5} \qquad x_2 = -2 + \sqrt{5}$

$S = \{-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}\}$. Avec Δ' : $\dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2-√5;2+√5}` → Le numérateur commence par $-b' = -2$.

`{(-2-√5)/2;(-2+√5)/2}` → Avec le discriminant réduit, on divise par $a = 1$, pas par $2a$.

EXERCICE 74 · PRATIQUE

Un coefficient en racine

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 6 = 0$ à l'aide du discriminant réduit.

Écris l'ensemble, par exemple « {-√3;2√3} ».

Réponse attendue : `{-√2;3√2}` — aussi acceptées : {-sqrt(2);3sqrt(2)} · {-sqrt(2);3*sqrt(2)} · {-√(2);3√(2)}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $b = -2\sqrt{2}$, donc $b' = -\sqrt{2}$.
2. $\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1 \times (-6)$.
3. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

CORRECTION

b prime —

$b' = -\sqrt{2}$ $\quad$ $\Delta' = 2 + 6 = 8 > 0$ $\quad$ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Les racines —

$x_1 = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ $\quad$ $x_2 = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$S = \{-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\}$. Le discriminant réduit est commode dès que b s'écrit $2b'$, même avec une racine.

PIÈGES ANTICIPÉS

{-√2/2;3√2/2} → Avec Δ', on divise par $a = 1$, pas par $2a$.

{√2;-3√2} → $-b' = +\sqrt{2}$: les racines sont $\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}$.

EXERCICE 75 · BASE

Le produit des racines

L'équation $4x^2 - 8x - 5 = 0$ admet deux racines x_1 et x_2. Sans les calculer, déterminer le produit $P = x_1 x_2$, en valeur exacte.

Donne la valeur de P.

Réponse attendue : `-5/4` — aussi acceptées : -1.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$.
2. Ici $a = 4$ et $c = -5$.

CORRECTION

Deux racines — a et c sont de signes contraires, donc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

$\Delta = 64 + 80 = 144$

Le produit —

$P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$

$P = -\dfrac{5}{4}$ (et $S = -\dfrac{b}{a} = 2$). Le produit est $\dfrac{c}{a}$, la somme $-\dfrac{b}{a}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/4 → $c = -5$: le produit $\dfrac{c}{a}$ est négatif.

2 → 2 est la somme $-\dfrac{b}{a}$; le produit est $\dfrac{c}{a}$.

EXERCICE 76 · DEFI

La somme des cubes

L'équation $x^2 - 7x + 3 = 0$ admet deux racines x_1 et x_2. Sans les calculer, déterminer $x_1^3 + x_2^3$.

Donne la valeur de $x_1^3 + x_2^3$.

Réponse attendue : 280

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$.
2. Développe $(x_1 + x_2)^3$:
   $S^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2)$
3. Donc $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$.

CORRECTION

Deux racines —

$\Delta = 49 - 12 = 37 > 0$

Somme et produit —

$S = 7 \qquad P = 3$

Le cube de la somme —

$S^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3PS$

Conclure —

$x_1^3 + x_2^3 = 7^3 - 3 \times 3 \times 7 = 343 - 63 = 280$

$x_1^3 + x_2^3 = 280$. Une expression **symétrique** des racines s'écrit avec S et P seulement.

PIÈGES ANTICIPÉS

322 → $(x_1 + x_2)^3$ contient $3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 = 3PS$: le facteur 3 compte.

343 → $x_1^3 + x_2^3 \neq (x_1 + x_2)^3$: il faut retrancher $3PS$.

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Le paramètre, puis l'autre racine

On sait que $x_1 = -2$ est une racine de l'équation $x^2 + mx - 6 = 0$, où m est un réel.

Déterminer l'autre racine x_2.

Donne x_2, l'autre racine.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a} = -6$, quel que soit m.
2. $-2 \times x_2 = -6$.

CORRECTION

Le produit —

$x_1x_2 = \frac{c}{a} = -6 \iff -2 \times x_2 = -6 \iff x_2 = 3$

Le paramètre — La somme donne m : $-2 + 3 = -m$.

$m = -1$

Vérifier —

$(-2)^2 - (-2) - 6 = 0 \qquad 3^2 - 3 - 6 = 0$

L'autre racine est 3 (et $m = -1$). Le **produit** $\dfrac{c}{a}$ ne dépend pas de m : il donne l'autre racine directement.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3` → $-2 \times x_2 = -6$ donne $x_2 = 3$: le produit de deux nombres négatifs serait positif.

