— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Rotations

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro neuf : rotations. Ba3d la translation elli tzalla9 el figure, w l'homothétie elli tkabberha walla tsaghgharha, lyoum bech nchoufou application tdawwer el figure 7awl point ma yet7arrekch. Nabdew b le radian, unité jdida bech n9isou biha les angles. Ba3d n3arrfou la rotation directe w la rotation indirecte : ne5tarou le centre O, w l'angle alpha, w le sens. W bech nchoufou chnowa t7afedh 3lih la rotation : les distances, les angles, l'alignement, le milieu, le barycentre w le contact. W nkammlou b des problèmes de construction, des problèmes de lieu, w les figures globalement invariantes.

عسلامة ! الـ chapitre numéro neuf : rotations . بعد la translation اللي تزلّق الـ l'homothétie w اللي figure ، تكبّرها ولّا تصغّرها ، ليوم باش نشوفو application تدوّر الـ figure حول point ما يتحرّكش . نبداو بـ unité ، le radian جديدة باش نقيسو بيها les angles . بعد نعرّفو la rotation indirecte w la rotation directe : نختارو le centre O ، w l'angle alpha ، w le sens . w باش نشوفو شنوّة تحافظ عليه l'alignement ، les angles ، les distances : la rotation ، نكمّلو بـ le milieu ، le barycentre w le contact . w des problèmes de construction ، des problèmes de lieu . w les figures globalement invariantes

Bonjour ! Le chapitre numéro neuf : rotations. Après la translation, qui fait glisser une figure, et l'homothétie, qui l'agrandit ou la réduit, nous allons voir aujourd'hui une application qui fait tourner la figure autour d'un point qui ne bouge pas. Nous commencerons par le radian, une nouvelle unité pour mesurer les angles. Puis nous définirons la rotation directe et la rotation indirecte : on choisit le centre O, l'angle alpha, et le sens. Nous verrons ce que la rotation conserve : les distances, les angles, l'alignement, le milieu, le barycentre et le contact. Et nous terminerons par des problèmes de construction, des problèmes de lieu, et les figures globalement invariantes.

Faire tourner une figure autour d'un point, sans la déformer : c'est une **rotation**. Chaque point tourne du même angle, dans le même sens, en restant à la même distance du centre.

On commence par une nouvelle unité d'angle, le **radian**. On définit ensuite la rotation directe et la rotation indirecte de centre O et d'angle α, puis on étudie ce qu'une rotation conserve et les images des figures usuelles. La rotation devient alors un outil pour prouver des alignements, comparer des aires, construire des figures et chercher des lieux géométriques. On termine par les figures globalement invariantes et leurs éléments de symétrie.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Convertir une mesure d'angle entre degrés et radians
  > Convertir une mesure d'angle entre degrés et radians.
  > *Convertir une mesure d'angle entre degrés et radians.*
- Construire l'image d'un point par une rotation directe ou indirecte
  > Construire l'image d'un point par une rotation directe ou indirecte.
  > *Construire l'image d'un point par une rotation directe ou indirecte.*
- Reconnaître une rotation sur une figure : son centre, son angle et son sens
  > Reconnaître une rotation sur une figure : son centre, son angle et son sens.
  > *Reconnaître une rotation sur une figure : son centre, son angle et son sens.*
- Déterminer l'image d'un segment, d'une droite et d'un cercle, et utiliser ce que la rotation conserve
  > Déterminer l'image d'un segment, d'une droite et d'un cercle, et utiliser ce que la rotation conserve.
  > *Déterminer l'image d'un segment, d'une droite et d'un cercle, et utiliser ce que la rotation conserve.*
- Résoudre des problèmes d'alignement, de construction, de lieu et d'aires
  > Résoudre des problèmes d'alignement, de construction, de lieu et d'aires.
  > *Résoudre des problèmes d'alignement, de construction, de lieu et d'aires.*
- Reconnaître une figure globalement invariante, ses axes et son centre de symétrie
  > Reconnaître une figure globalement invariante, ses axes et son centre de symétrie.
  > *Reconnaître une figure globalement invariante, ses axes et son centre de symétrie.*

1. ACTIVITÉ

Rappels : le quart de tour

CE QU'IL DIT

Nabdew b tadhkir mel 3am elli fet : le quart de tour. Ndawwrou 7awl point O b angle droit, w 3andna zouz sens. Le sens direct houwa 3aks 3a9areb es-se3a, w le sens indirect houwa kif 3a9areb es-se3a. M prime houwa l'image mta3 M par le quart de tour direct de centre O, ki OM prime égale OM, w l'angle MOM prime droit, w ndawwrou men M l M prime fi le sens direct. Chedd ez-zouz sens hedhom fi belek : bihom bech n3arrfou la rotation.

نبداو بتذكير من العام اللي فات : le quart de tour . ندوّرو حول point O بـ angle droit ، w عندنا زوز sens . le sens direct هو عكس عقارب الساعة ، le sens indirect w هو كيف عقارب الساعة . M prime هو l'image متاع M par le quart de tour direct de centre O ، كي w ، l'angle M O M prime droit ، w M prime égale O M ندوّرو من O M لـ M prime في le sens direct . شدّ الزوز sens هاذم في بالك : بيهم باش نعرّفو la rotation .

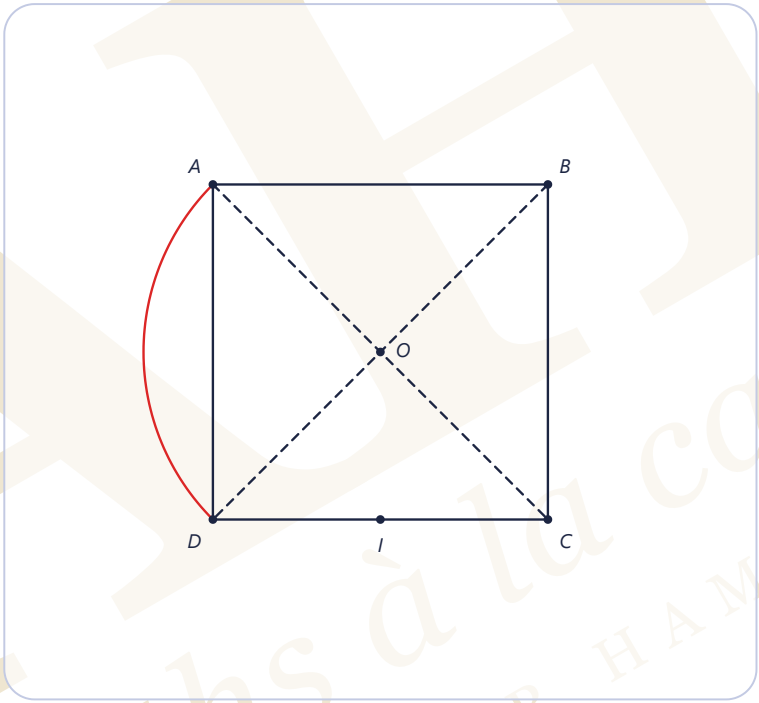
Commençons par un rappel de l'année dernière : le quart de tour. On tourne autour d'un point O d'un angle droit, et il y a deux sens. Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre, et le sens indirect est celui des aiguilles d'une montre. M prime est l'image de M par le quart de tour direct de centre O quand O

M prime égale O M, que l'angle M O M prime est droit, et que l'on tourne de M vers M prime dans le sens direct. Garde bien ces deux sens en tête : c'est avec eux qu'on va définir la rotation.

On a rencontré le **quart de tour** l'année dernière : on tourne autour d'un point O d'un angle droit, dans l'un des deux sens.

- Le **sens direct** est, par convention, le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre.
- Le **sens indirect** est le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

Le point M' est l'image du point M par le quart de tour direct de centre O lorsque $OM' = OM$, que l'angle $\widehat{MOM'}$ est droit et que l'on tourne de M vers M' dans le sens direct. Pour le quart de tour indirect, on tourne dans le sens indirect.



De A vers D, on tourne autour de O dans le sens direct.

Un carré ABCD de centre O : A est en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite et D en bas à gauche. Le point I est le milieu du côté [DC]. Les deux diagonales se coupent en O. Un arc rouge va de A à D en tournant autour de O dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

LE QUART DE TOUR DE CENTRE O

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad \widehat{MOM'} = 90°$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, $ABCD$ est un carré de centre O et I est le milieu du côté $[DC]$. Dire si chaque phrase est vraie ou fausse. a) D est l'image de A par le quart de tour direct de centre O. b) B est l'image de C par le quart de tour indirect de centre O. c) I est l'image de A par le quart de tour indirect de centre D.

Phrase a — Les diagonales d'un carré ont la même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires : $OA = OD$ et l'angle $\widehat{AOD}$ est droit. Sur la figure, on va de A vers D en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : c'est le sens direct.

a) vrai

Phrase b — $OC = OB$ et l'angle $\widehat{COB}$ est droit, mais pour aller de C vers B on tourne dans le sens direct. Par le quart de tour indirect de centre O, l'image de C est le point D.

b) faux

Phrase c — L'angle $\widehat{ADI}$ est droit, mais DI est la moitié de DA : un quart de tour conserve la distance au centre. L'image de A par le quart de tour indirect de centre D est le point C.

c) faux

a) vrai ; b) faux ; c) faux

À ne pas faire : Le sens direct est le sens des aiguilles d'une montre — Le sens direct est le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre. C'est une convention : dans le sens direct, on tourne à l'inverse des aiguilles d'une montre.

---

2. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la longueur d'un arc

CE QU'IL DIT

9bal ma na7kiw 3la la rotation, yelzemna unité jdida lel angles. 3andna cercle de centre O et de rayon r, w angle au centre fih trente degrés. L'angle plat, cent quatre-vingts degrés, ye5ou noss el cercle : la longueur mte3ou pi fois r. W la longueur mta3 l'arc proportionnelle à l'angle : trente degrés hiya un sixième mta3 cent quatre-vingts, donc la longueur mta3 l'arc pi fois r sur six. Tawa na7sbou le rapport L sur r : nal9aw pi sur six. W ken nbaddlou le cercle b cercle akbar, le rayon yekber w l'arc yekber m3ah, ama le rapport yo93ed pi sur six. Ya3ni le rapport hedha ma yetbaddel ken b l'angle.

قُبَلْ ما نحكيو على la rotation ، يلزمنا unité جديدة للـ angles . عندنا w angle ، cercle de centre O et de rayon r
متاعو cercle : la longueur الـ نصّ ياخو ، trente degrés . l'angle plat ، cent quatre-vingts degrés فيه au centre
cent quatre- متاع un sixième هي l'arc proportionnelle à l'angle : trente degrés متاع pi fois r . w la longueur
كان نبدّلو pi sur six . w نلقاو : le rapport L sur r نحسبو توّا . l'arc pi fois r sur six متاع vingts ، donc la longueur
ما هذا le rapport يعني . pi sur six يقعد le rapport أما ، يكبر معاه w l'arc يكبر le rayon ، أكبر cercle بـ le cercle
. l'angle بـ كان يتبدّل

Avant de parler de rotation, il nous faut une nouvelle unité pour les angles. On a un cercle de centre O et de rayon r, et un angle au centre de trente degrés. L'angle plat, cent quatre-vingts degrés, prend la moitié du cercle : sa longueur est pi fois r. Et la longueur d'un arc est proportionnelle à l'angle : trente degrés, c'est un sixième de cent quatre-vingts, donc l'arc a pour longueur pi fois r sur six. Calculons maintenant le rapport L sur r : on trouve pi sur six. Et si on remplace le cercle par un cercle plus grand, le rayon grandit et l'arc grandit avec lui, mais le rapport reste pi sur six. Autrement dit, ce rapport ne dépend que de l'angle.

Soit $\widehat{xOy}$ un angle de mesure 30° et $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, qui coupe la demi-droite $[Ox)$ en A et la demi-droite $[Oy)$ en B. Soit D le symétrique de A par rapport à O.

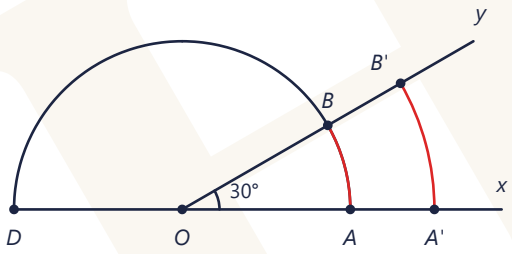
L'angle $\widehat{AOD}$ est plat : l'arc $\overset{\frown}{AD}$ est un demi-cercle, de longueur πr.

On admet que la longueur d'un arc d'un cercle varie proportionnellement à la mesure de l'angle qui l'intercepte. La longueur L de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ intercepté par l'angle $\widehat{xOy}$ est donc

$$L = \pi r \times \frac{30}{180} = \frac{\pi r}{6}, \text{ d'où } \frac{L}{r} = \frac{\pi}{6}.$$

Sur un autre cercle de centre O, de rayon r', l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ intercepté par le même angle a pour longueur $L' = \dfrac{\pi r'}{6}$: le rapport $\dfrac{L'}{r'}$ est encore égal à $\dfrac{\pi}{6}$.

Le rapport de la longueur de l'arc au rayon ne dépend pas du cercle : il ne dépend que de l'angle.



Le même angle intercepte deux arcs : leur longueur est proportionnelle au rayon.

Un angle xOy de 30 degrés, de sommet O. Un demi-cercle de centre O coupe la demi-droite [Ox) en A et la demi-droite [Oy) en B ; le point D est le symétrique de A par rapport à O, à l'autre bout du demi-cercle. L'arc AB est tracé en rouge. Un second arc rouge, plus loin de O, va de A' sur [Ox) à B' sur [Oy) : il est intercepté par le même angle sur un cercle plus grand.

POUR UN ANGLE DE 30°

$$\frac{L}{r} = \frac{L'}{r'} = \frac{\pi}{6}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Sur un demi-cercle de centre O et de rayon r, on place deux points A et B. On note α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$ et L la longueur de l'arc AB. Calculer L, puis le rapport $\dfrac{L}{r}$, lorsque α vaut $180, 90, 60, 45, 30$, puis 0 degré.

L'angle plat — Pour un angle plat, l'arc est le demi-cercle entier : sa longueur est πr, et le rapport vaut π.

$\alpha = 180° :\quad L = \pi r, \quad \dfrac{L}{r} = \pi$

La proportionnalité — Pour un angle de α degrés, on multiplie la longueur du demi-cercle par $\dfrac{\alpha}{180}$.

$L = \pi r \times \dfrac{\alpha}{180}$

90 et 60 degrés — Pour 90 degrés on prend la moitié du demi-cercle, et pour 60 degrés le tiers.

$\dfrac{L}{r} = \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{L}{r} = \dfrac{\pi}{3}$

45 et 30 degrés — Pour 45 degrés on prend le quart du demi-cercle, et pour 30 degrés le sixième.

$\frac{L}{r} = \frac{\pi}{4}$; $\frac{L}{r} = \frac{\pi}{6}$

L'angle nul — Pour un angle nul, les points A et B sont confondus : l'arc a une longueur nulle, et le rapport vaut 0.

$L = 0, \quad \frac{L}{r} = 0$

À ne pas faire : Sur un cercle deux fois plus grand, le rapport $\frac{L}{r}$ double — Le rapport $\frac{L}{r}$ reste le même. Quand le rayon double, la longueur de l'arc double aussi : le rapport ne dépend que de l'angle.

---

3. VOCABULAIRE

Le radian

CE QU'IL DIT

Le rapport hedha 3andou esm. Fi cercle de centre O et de rayon r, ne5dhou l'arc elli y9ossou l'angle AOB, w nsammiw la longueur mte3ou L. Le rapport L sur r, nsammiwh la mesure en radians mta3 l'angle AOB. L'angle plat ye5ou noss el cercle, la longueur mte3ou pi fois r : donc la mesure mte3ou pi radians. W l'angle droit ye5ou er-rbo3 : la mesure mte3ou pi sur deux. W barcha marrat nektbou pi walla pi sur deux wa77adhom, men ghir ma nektbou el kelma radians.

نسمّيو l'angle A O B ، w يقصّو اللي l'arc ناخذو ، cercle de centre O et de rayon r في . هذا عندو اسم le rapport ياخو l'angle A O B . l'angle plat متاع la mesure en radians نسمّيوه ، L . le rapport L sur r متاعو la longueur la : ياخو الربع pi radians . w l'angle droit متاعو pi fois r : donc la mesure متاعو cercle ، la longueur نصّ الـ . radians وحّدهم ، من غير ما نكتبو الكلمة pi sur deux ولّا pi برشة مرّات نكتبو pi sur deux . w متاعو mesure

Ce rapport porte un nom. Dans un cercle de centre O et de rayon r, on prend l'arc intercepté par l'angle A O B, et on appelle L sa longueur. Le rapport L sur r s'appelle la mesure en radians de l'angle A O B. L'angle plat prend la moitié du cercle, de longueur pi fois r : sa mesure est donc pi radians. Et l'angle droit en prend le quart : sa mesure est pi sur deux. Très souvent, on écrit pi ou pi sur deux tout seuls, sans écrire le mot radians.

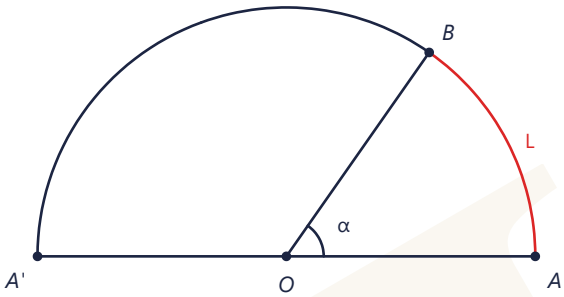
Dans un cercle de centre O et de rayon r, soit L la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ intercepté par l'angle $\widehat{AOB}$.

Le rapport $\frac{L}{r}$ est une **mesure en radians** de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exemples.

- π radians (π rad) est la mesure en radians de l'angle plat.
- $\frac{\pi}{2}$ est la mesure en radians de l'angle droit.

On écrit souvent π, $\frac{\pi}{2}$, ... au lieu de π rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, ...



L'angle alpha intercepte l'arc AB, de longueur L.

Un demi-cercle de centre O et de diamètre [A'A], A étant à droite. Un point B est placé sur le demi-cercle. L'angle AOB est marqué alpha. L'arc qui va de A à B est tracé en rouge et porte la lettre L.

LE RADIAN

$$\text{mesure de } \widehat{AOB} \text{ en radians} = \frac{L}{r}$$

L'ANGLE PLAT

$$\pi \text{ rad} = 180°$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un cercle de centre O a pour rayon 3. a) Un angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte un arc de longueur 2π : donner sa mesure en radians. b) Quelle est la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre droit ?

La mesure de l'angle — La mesure en radians est le rapport de la longueur de l'arc au rayon.

$$\frac{L}{r} = \frac{2\pi}{3}$$

L'arc de l'angle droit — L'angle droit mesure $\frac{\pi}{2}$ radians : le rapport de la longueur de l'arc au rayon vaut $\frac{\pi}{2}$. On multiplie donc le rayon par $\frac{\pi}{2}$.

$$L = 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad L = \frac{3\pi}{2}$$

À ne pas faire : π radians, c'est $3{,}14$ degrés — π radians, c'est 180 degrés. π est la mesure en radians de l'angle plat. Le nombre $3{,}14$ n'en est qu'une valeur approchée, toujours en radians.

4. MÉTHODE

Passer des degrés aux radians

CE QU'IL DIT

3andna tawa zouz unités lel angles : le degré w le radian. W les deux mesures proportionnelles : cent quatre-vingts degrés hiya pi radians. Men hna ntalla3ou el be9i : quatre-vingt-dix degrés hiya pi sur deux, soixante hiya pi sur trois, quarante-cinq hiya pi sur quatre, w trente hiya pi sur six. Bech tet3adda men les degrés l les radians, odhrob fi pi sur cent quatre-vingts. W bech traja3 men les radians l les degrés, odhrob fi cent quatre-vingts sur pi, ya3ni baddel pi b cent quatre-vingts.

عندنا توّا زوز unités للـ angles : le degré w le radian . w les deux mesures proportionnelles : cent quatre-vingts degrés هي pi radians . من هنا نطلّعو الباقي : quatre-vingt-dix degrés هي soixante ، pi sur deux هي pi sur trois ، quarante-cinq ، w trente هي pi sur quatre ، pi sur six هي . باش تتعدّى من les degrés لـ les radians باش ترجع من pi sur cent quatre-vingts . w اضرب في radians ، les degrés لـ cent اضرب في ، quatre-vingts sur pi ، يعني بدّل pi بـ cent quatre-vingts .

Nous avons maintenant deux unités pour les angles : le degré et le radian. Et les deux mesures sont proportionnelles : cent quatre-vingts degrés, c'est pi radians. On en tire le reste : quatre-vingt-dix degrés, c'est pi sur deux, soixante, c'est pi sur trois, quarante-cinq, c'est pi sur quatre, et trente, c'est pi sur six. Pour passer des degrés aux radians, multiplie par pi sur cent quatre-vingts. Et pour revenir des radians aux degrés, multiplie par cent quatre-vingts sur pi, c'est-à-dire remplace pi par cent quatre-vingts.

Les mesures d'un même angle en degrés et en radians sont proportionnelles : 180 degrés correspondent à π radians.

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	180
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

- Pour passer des degrés aux radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$.
- Pour passer des radians aux degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$.

DES DEGRÉS AUX RADIANS

$$\text{radians} = \text{degrés} \times \frac{\pi}{180}$$

DES RADIANS AUX DEGRÉS

$$\text{degrés} = \text{radians} \times \frac{180}{\pi}$$

EXEMPLE TRAITÉ

a) Convertir en radians 18 degrés, 72 degrés et 150 degrés. b) Convertir en degrés $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}, \frac{5\pi}{6}$ et 1 radian.

18 degrés — On multiplie par $\frac{\pi}{180}$, puis on simplifie la fraction par 18.

$$18 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$$

72 et 150 degrés — De même, en simplifiant par 36, puis par 30.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

$72 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$; $150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$

Vers les degrés — Pour $\frac{\pi}{8}$, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$: cela revient à remplacer π par 180.

$\frac{180}{8} = 22{,}5$

Les deux suivants — Pour $\frac{3\pi}{10}$ et pour $\frac{4\pi}{5}$, on remplace encore π par 180, et on calcule.

$\frac{3 \times 180}{10} = 54$; $\frac{4 \times 180}{5} = 144$

Les deux derniers — Pour $\frac{5\pi}{6}$, on remplace encore π par 180. Pour 1 radian, il n'y a pas de π à remplacer : on multiplie par $\frac{180}{\pi}$, et on trouve environ $57{,}3$ degrés.

$\frac{5 \times 180}{6} = 150$; $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}3$

$\frac{\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}, \frac{5\pi}{6}$; $22{,}5°,\ 54°,\ 144°,\ 150°,$ environ $57{,}3°$

À ne pas faire : 30 degrés font $30 \times \frac{180}{\pi}$ radians — 30 degrés font $30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ radians. Un angle de 30 degrés est plus petit que l'angle plat : sa mesure en radians doit être plus petite que π.

5. ACTIVITÉ

Pour comprendre : faire tourner une figure

CE QU'IL DIT

Tawa nabdew la rotation b tajriba. 3andna triangle équilatéral ABC, w O houwa le centre mta3 le cercle circonscrit. N3awdou nrasmou el figure 3la papier calque, nthabbtou O bes-stylo, w ndawwrou el calque 7awl O fi le sens direct, 7atta A yji 3la B. Chnowa ysir ? B yemchi l C, w C yemchi l A, w O yo93ed fi blastou. W koll point N yemchi l point N prime, b7ith ON prime égale ON : el calque ma yetmattatch. W les angles AOB, NON prime w MOM prime, el koll kif kif : deux pi sur trois. Ya3ni les points el koll darou b nafs l'angle, fi nafs le sens, w 9a3dou 3la nafs la distance men O.

توّا نبداو la rotation بتجربة . عندنا O w triangle équilatéral A B C هو le centre متاع le cercle circonscrit .
نعاودو نرسمو الـ figure على papier calque ، نثبّتو O بالستيلو ، ندوّرو الـ calque حول O في le sens direct ، حتّى
A يجي على B . شنوّة يصير ؟ B يمشي لـ C ، C يمشي لـ O ، w A يقعد في بلاصتو . w كل point N يمشي لـ
point N ، بحيث prime O N égale O N : الـ calque ما يتمطّطش . M O M prime w N O N ، les angles A O B w
le sens ، w في نفس ، l'angle بنفس دارو الكل les points يعني . deux pi sur trois : الكل كيف كيف ، prime
على نفس la distance من O .

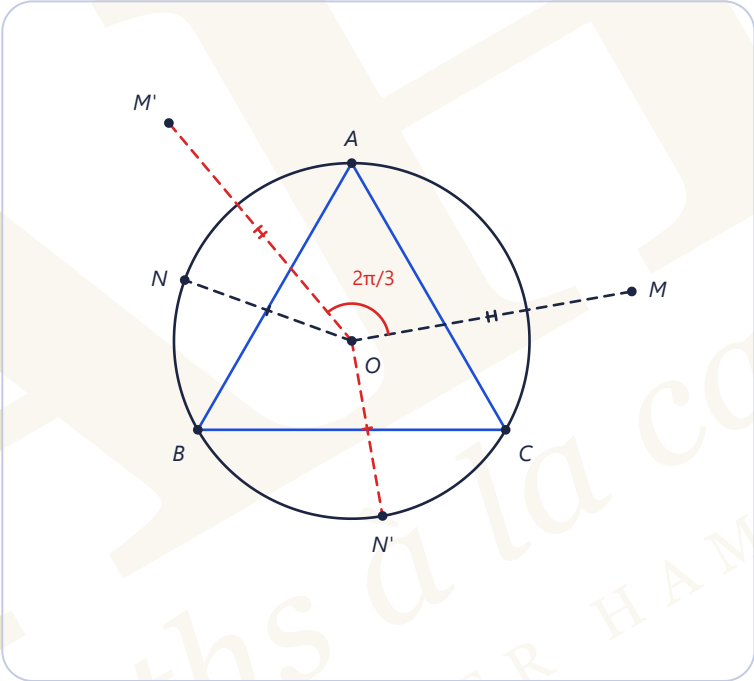
Abordons la rotation par une expérience. On a un triangle équilatéral A B C, et O est le centre de son cercle circonscrit. On reproduit la figure sur du papier calque, on fixe O avec la pointe du stylo, et on fait tourner le calque autour de O dans le sens direct, jusqu'à ce que A vienne sur B. Que se passe-t-il ? B va en C, C va en A, et O reste à sa place. Et chaque point N va en un point N prime tel que O N prime égale O N : le calque ne s'étire pas. Et les angles A O B, N O N prime et M O M prime sont tous égaux : deux pi sur trois.

Autrement dit, tous les points ont tourné du même angle, dans le même sens, en restant à la même distance de O.

Dans la figure, ABC est un triangle équilatéral et O est le centre de son cercle circonscrit. On décalque la figure, on fixe le point O avec la pointe d'un stylo, et on fait tourner le papier calque autour de O dans le **sens direct** — qui est, par convention, le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre — jusqu'à ce que le point A coïncide avec B.

On observe alors où vient chaque point du calque : les sommets, le point O, un point N du cercle et un point M quelconque.

Chaque point tourne autour de O du même angle, dans le même sens, en restant à la même distance de O.



Tous les points tournent du même angle autour de O.

Un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de centre O : A est en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. Un point N est sur le cercle, à gauche, et un point M est à l'extérieur du cercle, à droite. Leurs nouvelles positions N' et M' sont obtenues en tournant autour de O d'un tiers de tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : N' est en bas du cercle, M' en haut à gauche, à l'extérieur. Les segments [ON] et [ON'] ont la même longueur, ainsi que [OM] et [OM'].

EXEMPLE TRAITÉ

Le triangle ABC est équilatéral, de centre O. On fait tourner le calque autour de O, dans le sens direct, jusqu'à ce que A vienne sur B. a) Où viennent les points B et C ? b) Que devient le point O ? c) On note N' et M' les nouvelles positions de deux points N et M : comparer ON et ON', puis OM et OM'. d) Que valent l'angle $\widehat{AOB}$, l'angle $\widehat{NON'}$ et l'angle $\widehat{MOM'}$?

Les sommets — Les trois sommets sont sur le cercle de centre O, et les trois angles au centre sont égaux. Quand A vient sur B, le point B vient sur C et le point C vient sur A.

$A \longmapsto B \quad ; \quad B \longmapsto C \quad ; \quad C \longmapsto A$

Le point O — Le point O est tenu par la pointe du stylo : il reste à sa place.

$$O \longmapsto O$$

Les distances — Le calque ne se déforme pas : chaque point reste à la même distance de O.

$$ON' = ON \quad ; \quad OM' = OM$$

Les angles — Les trois angles au centre partagent le tour complet en trois parts égales : chacun mesure 120 degrés, c'est-à-dire $\frac{2\pi}{3}$. Tous les points du calque ont tourné de ce même angle.

$$\widehat{AOB} = \widehat{NON'} = \widehat{MOM'} = \frac{2\pi}{3}$$

À ne pas faire : Plus un point est loin de O, plus il tourne d'un grand angle — Tous les points tournent du même angle. Un point éloigné parcourt un arc plus long, mais l'angle au centre est le même pour tous les points.

---

6. ACTIVITÉ

Pour comprendre : un angle, deux points

CE QU'IL DIT

So2al sghir. 3andna point O w point M, w le cercle de centre O elli yet3adda men M. 9addech men point M prime 3la le cercle, b7ith l'angle MOM prime égale pi sur quatre ? Zouz, mouch wa7ed : wa7ed ki ndawwrou fi le sens direct, w wa7ed ki ndawwrou fi le sens indirect. W hakkeka l koll angle alpha bin zéro w pi. Ama ken l'angle zéro, nal9aw M houwa bidou. W ken l'angle pi, nal9aw point wa7ed : le symétrique mta3 M bennesba l O. Donc bech na3rfou win yemchi el point, yelzemna l'angle w le sens m3a b3adhhom.

سؤال صغير . عندنا le cercle de centre O ، w point M اللي يتعدّى من point O w point M . قدّاش من point M prime ؟ زوز ، موش واحد : واحد كي ندوّرو في le sens على le cercle ، بحيث l'angle M O M prime égale pi sur quatre . w في واحد كي ندوّرو direct ، w هكّاكة لكل angle alpha بين zéro w pi . أما كان l'angle zéro ، واحد كي ندوّرو في le sens indirect . w كان l'angle pi ، نلقاو point واحد : le symétrique متاع M بالنسبة لـ O . donc باش نعرفو وين نلقاو M هو بيدو . w يمشي الـ point ، يلزمنا l'angle w le sens مع بعضهم .

Une petite question. On a un point O et un point M, et le cercle de centre O qui passe par M. Combien y a-t-il de points M prime sur le cercle tels que l'angle M O M prime égale pi sur quatre ? Deux, pas un seul : un quand on tourne dans le sens direct, un quand on tourne dans le sens indirect. Et il en va de même pour tout angle alpha entre zéro et pi. Mais si l'angle est nul, on retrouve M lui-même. Et si l'angle est pi, on trouve un seul point : le symétrique de M par rapport à O. Pour savoir où va un point, il faut donc l'angle et le sens à la fois.

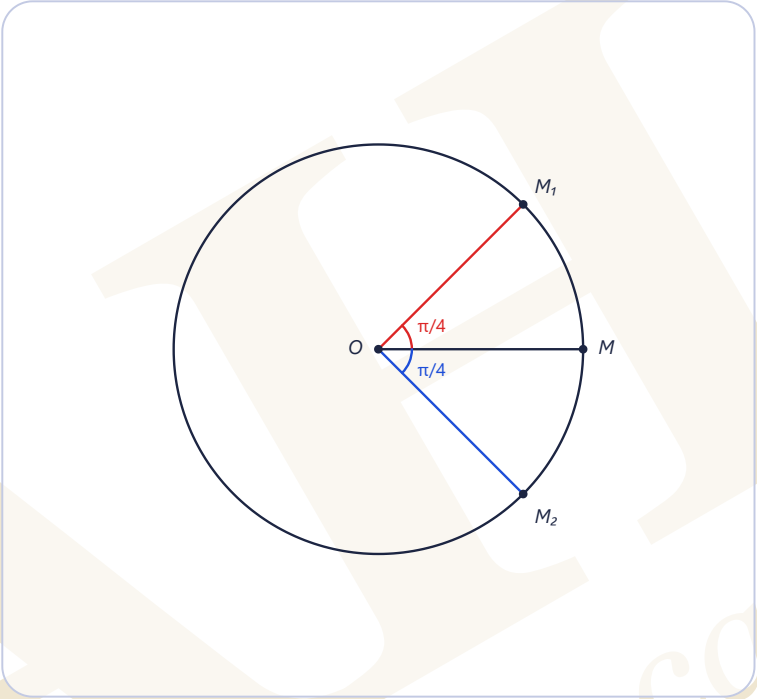
Soient O et M deux points distincts, et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon OM.

Sur le cercle $\mathscr{C}$, il y a **deux** points M' tels que $\widehat{MOM'} = \frac{\pi}{4}$: l'un s'obtient en tournant dans le sens direct, l'autre en tournant dans le sens indirect.

Il en est de même si l'on remplace $\frac{\pi}{4}$ par un réel α appartenant à $]0\,;\pi[$: deux points, un pour chaque sens.

En revanche, pour l'angle 0 il n'y a qu'un point, le point M lui-même ; et pour l'angle π il n'y a qu'un point, le symétrique de M par rapport à O.

Pour dire où va un point quand il tourne autour de O, il faut donc donner l'angle **et le sens**.



Le même angle, de part et d'autre de (OM) : deux points.

Un cercle de centre O passant par un point M, placé à droite. Deux points du cercle, M_1 au-dessus de M et M_2 au-dessous, sont tels que les angles MOM_1 et MOM_2 mesurent tous deux pi sur quatre. Le segment $[OM_1]$ est rouge, le segment $[OM_2]$ est bleu.

EXEMPLE TRAITÉ

Sur le cercle de centre O passant par M, on note M_1 et M_2 les deux points tels que l'angle $\widehat{MOM_1}$ et l'angle $\widehat{MOM_2}$ mesurent tous deux $\frac{\pi}{4}$. Que vaut l'angle $\widehat{M_1OM_2}$? Quelle est la nature du triangle OM_1M_2 ?

L'angle — Les deux points sont de part et d'autre de la droite (OM) : les deux angles s'ajoutent.

$\widehat{M_1OM_2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Les côtés — M_1 et M_2 sont sur le cercle de centre O : les longueurs OM_1 et OM_2 sont égales au rayon.

$OM_1 = OM_2 = OM$

Conclure — Le triangle a deux côtés égaux et un angle droit en O.

OM_1M_2 est isocèle et rectangle en O

> OM_1M_2 est isocèle et rectangle en O

À ne pas faire : Sur le cercle, il y a un seul point M' tel que $\widehat{MOM'} = \dfrac{\pi}{4}$ — Il y en a deux, un dans chaque sens. Un angle géométrique ne dit pas de quel côté tourner : c'est le sens, direct ou indirect, qui choisit entre les deux points.

---

7. DÉFINITION

Rotation directe, rotation indirecte

CE QU'IL DIT

Tawa el définition. 3andna point O, w réel alpha bin zéro w pi. La rotation directe de centre O et d'angle alpha hiya l'application elli t5alli O fi blastou, w ta3ti l koll point M, ghir O, el point M prime elli y7a99e9 zouz chourout : OM prime égale OM, w l'angle MOM prime égale alpha, w ndawwrou men M l M prime fi le sens direct. W ken ndawwrou fi le sens indirect, nsammiwha la rotation indirecte de centre O et d'angle alpha. M prime houwa l'image mta3 M. Rodd belek : la rotation yelzemha thletha 7ajet, le centre, l'angle w le sens.

zéro w pi . la rotation directe de centre O et d'angle alpha بين point O ، w réel alpha عندنا . définition الـ توّا
اللي يحقّق زوز point M prime الـ ، O غير ، point M لكل تعطي w ، بلاصتو O في تخلّي اللي l'application هي
le sens في M prime لـ M من ندوّرو O M prime égale O M ، w l'angle M O M prime égale alpha ، w : شروط
la rotation indirecte de centre O et d'angle alpha . M نسمّيوها ، le sens indirect في ندوّرو كان direct . w
. le centre ، l'angle w le sens ، يلزمها ثلاثة حاجات la rotation : ردّ بالك . M متاع l'image هو prime

Voici la définition. On a un point O et un réel alpha entre zéro et pi. La rotation directe de centre O et d'angle alpha est l'application qui laisse O à sa place, et qui associe à chaque point M, autre que O, le point M prime qui vérifie deux conditions : O M prime égale O M, et l'angle M O M prime égale alpha, en tournant de M vers M prime dans le sens direct. Et si l'on tourne dans le sens indirect, on l'appelle la rotation indirecte de centre O et d'angle alpha. M prime est l'image de M. Attention : une rotation a besoin de trois choses, le centre, l'angle et le sens.

Soient O un point du plan et α un réel appartenant à $]0\,;\pi[$.

- L'application du plan dans le plan qui laisse invariant le point O et qui, à tout point M distinct de O, associe le point M' tel que

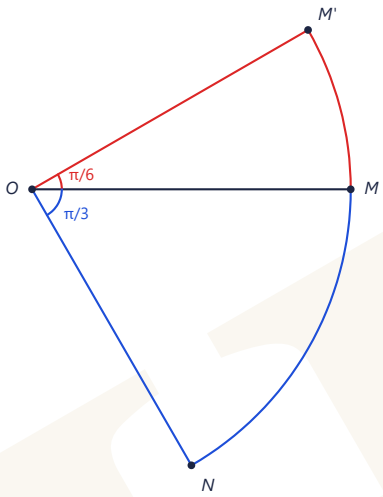
$$OM' = OM \text{ et } \widehat{MOM'} = \alpha,$$

en tournant de M vers M' dans le sens direct, est appelée la **rotation directe de centre O et d'angle α.**

- L'application du plan dans le plan qui laisse invariant le point O et qui, à tout point M distinct de O, associe le point M' tel que $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$, en tournant de M vers M' dans le sens indirect, est appelée la **rotation indirecte de centre O et d'angle α.**

Dans les deux cas, M' est l'**image** de M par la rotation. Si r désigne la rotation, on écrit $r(O) = O$ et $r(M) = M'$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMRANI



M' : rotation directe d'angle π/6. N : rotation indirecte d'angle π/3.

Un point O à gauche et un point M à droite, sur une même horizontale. Le point M' est au-dessus : on l'obtient en tournant autour de O d'un angle pi sur six dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le point N est au-dessous : on l'obtient en tournant d'un angle pi sur trois dans le sens des aiguilles d'une montre. Les trois points M, M' et N sont à la même distance de O.

LE CENTRE EST INVARIANT

$$r(O) = O$$

POUR M DISTINCT DE O

$$r(M) = M' \ : \quad OM' = OM \quad \text{et} \quad \widehat{MOM'} = \alpha$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient O et M deux points distincts. On note M' l'image de M par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et N l'image de M par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Quelle est la nature du triangle $OM'N$?

Les distances — Les deux rotations ont pour centre O : chacune conserve la distance à O.

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad ON = OM$$

L'angle — M' est obtenu en tournant dans le sens direct et N en tournant dans le sens indirect : ils sont de part et d'autre de la droite (OM), et les deux angles s'ajoutent.

$$\widehat{M'ON} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

Conclure — Le triangle $OM'N$ a deux côtés égaux et un angle droit en O.

$OM'N$ est isocèle et rectangle en O

> $OM'N$ est isocèle et rectangle en O

À ne pas faire : Une rotation est connue dès qu'on a son centre et son angle — Il faut aussi son sens : rotation directe ou rotation indirecte. Avec le même centre et le même angle, la rotation directe et la rotation indirecte donnent deux images différentes d'un même point.

À ne pas faire : L'image M' de M par une rotation de centre O vérifie $MM' = OM$ — Elle vérifie $OM' = OM$. C'est la distance au centre qui est conservée : M et M' sont sur un même cercle de centre O.

8. REMARQUE

Angle π, angle nul, antécédent

CE QU'IL DIT

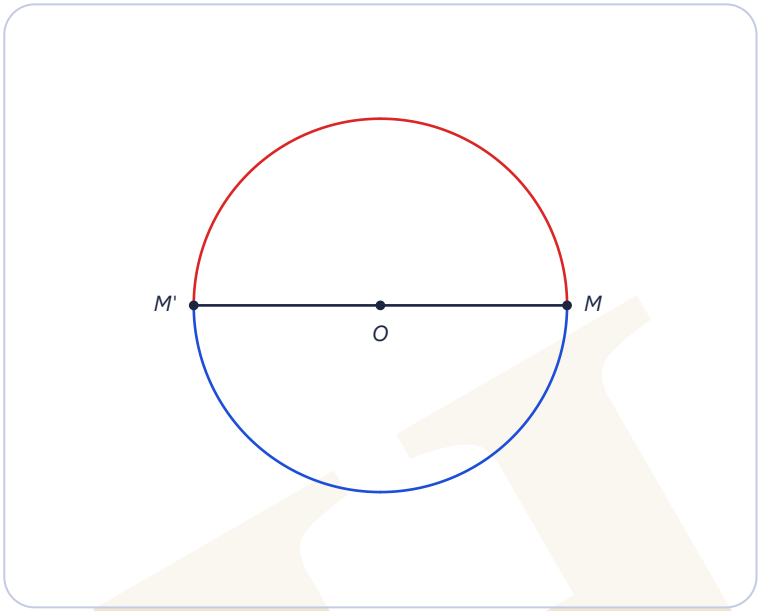
3andna trois remarques. Numéro un : ken l'angle pi, la rotation directe w la rotation indirecte ya3tiw nafs el point, 5ater un demi-tour mel jiha hedhi walla mel jiha lo5ra ywassel l nafs el blasa. Donc la rotation de centre O et d'angle pi hiya la symétrie centrale de centre O. Numéro deux : ken l'angle nul, 7atta point ma yet7arrek : hedhi l'identité du plan. Numéro trois : koll point M prime 3andou antécédent wa7ed, ya3ni point wa7ed M elli l'image mte3ou M prime. W le quart de tour elli ta3rfou, houwa la rotation d'angle pi sur deux.

عندنا trois remarques . numéro un : كان la rotation directe w la rotation indirecte ، l'angle pi يعطيو نفس الـ point ، خاطر un demi-tour من الجهة هذي ولّا من الجهة الأخرى يوصّل لنفس البلاصة . donc la rotation de centre O et d'angle pi هي . numéro deux : la symétrie centrale de centre O ، l'angle nul كان ، حتّى point ما يتحرّك : l'identité du plan . numéro trois : كل point M prime عندو antécédent واحد ، يعني point واحد M اللي M prime . w le quart de tour متاعو l'image اللي تعرفو ، هو la rotation d'angle pi sur deux .

Voici trois remarques. Numéro un : si l'angle est pi, la rotation directe et la rotation indirecte donnent le même point, car un demi-tour d'un côté ou de l'autre mène au même endroit. La rotation de centre O et d'angle pi est donc la symétrie centrale de centre O. Numéro deux : si l'angle est nul, aucun point ne bouge : c'est l'identité du plan. Numéro trois : chaque point M prime a un seul antécédent, c'est-à-dire un seul point M dont l'image est M prime. Et le quart de tour que tu connais, c'est la rotation d'angle pi sur deux.

- La rotation directe ou indirecte de centre O et d'angle π est la **symétrie centrale** de centre O.
- La rotation directe ou indirecte d'angle nul est l'**identité** du plan.
- Soit r une rotation directe ou indirecte. Étant donné un point M' du plan, il existe un seul point M tel que $r(M) = M'$. M est l'**antécédent** de M' par r.

On retrouve le vocabulaire déjà connu : le **quart de tour** direct ou indirect de centre O est la rotation directe ou indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et le **demi-tour** de centre O est la symétrie centrale de centre O.



Un demi-tour dans un sens ou dans l'autre mène au même point.

Un point O au centre, un point M à droite et le point M' à gauche, symétrique de M par rapport à O. Un demi-cercle rouge va de M à M' en passant par le haut, et un demi-cercle bleu va de M à M' en passant par le bas.

UN DEMI-TOUR

$\alpha = \pi$: symétrie centrale de centre O

AUCUN POINT NE BOUGE

$\alpha = 0$: identité du plan

EXEMPLE TRAITÉ

a) Quelle est l'image d'un point M par la rotation directe de centre O et d'angle π ? Et par la rotation indirecte de même centre et de même angle ? b) Par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, un point A a pour image B. Par quelle rotation retrouve-t-on A à partir de B ?

Un demi-tour — Tourner d'un angle plat dans un sens ou dans l'autre amène au même point : le point M' tel que O soit le milieu du segment $[MM']$. Les deux rotations sont la symétrie centrale de centre O.

O est le milieu de $[MM']$

Revenir en arrière — $OA = OB$ et l'angle $\widehat{AOB}$ mesure $\frac{\pi}{3}$. Pour revenir de B à A, on tourne du même angle dans l'autre sens : A est l'image de B par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$B \longmapsto A$

À ne pas faire : La rotation directe et la rotation indirecte de centre O et d'angle π sont deux applications différentes — C'est la même application : la symétrie centrale de centre O. Un demi-tour dans un sens ou dans l'autre amène chaque point au même endroit.

9. PROPRIÉTÉ

La rotation qui transforme A en B

CE QU'IL DIT

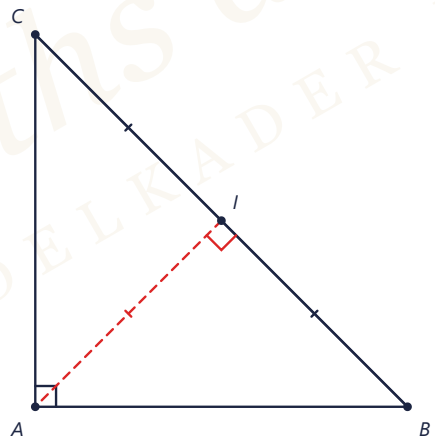
Propriété mouhemma. 3andna trois points O, A w B, w OA égale OB. Thamma rotation wa7da de centre O elli teb3ath A l B. L'angle mte3ha houwa l'angle AOB, w le sens mte3ha houwa ej-jiha elli ndawwrou fiha 7awl O bech nemchiw men A l B. Rodd belek lech-chart : OA égale OB. Ken les deux distances mouch kif kif, ma thamma 7atta rotation de centre O teb3ath A l B, 5ater la rotation t5alli koll point 3la nafs la distance men le centre.

مهمّة propriété . عندنا O A égale O B ، w A w B ، trois points . ثمّة rotation وحدة O de centre اللي تبعث A
متاعها هو l'angle A O B ، w le sens متاعها هو l'angle . B لـ A من نمشيو باش O حول فيها ندوّرو اللي الجهة هو . ردّ
بالك للشرط : O A égale O B . كان les deux distances موش كيف كيف ، ما ثمّة حتّى A تبعث rotation de centre O
. le centre من la distance على نفس point كل تخلّي la rotation خاطر ، B لـ

Une propriété importante. On a trois points O, A et B, avec O A égale O B. Il existe une seule rotation de centre O qui envoie A sur B. Son angle est l'angle A O B, et son sens est celui dans lequel on tourne autour de O pour aller de A vers B. Attention à la condition : O A égale O B. Si les deux distances sont différentes, aucune rotation de centre O n'envoie A sur B, car une rotation garde chaque point à la même distance du centre.

Étant donné trois points distincts O, A et B tels que $OA = OB$, il existe une **unique** rotation r de centre O telle que $r(A) = B$.

Son angle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$, et son sens est celui dans lequel on tourne autour de O pour aller de A vers B.



IA = IB = IC, et la médiane (AI) est perpendiculaire à (BC).

Un triangle ABC rectangle et isocèle en A : A est en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à gauche. Le point I est le milieu de l'hypoténuse [BC]. Les segments [IA], [IB] et [IC] ont la même longueur, et l'angle AIB est droit.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

EXISTENCE ET UNICITÉ

$OA = OB \implies$ une seule rotation de centre O transforme A en B

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A, et I est le milieu du segment $[BC]$. Quelle est l'image du point A par le quart de tour direct de centre I ?

Les distances — Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets.

$IA = IB = IC$

L'angle — Le triangle est isocèle en A : la médiane (AI) est aussi la hauteur. L'angle $\widehat{AIB}$ est donc droit, comme l'angle $\widehat{AIC}$.

$\widehat{AIB} = \widehat{AIC} = \dfrac{\pi}{2}$

Le sens — Il y a deux candidats, B et C. Sur la figure, on va de A vers B en tournant autour de I dans le sens direct, et de A vers C dans le sens indirect.

$A \longmapsto B$

l'image de A est B

À ne pas faire : Il existe une rotation de centre O qui transforme A en B, quels que soient les points A et B — Il faut que $OA = OB$. Une rotation de centre O conserve la distance à O : si OA et OB sont différents, aucune rotation de centre O ne transforme A en B.

10. EXEMPLE

Exemple : lire des rotations

CE QU'IL DIT

Ntabb9ou el définition 3la figure. 3andna AB égale AC égale AD, w BC égale BE égale CE. L'angle BAC fih pi sur quatre, w l'angle CAD droit. Bech ta9ra rotation 3la figure, 9alleb 3la thletha 7ajet : zouz longueurs kif kif 5arjin men le centre, l'angle elli binethom, w le sens. Mathalan : AB égale AC, w l'angle BAC égale pi sur quatre, w men B l C ndawwrou fi le sens direct. Donc C houwa l'image mta3 B par la rotation directe de centre A et d'angle pi sur quatre.

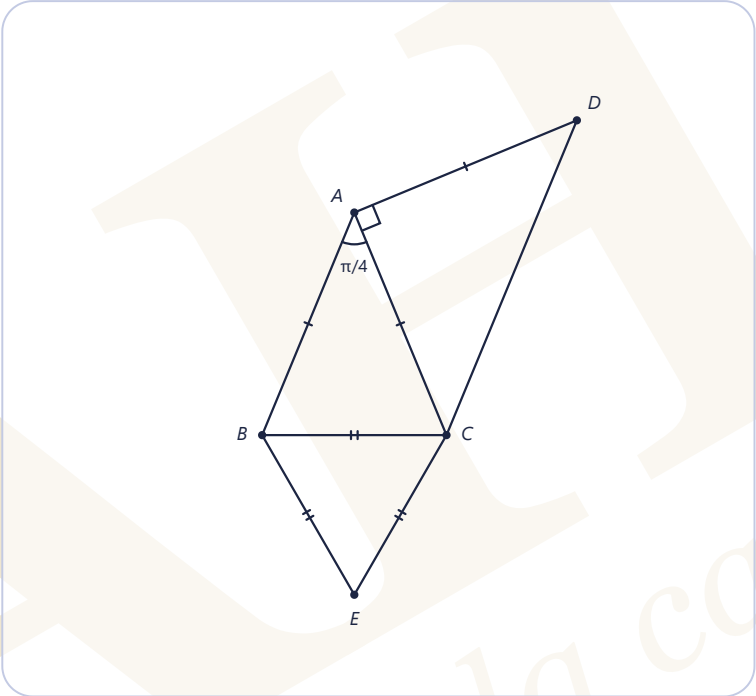
فيه A B égale A C égale A D ، w B C égale B E égale C E . l'angle B A C عندنا . figure على définition نطبّقو الـ
كيف longueurs زوز : قلّب على ثلاثة حاجات ، figure على rotation باش تقرا . pi sur quatre ، w l'angle C A D droit
A B égale A C ، w l'angle B A C égale pi sur : مثلاً . w le sens ، اللي بيناتهم le centre ، l'angle من كيف خارجين
B par la rotation directe de centre A et متاع l'image هو le sens direct . donc C ندوّرو في C لـ B من quatre ، w
. d'angle pi sur quatre

Appliquons la définition sur une figure. On a A B égale A C égale A D, et B C égale B E égale C E. L'angle B A C mesure pi sur quatre, et l'angle C A D est droit. Pour lire une rotation sur une figure, cherche trois choses : deux longueurs égales qui partent du centre, l'angle entre elles, et le sens. Par exemple : A B égale A C,

l'angle B A C égale pi sur quatre, et de B vers C on tourne dans le sens direct. Donc C est l'image de B par la rotation directe de centre A et d'angle pi sur quatre.

Dans la figure, $AB = AC = AD$ et $BC = BE = CE$. L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\frac{\pi}{4}$ et l'angle $\widehat{CAD}$ est droit.

Pour lire une rotation sur une figure, on cherche trois choses : deux longueurs égales à partir du centre, l'angle qu'elles forment, et le sens dans lequel on tourne.



AB = AC = AD et BC = BE = CE.

Un triangle ABC isocèle en A, avec A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite ; l'angle BAC mesure pi sur quatre. Le point D est en haut à droite de A, tel que AD = AC et que l'angle CAD soit droit. Sous le segment [BC], le point E forme avec B et C un triangle équilatéral. Les segments [AB], [AC] et [AD] portent une barre ; les segments [BC], [BE] et [CE] en portent deux.

EXEMPLE TRAITÉ

Sur la figure : a) quelle est l'image de B par la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$? b) Quelle est l'image de C par la rotation indirecte de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$? c) Quel point a pour image B par la rotation indirecte de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$? d) Quel est l'angle de la rotation indirecte de centre A qui transforme D en B ? e) Quel est le centre de la rotation directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme C en D ?

L'image de B — $AB = AC$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\frac{\pi}{4}$; de B vers C, on tourne autour de A dans le sens direct.

$B \longmapsto C$

L'image de C — Le triangle BCE est équilatéral : $BC = BE$ et l'angle $\widehat{CBE}$ mesure $\frac{\pi}{3}$; de C vers E, on tourne autour de B dans le sens indirect.

$C \longmapsto E$

Un antécédent — $CE = CB$ et l'angle $\widehat{ECB}$ mesure $\frac{\pi}{3}$; de E vers B, on tourne autour de C dans le sens indirect. Le point cherché est E.

$E \longmapsto B$

Un angle — $AD = AB$, et l'angle $\widehat{DAB}$ est la somme de l'angle droit $\widehat{DAC}$ et de l'angle $\widehat{CAB}$.

$\widehat{DAB} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Un centre — Le centre est à la même distance de C et de D, et l'angle de sommet ce centre est droit : c'est le point A, et de C vers D on tourne bien dans le sens direct.

le centre est A

À ne pas faire : D a pour image B par la rotation indirecte de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ — L'angle de cette rotation est $\frac{3\pi}{4}$. L'angle d'une rotation se mesure entre le point et son image : de D à B, on traverse l'angle droit, puis l'angle de $\frac{\pi}{4}$.

---

11. MÉTHODE

Construire l'image d'un point

CE QU'IL DIT

Kifech narsmou l'image mta3 point M par une rotation de centre O et d'angle alpha ? Numéro un : bel compas, narsmou le cercle de centre O elli yet3adda men M, 5ater OM prime égale OM. Numéro deux : bel rapporteur, narsmou la demi-droite elli to5rej men O w ta3mel m3a OM el angle alpha, fi le sens direct ken la rotation directe, w fi le sens indirect ken indirecte. Numéro trois : M prime houwa el point win la demi-droite t9oss le cercle. W ken l'angle pi sur trois, le compas wa7dou yekfi : le triangle OMM prime équilatéral.

compas بالـ : numéro un ؟ point M par une rotation de centre O et d'angle alpha متاع l'image كيفاش نرسمو
rapporteur بالـ : O M prime égale O M . numéro deux خاطر ، M من اللي يتعدّى le cercle de centre O نرسمو ،
la rotation كان le sens direct في ، angle alpha الـ O M تعمل مع O w اللي تخرج من la demi-droite نرسمو ،
le تقصّ la demi-droite وين point هو الـ indirecte . numéro trois : M prime كان le sens indirect في directe ، w
. le triangle O M M prime équilatéral : وحدو يكفي l'angle pi sur trois ، le compas كان cercle . w

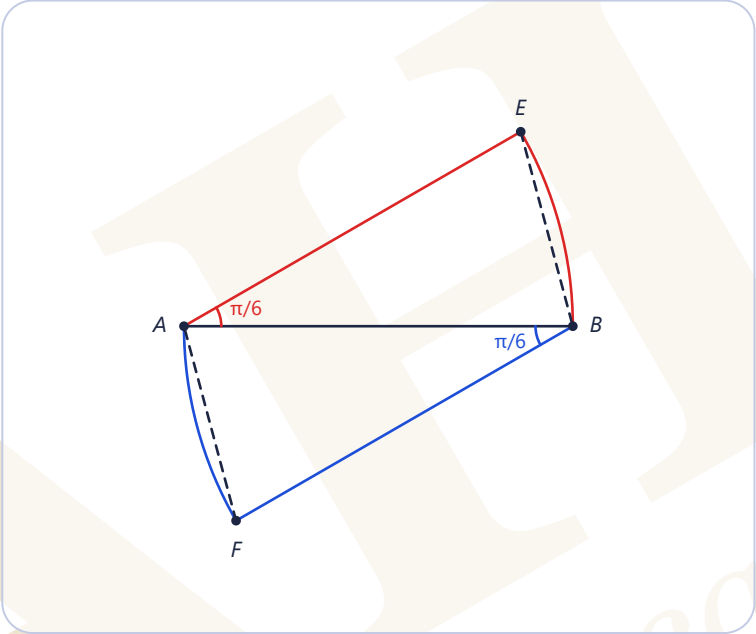
Comment construire l'image d'un point M par une rotation de centre O et d'angle alpha ? Numéro un : au compas, on trace le cercle de centre O qui passe par M, car O M prime égale O M. Numéro deux : au rapporteur, on trace la demi-droite qui part de O et qui fait avec O M l'angle alpha, dans le sens direct pour une rotation directe, dans le sens indirect pour une rotation indirecte. Numéro trois : M prime est le point où la demi-droite coupe le cercle. Et si l'angle est pi sur trois, le compas suffit : le triangle O M M prime est équilatéral.

Pour construire l'image M' d'un point M par une rotation de centre O et d'angle α :

1. on trace le cercle de centre O passant par M : le point M' est sur ce cercle, car $OM' = OM$;

2. on trace, avec le rapporteur, la demi-droite d'origine O qui fait avec la demi-droite $[OM)$ un angle α, en tournant dans le sens direct pour une rotation directe, dans le sens indirect pour une rotation indirecte ;
3. le point M' est le point d'intersection de cette demi-droite et du cercle.

Pour l'angle $\frac{\pi}{3}$, le compas suffit : le triangle OMM' est équilatéral. Pour l'angle $\frac{\pi}{2}$, l'équerre et le compas suffisent : le triangle OMM' est rectangle et isocèle en O.



E et F sont de part et d'autre de la droite (AB).

Un segment horizontal [AB], A à gauche et B à droite. Le point E est au-dessus de la droite (AB) : AE = AB et l'angle BAE mesure pi sur six. Le point F est au-dessous : BF = BA et l'angle ABF mesure pi sur six. Les segments [EB] et [FA], en pointillés, ferment le quadrilatère AEBF.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points distincts. On construit le point E, image de B par la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et le point F, image de A par la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Quelle est la position relative des droites (AE) et (BF) ? Quelle est la nature du quadrilatère $AEBF$?

Les longueurs — E est l'image de B par une rotation de centre A, et F est l'image de A par une rotation de centre B.

$$AE = AB \quad \text{et} \quad BF = BA$$

Les angles — L'angle $\widehat{BAE}$ et l'angle $\widehat{ABF}$ mesurent tous deux $\frac{\pi}{6}$. Comme les deux rotations sont directes, E et F sont de part et d'autre de la droite (AB) : ces deux angles sont alternes-internes.

$$\widehat{BAE} = \widehat{ABF} = \frac{\pi}{6}$$

Les droites — Deux angles alternes-internes égaux : les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

(AE) est parallèle à (BF)

Le quadrilatère — Les côtés $[AE]$ et $[FB]$ sont parallèles et de même longueur, et le quadrilatère $AEBF$ n'est pas croisé : c'est un parallélogramme.

$AEBF$ est un parallélogramme

$AEBF$ est un parallélogramme

À ne pas faire : Pour l'image de M par une rotation de centre O, on mesure l'angle au point M — On mesure l'angle au centre O, à partir de la demi-droite $[OM)$. C'est l'angle $\widehat{MOM'}$ qui vaut α : son sommet est le centre de la rotation.

12. APPLICATION

De M à M' : plusieurs applications

CE QU'IL DIT

Nchoufou figure fiha barcha applications. 3andna rectangle ABCD, w point M 3la AB, w point M prime 3la DC, w la droite LI hiya la médiatrice mta3 le segment MM prime. Chnowa elli yeb3ath M l M prime ? La translation de vecteur AD. W la symétrie axiale d'axe LI. W la symétrie centrale de centre J, 5ater J houwa le milieu. W zid des rotations : koll point 3la la médiatrice ynajjem ykoun centre, 5ater houwa 3la nafs la distance men M w men M prime. 7awl L, l'angle quarante-cinq degrés, ya3ni pi sur quatre. 7awl K, cent vingt degrés, ya3ni deux pi sur trois. W 7awl I, angle droit, ama fi le sens indirect.

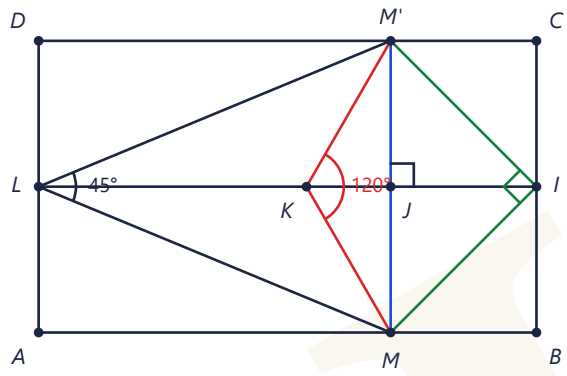
نشوفو figure فيها برشة applications . عندنا point M ، w point M prime على rectangle A B C D على A B D
la ؟ M prime لـ M شنوّة اللي يبعث . le segment M M prime متاع la médiatrice هي C ، w la droite L I
le هو J خاطر ، translation de vecteur A D . w la symétrie axiale d'axe L I . w la symétrie centrale de centre J
la distance نفس على هو خاطر ، centre ينجّم يكون la médiatrice على point كل : des rotations زيد milieu . w
K ، cent vingt degrés حول . pi sur quatre يعني ، L ، l'angle quarante-cinq degrés حول . M prime من M w من
. le sens indirect في أما ، I ، angle droit حول deux pi sur trois . w يعني ،

Regardons une figure qui cache plusieurs applications. On a un rectangle A B C D, un point M sur A B, un point M prime sur D C, et la droite L I est la médiatrice du segment M M prime. Qu'est-ce qui envoie M sur M prime ? La translation de vecteur A D. La symétrie axiale d'axe L I. La symétrie centrale de centre J, car J est le milieu. Et aussi des rotations : chaque point de la médiatrice peut servir de centre, puisqu'il est à la même distance de M et de M prime. Autour de L, l'angle est de quarante-cinq degrés, soit pi sur quatre. Autour de K, cent vingt degrés, soit deux pi sur trois. Et autour de I, c'est un angle droit, mais dans le sens indirect.

Dans la figure, $ABCD$ est un rectangle, L est le milieu de $[AD]$ et I est le milieu de $[BC]$: la droite (LI) est la médiatrice de $[BC]$. Le point M est sur $[AB]$, le point M' est sur $[DC]$, et la droite (MM') est perpendiculaire à la droite (LI) au point J. Le point K est sur le segment $[LJ]$.

On lit sur la figure : $\widehat{MLM'} = 45°$, $\widehat{MKM'} = 120°$, et l'angle $\widehat{MIM'}$ est droit.

Plusieurs applications du plan transforment M en M' : une translation, une symétrie axiale, une symétrie centrale — et plusieurs rotations.



L, K, J et I sont sur la médiatrice du segment [MM'].

Un rectangle ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. L est le milieu du côté gauche [AD] et I le milieu du côté droit [BC] ; le segment [LI] traverse le rectangle. Le point M est sur le côté du bas, le point M' juste au-dessus de lui sur le côté du haut, et le segment [MM'] coupe [LI] à angle droit au point J. Le point K est sur [LI], entre L et J. Depuis L, on voit le segment [MM'] sous un angle de 45 degrés ; depuis K, sous un angle de 120 degrés ; depuis I, sous un angle droit.

EXEMPLE TRAITÉ

Sur la figure, nommer : a) une translation qui transforme M en M' ; b) une symétrie axiale qui transforme M en M' ; c) une symétrie centrale qui transforme M en M' ; d) des rotations qui transforment M en M', en donnant leurs angles en radians.

La translation — Les droites (MM') et (AD) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AB), et $MM' = AD$: le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AD}$. C'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

La symétrie axiale — La droite (LI) est perpendiculaire au segment $[MM']$ en son milieu J : c'est sa médiatrice. C'est la symétrie axiale d'axe (LI).

La symétrie centrale — J est le milieu du segment $[MM']$: c'est la symétrie centrale de centre J, qui est aussi la rotation de centre J et d'angle π.

Les centres possibles — Le centre d'une rotation qui transforme M en M' est à égale distance de M et de M' : il est sur la médiatrice (LI). Les points L, K et I conviennent.

$$LM = LM' \quad ; \quad KM = KM' \quad ; \quad IM = IM'$$

Les angles et les sens — Autour de L et autour de K, on va de M vers M' dans le sens direct ; autour de I, dans le sens indirect. On convertit : 45 degrés font $\frac{\pi}{4}$ et 120 degrés font $\frac{2\pi}{3}$.

$$L : \text{directe}, \frac{\pi}{4} \quad ; \quad K : \text{directe}, \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad I : \text{indirecte}, \frac{\pi}{2}$$

À ne pas faire : Une seule rotation transforme M en M' — Il y en a une pour chaque point de la médiatrice de $[MM']$. Dès que le centre est à égale distance de M et de M', il existe une rotation de ce centre qui transforme M en M' ; seul l'angle change.

13. PROPRIÉTÉ

Conservation des distances et des angles

CE QU'IL DIT

Tawa ahamm propriété fel chapitre. La rotation ma tbaddelch les distances : ken M prime w N prime houma les images mta3 M w N, donc M prime N prime égale MN. 3lech ? Les triangles OMN w OM prime N prime 3andhom zouz côtés kif kif, OM égale OM prime w ON égale ON prime, w l'angle elli binethom kif kif : donc houma isométriques. W menha : la rotation t7afedh 3la les angles. Ken A prime, B prime w C prime houma les images mta3 A, B w C, l'angle A prime B prime C prime égale l'angle ABC. W bel5sous, l'angle droit yo93ed droit : la rotation t7afedh 3la l'orthogonalité.

توّا أهمّ propriété في الـ la rotation . chapitre ما تبدّلش les distances : كان M prime w N prime هوما les images متاع M N prime égale donc M prime N prime ، M w N . علاش ؟ les triangles O M N w O M prime N prime عندهم زوز côtés كيف كيف ، w l'angle ، O N prime égale O M prime w O M égale اللي بيناتهم كيف كيف : la rotation : منها isométriques . w هوما donc les angles تحافظ على . كان B prime w C prime ، A prime هوما l'angle droit ، بالخصوص A ، B w C ، l'angle A prime B prime C prime égale l'angle A B C . w متاع les images يقعد droit : la rotation تحافظ على l'orthogonalité .

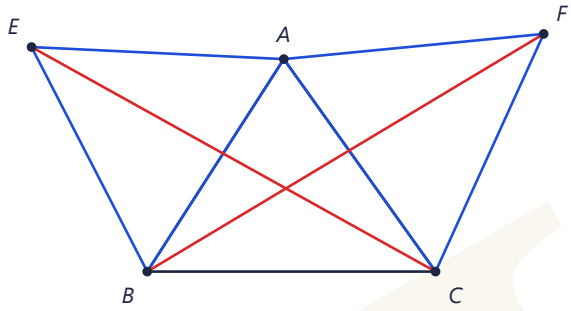
Voici la propriété la plus importante du chapitre. Une rotation ne change pas les distances : si M prime et N prime sont les images de M et N, alors M prime N prime égale M N. Pourquoi ? Les triangles O M N et O M prime N prime ont deux côtés égaux, O M égale O M prime et O N égale O N prime, et l'angle compris entre eux est le même : ils sont donc isométriques. Il en résulte que la rotation conserve les angles. Si A prime, B prime et C prime sont les images de A, B et C, l'angle A prime B prime C prime égale l'angle A B C. En particulier, un angle droit reste droit : la rotation conserve l'orthogonalité.

Soit r une rotation directe ou indirecte.

- Si M et N sont deux points d'images M' et N', alors $M'N' = MN$: **une rotation conserve les distances**.
- Si A, B et C sont trois points non alignés d'images A', B' et C', alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$: **une rotation conserve les angles**.

En particulier, une rotation conserve l'**orthogonalité**.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



ABE et ACF sont équilatéraux.

Un triangle ABC, avec A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. À gauche, sur le côté [AB] et à l'extérieur du triangle, le triangle équilatéral ABE. À droite, sur le côté [AC] et à l'extérieur, le triangle équilatéral ACF. Les segments [EC] et [BF], en rouge, se croisent à l'intérieur de la figure.

LES DISTANCES

$$M'N' = MN$$

LES ANGLES

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$$

DÉMONSTRATION

Soit r une rotation de centre O et d'angle α, et M, N deux points distincts, non alignés avec O. On a $OM' = OM$ et $ON' = ON$. Les angles $\widehat{MOM'}$ et $\widehat{NON'}$ mesurent tous deux α et sont décrits dans le même sens : en ajoutant ou en retranchant un même angle, on obtient $\widehat{M'ON'} = \widehat{MON}$. Les triangles OMN et $OM'N'$ ont donc un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux : ils sont isométriques, et $M'N' = MN$. Pour trois points non alignés A, B et C, les triangles ABC et $A'B'C'$ ont alors leurs trois côtés respectivement égaux : ils sont isométriques, donc $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle les points E et F tels que ABE et ACF soient deux triangles équilatéraux. Montrer que $EC = BF$.

La rotation — On considère la rotation directe r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et on cherche les images de E et de C.

L'image de E — Le triangle ABE est équilatéral : $AE = AB$ et l'angle $\widehat{EAB}$ mesure $\frac{\pi}{3}$. Sur la figure, on va de E vers B en tournant autour de A dans le sens direct.

$$E \longmapsto B$$

L'image de C — De même, le triangle ACF est équilatéral, et l'on va de C vers F dans le sens direct.

$$C \longmapsto F$$

Conclure — Le segment $[EC]$ a pour image le segment $[BF]$, et une rotation conserve les distances.

$$EC = BF$$

$$EC = BF$$

À ne pas faire : Par une rotation, $MM' = NN'$ pour tous les points M et N — C'est $M'N' = MN$ qui est vrai. Ce qui est conservé, c'est la distance entre deux points et la distance entre leurs images. La distance d'un point à son image, elle, grandit quand le point s'éloigne du centre.

---

14. THÉORÈME

Image d'un segment, image d'une droite

CE QU'IL DIT

Chnowa l'image mta3 segment ? 3andna rotation r, w zouz points A w B, w les images mte3hom A prime w B prime. L'image mta3 le segment AB hiya le segment A prime B prime, w 3andhom nafs la longueur. W l'image mta3 la droite AB hiya la droite A prime B prime. 3lech ? Ken M 3la le segment AB, AM plus MB égale AB. La rotation t7afedh 3la les distances, donc A prime M prime plus M prime B prime égale A prime B prime : M prime 3la le segment A prime B prime. W menha : la rotation t7afedh 3la l'alignement. Trois points alignés, les images mte3hom alignés.

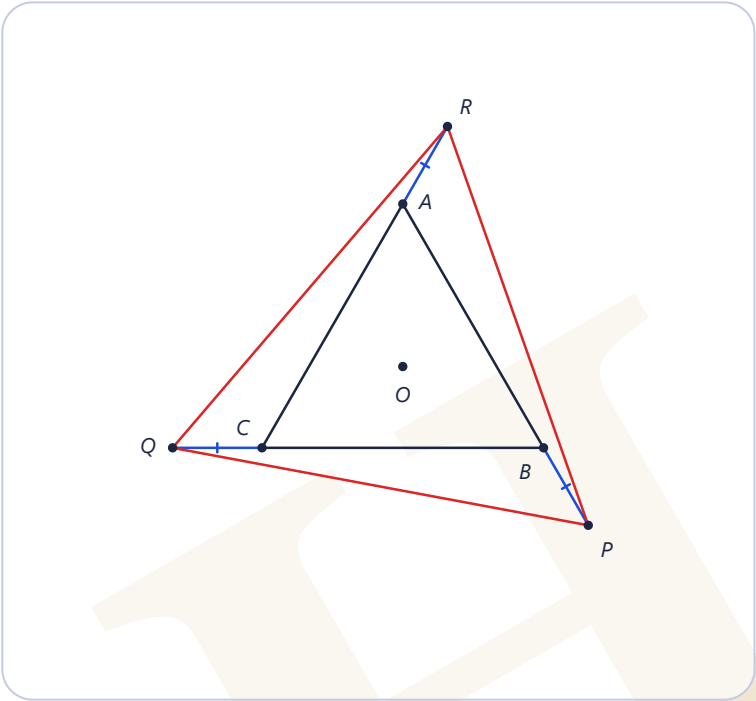
شنوّة l'image متاع segment ؟ عندنا rotation r ، w زوز points A w B ، w les images متاعهم . A prime w B prime la longueur متاع la . w l'image عندهم نفس le segment A prime B prime ، w هي le segment A B متاع l'image droite A B هي la droite A prime B prime . la على M كان ؟ علاش . le segment A B ، A M plus M B égale A B les distances ، donc A prime M prime plus M prime B prime égale A prime B prime : M على تحافظ rotation l'alignement . trois points alignés ، على تحافظ la rotation : منها le segment A prime B prime . w على prime . alignés متاعهم les images

Quelle est l'image d'un segment ? On a une rotation r, deux points A et B, et leurs images A prime et B prime. L'image du segment A B est le segment A prime B prime, et ils ont la même longueur. Et l'image de la droite A B est la droite A prime B prime. Pourquoi ? Si M est sur le segment A B, A M plus M B égale A B. La rotation conserve les distances, donc A prime M prime plus M prime B prime égale A prime B prime : M prime est sur le segment A prime B prime. Il en résulte que la rotation conserve l'alignement. Trois points alignés ont des images alignées.

Soit r une rotation, A et B deux points distincts, $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$.

- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$, qui lui est isométrique.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

En particulier, **une rotation conserve l'alignement** : les images de trois points alignés sont trois points alignés.



BP = CQ = AR.

Un triangle équilatéral ABC de centre O : A est en haut, B en bas à droite, C en bas à gauche. Le point P est sur la demi-droite [AB), au-delà de B ; le point Q est sur la demi-droite [BC), au-delà de C ; le point R est sur la demi-droite [CA), au-delà de A. Les segments [BP], [CQ] et [AR] portent la même marque : ils ont la même longueur. Le triangle PQR est tracé en rouge.

LE SEGMENT

$$[AB] \longmapsto [A'B'] \quad \text{et} \quad A'B' = AB$$

LA DROITE

$$(AB) \longmapsto (A'B')$$

DÉMONSTRATION

Soit M un point du segment $[AB]$ et M' son image : $AM + MB = AB$. Une rotation conserve les distances, donc $A'M' + M'B' = A'B'$: le point M' est sur le segment $[A'B']$. Réciproquement, soit N' un point du segment $[A'B']$ et N son antécédent : $A'N' + N'B' = A'B'$ donne $AN + NB = AB$, donc N est sur le segment $[AB]$. L'image du segment $[AB]$ est exactement le segment $[A'B']$. On raisonne de même pour un point de la droite (AB) situé hors du segment.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, ABC est un triangle équilatéral de centre O. Les points P, Q et R sont placés sur les demi-droites $[AB)$, $[BC)$ et $[CA)$, au-delà de B, de C et de A, avec $BP = CQ = AR$. Soit f la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. a) Déterminer l'image par f de la droite (AB). b) Montrer que $f(P) = R$. c) Déterminer les images de Q et de R. d) Comparer l'angle $\widehat{POR}$, l'angle $\widehat{ROQ}$ et l'angle $\widehat{QOP}$. e) Quelle est la nature du triangle PQR ? f) Comparer les aires des triangles APR, BPQ et CQR.

Les sommets — Sur la figure, on passe de A à C, de C à B et de B à A en tournant autour de O d'un angle $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens direct.

$f(A) = C \quad ; \quad f(C) = B \quad ; \quad f(B) = A$

L'image de la droite — L'image de la droite (AB) est la droite qui passe par les images de A et de B : c'est la droite (CA).

$(AB) \longmapsto (CA)$

L'image de P — P est sur la demi-droite $[AB)$, au-delà de B : son image est sur la demi-droite $[CA)$, au-delà de A, qui est l'image de B. Comme une rotation conserve les distances, cette image est à la distance BP de A : c'est le point R, car $AR = BP$.

$f(P) = R$

Les deux autres — De la même façon, l'image de la droite (BC) est la droite (AB), et l'image de la droite (CA) est la droite (BC).

$f(Q) = P \quad ; \quad f(R) = Q$

Les trois angles — f transforme P en R, R en Q et Q en P : chacun de ces trois angles de sommet O est l'angle de la rotation.

$\widehat{POR} = \widehat{ROQ} = \widehat{QOP} = \dfrac{2\pi}{3}$

Le triangle PQR — Le segment $[PQ]$ a pour image le segment $[RP]$, et le segment $[RP]$ a pour image le segment $[QR]$: les trois côtés ont la même longueur.

$PQ = RP = QR$

Les aires — f transforme A en C, P en R et R en Q : le triangle APR a pour image le triangle CRQ, qui a lui-même pour image le triangle BQP. Comme une rotation conserve les distances, ces trois triangles ont des côtés de mêmes longueurs : ils sont superposables.

$\text{aire}(APR) = \text{aire}(BPQ) = \text{aire}(CQR)$

PQR est équilatéral ; les trois triangles ont la même aire

À ne pas faire : L'image d'une droite par une rotation est une droite qui lui est parallèle — C'est une droite, qui en général n'est pas parallèle à la première. Une rotation fait tourner les directions. Ce sont la translation et l'homothétie qui transforment une droite en une droite parallèle.

15. PROPRIÉTÉ

Image d'une droite par un quart de tour

CE QU'IL DIT

7ala 5assa te5demna barcha : le quart de tour. L'image mta3 droite par un quart de tour hiya droite perpendiculaire liha. Ya3ni ken r quart de tour, w A prime w B prime houma les images mta3 A w B, la droite AB perpendiculaire à la droite A prime B prime. W hedhi tari9a behya bech nthabtou zouz droites perpendiculaires : nal9aw quart de tour yeb3ath el wa7da lel o5ra. Rodd belek : hedha y5oss le quart de tour bark. Rotation o5ra tdawwer la droite, ama mouch b angle droit.

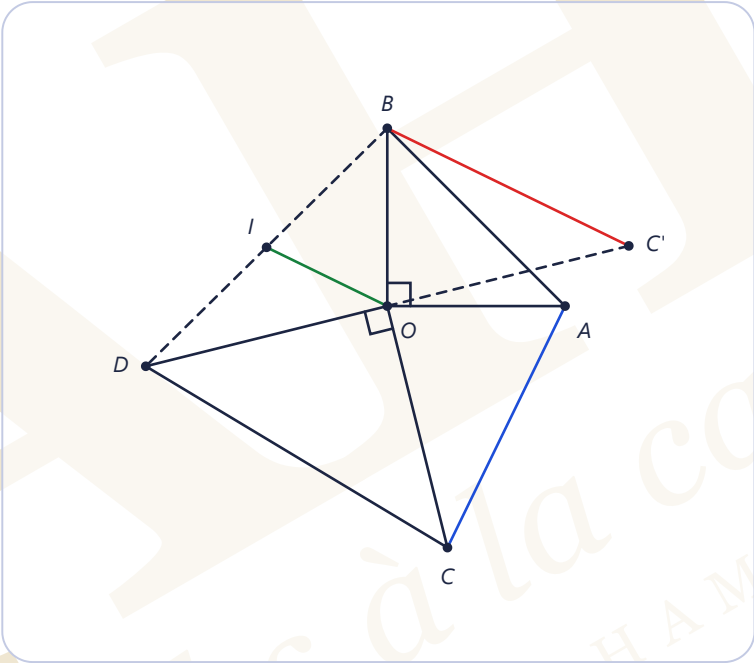
حالة خاصّة تخدمنا برشة : l'image le quart de tour متاع droite par un quart de tour هي droite . r quart de tour ، w A prime w B prime هوما les images متاع la droite A w B ، perpendiculaire ليها . يعني كان A B perpendiculaire à la droite A prime B prime . w هذي طريقة باهية باش نثبتو زوز droites perpendiculaires

نلقاو quart de tour يبعث الواحدة للأخرى . ردّ بالك : هذا يخصّ le quart de tour برك . la أخرى تدوّر rotation ، أما موش بـ droite . angle droit

Un cas particulier très utile : le quart de tour. L'image d'une droite par un quart de tour est une droite qui lui est perpendiculaire. Autrement dit, si r est un quart de tour et que A prime et B prime sont les images de A et B, la droite A B est perpendiculaire à la droite A prime B prime. C'est un bon moyen de prouver que deux droites sont perpendiculaires : on trouve un quart de tour qui envoie l'une sur l'autre. Attention : cela ne vaut que pour le quart de tour. Une autre rotation fait tourner la droite, mais pas d'un angle droit.

L'image d'une droite par un quart de tour est une droite qui lui est **perpendiculaire**.

Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires, il suffit donc de trouver un quart de tour qui transforme l'une en l'autre.



OA = OB et OC = OD, avec deux angles droits en O.

Deux triangles isocèles et rectangles en O. Le triangle OAB : A est à droite de O et B au-dessus de O. Le triangle OCD : D est à gauche de O, un peu plus bas, et C est au-dessous de O, un peu à droite. Le point C', image de C par le quart de tour direct de centre O, est à droite de O, à l'opposé de D. Le point I est le milieu du segment [BD]. Le segment [AC] est bleu, le segment [BC'] est rouge et le segment [OI] est vert.

R EST UN QUART DE TOUR, A' = R(A) ET B' = R(B)

$$(AB) \perp (A'B')$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, OAB et OCD sont deux triangles isocèles et rectangles en O. Soit I le milieu de $[BD]$ et r le quart de tour direct de centre O. On note C' l'image de C par r. a) Déterminer les images par r des points A et D. b) Montrer que les droites (AC) et (BC') sont perpendiculaires. c) Montrer que O est le milieu de $[DC']$, puis que les droites (OI) et (AC) sont perpendiculaires.

Les images de A et de D — $OA = OB$ et l'angle $\widehat{AOB}$ est droit ; $OD = OC$ et l'angle $\widehat{DOC}$ est droit. Sur la figure, on tourne dans le sens direct de A vers B et de D vers C.

$A \longmapsto B \quad ; \quad D \longmapsto C$

Deux droites perpendiculaires — L'image de la droite (AC) par r est la droite (BC'), et l'image d'une droite par un quart de tour lui est perpendiculaire.

$(AC) \perp (BC')$

Le milieu — $OC' = OC = OD$. L'angle $\widehat{DOC'}$ est la somme de deux angles droits, l'angle $\widehat{DOC}$ et l'angle $\widehat{COC'}$: les points D, O et C' sont alignés.

O est le milieu de $[DC']$

La droite des milieux — Dans le triangle DBC', I est le milieu de $[DB]$ et O est le milieu de $[DC']$: la droite (OI) est parallèle à la droite (BC').

$(OI) \parallel (BC')$

Conclure — La droite (BC') est perpendiculaire à la droite (AC), donc sa parallèle (OI) l'est aussi.

$(OI) \perp (AC)$

$$(OI) \perp (AC)$$

À ne pas faire : Par un quart de tour, une droite et son image sont parallèles — Elles sont perpendiculaires. Un quart de tour fait tourner toutes les directions d'un angle droit.

16. APPLICATION

Un problème d'alignement

CE QU'IL DIT

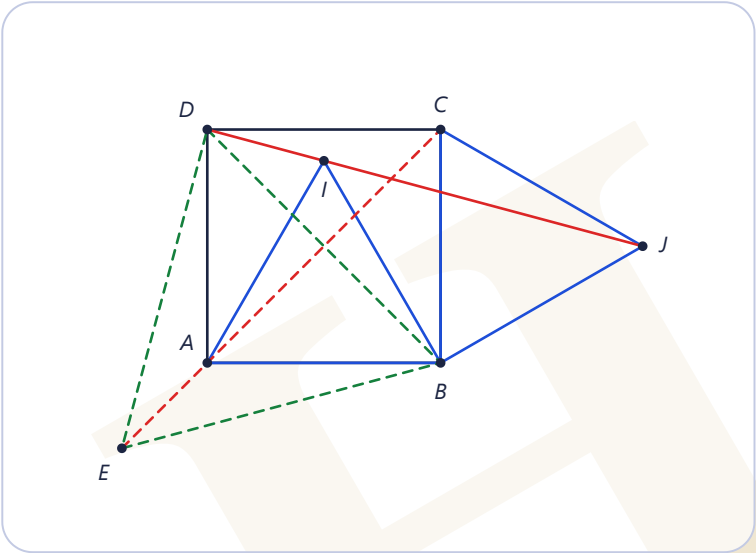
La rotation t7afedh 3la l'alignement : nesta3mlouha bech nthabtou trois points alignés. El fekra : nal9aw trois points na3rfouhom alignés, w rotation teb3athhom lel points elli n7ebbou 3lihom. Hna 3andna carré ABCD, w zouz triangles équilatéraux ABI w BCJ, w point E b7ith le triangle DBE équilatéral. E, A w C el koll 3la la médiatrice mta3 BD, donc alignés. W la rotation indirecte de centre B et d'angle pi sur trois teb3ath E l D, A l I, w C l J. Donc D, I w J alignés.

trois points نلقاو : الفكرة . trois points alignés نثبتو باش نستعملوها : l'alignement تحافظ على la rotation
triangles زوز carré A B C D ، w هنا عندنا . اللي نحبّو عليهم points تبعثهم للـ alignés ، w rotation نعرفوهم
la médiatrice الكل على le triangle D B E équilatéral . E ، A w C بحيث équilatéraux A B I w B C J ، w point E
J ـل I ، w C ـل D ، A ـل E تبعث B D ، donc alignés . w la rotation indirecte de centre B et d'angle pi sur trois متاع
. . donc D ، I w J alignés

La rotation conserve l'alignement : on s'en sert pour prouver que trois points sont alignés. L'idée : trouver trois points que l'on sait alignés, et une rotation qui les envoie sur les points qui nous intéressent. Ici, on a un carré A B C D, deux triangles équilatéraux A B I et B C J, et un point E tel que le triangle D B E soit équilatéral. E, A et C sont tous sur la médiatrice de B D, donc alignés. Et la rotation indirecte de centre B et d'angle pi sur trois envoie E sur D, A sur I, et C sur J. Donc D, I et J sont alignés.