`-1` → -1 est la valeur de m ; la question demande l'autre racine.

EXERCICE 78 · BASE **a + b + c = 0**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, sans calculer le discriminant, l'équation $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {-1;2} ».

Réponse attendue : `{-2/5;1}` — aussi acceptées : {-0.4;1}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $a + b + c$.
2. Si $a + b + c = 0$, alors 1 est racine et l'autre racine est $\dfrac{c}{a}$.

CORRECTION

Racine évidente —

$a + b + c = 5 - 3 - 2 = 0 \quad$ donc $x_1 = 1$

L'autre racine —

$x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{5}$

$S = \left\{-\dfrac{2}{5}; 1\right\}$. On teste $a + b + c$ et $a - b + c$ **avant** tout calcul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2/5;1}` → L'autre racine est $\dfrac{c}{a} = \dfrac{-2}{5}$: c est négatif.

EXERCICE 79 · RAISONNEMENT **Une racine évidente avec √2**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2}\,x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$. Donner les valeurs exactes, sans racine au dénominateur.

Écris l'ensemble, par exemple « {-√3/3;1} ».

Réponse attendue : `{-√2/2;1}` — aussi acceptées : {-sqrt(2)/2;1} · {-√(2)/2;1}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $a + b + c$ avec $a = \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}, c = -1$.

2. L'autre racine est $\frac{c}{a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: rends le dénominateur rationnel.

CORRECTION

Racine évidente —

$a + b + c = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} - 1 = 0 \quad \text{donc } x_1 = 1$

L'autre racine —

$x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right\}$. La règle $a + b + c = 0$ marche aussi avec des coefficients irrationnels.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{√2/2;1}` → $c = -1$ et $a = \sqrt{2} > 0$: l'autre racine $\frac{c}{a}$ est négative.

EXERCICE 80 · DEFI

Une racine pour tout m

Pour un réel $m \neq -2$, on considère l'équation $(m+2)x^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0$. Vérifier que 1 en est une racine quel que soit m, puis déterminer m pour que l'autre racine soit égale à 3.

Donne la valeur de m.

Réponse attendue : `-7/2` — aussi acceptées : -3.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $a + b + c$: les m s'éliminent.
2. L'autre racine vaut $\frac{c}{a} = \frac{m-1}{m+2}$.
3. Résous $\frac{m-1}{m+2} = 3$, avec $m \neq -2$.

CORRECTION

Racine évidente —

$a + b + c = (m+2) - (2m+1) + (m-1) = 0$

L'autre racine —

$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{m+2}$

L'équation en m —

$\frac{m-1}{m+2} = 3 \iff m - 1 = 3m + 6 \iff m = -\frac{7}{2}$

Vérifier — Pour $m = -\frac{7}{2}$: $a = -\frac{3}{2}$, $c = -\frac{9}{2}$.

$\frac{c}{a} = \frac{-9/2}{-3/2} = 3$

$m = -\frac{7}{2}$. Une racine évidente « pour tout m » se repère avec $a + b + c$; l'autre racine se lit ensuite sur $\frac{c}{a}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/2 → L'autre racine est $\frac{c}{a} = \frac{m-1}{m+2}$, pas $\frac{a}{c}$.

EXERCICE 81 · BASE

Somme 13, produit 40

Déterminer deux réels dont la somme vaut 13 et le produit 40.

Écris les deux nombres, par exemple « {2;7} ».

Réponse attendue : `{5;8}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ces deux nombres sont les racines de $X^2 - SX + P = 0$.
2. L'équation :
$$X^2 - 13X + 40 = 0$$

CORRECTION

L'équation —

$X^2 - 13X + 40 = 0 \qquad \Delta = 169 - 160 = 9$

Les racines —

$X = \frac{13-3}{2} = 5 \quad \text{ou} \quad X = \frac{13+3}{2} = 8$

Vérifier —

$5 + 8 = 13 \qquad 5 \times 8 = 40$

Les deux nombres sont 5 et 8. Somme S et produit P : on résout $X^2 - SX + P = 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-5;-8}` → L'équation est $X^2 - SX + P = 0$, avec un **moins** devant S : -5 et -8 ont pour somme -13.

EXERCICE 82 · DEFI

Périmètre et diagonale

Un rectangle a pour périmètre 34 cm et sa diagonale mesure 13 cm. Déterminer sa longueur, en cm.

Donne la longueur en cm.