Une rotation conserve l'alignement : pour montrer que trois points sont alignés, on peut montrer qu'ils sont les images de trois points alignés.

Dans la figure, $ABCD$ est un carré, ABI et BCJ sont deux triangles équilatéraux, I étant à l'intérieur du carré et J à l'extérieur. On construit le point E tel que le triangle DBE soit équilatéral, E et A étant du même côté de la droite (BD).



ABI, BCJ et DBE sont équilatéraux.

Un carré ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. Le triangle équilatéral ABI a son sommet I à l'intérieur du carré, près du côté du haut. Le triangle équilatéral BCJ a son sommet J à l'extérieur du carré, à droite. Le point E est en bas à gauche, à l'extérieur du carré, de sorte que le triangle DBE soit équilatéral. Les points E, A et C sont sur une même droite, et les points D, I et J aussi.

EXEMPLE TRAITÉ

Avec la figure : a) montrer que les points E, A et C sont alignés ; b) soit r la rotation indirecte de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$: déterminer les images de E, de A et de C par r ; c) en déduire que les points D, I et J sont alignés.

Une médiatrice — $EB = ED$ car le triangle DBE est équilatéral ; $AB = AD$ et $CB = CD$ car $ABCD$ est un carré. Les points E, A et C sont tous les trois sur la médiatrice du segment $[BD]$.

$E,\ A$ et C sont alignés

L'image de E — $BE = BD$ et l'angle $\widehat{EBD}$ mesure $\frac{\pi}{3}$; sur la figure, on va de E vers D en tournant autour de B dans le sens indirect.

$E \longmapsto D$

Les images de A et de C — De même, les triangles ABI et BCJ sont équilatéraux, et l'on tourne dans le sens indirect de A vers I et de C vers J.

$A \longmapsto I \quad ; \quad C \longmapsto J$

Conclure — Les points E, A et C sont alignés, et une rotation conserve l'alignement : leurs images le sont aussi.

$D,\ I$ et J sont alignés

$D,\ I$ et J sont alignés

À ne pas faire : E, A et C sont alignés, donc D, I et J aussi, sans autre explication — On montre d'abord que D, I et J sont les images de E, A et C par une même rotation. La conservation de l'alignement ne s'applique qu'à des points et à leurs images par la même application.

---

17. PROPRIÉTÉ

Conservation du milieu et du barycentre

CE QU'IL DIT

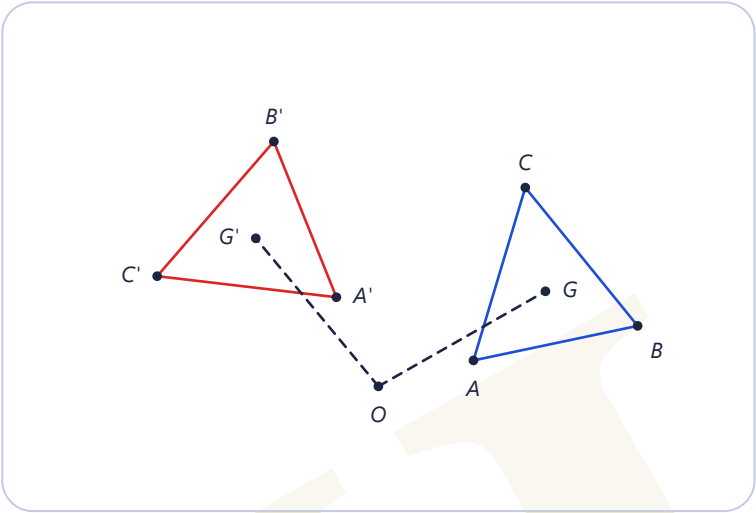
La rotation t7afedh zeda 3la le milieu. Ken I houwa le milieu mta3 le segment AB, l'image mte3ou I prime hiya le milieu mta3 le segment A prime B prime. 3lech ? I prime 3la le segment A prime B prime, w A prime I prime égale AI, w I prime B prime égale IB. W ne9blou men ghir démonstration elli la rotation t7afedh 3la le barycentre : l'image mta3 le barycentre hiya le barycentre mta3 les images, b nafs les coefficients. W zid : la rotation t7afedh 3la le parallélisme. Zouz droites parallèles, les images mte3hom parallèles.

le هي I prime متاعو le segment A B ، l'image متاع le milieu هو I كان . le milieu على تحافظ زادة la rotation le segment A prime B prime ، w A prime I على I prime ؟ علاش . le segment A prime B prime متاع milieu le على تحافظ la rotation اللي démonstration من غير نقبلو prime égale A I ، w I prime B prime égale I B . w la : زيد les coefficients . w بنفس ، les images متاع le barycentre هي le barycentre متاع barycentre : l'image . parallèles متاعهم droites parallèles ، les images زوز . le parallélisme على تحافظ rotation

La rotation conserve aussi le milieu. Si I est le milieu du segment A B, son image I prime est le milieu du segment A prime B prime. Pourquoi ? I prime est sur le segment A prime B prime, et A prime I prime égale A I, I prime B prime égale I B. On admet, sans démonstration, que la rotation conserve le barycentre : l'image du barycentre est le barycentre des images, avec les mêmes coefficients. Et encore : la rotation conserve le parallélisme. Deux droites parallèles ont des images parallèles.

Soit r une rotation directe ou indirecte.

- **Une rotation conserve le milieu** : si I est le milieu du segment $[AB]$, alors son image I' est le milieu du segment $[A'B']$.
- On admet qu'**une rotation conserve le barycentre** : si G est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c), alors son image G' est le barycentre des points pondérés (A', a), (B', b) et (C', c).
- **Une rotation conserve le parallélisme** : les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.



G' est le centre de gravité du triangle image.

À droite, un triangle ABC en bleu et son centre de gravité G. À gauche, le triangle A'B'C' en rouge, image du premier par une rotation de centre O, et le point G', image de G : il occupe dans le triangle rouge la même place que G dans le triangle bleu. Le centre O est en bas de la figure, entre les deux triangles.

LE MILIEU

I milieu de $[AB] \implies I'$ milieu de $[A'B']$

DÉMONSTRATION

Pour le milieu : soit I le milieu de $[AB]$. Son image I' est sur le segment $[A'B']$, image du segment $[AB]$. De plus $A'I' = AI$ et $I'B' = IB$, car une rotation conserve les distances ; comme $AI = IB$, on a $A'I' = I'B'$: I' est le milieu de $[A'B']$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On désigne par A', B', C' et G' les images respectives de A, B, C et G par une rotation. Montrer que G' est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Traduire — Le centre de gravité d'un triangle est le barycentre de ses trois sommets affectés du même coefficient 1.

G est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$

Appliquer la rotation — Une rotation conserve le barycentre : l'image de G est le barycentre des images, avec les mêmes coefficients.

G' est le barycentre de $(A',1)$, $(B',1)$ et $(C',1)$

Conclure — Les trois coefficients sont égaux : G' est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

G' est le centre de gravité de $A'B'C'$

À ne pas faire : L'image du barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$ est le barycentre de $(A',2)$ et $(B',1)$ — C'est le barycentre de $(A',1)$ et $(B',2)$. La rotation déplace les points, pas les coefficients : chaque image garde le coefficient de son point.

18. APPLICATION

Un problème d'optimisation

CE QU'IL DIT

Problème d'optimisation. 3andna point O w point A, w la rotation directe r de centre O et d'angle deux pi sur trois. B houwa l'image mta3 A, w C houwa l'image mta3 B : le triangle ABC équilatéral. Point M yet7arrek 3la le segment AB, w P 3la le segment BC b7ith BP égale AM. Es-so2al : win n7ottou M bech la distance MP tkoun asghar 7aja ? El fekra : P houwa l'image mta3 M par r. Donc OM égale OP, w l'angle MOP égale deux pi sur trois. Nal9aw MP égale OM fois racine carrée de trois. Ya3ni MP tesghar ki OM tesghar : yelzem M ykoun le milieu mta3 AB.

point O w point A ، w la rotation directe r de centre O et d'angle deux pi عندنا . problème d'optimisation le يتحرّك على B : le triangle A B C équilatéral . point M متاع l'image هو A ، w C متاع l'image هو sur trois . B تكون la distance M P باش M نحطّو وين : السؤال . B P égale A M بحيث le segment B C على segment A B ، w P M par r . donc O M égale O P ، w l'angle M O P égale deux pi sur متاع l'image هو P : الفكرة ؟ أصغر حاجة يكون M يلزم : تصغار O M تصغار كي M P يعني . M P égale O M fois racine carrée de trois نلقاو . trois milieu متاع A B .

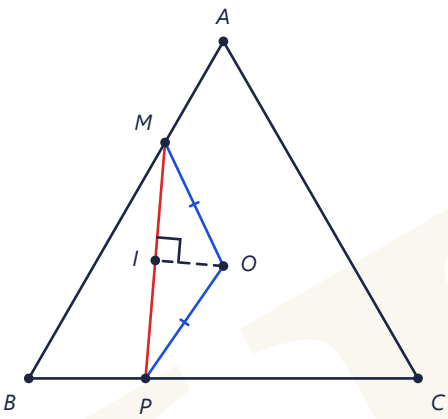
Un problème d'optimisation. On a un point O et un point A, et la rotation directe r de centre O et d'angle deux pi sur trois. B est l'image de A, et C est l'image de B : le triangle A B C est équilatéral. Un point M se déplace sur le segment A B, et P est sur le segment B C avec B P égale A M. La question : où placer M pour que la distance M P soit la plus petite possible ? L'idée : P est l'image de M par r. Donc O M égale O P, et l'angle M O P égale deux pi sur trois. On trouve M P égale O M fois racine carrée de trois. Autrement dit, M P diminue quand O M diminue : M doit être le milieu de A B.

Soient O et A deux points distincts et r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On note B l'image de A par r, et C l'image de B par r.

Un point M varie sur le segment $[AB]$, et P est le point du segment $[BC]$ tel que $BP = AM$.

Où placer M pour que la distance MP soit la plus petite possible ? La rotation r transforme M en P : elle ramène la question à la distance OM.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



BP = AM, donc P est l'image de M.

Un triangle équilatéral ABC de centre O : A est en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. Le point M est sur le côté [AB], assez près de A, et le point P est sur le côté [BC], à la même distance de B que M de A. Les segments [OM] et [OP], en bleu, ont la même longueur. Le segment [MP] est rouge, et I est son milieu : le segment [OI] lui est perpendiculaire.

MP EST MINIMALE QUAND OM EST MINIMALE

$$MP = OM \times \sqrt{3}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, B l'image de A par r et C l'image de B par r. Un point M varie sur le segment $[AB]$, et P est le point du segment $[BC]$ tel que $BP = AM$. a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral. b) Prouver que P est l'image de M par r, et en déduire que $OM = OP$. c) Soit I le milieu de $[MP]$: calculer IM, puis MP, en fonction de OM. d) Où doit-on placer M sur le segment $[AB]$ pour que la distance MP soit minimale ?

Le triangle ABC — $OA = OB = OC$, et l'angle $\widehat{AOB}$ et l'angle $\widehat{BOC}$ mesurent tous deux $\frac{2\pi}{3}$: le troisième angle au centre, l'angle $\widehat{COA}$, mesure donc aussi $\frac{2\pi}{3}$. La rotation r transforme A en B, B en C et C en A ; comme elle conserve les distances, les trois côtés sont égaux.

$$AB = BC = CA$$

L'image de M — L'image du segment $[AB]$ est le segment $[BC]$. L'image de M est donc le point de $[BC]$ situé à la distance AM de B, qui est l'image de A : c'est le point P.

$$M \longmapsto P \quad \text{donc} \quad OM = OP$$

Le triangle OMP — Le triangle OMP est isocèle en O et l'angle $\widehat{MOP}$ mesure $\frac{2\pi}{3}$. La médiane (OI) est aussi hauteur et bissectrice : le triangle OIM est rectangle en I, et l'angle $\widehat{MOI}$ mesure $\frac{\pi}{3}$, soit 60 degrés.

$$IM = OM \times \sin 60° = \frac{OM \times \sqrt{3}}{2}$$

La distance MP — I est le milieu de $[MP]$: MP est le double de IM.

$$MP = 2 \times IM = OM \times \sqrt{3}$$

Le minimum — MP est minimale quand OM est minimale, c'est-à-dire quand M est le pied de la perpendiculaire menée de O à la droite (AB). Comme $OA = OB$, ce point est le milieu du segment $[AB]$.

M est le milieu de $[AB]$

> MP est minimale quand M est le milieu de $[AB]$

À ne pas faire : $OM = OP$, donc $MP = OM$ — $MP = OM \times \sqrt{3}$. Le triangle OMP est isocèle, mais pas équilatéral : son angle en O mesure $\frac{2\pi}{3}$, pas $\frac{\pi}{3}$.

---

19. THÉORÈME

Image d'un cercle

CE QU'IL DIT

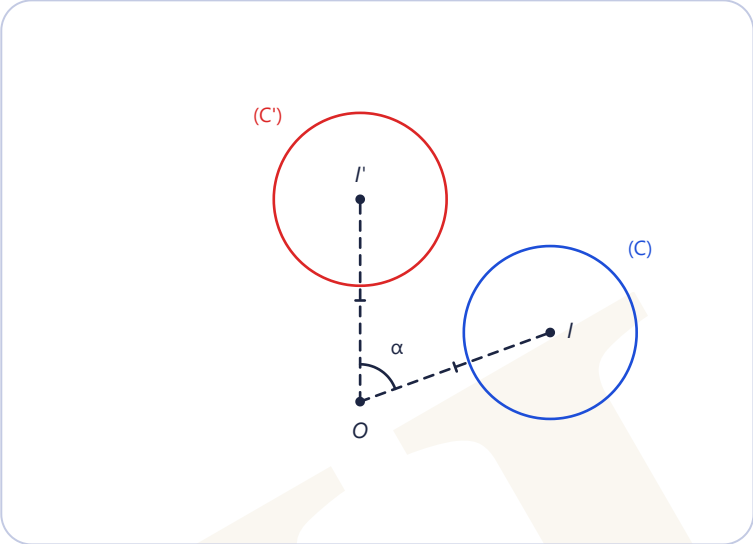
W le cercle ? L'image mta3 cercle de centre I et de rayon R par une rotation, hiya cercle b nafs le rayon R, w le centre mte3ou I prime, l'image mta3 I. 3lech ? Ken M 3la le cercle, IM égale R. La rotation t7afedh 3la les distances, donc I prime M prime égale R : M prime 3la le cercle de centre I prime et de rayon R. Bech tarsem l'image mta3 cercle, arsem l'image mta3 le centre bark, w 5alli le rayon kima houwa.

le rayon R ، w بنفس cercle هي ، cercle de centre I et de rayon R par une rotation متاع l'image ؟ w le cercle les تحافظ على le cercle ، I M égale R . la rotation على M كان ؟ علاش . I متاع I prime ، l'image متاعو le centre باش . le cercle de centre I prime et de rayon R على distances ، donc I prime M prime égale R : M prime كيما هو . le rayon خلّي w ، برك le centre متاع l'image ارسم ، cercle متاع l'image ترسم

Et le cercle ? L'image d'un cercle de centre I et de rayon R par une rotation est un cercle de même rayon R, dont le centre est I prime, l'image de I. Pourquoi ? Si M est sur le cercle, I M égale R. La rotation conserve les distances, donc I prime M prime égale R : M prime est sur le cercle de centre I prime et de rayon R. Pour tracer l'image d'un cercle, construis seulement l'image du centre, et garde le même rayon.

L'image d'un cercle de centre I et de rayon R par une rotation r est le cercle de **même rayon** R et de centre $I' = r(I)$.

En pratique. Pour tracer l'image d'un cercle, on construit l'image de son centre et on garde le même rayon.



Le centre tourne autour de O, le rayon ne change pas.

Un point O en bas. À droite, un cercle bleu de centre I. Plus haut et à gauche, un cercle rouge de même taille, de centre I'. Les segments [OI] et [OI'] ont la même longueur et forment l'angle alpha de la rotation.

CENTRE R(I), MÊME RAYON

$$\mathscr{C}(I,R) \longmapsto \mathscr{C}'(I',R)$$

DÉMONSTRATION

Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ et $M' = r(M)$: $I'M' = IM = R$, donc M' est sur le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I' et de rayon R. Réciproquement, soit N' un point de $\mathscr{C}'$ et N son antécédent par r : $IN = I'N' = R$, donc N est sur $\mathscr{C}$. L'image de $\mathscr{C}$ est exactement $\mathscr{C}'$. Le raisonnement est le même pour une rotation directe et pour une rotation indirecte.

EXEMPLE TRAITÉ

On considère deux cercles (C) et (C'). Existe-t-il une rotation qui transforme (C) en (C') : a) si (C) a pour rayon 2 et (C') pour rayon 3 ? b) si les deux cercles ont le même rayon 2, et pour centres deux points distincts I et J ?

Rayons différents — Une rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon, et les rayons 2 et 3 sont différents : aucune rotation ne convient.

Même rayon — Il suffit de trouver une rotation qui transforme le centre I en J. On choisit un point O de la médiatrice de $[IJ]$: comme $OI = OJ$, il existe une rotation de centre O qui transforme I en J. Elle transforme (C) en le cercle de centre J et de même rayon : c'est (C').

Un exemple — Si l'on prend pour O le milieu de $[IJ]$, on obtient la symétrie centrale de centre O, qui est la rotation de centre O et d'angle π.

rayons différents : aucune rotation ; même rayon : une rotation convient

À ne pas faire : Par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, le rayon du cercle change — Le rayon ne change jamais : seul le centre se déplace. Une rotation conserve les distances, donc la distance de chaque point du cercle à son centre.

20. APPLICATION

Un problème de lieu

CE QU'IL DIT

Problème de lieu. 3andna triangle IJK isocèle et rectangle en I. El point I ma yet7arrekch, w el point J yet7arrek 3la cercle. Es-so2al : K win yet7arrek ? Nle7dhou elli IK égale IJ, w l'angle JIK droit : donc K houwa l'image mta3 J par un quart de tour de centre I. Ki J ydour 3la le cercle, l'image mte3ou K tdour 3la l'image mta3 le cercle. W l'image mta3 cercle par une rotation hiya cercle b nafs le rayon. Donc K yet7arrek 3la cercle b nafs le rayon, w le centre mte3ou houwa l'image mta3 le centre mta3 le cercle elli fih J.

problème de lieu . عندنا I J K isocèle et rectangle en I triangle . الـ I point ما يتحرّكش ، w الـ J point يتحرّك على
السؤال : K وين يتحرّك ؟ نلاحظو اللي I K égale I J ، w l'angle J I K droit : donc K هو l'image متاع J par
cercle . le cercle ، l'image على يدور J كي . un quart de tour de centre I
le cercle . w متاع l'image على تدور K متاعو
le rayon ، w بنفس cercle على يتحرّك le rayon . donc K بنفس cercle هي cercle par une rotation متاع l'image
le centre متاعو هو l'image متاع le centre متاع le cercle اللي فيه J .

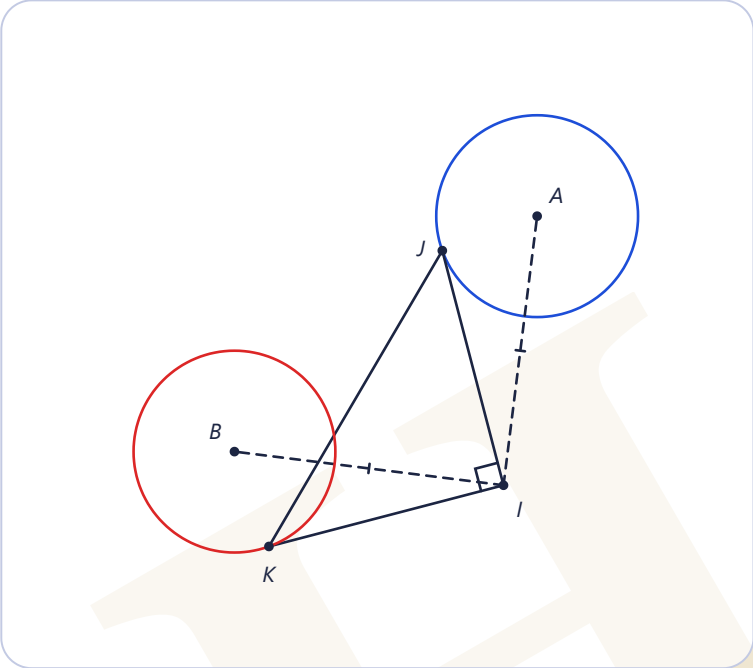
Un problème de lieu. On a un triangle I J K isocèle et rectangle en I. Le point I est fixe, et le point J se déplace sur un cercle. La question : où se déplace K ? On remarque que I K égale I J et que l'angle J I K est droit : K est donc l'image de J par un quart de tour de centre I. Quand J parcourt le cercle, son image K parcourt l'image du cercle. Et l'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon. Donc K se déplace sur un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre du cercle que parcourt J.

Soit IJK un triangle isocèle et rectangle en I. On suppose que le sommet I est fixe et que le sommet J décrit un cercle $\mathscr{C}$. Quel est le lieu du point K ?

Le point K se déduit du point J par un quart de tour de centre I : quand J décrit le cercle $\mathscr{C}$, le point K décrit l'image de ce cercle.

Si l'on tourne dans le sens direct pour aller de J à K autour de I, c'est le quart de tour direct ; sinon, c'est le quart de tour indirect.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Quand J décrit le cercle bleu, K décrit le cercle rouge.

Un point I en bas à droite. En haut à droite, un cercle bleu de centre A sur lequel est placé le point J. Le triangle IJK est rectangle et isocèle en I : le point K est en bas à gauche. Le point B, à gauche, est tel que IB = IA et que l'angle AIB soit droit. Un cercle rouge de centre B, de même rayon que le cercle bleu, passe par K.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit IJK un triangle isocèle et rectangle en I, tel que l'on tourne dans le sens direct pour aller de J à K autour de I. Le point I est fixe, et le point J décrit un cercle (C) de centre A et de rayon R. Déterminer le lieu du point K.

Fixe ou variable — Le point I et le cercle (C) sont fixes ; les points J et K sont variables.

La rotation — $IK = IJ$, l'angle $\widehat{JIK}$ est droit et l'on tourne dans le sens direct : K est l'image de J par le quart de tour direct de centre I.

$$J \longmapsto K$$

Le centre — On note B l'image du centre A par ce quart de tour : $IB = IA$ et l'angle $\widehat{AIB}$ est droit, en tournant dans le sens direct.

$$A \longmapsto B$$

Le lieu — Quand J décrit le cercle (C), son image K décrit l'image de ce cercle : le cercle de centre B et de même rayon R.

$$K \text{ décrit le cercle de centre } B \text{ et de rayon } R$$

> K décrit le cercle de centre B et de rayon R

À ne pas faire : K décrit le même cercle que J — K décrit l'image du cercle : même rayon, mais un autre centre. Le centre A du cercle n'est pas le centre de la rotation : il tourne lui aussi autour de I.

21. PROPRIÉTÉ

Conservation du contact

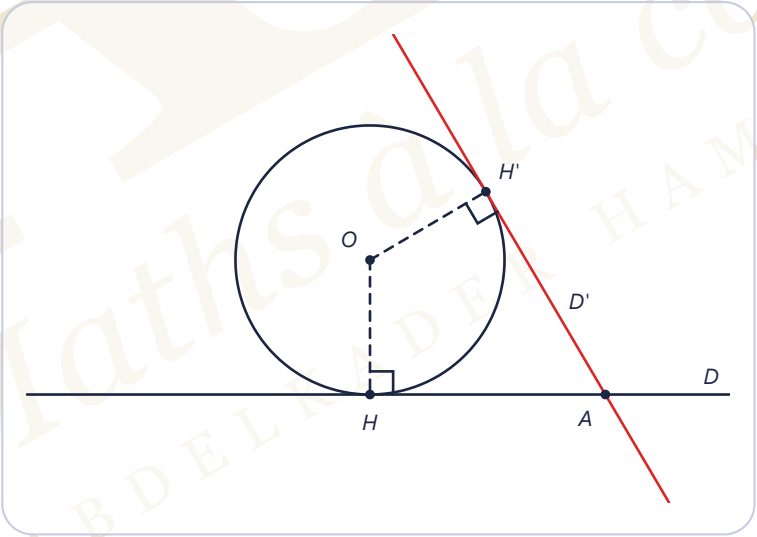
CE QU'IL DIT

La rotation t7afedh 3la le contact. Chnowa ma3neha ? 3andna cercle, w droite T tangente lih fi point A. Ba3d la rotation, l'image mta3 la droite to93ed tangente lel image mta3 le cercle, w le point de contact houwa A prime, l'image mta3 A. 3lech ? La tangente perpendiculaire au rayon IA fi A. W la rotation t7afedh 3la l'orthogonalité : l'image mta3 la tangente perpendiculaire à I prime A prime fi A prime. W A prime 3la le cercle image. Donc hiya tangente lih.

la rotation تحافظ على le contact . شنوّة معناها ؟ عندنا droite T tangente ، w cercle ليه في point A . بعد la
droite متاع rotation ، l'image تقعد la tangente للـ image متاع le point de contact ، w le cercle ، هو A prime
A . w la rotation في la tangente perpendiculaire au rayon I A ؟ علاش . A متاع l'image تحافظ على
le على A prime . w A prime في la tangente perpendiculaire à I prime A prime متاع l'orthogonalité : l'image
. donc cercle image هي tangente ليه

La rotation conserve le contact. Qu'est-ce que cela veut dire ? On a un cercle, et une droite T tangente à ce cercle en un point A. Après la rotation, l'image de la droite reste tangente à l'image du cercle, et le point de contact est A prime, l'image de A. Pourquoi ? La tangente est perpendiculaire au rayon I A en A. Et la rotation conserve l'orthogonalité : l'image de la tangente est perpendiculaire à I prime A prime en A prime. Et A prime est sur le cercle image. C'est donc bien une tangente.

Une rotation conserve le contact : si une droite T est tangente à un cercle $\mathscr{C}$ en un point A, alors son image T' est tangente au cercle image $\mathscr{C}'$ au point $A' = r(A)$.



D et D' sont les deux tangentes au cercle menées de A.

Une droite horizontale D, en bas, sur laquelle sont placés un point H et, plus à droite, un point A. Un point O est au-dessus de H, et le cercle de centre O passant par H est tangent à la droite D en H. Une seconde droite, D', en rouge, passe par A et touche le même cercle en un point H', en haut à droite du cercle.

LE CONTACT

$$T \text{ tangente à } \mathscr{C} \text{ en } A \implies T' \text{ tangente à } \mathscr{C}' \text{ en } A'$$

DÉMONSTRATION

Maths à la carte
ABDELMADJID HAMMAMI

Soit I le centre de $\mathscr{C}$. La droite T est perpendiculaire en A au rayon $[IA]$. Une rotation conserve l'orthogonalité : T' est perpendiculaire en A' à la droite $(I'A')$. Or A' est sur le cercle $\mathscr{C}'$, de centre I' : la droite T' est donc la tangente à $\mathscr{C}'$ en A'.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient D une droite, A un point de D et O un point qui n'appartient pas à D. Une rotation r de centre O transforme la droite D en une droite D', différente de D, qui passe par A. Construire la droite D'.

Un cercle invariant — Soit H le projeté orthogonal de O sur D. Le cercle de centre O passant par H est tangent à la droite D en H. Son centre est le centre de la rotation : son image par r est lui-même.

Le contact — Une rotation conserve le contact : l'image D' de la droite D est tangente à l'image du cercle, c'est-à-dire au cercle lui-même.

Construire — D' est donc une tangente à ce cercle qui passe par A. Par A passent deux tangentes au cercle : la droite D elle-même, et une seconde, qui est la droite D' cherchée.

D' est la seconde tangente au cercle menée de A

D' est la seconde tangente au cercle menée de A

À ne pas faire : L'image de la tangente en A est tangente au cercle image au même point A — Elle est tangente au cercle image au point A', image de A. Le point de contact tourne avec le cercle et avec la droite.

22. PROPRIÉTÉ

Figures superposables : périmètres et aires

CE QU'IL DIT

La rotation t7afedh 3la les distances w 3la les angles. Donc l'image mta3 triangle hiya triangle isométrique lih. W ne9blou elli koll figure w l'image mte3ha par une rotation superposables : tnajjem t7ott el wa7da fou9 lo5ra. Bel5sous, polygone w l'image mte3ou 3andhom nafs le périmètre, nafs l'aire, w les angles homologues kif kif. Hedhi te5demna barcha fi le calcul mta3 les aires : ken nal9aw rotation teb3ath figure l figure o5ra, les deux aires kif kif, men ghir 7atta calcul.

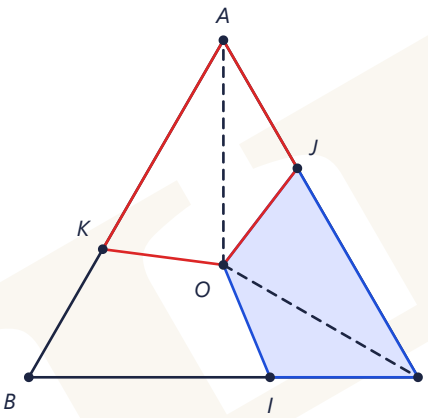
triangle isométrique هي triangle متاع les angles . donc l'image على les distances w تحافظ على la rotation
. تنجّم تحطّ الواحدة فوق الأخرى : par une rotation superposables متاعها figure w l'image نقبلو اللي كل w . ليه
كيف l'aire ، w les angles homologues نفس ، le périmètre متاعو عندهم نفس polygone w l'image ، بالخصوص
كيف . هذي تخدمنا برشة في le calcul متاع les aires : كان نلقاو rotation تبعث figure لـ figure أخرى ، les deux
. calcul من غير حتّى ، كيف كيف aires

La rotation conserve les distances et les angles. L'image d'un triangle est donc un triangle qui lui est isométrique. Et on admet que toute figure et son image par une rotation sont superposables : on peut poser l'une sur l'autre. En particulier, un polygone et son image ont le même périmètre, la même aire, et leurs angles homologues sont égaux. C'est très utile pour calculer des aires : si une rotation envoie une figure sur une autre, les deux aires sont égales, sans aucun calcul.

- L'image d'un triangle par une rotation est un triangle qui lui est isométrique.

- On admet qu'une figure et son image par une rotation sont **superposables**.

En particulier, un polygone et son image par une rotation sont superposables : ils ont **même périmètre**, **même aire**, et les angles homologues sont égaux.



I, J et K se correspondent par un tiers de tour autour de O.

Un triangle équilatéral ABC de centre O : A est en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. Le point I est sur le côté [BC], plus près de C ; le point J est sur le côté [CA], plus près de A ; le point K est sur le côté [AB], plus près de B. Le quadrilatère OICJ, autour du sommet C, est grisé. Le quadrilatère OJAK, autour du sommet A, est tracé en rouge.

UN POLYGONE ET SON IMAGE

même périmètre ; même aire ; mêmes angles

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. Soit I un point du segment $[BC]$, distinct de B et de C, et J le point du segment $[AC]$ tel que l'angle $\widehat{IOJ}$ mesure $\dfrac{2\pi}{3}$. a) Montrer que J est l'image de I par la rotation directe r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. b) Montrer que les triangles OIC et OJA sont isométriques. c) En déduire que l'aire du quadrilatère $OICJ$ est le tiers de l'aire du triangle ABC.

Les sommets — Sur la figure, la rotation r transforme B en C et C en A : l'image du segment $[BC]$ est le segment $[CA]$.

$B \longmapsto C \quad ; \quad C \longmapsto A$

L'image de I — L'image de I est un point du segment $[CA]$, et l'angle de sommet O entre I et son image mesure $\dfrac{2\pi}{3}$: c'est le point J.

$I \longmapsto J$

Deux triangles isométriques — La rotation r transforme O en O, I en J et C en A : le triangle OJA est l'image du triangle OIC. Ils sont isométriques, donc ils ont la même aire.

$\text{aire}(OIC) = \text{aire}(OJA)$

L'aire du quadrilatère — Le quadrilatère $OICJ$ est formé des triangles OIC et OCJ. On remplace le premier par le triangle OJA, qui a la même aire : on obtient le triangle OCA.

$$\text{aire}(OICJ) = \text{aire}(OJA) + \text{aire}(OCJ) = \text{aire}(OCA)$$

Le tiers — Les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques : chacun a pour aire le tiers de l'aire du triangle ABC.

$$\text{aire}(OICJ) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABC)$$

$$\boxed{\text{aire}(OICJ) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABC)}$$

À ne pas faire : Quand le point I se déplace sur $[BC]$, l'aire du quadrilatère $OICJ$ change — Elle reste égale au tiers de l'aire du triangle ABC. Le triangle OIC et son image OJA changent ensemble et gardent la même aire : la somme reste l'aire du triangle OCA.

---

23. APPLICATION

Un problème de construction

CE QU'IL DIT

Problème de construction. 3andna point A, w droite nsammiwha L un, w cercle. N7ebbou narsmou carré ABCD, b7ith el sommet B 3la la droite, w el sommet D 3la le cercle. Kifech ? Fi carré ABCD, D houwa l'image mta3 B par un quart de tour de centre A. B 3la la droite, donc l'image mte3ou D 3la l'image mta3 la droite, nsammiwha L deux. W D zeda 3la le cercle : donc D houwa point d'intersection bin L deux w le cercle. Ba3d narj3ou l B bel quart de tour fi le sens le5er, w nkammlou le carré.

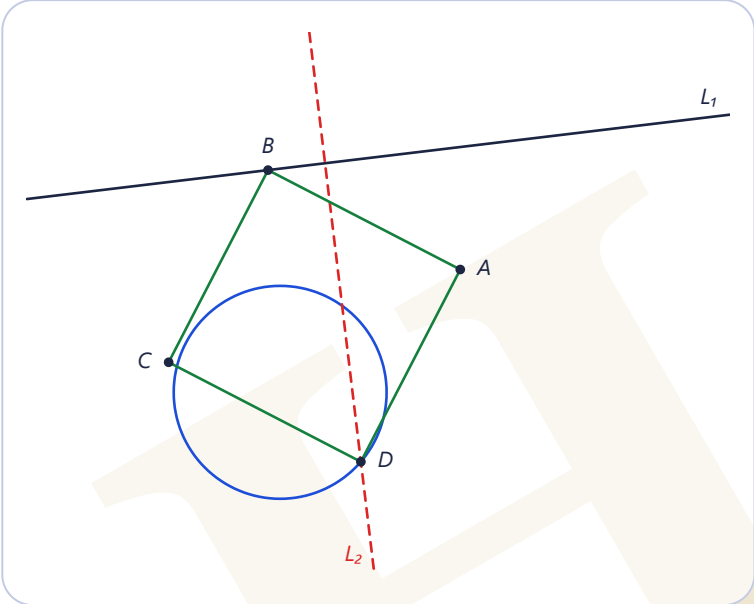
problème de construction . عندنا droite w ، point A نسمّيوها cercle w ، L un . نحبّو نرسمو carré A B C D ، sommet B الـ بحيث على droite la ، D الـ sommet على le cercle . كيفاش ؟ في D ، carré A B C D هو l'image متاع B . quart de tour de centre A par un على l'image متاع droite la متاعو على D ، donc droite la ، متاع B على l'image ، L deux . w D نسمّيوها زادة على D donc : le cercle هو point d'intersection بين le cercle w L deux . بعد نرجعو لـ B بالـ quart de tour في le sens الآخر ، w نكمّلو le carré .

Un problème de construction. On a un point A, une droite qu'on appelle L un, et un cercle. On veut construire un carré A B C D tel que le sommet B soit sur la droite et le sommet D sur le cercle. Comment faire ? Dans un carré A B C D, D est l'image de B par un quart de tour de centre A. B est sur la droite, donc son image D est sur l'image de la droite, qu'on appelle L deux. Et D est aussi sur le cercle : D est donc un point d'intersection de L deux et du cercle. Ensuite on revient à B par le quart de tour dans l'autre sens, et on termine le carré.

On donne un point A, une droite L_1 et un cercle Γ. On cherche à construire un carré $ABCD$ dont le sommet B est sur la droite L_1 et le sommet D sur le cercle Γ.

L'idée. Dans un carré $ABCD$, le sommet D est l'image du sommet B par un quart de tour de centre A. Si B est sur L_1, alors D est sur la droite L_2, image de L_1 par ce quart de tour. Le point D est donc à l'intersection de la droite L_2 et du cercle Γ.

Il y a autant de carrés que de points d'intersection. La même méthode construit, à partir d'un autre point M, un carré $MNPQ$ tel que N appartienne à la droite L_1 et Q au cercle Γ.



L₂ est l'image de L₁ par le quart de tour direct de centre A.

Une droite L₁ presque horizontale, en haut de la figure. Un cercle bleu, en bas à gauche. Un point A, à droite du cercle. Une droite rouge en pointillés, L₂, perpendiculaire à L₁, coupe le cercle ; le point D est l'un des deux points d'intersection, en bas à droite du cercle. Le carré ABCD est tracé en vert : son sommet B est sur la droite L₁, son sommet D sur le cercle.

EXEMPLE TRAITÉ

On donne un point A, une droite L_1 et un cercle Γ. Construire un carré $ABCD$ tel que le sommet B soit sur la droite L_1 et le sommet D sur le cercle Γ, et tel que l'on tourne dans le sens direct pour aller de B à D autour de A.

Analyse — Si le carré existe, $AB = AD$ et l'angle $\widehat{BAD}$ est droit : on passe de B à D par le quart de tour direct de centre A.

$B \longmapsto D$

L'image de la droite — B est sur la droite L_1, donc son image D est sur la droite L_2, image de L_1 par ce quart de tour. On construit L_2 : c'est la perpendiculaire à L_1 qui passe par l'image d'un point de L_1.

Le sommet D — Le point D est à la fois sur la droite L_2 et sur le cercle Γ : on choisit l'un de leurs points d'intersection.

Le sommet B — B est l'antécédent de D : c'est l'image de D par le quart de tour indirect de centre A. Il est bien sur la droite L_1.

Le carré — On termine par le point C : $ABCD$ est le carré cherché.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

À ne pas faire : On place B au hasard sur la droite, puis on cherche D sur le cercle — On construit d'abord l'image de la droite par le quart de tour : c'est elle qui donne D. Un point B pris au hasard donne presque toujours un point D qui n'est pas sur le cercle.

24. DÉFINITION

Figures globalement invariantes

CE QU'IL DIT

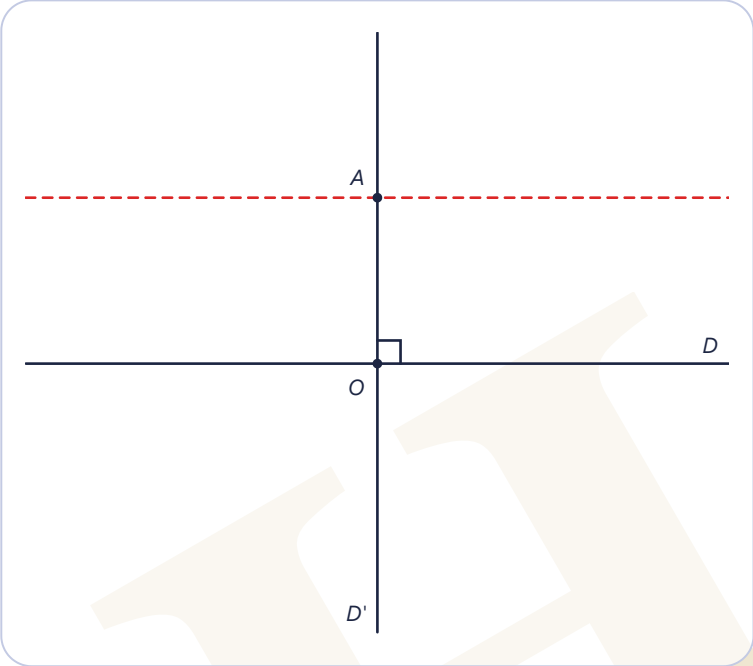
Tawa définitions jdod. N9oulou figure globalement invariante par une application, ki l'image mte3ha bel application hedhi hiya el figure bidha. Rodd belek : mouch lezem koll point yo93ed fi blastou. Les points ynajjmou yetbaddlou, ama el figure el koll to93ed hiya hiya. Point I houwa centre de symétrie mta3 figure, ki el figure globalement invariante par la symétrie centrale de centre I. W droite D hiya axe de symétrie mta3 figure, ki el figure globalement invariante par la symétrie axiale d'axe D.

تواّ définitions جدد . نقولو figure globalement invariante par une application ، كي l'image متاعها بالـ application هذي هي الـ figure بيدها . ردّ بالك : موش لازم كل point يقعد في بلاصتو . les points ينجّمو يتبدّلو ، أما figure globalement invariante ، كي الـ figure متاع centre de symétrie هو point I . الـ figure الكل تقعد هي هي . w droite D figure globalement invariante ، كي الـ figure متاع axe de symétrie هي par la symétrie centrale de centre I . invariante par la symétrie axiale d'axe D.

Voici de nouvelles définitions. On dit qu'une figure est globalement invariante par une application quand son image par cette application est la figure elle-même. Attention : chaque point n'a pas à rester à sa place. Les points peuvent changer, mais la figure entière reste la même. Un point I est un centre de symétrie d'une figure quand la figure est globalement invariante par la symétrie centrale de centre I. Et une droite D est un axe de symétrie d'une figure quand la figure est globalement invariante par la symétrie axiale d'axe D.

- On dit qu'une figure est **globalement invariante** par une application du plan si son image par cette application est elle-même.
- On dit qu'un point I est un **centre de symétrie** d'une figure si cette figure est globalement invariante par la symétrie centrale de centre I.
- On dit qu'une droite D est un **axe de symétrie** d'une figure si cette figure est globalement invariante par la symétrie axiale d'axe D.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



L'image de D par la translation de vecteur OA passe par A.

Deux droites perpendiculaires en O : D est horizontale, D' est verticale. Le point A est sur D', au-dessus de O. Une droite rouge en pointillés passe par A et est parallèle à D.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient D et D' deux droites perpendiculaires en O, et A un point de D' distinct de O. Déterminer l'image de la droite D par : a) la symétrie axiale d'axe D' ; b) la symétrie centrale de centre O ; c) la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$; d) le quart de tour direct de centre O. Par lesquelles de ces applications la droite D est-elle globalement invariante ?

La symétrie axiale — La droite D est perpendiculaire à l'axe D' : le symétrique d'un point de D est encore un point de D.

$D \longmapsto D$

La symétrie centrale — O est un point de D : le symétrique d'un point de D par rapport à O est encore sur D.

$D \longmapsto D$

La translation — L'image de D est la droite parallèle à D qui passe par A, image de O. Comme A n'est pas sur D, ce n'est pas la droite D.

Le quart de tour — L'image de D passe par O et lui est perpendiculaire.

$D \longmapsto D'$

Conclure — La droite D est globalement invariante par la symétrie axiale d'axe D' et par la symétrie centrale de centre O : D' est un axe de symétrie de D, et O est un centre de symétrie de D.

À ne pas faire : Une figure globalement invariante est une figure dont chaque point reste à sa place — C'est la figure entière qui est sa propre image : ses points peuvent changer de place. Par la symétrie de centre O, chaque point de la droite D autre que O se déplace, mais il reste sur D.

25. APPLICATION

Éléments de symétrie

CE QU'IL DIT

Nchoufou les figures elli na3rfouhom. Le cercle de centre O globalement invariant par koll rotation de centre O, par la symétrie centrale de centre O, w par koll symétrie axiale elli l'axe mte3ha yet3adda men O. Le carré 3andou centre de symétrie, le centre mte3ou, w quatre axes de symétrie : les deux diagonales w les médiatrices mta3 les côtés. W yo93ed houwa houwa zeda par les quarts de tour 7awl le centre. Ama le triangle équilatéral : 3andou trois axes de symétrie, w ma 3andouch centre de symétrie. W yo93ed houwa houwa par les rotations d'angle deux pi sur trois 7awl le centre mte3ou.

نشوفو les figures اللي نعرفوهم . le cercle de centre O globalement invariant par كل ، rotation de centre O عندو O . le carré من يتعدّى متاعها l'axe اللي symétrie axiale كل par la symétrie centrale de centre O ، w par متاع w quatre axes de symétrie : les deux diagonales w les médiatrices ، متاعو centre de symétrie ، le centre les côtés . w يقعد هو هو زادة par les quarts de tour حول le centre . أما le triangle équilatéral : 3andou trois axes حول par les rotations d'angle deux pi sur trois يقعد هو هو centre de symétrie . w ما عندوش de symétrie ، w متاعو le centre .

Passons en revue les figures que nous connaissons. Le cercle de centre O est globalement invariant par toute rotation de centre O, par la symétrie centrale de centre O, et par toute symétrie axiale dont l'axe passe par O. Le carré a un centre de symétrie, son centre, et quatre axes de symétrie : ses deux diagonales et les médiatrices de ses côtés. Il reste aussi le même par les quarts de tour autour de son centre. Quant au triangle équilatéral, il a trois axes de symétrie, mais pas de centre de symétrie. Et il reste le même par les rotations d'angle deux pi sur trois autour de son centre.

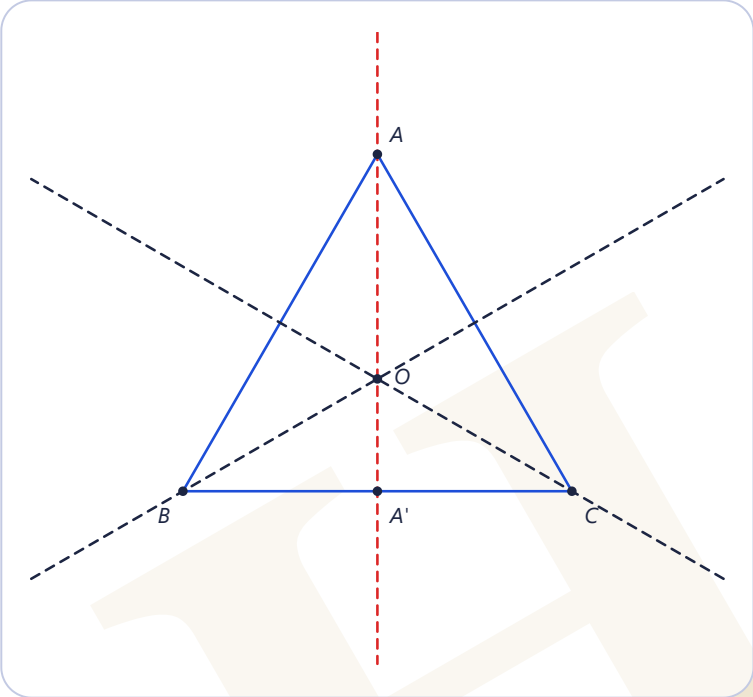
Un cercle de centre O est globalement invariant par toute symétrie axiale dont l'axe passe par O, par la symétrie centrale de centre O et par toute rotation de centre O. Il ne l'est pas par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$, qui divise son rayon par 2.

Une droite a pour centres de symétrie tous ses points ; ses axes de symétrie sont elle-même et toutes les droites qui lui sont perpendiculaires.

Un carré a un centre de symétrie, son centre, et quatre axes de symétrie : ses deux diagonales et les médiatrices de ses côtés. Il est aussi globalement invariant par les quarts de tour, direct et indirect, autour de son centre.

Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie, les médiatrices de ses côtés, mais pas de centre de symétrie. Il est globalement invariant par la rotation directe et par la rotation indirecte d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de son centre.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



Trois axes de symétrie, qui se coupent en O.

Un triangle équilatéral ABC de centre O : A est en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. Le point A' est le milieu du côté [BC]. Trois droites en pointillés passent par O : la droite (AA'), verticale, et les deux droites qui joignent B et C au milieu du côté opposé. Ce sont les trois axes de symétrie du triangle.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O, et A' le milieu de $[BC]$. a) Montrer que le triangle ABC est globalement invariant par la symétrie axiale d'axe (AA'). b) Déterminer les axes de symétrie de ce triangle. c) Trouver deux rotations de centre O qui laissent ce triangle globalement invariant.

Un premier axe — Le triangle est équilatéral : la médiane (AA') est aussi la médiatrice de $[BC]$. La symétrie d'axe (AA') laisse A à sa place et échange B et C.

$$A \longmapsto A \quad ; \quad B \longmapsto C \quad ; \quad C \longmapsto B$$

Le triangle — Les trois sommets ont pour images les trois sommets : l'image du triangle est le triangle lui-même.

Les trois axes — On raisonne de même avec les deux autres médianes : le triangle a trois axes de symétrie, les médiatrices de ses côtés.

Les rotations — La rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme A en B, B en C et C en A. La rotation indirecte de même centre et de même angle transforme A en C, C en B et B en A. Dans les deux cas, l'image du triangle est le triangle.

À ne pas faire : Le centre d'un triangle équilatéral est un centre de symétrie — Un triangle équilatéral n'a pas de centre de symétrie. Le symétrique du sommet A par rapport au centre O n'est pas un point du triangle : le triangle retourné ne se superpose pas à lui-même.

26. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : deux carrés

CE QU'IL DIT

Problème bech nemchiw ab3ed. 3andna triangle ABC, w nebniw 3la barra zouz carrés : ABDE w BCFG. W I, J, K w L houma les milieux mta3 AD, DG, GC w CA. N7ebbou nthabtou elli IJKL carré. El fekra : le quart de tour direct de centre B yeb3ath A l D, w G l C. Donc le segment AG ywalli le segment DC : AG égale CD, w la droite AG perpendiculaire à la droite CD. Ba3d nesta3mlou la droite des milieux : les côtés mta3 IJKL parallèles l AG walla l CD, w la longueur mta3 koll wa7ed hiya la moitié. Donc les côtés kif kif w perpendiculaires : IJKL carré.

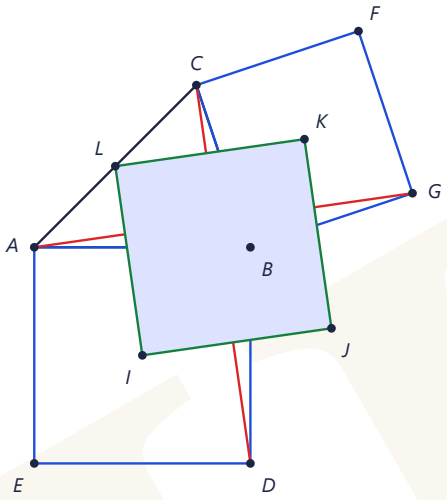
carrés : A B D E w B C F G . w I ، J ، K w L نبنيو على برّا زوز triangle A B C ، w عندنا . باش نمشيو أبعد problème le quart de tour direct de : الفكرة . I J K L carré نحبّو نثبتو اللي . A D ، D G ، G C w C A متاع les milieux هوما le segment D C : A G égale C D ، w la droite A G يولّي C . donc le segment A G ⊥ D ، w G ⊥ A يبعث centre B ولّا A G ⊥ I J K L parallèles متاع la droite des milieux : les côtés بعد نستعملو . perpendiculaire à la droite C D . w perpendiculaires : I J K L carré كيف كيف la moitié . donc les côtés كل واحد هي متاع C D ، w la longueur ⊥

Un problème pour aller plus loin. On a un triangle A B C, et on construit à l'extérieur deux carrés : A B D E et B C F G. I, J, K et L sont les milieux de A D, D G, G C et C A. On veut prouver que I J K L est un carré. L'idée : le quart de tour direct de centre B envoie A sur D, et G sur C. Le segment A G devient donc le segment D C : A G égale C D, et la droite A G est perpendiculaire à la droite C D. Ensuite on utilise la droite des milieux : les côtés de I J K L sont parallèles à A G ou à C D, et chacun en mesure la moitié. Les côtés sont donc égaux et perpendiculaires : I J K L est un carré.

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $BCFG$, et on désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de $[AD]$, $[DG]$, $[GC]$ et $[CA]$.

Un quart de tour de centre B, puis la droite des milieux, montrent que $IJKL$ est un carré.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Les carrés ABDE et BCFG sont à l'extérieur du triangle.

Un triangle ABC : A à gauche, B à droite, C en haut. Sous le côté [AB], le carré ABDE. À droite du côté [BC], le carré BCFG. Les segments [AG] et [CD], en rouge, se coupent à angle droit. Les points I, J, K et L sont les milieux de [AD], [DG], [GC] et [CA] ; le quadrilatère IJKL, en vert, est un carré.

EXEMPLE TRAITÉ

Avec la figure : a) montrer que les droites (AG) et (CD) sont perpendiculaires et que $AG = CD$; b) en déduire que $IJKL$ est un carré.

Le quart de tour — On considère le quart de tour direct r de centre B. Dans le carré $ABDE$, $BA = BD$ et l'angle $\widehat{ABD}$ est droit ; dans le carré $BCFG$, $BG = BC$ et l'angle $\widehat{GBC}$ est droit. Sur la figure, on tourne dans le sens direct de A vers D et de G vers C.

$$A \longmapsto D \quad ; \quad G \longmapsto C$$

L'image d'un segment — L'image du segment $[AG]$ est le segment $[DC]$. Une rotation conserve les distances, et l'image d'une droite par un quart de tour lui est perpendiculaire.

$$AG = CD \quad \text{et} \quad (AG) \perp (CD)$$

Les milieux — Dans le triangle ADG, I et J sont les milieux de $[AD]$ et $[DG]$: la droite (IJ) est parallèle à la droite (AG), et IJ est la moitié de AG. Dans le triangle CAG, on trouve de même que la droite (LK) est parallèle à la droite (AG) et que LK est la moitié de AG.

$$IJ = LK = \frac{AG}{2}$$

Les deux autres côtés — Dans les triangles DGC et ACD, les droites (JK) et (IL) sont parallèles à la droite (CD), et JK et IL valent la moitié de CD.

$$JK = IL = \frac{CD}{2}$$

Conclure — $IJKL$ est un parallélogramme. Ses côtés consécutifs sont égaux, car $AG = CD$, et perpendiculaires, car les droites (AG) et (CD) le sont.

$$IJKL \text{ est un carré}$$

$IJKL$ est un carré

27. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : rotations et arithmétique

CE QU'IL DIT

Problème e5er, ylemm les rotations w l'arithmétique. 3andna polygone régulier à quinze côtés, w polygone régulier à neuf côtés, w 3andhom sommet mochtarek O. La rotation R tdour 7awl le centre mta3 le polygone à quinze côtés, b angle deux pi sur quinze : ya3ni teb3ath koll sommet lel sommet elli ba3dou. Nabdew men O, w koll marra ntabb9ou R. Ba3d quinze marrat, narj3ou l O. Donc bech na3rfou win wsolna ba3d n marra, yekfi na7sbou le reste mta3 la division de n par quinze. W nafs el 7keya lel polygone à neuf côtés, b le reste de la division par neuf. W ez-zouz yarj3ou l O m3a b3adhhom ki n multiple de quinze w de neuf : la première fois hiya le PPCM, quarante-cinq.

problème آخر ، يلمّ les rotations w l'arithmétique . عندنا polygone régulier à quinze côtés ، w
le centre متاع le polygone à تدور حول O . la rotation R مشترك sommet عندهم régulier à neuf côtés ، w
كل O ، w من نبداو . بعدو اللي للـ sommet كل تبعث يعني : angle deux pi sur quinze بـ ، quinze côtés
la متاع le reste يكفي نحسبو ، مرّة n بعد وصلنا وين نعرفو باش O . donc لـ نرجعو ، مرّات quinze بعد . R مرّة نطبّقو
le reste de la division par neuf . w بـ ، polygone à neuf côtés للـ الحكاية نفس division de n par quinze . w
le PPCM ، quarante- هي n multiple de quinze w de neuf : la première fois كي مع بعضهم O لـ يرجعو الزوز
. cinq

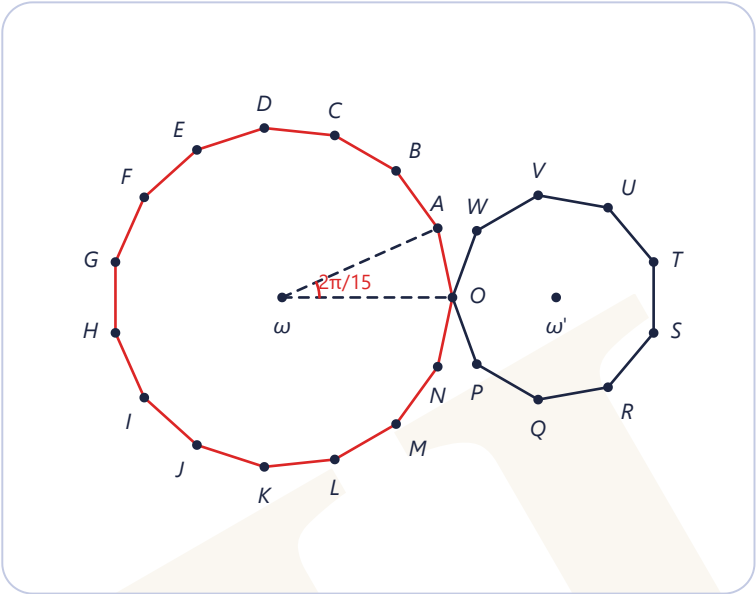
Un autre problème, qui réunit les rotations et l'arithmétique. On a un polygone régulier à quinze côtés et un polygone régulier à neuf côtés, avec un sommet commun O. La rotation R tourne autour du centre du polygone à quinze côtés, d'un angle deux pi sur quinze : elle envoie chaque sommet sur le sommet suivant. On part de O, et on applique R à chaque fois. Après quinze fois, on est revenu en O. Pour savoir où l'on est arrivé après n fois, il suffit donc de calculer le reste de la division de n par quinze. Et c'est la même chose pour le polygone à neuf côtés, avec le reste de la division par neuf. Les deux reviennent ensemble en O quand n est un multiple de quinze et de neuf : la première fois, c'est le PPCM, quarante-cinq.

Dans la figure :

- les points O, A, B, ..., M, N sont les sommets d'un polygone régulier à 15 côtés, de centre ω ;
- les points O, P, Q, ..., V, W sont les sommets d'un polygone régulier à 9 côtés, de centre ω'.

On désigne par R la rotation directe de centre ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{15}$, et par R' la rotation directe de centre ω' et d'angle $\dfrac{2\pi}{9}$.

On définit la suite de points (M_n) par $M_0 = O$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = R(M_n)$; et la suite de points (P_n) par $P_0 = O$ et, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = R'(P_n)$.



À chaque pas, on passe d'un sommet au sommet suivant.

Deux polygones réguliers qui ont un sommet commun O. À gauche, en rouge, un polygone à 15 côtés de centre ω : en partant de O et en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, ses sommets sont O, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N. À droite, un polygone à 9 côtés de centre ω' : en partant de O et en tournant dans le même sens, ses sommets sont O, P, Q, R, S, T, U, V, W.

EXEMPLE TRAITÉ

Avec les deux polygones de la figure : a) indiquer la position de M_5, de M_{20} et de M_{2006} ; b) indiquer la position de P_5, de P_{20} et de P_{2006} ; c) déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que M_n et P_n soient tous deux en O ; d) en déduire l'ensemble E des entiers naturels n tels que M_n et P_n soient tous deux en O.

Un sommet à chaque pas — L'angle au centre entre deux sommets voisins du polygone à 15 côtés est $\dfrac{2\pi}{15}$: la rotation R fait passer chaque sommet au sommet suivant. En partant de O, on obtient A, B, C, D, puis E.

$$M_5 = E$$

Tous les 15 pas — Après 15 pas, on est revenu en O. Seul compte donc le reste de la division de n par 15.

$$20 = 15 + 5 \quad \text{donc} \quad M_{20} = M_5 = E$$

Le rang 2006 — On divise 2006 par 15 : le reste est 11, et le onzième sommet après O est K.

$$2006 = 15 \times 133 + 11 \quad \text{donc} \quad M_{2006} = M_{11} = K$$

Le second polygone — De même, la rotation R' fait passer chaque sommet du polygone à 9 côtés au sommet suivant, et l'on revient en O tous les 9 pas. Le cinquième sommet après O est T ; et comme 20 est égal à 2 fois 9 plus 2, le point P_{20} est le deuxième sommet après O.

$$P_5 = T \quad ; \quad P_{20} = P_2 = Q$$

Le rang 2006, de nouveau — On divise 2006 par 9 : le reste est 8. Le point P_{2006} est donc le huitième sommet après O : c'est le dernier sommet du polygone à 9 côtés, celui qui précède O.

$$2006 = 9 \times 222 + 8 \quad \text{donc} \quad P_{2006} = P_8 = W$$

Les deux en O — M_n est en O quand n est un multiple de 15, et P_n est en O quand n est un multiple de 9. Le plus petit multiple commun non nul de 15 et de 9 est leur PPCM.

$$\mathrm{PPCM}(15, 9) = 45$$

L'ensemble E — M_n et P_n sont tous deux en O exactement quand n est à la fois un multiple de 15 et un multiple de 9, c'est-à-dire un multiple de leur PPCM. Le nombre 0 en fait partie : au départ, les deux points sont en O.

E est l'ensemble des multiples de 45

$$n = 45 \quad ; \quad E \text{ est l'ensemble des multiples de } 45$$

28. REMARQUE

Les carrés magiques

CE QU'IL DIT

Nkammlou b lo3ba 9dima barcha : les carrés magiques. Carré magique houwa grille carrée nektbou fiha des entiers, b7ith la somme mta3 koll ligne, koll colonne w koll diagonale dima kif kif. Hedha carré magique trois fois trois, fih les entiers men un l neuf, w la somme dima quinze. Les mathématiciens el 3rab 5edmou barcha 3la les carrés magiques, w l9aw tor9 bech yebniwhom. W men carré wa7ed, tnajjem ttalla3 sept o5rin : yekfi ttabba9 les applications elli t5alli le carré globalement invariant, ya3ni les quarts de tour, le demi-tour, w les symétries axiales mta3 le carré.

نكمّلو بلعبة قديمة برشة : les carrés magiques هو grille carrée نكتبو فيها des entiers ، بحيث la somme متاع كل ligne ، w كل colonne كل diagonale ديما كيف كيف . هذا carré magique trois fois trois ، فيه les entiers من un لـ la somme ، w neuf ديما mathématiciens . les quinze العرب خدمو برشة على les carrés magiques ، w لقاو طرق باش يبنيوهم . w من carré واحد ، تنجّم تطلّع sept آخرين : يكفي تطبّق les applications اللي تخلّي le carré globalement invariant ، يعني les symétries axiales ، w les demi-tour ، le quarts de tour متاع le carré .

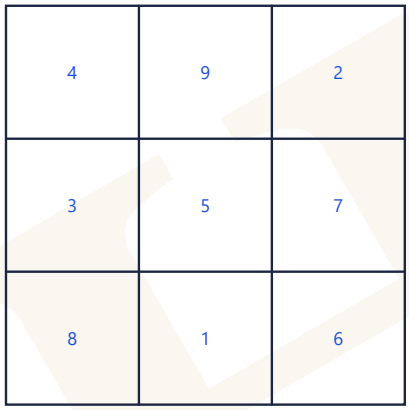
Terminons par un jeu très ancien : les carrés magiques. Un carré magique est une grille carrée où l'on inscrit des entiers, de sorte que la somme de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soit toujours la même. Voici un carré magique trois fois trois : il contient les entiers de un à neuf, et la somme vaut toujours quinze. Les mathématiciens arabes ont beaucoup étudié les carrés magiques, et ont trouvé des méthodes pour les construire. Et à partir d'un seul carré, on peut en obtenir sept autres : il suffit d'appliquer les applications qui laissent le carré globalement invariant, c'est-à-dire les quarts de tour, le demi-tour et les symétries axiales du carré.

Depuis l'Antiquité, les nombres ont été à la fois un outil puissant pour la vie quotidienne et la source de jeux fascinants. On retrouve les **carrés magiques** dans de nombreuses civilisations, de la Chine antique aux artistes de la Renaissance, en passant par les mathématiciens arabes, qui les ont étudiés et ont proposé des méthodes pour les construire.

Pour faire un carré magique, on inscrit des entiers naturels dans une grille carrée, de telle sorte que la somme de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soit toujours la même.

La figure montre un carré magique 3×3, qui utilise les entiers de 1 à 9 : la somme de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est 15.

On peut trouver 7 autres carrés magiques 3×3 : il suffit d'utiliser les applications du plan qui laissent le carré globalement invariant — les quarts de tour direct et indirect et le demi-tour autour de son centre, et les symétries par rapport à ses quatre axes.



Chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale a pour somme 15.

Une grille carrée de trois lignes et trois colonnes. Première ligne : 4, 9, 2. Deuxième ligne : 3, 5, 7. Troisième ligne : 8, 1, 6. Le nombre 5 est au centre.

LES TROIS LIGNES

$$4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 = 15$$

EXEMPLE TRAITÉ

On fait tourner le carré magique de la figure d'un quart de tour direct autour de son centre. Écrire le nouveau carré, et vérifier qu'il est encore magique.

Les coins — Par un quart de tour direct, le coin en haut à droite vient en haut à gauche, et chaque coin prend la place du suivant : 2 vient en haut à gauche, 4 en bas à gauche, 8 en bas à droite et 6 en haut à droite.

Les milieux des côtés — De même, 7 vient en haut, 9 à gauche, 3 en bas et 1 à droite ; le 5 du centre ne bouge pas. On obtient un nouveau carré.

$$\begin{matrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{matrix}$$

Vérifier — Les lignes sont devenues des colonnes et les colonnes des lignes ; les diagonales restent des diagonales. Toutes les sommes valent encore 15.

$$2 + 7 + 6 = 9 + 5 + 1 = 4 + 3 + 8 = 15$$

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. π radians valent 180 degrés ; la mesure en radians d'un angle au centre est le rapport $\frac{L}{r}$ de la longueur de l'arc au rayon.

   > Pi radians hiya cent quatre-vingts degrés. W la mesure en radians mta3 angle au centre hiya le rapport L sur r : la longueur mta3 l'arc sur le rayon.
   > *Pi radians valent cent quatre-vingts degrés. Et la mesure en radians d'un angle au centre est le rapport L sur r : la longueur de l'arc sur le rayon.*

2. Rotation de centre O et d'angle α : $r(O) = O$ et, pour $M \neq O$, $r(M) = M'$ avec $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$, en tournant dans le sens direct ou dans le sens indirect.

   > La rotation de centre O et d'angle alpha t5alli O fi blastou, w teb3ath M l M prime, b7ith OM prime égale OM, w l'angle MOM prime égale alpha, fi le sens direct walla fi le sens indirect.
   > *La rotation de centre O et d'angle alpha laisse O à sa place, et envoie M sur M prime, avec O M prime égale O M et l'angle M O M prime égale alpha, dans le sens direct ou dans le sens indirect.*

3. Si $OA = OB$, il existe une unique rotation de centre O qui transforme A en B. L'angle π donne la symétrie centrale, l'angle nul donne l'identité.

   > Ken OA égale OB, thamma rotation wa7da de centre O teb3ath A l B. L'angle pi ya3ti la symétrie centrale, w l'angle nul ya3ti l'identité.
   > *Si O A égale O B, il existe une seule rotation de centre O qui envoie A sur B. L'angle pi donne la symétrie centrale, et l'angle nul donne l'identité.*

4. Une rotation conserve les distances et les angles ; en particulier, elle conserve l'orthogonalité.

   > La rotation t7afedh 3la les distances w 3la les angles, w bel5sous 3la l'orthogonalité.
   > *La rotation conserve les distances et les angles, et en particulier l'orthogonalité.*

5. Une rotation conserve l'alignement, le milieu, le barycentre, le parallélisme et le contact.

   > La rotation t7afedh 3la l'alignement, le milieu, le barycentre, le parallélisme w le contact.
   > *La rotation conserve l'alignement, le milieu, le barycentre, le parallélisme et le contact.*

6. L'image d'un segment est un segment isométrique, l'image d'une droite est une droite ; par un quart de tour, la droite image est perpendiculaire à la droite de départ.

   > L'image mta3 segment hiya segment isométrique, w l'image mta3 droite hiya droite. W b le quart de tour, la droite image perpendiculaire à la droite elli bdina biha.
   > *L'image d'un segment est un segment isométrique, et l'image d'une droite est une droite. Et par un quart de tour, la droite image est perpendiculaire à la droite de départ.*

7. L'image d'un cercle de centre I est le cercle de même rayon et de centre $r(I)$.

   > L'image mta3 cercle de centre I hiya cercle b nafs le rayon, w le centre mte3ou houwa l'image mta3 I.
   > *L'image d'un cercle de centre I est un cercle de même rayon, dont le centre est l'image de I.*

8. Une figure et son image par une rotation sont superposables : même périmètre, même aire, angles homologues égaux.

> El figure w l'image mte3ha par une rotation superposables : nafs le périmètre, nafs l'aire, w les angles homologues kif kif.
> *Une figure et son image par une rotation sont superposables : même périmètre, même aire, et des angles homologues égaux.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : la rotation de centre O et d'angle alpha t5alli O fi blastou, w teb3ath koll point M l M prime, b7ith OM prime égale OM, w l'angle MOM prime égale alpha. W ma tensech le sens : directe walla indirecte. La rotation t7afedh 3la les distances w les angles : el figure w l'image mte3ha superposables, 3andhom nafs le périmètre w nafs l'aire. La droite twalli droite, le segment ywalli segment, w le cercle ywalli cercle b nafs le rayon. W l'alignement, le milieu, le barycentre, le parallélisme, l'orthogonalité w le contact, el koll yo93dou kima houma. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : la rotation de centre O et d'angle alpha تخلّي O في بلاصتو ، w تبعث كل point M لـ M prime ، بحيث w l'angle M O M prime égale alpha . w ولّا la rotation indirecte . تحافظ على les distances w les angles : الـ figure w l'image متاعها ، superposables عندهم نفس le périmètre w نفس l'aire . la droite تولّي le segment ، droite يولّي le cercle ، w segment يولّي ، le rayon . w l'alignement ، le milieu ، le barycentre ، le parallélisme ، l'orthogonalité w le بنفس cercle ، contact الكل يقعدو كيما هوما . بالله للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : la rotation de centre O et d'angle alpha laisse O à sa place, et envoie chaque point M sur M prime, de sorte que O M prime égale O M et que l'angle M O M prime égale alpha. Et n'oublie pas le sens : directe ou indirecte. La rotation conserve les distances et les angles : une figure et son image sont superposables, elles ont le même périmètre et la même aire. Une droite devient une droite, un segment devient un segment, et un cercle devient un cercle de même rayon. Et l'alignement, le milieu, le barycentre, le parallélisme, l'orthogonalité et le contact restent tous tels quels. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · LE RADIAN

c'est quoi un radian | chnowa le radian | radian ma3neha chnowa | définition du radian

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\text{mesure en radians} = \frac{L}{r}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le radian houwa unité n9isou biha les angles, kif le degré. Ne5dhou cercle de centre O et de rayon r, w l'angle au centre y9oss arc b longueur L : la mesure en radians hiya le rapport $\dfrac{L}{r}$. Mathalan l'angle plat fih π radians, w l'angle droit fih $\dfrac{\pi}{2}$.

cercle de centre O et de rayon r ، w l'angle au ناخذو . le degré كيف ، les angles نقيسو بيها unité هو le radian pi radians ، فيه l'angle plat مثلاً . le rapport L sur r هي longueur L : la mesure en radians بـ arc يقصّ centre . pi sur deux فيه w l'angle droit

Le radian est une unité de mesure des angles, comme le degré. On prend un cercle de centre O et de rayon r ; l'angle au centre intercepte un arc de longueur L : la mesure en radians est le rapport L sur r. Par exemple, l'angle plat mesure pi radians, et l'angle droit pi sur deux.

QUESTION 2 · PASSER DES DEGRÉS AUX RADIANS

pourquoi pi radians égale 180 degrés | 3lech pi tsewi 180 degrés | pi radians ça fait 180 ? | pi w 180 chnowa el 3ala9a

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater l'angle plat y9oss noss el cercle, w la longueur mta3 noss el cercle hiya πr. Le rapport $\dfrac{L}{r}$ ya3tina π. Donc l'angle plat, elli fih 180 degrés, fih π radians.

يعطينا pi fois r . le rapport L sur r هي cercle الـ متاع نصّ cercle ، w la longueur الـ يقصّ نصّ l'angle plat خاطر . pi radians ، فيه cent quatre-vingts degrés ، اللي فيه pi . donc l'angle plat

Parce que l'angle plat intercepte la moitié du cercle, et que la longueur d'un demi-cercle est pi fois r. Le rapport L sur r donne pi. L'angle plat, qui mesure cent quatre-vingts degrés, mesure donc pi radians.

QUESTION 3 · PASSER DES DEGRÉS AUX RADIANS

comment convertir des degrés en radians | kifech n7awwel men degrés l radians | comment passer des radians aux degrés | conversion degrés radians kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\text{radians} = \text{degrés} \times \frac{\pi}{180}$$

$$\text{degrés} = \text{radians} \times \frac{180}{\pi}$$

CE QU'IL RÉPOND

Les deux mesures proportionnelles, w 180 degrés hiya π radians. Men les degrés l les radians, odhrob fi $\dfrac{\pi}{180}$: mathalan 60 degrés ta3ti $\dfrac{\pi}{3}$. W men les radians l les degrés, odhrob fi $\dfrac{180}{\pi}$, ya3ni baddel π b 180 : mathalan $\dfrac{3\pi}{4}$ ta3ti 135 degrés.

les لـ les degrés من . pi radians هي les deux mesures proportionnelles ، w cent quatre-vingts degrés les لـ les radians من pi sur trois . w تعطي soixante degrés مثلاً : pi sur cent quatre-vingts في اضرب ، radians trois pi sur quatre مثلاً : cent quatre-vingts بـ pi يعني بدّل ، cent quatre-vingts sur pi في اضرب ، degrés . cent trente-cinq degrés تعطي

Les deux mesures sont proportionnelles, et cent quatre-vingts degrés font pi radians. Des degrés aux radians, multiplie par pi sur cent quatre-vingts : par exemple, soixante degrés donnent pi sur trois. Et des radians aux

degrés, multiplie par cent quatre-vingts sur pi, c'est-à-dire remplace pi par cent quatre-vingts : par exemple, trois pi sur quatre donnent cent trente-cinq degrés.

QUESTION 4 · PASSER DES DEGRÉS AUX RADIANS

un radian c'est combien de degrés | 9adech 1 radian bel degrés | 1 radian en degrés | radian wa7ed 9adech degrés

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$$

CE QU'IL RÉPOND

Radian wa7ed houwa $\dfrac{180}{\pi}$ degrés, ya3ni environ 57,3 degrés. Nal9awha b nafs la règle : nodhrbou fi $\dfrac{180}{\pi}$. W bel3aks, degré wa7ed houwa $\dfrac{\pi}{180}$ radian.

نلقاوها . environ cinquante-sept virgule trois degrés يعني ، cent quatre-vingts sur pi degrés هو واحد radian pi sur cent quatre-vingts هو واحد degré ، بالعكس cent quatre-vingts sur pi . w نضربو في : la règle بنفس radian .

Un radian vaut cent quatre-vingts sur pi degrés, soit environ cinquante-sept virgule trois degrés. On le trouve avec la même règle : on multiplie par cent quatre-vingts sur pi. Et inversement, un degré vaut pi sur cent quatre-vingts radian.

QUESTION 5 · LE RADIAN

comment calculer la longueur d'un arc | kifech na7seb la longueur mta3 l'arc | longueur d'un arc de cercle formule | l'arc 9adech toulou

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$L = r \times \alpha$$

CE QU'IL RÉPOND

La longueur mta3 l'arc hiya le rayon fois la mesure mta3 l'angle en radians : $L = r \times \alpha$. Mathalan fi cercle de rayon 6, l'angle $\dfrac{\pi}{3}$ y9oss arc b longueur $6 \times \dfrac{\pi}{3}$, ya3ni 2π. Rodd belek : l'angle lezem ykoun en radians, mouch en degrés.

cercle في مثلاً . l'angle en radians : L égale r fois alpha متاع le rayon fois la mesure هي l'arc متاع la longueur لازم l'angle : ردّ بالك . deux pi يعني ، longueur six fois pi sur trois بـ arc يقصّ de rayon six ، l'angle pi sur trois يكون en radians ، موش en degrés .

La longueur d'un arc est le rayon multiplié par la mesure de l'angle en radians : L égale r fois alpha. Par exemple, sur un cercle de rayon six, l'angle pi sur trois intercepte un arc de longueur six fois pi sur trois, c'est-à-dire deux pi. Attention : l'angle doit être en radians, pas en degrés.

QUESTION 6 · RAPPELS : LE QUART DE TOUR

c'est quoi le sens direct | chnowa le sens direct w le sens indirect | sens direct ya3ni m3a 3a9areb es-se3a walla 3aks | le sens direct c'est le sens des aiguilles d'une montre ?

CE QU'IL RÉPOND

Le sens direct houwa 3aks 3a9areb es-se3a, w le sens indirect houwa kif 3a9areb es-se3a. Hedhi convention : en-nes el koll mettaf9in 3liha. Ki tchouf rotation directe, dawwer 3aks les aiguilles d'une montre.

le sens direct هو عكس عقارب الساعة ، w le sens indirect هو كيف عقارب الساعة . هذي convention : الناس الكل متّفقين عليها . كي تشوف rotation directe ، دوّر عكس les aiguilles d'une montre .

Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre, et le sens indirect est celui des aiguilles d'une montre. C'est une convention, la même pour tout le monde. Quand tu vois une rotation directe, tourne à l'inverse des aiguilles d'une montre.

QUESTION 7 · ROTATION DIRECTE, ROTATION INDIRECTE

c'est quoi une rotation | chnowa la rotation | rotation ma3neha chnowa | définition de la rotation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad \widehat{MOM'} = \alpha$$

CE QU'IL RÉPOND

La rotation de centre O et d'angle α hiya l'application elli t5alli O fi blastou, w teb3ath koll point M lel point M', b7ith $OM' = OM$, w $\widehat{MOM'} = \alpha$. W yelzem ta3ref le sens : directe ken ndawwrou 3aks 3a9areb es-se3a, w indirecte ken ndawwrou kifha.

la rotation de centre O et d'angle alpha هي l'application اللي تخلّي O في بلاصتو ، w تبعث كل point M لـ point M prime ، بحيث w l'angle M O M prime égale alpha . w يلزم تعرف le sens : O M prime égale O M ، w كان ندوّرو عكس عقارب الساعة ، directe w indirecte كان ندوّرو كيفها .

La rotation de centre O et d'angle alpha est l'application qui laisse O à sa place et qui envoie chaque point M sur le point M prime tel que O M prime égale O M et que l'angle M O M prime égale alpha. Il faut aussi connaître le sens : directe si l'on tourne à l'inverse des aiguilles d'une montre, indirecte si l'on tourne comme elles.

QUESTION 8 · ROTATION DIRECTE, ROTATION INDIRECTE

différence entre rotation directe et rotation indirecte | chnowa el far9 bin rotation directe w indirecte | rotation directe w indirecte kifech nfarra9 binethom | rotation directe ou indirecte comment savoir

CE QU'IL RÉPOND

Ez-zouz 3andhom nafs le centre w nafs l'angle, el far9 fi le sens bark. La rotation directe tdawwer 3aks 3a9areb es-se3a, w la rotation indirecte tdawwer kif 3a9areb es-se3a. Donc nafs el point M ya3ti zouz images mo5talfin, wa7da men koll jiha mta3 la droite (OM). Bech ta3ref 3la figure, chouf men M l M' fi ama sens dort.

الزوز عندهم نفس le centre w نفس l'angle ، الفرق في le sens برك . la rotation directe تدوّر عكس عقارب الساعة
، w la rotation indirecte تدوّر كيف عقارب الساعة . donc نفس الـ point M يعطي زوز images مختلفين ، واحدة من
كل جهة متاع la droite O M . باش تعرف على figure ، شوف من M لـ M prime في أما sens درت .

Les deux ont le même centre et le même angle : seule la différence de sens les sépare. La rotation directe tourne à l'inverse des aiguilles d'une montre, la rotation indirecte tourne comme elles. Un même point M a donc deux images différentes, une de chaque côté de la droite O M. Pour le voir sur une figure, regarde dans quel sens tu tournes pour aller de M à M prime.

QUESTION 9 · ANGLE Π, ANGLE NUL, ANTÉCÉDENT

est-ce que la symétrie centrale est une rotation | symétrie centrale w rotation chnowa el 3ala9a | demi-tour c'est une rotation ? | rotation d'angle pi ma3neha symétrie centrale ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha = \pi \ : \quad O \text{ milieu de } [MM']$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih. La rotation de centre O et d'angle π, directe walla indirecte, hiya la symétrie centrale de centre O. 5ater ki ndawwrou b angle plat, O yji le milieu mta3 le segment [MM']. W hedha houwa zeda le demi-tour de centre O.

إيه . la rotation de centre O et d'angle pi ، directe ولّا indirecte ، هي la symétrie centrale de centre O خاطر
كي ندوّرو بـ O ، angle plat يجي le milieu متاع w . le segment M M prime هذا هو زادة le demi-tour de centre O .

Oui. La rotation de centre O et d'angle pi, directe ou indirecte, est la symétrie centrale de centre O. En effet, quand on tourne d'un angle plat, O devient le milieu du segment M M prime. C'est aussi ce qu'on appelle le demi-tour de centre O.

QUESTION 10 · ANGLE Π, ANGLE NUL, ANTÉCÉDENT

rotation d'angle nul chnowa | c'est quoi l'identité du plan | ken l'angle zéro chnowa ysir | une rotation d'angle 0 fait quoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha = 0 \ : \quad M' = M$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken l'angle nul, koll point yo93ed fi blastou : M' houwa M bidou. L'application hedhi nsammiwha l'identité du plan. Ya3ni la rotation d'angle nul ma t7arrek 7atta chay.

كان l'angle nul ، كل point يقعد في بلاصتو : M prime هو M بيدو . l'application هذي نسمّيوها l'identité du plan
. يعني la rotation d'angle nul ما تحرّك حتّى شي .

Si l'angle est nul, chaque point reste à sa place : M prime est M lui-même. Cette application s'appelle l'identité du plan. Autrement dit, la rotation d'angle nul ne déplace rien.

QUESTION 11 · ANGLE Π, ANGLE NUL, ANTÉCÉDENT

comment trouver l'antécédent d'un point par une rotation | kifech nal9a l'antécédent | antécédent par une rotation chnowa | c'est quoi l'antécédent de M prime

CE QU'IL RÉPOND

L'antécédent mta3 M' houwa el point el wa7id M elli l'image mte3ou M'. Bech tal9ah, dawwer M' 7awl le centre b nafs l'angle, ama fi le sens le5er. Mathalan ken la rotation directe d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, l'antécédent nal9awh b la rotation indirecte d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

l'antécédent متاع M prime هو الـ point الوحيد M اللي l'image متاعو M prime . باش تلقاه ، دوّر le حول M prime la rotation directe d'angle pi sur trois ، l'antécédent كان . مثلاً الآخر le sens في ، أما l'angle بنفس centre . la rotation indirecte d'angle pi sur trois بـ نلقاوه

L'antécédent de M prime est l'unique point M dont l'image est M prime. Pour le trouver, fais tourner M prime autour du centre du même angle, mais dans l'autre sens. Par exemple, pour la rotation directe d'angle pi sur trois, l'antécédent s'obtient par la rotation indirecte d'angle pi sur trois.

QUESTION 12 · ROTATION DIRECTE, ROTATION INDIRECTE

pourquoi le centre ne bouge pas | 3lech le centre ma yet7arrekch | l'image du centre O par la rotation | le centre est-il invariant

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$r(O) = O$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater el définition t9oul hakka : la rotation t5alli le centre O invariant, ya3ni l'image mta3 O hiya O bidou. W houwa el point el wa7id elli ma yet7arrekch, ella ken l'angle nul. Koll point e5er ydour 7awl O.

خاطر الـ définition تقول هكّا : la rotation تخلّي le centre O invariant ، يعني l'image متاع O هي O بيدو . w هو الـ point الوحيد اللي ما يتحرّكش ، إلاّ كان l'angle nul . كل point آخر يدور حول O .

Parce que la définition le dit : la rotation laisse le centre O invariant, c'est-à-dire que l'image de O est O lui-même. Et c'est le seul point qui ne bouge pas, sauf si l'angle est nul. Tout autre point tourne autour de O.

QUESTION 13 · LA ROTATION QUI TRANSFORME A EN B

combien de rotations de centre O transforment A en B | 9adech men rotation teb3ath A l B | la rotation de centre O qui transforme A en B est-elle unique | ken OA mouch kif OB famma rotation teb3ath A l B ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$OA = OB \implies \text{une seule rotation de centre } O$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $OA = OB$, thamma rotation wa7da de centre O teb3ath A l B : l'angle mte3ha houwa $\widehat{AOB}$, w le sens mte3ha houwa ej-jiha elli ndawwrou fiha men A l B. W ken OA mouch kif OB,

ma thamma 7atta rotation de centre O, 5ater la rotation t5alli koll point 3la nafs la distance men le centre.

l'angle A O B ، w le sens متاعها هو B : l'angle لـ A تبعث de centre O وحدة rotation ثمّة ، O A égale O B كان متاعها هو الجهة اللي ندوّرو فيها من A لـ B . w كان O A موش كيف O B ، ما ثمّة حتّى rotation de centre O ، خاطر la rotation تخلّي كل point على نفس la distance من le centre .