Réponse attendue : `12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec L et ℓ ses dimensions : $L + \ell = 17$ et, par Pythagore, $L^2 + \ell^2 = 169$.
2. $L^2 + \ell^2 = (L + \ell)^2 - 2L\ell$: déduis-en le produit $L\ell$.
3. L et ℓ sont les racines de $X^2 - 17X + L\ell = 0$.

CORRECTION

Somme —

$L + \ell = 17$

Pythagore —

$L^2 + \ell^2 = 13^2 = 169$

Produit —

$2L\ell = (L+\ell)^2 - (L^2+\ell^2) = 289 - 169 = 120 \iff L\ell = 60$

L'équation —

$X^2 - 17X + 60 = 0 \qquad \Delta = 289 - 240 = 49$

Les dimensions —

$X = \frac{17-7}{2} = 5 \quad \text{ou} \quad X = \frac{17+7}{2} = 12$

Le rectangle mesure 12 cm sur 5 cm. Une somme et une somme de carrés donnent le produit : $(L+\ell)^2 - 2L\ell$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 cm est la largeur ; la longueur est la plus grande dimension.

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT

Le plus grand produit possible

Déterminer le plus grand réel P pour lequel il existe deux réels de somme 10 et de produit P.

Donne la valeur de P.

Réponse attendue : 25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux réels sont les racines de $X^2 - 10X + P = 0$.
2. Ils existent si et seulement si le discriminant est positif ou nul.

CORRECTION

L'équation —

$X^2 - 10X + P = 0 \qquad \Delta = 100 - 4P$

Existence —

$\Delta \geq 0 \iff P \leq 25$

Le cas limite — Pour $P = 25$, les deux nombres sont égaux.

$X^2 - 10X + 25 = (X-5)^2$

$P = 25$, atteint pour 5 et 5. Deux nombres de somme S et de produit P existent si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100` → $\Delta = S^2 - 4P = 100 - 4P$: il faut diviser par 4.

`50` → Le discriminant est $S^2 - 4P$, avec un 4 : $100 - 4P \geq 0$ donne $P \leq 25$.

EXERCICE 84 · PRATIQUE

Une bicarrée à quatre racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Écris l'ensemble, par exemple « {-5;-1;1;5} ».

Réponse attendue : `{-3;-2;2;3}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $X = x^2$, avec $X \geq 0$: tu obtiens $X^2 - 13X + 36 = 0$.
2. Deux nombres de somme 13 et de produit 36.
3. Reviens à x : chaque valeur positive de X donne deux valeurs de x.

CORRECTION

Poser X = x² —

$X^2 - 13X + 36 = 0 \qquad \Delta = 169 - 144 = 25$

Les valeurs de X — Toutes deux positives.

$X = \frac{13-5}{2} = 4 \quad \text{ou} \quad X = \frac{13+5}{2} = 9$

Revenir à x —

$x^2 = 4 \iff x = \pm 2 \qquad x^2 = 9 \iff x = \pm 3$

$S = \{-3; -2; 2; 3\}$. Une bicarrée se résout en $X = x^2$, puis on **revient** à x.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4;9}` → Ce sont les valeurs de $X = x^2$: il reste à revenir à x.

`{2;3}` → $x^2 = 4$ a deux solutions, 2 et -2 : il en manque.

EXERCICE 85 · RAISONNEMENT

Des quotients et une valeur interdite

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{12}{(x-3)(x+1)}$.

Écris l'ensemble des solutions, par exemple « {2} ».

Réponse attendue : `{0}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Valeurs interdites : $x \neq 3$ et $x \neq -1$.
2. Multiplie par $(x-3)(x+1)$:
   $x(x+1) - 4(x-3) = 12$
3. Compare les solutions aux valeurs interdites.

CORRECTION

Valeurs interdites —

$x \neq 3 \quad \text{et} \quad x \neq -1$

Même dénominateur —

$x(x+1)-4(x-3)=12 \iff x^2-3x=0$

Factoriser —

$x(x-3)=0 \iff x=0$ ou $x=3$

Écarter — 3 est interdite.

$S=\{0\}$

$S=\{0\}$. On garde **seulement** les solutions qui ne sont pas des valeurs interdites.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{0;3}` → Pour $x=3$, le dénominateur $x-3$ est nul : cette valeur est interdite.

EXERCICE 86 · DEFI

Un changement de variable

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0$.

Écris l'ensemble, par exemple « {-2;0;4} ».

Réponse attendue : `{-1;1;3}`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pose $X=x^2-2x$: tu obtiens $X^2-2X-3=0$.
2. $a-b+c=0$: $X=-1$ ou $X=3$.
3. Résous ensuite $x^2-2x=3$ **et** $x^2-2x=-1$.

CORRECTION

Poser X —

$X=x^2-2x$: $\quad X^2-2X-3=0$

Les valeurs de X — $a-b+c=1+2-3=0$.

$X=-1 \quad$ ou $\quad X=3$

X = 3 —

$x^2-2x-3=0 \iff x=-1$ ou $x=3$

X = −1 —

$x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1$

Conclure —

$S=\{-1;1;3\}$

$S=\{-1;1;3\}$. Ici X peut être négatif : **chaque** valeur de X redonne une équation en x à résoudre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{-1;3}` → Il manque l'équation $x^2-2x=-1$, soit $(x-1)^2=0$: elle donne $x=1$.

EXERCICE 87 · BASE

Factoriser avec somme et produit

Factoriser $A(x)=x^2-5x-14$.

Donne A(x) sous forme d'un produit de facteurs.

Réponse attendue : `(x-7)*(x+2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche deux racines de somme 5 et de produit -14.
2. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, ici avec $a=1$.

CORRECTION

Les racines — Somme 5, produit -14 : ce sont 7 et -2.

$\Delta = 25+56 = 81 \qquad x = \frac{5 \pm 9}{2}$

Factoriser —

$A(x) = (x-7)(x+2)$

$A(x) = (x-7)(x+2)$. On trouve les racines, puis $a(x-x_1)(x-x_2)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(x+7)*(x-2)` → Les racines sont 7 et -2 : le facteur est $(x-7)$, et $(x-(-2)) = (x+2)$.

EXERCICE 88 · PRATIQUE

Sans oublier a

Factoriser $B(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

Donne B(x) sous forme d'un produit de facteurs.

Réponse attendue : `(2x-1)*(x-3)` — aussi acceptées : 2*(x-1/2)*(x-3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\Delta = 49 - 24 = 25$.
2. Les racines sont 3 et $\frac{1}{2}$; n'oublie pas le coefficient $a=2$ devant.

CORRECTION

Les racines —

$\Delta = 25 \qquad x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{7+5}{4} = 3$

Factoriser —

$B(x) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3) = (2x-1)(x-3)$

$B(x) = (2x-1)(x-3)$. Le coefficient a reste devant : $a(x-x_1)(x-x_2)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(x-1/2)*(x-3)` → Il manque le coefficient $a=2$: en développant, tu trouverais x^2, pas $2x^2$.

EXERCICE 89 · PRATIQUE

Un discriminant nul

Factoriser $C(x) = 25x^2 + 20x + 4$.

Donne C(x) sous forme d'un produit de facteurs.

Réponse attendue : `(5x+2)^2` — aussi acceptées : 25*(x+2/5)^2 · (5x+2)*(5x+2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec $b' = 10$: $\Delta' = 100 - 25 \times 4$.
2. $\Delta' = 0$: une seule racine $x_0 = -\dfrac{b'}{a}$, et $C(x) = a(x - x_0)^2$.

CORRECTION

Le discriminant réduit —

$\Delta' = 10^2 - 25 \times 4 = 0 \qquad x_0 = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$

Factoriser —

$C(x) = 25\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 = (5x + 2)^2$

$C(x) = (5x + 2)^2$: une identité remarquable, que $\Delta = 0$ permet de reconnaître.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(5x-2)^2` → La racine est $-\dfrac{2}{5}$: le facteur est $\left(x + \dfrac{2}{5}\right)$, d'où $(5x + 2)^2$.

EXERCICE 90 · BASE **Toujours du même signe**

Soit $f(x) = -x^2 + 2x - 5$. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

Réponds par un mot : positif ou négatif.

Réponse attendue : `négatif` — aussi acceptées : strictement négatif · toujours négatif · négatif sur r · négatif pour tout x

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule le discriminant.
2. Si $\Delta < 0$, $f(x)$ a partout le signe de a.

CORRECTION

Le discriminant —

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 4 - 20 = -16 < 0$

Le signe de a —

$a = -1 < 0 \quad \text{donc} \quad f(x) < 0 \text{ pour tout } x$

$f(x)$ est négatif pour tout réel x. $\Delta < 0$: le trinôme a **partout** le signe de a.

PIÈGES ANTICIPÉS

`positif / strictement positif / toujours positif` → Le signe se lit sur $a = -1$ quand $\Delta < 0$; ici $f(0) = -5$ le confirme.