Si O A égale O B, il existe une seule rotation de centre O qui envoie A sur B : son angle est l'angle A O B, et son sens est celui dans lequel on tourne de A vers B. Et si O A est différent de O B, il n'y en a aucune de centre O, car une rotation garde chaque point à la même distance du centre.

QUESTION 14 · CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT

comment construire l'image d'un point par une rotation | kifech narsem l'image mta3 point | construction de l'image avec le compas | kifech nal9a M prime bel rapporteur

CE QU'IL RÉPOND

Trois étapes. Numéro un : bel compas, arsem le cercle de centre O elli yet3adda men M. Numéro deux : bel rapporteur, arsem la demi-droite elli to5rej men O w ta3mel m3a [OM) el angle α, fi le sens direct walla indirect 7asb la rotation. Numéro trois : M' houwa el point win la demi-droite t9oss le cercle.

trois étapes . numéro un : بالـ compas ، ارسم O le cercle de centre اللي يتعدّى من numéro deux . بالـ M : rapporteur ، ارسم la demi-droite اللي تخرج من O w تعمل مع O M الـ angle alpha ، في le sens direct ولّا indirect حسب numéro trois : M prime . la rotation هو الـ point وين la demi-droite تقصّ le cercle .

Trois étapes. Numéro un : au compas, trace le cercle de centre O qui passe par M. Numéro deux : au rapporteur, trace la demi-droite qui part de O et qui fait avec O M l'angle alpha, dans le sens direct ou indirect selon la rotation. Numéro trois : M prime est le point où la demi-droite coupe le cercle.

QUESTION 15 · CONSERVATION DES DISTANCES ET DES ANGLES

est-ce qu'une rotation conserve les distances | la rotation tbaddel les longueurs walla le | 3lech la distance M'N' égale MN | les distances yetbaddlou b la rotation ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$M'N' = MN$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, la rotation t7afedh 3la les distances. Ken M' w N' houma les images mta3 M w N, donc $M'N' = MN$. 5ater les triangles OMN w OM'N' isométriques : zouz côtés kif kif, w l'angle elli binethom kif kif. 3la hedha l'image mta3 segment hiya segment b nafs la longueur.

إيه ، la rotation تحافظ على les distances . كان M prime w N prime هوما les images متاع M ، donc M w N : les triangles O M N w O M prime N prime isométriques خاطر . prime N prime égale M N كيف côtés زوز : كيف ، l'angle w اللي بيناتهم كيف كيف . على هذا l'image متاع segment هي segment بنفس la longueur .

Oui, la rotation conserve les distances. Si M prime et N prime sont les images de M et N, alors M prime N prime égale M N. En effet, les triangles O M N et O M prime N prime sont isométriques : deux côtés égaux, et le même angle entre eux. C'est pourquoi l'image d'un segment est un segment de même longueur.

QUESTION 16 · CONSERVATION DES DISTANCES ET DES ANGLES

quelles sont les propriétés conservées par une rotation | chnowa t7afedh 3lih la rotation | la rotation conserve quoi | chnowa les propriétés elli yo93dou kima houma

CE QU'IL RÉPOND

La rotation t7afedh 3la les distances w 3la les angles, donc 3la l'orthogonalité. W t7afedh 3la l'alignement, le milieu, le barycentre, le parallélisme w le contact. 3la hedha el figure w l'image mte3ha superposables : nafs le périmètre w nafs l'aire. Elli yetbaddel houwa el blasa mta3 el figure bark, 5ater daret.

la rotation تحافظ على les distances w على les angles ، donc على l'orthogonalité . w تحافظ على l'alignement ، le milieu ، le barycentre ، le parallélisme w le contact . على هذا الـ figure w l'image متاعها superposables : نفس le périmètre w نفس l'aire . اللي يتبدّل هو البلاصة متاع الـ figure برك ، خاطر دارت .

La rotation conserve les distances et les angles, donc l'orthogonalité. Elle conserve aussi l'alignement, le milieu, le barycentre, le parallélisme et le contact. C'est pourquoi une figure et son image sont superposables : même périmètre et même aire. Seule change la position de la figure, parce qu'elle a tourné.

QUESTION 17 · CONSERVATION DES DISTANCES ET DES ANGLES

est-ce que la rotation conserve les angles | les angles yetbaddlou b la rotation ? | l'angle droit yo93ed droit ba3d la rotation ? | la rotation conserve l'orthogonalité ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, la rotation t7afedh 3la les angles. Ken A', B' w C' houma les images mta3 A, B w C, $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$. 5ater les deux triangles 3andhom trois côtés kif kif, donc isométriques. W bel5sous l'angle droit yo93ed droit : la rotation t7afedh 3la l'orthogonalité.

إيه ، la rotation تحافظ على les angles . كان A prime ، B prime w C prime هوما les images متاع A ، B w C ، خاطر les deux triangles عندهم trois côtés كيف كيف ، l'angle A prime B prime C prime égale l'angle A B C . w بالخصوص donc isométriques . l'angle droit يقعد droit : la rotation تحافظ على l'orthogonalité .

Oui, la rotation conserve les angles. Si A prime, B prime et C prime sont les images de A, B et C, l'angle A prime B prime C prime égale l'angle A B C. En effet, les deux triangles ont leurs trois côtés égaux, ils sont donc isométriques. En particulier, un angle droit reste droit : la rotation conserve l'orthogonalité.

QUESTION 18 · IMAGE D'UN SEGMENT, IMAGE D'UNE DROITE

quelle est l'image d'une droite par une rotation | l'image mta3 droite par une rotation chnowa

l'image d'une droite est-elle parallèle | l'image mta3 segment par la rotation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$(AB) \longmapsto (A'B')$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mta3 droite par une rotation hiya droite, w l'image mta3 segment hiya segment b nafs la longueur. Bech tal9aha, arsem les images mta3 zouz points A w B : l'image mta3 la droite (AB) hiya la droite (A'B'). Rodd belek : fel 3ada, la droite image mouch parallèle l la droite elli bdina biha, 5ater la rotation tdawwer les directions.

l'image متاع droite par une rotation هي droite ، w l'image متاع segment هي segment بنفس la longueur .
باش تلقاها ، ارسم les images متاع زوز points A w B : l'image متاع la droite A B هي la droite A prime B prime .
ردّ بالك : في العادة ، la droite image موش parallèle لـ la droite اللي بدينا بيها ، خاطر la rotation تدوّر les directions .

L'image d'une droite par une rotation est une droite, et l'image d'un segment est un segment de même longueur. Pour la trouver, construis les images de deux points A et B : l'image de la droite A B est la droite A prime B prime. Attention : en général, la droite image n'est pas parallèle à la droite de départ, car la rotation fait tourner les directions.

QUESTION 19 · IMAGE D'UNE DROITE PAR UN QUART DE TOUR

image d'une droite par un quart de tour | quart de tour w droite perpendiculaire 3lech | kifech nthabbet zouz droites perpendiculaires b quart de tour | le quart de tour donne une droite perpendiculaire ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$(AB) \perp (A'B')$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mta3 droite par un quart de tour hiya droite perpendiculaire liha, 5ater le quart de tour ydawwer koll direction b angle droit. W hedhi tari9a bech tthabbet zouz droites perpendiculaires : tal9a quart de tour yeb3ath el wa7da lel o5ra. Mathalan ken yeb3ath A l B w C l D, la droite (AC) perpendiculaire à la droite (BD).

l'image متاع droite par un quart de tour هي droite perpendiculaire ليها ، خاطر le quart de tour يدوّر كل direction بـ w .
هذي طريقة باش تثبت زوز droites perpendiculaires : تلقى quart de tour يبعث angle droit .
مثلاً كان يبعث A لـ B w C لـ B D ، la droite A C perpendiculaire à la droite B D . الواحدة للأخرى

L'image d'une droite par un quart de tour est une droite qui lui est perpendiculaire, car le quart de tour fait tourner chaque direction d'un angle droit. C'est un moyen de prouver que deux droites sont perpendiculaires : on trouve un quart de tour qui envoie l'une sur l'autre. Par exemple, s'il envoie A sur B et C sur D, la droite A C est perpendiculaire à la droite B D.

QUESTION 20 · ANGLE Π, ANGLE NUL, ANTÉCÉDENT

c'est quoi un quart de tour | quart de tour chnowa | le quart de tour c'est une rotation ?

quart de tour ya3ni angle 9adech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le quart de tour de centre O houwa la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, ya3ni 90 degrés. Ken fi le sens direct n9oulou quart de tour direct, w ken fi le sens le5er n9oulou quart de tour indirect. W le triangle OMM' yatla3 isocèle et rectangle en O.

le quart de tour de centre O هو la rotation de centre O et d'angle pi sur deux ، يعني quatre-vingt-dix degrés . كان في le sens direct نقولو w ، quart de tour direct كان في le sens الآخر نقولو quart de tour indirect . w le triangle O M M prime يطلع O en rectangle et isocèle .

Le quart de tour de centre O est la rotation de centre O et d'angle pi sur deux, c'est-à-dire quatre-vingt-dix degrés. Dans le sens direct, on dit quart de tour direct ; dans l'autre sens, quart de tour indirect. Et le triangle O M M prime est alors isocèle et rectangle en O.

QUESTION 21 · IMAGE D'UN CERCLE

quelle est l'image d'un cercle par une rotation | l'image mta3 cercle chnowa | le rayon yetbaddel b la rotation ? | est-ce que le rayon du cercle change

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\mathscr{C}(I, R) \longmapsto \mathscr{C}'(I', R)$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image mta3 cercle de centre I et de rayon R hiya cercle b nafs le rayon R, w le centre mte3ou I', l'image mta3 I. Le rayon ma yetbaddelch, 5ater la rotation t7afedh 3la les distances. Bech tarsemha, arsem l'image mta3 le centre bark.

l'image متاع le rayon R ، w le centre بنفس cercle هي cercle de centre I et de rayon R متاع l'image I prime ، le rayon متاع . I ما يتبدّلش ، خاطر la rotation تحافظ على les distances . باش ترسمها ، ارسم l'image متاع le centre برك .

L'image d'un cercle de centre I et de rayon R est un cercle de même rayon R, dont le centre est I prime, l'image de I. Le rayon ne change pas, car la rotation conserve les distances. Pour la tracer, construis seulement l'image du centre.

QUESTION 22 · CONSERVATION DU MILIEU ET DU BARYCENTRE

est-ce que la rotation conserve le milieu | le milieu yo93ed milieu ba3d la rotation ? | l'image du milieu d'un segment | 3lech I prime le milieu mta3 A'B'

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$I' \text{ milieu de } [A'B']$$

CE QU'IL RÉPOND

Ih, la rotation t7afedh 3la le milieu. Ken I houwa le milieu mta3 le segment [AB], l'image mte3ou I' hiya le milieu mta3 le segment [A'B']. 5ater I' 3la le segment [A'B'], w les distances ma tbaddlouch : $A'I' = I'B'$.

إيه ، la rotation تحافظ على le milieu . كان I هو le milieu متاع l'image ، le segment A B متاعو le segment I prime هي le milieu متاع le segment A prime B prime . خاطر I prime على les distances ، w le segment A prime B prime ما تبدّلوش : A prime I prime égale I prime B prime .

Oui, la rotation conserve le milieu. Si I est le milieu du segment A B, son image I prime est le milieu du segment A prime B prime. En effet, I prime est sur le segment A prime B prime, et les distances n'ont pas changé : A prime I prime égale I prime B prime.

QUESTION 23 · CONSERVATION DU MILIEU ET DU BARYCENTRE

est-ce que la rotation conserve le barycentre | l'image du barycentre par une rotation | le centre de gravité yo93ed centre de gravité ? | barycentre w rotation chnowa el 3ala9a

CE QU'IL RÉPOND

Ih, ne9blouha men ghir démonstration : la rotation t7afedh 3la le barycentre. L'image mta3 le barycentre hiya le barycentre mta3 les images, w les coefficients yo93dou kima houma. Mathalan le centre de gravité mta3 triangle yemchi l le centre de gravité mta3 le triangle image.

إيه ، نقبلوها من غير démonstration : la rotation تحافظ على le barycentre . l'image متاع le barycentre هي le barycentre متاع les images ، w les coefficients متاع barycentre يمشي لـ triangle متاع le centre de gravité . مثلاً هوما كيما يقعدو le centre de gravité متاع le triangle image .

Oui, on l'admet sans démonstration : la rotation conserve le barycentre. L'image du barycentre est le barycentre des images, avec les mêmes coefficients. Par exemple, le centre de gravité d'un triangle a pour image le centre de gravité du triangle image.

QUESTION 24 · CONSERVATION DU CONTACT

c'est quoi conserver le contact | conservation du contact ma3neha chnowa | l'image d'une tangente par une rotation | la tangente to93ed tangente ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

T' tangente à $\mathscr{C}'$ en A'

CE QU'IL RÉPOND

Ma3neha : ken droite tangente l cercle fi point A, l'image mte3ha to93ed tangente lel image mta3 le cercle, fi el point A'. 5ater la tangente perpendiculaire au rayon, w la rotation t7afedh 3la l'orthogonalité.

معناها : كان droite tangente لـ cercle في l'image ، point A متاعها تقعد tangente للـ image متاع le cercle ، في الـ point A prime . خاطر la rotation ، w la tangente perpendiculaire au rayon تحافظ على l'orthogonalité .

Cela veut dire : si une droite est tangente à un cercle en un point A, son image reste tangente à l'image du cercle, au point A prime. En effet, la tangente est perpendiculaire au rayon, et la rotation conserve l'orthogonalité.

QUESTION 25 · FIGURES SUPERPOSABLES : PÉRIMÈTRES ET AIRES

est-ce que l'aire change par une rotation | l'aire tetbaddel b la rotation ? | c'est quoi deux figures superposables | le périmètre yo93ed kif kif ?

CE QU'IL RÉPOND

L'aire w le périmètre ma yetbaddlouch. Ne9blou elli el figure w l'image mte3ha par une rotation superposables, ya3ni tnajjem t7ott el wa7da fou9 lo5ra bedhabt. Donc polygone w l'image mte3ou 3andhom nafs le périmètre w nafs l'aire, w les angles homologues kif kif.

l'aire w le périmètre ما يتبدّلوش . نقبلو اللي الـ figure w l'image متاعها par une rotation superposables ، يعني تنجّم تحطّ الواحدة فوق الأخرى بالضبط . donc polygone w l'image متاعو عندهم نفس le périmètre w نفس l'aire ، w les angles homologues كيف كيف .

L'aire et le périmètre ne changent pas. On admet qu'une figure et son image par une rotation sont superposables, c'est-à-dire qu'on peut poser exactement l'une sur l'autre. Un polygone et son image ont donc le même périmètre et la même aire, et leurs angles homologues sont égaux.

QUESTION 26 · UN PROBLÈME D'ALIGNEMENT

comment montrer que trois points sont alignés avec une rotation | kifech nthabbet thletha points alignés | la rotation conserve l'alignement ? | points alignés w rotation kifech

CE QU'IL RÉPOND

La rotation t7afedh 3la l'alignement : les images mta3 trois points alignés houma trois points alignés. Donc bech tthabbet elli trois points alignés, 9alleb 3la trois points ta3rafhom alignés, w 3la rotation teb3athhom lel points mte3ek. Mathalan ken E, A w C alignés, w la rotation teb3athhom l D, I w J, donc D, I w J alignés.

la rotation تحافظ على l'alignement : les images متاع trois points alignés هوما donc trois points alignés . باش تثبت اللي trois points alignés ، قلّب على trois points تعرفهم ، w alignés على rotation تبعثهم للـ points متاعك . مثلاً كان w la rotation alignés ، A w C E ، تبعثهم لـ I w J alignés ، donc D ، I w J .

La rotation conserve l'alignement : les images de trois points alignés sont trois points alignés. Pour prouver que trois points sont alignés, cherche donc trois points que tu sais alignés, et une rotation qui les envoie sur tes points. Par exemple, si E, A et C sont alignés et que la rotation les envoie sur D, I et J, alors D, I et J sont alignés.

QUESTION 27 · UN PROBLÈME DE LIEU

comment trouver un lieu géométrique avec une rotation | kifech nal9a le lieu mta3 point | problème de lieu kifech n7ellou | le lieu de K quand J décrit un cercle

CE QU'IL RÉPOND

9alleb 3la rotation teb3ath el point elli yet7arrek lel point elli t7ebb 3lih. Ken K houwa l'image mta3 J par une rotation, w J yet7arrek 3la figure, donc K yet7arrek 3la l'image mta3 el figure hedhi. Mathalan ken J ydour 3la cercle, K ydour 3la cercle b nafs le rayon, w le centre mte3ou houwa l'image mta3 le centre.

قلّب على rotation تبعث الـ point اللي يتحرّك للـ point اللي تحبّ عليه . كان K هو l'image متاع ، J par une rotation w J يتحرّك على donc K ، figure يتحرّك على l'image متاع الـ figure هذي . مثلاً كان J يدور على cercle ، K يدور على cercle بنفس le centre ، w le rayon متاعو هو l'image متاع le centre .

Cherche une rotation qui envoie le point mobile sur le point qui t'intéresse. Si K est l'image de J par une rotation et que J se déplace sur une figure, alors K se déplace sur l'image de cette figure. Par exemple, si J parcourt un cercle, K parcourt un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre.

QUESTION 28 · FIGURES GLOBALEMENT INVARIANTES

c'est quoi une figure globalement invariante | globalement invariante ma3neha chnowa | figure invariante par une application | invariante ya3ni les points ma yet7arrkouch ?

CE QU'IL RÉPOND

Figure globalement invariante par une application, ma3neha l'image mte3ha bel application hedhi hiya el figure bidha. Rodd belek : les points ynajjmou ybaddlou blayeshom, ama el figure el koll to93ed hiya hiya. Mathalan le carré globalement invariant par le quart de tour 7awl le centre mte3ou : les sommets ydourou, ama le carré yo93ed fi blastou.

figure الـ هذي هي application متاعها بالـ l'image معناها ، figure globalement invariante par une application بيدها . ردّ بالك : les points ينجّمو يبدّلو بلايصهم ، أما الـ figure الكل تقعد هي هي . مثلاً le carré globalement invariant par le quart de tour حول le centre متاعو : les sommets يدورو ، أما le carré يقعد في بلاصتو .

Une figure est globalement invariante par une application quand son image par cette application est la figure elle-même. Attention : les points peuvent changer de place, mais la figure entière reste la même. Par exemple, le carré est globalement invariant par le quart de tour autour de son centre : les sommets tournent, mais le carré reste à sa place.

QUESTION 29 · FIGURES GLOBALEMENT INVARIANTES

c'est quoi un axe de symétrie | chnowa centre de symétrie | différence entre axe de symétrie et centre de symétrie | axe de symétrie w centre de symétrie chnowa el far9

CE QU'IL RÉPOND

Droite D hiya axe de symétrie mta3 figure, ki el figure globalement invariante par la symétrie axiale d'axe D : ki natwiw 3la D, ez-zouz jihat yjiw 3la b3adhhom. W point I houwa centre de symétrie, ki el figure globalement invariante par la symétrie centrale de centre I. Mathalan le rectangle 3andou deux axes w centre de symétrie wa7ed.

figure globalement invariante par la symétrie axiale d'axe كي الـ ، figure متاع axe de symétrie هي droite D D : كي نطويو على D ، الزوز جهات يجيو على بعضهم . point I w هو centre de symétrie ، كي الـ figure

deux axes w centre de عندو le rectangle مثلاً . globalement invariante par la symétrie centrale de centre I واحد symétrie .

Une droite D est un axe de symétrie d'une figure quand la figure est globalement invariante par la symétrie axiale d'axe D : si on plie le long de D, les deux moitiés se superposent. Et un point I est un centre de symétrie quand la figure est globalement invariante par la symétrie centrale de centre I. Par exemple, le rectangle a deux axes et un seul centre de symétrie.

QUESTION 30 · ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE

le triangle équilatéral a-t-il un centre de symétrie | triangle équilatéral 3andou centre de symétrie ? | combien d'axes de symétrie a un triangle équilatéral | quelles rotations laissent le triangle équilatéral invariant

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

3 axes de symétrie, pas de centre de symétrie

CE QU'IL RÉPOND

Le triangle équilatéral 3andou trois axes de symétrie : les médiatrices mta3 les côtés. Ama ma 3andouch centre de symétrie. W yo93ed globalement invariant par zouz rotations 7awl le centre mte3ou : la rotation directe w la rotation indirecte d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, 5ater koll sommet yemchi l sommet e5er.

centre de أما ما عندوش . les côtés متاع trois axes de symétrie : les médiatrices عندو le triangle équilatéral la rotation directe w la : متاعو le centre حول rotations زوز globalement invariant par يقعد symétrie . w آخر . sommet لـ يمشي sommet كل خاطر ، rotation indirecte d'angle deux pi sur trois

Le triangle équilatéral a trois axes de symétrie : les médiatrices de ses côtés. Mais il n'a pas de centre de symétrie. Et il reste globalement invariant par deux rotations autour de son centre : la rotation directe et la rotation indirecte d'angle deux pi sur trois, car chaque sommet va sur un autre sommet.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Des degrés aux radians**

Convertir en radians un angle de 18 degrés.

Écris la mesure en radians, avec pi.

Réponse attendue : `pi/10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. 180 degrés correspondent à π radians, et les deux mesures sont proportionnelles.
2. On multiplie le nombre de degrés par $\dfrac{\pi}{180}$, puis on simplifie la fraction.

CORRECTION

La règle — Pour passer des degrés aux radians, on multiplie par $\dfrac{\pi}{180}$.

$$18 \times \frac{\pi}{180} = \frac{18\pi}{180}$$

Simplifier — On simplifie la fraction par 18.

$$\frac{18\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$$

Un angle de 18 degrés mesure $\frac{\pi}{10}$ radians.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3240/pi` → Tu as multiplié par $\frac{180}{\pi}$: c'est la règle pour passer des radians aux degrés. Ici, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$.

`1/10 / 0.1` → Il manque π : en radians, l'angle plat mesure π, pas 1.

`18*pi` → On ne multiplie pas par π seul : il faut aussi diviser par 180.

EXERCICE 2 · BASE

Des radians aux degrés

Un angle mesure $\frac{3\pi}{4}$ radians. Quelle est sa mesure en degrés ?

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : 135

INDICES, DANS L'ORDRE

1. π radians correspondent à 180 degrés.
2. On remplace π par 180 dans l'écriture de l'angle, puis on calcule.

CORRECTION

La règle — Pour passer des radians aux degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$: cela revient à remplacer π par 180.

$$\frac{3 \times 180}{4}$$

Calculer — 180 divisé par 4 donne 45, et 3 fois 45 font 135.

$$3 \times 45 = 135$$

L'angle mesure 135 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`240` → Tu as calculé 180 fois 4 sur 3 : la fraction est à l'envers. On calcule 3 fois 180, le tout sur 4.

`45` → 45 degrés correspondent à $\frac{\pi}{4}$. Ici il y a un 3 au numérateur : on multiplie par 3.

EXERCICE 3 · PRATIQUE

Un angle obtus en radians

Convertir en radians un angle de 150 degrés.

Écris la mesure en radians, avec pi.

Réponse attendue : `5*pi/6` — aussi acceptées : 5pi/6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On multiplie par $\frac{\pi}{180}$.
2. La fraction $\frac{150}{180}$ se simplifie par 30.

CORRECTION

La règle — On multiplie le nombre de degrés par $\frac{\pi}{180}$.

$$150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{150\pi}{180}$$

Simplifier — On simplifie par 30 : 150 donne 5, et 180 donne 6.

$$\frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$$

Un angle de 150 degrés mesure $\frac{5\pi}{6}$ radians : un peu moins que l'angle plat.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/6` → Il manque π : $\frac{5}{6}$ est seulement la fraction de l'angle plat.

`6*pi/5` → La fraction est à l'envers : 150 degrés font moins que l'angle plat, donc moins que π.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

La longueur d'un arc

Sur un cercle de rayon 6, un angle au centre mesure $\frac{\pi}{3}$ radians. Calculer la longueur L de l'arc qu'il intercepte.

Donne la longueur L, avec pi.

Réponse attendue : `2*pi` — aussi acceptées : 2pi

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La mesure en radians d'un angle au centre est le rapport de la longueur de l'arc au rayon.
2. La longueur de l'arc est donc le rayon multiplié par la mesure de l'angle en radians.

CORRECTION

Le radian — Le rapport de la longueur de l'arc au rayon est la mesure de l'angle en radians.

$$\frac{L}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Calculer — On multiplie les deux membres par 6.

$$L = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

L'arc mesure 2π, soit environ $6{,}28$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`360` → Tu as multiplié le rayon par 60, la mesure en degrés. La formule demande la mesure en radians.

`pi/3` → $\frac{\pi}{3}$ est la mesure de l'angle, c'est-à-dire la longueur de l'arc sur un cercle de rayon 1. Ici le rayon est 6.

`pi/18` → On ne divise pas par le rayon : on multiplie la mesure de l'angle par le rayon.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

De l'arc à l'angle

Sur un cercle de rayon 4, un arc a pour longueur 3π. Donner, en radians, la mesure de l'angle au centre qui intercepte cet arc.

Écris la mesure en radians, avec pi.

Réponse attendue : `3*pi/4` — aussi acceptées : 3pi/4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La mesure en radians est un rapport : la longueur de l'arc divisée par le rayon.

CORRECTION

Le rapport — On divise la longueur de l'arc par le rayon.

$$\frac{L}{r} = \frac{3\pi}{4}$$

L'angle mesure $\frac{3\pi}{4}$ radians, c'est-à-dire 135 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12*pi` → On ne multiplie pas la longueur de l'arc par le rayon : on la divise par le rayon.

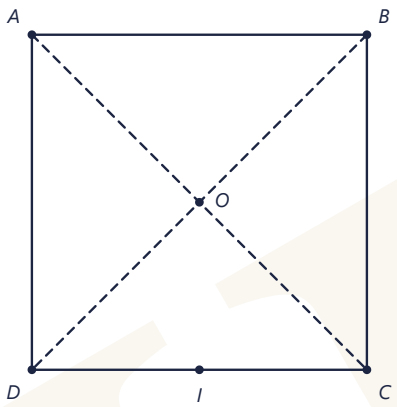
`4/(3*pi)` → Le rapport est à l'envers : c'est la longueur de l'arc sur le rayon.

EXERCICE 6 · BASE

Un quart de tour dans le carré

Dans la figure, $ABCD$ est un carré de centre O. Quelle est l'image du point B par le quart de tour direct de centre O ?

Maths à la carte ABDELKADER HAMM



ABCD est un carré de centre O.

Un carré ABCD de centre O : A est en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite et D en bas à gauche. Le point I est le milieu du côté [DC]. Les deux diagonales, en pointillés, se coupent en O.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · c'est A · c'est le point A · = A · l'image est A · l'image est le point A · l'image de B est A · l'image de B est le point A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales d'un carré ont la même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires : $OB = OA = OC$, et les angles en O sont droits.
2. Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre : en partant de B, tourne-t-on vers A ou vers C ?

CORRECTION

Deux candidats — $OA = OB = OC$, et l'angle $\widehat{BOA}$ et l'angle $\widehat{BOC}$ sont droits : l'image de B est A ou C.

Le sens — Sur la figure, on va de B vers A en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre : c'est le sens direct.

$B \longmapsto A$

L'image de B par le quart de tour direct de centre O est le point A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / point C / c'est C` → De B vers C, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre : c'est le quart de tour indirect.

`D / le point D / point D / c'est D` → D est le symétrique de B par rapport à O : c'est un demi-tour, pas un quart de tour.

EXERCICE 7 · BASE

Quel triangle ?

Soient O et M deux points distincts, et N l'image de M par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Quelle est la nature du triangle OMN ?

Réponds par un mot : isocèle, rectangle, équilatéral…

Réponse attendue : `equilateral` — aussi acceptées : équilatéral · triangle equilateral · triangle équilatéral · un triangle equilateral · un triangle équilatéral · il est equilateral · c'est un triangle equilateral · OMN est équilatéral · OMN est equilateral · le triangle OMN est équilatéral · le triangle OMN est equilateral · OMN équilatéral · le triangle est équilatéral · OMN est un triangle équilatéral · c'est un triangle équilatéral · triangle OMN équilatéral

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que dit la définition sur les longueurs OM et ON, et sur l'angle $\widehat{MON}$?
2. Un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure 60 degrés a ses trois angles égaux.

CORRECTION

La définition — N est l'image de M : $ON = OM$ et l'angle $\widehat{MON}$ mesure $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire 60 degrés.

Les angles — Le triangle est isocèle en O : les deux autres angles sont égaux, et leur somme vaut 120 degrés. Chacun mesure 60 degrés.

OMN est équilatéral

Le triangle OMN est équilatéral : c'est ce qui permet de construire une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ au compas seul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`isocele / isocèle / triangle isocele / un triangle isocele / OMN est isocèle / le triangle OMN est isocèle / OMN est un triangle isocèle / isocèle en O / OMN est isocèle en O` → Il est isocèle, c'est vrai, mais on peut dire mieux : son angle en O mesure 60 degrés.

`rectangle / triangle rectangle / un triangle rectangle / rectangle isocele / OMN est rectangle / le triangle OMN est rectangle / OMN est un triangle rectangle / rectangle isocèle / rectangle en O` → Il serait rectangle si l'angle de la rotation était $\frac{\pi}{2}$. Ici l'angle mesure $\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 8 · BASE

Un angle, combien de points ?

Soit O un point, M un point distinct de O, et (C) le cercle de centre O passant par M. Combien y a-t-il de points N du cercle (C) tels que l'angle $\widehat{MON}$ mesure $\frac{\pi}{3}$?

Donne le nombre de points.

Réponse attendue : 2 — aussi acceptées : deux · 2 points · deux points · il y en a 2 · il y en a deux · il y a 2 points · il y a deux points · 2 points N · deux points N

INDICES, DANS L'ORDRE

1. À partir de M, on peut tourner autour de O dans un sens, ou dans l'autre.

CORRECTION

Deux sens — En tournant de $\frac{\pi}{3}$ dans le sens direct, on obtient un premier point ; dans le sens indirect, un second, de l'autre côté de la droite (OM).

2 points

Il y a deux points : l'un est l'image de M par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, l'autre par la rotation indirecte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / un seul / 1 point / un point / un seul point / il y en a un / il y en a 1` → Il y en a un de chaque côté de la droite (OM) : un angle géométrique ne dit pas dans quel sens tourner.

EXERCICE 9 · BASE

Une rotation qui est une symétrie

La rotation de centre O et d'angle π transforme le point A en B. On donne $OA = 3{,}5$. Calculer la distance AB.

Donne la distance AB.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La rotation de centre O et d'angle π est une application que tu connais depuis longtemps.
2. C'est la symétrie centrale de centre O : O est le milieu du segment $[AB]$.

CORRECTION

Reconnaître — La rotation de centre O et d'angle π est la symétrie centrale de centre O : O est le milieu du segment $[AB]$.

Calculer — La distance AB est le double de la distance OA.

$AB = 2 \times 3{,}5 = 7$

$AB = 7$: les points A, O et B sont alignés.

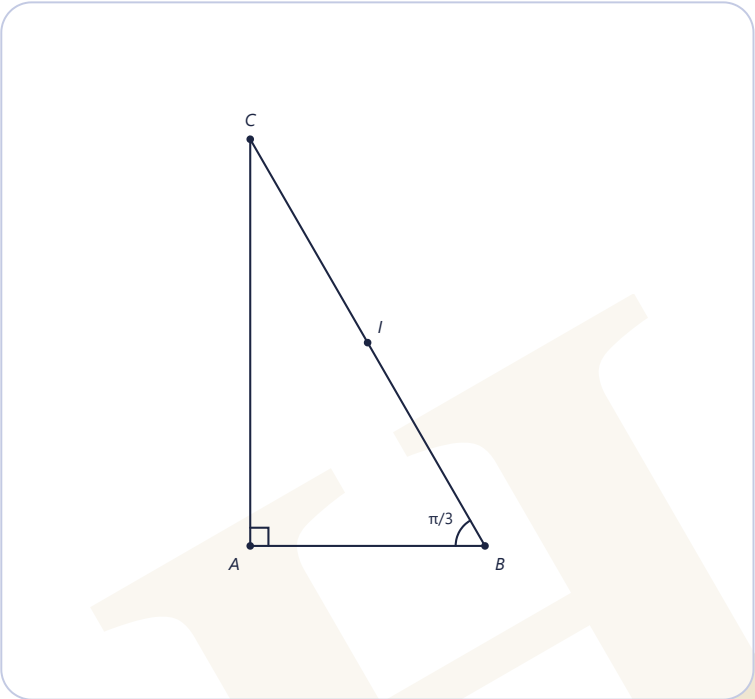
PIÈGES ANTICIPÉS

`3.5` → $3{,}5$ est la distance OB. Les points A, O et B sont alignés, avec O au milieu : la distance AB est le double.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

L'image d'un sommet

Dans la figure, ABC est un triangle rectangle en A, l'angle $\widehat{CBA}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ et I est le milieu du côté $[BC]$. Quelle est l'image du point A par la rotation indirecte de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$?



L'angle en B mesure π/3, et I est le milieu de [BC].

Un triangle ABC rectangle en A : A est en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut, au-dessus de A. L'angle en B mesure pi sur trois. Le point I est le milieu de l'hypoténuse [BC].

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `I` — aussi acceptées : le point I · point I · c'est I · c'est le point I · = I · l'image est I · l'image est le point I · l'image de A est I · l'image de A est le point I

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de A est sur la demi-droite $[BC)$, à la distance BA de B.
2. Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets : que peut-on dire du triangle ABI ?

CORRECTION

Le triangle ABI — I est le milieu de l'hypoténuse : $IA = IB$. Le triangle ABI est isocèle en I et son angle en B mesure 60 degrés : il est équilatéral.

$$BI = BA$$

La rotation — $BI = BA$ et l'angle $\widehat{ABI}$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$; sur la figure, on va de A vers I en tournant autour de B dans le sens indirect.

$$A \longmapsto I$$

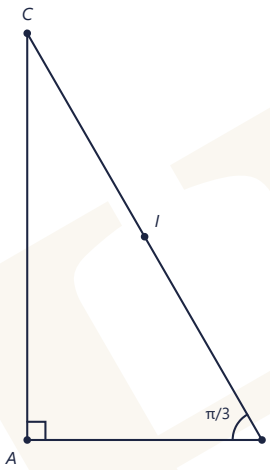
L'image de A est le point I.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / point C / c'est C` → C est bien dans la bonne direction, mais BC est le double de BA : une rotation de centre B conserve la distance à B.

EXERCICE 11 · PRATIQUE Autour du milieu

Dans la figure, ABC est un triangle rectangle en A, l'angle $\widehat{CBA}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ et I est le milieu du côté $[BC]$. Quelle est l'image du point C par la rotation directe de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$?



L'angle en B mesure π/3, et I est le milieu de [BC].

Un triangle ABC rectangle en A : A est en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut, au-dessus de A. L'angle en B mesure pi sur trois. Le point I est le milieu de l'hypoténuse [BC].

Écris le nom du point.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · c'est A · c'est le point A · = A · l'image est A · l'image est le point A · l'image de C est A · l'image de C est le point A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quels points de la figure sont à la même distance de I que le point C ?
2. Le triangle ABI est équilatéral : l'angle $\widehat{AIB}$ mesure 60 degrés. Combien mesure alors l'angle $\widehat{CIA}$?

CORRECTION

Les distances — I est le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

$$IC = IA = IB$$

L'angle — Le triangle ABI est équilatéral, donc l'angle $\widehat{AIB}$ mesure 60 degrés. Les points C, I et B sont alignés : l'angle $\widehat{CIA}$ mesure 120 degrés, c'est-à-dire $\frac{2\pi}{3}$.

$$\widehat{CIA} = 180° - 60° = 120°$$

Le sens — Sur la figure, on va de C vers A en tournant autour de I dans le sens direct.

$$C \longmapsto A$$

L'image de C est le point A.

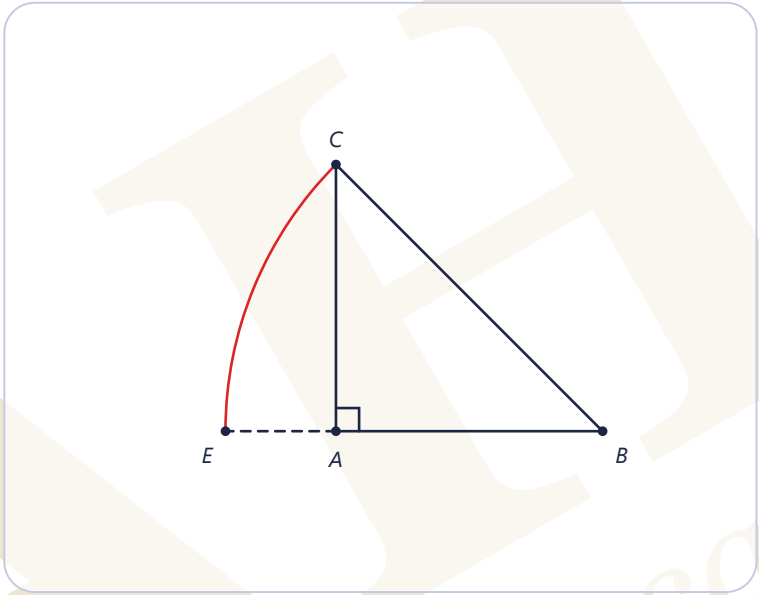
PIÈGES ANTICIPÉS

`B / le point B / point B / c'est B` → B est le symétrique de C par rapport à I : c'est l'image de C par la rotation d'angle π, pas $\dfrac{2\pi}{3}$.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Rabattre l'hypoténuse

Dans la figure, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A, avec $AB = 3$. Le point E est l'image de C par la rotation directe de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Calculer la distance BE.



E est sur la demi-droite [BA].

Un triangle ABC rectangle et isocèle en A : A est en bas, au milieu, B en bas à droite et C au-dessus de A. Le point E est sur la droite (AB), à gauche de A. Un arc rouge, de centre B, va de C à E.

Donne la distance BE, en valeur exacte.

Réponse attendue : `3*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(18) · 3√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. E est l'image de C par une rotation de centre B : quelle distance est conservée ?
2. $BE = BC$, et BC est l'hypoténuse du triangle ABC.

CORRECTION

La rotation — Une rotation de centre B conserve la distance à B.

$BE = BC$

Pythagore — Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = AC = 3$.

$BC = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

$BE = 3\sqrt{2}$. Comme l'angle $\widehat{CBA}$ mesure $\dfrac{\pi}{4}$, le point E est sur la demi-droite $[BA)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est la distance BA. Le point E est l'image de C : c'est la distance BC qui est conservée.

`6` → BC n'est pas la somme des deux côtés : c'est l'hypoténuse, on la calcule avec le théorème de Pythagore.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

L'angle de la rotation

Soit ABC un triangle équilatéral. Il existe une rotation de centre A qui transforme B en C. Quelle est, en radians, la mesure de son angle ?

Écris l'angle en radians, avec pi.

Réponse attendue : `pi/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'angle de la rotation de centre A qui transforme B en C est l'angle $\widehat{BAC}$.
2. Dans un triangle équilatéral, chaque angle mesure 60 degrés.

CORRECTION

L'angle — $AB = AC$, donc la rotation existe ; son angle est l'angle $\widehat{BAC}$, qui mesure 60 degrés.

$\widehat{BAC} = 60°$

Convertir — On multiplie par $\frac{\pi}{180}$.

$60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

L'angle de la rotation est $\frac{\pi}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → 60 est la mesure en degrés : la consigne demande des radians.

`2*pi/3` → $\frac{2\pi}{3}$ est l'angle de la rotation qui a pour centre le centre du triangle. Ici le centre est le sommet A.

`pi/6` → $\frac{\pi}{6}$ correspond à 30 degrés. L'angle $\widehat{BAC}$ d'un triangle équilatéral mesure 60 degrés.

EXERCICE 14 · RAISONNEMENT

Deux pas en arrière

Par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, le point A a pour image B, et le point B a pour image C. Quelle est l'image du point C par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · c'est A · c'est le point A · = A · l'image est A · l'image est le point A · l'image de C est A · l'image de C est le point A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O. Combien mesure l'angle $\widehat{AOC}$?
2. De A à C, on a tourné deux fois de $\frac{\pi}{4}$ dans le sens direct. Pour revenir, on tourne dans l'autre sens.

CORRECTION

De A à C — $OA = OB = OC$. On passe de A à B, puis de B à C, en tournant deux fois de $\frac{\pi}{4}$ dans le sens direct.

$\widehat{AOC} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Le retour — Pour revenir de C à A, on tourne du même angle dans le sens indirect.

$C \longmapsto A$

L'image de C par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point A.

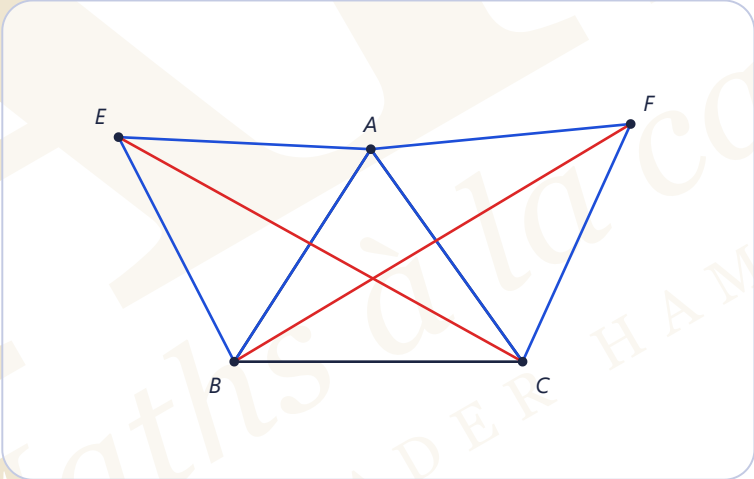
PIÈGES ANTICIPÉS

`B / le point B / point B / c'est B` → B est l'image de C par la rotation indirecte d'angle $\frac{\pi}{4}$. Un angle de $\frac{\pi}{2}$, c'est deux fois $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Deux triangles équilatéraux

Dans la figure, ABC est un triangle, et ABE et ACF sont deux triangles équilatéraux construits à l'extérieur. On donne $EC = 7$. Calculer la distance BF.



ABE et ACF sont équilatéraux.

Un triangle ABC, avec A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. À gauche, sur le côté [AB] et à l'extérieur du triangle, le triangle équilatéral ABE. À droite, sur le côté [AC] et à l'extérieur, le triangle équilatéral ACF. Les segments [EC] et [BF], en rouge, se croisent à l'intérieur de la figure.

Donne la distance BF.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche une rotation de centre A qui transforme E en B.
2. La rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme E en B et C en F.

CORRECTION

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

La rotation — Les triangles ABE et ACF sont équilatéraux : la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme E en B et C en F.

Les distances — Le segment $[EC]$ a pour image le segment $[BF]$, et une rotation conserve les distances.

$BF = EC = 7$

$BF = 7$, quel que soit le triangle ABC.

PIÈGES ANTICIPÉS

14 → Une rotation ne multiplie pas les longueurs : elle les conserve.

3.5 → Une rotation ne divise pas les longueurs : elle les conserve.

EXERCICE 16 · BASE

Un angle conservé

Dans un triangle ABC, l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 72 degrés. On note E, F et G les images de A, B et C par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Combien mesure, en degrés, l'angle $\widehat{EFG}$?

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : 72

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que fait une rotation aux angles ?

CORRECTION

La propriété — Une rotation conserve les angles : l'angle image a la même mesure, quel que soit l'angle de la rotation.

$\widehat{EFG} = \widehat{ABC} = 72°$

L'angle mesure 72 degrés : le triangle EFG est superposable au triangle ABC.

PIÈGES ANTICIPÉS

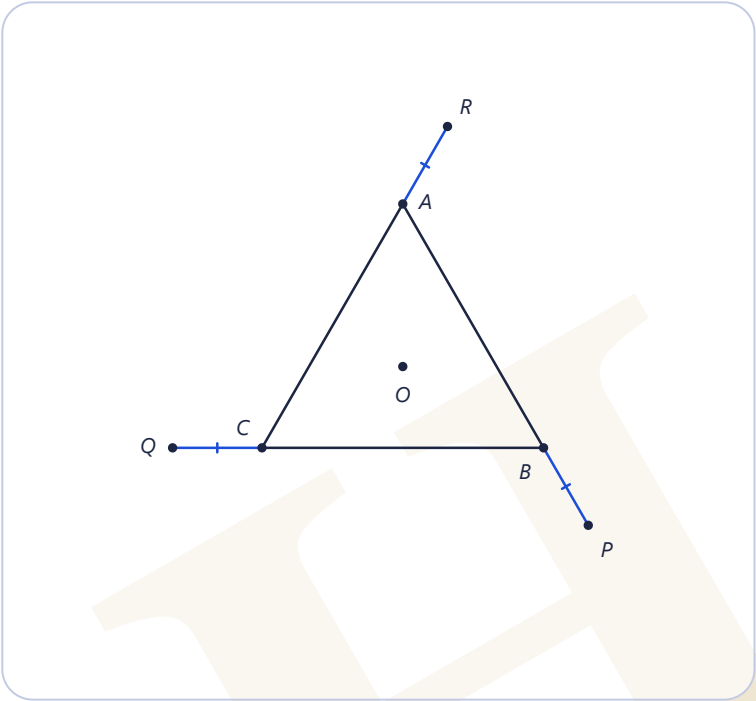
132 → On n'ajoute pas l'angle de la rotation : chaque angle de la figure garde sa mesure.

12 → On ne retranche pas l'angle de la rotation : chaque angle de la figure garde sa mesure.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Trois points autour du triangle

Dans la figure, ABC est un triangle équilatéral de centre O, et les points P, Q et R sont sur les demi-droites $[AB)$, $[BC)$ et $[CA)$, au-delà de B, de C et de A, avec $BP = CQ = AR$. Soit f la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Quelle est l'image du point Q par f ?



BP = CQ = AR.

Un triangle équilatéral ABC de centre O : A est en haut, B en bas à droite, C en bas à gauche. Le point P est sur la demi-droite [AB), au-delà de B ; le point Q est sur la demi-droite [BC), au-delà de C ; le point R est sur la demi-droite [CA), au-delà de A. Les segments [BP], [CQ] et [AR] portent la même marque : ils ont la même longueur.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : P — aussi acceptées : le point P · point P · c'est P · c'est le point P · = P · l'image est P · l'image est le point P · l'image de Q est P · l'image de Q est le point P · f(Q) = P · f(Q)=P

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche d'abord les images des sommets : sur la figure, f transforme B en A et C en B.
2. Q est sur la demi-droite $[BC)$, au-delà de C : son image est sur la demi-droite $[AB)$, au-delà de B.

CORRECTION

Les sommets — Sur la figure, la rotation f transforme B en A et C en B : la demi-droite $[BC)$ a pour image la demi-droite $[AB)$.

Le point — Q est au-delà de C, à la distance CQ : son image est au-delà de B, à la même distance. C'est le point P, car $BP = CQ$.

$f(Q) = P$

L'image de Q est le point P.

PIÈGES ANTICIPÉS

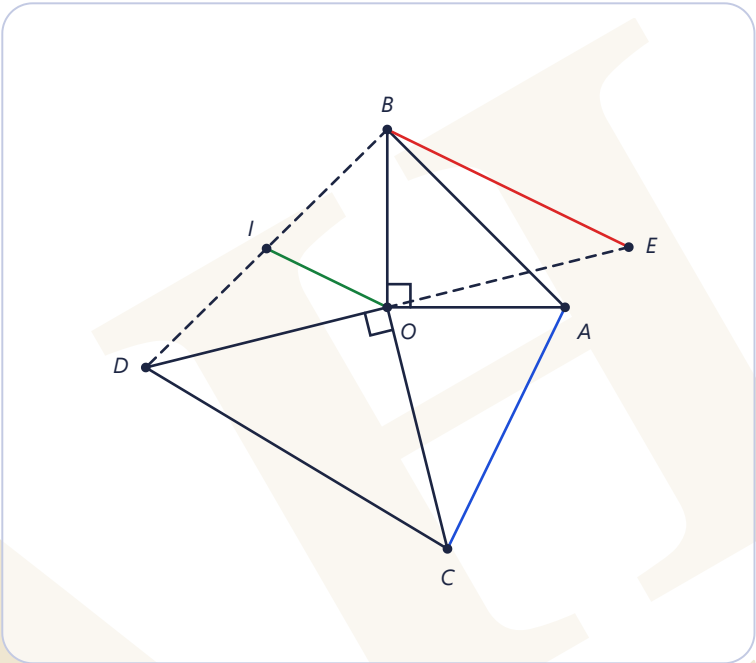
`R / le point R / point R / c'est R` → R est l'image de P, pas celle de Q : en partant de Q dans le sens direct, on arrive sur P.

`B / le point B / point B / c'est B` → B est l'image de C. Le point Q est plus loin que C sur la demi-droite : son image est plus loin que B.

EXERCICE 18 · RAISONNEMENT

La droite des milieux

Dans la figure, OAB et OCD sont deux triangles isocèles et rectangles en O, et I est le milieu de $[BD]$. On note r le quart de tour direct de centre O, et E l'image de C par r. On donne $AC = 8$. Calculer la distance OI.



OA = OB et OC = OD, avec deux angles droits en O.

Deux triangles isocèles et rectangles en O. Le triangle OAB : A est à droite de O et B au-dessus de O. Le triangle OCD : D est à gauche de O, un peu plus bas, et C est au-dessous de O, un peu à droite. Le point E, image de C par le quart de tour direct de centre O, est à droite de O, à l'opposé de D. Le point I est le milieu du segment [BD]. Le segment [AC] est bleu, le segment [BE] est rouge et le segment [OI] est vert.

Donne la distance OI.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur la figure, r transforme A en B : quelle est l'image du segment $[AC]$?
2. $BE = AC$. Le point O est le milieu de $[DE]$: regarde alors le triangle DBE.

CORRECTION

Une distance conservée — Le quart de tour r transforme A en B et C en E : le segment $[AC]$ a pour image le segment $[BE]$.

$$BE = AC = 8$$

Un symétrique — r transforme D en C, puis C en E : après deux quarts de tour, E est le symétrique de D par rapport à O.

La droite des milieux — Dans le triangle DBE, I est le milieu de $[DB]$ et O est le milieu de $[DE]$.

$$OI = \frac{BE}{2} = 4$$

$OI = 4$. De plus, la droite (OI) est parallèle à la droite (BE), donc perpendiculaire à la droite (AC).

PIÈGES ANTICIPÉS

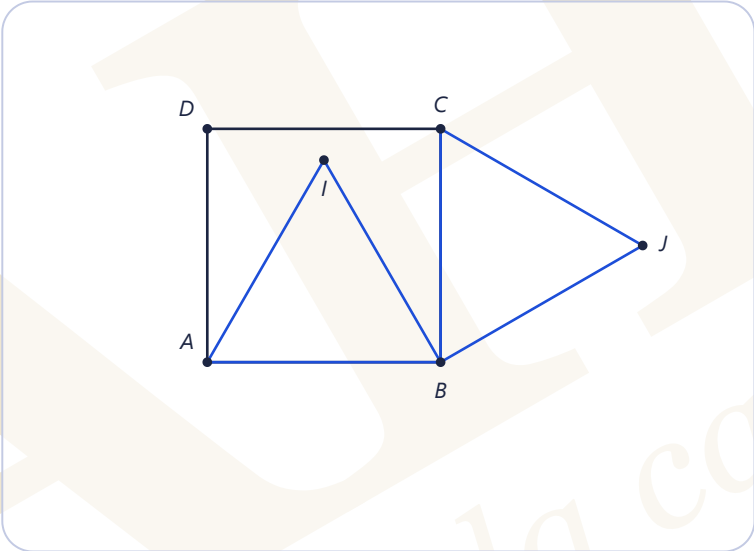
8 → 8 est la distance BE. Le segment $[OI]$ joint les milieux de deux côtés du triangle DBE : il mesure la moitié du troisième.

16 → Le segment qui joint deux milieux mesure la moitié du troisième côté, pas le double.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Dans le carré

Dans la figure, $ABCD$ est un carré, et ABI et BCJ sont deux triangles équilatéraux : I est à l'intérieur du carré et J à l'extérieur. Quelle est l'image du point A par la rotation indirecte de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$?



ABI et BCJ sont équilatéraux.

Un carré ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. Le triangle équilatéral ABI a son sommet I à l'intérieur du carré, près du côté du haut. Le triangle équilatéral BCJ a son sommet J à l'extérieur du carré, à droite.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `I` — aussi acceptées : le point I · point I · c'est I · c'est le point I · = I · l'image est I · l'image est le point I · l'image de A est I · l'image de A est le point I

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de A est à la distance BA de B : les points I, C et J conviennent tous les trois.
2. Lequel de ces points forme avec B et A un angle de 60 degrés ?

CORRECTION

Le triangle ABI — Le triangle ABI est équilatéral : $BI = BA$ et l'angle $\widehat{ABI}$ mesure $\frac{\pi}{3}$.

Le sens — Sur la figure, on va de A vers I en tournant autour de B dans le sens indirect.

$A \longmapsto I$

L'image de A est le point I. La même rotation transforme C en J.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / point C / c'est C` → $BC = BA$, mais l'angle $\widehat{ABC}$ est droit : C est l'image de A par un quart de tour, pas par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

`J / le point J / point J / c'est J` → J est l'image de C par cette rotation. Pour A, regarde le triangle équilatéral ABI.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

Le centre de gravité suit

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G son centre de gravité. On donne $AI = 9$. Une rotation transforme A en E et G en K. Calculer la distance EK.

Donne la distance EK.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le segment $[AG]$ a pour image le segment $[EK]$: il suffit de connaître AG.
2. Le centre de gravité est situé aux deux tiers de la médiane à partir du sommet.

CORRECTION

Le centre de gravité — G est aux deux tiers de la médiane $[AI]$ à partir de A.

$$AG = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

La rotation — Le segment $[AG]$ a pour image le segment $[EK]$, et une rotation conserve les distances.

$$EK = AG = 6$$

$EK = 6$. Le point K est d'ailleurs le centre de gravité du triangle image.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est la distance GI, le tiers de la médiane. La distance AG en est les deux tiers.

`9` → 9 est la longueur de toute la médiane. G n'est pas en I : il est aux deux tiers à partir de A.

`4.5` → Le centre de gravité n'est pas au milieu de la médiane : il est aux deux tiers à partir du sommet.

EXERCICE 21 · RAISONNEMENT

Un triangle isocèle de 120 degrés

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Un point M, distinct de O, a pour image P. On donne $OM = 5$. Calculer la distance MP.

Donne la distance MP, en valeur exacte.

Réponse attendue : `5*sqrt(3)` — aussi acceptées : sqrt(75) · 5√3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle OMP est isocèle en O, et son angle en O mesure 120 degrés. Trace la hauteur issue de O.
2. Si I est le milieu de $[MP]$, le triangle OIM est rectangle en I et l'angle $\widehat{MOI}$ mesure 60 degrés.

CORRECTION

Le triangle OMP — $OP = OM = 5$ et l'angle $\widehat{MOP}$ mesure 120 degrés. Soit I le milieu de $[MP]$: la médiane (OI) est aussi hauteur et bissectrice.

Le triangle OIM — Il est rectangle en I, et l'angle $\widehat{MOI}$ mesure 60 degrés.

$$IM = 5 \times \sin 60° = \frac{5 \times \sqrt{3}}{2}$$

Conclure — MP est le double de IM.

$$MP = 5\sqrt{3}$$

$MP = 5\sqrt{3}$, soit environ $8{,}66$. Par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, la distance d'un point à son image est toujours la distance au centre multipliée par $\sqrt{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → Le triangle OMP est isocèle, mais pas équilatéral : son angle en O mesure 120 degrés, pas 60.

`10` → 10 serait la distance si M, O et P étaient alignés, avec un angle de π. Ici l'angle est $\frac{2\pi}{3}$.

`5*sqrt(3)/2` → C'est la distance IM, la moitié de MP : il reste à la doubler.

EXERCICE 22 · DEFI

La plus petite distance

Soient O et A deux points tels que $OA = 4$, et r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On note B l'image de A par r et C l'image de B par r. Un point M varie sur le segment $[AB]$, et P est le point du segment $[BC]$ tel que $BP = AM$. Quelle est la plus petite valeur possible de la distance MP ?

Donne cette distance, en valeur exacte.

Réponse attendue : `2*sqrt(3)` — aussi acceptées : sqrt(12) · 2√3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. P est l'image de M par r : la distance MP est égale à OM multipliée par $\sqrt{3}$.
2. MP est minimale quand OM est minimale : quelle est la distance du point O à la droite (AB) ?
3. Le triangle OAB est isocèle en O, avec un angle de 120 degrés : la hauteur issue de O fait avec $[OA]$ un angle de 60 degrés.

CORRECTION

La rotation — L'image du segment $[AB]$ est le segment $[BC]$, et $BP = AM$: P est l'image de M. Le triangle OMP est isocèle en O, avec un angle de 120 degrés.

$$MP = OM \times \sqrt{3}$$

La plus petite distance OM — OM est minimale quand M est le pied H de la hauteur issue de O dans le triangle OAB. Ce triangle est isocèle en O : l'angle $\widehat{AOH}$ mesure 60 degrés.

$$OH = 4 \times \cos 60° = 2$$

Conclure — On multiplie par $\sqrt{3}$.

$$MP = 2\sqrt{3}$$

La plus petite valeur de MP est $2\sqrt{3}$, atteinte quand M est le milieu du segment $[AB]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(3)` → C'est la valeur de MP quand M est en A : c'est alors la plus grande, pas la plus petite.

`2` → 2 est la plus petite valeur de OM. La distance MP est OM multipliée par $\sqrt{3}$.

EXERCICE 23 · BASE

Le rayon du cercle image

Un cercle (C) a pour centre I et pour rayon 3. Une rotation de centre O transforme I en J, et l'on sait que $OI = 5$. Quel est le rayon s du cercle image de (C) ?

Donne le rayon s.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que devient le rayon d'un cercle par une rotation ?

CORRECTION

Le théorème — L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre.

$s = 3$

Le cercle image a pour centre J et pour rayon 3. La distance OI ne joue aucun rôle dans le rayon.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 est la distance du centre de la rotation au centre du cercle. Le rayon, lui, ne change pas.

`8` → On n'ajoute pas la distance OI au rayon : une rotation conserve le rayon.

EXERCICE 24 · BASE

Deux cercles de rayons différents

Un cercle a pour rayon 2, un autre a pour rayon 3. Combien y a-t-il de rotations qui transforment le premier cercle en le second ?

Réponds par un nombre, ou par « aucune ».

Réponse attendue : `0` — aussi acceptées : aucune · aucune rotation · zéro · zero · il n'y en a pas · zéro rotation · 0 rotation · aucun · 0 rotations · zéro rotations · zero rotations · pas de rotation · il n'y a pas de rotation · il n'y en a aucune · il n y en a aucune · il n'y en a aucun · aucune rotation possible · aucune rotation ne convient · impossible · c'est impossible · ce n'est pas possible · il n'y a aucune rotation

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare le rayon d'un cercle et le rayon de son image par une rotation.

CORRECTION

Le rayon — L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon. Les rayons 2 et 3 sont différents.

aucune rotation

Aucune rotation ne transforme un cercle en un cercle de rayon différent. Il faudrait une homothétie.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / une / une seule / une rotation / 1 rotation / une seule rotation / il y en a une / un / une rotation unique` → Une rotation conserve les distances, donc le rayon : elle ne peut pas changer un rayon 2 en un rayon 3.

`une infinité / une infinite / infini / beaucoup / une infinité de rotations / infinité / plusieurs` → Il y en aurait une infinité si les deux cercles avaient le même rayon. Ici les rayons sont différents.

EXERCICE 25 · RAISONNEMENT

Le centre du lieu

Soit IJK un triangle isocèle et rectangle en I. Le point I est fixe, et le point J décrit un cercle de centre A et de rayon 3, avec $IA = 7$. Le point K décrit alors un cercle de centre B. Calculer la distance IB.

Donne la distance IB.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. K est l'image de J par un quart de tour de centre I.
2. Le centre B du cercle décrit par K est l'image du centre A par ce quart de tour.

CORRECTION

La rotation — $IK = IJ$ et l'angle $\widehat{JIK}$ est droit : K est l'image de J par un quart de tour de centre I.

Le cercle image — K décrit l'image du cercle : son centre B est l'image de A. Une rotation de centre I conserve la distance à I.

$IB = IA = 7$

$IB = 7$: le triangle IAB est lui aussi isocèle et rectangle en I, et le cercle décrit par K a pour rayon 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est le rayon des deux cercles. La distance IB est égale à IA.

`10` → On n'ajoute pas le rayon : B est l'image de A par une rotation de centre I, donc $IB = IA$.

`4` → On ne retranche pas le rayon : B est l'image de A par une rotation de centre I, donc $IB = IA$.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

Le lieu d'un sommet du carré

Soit ABC un triangle tel que $BC = 6$. Un point M varie sur le côté $[BC]$, et $AMNP$ est un carré, construit de sorte que l'on tourne dans le sens direct pour aller de M à P autour de A. Quand M parcourt le segment $[BC]$, le point P parcourt un segment $[EF]$. Calculer la longueur EF.

Donne la longueur EF.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le carré $AMNP$, les côtés $[AM]$ et $[AP]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires : par quelle application passe-t-on de M à P ?
2. P est l'image de M par le quart de tour direct de centre A : il parcourt l'image du segment $[BC]$.

CORRECTION

La rotation — $AP = AM$ et l'angle $\widehat{MAP}$ est droit : P est l'image de M par le quart de tour direct de centre A.

Le lieu — Quand M parcourt le segment $[BC]$, son image P parcourt l'image de ce segment : le segment $[EF]$, qui a la même longueur.

$$EF = BC = 6$$

$EF = 6$: le point P parcourt un segment de même longueur que $[BC]$, et perpendiculaire à la droite (BC).

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(2)` → $\sqrt{2}$ apparaît avec la diagonale du carré, donc avec le point N. Le point P, lui, est l'image de M par un quart de tour, qui conserve les longueurs.

`3` → Une rotation ne divise pas les longueurs : l'image d'un segment est un segment de même longueur.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

La tangente tourne avec le cercle

Une droite T est tangente en A à un cercle de centre I et de rayon 4. Une rotation transforme le point I en J et la droite T en une droite D. Quelle est la distance du point J à la droite D ?

Donne cette distance.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une rotation conserve le contact : que peut-on dire de la droite D et du cercle image ?
2. La distance du centre d'un cercle à une tangente est égale au rayon.

CORRECTION

Le cercle image — L'image du cercle est le cercle de centre J et de même rayon 4.

Le contact — Une rotation conserve le contact : la droite D est tangente au cercle image. La distance de son centre J à la tangente est égale au rayon.

$$\text{distance} = \text{rayon} = 4$$

La distance de J à la droite D est 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

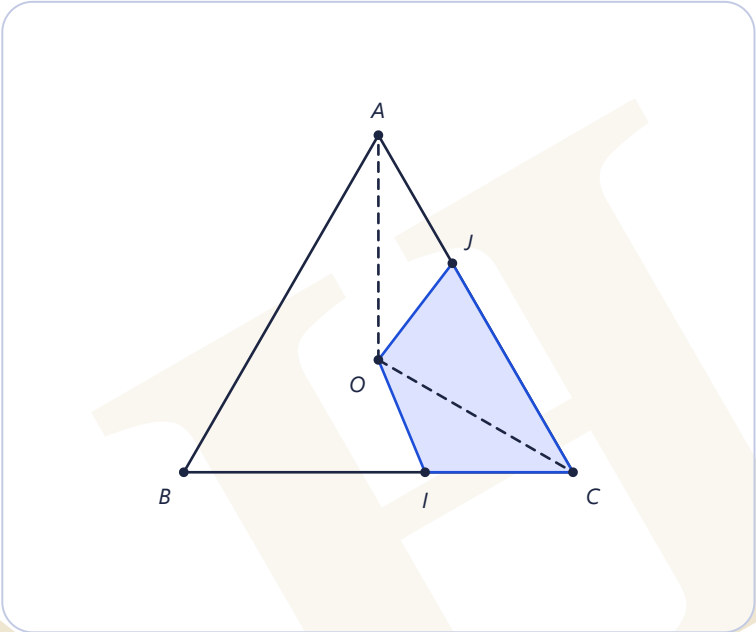
`0` → J n'est pas sur la droite D : c'est le centre du cercle image, et D touche ce cercle sans passer par son centre.

`8` → 8 est le diamètre. La distance du centre à une tangente est le rayon.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

Un tiers du triangle

Dans la figure, ABC est un triangle équilatéral de centre O. Le point I est sur le segment $[BC]$ et le point J sur le segment $[AC]$, de sorte que l'angle $\widehat{IOJ}$ mesure $\frac{2\pi}{3}$. L'aire du triangle ABC vaut 27. Calculer l'aire du quadrilatère $OICJ$.



L'angle IOJ mesure 2π/3.

Un triangle équilatéral ABC de centre O : A est en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. Le point I est sur le côté [BC], plus près de C ; le point J est sur le côté [CA], plus près de A. Le quadrilatère OICJ, autour du sommet C, est grisé. Les segments [OC] et [OA] sont tracés en pointillés.

Donne l'aire du quadrilatère.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme I en J et C en A : compare les triangles OIC et OJA.
2. En remplaçant le triangle OIC par le triangle OJA, le quadrilatère devient le triangle OCA.

CORRECTION

Deux triangles superposables — La rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme le triangle OIC en le triangle OJA : ils ont la même aire.

Recomposer — Le quadrilatère $OICJ$ a donc la même aire que le triangle OCA, qui est le tiers du triangle ABC.

$$\frac{27}{3} = 9$$

L'aire du quadrilatère $OICJ$ vaut 9, où que soit le point I sur le côté $[BC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13.5` → Le quadrilatère ne vaut pas la moitié du triangle : il a la même aire que le triangle OCA, qui en est le tiers.

`4.5` → Le triangle OCA est le tiers du triangle ABC, pas le sixième.

`27` → 27 est l'aire du triangle entier. Le quadrilatère n'en couvre que le tiers.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

Un triangle caché dans le carré

Soit $ABCD$ un carré tel que D soit l'image de B par le quart de tour direct de centre A, et M un point de la droite (BC). La perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe la droite (CD) en N. On donne $AM = 6$. Calculer l'aire du triangle AMN.

Donne l'aire du triangle AMN.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note r le quart de tour direct de centre A. Quelle est l'image de la droite (AM) ? Et celle de la droite (BC) ?
2. L'image de (AM) est la droite (AN), et l'image de (BC) est la droite (CD) : l'image de M est donc N.

CORRECTION

Deux droites images — Soit r le quart de tour direct de centre A. L'image de la droite (AM) passe par A et lui est perpendiculaire : c'est la droite (AN). L'image de la droite (BC) passe par D, image de B, et lui est perpendiculaire : c'est la droite (CD).

L'image de M — M est le point d'intersection des droites (AM) et (BC) : son image est le point d'intersection des droites (AN) et (CD), c'est-à-dire N.

$$AN = AM = 6$$

L'aire — Le triangle AMN est rectangle et isocèle en A.

$$\frac{6 \times 6}{2} = 18$$

L'aire du triangle AMN vaut 18.

PIÈGES ANTICIPÉS

`36` → 36 est l'aire d'un carré de côté 6. Un triangle rectangle et isocèle en est la moitié.

`6*sqrt(2)` → C'est la longueur de l'hypoténuse $[MN]$. On demande l'aire du triangle.

EXERCICE 30 · BASE

Les axes du carré

Combien un carré a-t-il d'axes de symétrie ?

Donne le nombre d'axes.

Réponse attendue : 4 — aussi acceptées : quatre · 4 axes · quatre axes · 4 axes de symétrie · quatre axes de symétrie · il y en a 4 · il y en a quatre · il a 4 axes · il a quatre axes · il a 4 axes de symétrie · il a quatre axes de symétrie

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pense aux médiatrices des côtés, puis aux diagonales.

CORRECTION

Les médiatrices — Les médiatrices de deux côtés consécutifs sont deux axes de symétrie : chacune échange les sommets deux à deux.

Les diagonales — Chaque diagonale est aussi un axe : elle laisse deux sommets à leur place et échange les deux autres.

$2 + 2 = 4$

Un carré a 4 axes de symétrie, et un centre de symétrie : son centre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2 / deux / 2 axes / deux axes / 2 axes de symétrie / deux axes de symétrie` → Il y en a deux de plus : les diagonales d'un carré sont aussi des axes de symétrie.

`8 / huit / 8 axes / huit axes / 8 axes de symétrie` → Chaque axe passe par deux sommets opposés ou par deux milieux de côtés opposés : il n'y en a que quatre.

EXERCICE 31 · PRATIQUE Le triangle qui tourne sur lui-même

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. Une rotation directe de centre O, autre que l'identité, laisse ce triangle globalement invariant. Quelle est, en radians, la mesure de son angle ?

Écris l'angle en radians, avec pi.

Réponse attendue : `2*pi/3` — aussi acceptées : 2pi/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La rotation doit transformer chaque sommet en un autre sommet.
2. Vus du centre O, les trois sommets partagent le tour complet en trois angles égaux.

CORRECTION

Les angles au centre — Les trois angles au centre sont égaux et leur somme vaut 360 degrés.

$$\frac{360}{3} = 120$$

Convertir — 120 degrés font les deux tiers de 180 degrés.

$$120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

La rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme chaque sommet en le suivant : elle laisse le triangle globalement invariant.

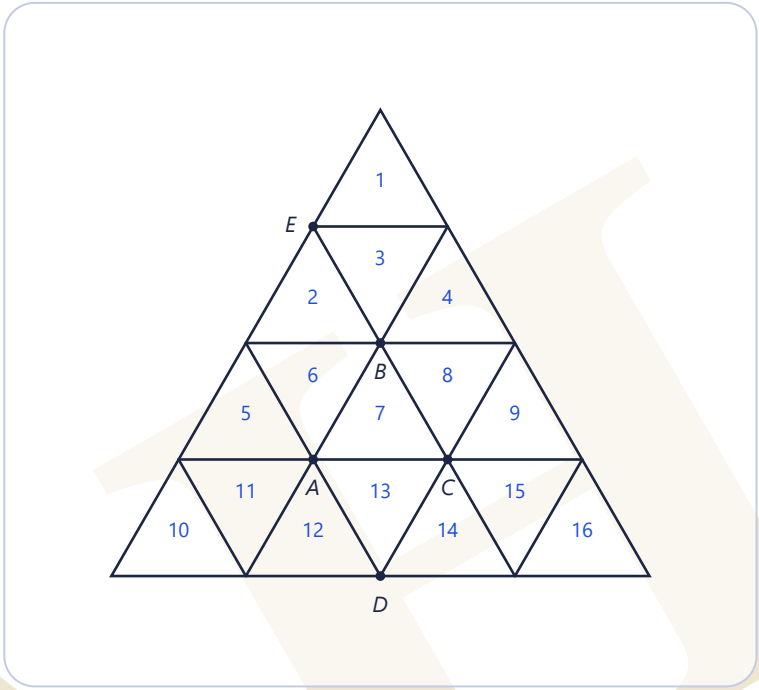
PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/3` → $\frac{\pi}{3}$ est l'angle du triangle en chacun de ses sommets. Vu du centre O, l'angle entre deux sommets est le double.

`120` → 120 est la mesure en degrés : la consigne demande des radians.

EXERCICE 32 · PRATIQUE Tourner un triangle du pavage

La figure représente un pavage d'un triangle équilatéral par 16 triangles équilatéraux numérotés. Quel est le numéro du triangle image du triangle 2 par la rotation directe de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$?



Seize triangles équilatéraux de même taille.

Un grand triangle équilatéral découpé en 16 petits triangles équilatéraux, numérotés de 1 à 16, sur quatre rangées. En haut, le triangle 1. Deuxième rangée, de gauche à droite : 2, 3, 4. Troisième rangée : 5, 6, 7, 8, 9. Rangée du bas : 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Les triangles de numéro 3, 6, 8, 11, 13 et 15 ont la pointe en bas. Le point E est le sommet commun aux triangles 1, 2 et 3, sur le bord gauche. Le point B est le sommet du haut du triangle 7. Les points A et C sont les sommets du bas du triangle 7, A à gauche et C à droite. Le point D est le milieu de la base du grand triangle, pointe du triangle 13.

Donne le numéro du triangle.

Réponse attendue : 3 — aussi acceptées : trois · triangle 3 · le triangle 3 · triangle numéro 3 · le triangle numéro 3 · numéro 3 · le numéro 3 · n° 3 · le 3 · c'est le 3 · c'est le triangle 3 · le triangle trois

INDICES, DANS L'ORDRE

1. E est un sommet du triangle 2 : il reste à sa place. Il suffit de faire tourner le côté du triangle qui part de E.
2. Chaque triangle du pavage a des angles de 60 degrés : en tournant de $\frac{\pi}{3}$ autour de E, un triangle vient exactement sur son voisin.

CORRECTION

Le centre — E est le sommet du haut du triangle 2 : il est invariant.

Le voisin — Autour de E, les triangles 2, 3 et 1 se suivent dans le sens direct, et chacun occupe un angle de 60 degrés. En tournant de $\frac{\pi}{3}$, le triangle 2 vient sur le triangle 3.

$2 \longmapsto 3$

L'image du triangle 2 est le triangle 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

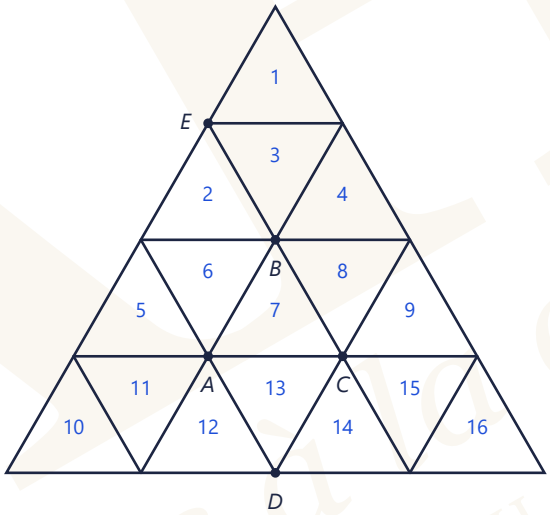
`1 / un / triangle 1 / le triangle 1 / triangle numéro 1 / le triangle numéro 1 / numéro 1 / le numéro 1 / n° 1 / le 1 / c'est le 1 / c'est le triangle 1 / le triangle un` → Le triangle 1 est l'image du triangle 2 par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$: tu as tourné deux fois trop.

`2 / deux / triangle 2 / le triangle 2 / triangle numéro 2 / le triangle numéro 2 / numéro 2 / le numéro 2 / n° 2 / le 2 / c'est le 2 / c'est le triangle 2 / le triangle deux` → Seul le point E reste à sa place : le triangle, lui, tourne.

EXERCICE 33 · RAISONNEMENT

Un tiers de tour dans le pavage

La figure représente un pavage d'un triangle équilatéral par 16 triangles équilatéraux numérotés. Quel est le numéro du triangle image du triangle 5 par la rotation indirecte de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$?



Seize triangles équilatéraux de même taille.

Un grand triangle équilatéral découpé en 16 petits triangles équilatéraux, numérotés de 1 à 16, sur quatre rangées. En haut, le triangle 1. Deuxième rangée, de gauche à droite : 2, 3, 4. Troisième rangée : 5, 6, 7, 8, 9. Rangée du bas : 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Les triangles de numéro 3, 6, 8, 11, 13 et 15 ont la pointe en bas. Le point E est le sommet commun aux triangles 1, 2 et 3, sur le bord gauche. Le point B est le sommet du haut du triangle 7. Les points A et C sont les sommets du bas du triangle 7, A à gauche et C à droite. Le point D est le milieu de la base du grand triangle, pointe du triangle 13.

Donne le numéro du triangle.

Réponse attendue : 7 — aussi acceptées : sept · triangle 7 · le triangle 7 · triangle numéro 7 · le triangle numéro 7 · numéro 7 · le numéro 7 · n° 7 · le 7 · c'est le 7 · c'est le triangle 7 · le triangle sept

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A est un sommet du triangle 5. Autour de A, six triangles se partagent le tour complet.
2. Un angle de $\frac{2\pi}{3}$, c'est deux triangles : à partir du triangle 5, on saute un triangle, dans le sens des aiguilles d'une montre.

CORRECTION

Autour de A — Six triangles ont pour sommet A. En tournant dans le sens indirect à partir du triangle 5, on rencontre le triangle 6, puis le triangle 7.

Deux pas — Chaque triangle occupe 60 degrés, et $\frac{2\pi}{3}$ font 120 degrés : on avance de deux triangles.

$5 \longmapsto 7$

L'image du triangle 5 est le triangle 7, celui dont les sommets sont A, B et C.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6 / six / triangle 6 / le triangle 6 / triangle numéro 6 / le triangle numéro 6 / numéro 6 / le numéro 6 / n° 6 / le 6 / c'est le 6 / c'est le triangle 6 / le triangle six` → Le triangle 6 est l'image par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ici l'angle est $\frac{2\pi}{3}$: on avance de deux triangles.

`12 / douze / triangle 12 / le triangle 12 / triangle numéro 12 / le triangle numéro 12 / numéro 12 / le numéro 12 / n° 12 / le 12 / c'est le 12 / c'est le triangle 12 / le triangle douze` → Tu as tourné dans le sens direct. Le sens indirect est celui des aiguilles d'une montre.

EXERCICE 34 · RAISONNEMENT

Deux mille six pas

Les points O, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M et N sont, dans cet ordre et dans le sens direct, les sommets d'un polygone régulier à 15 côtés. On part du sommet O et on applique 2006 fois de suite la rotation directe qui a pour centre le centre du polygone et pour angle $\frac{2\pi}{15}$. Sur quel sommet arrive-t-on ?

Écris le nom du sommet.

Réponse attendue : K — aussi acceptées : le point K · point K · c'est K · c'est le point K · = K · l'image est K · l'image est le point K · le sommet K · sommet K · en K · on arrive en K · on arrive sur K

INDICES, DANS L'ORDRE

1. À chaque application, on avance d'un sommet. Après 15 applications, on est revenu en O.
2. Seul compte le reste de la division de 2006 par 15.

CORRECTION

Un sommet par pas — L'angle $\frac{2\pi}{15}$ est l'angle au centre entre deux sommets voisins : chaque application fait avancer d'un sommet, et tous les 15 pas on revient en O.

La division — On divise 2006 par 15 : le quotient est 133 et le reste est 11.

$2006 = 15 \times 133 + 11$

Compter — Il reste 11 pas à partir de O : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, puis K.

On arrive sur le sommet K.

PIÈGES ANTICIPÉS

`J / le point J / point J / c'est J` → Le premier pas mène en A, pas en O : onze pas mènent en K.

`L / le point L / point L / c'est L` → Le reste est 11, et le onzième sommet après O est K : le sommet L est le douzième.

`O` / `le point O` / `point O` / `c'est O` → 2006 n'est pas un multiple de 15 : il reste 11 pas après les tours complets.

EXERCICE 35 · RAISONNEMENT

Ensemble au départ

Deux polygones réguliers, l'un à 15 côtés et l'autre à 9 côtés, ont un sommet commun O. Un pion fait le tour du premier et un autre le tour du second : à chaque pas, chaque pion passe d'un sommet au sommet suivant de son polygone, dans le sens direct. Les deux pions partent de O. Après combien de pas, au minimum, sont-ils de nouveau ensemble en O ?

Donne le nombre de pas.

Réponse attendue : 45 — aussi acceptées : 45 pas · quarante-cinq · quarante cinq · quarante-cinq pas · quarante cinq pas · après 45 pas · au bout de 45 pas · n = 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier pion est en O tous les 15 pas, le second tous les 9 pas.
2. On cherche le plus petit multiple commun non nul de 15 et de 9.

CORRECTION

Les retours — Le premier pion revient en O quand le nombre de pas est un multiple de 15, le second quand c'est un multiple de 9.

Le PPCM — 15 est égal à 3 fois 5, et 9 à 3 fois 3 : leur plus petit multiple commun est 3 fois 3 fois 5.

$$\mathrm{PPCM}(15, 9) = 3 \times 3 \times 5 = 45$$

Les deux pions se retrouvent en O après 45 pas : le premier a fait 3 tours, le second 5 tours.

PIÈGES ANTICIPÉS

`135` / `135 pas` / `cent trente-cinq` / `n = 135` → 135 est bien un multiple commun, mais ce n'est pas le plus petit : 15 et 9 ont le facteur 3 en commun.

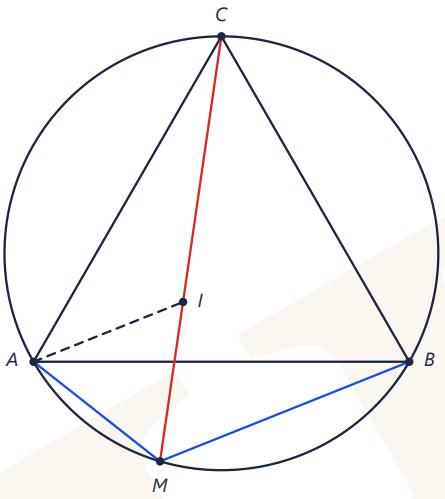
`3` / `3 pas` / `trois` / `trois pas` / `n = 3` → 3 est le PGCD de 15 et de 9. On cherche un multiple commun, pas un diviseur commun.

`24` / `24 pas` / `vingt-quatre` / `n = 24` → On n'ajoute pas les deux nombres : 24 n'est un multiple ni de 15 ni de 9.

EXERCICE 36 · DEFI

Une somme de distances

Dans la figure, ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle, et C est l'image de B par la rotation directe r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le point M est sur l'arc AB qui ne contient pas C, et I est l'image de M par r. On donne $MA = 3$ et $MB = 5$. Calculer la distance MC.



M est sur l'arc AB qui ne contient pas C.

Un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle : C est en haut, A en bas à gauche, B en bas à droite. Le point M est sur le cercle, en bas, entre A et B, plus près de A. Les segments [MA] et [MB] sont bleus, le segment [MC] est rouge. Le point I est sur le segment [MC], et le triangle AMI est équilatéral.

Donne la distance MC.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. I est l'image de M par une rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$: quelle est la nature du triangle AMI ?
2. La rotation r transforme M en I et B en C : que vaut la distance IC ?
3. Montre que les points M, I et C sont alignés : compare l'angle $\widehat{AIC}$ à l'angle $\widehat{AMB}$, qui mesure 120 degrés.

CORRECTION

L'angle AMB — L'angle au centre qui intercepte le petit arc AB mesure 120 degrés ; le grand arc AB, celui qui contient C, correspond donc à 240 degrés. L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte ce grand arc : il en mesure la moitié.

$$\widehat{AMB} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

Le triangle AMI — $AI = AM$ et l'angle $\widehat{MAI}$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$: le triangle AMI est équilatéral. En particulier, l'angle $\widehat{AIM}$ mesure 60 degrés.

$$MI = MA = 3$$

L'image du triangle AMB — La rotation r transforme A en A, M en I et B en C : le triangle AIC est l'image du triangle AMB. Les distances et les angles sont conservés.

$$IC = MB = 5 \quad \text{et} \quad \widehat{AIC} = \widehat{AMB} = 120^\circ$$

Trois points alignés — L'angle $\widehat{AIM}$ mesure 60 degrés et l'angle $\widehat{AIC}$ mesure 120 degrés : leur somme fait 180 degrés. Les points M, I et C sont alignés, et I est entre M et C.

Conclure — La distance MC est la somme des deux morceaux.

$MC = MI + IC = 3 + 5 = 8$

$MC = 8$: pour tout point M de cet arc, la distance MC est la somme des distances MA et MB.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Les deux morceaux $[MI]$ et $[IC]$ se suivent sur le segment $[MC]$: on les ajoute, on ne les retranche pas.

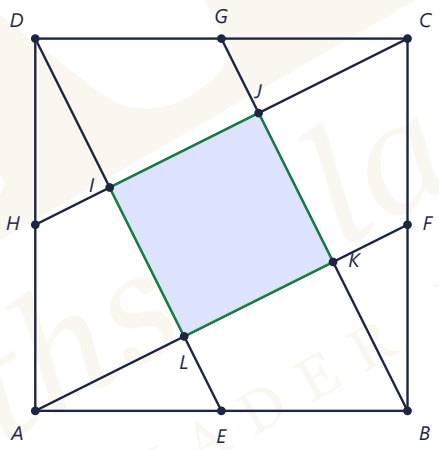
4 → MC n'est pas la moyenne de MA et de MB : c'est leur somme.

7 → 7 est la longueur du côté du triangle ABC. La distance MC est la somme de MA et de MB.

EXERCICE 37 · DEFI

Le carré au cinquième

Dans la figure, $ABCD$ est un carré de côté 10, et E, F, G et H sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les droites (AF), (BG), (CH) et (DE) se coupent à l'intérieur du carré en formant un quadrilatère $IJKL$. Le quart de tour direct de centre le centre du carré transforme chacune de ces droites en la suivante : $IJKL$ est un carré. Calculer son aire.



Chaque sommet est joint au milieu d'un côté.

Un carré ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. E, F, G et H sont les milieux des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Les segments [AF], [BG], [CH] et [DE] se coupent deux à deux à l'intérieur du carré et y dessinent un petit carré IJKL, penché : L est le point d'intersection de (AF) et (DE), K celui de (AF) et (BG), J celui de (BG) et (CH), I celui de (CH) et (DE).

Donne l'aire du carré $IJKL$.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite (BG) est l'image de la droite (AF) par un quart de tour : elles sont perpendiculaires. Le point K est donc le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABF.
2. Calcule AF avec le théorème de Pythagore, puis BK avec l'aire du triangle ABF, puis AK.
3. Le quart de tour transforme A en B et L en K : $AL = BK$. Le côté du petit carré est AK moins AL.