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

Retrouver a

Un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'annule pour $x = -1$ et pour $x = 4$, et $f(0) = 8$.
Déterminer le réel a.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec ses deux racines, $f(x) = a(x+1)(x-4)$.
2. Remplace x par 0.

CORRECTION

Factoriser —

$f(x) = a(x+1)(x-4)$

La condition —

$f(0) = a \times 1 \times (-4) = -4a = 8 \iff a = -2$

Le signe — $a < 0$: $f(x)$ est positif entre -1 et 4, négatif à l'extérieur.

$f(x) = -2(x+1)(x-4)$

$a = -2$. Les racines donnent la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$; une valeur de plus fixe a.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → $(0+1)(0-4) = -4$: $-4a = 8$ donne $a = -2$.

EXERCICE 92 · RAISONNEMENT

Compter des entiers

Déterminer le nombre d'entiers relatifs n qui vérifient $n^2 - 6n - 16 < 0$.

Donne le nombre d'entiers.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche les racines : somme 6, produit -16.
2. $a > 0$: le trinôme est négatif **entre** les racines, bornes exclues.

CORRECTION

Les racines —

$\Delta = 36 + 64 = 100 \qquad n = \frac{6 \pm 10}{2} = -2 \text{ ou } 8$

Le signe —

$n^2 - 6n - 16 < 0 \iff -2 < n < 8$

Compter — Les entiers de -1 à 7.

$7 - (-1) + 1 = 9$

9 entiers : $-1, 0, 1, \ldots, 7$. Les racines sont exclues car l'inégalité est stricte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`11` → Pour $n = -2$ ou $n = 8$, le trinôme vaut 0, qui n'est pas < 0 : les bornes sont exclues.

`10` → De -2 à 8, l'écart est 10 ; mais on compte les entiers **strictement** entre les deux, de -1 à 7.

EXERCICE 93 · DEFI

Positif pour tout x

Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels $x^2 + mx + 4 > 0$ pour tout réel x.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `]-4;4[` — aussi acceptées :]-4,4[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $a = 1 > 0$: le trinôme est strictement positif partout si et seulement s'il n'a pas de racine.
2. $\Delta = m^2 - 16 < 0$: c'est une inéquation du second degré **en** m.
3. $m^2 - 16$ est négatif entre ses racines -4 et 4.

CORRECTION

Pas de racine — Si $\Delta = 0$, le trinôme s'annule une fois : il n'est pas **strictement** positif partout.

$\Delta = m^2 - 16 < 0$

Résoudre en m —

$m^2 - 16 = (m-4)(m+4) < 0 \iff -4 < m < 4$

$m \in]-4;4[$. « Du signe de a partout, sans s'annuler » $\iff \Delta < 0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-4;4]` → Pour $m = 4$, $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ s'annule en -2 : il n'est pas strictement positif partout.

`]-inf;-4[U]4;+inf[` → C'est pour ces m que $\Delta > 0$: le trinôme a alors deux racines et devient négatif entre elles.

EXERCICE 94 · BASE

Négatif entre les racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + x - 6 < 0$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `]-3;2[` — aussi acceptées :]-3,2[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les racines : somme -1, produit -6.
2. $a > 0$: le trinôme est négatif entre les racines.

CORRECTION

Les racines —

$\Delta = 1 + 24 = 25$ $\quad x = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3$ ou 2

Le signe —

$x^2 + x - 6 < 0 \iff -3 < x < 2$

$S =]-3;2[$. Avec $a > 0$, on prend l'intervalle **entre** les racines, ouvert pour $<$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;-3[U]2;+inf[` → Avec $a > 0$, le trinôme est négatif **entre** les racines, positif à l'extérieur.

`[-3;2]` → L'inégalité est stricte : en -3 et en 2 le trinôme vaut 0, qui n'est pas < 0.

EXERCICE 95 · PRATIQUE

Avec a négatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `[-1/2;2]` — aussi acceptées : [-0.5;2] · [-0,5;2]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $\Delta = 9 + 16 = 25$: deux racines.
2. $a = -2 < 0$: le trinôme est positif **entre** les racines.

CORRECTION

Les racines —

$x_1 = \frac{-3+5}{-4} = -\frac{1}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-3-5}{-4} = 2$

Le signe — Signe de $-a$, donc positif, entre les racines ; nul aux racines.

$-2x^2 + 3x + 2 \geq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

$S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. Avec $a < 0$, le trinôme est positif entre les racines.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;-1/2]U[2;+inf[` → Avec $a < 0$, le trinôme est **négatif** à l'extérieur des racines : c'est entre elles qu'il est positif.

EXERCICE 96 · RAISONNEMENT

Tout dans un membre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x(x-3) > x - 5$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;1]U[2;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;1[U]5/2;+inf[` — aussi acceptées :]-inf;1[U]5/2;+inf[·]-∞;1[U]5/2;+∞[·]-inf;1[∪]5/2;+inf[·]-∞;1[∪]5/2;+∞[·]-inf;1[U]2.5;+inf[·]-∞;1[U]2.5;+∞[·]-inf;1[∪]2.5;+inf[·]-∞;1[∪]2.5;+∞[·]-inf;1[U]2,5;+inf[·]-∞;1[U]2,5;+∞[·]-inf;1[∪]2,5;+inf[·]-∞;1[∪]2,5;+∞[· x<1 ou x>5/2 · x<1 ou x>2,5 · x<1 ou x>2.5 ·]5/2;+inf[U]-inf;1[·]5/2;+∞[∪]-∞;1[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe et ramène tout dans le premier membre.
2. Tu obtiens $2x^2 - 7x + 5 > 0$: calcule $a + b + c$.
3. Les racines sont 1 et $\dfrac{c}{a}$; $a > 0$: positif à l'extérieur.

CORRECTION

Un seul membre —

$$2x^2 - 6x - x + 5 > 0 \iff 2x^2 - 7x + 5 > 0$$

Les racines —

$a + b + c = 2 - 7 + 5 = 0$: $\quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{5}{2}$

Le signe — $a > 0$: positif à l'extérieur des racines.

$$S =]-\infty ; 1[\cup]\tfrac{5}{2} ; +\infty[$$

On ramène tout dans un membre, on cherche les racines, puis on lit le signe : ici l'**extérieur**, bornes exclues.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]1;5/2[` → $a = 2 > 0$: le trinôme est négatif entre les racines ; l'inéquation > 0 demande l'extérieur.

EXERCICE 97 · PRATIQUE

Un quotient négatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x - 6}{x + 1} \leq 0$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `]-1;3]` — aussi acceptées :]-1,3]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le numérateur s'annule en 3, le dénominateur en -1 : valeur interdite.
2. Dresse le tableau de signes : une ligne par facteur.
3. La valeur interdite est **toujours** exclue ; 3 convient car l'inégalité est large.

CORRECTION

Les racines —

$$2x - 6 = 0 \iff x = 3 \qquad x + 1 = 0 \iff x = -1 \text{ (interdite)}$$

Le tableau —

$$\text{positif sur }]-\infty ; -1[, \quad \text{négatif sur }]-1 ; 3[, \quad \text{positif sur }]3 ; +\infty[$$

Conclure —

$$S =]-1 ; 3]$$

$S =]-1 ; 3]$. Dans un quotient, la racine du dénominateur est **exclue**, même pour $\leq$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[-1;3]` → Pour $x = -1$, le dénominateur est nul : le quotient n'existe pas. Le crochet est ouvert en -1.

`]-1;3[` → Pour $x = 3$, le quotient vaut 0, et $0 \leq 0$: 3 est solution.

EXERCICE 98 · PRATIQUE

Un produit de trois facteurs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+2)(x^2-4x+3)<0$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;1]U[2;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;-2[U]1;3[` — aussi acceptées :]-inf;-2[U]1;3[·]-∞;-2[U]1;3[·]-inf;-2[∪]1;3[·]-∞;-2[∪]1;3[· x<-2 ou 1<x<3 ·]1;3[U]-inf;-2[·]1;3[∪]-∞;-2[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Racines : -2 pour le premier facteur ; 1 et 3 pour le trinôme ($a+b+c=0$).
2. Le trinôme ($a>0$) est négatif entre 1 et 3, positif ailleurs.
3. Règle des signes, colonne par colonne : -2, 1, 3.

CORRECTION

Les racines —

$x+2=0 \iff x=-2 \qquad x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

Le tableau —

$-$ sur $]-\infty;-2[$, $\quad+$ sur $]-2;1[$, $\quad-$ sur $]1;3[$, $\quad+$ sur $]3;+\infty[$

Conclure —

$S=]-\infty;-2[\cup]1;3[$

Un tableau de signes : une ligne par facteur, toutes les racines rangées, puis la règle des signes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-2;1[U]3;+inf[` → Tu as pris les colonnes où le produit est **positif** : l'inéquation demande <0.

EXERCICE 99 · RAISONNEMENT

Ne pas multiplier en croix

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+3}{x-1}\geq 2$.

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `]1;5]` — aussi acceptées :]1,5]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On ne connaît pas le signe de $x-1$: on ne multiplie pas par lui. Passe 2 dans le premier membre.
2. Réduis au même dénominateur :
   $\frac{x+3}{x-1}-2=\frac{-x+5}{x-1}$
3. Étudie le signe du quotient $\dfrac{-x+5}{x-1}$.

CORRECTION

Un seul membre —

$\frac{x+3}{x-1}-2\geq 0 \iff \frac{x+3-2(x-1)}{x-1}\geq 0 \iff \frac{-x+5}{x-1}\geq 0$

Le tableau — $-x+5$ s'annule en 5, $x-1$ en 1 (interdite).

$\frac{-x+5}{x-1} \geq 0 \iff 1 < x \leq 5$

Conclure —

$S =]1;5]$

$S =]1;5]$. Pour comparer un quotient à un nombre, on ramène tout à un **seul quotient comparé à** 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-inf;5]` → En multipliant par $x-1$, tu as supposé ce facteur positif : pour $x < 1$, le sens change. Ramène tout à un quotient comparé à 0.

`[1;5]` → Pour $x = 1$, le dénominateur est nul : 1 est exclu.

EXERCICE 100 · DEFI

Le signe d'un quotient de trinômes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 9} \geq 0$.

Écris la réunion d'intervalles, par exemple «]-inf;1]U[2;+inf[».

Réponse attendue : `]-inf;-3[U[-1;2]U]3;+inf[` — aussi acceptées :]-inf;-3[U[-1;2]U]3;+inf[·]-∞;-3[U[-1;2]U]3;+∞[·]-inf;-3[∪[-1;2]∪]3;+inf[·]-∞;-3[∪[-1;2]∪]3;+∞[

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Numérateur : $a - b + c = 0$, racines -1 et 2. Dénominateur : racines -3 et 3, interdites.
2. Range les quatre racines : $-3 < -1 < 2 < 3$, puis fais le tableau de signes.
3. Les racines du numérateur sont solutions ($\geq$) ; celles du dénominateur jamais.

CORRECTION

Le numérateur — $a - b + c = 1 + 1 - 2 = 0$: racines -1 et 2.

$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

Le dénominateur —

$x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \qquad x \neq -3,\ x \neq 3$

Le tableau —

$+ \text{ sur }]-\infty;-3[,\ - \text{ sur }]-3;-1[,\ + \text{ sur }]-1;2[,\ - \text{ sur }]2;3[,\ + \text{ sur }]3;+\infty[$

Conclure —

$S =]-\infty;-3[\cup [-1;2] \cup]3;+\infty[$

Les racines du numérateur sont incluses pour $\geq$, celles du dénominateur **toujours** exclues.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]-3;-1]U[2;3[` → Ce sont les colonnes où le quotient est négatif ou nul : l'inéquation demande ≥ 0.

`]-inf;-3]U[-1;2]U[3;+inf[` → Pour $x = \pm 3$, le dénominateur est nul : ces valeurs sont interdites.

EXERCICE 101 · PRATIQUE

Un jardin d'au moins 27 m²

Un jardin rectangulaire a pour périmètre 24 m ; on note x la longueur, en mètres, de l'un de ses côtés, avec $0 < x < 12$, de sorte que le côté voisin mesure $12 - x$. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du jardin est supérieure ou égale à 27 m².

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `[3;9]` — aussi acceptées : [3,9]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'inéquation : $x(12 - x) \geq 27$.
2. Ramène tout dans un membre : $x^2 - 12x + 27 \leq 0$.
3. Racines : somme 12, produit 27.

CORRECTION

L'inéquation —

$$x(12 - x) \geq 27 \iff x^2 - 12x + 27 \leq 0$$

Les racines —

$$x^2 - 12x + 27 = (x - 3)(x - 9)$$

Le signe — $a > 0$: négatif ou nul entre les racines, qui sont bien dans $]0; 12[$.

$$S = [3; 9]$$

$x \in [3; 9]$. On traduit, on ramène à $ax^2 + bx + c \leq 0$, puis on croise avec les conditions du problème.

PIÈGES ANTICIPÉS

`]0;3]U[9;12[` → $x^2 - 12x + 27 \leq 0$: avec $a > 0$, c'est **entre** les racines.

`]3;9[` → L'aire peut être **égale** à 27 : pour $x = 3$ ou $x = 9$, $x(12 - x) = 27$, les bornes sont comprises.

EXERCICE 102 · RAISONNEMENT

Au-dessus de 40 mètres

Un projectile lancé vers le haut est, à l'instant t (en secondes), à la hauteur $h(t) = -5t^2 + 30t$ (en mètres). Déterminer pendant combien de secondes sa hauteur dépasse 40 mètres.

Donne la durée en secondes, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Résous $-5t^2 + 30t > 40$.
2. Divise par -5 (le sens change) :
   $t^2 - 6t + 8 < 0$
3. La durée est la longueur de l'intervalle des solutions.

CORRECTION

L'inéquation —

$$-5t^2 + 30t > 40 \iff t^2 - 6t + 8 < 0$$

Les racines —

$t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$

Le signe —

$t^2 - 6t + 8 < 0 \iff 2 < t < 4$

La durée —

$4 - 2 = 2$

Pendant 2 secondes, de $t = 2$ à $t = 4$. On résout l'inéquation, puis on lit la **longueur** de l'intervalle.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 s est l'instant où le projectile redescend sous 40 m ; la durée va de 2 à 4.

6 → 6 s est la durée du vol entier ($h(t) = 0$) ; on demande le temps passé au-dessus de 40 m.

EXERCICE 103 · DEFI

La boîte en carton

Dans une plaque de carton de 20 cm sur 12 cm, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x cm, puis on relève les bords pour faire une boîte sans couvercle. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du fond de la boîte est supérieure ou égale à 128 cm².

Écris l'intervalle, par exemple « [1;2] ».

Réponse attendue : `]0;2]` — aussi acceptées :]0,2]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le fond mesure $20 - 2x$ sur $12 - 2x$, avec $0 < x < 6$.
2. Développe et divise par 4 :
   $x^2 - 16x + 28 \geq 0$
3. Racines : somme 16, produit 28. Croise ensuite avec $0 < x < 6$.

CORRECTION

L'inconnue —

$0 < x < 6$

L'inéquation —

$(20 - 2x)(12 - 2x) \geq 128 \iff 4x^2 - 64x + 112 \geq 0 \iff x^2 - 16x + 28 \geq 0$

Les racines —

$x^2 - 16x + 28 = (x-2)(x-14)$

Le signe — $a > 0$: positif ou nul à l'extérieur des racines.

$x \leq 2 \quad \text{ou} \quad x \geq 14$

Partie commune —

$S =]0;2]$

$x \in]0;2]$. La solution de l'inéquation se **croise** avec les conditions du problème : ici $x \geq 14$ est impossible.

PIÈGES ANTICIPÉS

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

`]-inf;2]U[14;+inf[` → Une découpe de 14 cm ou une longueur négative n'ont pas de sens : il faut $0 < x < 6$.

`[2;14] / [2;6[` → Avec $a > 0$, le trinôme est positif à l'**extérieur** des racines.

EXERCICE 104 · DEFI

Le cadre photo

Une photo de 20 cm sur 30 cm est entourée d'une bordure de largeur constante x cm. Déterminer la plus grande largeur x, en cm, pour laquelle l'aire de la bordure ne dépasse pas l'aire de la photo.

Donne la largeur en cm.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cadre entier mesure $20 + 2x$ sur $30 + 2x$; l'aire de la bordure est la différence avec la photo.
2. L'inéquation :
   $(20 + 2x)(30 + 2x) - 600 \leq 600$
3. Tu obtiens $x^2 + 25x - 150 \leq 0$: $\Delta = 1225 = 35^2$.

CORRECTION

La bordure —

$(20 + 2x)(30 + 2x) - 600 = 4x^2 + 100x$

L'inéquation —

$4x^2 + 100x \leq 600 \iff x^2 + 25x - 150 \leq 0$

Les racines —

$\Delta = 625 + 600 = 1225 \qquad x = \frac{-25 \pm 35}{2} = -30 \text{ ou } 5$

Conclure — Négatif entre les racines, et $x > 0$: $0 < x \leq 5$.

$x_{\max} = 5$

La bordure peut mesurer au plus 5 cm. Les quatre **coins** de la bordure comptent : c'est le terme $4x^2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → La bordure n'est pas seulement quatre bandes $20 \times x$ et $30 \times x$: il faut ajouter les quatre coins carrés de côté x.

`-30` → -30 est une racine du trinôme, mais une largeur est positive.