CORRECTION

Le triangle ABF — Il est rectangle en B, avec $AB = 10$ et $BF = 5$.

$$AF = \sqrt{100 + 25} = 5\sqrt{5}$$

La hauteur BK — Les droites (AF) et (BG) sont perpendiculaires : $[BK]$ est la hauteur issue de B. L'aire du triangle ABF vaut 25.

$$BK = \frac{2 \times 25}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

La distance AK — Dans le triangle ABK, rectangle en K :

$$AK = \sqrt{100 - 20} = 4\sqrt{5}$$

Le côté — Le quart de tour transforme A en B et L en K, donc $AL = BK$.

$$LK = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

L'aire — On élève le côté au carré.

$$(2\sqrt{5})^2 = 20$$

L'aire du carré $IJKL$ vaut 20 : c'est le cinquième de l'aire du carré $ABCD$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`25` → Le petit carré n'est pas le quart du grand : son côté mesure $2\sqrt{5}$, et non 5.

`50` → 50 est l'aire du carré dont les sommets sont les milieux E, F, G et H. Le carré $IJKL$ est plus petit.

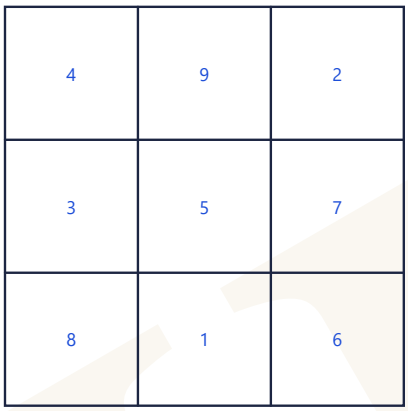
`2*sqrt(5)` → C'est la longueur du côté. Pour l'aire, on élève ce côté au carré.

EXERCICE 38 · PRATIQUE

Tourner le carré magique

La figure montre un carré magique. On le fait tourner d'un quart de tour direct autour de son centre. Quel nombre vient dans la case en haut à gauche ?

Maths à la carte
ABDELKADER HAMITE



Un carré magique : toutes les sommes valent 15.

Une grille carrée de trois lignes et trois colonnes. Première ligne : 4, 9, 2. Deuxième ligne : 3, 5, 7. Troisième ligne : 8, 1, 6.

Donne le nombre.

Réponse attendue : 2 — aussi acceptées : deux · le 2 · le deux · le nombre 2 · c'est 2 · c'est le 2 · le chiffre 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre.
2. Par un quart de tour direct, le coin en haut à droite vient en haut à gauche.

CORRECTION

Les coins — Un quart de tour autour du centre envoie chaque coin sur un coin voisin. Dans le sens direct, le coin en haut à droite vient en haut à gauche.

Lire — Le nombre du coin en haut à droite est 2.

2

C'est le nombre 2 qui vient en haut à gauche. Le carré obtenu est encore magique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8 / huit / le 8 / le nombre 8 / c'est 8 / c'est le 8` → 8 vient en haut à gauche par le quart de tour indirect. Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

`6 / six / le 6 / le nombre 6 / c'est 6 / c'est le 6` → 6 vient en haut à gauche par un demi-tour. Un quart de tour n'envoie un coin que sur le coin voisin.

`4 / quatre / le 4 / le nombre 4 / c'est 4 / c'est le 4` → 4 est le nombre qui s'y trouve avant de tourner : seul le 5 du centre reste à sa place.

EXERCICE 39 · BASE

Quarante degrés

Convertir en radians un angle de 40 degrés.

Écris la mesure en radians, avec pi.

Réponse attendue : `2*pi/9` — aussi acceptées : 2pi/9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. 180 degrés correspondent à π radians.
2. On multiplie par $\frac{\pi}{180}$, puis on simplifie la fraction par 20.

CORRECTION

La règle — Pour passer des degrés aux radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$.

$$40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{40\pi}{180}$$

Simplifier — On simplifie la fraction par 20.

$$\frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$$

Un angle de 40 degrés mesure $\frac{2\pi}{9}$ radians : on multiplie par $\frac{\pi}{180}$ et on simplifie.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7200/pi` → Tu as multiplié par $\frac{180}{\pi}$: c'est la règle pour passer des radians aux degrés.

`2/9` → Il manque π : en radians, l'angle plat mesure π, pas 1.

EXERCICE 40 · BASE

Sept douzièmes de pi

Un angle mesure $\frac{7\pi}{12}$ radians. Quelle est sa mesure en degrés ?

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `105`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. π radians correspondent à 180 degrés.
2. On remplace π par 180, puis on calcule.

CORRECTION

La règle — Pour passer des radians aux degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$: cela revient à remplacer π par 180.

$$\frac{7\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = \frac{7 \times 180}{12}$$

Calculer — 180 divisé par 12 donne 15.

$$7 \times 15 = 105$$

Un angle de $\frac{7\pi}{12}$ radians mesure 105 degrés : on remplace π par 180.

PIÈGES ANTICIPÉS

`15` → 15 degrés, c'est $\frac{\pi}{12}$. Ici, il y a sept fois $\frac{\pi}{12}$.

`2160/7` → Tu as inversé la fraction : c'est 7 que l'on multiplie par 180, et 12 qui divise.

EXERCICE 41 · PRATIQUE

Un petit arc

Sur un cercle de rayon 5, un angle au centre mesure 24 degrés. Calculer la longueur L de l'arc qu'il intercepte, en valeur exacte.

Donne la longueur L, en valeur exacte, avec pi.

Réponse attendue : `2*pi/3` — aussi acceptées : 2pi/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule $L = r \times \alpha$ demande l'angle α en radians : convertis d'abord 24 degrés.
2. $24 \times \dfrac{\pi}{180}$ se simplifie par 12.

CORRECTION

L'angle en radians — On multiplie par $\dfrac{\pi}{180}$ et on simplifie par 12.

$$24 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{15}$$

La longueur de l'arc — La longueur de l'arc est le rayon multiplié par la mesure en radians.

$$L = 5 \times \frac{2\pi}{15} = \frac{2\pi}{3}$$

L'arc mesure $\dfrac{2\pi}{3}$: on convertit l'angle en radians, puis on le multiplie par le rayon.

PIÈGES ANTICIPÉS

`120` → Tu as multiplié le rayon par 24 degrés : la formule $L = r \times \alpha$ demande l'angle en radians.

`2*pi/15` → $\dfrac{2\pi}{15}$ est la mesure de l'angle en radians. Il reste à la multiplier par le rayon 5.

`2.09 / 2.1 / 2.094` → On attend la valeur exacte : $\dfrac{2\pi}{3}$, sans arrondir.

EXERCICE 42 · PRATIQUE

Retrouver le rayon

Un angle au centre de mesure $\dfrac{2\pi}{5}$ radians intercepte un arc de longueur 4π. Calculer le rayon r du cercle.

Donne le rayon r.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La mesure en radians est le rapport $\dfrac{L}{r}$ de la longueur de l'arc au rayon.
2. On a donc $L = r \times \dfrac{2\pi}{5}$: on divise la longueur de l'arc par la mesure de l'angle.

CORRECTION

La relation — La mesure en radians de l'angle est le rapport de la longueur de l'arc au rayon.

$$\frac{4\pi}{r} = \frac{2\pi}{5}$$

Le rayon — On divise 4π par $\frac{2\pi}{5}$, c'est-à-dire qu'on multiplie par $\frac{5}{2\pi}$.

$$r = 4\pi \times \frac{5}{2\pi} = 10$$

Le rayon vaut 10 : de $L = r \times \alpha$, on tire $r = \frac{L}{\alpha}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8*pi^2/5` → Tu as multiplié la longueur de l'arc par l'angle. C'est le rayon multiplié par l'angle qui donne l'arc : il faut diviser.

`1/10 / 0.1` → Tu as calculé $\frac{\alpha}{L}$: c'est l'inverse du rayon.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

La roue qui avance

Une roue de rayon 30 cm roule sans glisser sur le sol. Elle tourne autour de son axe d'un angle de $\frac{5\pi}{3}$ radians. Calculer, en centimètres, la distance parcourue par la roue, en valeur exacte et sans écrire l'unité.

Donne la distance avec pi, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `50*pi` — aussi acceptées : 50pi

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En roulant sans glisser, la roue avance de la longueur de l'arc qui a touché le sol.
2. Cet arc est intercepté par l'angle dont la roue a tourné : sa longueur est le rayon multiplié par la mesure en radians.

CORRECTION

L'arc déroulé — La distance parcourue est la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de $\frac{5\pi}{3}$ radians.

$$L = r \times \alpha$$

Calculer — On multiplie le rayon par la mesure en radians.

$$L = 30 \times \frac{5\pi}{3} = 50\pi$$

La roue avance de 50π cm : la longueur d'un arc est le rayon multiplié par l'angle en radians.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9000` → Tu as multiplié le rayon par 300 degrés : la formule de l'arc demande l'angle en radians.

`100*pi` → Tu as pris le diamètre 60 cm. La longueur de l'arc se calcule avec le rayon 30 cm.

`157.08 / 157.1 / 157` → On attend la valeur exacte : 50π, sans arrondir.

EXERCICE 44 · PRATIQUE

La grande aiguille

Pendant 10 minutes, la grande aiguille d'une horloge tourne autour du centre du cadran. Donner, en radians, la mesure de l'angle dont elle a tourné.

Écris la mesure en radians, avec pi.

Réponse attendue : `pi/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La grande aiguille fait un tour complet en 60 minutes.
2. Un tour complet, ce sont deux angles plats : 2π radians.

CORRECTION

La fraction de tour — En 10 minutes, la grande aiguille fait le sixième d'un tour.

$$\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

L'angle — Un tour complet mesure 2π radians.

$$\frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

L'aiguille a tourné de $\frac{\pi}{3}$ radians, soit 60 degrés : un tour complet mesure 2π.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/6` → En une heure, la grande aiguille fait un tour complet, 2π radians, et non un demi-tour.

`60` → 60 est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians.

EXERCICE 45 · DEFI

Le périmètre d'un secteur

Un secteur angulaire est limité par deux rayons d'un cercle de rayon 6 et par l'arc qu'ils interceptent. Son périmètre vaut 20. Calculer, en radians, la mesure α de son angle, en valeur exacte.

Donne la mesure α en radians, en valeur exacte.

Réponse attendue : `4/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le périmètre du secteur compte les deux rayons et l'arc.
2. Trouve d'abord la longueur de l'arc, puis utilise $\alpha = \frac{L}{r}$.

CORRECTION

La longueur de l'arc — On retire les deux rayons du périmètre.

$$L = 20 - 2 \times 6 = 8$$

L'angle — La mesure en radians est le rapport de la longueur de l'arc au rayon.

$$\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

L'angle mesure $\frac{4}{3}$ radian : une mesure en radians n'a pas toujours π dans son écriture.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10/3` → Le périmètre compte aussi les deux rayons : l'arc ne mesure que $20 - 12 = 8$.

`8` → 8 est la longueur de l'arc. La mesure de l'angle est cette longueur divisée par le rayon.

`1.33 / 1.3 / 1.333` → On attend la valeur exacte : $\frac{4}{3}$, sans arrondir.

EXERCICE 46 · BASE

La corde d'un quart de tour

Soient O et M deux points tels que $OM = 4$, et N l'image de M par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Calculer la distance MN, en valeur exacte.

Donne la distance MN, en valeur exacte.

Réponse attendue : `4*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(32) · 4√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $ON = OM$ et l'angle $\widehat{MON}$ est droit : quelle est la nature du triangle OMN ?
2. Applique le théorème de Pythagore dans ce triangle.

CORRECTION

Le triangle — La rotation a pour centre O et pour angle $\frac{\pi}{2}$: le triangle OMN est rectangle et isocèle en O.

$ON = OM = 4$

Pythagore — $[MN]$ est l'hypoténuse.

$MN^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

Conclure — On prend la racine carrée.

$MN = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$MN = 4\sqrt{2}$: un point et son image par un quart de tour forment avec le centre un triangle rectangle et isocèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 est la distance OM, ou ON. On demande la distance entre M et son image.

`8` → Les côtés de l'angle droit ne s'ajoutent pas : on applique le théorème de Pythagore.

`5.66 / 5.7 / 5.657` → On attend la valeur exacte : $4\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 47 · BASE

L'image du centre

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{7}$. Quelle est l'image du point O par r ?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : 0 — aussi acceptées : le point O · point O · c'est O · c'est le point O · = O · l'image est O · l'image est le point O · l'image de O est O · l'image de O est le point O · r(O) = O · r(O)=O · O lui-même · lui-même · le point O lui-même

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la définition : que fait une rotation de son centre ?

CORRECTION

Le centre — Par définition, une rotation laisse son centre invariant.

$$r(O) = O$$

L'image du centre est le centre lui-même : c'est le seul point qui ne bouge pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`aucun / aucune / il n'a pas d'image / pas d'image` → Le centre a bien une image : la rotation le laisse à sa place, $r(O) = O$.

EXERCICE 48 · PRATIQUE

De part et d'autre

Soient O et M deux points distincts. On note M_1 l'image de M par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et M_2 l'image de M par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Donner, en radians, la mesure de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$.

Écris la mesure en radians, avec pi.

Réponse attendue : `5*pi/12` — aussi acceptées : 5pi/12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'une des rotations tourne dans le sens direct, l'autre dans le sens indirect : où sont M_1 et M_2 par rapport à la droite (OM) ?
2. Ils sont de part et d'autre : les deux angles s'ajoutent. Mets-les au même dénominateur 12.

CORRECTION

La position — M_1 est obtenu en tournant dans le sens direct et M_2 dans le sens indirect : ils sont de part et d'autre de la droite (OM).

$$\widehat{M_1OM_2} = \widehat{M_1OM} + \widehat{MOM_2}$$

Additionner — On réduit au même dénominateur.

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

L'angle $\widehat{M_1OM_2}$ mesure $\frac{5\pi}{12}$: deux sens contraires, les angles s'ajoutent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/12` → Tu as soustrait les angles, comme si les deux points étaient du même côté. Les sens sont contraires : les angles s'ajoutent.

`75` → 75 est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Deux fois trois cinquièmes

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{5}$. Un point M, distinct de O, a pour image M', et M' a pour image M''. Donner, en radians, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{MOM''}$.

Écris la mesure en radians, avec pi.

Réponse attendue : `4*pi/5` — aussi acceptées : 4pi/5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En tout, on a tourné de $\frac{6\pi}{5}$ dans le sens direct : est-ce une mesure possible pour un angle géométrique ?
2. Un angle géométrique mesure au plus π. Un tour complet mesure 2π : regarde ce qu'il reste de l'autre côté.

CORRECTION

Ce qu'on a tourné — Deux fois $\frac{3\pi}{5}$ dans le sens direct.

$$\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$$

Dépasser le demi-tour — $\frac{6\pi}{5}$ dépasse π : l'angle géométrique est ce qu'il reste pour compléter le tour.

$$\widehat{MOM''} = 2\pi - \frac{6\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

L'angle $\widehat{MOM''}$ mesure $\frac{4\pi}{5}$: un angle géométrique ne dépasse jamais π.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*pi/5` → $\frac{6\pi}{5}$ est plus grand que π : ce n'est pas la mesure d'un angle géométrique. Regarde l'angle de l'autre côté.

`3*pi/5` → $\frac{3\pi}{5}$ est l'angle $\widehat{MOM'}$. On a appliqué la rotation deux fois.

EXERCICE 50 · DEFI

Un tour dans chaque sens

Soient O et M deux points distincts. On note M_1 l'image de M par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{5}$, puis M_2 l'image de M_1 par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. Donner, en radians, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{MOM_2}$.

Écris la mesure en radians, avec pi.

Réponse attendue : `7*pi/20` — aussi acceptées : 7pi/20

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On tourne d'abord dans le sens direct, puis dans le sens indirect : les deux angles se compensent en partie.
2. On a tourné plus dans le sens indirect que dans le sens direct : fais la différence, au dénominateur 20.

CORRECTION

Deux sens contraires — Le premier pas tourne de $\frac{2\pi}{5}$ dans le sens direct, le second de $\frac{3\pi}{4}$ dans le sens indirect : en tout, on a tourné de la différence, dans le sens indirect.

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{5}$$

Calculer — On réduit au même dénominateur 20.

$$\frac{15\pi}{20} - \frac{8\pi}{20} = \frac{7\pi}{20}$$

L'angle $\widehat{MOM_2}$ mesure $\frac{7\pi}{20}$: deux rotations de même centre et de sens contraires se compensent, on soustrait leurs angles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`23*pi/20` → Tu as ajouté les angles, comme si l'on tournait deux fois dans le même sens. Ici, les sens sont contraires : on soustrait.

`17*pi/20` → Ce serait l'angle si l'on tournait deux fois dans le même sens. Les sens sont contraires : les angles se soustraient.

`63` → 63 est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians.

EXERCICE 51 · PRATIQUE

Revenir au point de départ

Par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{7}$, le point A a pour image B. La rotation de centre O qui transforme B en A est-elle directe ou indirecte ?

Réponds par « directe » ou « indirecte ».

Réponse attendue : `directe` — aussi acceptées : la rotation directe · rotation directe · elle est directe · c'est une rotation directe · une rotation directe · c'est la rotation directe · sens direct · le sens direct · dans le sens direct

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour aller de A vers B, on tourne autour de O dans le sens indirect.
2. Pour revenir de B vers A, on refait le même chemin à l'envers.

CORRECTION

Revenir en arrière — $OB = OA$ et l'angle $\widehat{BOA}$ mesure $\frac{2\pi}{7}$; pour aller de B vers A, on tourne dans le sens contraire, c'est-à-dire le sens direct.

$$B \longmapsto A$$

C'est la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{7}$: pour revenir, on garde le centre et l'angle, et on change de sens.

PIÈGES ANTICIPÉS

`indirecte / la rotation indirecte / rotation indirecte / elle est indirecte / c'est une rotation indirecte` → En tournant encore dans le sens indirect, on s'éloigne de A. Pour revenir, on change de sens.

EXERCICE 52 · RAISONNEMENT

Trois pas de soixante degrés

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et A un point tel que $OA = 3$. On note $B = r(A)$, $C = r(B)$ et $D = r(C)$. Calculer la distance AD.

Donne la distance AD.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. En tout, de A à D, on a tourné de combien autour de O ?
2. Une rotation d'angle π est une symétrie centrale.

CORRECTION

L'angle total — Trois fois $\frac{\pi}{3}$ dans le même sens.

$$3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$$

Une symétrie centrale — D est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle π : c'est le symétrique de A par rapport à O, et O est le milieu de $[AD]$.

$$AD = 2 \times OA = 6$$

$AD = 6$: trois rotations de $\frac{\pi}{3}$ dans le même sens font un demi-tour.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → OAB est équilatéral, mais D n'est pas B : on a tourné trois fois, soit de π en tout.

`3*sqrt(2)` → Trois fois $\frac{\pi}{3}$ font π, et non $\frac{\pi}{2}$: A, O et D sont alignés.

EXERCICE 53 · BASE

Le quart de tour indirect

Soit $ABCD$ un carré de centre O, dont les sommets A, B, C et D se suivent dans le sens direct. Quelle est l'image du point C par le quart de tour indirect de centre O ?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : B — aussi acceptées : le point B · point B · c'est B · c'est le point B · = B · l'image est B · l'image est le point B · l'image de C est B · l'image de C est le point B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales du carré sont perpendiculaires et ont même milieu O.
2. Dans le sens indirect, on parcourt les sommets dans l'ordre inverse de A, B, C, D.

CORRECTION

Les distances et l'angle — $OB = OC = OD$, et les angles $\widehat{COB}$ et $\widehat{COD}$ sont droits : il y a deux candidats, B et D.

$$OB = OC = OD$$

Le sens — Les sommets se suivent dans le sens direct : de C, on va vers D dans le sens direct et vers B dans le sens indirect.

$C \longmapsto B$

L'image de C est B : le quart de tour indirect fait passer chaque sommet au précédent.

PIÈGES ANTICIPÉS

`D / le point D / point D / c'est D` → D est l'image de C par le quart de tour direct. Ici, on tourne dans le sens indirect.

`A / le point A / point A / c'est A` → A est l'image de C par la symétrie de centre O : un demi-tour, pas un quart de tour.

EXERCICE 54 · BASE

D'un sommet à l'opposé

Soit $ABCD$ un carré de centre O. Donner, en radians, l'angle de la rotation de centre O qui transforme A en C.

Écris l'angle en radians, avec pi.

Réponse attendue : `pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O est le milieu de la diagonale $[AC]$: que vaut l'angle $\widehat{AOC}$?

CORRECTION

L'angle — O est le milieu de $[AC]$, donc $OA = OC$ et les points A, O et C sont alignés : l'angle $\widehat{AOC}$ est plat.

$\widehat{AOC} = \pi$

C'est la rotation de centre O et d'angle π, c'est-à-dire la symétrie centrale de centre O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/2` → Le quart de tour de centre O envoie A sur un sommet voisin, B ou D. C est le sommet opposé.

`180` → 180 est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians.

EXERCICE 55 · PRATIQUE

Dans l'hexagone

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O, dont les sommets se suivent dans le sens direct. Quelle est l'image du point B par la rotation directe de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `D` — aussi acceptées : le point D · point D · c'est D · c'est le point D · = D · l'image est D · l'image est le point D · l'image de B est D · l'image de B est le point D

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'hexagone régulier est formé de six triangles équilatéraux de sommet O : quel est l'angle au centre entre deux sommets voisins ?
2. $\frac{2\pi}{3}$, c'est deux fois $\frac{\pi}{3}$: on avance de deux sommets dans le sens direct.

CORRECTION

L'angle entre deux sommets — Les six angles au centre sont égaux.

$$\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Deux pas — $OD = OB$, et l'angle $\widehat{BOD}$ mesure deux fois $\frac{\pi}{3}$; on va de B vers D dans le sens direct.

$$B \longmapsto D$$

L'image de B est D : dans un hexagone régulier, chaque pas de $\frac{\pi}{3}$ fait passer au sommet suivant.

PIÈGES ANTICIPÉS

`C / le point C / point C / c'est C` → C est l'image de B par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ici, l'angle est deux fois plus grand.

`F / le point F / point F / c'est F` → F est obtenu en tournant dans le sens indirect. Ici, la rotation est directe.

EXERCICE 56 · RAISONNEMENT

Trouver le centre

Soient A et B deux points tels que $AB = 6$, et O le centre de la rotation directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B. Calculer la distance OA, en valeur exacte.

Donne la distance OA, en valeur exacte.

Réponse attendue : `3*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(18) · 3√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $OA = OB$ et l'angle $\widehat{AOB}$ est droit : quelle est la nature du triangle OAB ?
2. Dans un triangle rectangle et isocèle, l'hypoténuse est égale au côté de l'angle droit multiplié par $\sqrt{2}$.

CORRECTION

Le triangle — B est l'image de A : $OB = OA$ et l'angle $\widehat{AOB}$ est droit. Le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2\,OA^2$$

Calculer — On remplace AB par 6.

$$OA^2 = \frac{36}{2} = 18$$

Conclure — On prend la racine carrée.

$$OA = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$OA = 3\sqrt{2}$: le centre d'un quart de tour qui envoie A sur B forme avec eux un triangle rectangle et isocèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est la distance du milieu de $[AB]$ à A. Le centre O est sur la médiatrice, mais pas au milieu de $[AB]$.

`6` → $OA = AB$ conviendrait pour un angle de $\frac{\pi}{3}$ (triangle équilatéral). Ici, le triangle OAB est rectangle et isocèle.

`6*sqrt(2)` → L'hypoténuse est $[AB]$: c'est AB qu'on divise par $\sqrt{2}$, et non OA qu'on multiplie.

`4.24 / 4.2 / 4.243` → On attend la valeur exacte : $3\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Combien de rotations ?

Soient A et B deux points distincts. On ne fixe ni le centre ni l'angle. Combien y a-t-il de rotations qui transforment A en B ?

Réponds par un nombre, ou par « une infinité ».

Réponse attendue : une `infinité` — aussi acceptées : infinité · une infinite · infinite · une infinité de rotations · infinité de rotations · il y en a une infinité · il y a une infinité de rotations · infini

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le centre O d'une telle rotation vérifie $OA = OB$: sur quel ensemble se trouve-t-il ?
2. Pour chaque point O de cet ensemble, il existe une rotation de centre O qui transforme A en B.

CORRECTION

Le centre — Si $r(A) = B$, le centre O vérifie $OA = OB$: il est sur la médiatrice du segment $[AB]$.

$$OA = OB$$

Chaque point convient — Pour tout point O de la médiatrice, y compris le milieu de $[AB]$ qui donne la symétrie centrale, il existe une seule rotation de centre O qui transforme A en B : son angle est $\widehat{AOB}$.

$$\text{une rotation pour chaque point de la médiatrice}$$

Il y en a une infinité, une pour chaque point de la médiatrice de $[AB]$: c'est quand on fixe le centre que la rotation devient unique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / une / une seule / une rotation / une seule rotation / il y en a une` → Il n'y a qu'une rotation quand on fixe le centre. Ici, on peut choisir le centre sur toute la médiatrice de $[AB]$.

`2 / deux / deux rotations / 2 rotations` → Deux rotations, une par sens, c'est ce qu'on trouve quand l'angle est fixé. Ici, ni l'angle ni le centre ne sont imposés : chaque point de la médiatrice de $[AB]$ donne une rotation.

EXERCICE 58 · PRATIQUE

Sur la médiatrice

Soient A et B deux points tels que $AB = 8$, et I le milieu de $[AB]$. Le point O est sur la médiatrice de $[AB]$, avec $OI = 3$. On considère la rotation de centre O qui transforme A en B. Calculer le rayon OA du cercle sur lequel tourne le point A.

Donne la distance OA.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle OIA est rectangle en I : la médiatrice est perpendiculaire à $[AB]$.
2. IA vaut la moitié de AB.

CORRECTION

Le triangle rectangle — O est sur la médiatrice de $[AB]$: le triangle OIA est rectangle en I, avec $IA = 4$.

$$OA^2 = OI^2 + IA^2$$

Pythagore — On remplace.

$$OA^2 = 9 + 16 = 25 \quad \text{donc} \quad OA = 5$$

$OA = 5$: le point A tourne sur le cercle de centre O passant par A et B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(73)` → IA vaut la moitié de AB, soit 4, et non 8.

`7` → Les côtés de l'angle droit ne s'ajoutent pas : on applique le théorème de Pythagore.

EXERCICE 59 · BASE

Un angle droit qui tourne

Soit ABC un triangle rectangle en A. Ses sommets ont pour images A', B' et C' par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Combien mesure, en degrés, l'angle $\widehat{B'A'C'}$?

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une rotation conserve les angles.

CORRECTION

La conservation — Une rotation conserve les angles, donc l'orthogonalité.

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC} = 90°$$

L'angle $\widehat{B'A'C'}$ est droit : une rotation conserve les angles, quel que soit son angle à elle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`135` → L'angle de la rotation ne s'ajoute pas aux angles de la figure : une rotation conserve les angles.

`45` → 45 degrés est l'angle de la rotation, pas celui du triangle image.

EXERCICE 60 · PRATIQUE

Pythagore après la rotation

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 8$. Une rotation transforme A, B et C en A', B' et C'. Calculer la distance $B'C'$.

Donne la distance $B'C'$.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une rotation conserve les distances : $B'C'$ est égale à une longueur du triangle ABC.
2. Calcule BC dans le triangle rectangle ABC.

CORRECTION

La conservation — Une rotation conserve les distances.

$$B'C' = BC$$

Pythagore — Dans le triangle ABC rectangle en A.

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \quad \text{donc} \quad BC = 10$$

$B'C' = 10$: on calcule la longueur sur la figure de départ, la rotation la conserve.

PIÈGES ANTICIPÉS

`14` → Les côtés de l'angle droit ne s'ajoutent pas : on applique le théorème de Pythagore.

`2` → On ne soustrait pas les côtés : BC est l'hypoténuse, on applique le théorème de Pythagore.

EXERCICE 61 · PRATIQUE

Deux carrés sur deux côtés

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$, de sorte que E et G soient les sommets voisins de A qui ne sont pas sur le triangle. Un quart de tour de centre A transforme E en B et C en G. On donne $EC = 9$. Calculer la distance BG.

Donne la distance BG.

Réponse attendue : `9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est l'image du segment $[EC]$ par ce quart de tour ?
2. Une rotation conserve les distances.

CORRECTION

L'image du segment — Le quart de tour transforme E en B et C en G : il transforme le segment $[EC]$ en le segment $[BG]$.

$$[EC] \longmapsto [BG]$$

La conservation — Une rotation conserve les distances.

$$BG = EC = 9$$

$BG = 9$: pour comparer deux longueurs, on cherche une rotation qui envoie l'un des segments sur l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(2)` → Il n'y a pas de diagonale de carré ici : $[BG]$ est l'image de $[EC]$, de même longueur.

`4.5` → Une rotation conserve les distances : elle ne les divise pas.

EXERCICE 62 · RAISONNEMENT

L'angle entre deux segments images

Soit ABC un triangle, et ABE et ACF deux triangles équilatéraux construits à l'extérieur de ABC. La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme E en B transforme C en F. Donner, en degrés, la mesure de l'angle aigu formé par les droites (EC) et (BF).

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `60`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite (BF) est l'image de la droite (EC) par la rotation.
2. Une droite et son image par une rotation forment un angle égal à l'angle de la rotation (ou à son supplémentaire).

CORRECTION

Les images — La rotation transforme E en B et C en F : l'image de la droite (EC) est la droite (BF).

$$(EC) \longmapsto (BF)$$

L'angle — Une droite et son image par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ forment un angle de 60 degrés.

$$\big((EC),(BF)\big) = 60^\circ$$

Les droites (EC) et (BF) forment un angle de 60 degrés : l'angle de la rotation qui envoie l'une sur l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`90` → Les droites sont perpendiculaires pour un quart de tour. Ici, la rotation a pour angle $\frac{\pi}{3}$.

`120` → 120 degrés n'est pas un angle aigu : l'angle aigu entre les deux droites est son supplémentaire.

EXERCICE 63 · DEFI

Trois distances dans un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral et P un point intérieur tel que $PA = 3$, $PB = 4$ et $PC = 5$. La rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en C transforme P en Q. Calculer, en degrés, la mesure de l'angle $\widehat{APB}$.

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `150`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle BPQ est équilatéral, et la rotation donne $QC = PA$.
2. Dans le triangle PQC, compare $PQ^2 + QC^2$ et PC^2.
3. L'angle $\widehat{APB}$ a pour image l'angle $\widehat{CQB}$: décompose-le en $\widehat{CQP} + \widehat{PQB}$.

CORRECTION

Le triangle BPQ — $BQ = BP = 4$ et l'angle $\widehat{PBQ}$ mesure 60 degrés : le triangle BPQ est équilatéral.

$$PQ = 4 \quad ; \quad \widehat{PQB} = 60^\circ$$

Le triangle PQC — La rotation transforme $[PA]$ en $[QC]$: $QC = PA = 3$. Or $3^2 + 4^2 = 5^2$: le triangle PQC est rectangle en Q.

$$QC^2 + PQ^2 = 9 + 16 = 25 = PC^2$$

L'angle cherché — La rotation transforme A, P, B en C, Q, B et conserve les angles.

$$\widehat{APB} = \widehat{CQB} = 90° + 60° = 150°$$

$\widehat{APB}$ mesure 150 degrés : la rotation rassemble les trois distances dans un même triangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

90 → 90 degrés est l'angle $\widehat{PQC}$. L'angle $\widehat{CQB}$ lui ajoute l'angle de 60 degrés du triangle équilatéral BPQ.

60 → 60 degrés est un angle du triangle BPQ. Il faut lui ajouter l'angle droit $\widehat{PQC}$.

30 → Les deux angles $\widehat{CQP}$ et $\widehat{PQB}$ sont côte à côte : ils s'ajoutent.

EXERCICE 64 · DEFI

Trois distances dans un carré

Soit $ABCD$ un carré et P un point intérieur tel que $PA = 1$, $PB = 2$ et $PC = 3$. Le quart de tour de centre B qui transforme A en C transforme P en P'. Calculer, en degrés, la mesure de l'angle $\widehat{APB}$.

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : 135

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle BPP' est rectangle et isocèle en B : calcule PP'.
2. La rotation donne $P'C = PA$. Compare $PP'^2 + P'C^2$ et PC^2.
3. L'angle $\widehat{APB}$ a pour image l'angle $\widehat{CP'B}$.

CORRECTION

Le triangle BPP' — $BP' = BP = 2$ et l'angle $\widehat{PBP'}$ est droit.

$$PP'^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \quad ; \quad \widehat{BP'P} = 45°$$

Le triangle PP'C — La rotation transforme $[PA]$ en $[P'C]$: $P'C = PA = 1$. Or $8 + 1 = 9 = PC^2$: le triangle $PP'C$ est rectangle en P'.

$$PP'^2 + P'C^2 = 9 = PC^2$$

L'angle cherché — La rotation transforme A, P, B en C, P', B et conserve les angles.

$$\widehat{APB} = \widehat{CP'B} = 90° + 45° = 135°$$

$\widehat{APB}$ mesure 135 degrés : le quart de tour rassemble les trois distances dans un triangle rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

90 → 90 degrés est l'angle $\widehat{PP'C}$. L'angle $\widehat{CP'B}$ lui ajoute l'angle de 45 degrés du triangle BPP'.

45 → 45 degrés est l'angle $\widehat{BP'P}$. Il faut lui ajouter l'angle droit $\widehat{PP'C}$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAM

EXERCICE 65 · BASE

Une droite et son quart de tour

Une droite D a pour image la droite D' par le quart de tour direct de centre O. Donner, en degrés, la mesure de l'angle formé par les droites D et D'.

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `90`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Relis la propriété de l'image d'une droite par un quart de tour.

CORRECTION

La propriété — L'image d'une droite par un quart de tour est une droite qui lui est perpendiculaire.

$D \perp D' \quad : \quad 90°$

Les droites D et D' sont perpendiculaires : un quart de tour fait tourner chaque droite d'un angle droit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Une droite et son image sont parallèles pour une symétrie centrale ou une translation. Un quart de tour les rend perpendiculaires.

`pi/2` → $\frac{\pi}{2}$ est la mesure en radians. On demande la mesure en degrés.

EXERCICE 66 · BASE

Trois points alignés qui tournent

Les points A, B et C sont alignés dans cet ordre, avec $AB = 3$ et $BC = 5$. Une rotation les transforme en A', B' et C'. Calculer la distance $A'C'$.

Donne la distance $A'C'$.

Réponse attendue : `8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une rotation conserve les distances : calcule d'abord AC.
2. B est entre A et C.

CORRECTION

La longueur AC — B est sur le segment $[AC]$.

$AC = AB + BC = 8$

La conservation — Une rotation conserve les distances.

$A'C' = AC = 8$

$A'C' = 8$: l'image du segment $[AC]$ est un segment de même longueur, et B' est sur $[A'C']$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → B est entre A et C : les longueurs s'ajoutent.

`5` → 5 est la longueur $B'C'$. On demande toute la longueur $A'C'$.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Un huitième de tour pour une droite

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et D une droite d'image D' par r. Donner, en degrés, la mesure de l'angle aigu formé par les droites D et D'.

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `45`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends deux points A et B de D : la rotation fait tourner le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de l'angle de la rotation.
2. Convertis l'angle de la rotation en degrés.

CORRECTION

Le principe — Une droite et son image par une rotation forment un angle égal à l'angle de la rotation, quand celui-ci est aigu.

$$(D, D') = \frac{\pi}{4}$$

En degrés — On multiplie par $\frac{180}{\pi}$.

$$\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 45$$

Les droites D et D' forment un angle de 45 degrés : l'angle de la rotation.

PIÈGES ANTICIPÉS

`90` → Les droites sont perpendiculaires pour un quart de tour seulement. Ici, l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

`pi/4` → $\frac{\pi}{4}$ est la mesure en radians. On demande la mesure en degrés.

EXERCICE 68 · RAISONNEMENT

Un angle obtus pour une droite

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et D une droite d'image D' par r. Donner, en degrés, la mesure de l'angle aigu formé par les droites D et D'.

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `60`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La rotation fait tourner chaque vecteur de la droite de 120 degrés.
2. Deux droites sécantes forment deux angles supplémentaires : l'un aigu, l'autre obtus.

CORRECTION

L'angle des vecteurs — Un vecteur directeur de D et son image forment un angle de 120 degrés.

$$\frac{2\pi}{3} = 120°$$

L'angle aigu — Les deux droites forment les angles 120 degrés et son supplémentaire.

$180° - 120° = 60°$

Les droites forment un angle aigu de 60 degrés : quand l'angle de la rotation est obtus, on prend son supplémentaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`120` → 120 degrés est un angle obtus. Deux droites forment aussi l'angle supplémentaire : c'est lui l'angle aigu.

`pi/3` → $\frac{\pi}{3}$ est la mesure en radians. On demande la mesure en degrés.

EXERCICE 69 · PRATIQUE

L'image d'un côté de l'hexagone

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O, dont les sommets se suivent dans le sens direct. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$?

Écris la droite avec ses deux points, par exemple (MN).

Réponse attendue : `(BC)` — aussi acceptées : BC · (CB) · CB · la droite (BC) · la droite (CB) · droite (BC) · c'est la droite (BC) · c'est (BC) · la droite BC

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image d'une droite (AB) est la droite qui passe par les images de A et de B.
2. Cherche l'image de chaque sommet : un pas de $\frac{\pi}{3}$ fait passer au sommet suivant.

CORRECTION

Les images des points — L'angle au centre entre deux sommets voisins est $\frac{\pi}{3}$, et l'on tourne dans le sens direct.

$A \longmapsto B \quad ; \quad B \longmapsto C$

L'image de la droite — L'image de la droite (AB) est la droite qui passe par les images de A et de B.

$(AB) \longmapsto (BC)$

L'image de (AB) est (BC) : on trouve l'image d'une droite par les images de deux de ses points.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(FA) / FA / (AF) / AF / la droite (FA)` → (FA) est obtenue en tournant dans le sens indirect. Ici, la rotation est directe.

`(CD) / CD / (DC) / DC / la droite (CD)` → (CD) est l'image par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Un seul pas de $\frac{\pi}{3}$ suffit ici.

EXERCICE 70 · RAISONNEMENT

Au-delà du sommet

Soit $EFGH$ un carré de côté 5 tel que H soit l'image de F par le quart de tour direct de centre E. Le point P est sur le côté $[FG]$, avec $FP = 3$. La perpendiculaire en E à la droite (EP) coupe la droite (GH) en Q. Calculer la distance GQ.

Donne la distance GQ.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quart de tour direct de centre E transforme la droite (FG) en une droite perpendiculaire passant par H : laquelle ?
2. Il transforme aussi (EP) en la perpendiculaire en E à (EP) : Q est donc l'image de P, et $HQ = FP$.
3. Q est-il entre G et H, ou au-delà de H ?

CORRECTION

Les images des droites — Le quart de tour r direct de centre E transforme F en H, donc (FG) en la perpendiculaire à (FG) passant par H : c'est (GH). Il transforme (EP) en la perpendiculaire en E à (EP).

$$(FG) \longmapsto (GH) \quad ; \quad (EP) \longmapsto (EQ)$$

L'image de P — P est à l'intersection de (FG) et (EP) : son image est à l'intersection de leurs images. C'est Q, et la rotation conserve les distances.

$$r(P) = Q \quad ; \quad HQ = FP = 3$$

La position de Q — P est du côté de G par rapport à F ; son image Q est du côté opposé à G par rapport à H, au-delà de H.

$$GQ = GH + HQ = 5 + 3 = 8$$

$GQ = 8$: le quart de tour de centre E envoie P sur Q, et Q tombe au-delà de H sur la droite (GH).

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Q n'est pas sur le segment $[GH]$: en tournant, P, qui va de F vers G, donne un point qui s'éloigne de G, au-delà de H.

`3` → 3 est la distance HQ. On demande la distance de G à Q.

`sqrt(34)` → $\sqrt{34}$ est la distance EP, égale à EQ. On demande la distance GQ.

EXERCICE 71 · BASE

Le milieu suit

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$. Une rotation transforme A, B et I en A', B' et I'. On donne $A'B' = 10$. Calculer la distance $A'I'$.

Donne la distance $A'I'$.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une rotation conserve le milieu : où est I' ?

CORRECTION

Le milieu — Une rotation conserve le milieu : I' est le milieu de $[A'B']$.

$$A'I' = \frac{A'B'}{2}$$

Calculer — On divise par 2.

$$A'I' = \frac{10}{2} = 5$$

$A'I' = 5$: l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 est la longueur $A'B'$. I' est le milieu de $[A'B']$: on en prend la moitié.

`20` → I' est le milieu de $[A'B']$: $A'I'$ est la moitié de $A'B'$, pas le double.

EXERCICE 72 · PRATIQUE

Le barycentre suit

Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$. Une rotation transforme A, B et G en A', B' et G'. On donne $A'B' = 15$. Calculer la distance $A'G'$.

Donne la distance $A'G'$.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une rotation conserve le barycentre : G' est le barycentre de $(A', 2)$ et $(B', 3)$.
2. Le barycentre de $(A', 2)$ et $(B', 3)$ vérifie $\overrightarrow{A'G'} = \frac{3}{5}\overrightarrow{A'B'}$.

CORRECTION

La conservation — Une rotation conserve le barycentre, avec les mêmes coefficients.

G' barycentre de $(A', 2)$ et $(B', 3)$

La position de G' — Le point G' est sur $[A'B']$, avec un coefficient 3 sur B' et une somme des coefficients égale à 5.

$$\overrightarrow{A'G'} = \frac{3}{5}\overrightarrow{A'B'}$$

Calculer — On multiplie la longueur $A'B'$ par $\frac{3}{5}$.

$$A'G' = \frac{3}{5} \times 15 = 9$$

$A'G' = 9$: une rotation conserve le barycentre, et les distances sur la figure image se calculent comme sur la figure de départ.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → Le barycentre est plus près du point de plus grand coefficient, ici B' : $A'G'$ vaut les trois cinquièmes de $A'B'$, pas les deux cinquièmes.

`7.5` → Les coefficients sont différents : G' n'est pas le milieu de $[A'B']$.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

L'image d'un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Une rotation transforme A, B, C et D en A', B', C' et D'. Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$?

Donne la nature du quadrilatère.

Réponse attendue : `parallelogramme` — aussi acceptées : parallélogramme · un parallélogramme · un parallelogramme · c'est un parallélogramme · A'B'C'D' est un parallélogramme · le quadrilatère A'B'C'D' est un parallélogramme · il est un parallélogramme · c'est aussi un parallélogramme · un parallélogramme aussi · parallélogramme aussi · aussi un parallélogramme

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.
2. Une rotation conserve le milieu.

CORRECTION

Les diagonales — Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu I.

I milieu de $[AC]$ et de $[BD]$

Les images — Une rotation conserve le milieu : l'image I' de I est le milieu de $[A'C']$ et de $[B'D']$. Les diagonales de $A'B'C'D'$ ont le même milieu.

$A'B'C'D'$ est un parallélogramme

$A'B'C'D'$ est un parallélogramme : une rotation conserve le milieu, et aussi le parallélisme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`rectangle / un rectangle / c'est un rectangle` → Rien ne dit que $ABCD$ a un angle droit, et une rotation conserve les angles : elle n'en crée pas.

`carré / un carré / c'est un carré` → Une rotation conserve les distances et les angles : l'image n'est un carré que si $ABCD$ en est un.

EXERCICE 74 · DEFI

La médiane et les deux carrés

Soit ABC un triangle et M le milieu de $[BC]$, avec $AM = 4$. On construit à l'extérieur du triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$, de sorte que E et G soient les sommets voisins de A qui ne sont pas sur le triangle. Le quart de tour r de centre A qui transforme E en B transforme C en G. Calculer la distance EG.

Donne la distance EG.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est l'image de G par r ? Appliquer deux fois un quart de tour, c'est faire un demi-tour.
2. Note C' le symétrique de C par rapport à A : r transforme $[EG]$ en $[BC']$.
3. Dans le triangle CBC', A et M sont les milieux de deux côtés.

CORRECTION

L'image de G — r transforme C en G, donc G en l'image de C par deux quarts de tour de même sens, c'est-à-dire par le demi-tour de centre A : le symétrique C' de C par rapport à A.

$r(E) = B \quad ; \quad r(G) = C'$

Conservation des distances — r transforme le segment $[EG]$ en le segment $[BC']$.

$EG = BC'$

La droite des milieux — Dans le triangle CBC', A est le milieu de $[CC']$ et M celui de $[CB]$.

$BC' = 2\,AM = 8$

$EG = 8$, le double de la médiane AM : le quart de tour de centre A ramène $[EG]$ sur un côté d'un triangle où la droite des milieux s'applique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 est la médiane AM. Le segment $[EG]$ en est le double, par la droite des milieux.

`4*sqrt(2) / 8*sqrt(2)` → Il n'y a pas de diagonale de carré dans ce calcul : EG est l'image de $[BC']$, qui vaut deux fois AM.

EXERCICE 75 · PRATIQUE

Deux milieux qui tournent

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, A un point tel que $OA = 6$ et $B = r(A)$. On note I le milieu de $[OA]$ et $J = r(I)$. Calculer la distance IJ, en valeur exacte.

Donne la distance IJ, en valeur exacte.

Réponse attendue : `3*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(18) · 3√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une rotation conserve le milieu, et laisse son centre O invariant : où est J ?
2. Le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O.

CORRECTION

Le point J — I est le milieu de $[OA]$; son image J est le milieu de $[r(O)\,r(A)] = [OB]$.

$OJ = OI = 3$

Le triangle OIJ — L'angle $\widehat{IOJ}$ est droit.

$IJ^2 = 3^2 + 3^2 = 18$

Conclure — On prend la racine carrée.

$IJ = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$IJ = 3\sqrt{2}$: J est le milieu de $[OB]$, car une rotation conserve le milieu et laisse son centre fixe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(2)` → $6\sqrt{2}$ est la distance AB. I et J sont les milieux de $[OA]$ et de $[OB]$: la distance est deux fois plus petite.

`3` → 3 est la distance OI. On demande la distance entre I et son image.

`4.24 / 4.2 / 4.243` → On attend la valeur exacte : $3\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 76 · RAISONNEMENT

Un point du côté et son image

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6, et r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme B en C. Le point M est sur le côté $[BC]$, avec $BM = 2$, et $M' = r(M)$. Calculer la

distance MM', en valeur exacte.

Donne la distance MM', en valeur exacte.

Réponse attendue : `2*sqrt(7)` — aussi acceptées : sqrt(28) · 2√7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $AM' = AM$ et l'angle $\widehat{MAM'}$ mesure $\frac{\pi}{3}$: quelle est la nature du triangle AMM' ?
2. Il reste à calculer AM : appelle H le milieu de $[BC]$, pied de la hauteur issue de A.
3. AH est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 6, et $HM = 3 - 2$.

CORRECTION

Le triangle AMM' — M' est l'image de M : $AM' = AM$ et l'angle $\widehat{MAM'}$ mesure $\frac{\pi}{3}$. Le triangle AMM' est isocèle avec un angle de 60 degrés : il est équilatéral.

$MM' = AM$

La hauteur AH — Soit H le milieu de $[BC]$: (AH) est la hauteur, et $BH = 3$.

$AH^2 = 6^2 - 3^2 = 27$

Pythagore dans AHM — Le triangle AHM est rectangle en H, avec $HM = 3 - 2 = 1$.

$AM^2 = 27 + 1 = 28$

Conclure — On prend la racine carrée.

$MM' = AM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$MM' = 2\sqrt{7}$: un point et son image par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ forment avec le centre un triangle équilatéral.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(31)` → Tu as pris $HM = 2$: H est le milieu de $[BC]$, à 3 de B, donc $HM = 3 - 2 = 1$.

`2` → 2 est la distance BM. On demande la distance entre M et son image M'.

`6` → 6 est le côté du triangle. MM' est égale à AM, qui est plus courte que AB.

`5.29 / 5.3 / 5.292` → On attend la valeur exacte : $2\sqrt{7}$, sans arrondir.

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Un tiers de l'aire, après la rotation

Soit ABC un triangle d'aire 24 et G son centre de gravité. Une rotation transforme A, B et G en A', B' et G'. Calculer l'aire du triangle $A'B'G'$, sans écrire l'unité.

Donne l'aire du triangle $A'B'G'$.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle $A'B'G'$ est l'image du triangle ABG : ils ont la même aire.
2. Le centre de gravité partage le triangle ABC en trois triangles GAB, GBC et GCA de même aire.

CORRECTION

Superposables — Le triangle $A'B'G'$ est l'image du triangle ABG par la rotation : ils sont superposables.

$$\mathcal{A}(A'B'G') = \mathcal{A}(ABG)$$

Le centre de gravité — La distance de G à la droite (AB) est le tiers de celle de C, car G est aux deux tiers de la médiane issue de C.

$$\mathcal{A}(ABG) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC) = 8$$

L'aire de $A'B'G'$ est 8 : on calcule sur la figure de départ, la rotation conserve les aires.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → G n'est pas au milieu de la médiane : il est aux deux tiers à partir du sommet. Le triangle ABG a le tiers de l'aire.

16 → 16 est l'aire des deux autres triangles réunis, GBC et GCA. Le triangle ABG a le tiers de l'aire.

24 → 24 est l'aire du triangle ABC entier. $A'B'G'$ est l'image de ABG, qui n'en est qu'une partie.

EXERCICE 78 · BASE

Le centre du cercle image

Un cercle (C) a pour centre I et pour rayon $2{,}5$. Une rotation de centre O transforme I en J. Quel est le centre du cercle image de (C) ?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `J` — aussi acceptées : le point J · point J · c'est J · c'est le point J · = J · l'image est J · l'image est le point J · le centre est J · le centre est le point J

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour trouver l'image d'un cercle, on construit l'image de son centre et on garde le même rayon.

CORRECTION

La propriété — L'image du cercle de centre I et de rayon $2{,}5$ est le cercle de même rayon et de centre l'image de I.

$$\mathscr{C}(I\,;2{,}5) \longmapsto \mathscr{C}'(J\,;2{,}5)$$

Le cercle image a pour centre J et pour rayon $2{,}5$: on fait tourner le centre, le rayon ne change pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`O / le point O / point O / c'est O` → O est le centre de la rotation, pas celui du cercle image. Le centre du cercle tourne : il va en J.

`I / le point I / point I / c'est I` → Le cercle tourne avec son centre : I va en J, le centre de l'image est J.

EXERCICE 79 · PRATIQUE

Le centre de la rotation, pour deux cercles

Deux cercles ont le même rayon 4, et leurs centres I et J vérifient $IJ = 6$. Une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme le premier cercle en le second. Calculer la distance OI.

Donne la distance OI.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La rotation transforme le centre I en le centre J : $OI = OJ$, et l'angle $\widehat{IOJ}$ mesure $\frac{\pi}{3}$.
2. Quelle est la nature du triangle OIJ ?

CORRECTION

Les centres — L'image d'un cercle a pour centre l'image du centre : la rotation transforme I en J.

$$OI = OJ \quad ; \quad \widehat{IOJ} = \frac{\pi}{3}$$

Le triangle OIJ — Isocèle en O avec un angle de 60 degrés, le triangle OIJ est équilatéral.

$$OI = IJ = 6$$

$OI = 6$: le triangle OIJ est équilatéral ; le rayon 4 des cercles ne sert pas ici.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est le rayon des cercles. Le centre O de la rotation se trouve à partir des centres I et J.

3 → 3 est la distance de I au milieu de $[IJ]$. Le triangle OIJ est équilatéral : $OI = IJ$.

EXERCICE 80 · RAISONNEMENT

Deux quarts de tour possibles

Deux cercles distincts ont le même rayon. Combien y a-t-il de quarts de tour, directs ou indirects, qui transforment le premier cercle en le second ?

Donne le nombre de quarts de tour.

Réponse attendue : 2 — aussi acceptées : deux · 2 quarts de tour · deux quarts de tour · il y en a 2 · il y en a deux · il y a 2 quarts de tour · il y a deux quarts de tour · deux quarts de tour · 2 quarts de tour

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un quart de tour transforme le premier cercle en le second s'il transforme le centre I du premier en le centre J du second.
2. Le centre O du quart de tour est tel que le triangle OIJ soit rectangle et isocèle en O : combien y a-t-il de tels points ?

CORRECTION

Les centres — Les rayons sont égaux : il suffit que le quart de tour transforme I en J. Les cercles sont distincts, donc $I \neq J$.

$$OI = OJ \quad ; \quad \widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2}$$

Deux points — Il y a deux points O tels que OIJ soit rectangle et isocèle en O, de part et d'autre de la droite (IJ) : l'un donne le quart de tour direct, l'autre le quart de tour indirect.

2 quarts de tour

Il y a deux quarts de tour : un direct et un indirect, de centres symétriques par rapport à la droite (IJ).

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / 1 quart de tour / un quart de tour / il y en a 1 / il y en a un / un seul / un seul quart de tour` → Il y a un quart de tour direct, mais aussi un quart de tour indirect, de centre de l'autre côté de (IJ).

`une infinité / infinité / une infinite / infini` → Une infinité de rotations transforment I en J, mais l'angle est fixé à $\frac{\pi}{2}$: le centre n'a plus que deux positions.

EXERCICE 81 · RAISONNEMENT

Le lieu du troisième sommet

Le point A est fixe, et le point B décrit un cercle de centre ω et de rayon 2, avec $A\omega = 5$. On construit le triangle équilatéral ABC, en tournant dans le sens direct pour aller de B à C autour de A. Le point C décrit un cercle de centre ω'. Calculer la distance $\omega\omega'$.

Donne la distance $\omega\omega'$.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C est l'image de B par la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Le centre ω' est l'image de ω : quelle est la nature du triangle $A\omega\omega'$?

CORRECTION

La rotation — $AC = AB$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\frac{\pi}{3}$, dans le sens direct : C est l'image de B par la rotation r directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$B \longmapsto C$

Le lieu — Quand B décrit le cercle de centre ω, C décrit son image : le cercle de centre $\omega' = r(\omega)$ et de rayon 2.

$A\omega' = A\omega \quad ; \quad \widehat{\omega A\omega'} = \frac{\pi}{3}$

Conclure — Le triangle $A\omega\omega'$ est équilatéral.

$\omega\omega' = A\omega = 5$

$\omega\omega' = 5$: le lieu de C est l'image du cercle décrit par B, et son centre est l'image de ω.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 est le rayon des deux cercles. On demande la distance entre leurs centres.

`10` → ω' n'est pas le symétrique de ω par rapport à A : l'angle est $\frac{\pi}{3}$, pas π.

EXERCICE 82 · RAISONNEMENT

Le lieu sur une droite

Le point A est fixe, et le point B décrit une droite Δ qui ne passe pas par A. On construit le triangle équilatéral ABC, en tournant dans le sens direct pour aller de B à C autour de A. Le point C décrit alors une droite Δ'. Donner, en degrés, la mesure de l'angle aigu formé par les droites Δ et Δ'.

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `60`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C est l'image de B par une rotation de centre A : laquelle ?
2. Le lieu de C est l'image de la droite Δ par cette rotation.

CORRECTION

La rotation — $AC = AB$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\frac{\pi}{3}$, dans le sens direct : C est l'image de B par la rotation r directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$B \longmapsto C$$

Le lieu — Quand B décrit Δ, son image C décrit l'image de Δ par r.

$$\Delta' = r(\Delta)$$

L'angle — Une droite et son image par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ forment un angle de 60 degrés.

$$(\Delta, \Delta') = 60°$$

Les droites Δ et Δ' forment un angle de 60 degrés : le lieu de C est l'image du lieu de B, et une droite tourne de l'angle de la rotation.

PIÈGES ANTICIPÉS

`120` → 120 degrés n'est pas un angle aigu. L'angle de la rotation est $\frac{\pi}{3}$, soit 60 degrés.

`90` → Les droites sont perpendiculaires pour un quart de tour. Ici, le triangle est équilatéral : l'angle est $\frac{\pi}{3}$.

`pi/3` → $\frac{\pi}{3}$ est la mesure en radians. On demande la mesure en degrés.

EXERCICE 83 · DEFI

La plus grande hypoténuse

Soit IJK un triangle isocèle et rectangle en I. Le point I est fixe, et le point J décrit un cercle (C) de centre A et de rayon 2, avec $IA = 6$. Quelle est la plus grande valeur possible de la distance JK, en valeur exacte ?

Donne cette distance, en valeur exacte.

Réponse attendue : `8*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(128) · 8√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle IJK, rectangle et isocèle en I, exprime JK en fonction de IJ.
2. JK est la plus grande quand IJ est la plus grande : où placer J sur le cercle pour être le plus loin possible de I ?

CORRECTION

L'hypoténuse — K est l'image de J par un quart de tour de centre I : le triangle IJK est rectangle et isocèle en I.

$$JK = IJ\sqrt{2}$$

La plus grande distance IJ — Pour tout point J du cercle, $IJ \leq IA + AJ$, avec égalité quand J est sur la demi-droite $[IA)$, au-delà de A.

$IJ \leq 6 + 2 = 8$

Conclure — On multiplie par $\sqrt{2}$.

$JK \leq 8\sqrt{2}$

La plus grande valeur de JK est $8\sqrt{2}$, quand J est le point du cercle le plus éloigné de I.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(2)` → $6\sqrt{2}$ correspond à $IJ = 6$, quand J serait au centre A. Or J est sur le cercle, et peut s'éloigner de 2 de plus.

`4*sqrt(2)` → $4\sqrt{2}$ est la plus petite valeur, quand J est le point du cercle le plus proche de I.

`8` → 8 est la plus grande valeur de IJ. L'hypoténuse JK vaut IJ multipliée par $\sqrt{2}$.

`11.31 / 11.3 / 11.314` → On attend la valeur exacte : $8\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 84 · BASE

Le point de contact

Une droite T est tangente en A à un cercle $\mathscr{C}$. Une rotation r transforme T en T', $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et A en B. En quel point la droite T' est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}'$?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : B — aussi acceptées : le point B · point B · en B · au point B · c'est B · c'est le point B · = B · r(A) · en r(A) · au point r(A)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une rotation conserve le contact : le point de contact suit la rotation.

CORRECTION

Le contact — Une rotation conserve le contact : l'image d'une tangente en A est tangente au cercle image en l'image de A.

T' tangente à $\mathscr{C}'$ en $B = r(A)$

T' est tangente à $\mathscr{C}'$ en B, l'image de A : une rotation conserve le contact.

PIÈGES ANTICIPÉS

`A / le point A / point A / en A` → A est le point de contact avant la rotation. Le point de contact tourne avec la figure : c'est son image.

EXERCICE 85 · PRATIQUE

Deux points de contact

Une droite D est tangente en H à un cercle de centre O et de rayon 5. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme D en une droite D', tangente au même cercle en H'. Calculer la distance HH'.

Donne la distance HH'.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cercle de centre O est invariant, et le contact est conservé : H' est l'image de H.
2. Quelle est la nature du triangle OHH' ?

CORRECTION

L'image du point de contact — La rotation de centre O laisse le cercle invariant et conserve le contact : $H' = r(H)$.

$$OH' = OH \quad ; \quad \widehat{HOH'} = \frac{\pi}{3}$$

Le triangle OHH' — Isocèle en O avec un angle de 60 degrés, il est équilatéral.

$$HH' = OH = 5$$

$HH' = 5$: les points de contact se correspondent par la rotation, et le triangle OHH' est équilatéral.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → H et H' ne sont pas diamétralement opposés : l'angle $\widehat{HOH'}$ mesure $\frac{\pi}{3}$, pas π.

`5*sqrt(3)` → Le triangle OHH' est équilatéral : HH' est égal au rayon.

EXERCICE 86 · RAISONNEMENT

Où se coupent les deux tangentes

Une droite D est tangente en H à un cercle de centre O et de rayon 5. Le quart de tour de centre O transforme D en une droite D', qui coupe D en K. Calculer la distance OK, en valeur exacte.

Donne la distance OK, en valeur exacte.

Réponse attendue : `5*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(50) · 5√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D' est tangente au même cercle, en H' image de H : que vaut l'angle $\widehat{HOH'}$?
2. Le quadrilatère $OHKH'$ a trois angles droits et deux côtés consécutifs égaux.

CORRECTION

Le point de contact — Le cercle est invariant et le contact est conservé : D' est tangente au cercle en $H' = r(H)$.

$$OH' = OH = 5 \quad ; \quad \widehat{HOH'} = 90^\circ$$

Un carré — Les tangentes sont perpendiculaires aux rayons : $OHKH'$ a quatre angles droits et $OH = OH'$. C'est un carré de côté 5.

$OHKH'$ carré de côté 5

Sa diagonale — $[OK]$ est une diagonale du carré.

$$OK = 5\sqrt{2}$$

$OK = 5\sqrt{2}$: deux tangentes qui se correspondent par un quart de tour forment avec les rayons un carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 est le rayon, égal à HK. $[OK]$ est la diagonale du carré $OHKH'$.

`10` → OK n'est pas la somme de deux côtés : c'est la diagonale du carré $OHKH'$.

`7.07 / 7.1 / 7.071` → On attend la valeur exacte : $5\sqrt{2}$, sans arrondir.

EXERCICE 87 · DEFI

Deux tangentes à cent vingt degrés

Une droite D est tangente en H à un cercle de centre O et de rayon 4. La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ transforme D en une droite D', qui coupe D en K. Calculer la distance OK.

Donne la distance OK.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D' est tangente au cercle en $H' = r(H)$, et l'angle $\widehat{HOH'}$ mesure 120 degrés.
2. Les triangles OHK et $OH'K$ sont rectangles et superposables : (OK) partage l'angle $\widehat{HOH'}$ en deux.
3. Dans le triangle OHK rectangle en H, l'angle $\widehat{HOK}$ mesure 60 degrés : utilise son cosinus.

CORRECTION

Le point de contact — Le contact est conservé : D' est tangente au cercle en $H' = r(H)$.

$\widehat{HOH'} = 120°$

La bissectrice — Les triangles OHK et $OH'K$ sont rectangles en H et en H', d'hypoténuse commune $[OK]$, avec $OH = OH'$: ils sont isométriques, et (OK) coupe l'angle en deux.

$\widehat{HOK} = 60°$

Le cosinus — Dans le triangle OHK rectangle en H.

$$\cos 60° = \frac{OH}{OK} \quad \text{donc} \quad OK = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$OK = 8$: le contact conservé donne le second point de contact, et la trigonométrie du triangle rectangle fait le reste.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4*sqrt(2)` → Ce serait la réponse pour un quart de tour. Ici, l'angle $\widehat{HOH'}$ mesure 120 degrés, et $\widehat{HOK}$ mesure 60 degrés.

`4*sqrt(3)` → $4\sqrt{3}$ est la longueur HK, le côté opposé à l'angle de 60 degrés. On demande l'hypoténuse OK.

`4` → 4 est le rayon OH. K est hors du cercle : OK est plus grand.

EXERCICE 88 · BASE

L'aire ne change pas

Un triangle ABC a pour aire 15. Une rotation le transforme en un triangle $A'B'C'$. Calculer l'aire du triangle $A'B'C'$, sans écrire l'unité.

Donne l'aire du triangle $A'B'C'$.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un polygone et son image par une rotation sont superposables.

CORRECTION

Superposables — Le triangle $A'B'C'$ est superposable au triangle ABC : ils ont la même aire.

$$\mathcal{A}(A'B'C') = 15$$

L'aire est 15 : une rotation conserve les aires.

PIÈGES ANTICIPÉS

30 → Une rotation ne change pas la taille de la figure : l'aire reste la même.

EXERCICE 89 · PRATIQUE

Six triangles dans l'hexagone

Un hexagone régulier de centre O a pour aire 48. On note A et B deux sommets voisins. Calculer l'aire du triangle OAB, sans écrire l'unité.

Donne l'aire du triangle OAB.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ fait passer chaque sommet au suivant.
2. Les six triangles formés par O et deux sommets voisins se déduisent les uns des autres par cette rotation.

CORRECTION

Six triangles superposables — La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme chaque triangle de sommet O en le suivant : les six triangles sont superposables, donc de même aire.

$$6 \times \mathcal{A}(OAB) = 48$$

Calculer — On divise par 6.

$$\mathcal{A}(OAB) = 8$$

L'aire du triangle OAB est 8 : la rotation qui laisse l'hexagone invariant le partage en six triangles superposables.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → L'hexagone se partage en six triangles de sommet O, pas en quatre.

16 → Un hexagone a six côtés : il y a six triangles de sommet O, pas trois.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Deux carrés qui se chevauchent

Soit $ABCD$ un carré de côté 8 et de centre O. Un second carré $OEFG$, lui aussi de côté 8, a pour sommet le point O ; son côté $[OE]$ coupe le côté $[AB]$ et son côté $[OG]$ coupe le côté $[BC]$. Calculer l'aire de la partie commune aux deux carrés, sans écrire l'unité.

Donne l'aire de la partie commune.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note P le point où $[OE]$ coupe $[AB]$, et Q celui où $[OG]$ coupe $[BC]$. Le quart de tour de centre O qui transforme A en B : quelle est l'image de P ?
2. Compare les triangles OAP et OBQ.
3. La partie commune $OPBQ$ a donc la même aire qu'un triangle facile à calculer, de sommets O, A et B.

CORRECTION

Le quart de tour — Soit r le quart de tour de centre O qui transforme A en B et B en C. Les droites (OE) et (OG) sont perpendiculaires : r transforme la demi-droite $[OE)$ en $[OG)$. Si $[OE]$ coupe $[AB]$ en P et $[OG]$ coupe $[BC]$ en Q, alors $r(P) = Q$.

$$r(P) = Q$$

Des triangles superposables — Le triangle OAP a pour image le triangle OBQ : ils ont la même aire. La partie commune $OPBQ$ a donc la même aire que le triangle OAB.

$$\mathcal{A}(OPBQ) = \mathcal{A}(OPB) + \mathcal{A}(OBQ) = \mathcal{A}(OPB) + \mathcal{A}(OAP) = \mathcal{A}(OAB)$$

Le quart du carré — Le triangle OAB est le quart du carré $ABCD$.

$$\frac{64}{4} = 16$$

La partie commune a pour aire 16, le quart du carré, quelle que soit la position du second carré : le quart de tour de centre O échange les morceaux.

PIÈGES ANTICIPÉS

32 → La partie commune ne couvre pas la moitié du carré $ABCD$: elle a la même aire que le triangle OAB, son quart.

64 → 64 est l'aire du carré $ABCD$ entier. La partie commune n'en est qu'un quart.

8 → 8 est l'aire d'un huitième du carré. La partie commune a la même aire que le triangle OAB, un quart.

EXERCICE 91 · DEFI

Un triangle rectangle au centre du carré

Soit $EFGH$ un carré de côté 6 et de centre O. Le point R est sur le côté $[FG]$ et le point S sur le côté $[GH]$, avec $FR = GS = 2$. Le quart de tour de centre O qui transforme F en G transforme G en H. Calculer l'aire du triangle ORS, sans écrire l'unité.

Donne l'aire du triangle ORS.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ce quart de tour transforme le segment $[FG]$ en $[GH]$: quelle est l'image de R ?
2. Le triangle ORS est rectangle et isocèle en O : son aire est $\dfrac{OR^2}{2}$.
3. Pour calculer OR, appelle N le milieu de $[FG]$: $ON = 3$ et $NR = 1$.

CORRECTION

L'image de R — Le quart de tour transforme F en G et G en H, donc $[FG]$ en $[GH]$; il envoie le point de $[FG]$ à la distance 2 de F sur le point de $[GH]$ à la distance 2 de G.

$$r(R) = S$$

Le triangle ORS — $OS = OR$ et l'angle $\widehat{ROS}$ est droit : ORS est rectangle et isocèle en O.

$$\mathcal{A}(ORS) = \frac{OR \times OS}{2} = \frac{OR^2}{2}$$

La distance OR — Soit N le milieu de $[FG]$: le triangle ONR est rectangle en N, avec $ON = 3$ et $NR = 3 - 2 = 1$.

$$OR^2 = 9 + 1 = 10$$

Conclure — On divise par 2.

$$\mathcal{A}(ORS) = \frac{10}{2} = 5$$

L'aire du triangle ORS est 5 : le quart de tour fait de ORS un triangle rectangle et isocèle, et Pythagore donne OR^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → 9 est l'aire du quadrilatère $ORGS$, égale à celle du triangle OFG. Le triangle ORS n'en est qu'une partie.

`10` → 10 est OR^2. L'aire du triangle rectangle est le demi-produit des côtés de l'angle droit.

`4.5` → Tu as pris $OR = 3$: R n'est pas le milieu de $[FG]$, donc OR est un peu plus grand que 3.

EXERCICE 92 · DEFI

Le périmètre qui ne dépend de rien

Soit $ABCD$ un carré de côté 6 tel que D soit l'image de B par le quart de tour direct de centre A. Les points M et N sont sur les côtés $[BC]$ et $[CD]$, de sorte que l'angle $\widehat{MAN}$ mesure $\frac{\pi}{4}$. Calculer le périmètre du triangle CMN.

Donne le périmètre du triangle CMN.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Fais tourner le triangle ABM par le quart de tour de centre A : B va en D, et M va en un point M' de la droite (CD), au-delà de D.
2. Compare les triangles AMN et $AM'N$: ils ont deux côtés égaux et l'angle compris égal.
3. Tu obtiens $MN = M'N = BM + DN$.

CORRECTION

Le quart de tour — Le quart de tour r direct de centre A transforme B en D, et la droite (BC) en la droite (CD). Il transforme M en un point M' de (CD), au-delà de D.

$$AM' = AM \quad ; \quad DM' = BM \quad ; \quad \widehat{MAM'} = 90°$$

Deux triangles isométriques — L'angle $\widehat{NAM'}$ vaut $90° - 45° = 45°$, comme $\widehat{MAN}$. Les triangles AMN et $AM'N$ ont un angle égal compris entre deux côtés égaux : ils sont isométriques.

$$MN = M'N = M'D + DN = BM + DN$$

Le périmètre — On remplace MN.

$$CM + MN + NC = (CM + BM) + (DN + NC) = CB + CD = 12$$

Le périmètre du triangle CMN vaut 12, le double du côté, où que soit M : le quart de tour de centre A déplie le triangle sur une droite.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Le périmètre vaut la somme de deux côtés du carré : $MN = BM + DN$, et il reste CM et NC.

18 → MN n'est pas un côté du carré : elle vaut $BM + DN$. Le périmètre est $CB + CD$.

24 → 24 est le périmètre du carré. Le triangle CMN a pour périmètre la somme de deux côtés seulement.

EXERCICE 93 · PRATIQUE

Combien de carrés ?

On donne un point A, une droite L_1 et un cercle Γ. On cherche les carrés $ABCD$ tels que B soit sur L_1, D sur Γ, et que l'on tourne dans le sens direct pour aller de B à D autour de A. L'image L_2 de L_1 par le quart de tour direct de centre A coupe le cercle Γ en deux points. Combien y a-t-il de tels carrés ?

Donne le nombre de carrés.

Réponse attendue : 2 — aussi acceptées : deux · 2 carrés · deux carrés · il y en a 2 · il y en a deux · il y a 2 carrés · il y a deux carrés · deux carrés · 2 carrés

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le sommet D est l'image de B par le quart de tour direct de centre A : il est sur L_2.
2. Chaque point commun à L_2 et à Γ donne un sommet D possible, et un seul carré.

CORRECTION

Analyse — D est l'image de B par le quart de tour direct de centre A ; B est sur L_1, donc D est sur L_2. Il est aussi sur Γ.

$$D \in L_2 \cap \Gamma$$

Compter — Chaque point D de $L_2 \cap \Gamma$ donne B, son antécédent, puis le carré $ABCD$. Il y a deux points d'intersection.

$$2 \text{ carrés}$$

Il y a deux carrés : autant que de points communs à la droite L_2 et au cercle Γ.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / 1 carré / un carré / il y en a 1 / il y en a un / un seul / un seul carré` → Chaque point commun à L_2 et à Γ donne un carré : il y en a deux.

`4 / quatre / 4 carrés / quatre carrés / il y en a 4 / il y en a quatre` → Le sens est imposé : seul le quart de tour direct convient. Il y a un carré par point d'intersection.

EXERCICE 94 · RAISONNEMENT

Un triangle équilatéral entre deux parallèles

Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles distinctes, et S un point qui n'est sur aucune d'elles. Combien y a-t-il de triangles équilatéraux SMN tels que M soit sur Δ_1 et N sur Δ_2 ?

Donne le nombre de triangles.

Réponse attendue : 2 — aussi acceptées : deux · 2 triangles · deux triangles · il y en a 2 · il y en a deux · il y a 2 triangles · il y a deux triangles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. N est l'image de M par une rotation de centre S et d'angle $\frac{\pi}{3}$: directe ou indirecte.
2. Pour chaque sens, N est à l'intersection de Δ_2 et de l'image de Δ_1. Ces deux droites peuvent-elles être parallèles ?

CORRECTION

Analyse — $SN = SM$ et l'angle $\widehat{MSN}$ mesure $\frac{\pi}{3}$: N est l'image de M par la rotation directe ou indirecte de centre S et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donc N est sur l'image Δ_1' de Δ_1.

$$N \in \Delta_1' \cap \Delta_2$$

Un point pour chaque sens — Δ_1' fait un angle de 60 degrés avec Δ_1, donc avec Δ_2 : elle coupe Δ_2 en un seul point. Un triangle avec la rotation directe, un avec la rotation indirecte.

$$2 \text{ triangles}$$

Il y a deux triangles, un pour chaque sens de rotation : l'image de Δ_1 coupe toujours Δ_2, car elle fait avec elle un angle de 60 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / 1 triangle / un triangle / il y en a 1 / il y en a un / un seul / un seul triangle` → Il y a un triangle avec la rotation directe, et un autre avec la rotation indirecte.

`une infinité / infinité / une infinite / infini` → Le point M n'est pas libre : N doit être à la fois sur Δ_2 et sur l'image de Δ_1. Il n'y a qu'un point par sens.

EXERCICE 95 · BASE

Les axes du triangle équilatéral

Combien un triangle équilatéral a-t-il d'axes de symétrie ?

Donne le nombre d'axes.

Réponse attendue : 3 — aussi acceptées : trois · 3 axes · trois axes · il y en a 3 · il y en a trois · il y a 3 axes · il y a trois axes · 3 axes de symétrie · trois axes de symétrie · il a 3 axes · il a trois axes · il a trois axes de symétrie

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque médiatrice d'un côté passe par le sommet opposé.

CORRECTION

Les médiatrices — Les axes de symétrie d'un triangle équilatéral sont les médiatrices de ses trois côtés.

$$3 \text{ axes}$$

Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie : les médiatrices de ses côtés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / 1 axe / un axe / il y en a 1 / il y en a un / un seul axe` → Un seul axe, c'est le cas d'un triangle isocèle non équilatéral. Ici, chaque sommet a le sien.

`6 / six / 6 axes / six axes / il y en a 6 / il y en a six` → Chaque axe passe par un sommet et par le milieu du côté opposé : il n'y en a que trois.

EXERCICE 96 · BASE

Un centre de symétrie ?

Un triangle équilatéral a-t-il un centre de symétrie ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non il n'en a pas · non, il n'en a pas · il n'en a pas · il n'a pas de centre de symétrie · non il n'a pas de centre de symétrie · non, il n'a pas de centre de symétrie · pas de centre de symétrie · aucun · non aucun · non, aucun · aucun centre de symétrie

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la symétrie de centre O, le sommet A irait de l'autre côté de O : y a-t-il un sommet à cet endroit ?

CORRECTION

Le centre candidat — Seul le centre O du triangle pourrait convenir. Le symétrique de A par rapport à O est sur la droite (AO), de l'autre côté de O, à la distance OA : ce n'est pas un sommet du triangle.

non

Non : un triangle équilatéral est invariant par les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de son centre, mais pas par le demi-tour.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui il en a un / oui, il en a un / oui son centre / oui, son centre` → Le triangle a un centre, mais ce n'est pas un centre de symétrie : le demi-tour autour de lui n'envoie pas les sommets sur des sommets.

EXERCICE 97 · PRATIQUE

Le plus petit angle pour l'hexagone

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Quelle est, en radians, la plus petite mesure non nulle de l'angle d'une rotation de centre O qui laisse cet hexagone globalement invariant ?

Écris l'angle en radians, avec pi.

Réponse attendue : `pi/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une telle rotation envoie chaque sommet sur un sommet.
2. Le plus petit pas fait passer chaque sommet à son voisin : quel est l'angle au centre entre deux sommets voisins ?

CORRECTION

Un sommet sur un sommet — La rotation doit envoyer A sur un autre sommet. Le plus proche est son voisin B (ou F).

$$\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{6}$$

Simplifier — Les six angles au centre sont égaux.

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Le plus petit angle est $\frac{\pi}{3}$: l'angle au centre entre deux sommets voisins.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*pi/3` → $\frac{2\pi}{3}$ convient aussi, mais il saute un sommet : un angle plus petit marche déjà.

`60` → 60 est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians.

EXERCICE 98 · RAISONNEMENT

Le dodécagone régulier

Un polygone régulier à 12 côtés a pour centre O. Combien y a-t-il de rotations directes de centre O, d'angle appartenant à $]0\,;\pi]$, qui le laissent globalement invariant ?

Donne le nombre de rotations.

Réponse attendue : 6 — aussi acceptées : six · 6 rotations · six rotations · il y en a 6 · il y en a six · il y a 6 rotations · il y a six rotations · six rotations · 6 rotations

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les angles qui conviennent sont les multiples de l'angle au centre entre deux sommets voisins.
2. Cet angle vaut $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Combien de ses multiples sont dans $]0\,;\pi]$?

CORRECTION

L'angle de base — Deux sommets voisins sont séparés par un angle au centre de $\frac{\pi}{6}$; une rotation de centre O laisse le polygone invariant si son angle en est un multiple.

$$\alpha = k \times \frac{\pi}{6}$$

Compter — On veut $0 < k \times \frac{\pi}{6} \leq \pi$, c'est-à-dire $1 \leq k \leq 6$. Pour $k = 6$, c'est le demi-tour.

$$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il y en a six, de $\frac{\pi}{6}$ à π : le demi-tour compte, car π est dans l'intervalle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12 / douze / 12 rotations / douze rotations / il y en a 12 / il y en a douze` → Les angles sont limités à $]0\,;\pi]$: au-delà de π, on retrouve les rotations indirectes, qui ne sont pas comptées.

`5 / cinq / 5 rotations / cinq rotations / il y en a 5 / il y en a cinq` → L'intervalle $]0\,;\pi]$ est fermé en π : le demi-tour, qui laisse le polygone invariant, compte aussi.

EXERCICE 99 · PRATIQUE

Le losange qui tourne

Soit $ABCD$ un losange de centre O qui n'est pas un carré. Une rotation de centre O, autre que l'identité, laisse ce losange globalement invariant. Quelle est, en radians, la mesure de son angle ?

Écris l'angle en radians, avec pi.

Réponse attendue : `pi`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales d'un losange qui n'est pas un carré n'ont pas la même longueur.
2. La rotation doit envoyer A sur un sommet à la même distance de O : lequel ?

CORRECTION

Les distances — Une rotation de centre O conserve la distance à O. Seul C est, comme A, à la distance OA de O, car $OB \neq OA$.

$$A \longmapsto C$$

L'angle — O est le milieu de $[AC]$: l'angle $\widehat{AOC}$ est plat.

$$\alpha = \pi$$

La rotation a pour angle π : c'est la symétrie de centre O. Un quart de tour ne convient que pour un carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/2` → Le quart de tour enverrait A sur B ou D, plus proches de O : il ne convient que si le losange est un carré.

`180` → 180 est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians.

EXERCICE 100 · DEFI

Le carré des milieux

Soit RST un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $RSUV$ et $STWX$, et on note E, F, G et H les milieux respectifs de $[RU]$, $[UX]$, $[XT]$ et $[TR]$. On admet que $EFGH$ est un carré. On donne $TU = 12$. Calculer le périmètre du carré $EFGH$.

Donne le périmètre du carré $EFGH$.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle URX, E et F sont les milieux de deux côtés : la droite des milieux donne EF en fonction de RX.
2. Il reste à comparer RX et TU : cherche un quart de tour de centre S qui transforme U en R.
3. Ce quart de tour transforme aussi T en X.

CORRECTION

Le quart de tour — $SU = SR$ et $SX = ST$, avec des angles droits en S : le quart de tour de centre S qui transforme U en R transforme T en X, donc le segment $[UT]$ en $[RX]$.

$$RX = TU = 12$$

La droite des milieux — Dans le triangle URX, E est le milieu de $[UR]$ et F celui de $[UX]$.

$$EF = \frac{RX}{2} = 6$$

Le périmètre — $EFGH$ est un carré de côté 6.

$$4 \times 6 = 24$$

Le périmètre du carré $EFGH$ est 24 : le quart de tour de centre S donne $RX = TU$, et la droite des milieux donne le côté.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est le côté du carré $EFGH$. On demande son périmètre.

48 → EF n'est pas égal à RX : la droite des milieux en donne la moitié.

36 → 36 est l'aire du carré $EFGH$. On demande son périmètre.

EXERCICE 101 · RAISONNEMENT

Trois cents pas à reculons

Les points A, B, C, D, E, F et G sont, dans cet ordre et dans le sens direct, les sommets d'un polygone régulier à 7 côtés de centre O. On part du sommet A et on applique 300 fois de suite la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{7}$. Sur quel sommet arrive-t-on ?

Écris le nom du sommet.

Réponse attendue : B — aussi acceptées : le point B · point B · c'est B · c'est le point B · = B · le sommet B · sommet B · en B · on arrive en B · on arrive sur B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque application de la rotation indirecte fait reculer d'un sommet : de A, on va en G. Sept applications font un tour complet.
2. Cherche le reste de la division euclidienne de 300 par 7.

CORRECTION

Les tours complets — Sept pas ramènent au point de départ : seuls comptent les pas en plus des tours complets.

$$300 = 7 \times 42 + 6$$

Les pas restants — On recule de six sommets à partir de A, dans le sens indirect : G, F, E, D, C, puis B.

$$A \longmapsto B$$

On arrive en B : reculer de six sommets sur sept revient à avancer d'un seul.

PIÈGES ANTICIPÉS

`G / le point G / point G / c'est G / le sommet G` → G est le sommet obtenu en avançant de six pas dans le sens direct. Ici, la rotation est indirecte : on recule.

`C / le point C / point C / c'est C / le sommet C` → C est à cinq pas en arrière de A. Le reste est 6 : on recule de six sommets.

`A / le point A / point A / c'est A / le sommet A` → 300 n'est pas un multiple de 7 : il reste 6 pas après les tours complets.

EXERCICE 102 · DEFI

Ensemble au départ, combien de fois ?

Deux polygones réguliers, l'un à 12 côtés et l'autre à 8 côtés, ont un sommet commun S. Un pion fait le tour du premier et un autre le tour du second : à chaque pas, chaque pion passe d'un sommet au sommet suivant de son polygone, dans le sens direct. Les deux pions partent de S et font 500 pas. Combien de fois, après le départ, sont-ils ensemble en S ?

Donne le nombre de fois.

Réponse attendue : `20` — aussi acceptées : 20 fois · vingt · vingt fois · il y a 20 fois · ils y sont 20 fois · ils sont ensemble 20 fois

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier pion est en S après un nombre de pas multiple de 12, le second après un multiple de 8.
2. Les deux sont ensemble en S après un multiple de $\mathrm{PPCM}(12, 8)$: combien y en a-t-il entre 1 et 500 ?

CORRECTION

Les deux conditions — Le premier pion revient en S tous les 12 pas, le second tous les 8 pas : ils sont ensemble en S après un multiple commun de 12 et de 8.

$$\mathrm{PPCM}(12, 8) = 24$$

Compter — On compte les multiples de 24 entre 1 et 500.

$$500 = 24 \times 20 + 20$$

Ils sont ensemble en S vingt fois : après 24, 48, ..., 480 pas, les multiples du PPCM de 12 et de 8.

PIÈGES ANTICIPÉS

`21 / 21 fois / vingt et un / vingt et un fois` → Le départ ne compte pas : on compte les retours ensemble après le départ.

`41 / 41 fois / 62 / 62 fois` → C'est le nombre de retours d'un seul pion. Il faut que l'autre soit en S au même moment.

`5 / 5 fois / cinq / cinq fois` → Tu as pris le produit $12 \times 8 = 96$. Le premier retour commun se fait au PPCM, 24.

EXERCICE 103 · DEFI

Revenir au départ par sauts

Un polygone régulier à 20 côtés a pour centre O. On part d'un sommet A et on applique plusieurs fois de suite la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{5}$. Au bout de combien d'applications, au minimum, revient-on pour la première fois en A ?

Donne le nombre d'applications.

Réponse attendue : `5` — aussi acceptées : 5 fois · cinq · cinq fois · 5 applications · cinq applications · au bout de 5 · au bout de 5 applications · n = 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De combien de sommets avance-t-on à chaque application ? Compare $\frac{4\pi}{5}$ à l'angle au centre $\frac{2\pi}{20}$.

2. On revient en A quand le nombre total de sommets parcourus est un multiple de 20.

CORRECTION

Un saut de huit sommets — L'angle au centre entre deux sommets voisins est $\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$, et $\frac{4\pi}{5} = \frac{8\pi}{10}$.

$$\frac{4\pi}{5} = 8 \times \frac{\pi}{10}$$

Le retour — Après n applications, on a avancé de $8n$ sommets ; on revient en A quand $8n$ est un multiple de 20. Le plus petit multiple commun de 8 et de 20 est 40.

$$8n = 40 \quad \text{donc} \quad n = 5$$

On revient en A au bout de cinq applications : $8n$ doit être un multiple de 20, et le PPCM de 8 et 20 vaut 40.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20 / 20 fois / vingt / vingt fois` → 20 applications ramènent bien en A, mais ce n'est pas la première fois : on y revient déjà plus tôt.

`2.5 / 5/2` → Le nombre d'applications est un entier : on cherche le plus petit n tel que $8n$ soit un multiple de 20.

`8 / 8 fois / huit / huit fois` → 8 est le nombre de sommets parcourus à chaque application, pas le nombre d'applications.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI