— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Suites arithmétiques

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum bech nfassrou m3a b3adhna chapitre jdid : les suites arithmétiques. Bech nchoufou chnowa hiya suite, kifech na7sbou les termes mte3ha, w kifech na3rfou elli hiya arithmétique. W mba3d net3allmou le terme général, la représentation graphique, w la somme mta3 des termes consécutifs. Yalla, nabdew.

عسلامة ! ليوم باش نفسّرو مع بعضنا chapitre جديد : les suites arithmétiques . باش نشوفو شنوّة هي suite ، كيفاش نحسبو les termes متاعها ، w كيفاش نعرفو اللي هي arithmétique . w مبعّد نتعلّمو le terme général ، w la somme متاع la représentation graphique des termes consécutifs . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Aujourd'hui, on va expliquer ensemble un nouveau chapitre : les suites arithmétiques. Nous verrons ce qu'est une suite, comment calculer ses termes, et comment reconnaître qu'elle est arithmétique. Ensuite, nous apprendrons le terme général, la représentation graphique, et la somme de termes consécutifs. Allez, on commence.

Une liste de nombres rangés dans un ordre précis, où chaque nombre a sa place : c'est une **suite**. Ce chapitre apprend à la noter, à calculer ses termes et à la représenter.

Il étudie surtout les suites **arithmétiques**, celles où l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre : leur terme général, leur représentation graphique et la somme de leurs termes consécutifs.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Calculer les termes d'une suite donnée par son terme général ou par une relation de récurrence

  > Calculer les termes d'une suite donnée par son terme général ou par une relation de récurrence.

> *Calculer les termes d'une suite donnée par son terme général ou par une relation de récurrence.*

- Reconnaître une suite arithmétique et déterminer sa raison

  > Reconnaître une suite arithmétique et déterminer sa raison.
  > *Reconnaître une suite arithmétique et déterminer sa raison.*

- Utiliser les formules $U_n = U_0 + nr$ et $U_n = U_p + (n-p)\,r$

  > Utiliser les formules U indice n égale U indice zéro plus n fois r, et U indice n égale U indice p, plus (n moins p) fois r.
  > *Utiliser les formules U indice n égale U indice zéro plus n fois r, et U indice n égale U indice p, plus (n moins p) fois r.*

- Représenter graphiquement une suite arithmétique et lire sa raison sur un graphique

  > Représenter graphiquement une suite arithmétique et lire sa raison sur un graphique.
  > *Représenter graphiquement une suite arithmétique et lire sa raison sur un graphique.*

- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

  > Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.
  > *Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.*

---

1. ACTIVITÉ

Pour comprendre : des listes qui obéissent à une loi

CE QU'IL DIT

Chouf les listes hedhom : koll wa7da temchi 3la loi. La liste : cinq, trois, un, moins un, moins trois : koll marra nna9sou deux, idhan elli ba3dhom moins cinq w moins sept. La liste : un, quatre, neuf, seize, vingt-cinq : hedhom les carrés, idhan elli ba3dhom trente-six w quarante-neuf. W la liste : un, deux, trois, cinq, huit : koll terme houwa la somme mta3 ezzouz elli sab9ouh, idhan treize w vingt-et-un. Ki tal9a la loi, tnajjem tkammel la liste 9add ma t7ebb.

شوف الـ listes هاذم : كل وحدة تمشي على loi . الـ liste : cinq ، trois ، un ، moins un ، moins trois : كل مرّة ننقصو deux ، إذن اللي بعدهم moins cinq w moins sept . الـ liste : un ، quatre ، neuf ، seize ، vingt-cinq : هاذم les carrés ، إذن اللي بعدهم w . الـ trente-six w quarante-neuf liste : un ، deux ، trois ، cinq ، huit : كل terme هو la somme متاع الزوز اللي سبقوه ، إذن treize w vingt-et-un . كي تلقى la loi ، تنجّم تكمّل الـ liste قدّ ما تحبّ .

Regarde ces listes : chacune suit une loi. La liste cinq, trois, un, moins un, moins trois : on retranche deux à chaque fois, donc les suivants sont moins cinq et moins sept. La liste un, quatre, neuf, seize, vingt-cinq : ce sont les carrés, donc les suivants sont trente-six et quarante-neuf. Et la liste un, deux, trois, cinq, huit : chaque terme est la somme des deux précédents, donc treize et vingt-et-un. Quand on a trouvé la loi, on peut continuer la liste aussi loin qu'on veut.

Chacune des listes de nombres suivantes obéit à une **loi**. Découvre cette loi, puis donne les deux termes suivants.

a) $5\,;\,3\,;\,1\,;\,-1\,;\,-3\,;\,\ldots$

b) $\frac{1}{4}$; 1 ; $\frac{7}{4}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{13}{4}$; …

c) 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; …

d) 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; …

e) -2 ; -3 ; -5 ; -9 ; -17 ; …

Une liste de nombres rangés dans un ordre précis, où chaque nombre a sa place, c'est l'idée de **suite** : tout ce chapitre en parle.

EXEMPLE TRAITÉ

Trouve la loi de chacune des cinq listes et donne ses deux termes suivants.

Liste a — On retranche 2 à chaque fois.

5 ; 3 ; 1 ; -1 ; -3 ; -5 ; -7

Liste b — Tout en quarts : $1 = \frac{4}{4}$ et $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$. On ajoute $\frac{3}{4}$ à chaque fois.

$\frac{1}{4}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{13}{4}$; $\frac{16}{4} = 4$; $\frac{19}{4}$

Liste c — Chaque terme est la somme des deux précédents.

$5 + 8 = 13$; $8 + 13 = 21$

Liste d — Ce sont les carrés des entiers $1, 2, 3, 4, 5$.

$6^2 = 36$; $7^2 = 49$

Liste e — On retranche 1, puis 2, puis 4, puis 8 : ce qu'on retranche double à chaque fois.

$-17 - 16 = -33$; $-33 - 32 = -65$

À ne pas faire : Dans la liste 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25, on ajoute toujours le même nombre — On ajoute 3, puis 5, puis 7, puis 9 : ce sont les carrés 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2. Une loi n'est pas toujours « ajouter le même nombre » : on calcule plusieurs écarts avant de conclure.

2. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la population d'une ville

CE QU'IL DIT

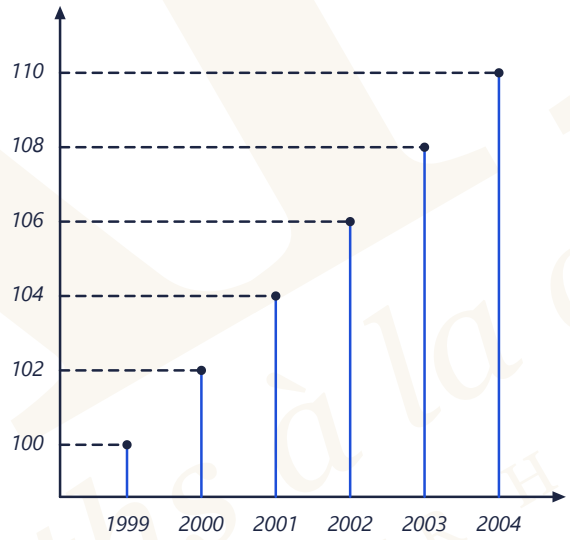
Chouf le diagramme : la population mta3 bled men mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf l deux mille quatre, bel milliers. Na9raw : cent, cent deux, cent quatre, cent six, cent huit, cent dix. Koll 3am tzid deux milliers, dima nafs ezzyeda. Bech nouslou l deux mille dix, nzidou onze fois deux : cent vingt-deux milliers. W bech tousel l cent cinquante milliers, yelzemha vingt-cinq 3am, ya3ni fi deux mille vingt-quatre.

شوف الـ diagramme : الـ population متاع بلاد من mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf لـ deux mille ، باللـ milliers . نقراو : cent dix ، cent huit ، cent six ، cent quatre ، cent deux ، cent . كل عام تزيد deux ، quatre onze fois deux : cent vingt-deux milliers . w نزيدو deux mille dix لـ باش نوصلو . ديما نفس الزيادة ، milliers باش توصل لـ cent cinquante milliers ، يلزمها vingt-cinq عام ، يعني في deux mille vingt-quatre .

Regarde le diagramme : la population d'une ville de mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf à deux mille quatre, en milliers. On lit : cent, cent deux, cent quatre, cent six, cent huit, cent dix. Chaque année, elle augmente de deux milliers, toujours la même augmentation. Pour arriver à deux mille dix, on ajoute onze fois deux : cent vingt-deux milliers. Et pour atteindre cent cinquante milliers, il lui faut vingt-cinq ans, donc en deux mille vingt-quatre.

Le diagramme en bâtons représente l'évolution de la population d'une ville de 1999 à 2004, en milliers d'habitants.

1. Lis sur le diagramme la population de chaque année, de 1999 à 2004.
2. Quelle sera la population de cette ville en 2010, si on suppose qu'elle continue à évoluer de la même façon ?
3. En quelle année cette population atteindra-t-elle $150\,000$ habitants ?



Population de la ville, en milliers d'habitants, de 1999 à 2004.

Un diagramme en bâtons. En abscisse, les années 1999, 2000, 2001, 2002, 2003 et 2004 ; en ordonnée, le nombre d'habitants en milliers, gradué de 100 à 110 de deux en deux. Le bâton de 1999 monte à 100, celui de 2000 à 102, celui de 2001 à 104, celui de 2002 à 106, celui de 2003 à 108 et celui de 2004 à 110 : chaque bâton dépasse le précédent de la même hauteur.

EXEMPLE TRAITÉ

Les trois questions.

La lecture — En milliers d'habitants, de 1999 à 2004 :

$100\ ;\ 102\ ;\ 104\ ;\ 106\ ;\ 108\ ;\ 110$

La loi — Chaque année, la population augmente de 2 milliers d'habitants.

En 2010 — De 1999 à 2010, il s'écoule 11 années : on ajoute 11 fois 2.

$100 + 11 \times 2 = 122$

150 milliers — Il faut gagner 50 milliers, à raison de 2 par an : 25 années après 1999.

$100 + 2n = 150 \iff n = 25 \quad ; \quad 1999 + 25 = 2024$

$122\,000$ habitants en 2010 ; $150\,000$ habitants en 2024

À ne pas faire : En 2010 : $100 + 10 \times 2 = 120$ milliers — En 2010 : $100 + 11 \times 2 = 122$ milliers. De 1999 à 2010 il y a $2010 - 1999 = 11$ augmentations, pas 10 : on compte les pas, pas les années écrites.

---

3. ACTIVITÉ

Pour comprendre : les nombres triangulaires

CE QU'IL DIT

Les nombres triangulaires : nersmou des points 3la chakl triangle. T indice un égale un, T indice deux égale trois, T indice trois égale six, T indice quatre égale dix. Bech net3addew lelli ba3dou, nzidou rangée fiha point zeyed : T indice cinq égale dix plus cinq, ya3ni quinze. W bech na7sbou fisa3, nlasso9ou zouz triangles kif kif : ya3tiwna rectangle fih n lignes w n plus un colonnes. Idhan T indice n égale n fois (n plus un), le tout sur deux.

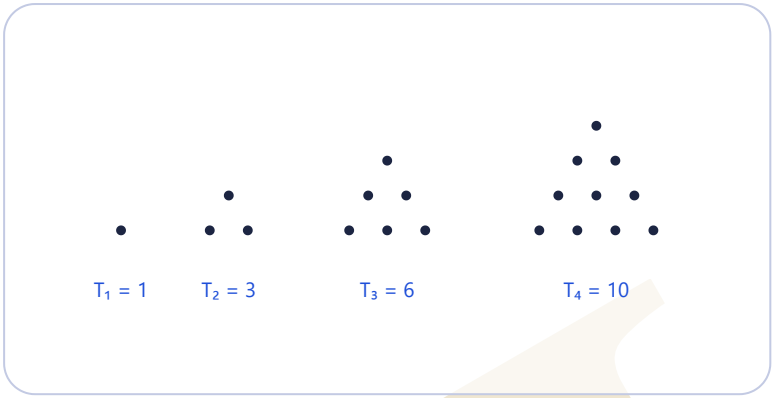
triangle . T indice un égale un ، T indice deux على شكل des points نرسمو : les nombres triangulaires
باش نتعدّاو للّي بعدو ، نزيدو rangée فيها . égale trois ، T indice trois égale six ، T indice quatre égale dix
كيف triangles زوز نلصّقو ، فيسع نحسبو باش quinze . w يعني ، T indice cinq égale dix plus cinq : زايد point
T indice n égale n fois (n plus un) ، le إذن . n lignes w n plus un colonnes فيه rectangle يعطيونا : كيف
. tout sur deux

Les nombres triangulaires : on dessine des points en forme de triangle. T indice un égale un, T indice deux égale trois, T indice trois égale six, T indice quatre égale dix. Pour passer au suivant, on ajoute une rangée qui a un point de plus : T indice cinq égale dix plus cinq, donc quinze. Et pour calculer vite, on colle deux triangles identiques : ils forment un rectangle de n lignes et n plus un colonnes. Donc T indice n égale n fois (n plus un), le tout sur deux.

Les dessins représentent les quatre premiers **nombres triangulaires** 1, 3, 6 et 10, notés respectivement T_1, T_2, T_3 et T_4.

T_1 se lit « T indice 1 », T_2 se lit « T indice 2 », et plus généralement T_n se lit « T indice n ».

1. Représente le cinquième nombre triangulaire T_5 et donne sa valeur. Même question pour T_6.
2. Les Pythagoriciens utilisaient des diagrammes rectangulaires pour calculer les nombres triangulaires. Un rectangle de 12 lignes et 13 colonnes de points se partage en deux triangles de points identiques : explique comment il permet de calculer T_{12}.
3. Donne les valeurs de T_{20}, T_{125} et T_{2006}.
4. Donne l'expression du n-ième nombre triangulaire T_n en fonction de n.



Les quatre premiers nombres triangulaires.

Quatre dessins de points, de gauche à droite. Le premier a un seul point : T indice 1 égale 1. Le deuxième est un triangle de trois points, deux en bas et un au-dessus : T indice 2 égale 3. Le troisième est un triangle de six points, trois en bas, deux au milieu, un en haut : T indice 3 égale 6. Le quatrième est un triangle de dix points, quatre en bas, puis trois, puis deux, puis un : T indice 4 égale 10. Pour passer d'un triangle au suivant, on ajoute une rangée qui a un point de plus.

LE N-IÈME NOMBRE TRIANGULAIRE

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Les quatre questions.

T5 et T6 — Pour passer au triangle suivant, on ajoute une rangée qui a un point de plus.

$T_5 = 10 + 5 = 15 \quad ; \quad T_6 = 15 + 6 = 21$

Le rectangle — Le rectangle compte 12×13 points et il est fait de deux triangles de T_{12} points chacun.

$2 \times T_{12} = 12 \times 13 \quad \text{donc} \quad T_{12} = \frac{12\times13}{2} = 78$

La même idée —

$T_{20} = \frac{20\times21}{2} = 210 \quad ; \quad T_{125} = \frac{125\times126}{2} = 7875$

$T_{2006} = \frac{2006\times2007}{2} = 2\,013\,021$

En fonction de n — Un rectangle de n lignes et $n+1$ colonnes contient deux fois T_n.

$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

À ne pas faire : $T_{12} = 12 \times 13 = 156$ — $T_{12} = \dfrac{12 \times 13}{2} = 78$. Le rectangle contient **deux** triangles : 12×13 est le double de T_{12}.

4. ACTIVITÉ

Pour comprendre : une spirale de triangles rectangles

CE QU'IL DIT

Chouf la figure : des triangles rectangles deyrin b O, w koll wa7ed rakeb 3la l'hypoténuse mta3 elli sab9ou. Le côté ejjdid dima égale un. B Pythagore : O A deux égale racine carrée de deux, O A trois égale racine carrée de trois, w hakka. L'aire mta3 triangle rectangle hiya la moitié mta3 le produit des deux côtés de l'angle droit. Idhan a indice deux égale racine carrée de deux, le tout sur deux, a indice trois égale racine carrée de trois, le tout sur deux. W netwa993ou : a indice n égale racine carrée de n, le tout sur deux.

شوف الـ figure : des triangles rectangles دايرين بـ O ، w كل واحد راكب على l'hypoténuse متاع اللي سبقو . الـ Pythagore : O A deux égale racine carrée de deux ، O A trois égale racine بـ . égale un الجديد ديما côté le produit des deux côtés de متاع la moitié هي triangle rectangle متاع l'aire . هكّا carrée de trois ، w a indice deux égale racine carrée de deux ، le tout sur deux ، a indice trois égale racine إذن . l'angle droit . a indice n égale racine carrée de n ، le tout sur deux : نتوقّعو carrée de trois ، le tout sur deux . w

Regarde la figure : des triangles rectangles tournent autour de O, et chacun s'appuie sur l'hypoténuse du précédent. Le nouveau côté vaut toujours un. Par Pythagore : O A deux égale racine carrée de deux, O A trois égale racine carrée de trois, et ainsi de suite. L'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit. Donc a indice deux égale racine carrée de deux, le tout sur deux, a indice trois égale racine carrée de trois, le tout sur deux. Et on conjecture : a indice n égale racine carrée de n, le tout sur deux.

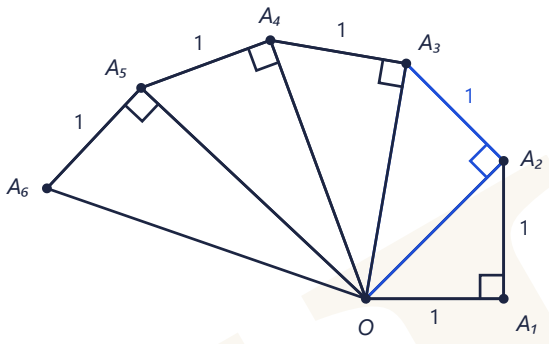
Dans la figure :

- le triangle OA_1A_2 est rectangle en A_1 et tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$;
- le triangle OA_2A_3 est rectangle en A_2 et tel que $A_2A_3 = 1$;
- et ainsi de suite.

On pose $a_1 = \text{aire}(OA_1A_2)$, $a_2 = \text{aire}(OA_2A_3)$, ..., $a_n = \text{aire}(OA_nA_{n+1})$.

1. Calcule a_2, a_3, a_4 et a_5.
2. Conjecture l'expression de a_n en fonction de n.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Chaque triangle s'appuie sur l'hypoténuse du précédent ; les côtés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4… mesurent tous 1.

Une spirale de triangles rectangles qui ont tous le sommet O. Le premier triangle, O A1 A2, est rectangle en A1, avec O A1 égale 1 et A1 A2 égale 1. Le deuxième, O A2 A3, est rectangle en A2, avec A2 A3 égale 1 : il s'appuie sur l'hypoténuse O A2 du premier. Le troisième, O A3 A4, est rectangle en A3 avec A3 A4 égale 1, et ainsi de suite jusqu'à A6. Les points A1, A2, A3, A4, A5, A6 tournent autour de O en s'en éloignant peu à peu.

LA CONJECTURE

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Les deux questions.

Les hypoténuses — Par le théorème de Pythagore, de triangle en triangle :

$$OA_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad ; \quad OA_3 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \quad ; \quad OA_4 = \sqrt{4} = 2 \quad ; \quad OA_5 = \sqrt{5}$$

Les aires — Le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n : son aire est la moitié du produit de OA_n par $A_nA_{n+1} = 1$.

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad a_4 = \frac{2}{2} = 1 \quad ; \quad a_5 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

> Les aires. Le triangle O A indice n A indice (n plus un) est rectangle en A_n : son aire est la moitié du produit de OA_n par A indice n A indice (n plus un) égale 1.
>
> Les aires. Le triangle O A indice n A indice (n plus un) est rectangle en A indice n: son aire est la moitié .du produit de O A indice n par A indice n A indice (n plus un) égale 1

La conjecture — On observe $OA_n = \sqrt{n}$, et $a_1 = \dfrac{1}{2}$ suit la même règle.

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

5. DÉFINITION

Suite de nombres réels

CE QU'IL DIT

Suite, ma3neha : l koll entier naturel n, men n indice zéro w enti tala3, na3tiw réel wa7ed bark. Le réel hedha nsammiwah U indice n, w houwa le terme général mta3 la suite. W n houwa l'indice. Radd belek lel parenthèses : U indice n blech parenthèses houwa nombre wa7ed, le terme elli l'indice mte3ou n. Ama U indice n bin parenthèses, hiya la suite el koll. Mathalan la suite des entiers pairs : zéro, deux, quatre, six, w le terme général mte3ha U indice n égale deux n.

إنت طالع ، نعطيو réel واحد برك . الـ réel هاذا n indice zéro w من ، entier naturel n لكل : معناها ، suite parenthèses : U indice لـ ردّ بالك للـ . l'indice هو suite . w n متاع الـ le terme général هو U indice n ، w نسمّيوه n بلاش parenthèses هو nombre واحد ، le terme اللي l'indice متاعو n . أما U indice n بين parenthèses ، هي U indice متاعها la suite des entiers pairs : zéro ، deux ، quatre ، six ، w le terme général مثلا . الـ suite الكل n égale deux n .

Une suite, cela veut dire : à chaque entier naturel n, à partir de n indice zéro, on associe un seul réel. Ce réel se note U indice n, et c'est le terme général de la suite. Et n est l'indice. Attention aux parenthèses : U indice n sans parenthèses est un seul nombre, le terme dont l'indice est n. Mais U indice n entre parenthèses, c'est la suite tout entière. Par exemple la suite des entiers pairs : zéro, deux, quatre, six, et son terme général est U indice n égale deux n.

On retient la définition suivante :

Soit n_0 un entier naturel. Lorsqu'à tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 on associe un réel unique $U(n)$, on dit que l'on a défini une **suite** de nombres réels. Le réel $U(n)$ s'appelle le **terme général** de la suite et se note U_n. La suite se note $(U_n)_{n\geq n_0}$ ou (U_n).

L'entier n est l'**indice** du terme U_n. Attention aux parenthèses : U_n est un nombre, le terme d'indice n ; (U_n) désigne la suite tout entière.

LE TERME GÉNÉRAL

$U_n \quad (n \geq n_0)$

EXEMPLE TRAITÉ

Pour chacune des suites suivantes, détermine les cinq premiers termes et le terme général : la suite des entiers naturels pairs ; la suite des multiples de 3 ; la suite qui à tout entier naturel non nul associe son inverse ; la suite qui à tout entier naturel associe sa racine carrée.

Les entiers pairs —

$0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8 \quad ; \quad U_n = 2n$

Les multiples de 3 —

$0\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 12 \quad ; \quad U_n = 3n$

Les inverses — L'inverse de 0 n'existe pas : la suite commence à l'indice 1.

$1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{5} \quad ; \quad U_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1$

Les racines carrées —

$0\ ;\ 1\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 2\quad ;\quad U_n = \sqrt{n}$

$U_n = 2n \quad ; \quad U_n = 3n \quad ; \quad U_n = \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 1 \quad ; \quad U_n = \sqrt{n}$

À ne pas faire : « U_n est une suite » — « (U_n) est une suite, et U_n est son terme d'indice n ». Sans parenthèses, U_n est un seul nombre ; quand on l'écrit entre parenthèses, on désigne la suite de tous ces nombres.

À ne pas faire : La suite des inverses commence par $U_0 = \frac{1}{0}$ — Elle commence par $U_1 = 1$: ici $n_0 = 1$. Une suite ne commence pas toujours à l'indice 0 : elle commence au premier indice n_0 pour lequel le terme existe.

---

6. APPLICATION

Exemple : calculer des termes et changer d'indice

CE QU'IL DIT

3andna U indice n égale (trois n plus un), le tout sur quatre. Bech na7sbou terme, nbaddlou n bel indice elli n7ebbou 3lih : U indice zéro égale un sur quatre, U indice cinq égale seize sur quatre, ya3ni quatre. Radd belek : la suite tabda men U indice zéro, idhan le premier terme houwa U indice zéro, w le cinquième terme houwa U indice quatre, mouch U indice cinq. W U indice (p plus un) : nbaddlou n b p plus un el koll, ya3tina (trois p plus quatre), le tout sur quatre. Mouch U indice p zeyed un.

عندنا U indice n égale (trois n plus un) ، le tout sur quatre . باش نحسبو terme ، نبدّلو n بالـ indice اللي نحبّو
عليه U indice zéro égale un sur quatre ، U indice cinq égale seize sur quatre : الـ ردّ بالك : quatre . يعني
suite تبدا من U indice zéro ، إذن le premier terme هو ، w le cinquième terme هو U indice zéro ، U indice هو
(trois p plus quatre) يعطينا ، الكل p plus un بـ n نبدّلو : U indice cinq . w U indice (p plus un) موش ، quatre
، le tout sur quatre . موش U indice p . un زايد

Nous avons U indice n égale (trois n plus un), le tout sur quatre. Pour calculer un terme, on remplace n par l'indice voulu : U indice zéro égale un sur quatre, U indice cinq égale seize sur quatre, donc quatre. Attention : la suite commence à U indice zéro, donc le premier terme est U indice zéro, et le cinquième terme est U indice quatre, pas U indice cinq. Et U indice (p plus un) : on remplace n par p plus un tout entier, ce qui donne (trois p plus quatre), le tout sur quatre. Ce n'est pas U indice p augmenté de un.

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \dfrac{3n+1}{4}$.

1. Calcule U_0, U_1, U_5 et U_{100}.
2. Détermine le premier terme, le cinquième terme et le centième terme de cette suite.
3. Détermine l'expression de U_{p+1}, U_{2n} et U_{3k+2}.

Quand une suite est donnée par son terme général, on calcule n'importe quel terme en **remplaçant** n par l'indice voulu — un nombre, ou une expression tout entière.

EXEMPLE TRAITÉ

Les trois questions.

On remplace n —

$U_0 = \frac{1}{4}$; $U_1 = \frac{4}{4} = 1$; $U_5 = \frac{16}{4} = 4$; $U_{100} = \frac{301}{4}$

Le rang — La suite commence à U_0 : le premier terme est U_0, le cinquième est U_4, le centième est U_{99}.

$U_0 = \frac{1}{4}$; $U_4 = \frac{13}{4}$; $U_{99} = \frac{298}{4} = \frac{149}{2}$

Changer d'indice — On remplace n par $p+1$ tout entier, entre parenthèses.

$U_{p+1} = \frac{3(p+1)+1}{4} = \frac{3p+4}{4}$

$U_{2n} = \frac{3\times 2n+1}{4} = \frac{6n+1}{4}$; $U_{3k+2} = \frac{3(3k+2)+1}{4} = \frac{9k+7}{4}$

$U_{p+1} = \frac{3p+4}{4}$; $U_{2n} = \frac{6n+1}{4}$; $U_{3k+2} = \frac{9k+7}{4}$

> U indice (p plus un) égale 3p plus 4, le tout sur 4; U indice 2n égale 6n plus 1, le tout sur 4; U indice (3k plus deux) égale 9k plus 7, le tout sur 4
>
> U indice (p plus un) égale 3p plus 4, le tout sur 4; U indice 2n égale 6n plus 1, le tout sur 4; U indice (3k plus deux) égale 9k plus 7, le tout sur 4

À ne pas faire : Le cinquième terme est U_5 — Le cinquième terme est U_4, car la suite commence à U_0. Quand le premier terme est U_0, le terme de rang k est U_{k-1} : l'indice a un de retard sur le rang.

> Quand le premier terme est U_0, le terme de rang k est U indice (k moins un) : l'indice a un de retard sur le rang.
>
> Quand le premier terme est U indice 0, le terme de rang k est U indice (k moins un): l'indice a un de retard sur le rang.

À ne pas faire : $U_{p+1} = U_p + 1 = \frac{3p+1}{4} + 1$ — $U_{p+1} = \frac{3(p+1)+1}{4} = \frac{3p+4}{4}$. On remplace n par $p+1$ dans la formule : on n'ajoute pas 1 au terme U_p.

---

7. VOCABULAIRE

Deux façons de présenter une suite

CE QU'IL DIT

Suite tnajjem tet3ata b zouz tor9. Ya b le terme général, ya3ni formule fiha n, w ta7seb biha ayy terme toul. Ya b le premier terme w relation ta3tik terme men le terme elli sab9ou, w nsammiwha relation de récurrence. Mathalan t indice zéro égale deux, w t indice (n plus un) égale un demi fois t indice n, moins trois. Houni temchi darja darja : t indice un égale moins deux, t indice deux égale moins quatre, t indice trois égale moins cinq. Bech tousel l terme, lezmek elli sab9ou.

suite تنجّم تتعطى بزوز طرق . يا بـ le terme général ، يعني formule فيها n ، w تحسب بيها أيّ terme طول . يا بـ le premier terme w relation تعطيك terme من le terme اللي سبقو ، w نسمّيوها relation de récurrence . مثلا t indice zéro égale deux ، w t indice (n plus un) égale un demi fois t indice n ، moins trois هنا تمشي .

t indice un égale moins deux ، t indice deux égale moins quatre ، t indice trois égale moins : درجة درجة
cinq . باش توصل لـ terme ، لازمك اللي سبقو .

Une suite peut être donnée de deux façons. La première : le terme général, c'est-à-dire une formule en n, qui donne tout de suite n'importe quel terme. L'autre : le premier terme et une relation qui donne un terme à partir du terme précédent ; on l'appelle relation de récurrence. Par exemple t indice zéro égale deux, et t indice (n plus un) égale un demi fois t indice n, moins trois. Ici on avance pas à pas : t indice un égale moins deux, t indice deux égale moins quatre, t indice trois égale moins cinq. Pour atteindre un terme, il faut celui qui le précède.

Une suite peut être définie par :

- son **terme général** ;

ou

- son **premier terme** et une relation permettant de calculer un terme à l'aide du terme précédent. Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Avec le terme général, on calcule directement n'importe quel terme : $U_n = 2^n + n$ donne tout de suite $U_{10} = 1024 + 10 = 1034$. Avec une relation de récurrence, on avance de proche en proche : pour connaître un terme, il faut d'abord celui qui le précède.

PAR LE TERME GÉNÉRAL

$$U_n = 2^n + n$$

PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE

$$t_0 = 2 \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \tfrac{1}{2}\,t_n - 3$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et $t_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,t_n - 3$ pour tout entier naturel n. Calcule t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5.

> On considère la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et t indice (n plus un) égale un demi fois t indice n, moins 3 pour tout entier naturel n. Calcule t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5.
>
> On considère la suite t indice n définie par t indice 0 égale 2 et t indice (n plus un) égale un demi fois t indice n, moins 3 pour tout entier naturel n. Calcule t indice 1, t indice 2, t indice 3, t indice 4 et t indice 5.

De t0 à t1 — On prend la moitié du terme précédent, puis on retranche 3.

$t_1 = \frac{1}{2} \times 2 - 3 = -2$

De proche en proche —

$t_2 = \frac{1}{2} \times (-2) - 3 = -4 \quad ; \quad t_3 = \frac{1}{2} \times (-4) - 3 = -5$

> De proche en proche : t indice 2 égale un demi fois moins 2, moins 3 égale moins 4; t indice 3 égale un demi fois moins 4, moins 3 égale moins 5

> De proche en proche: t indice 2 égale un demi fois moins 2, moins 3 égale moins 4; t indice 3 égale un demi fois moins 4, moins 3 égale moins 5

$t_4 = \frac{1}{2} \times (-5) - 3 = -\frac{11}{2}$; $t_5 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{11}{2}\right) - 3 = -\frac{23}{4}$

$$t_1 = -2 \quad ; \quad t_2 = -4 \quad ; \quad t_3 = -5 \quad ; \quad t_4 = -\frac{11}{2} \quad ; \quad t_5 = -\frac{23}{4}$$

À ne pas faire : $t_3 = \frac{1}{2} \times 3 - 3$ — $t_3 = \frac{1}{2} \times t_2 - 3 = \frac{1}{2} \times (-4) - 3 = -5$. Dans une relation de récurrence, on remplace t_n par la **valeur** du terme précédent, pas par son indice.

---

8. ACTIVITÉ

Pour comprendre : une aire qui grandit régulièrement

CE QU'IL DIT

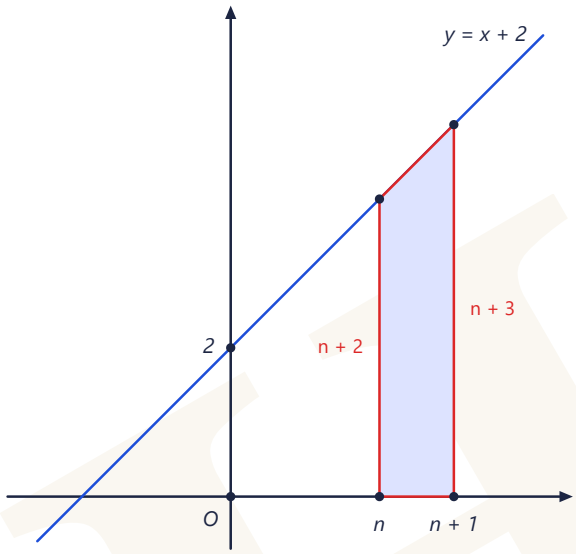
Chouf la figure : la droite y égale x plus deux, w le domaine elli ta7tha, bin l'abscisse n w l'abscisse n plus un. Hedha trapèze : les côtés el metwazyin toulhom n plus deux w n plus trois, w la hauteur égale un. Idhan l'aire a indice n égale (deux n plus cinq), le tout sur deux, ya3ni n plus cinq demis. W ki na7sbou a indice (n plus un) moins a indice n, nal9aw un. Ya3ni koll ma net3addew l terme elli ba3dou, l'aire tzid dima un. Hedhi hiya el fekra mta3 suite arithmétique.

شوف الـ figure : la droite y égale x plus deux ، w l'abscisse n w l'abscisse n بين ، اللي تحتها domaine الـ . إذن n plus deux w n plus trois ، w la hauteur égale un المتوازيين طولهم côtés الـ : trapèze هاذا . plus un a indice كي نحسبو n plus cinq demis . w يعني ، l'aire a indice n égale (deux n plus cinq) ، le tout sur deux هاذي هي . un تزيد ديما l'aire ، بعدو اللي terme لـ نتعدّاو ما كل يعني . un نلقاو ، (n plus un) moins a indice n الفكرة متاع suite arithmétique .

Regarde la figure : la droite y égale x plus deux, et le domaine situé dessous, entre l'abscisse n et l'abscisse n plus un. C'est un trapèze : ses côtés parallèles mesurent n plus deux et n plus trois, et sa hauteur vaut un. Donc l'aire a indice n égale (deux n plus cinq), le tout sur deux, c'est-à-dire n plus cinq demis. Et quand on calcule a indice (n plus un) moins a indice n, on trouve un. Chaque fois qu'on passe au terme suivant, l'aire augmente toujours de un. C'est l'idée même de suite arithmétique.

Dans un repère, on trace la droite d'équation $y = x + 2$. Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n l'aire du domaine limité par cette droite, l'axe des abscisses et les deux verticales passant par les points d'abscisses n et $n + 1$.

1. Calcule a_0.
2. Donne l'expression de a_n en fonction de n.
3. Calcule $a_{n+1} - a_n$.



Le domaine d'aire a_n : sous la droite y = x + 2, entre les abscisses n et n + 1.

Un repère d'origine O. La droite d'équation y égale x plus 2 monte de gauche à droite : elle coupe l'axe des ordonnées à la hauteur 2. Sur l'axe des abscisses, deux points sont marqués, n et n plus 1, à une unité l'un de l'autre. Au-dessus du segment qui les joint, un domaine est hachuré : c'est un trapèze, limité en bas par l'axe des abscisses, à gauche et à droite par deux verticales, et en haut par la droite. Son côté vertical gauche mesure n plus 2, son côté vertical droit mesure n plus 3.

EXEMPLE TRAITÉ

Les trois questions.

Le domaine — C'est un trapèze : ses deux côtés parallèles sont verticaux, de longueurs $n+2$ et $n+3$, et sa hauteur vaut 1. Son aire est la demi-somme des côtés parallèles, multipliée par la hauteur.

a0 — Pour $n=0$, les côtés parallèles mesurent 2 et 3.

$a_0 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

En fonction de n —

$a_n = \frac{(n+2)+(n+3)}{2} = \frac{2n+5}{2} = n+\frac{5}{2}$

La différence — Elle ne dépend pas de n.

$a_{n+1} - a_n = \left(n+1+\frac{5}{2}\right) - \left(n+\frac{5}{2}\right) = 1$

$a_n = n+\frac{5}{2} \quad ; \quad a_{n+1}-a_n = 1$

a indice n égale n plus 5 sur 2; a indice (n plus un) moins a indice n égale 1

a indice n égale n plus 5 sur 2; a indice (n plus un) moins a indice n égale 1

9. DÉFINITION

Suite arithmétique

CE QU'IL DIT

Suite arithmétique, ma3neha : bech net3addew men ayy terme lelli ba3dou, nzidou dima nafs le réel r. Nektbou : U indice (n plus un) égale U indice n, plus r, pour tout entier naturel n. W r nsammiwah la raison. Bech tal9a la raison, ta7seb le terme elli ba3dou moins le terme elli sab9ou. Mathalan : trois, huit, treize, dix-huit : koll marra nzidou cinq, idhan la raison égale cinq. Radd belek : la raison tnajjem tkoun négative, ki les termes yon9sou.

suite arithmétique ، معناها : باش نتعدّاو من أيّ terme للّي بعدو ، نزيدو ديما نفس الـ réel r . نكتبو : U indice (n plus un) égale U indice n ، plus r ، pour tout entier naturel n . w r نسمّيوه la raison . باش تلقى la raison ، كل مرّة نزيدو cinq : trois ، huit ، treize ، dix-huit : مثلا . اللي سبقو moins le terme اللي بعدو le terme تحسب ، إذن la raison égale cinq . ردّ بالك : la raison تنجّم تكون négative ، كي les termes ينقصو .

Une suite arithmétique, cela veut dire : pour passer de n'importe quel terme au suivant, on ajoute toujours le même réel r. On écrit : U indice (n plus un) égale U indice n, plus r, pour tout entier naturel n. Et r s'appelle la raison. Pour trouver la raison, on calcule le terme suivant moins le terme précédent. Par exemple : trois, huit, treize, dix-huit : on ajoute cinq à chaque fois, donc la raison égale cinq. Attention : la raison peut être négative, quand les termes diminuent.

On retient la définition suivante :

On dit qu'une suite (U_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n + r$. Le nombre réel r est appelé **raison** de cette suite.

Remarque. Si a, b, c, d, ... sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, on dit qu'ils sont en **progression arithmétique**.

Autrement dit : on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r, et $r = U_{n+1} - U_n$.

POUR TOUT ENTIER NATUREL N

$$U_{n+1} = U_n + r$$

LA RAISON

$$r = U_{n+1} - U_n$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère la suite (U_n) des entiers naturels dont le reste de la division euclidienne par 5 est 3, rangés par ordre croissant. Détermine U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4, exprime U_n en fonction de n, puis calcule $U_{n+1} - U_n$.

> On considère la suite (U_n) des entiers naturels dont le reste de la division euclidienne par 5 est 3, rangés par ordre croissant. Détermine U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4, exprime U_n en fonction de n, puis calcule U indice (n plus un) moins U indice n.

> On considère la suite U indice n des entiers naturels dont le reste de la division euclidienne par 5 est 3, rangés par ordre croissant. Détermine U indice 0, U indice 1, U indice 2, U indice 3 et U indice 4, .exprime U indice n en fonction de n, puis calcule U indice (n plus un) moins U indice n

Les premiers termes — Un entier de reste 3 dans la division par 5 s'écrit $5q+3$.

$$U_0 = 3 \quad ; \quad U_1 = 8 \quad ; \quad U_2 = 13 \quad ; \quad U_3 = 18 \quad ; \quad U_4 = 23$$

Le terme général —

$$U_n = 5n + 3$$

La différence —

$$U_{n+1} - U_n = 5(n+1) + 3 - (5n+3) = 5$$

> La différence : U indice (n plus un) moins U indice n égale 5 fois la parenthèse n plus 1, plus 3 moins la parenthèse 5n plus 3, égale 5
>
> La différence: U indice (n plus un) moins U indice n égale 5 fois la parenthèse n plus 1, plus 3 moins la parenthèse 5n plus 3, égale 5

Conclusion — Pour tout n, $U_{n+1} = U_n + 5$: la suite est arithmétique de raison 5 et de premier terme $U_0 = 3$.

> Conclusion. Pour tout n, U indice (n plus un) égale U indice n plus 5 : la suite est arithmétique de raison 5 et de premier terme $U_0 = 3$.
>
> Conclusion. Pour tout n, U indice (n plus un) égale U indice n plus 5: la suite est arithmétique de .raison 5 et de premier terme U indice 0 égale 3

$$U_{n+1} = U_n + 5 \quad : \quad \text{suite arithmétique de raison } 5$$

> U indice (n plus un) égale U indice n plus 5 : suite arithmétique de raison 5
>
> U indice (n plus un) égale U indice n plus 5: suite arithmétique de raison 5

À ne pas faire : La raison de la suite $5\,;\,3\,;\,1\,;\,-1\,;\,\ldots$ est 2 — La raison est $3-5=-2$. La raison est $U_{n+1}-U_n$: le terme **suivant** moins le terme d'avant. Quand les termes diminuent, elle est négative.

> La raison est U indice (n plus un) moins U indice n : le terme **suivant** moins le terme d'avant. Quand les termes diminuent, elle est négative.
>
> La raison est U indice (n plus un) moins U indice n: le terme suivant moins le terme d'avant. Quand les .termes diminuent, elle est négative

À ne pas faire : La suite $1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\,;\,\ldots$ est arithmétique — $2-1=1$ mais $4-2=2$: elle n'est pas arithmétique. Dans une suite arithmétique, on **ajoute** toujours le même nombre ; ici on multiplie par 2.

---

10. MÉTHODE

Reconnaître une suite arithmétique

CE QU'IL DIT

Kifech nbayynou elli suite hiya arithmétique ? Na7sbou la différence : U indice (n plus un) moins U indice n. Ken l9ina réel ma fihech n, la suite arithmétique w houwa la raison. Radd belek : lezem pour tout n, mouch 3la zouz termes bark. W a7fedh el 7ala hedhi : ken U indice n égale a n plus b, la suite

arithmétique, la raison hiya a, w le premier terme houwa b. W bech nbayynou elli suite mouch arithmétique, yekfi nal9aw zouz différences mouch kif kif.

كيفاش نبيّنو اللي suite هي arithmétique ؟ نحسبو la différence : U indice (n plus un) moins U indice n . كان لقينا réel ما فيهش n ، الـ suite arithmétique w هو la raison . ردّ بالك : لازم pour tout n ، موش على زوز termes برك . w احفظ الحالة هاذي : كان U indice n égale a n plus b ، الـ la raison ، suite arithmétique هي a ، w le premier terme هو w . باش نبيّنو اللي suite موش arithmétique ، يكفي نلقاو زوز différences موش كيف كيف .

Comment montrer qu'une suite est arithmétique ? On calcule la différence : U indice (n plus un) moins U indice n. Si on trouve un réel qui ne contient pas n, la suite est arithmétique et ce réel est la raison. Attention : il faut que ce soit pour tout n, pas seulement sur deux termes. Et retiens ce cas : si U indice n égale a n plus b, la suite est arithmétique, la raison est a, et le premier terme est b. Et pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de trouver deux différences qui ne sont pas égales.

Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique, on calcule la différence $U_{n+1} - U_n$ **pour tout** n : si elle est égale à un même réel r, qui ne dépend pas de n, la suite est arithmétique de raison r.

Un cas à connaître. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $U_n = an + b$, où a et b sont deux réels donnés. Alors $U_{n+1} - U_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$: la suite (U_n) est arithmétique, de raison a et de premier terme $U_0 = b$.

Pour montrer qu'une suite **n'est pas** arithmétique, il suffit de trouver deux différences de termes consécutifs qui ne sont pas égales.

LE TEST

$$U_{n+1} - U_n = r \quad \text{pour tout } n$$

UN CAS À CONNAÎTRE

$$U_n = an + b \implies (U_n) \text{ arithmétique de raison } a$$

EXEMPLE TRAITÉ

Indique celles de ces suites qui sont arithmétiques : a) $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = U_n + n$; b) $V_0 = -1$ et $-V_{n+1} + V_n + 3 = 0$; c) $a_n = \dfrac{2n^2 + 4n + 2}{n+1}$; d) $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = 3b_n + 7$.

> Indique celles de ces suites qui sont arithmétiques : a) $U_0 = 0$ et U indice (n plus un) égale U indice n plus n ; b) $V_0 = -1$ et moins V indice (n plus un) plus V indice n plus 3 égale 0 ; c) $a_n = \dfrac{2n^2 + 4n + 2}{n+1}$; d) $b_0 = 2$ et b indice (n plus un) égale 3b indice n plus 7.
>
> Indique celles de ces suites qui sont arithmétiques: a) U indice 0 égale 0 et U indice (n plus un) égale U indice n plus n; b) V indice 0 égale moins 1 et moins V indice (n plus un) plus V indice n plus 3 égale 0; c) a indice n égale le quotient de 2n au carré plus 4n plus 2, par la parenthèse n plus 1; d) b indice 0 égale 2 et b indice (n plus un) égale 3b indice n plus 7.

Suite a — La différence $U_{n+1} - U_n = n$ dépend de n : $U_1 - U_0 = 0$ mais $U_2 - U_1 = 1$. Elle n'est pas arithmétique.

$U_{n+1} - U_n = n$

> Suite a. La différence U indice (n plus un) moins U indice n égale n dépend de n : $U_1 - U_0 = 0$ mais $U_2 - U_1 = 1$. Elle n'est pas arithmétique.
>
> Suite a. La différence U indice (n plus un) moins U indice n égale n dépend de n: U indice 1 moins U indice 0 égale 0 mais U indice 2 moins U indice 1 égale 1. Elle n'est pas arithmétique.

Suite b — On isole V_{n+1} : la suite est arithmétique de raison 3.

$V_{n+1} = V_n + 3$

> Suite b. On isole V indice (n plus un) : la suite est arithmétique de raison 3.
>
> Suite b. On isole V indice (n plus un): la suite est arithmétique de raison 3.

Suite c — On factorise le numérateur avant de conclure : a_n est de la forme $an + b$, la suite est arithmétique de raison 2.

$a_n = \frac{2(n+1)^2}{n+1} = 2(n+1) = 2n + 2$

Suite d — Les deux premières différences ne sont pas égales : elle n'est pas arithmétique.

$b_1 = 13 \quad ; \quad b_2 = 46 \quad ; \quad b_1 - b_0 = 11 \quad ; \quad b_2 - b_1 = 33$

(V_n) et (a_n) sont arithmétiques, de raisons 3 et 2

À ne pas faire : « $U_1 - U_0 = U_2 - U_1$, donc la suite est arithmétique » — Il faut $U_{n+1} - U_n = r$ **pour tout** entier naturel n. Deux différences égales ne prouvent rien pour les suivantes. En revanche, deux différences inégales suffisent à dire non.

À ne pas faire : La suite définie par $U_n = \frac{-2n+1}{8}$ a pour raison -2 — $U_n = -\frac{1}{4}n + \frac{1}{8}$: la raison est $-\frac{1}{4}$ et $U_0 = \frac{1}{8}$. On écrit d'abord U_n sous la forme $an + b$: la raison est le coefficient de n, une fois la division faite.

---

11. THÉORÈME

Terme général d'une suite arithmétique

CE QU'IL DIT

Ken la suite arithmétique, le premier terme mte3ha U indice zéro w la raison r, wa9tha U indice n égale U indice zéro, plus n fois r. 3lech ? 5ater bech nouslou men U indice zéro l U indice n, nzidou la raison n marrat. Mathalan U indice zéro égale racine carrée de deux w r égale deux cinquièmes : U indice cinq égale racine carrée de deux, plus cinq fois deux cinquièmes, ya3ni deux plus racine carrée de deux. W U indice mille égale quatre cents plus racine carrée de deux. Ma 3adech lezemna na7sbou les termes el koll wa7ed wa7ed.

U indice n égale U وقتها ، U indice zéro w la raison r متاعها suite arithmétique ، le premier terme كان الـ . مرّات la raison n نزيدو ، U indice n لـ U indice zéro من نوصلو باش خاطر ؟ علاش . indice zéro ، plus n fois r

U indice zéro égale racine carrée de deux w r égale deux cinquièmes : U indice cinq égale racine مثلا deux plus racine carrée de deux . w U indice mille يعني ، carrée de deux ، plus cinq fois deux cinquièmes . الكل واحد واحد les termes نحسبو لازمنا عادش ما . égale quatre cents plus racine carrée de deux

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

Si la suite est arithmétique, de premier terme U indice zéro et de raison r, alors U indice n égale U indice zéro, plus n fois r. Pourquoi ? Parce que pour aller de U indice zéro à U indice n, on ajoute la raison n fois. Par exemple U indice zéro égale racine carrée de deux et r égale deux cinquièmes : U indice cinq égale racine carrée de deux, plus cinq fois deux cinquièmes, donc deux plus racine carrée de deux. Et U indice mille égale quatre cents plus racine carrée de deux. Plus besoin de calculer tous les termes un par un.

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r. Alors :

> $U_n = U_0 + nr$, pour tout entier naturel n.

On le voit sur les premiers termes : $U_1 = U_0 + r$, $U_2 = U_0 + 2r$, $U_3 = U_0 + 3r$, … Pour aller de U_0 à U_n, on ajoute n fois la raison. Grâce à cette formule, on calcule un terme lointain sans passer par tous ceux qui le précèdent.

POUR TOUT ENTIER NATUREL N

$$U_n = U_0 + nr$$

DÉMONSTRATION

Soit n un entier naturel non nul. On écrit les n égalités : $U_1 = U_0 + r$; $U_2 = U_1 + r$; $U_3 = U_2 + r$; … ; $U_{n-1} = U_{n-2} + r$; $U_n = U_{n-1} + r$. On les additionne membre à membre : les termes U_1, U_2, …, U_{n-1} figurent une fois dans chaque membre et se simplifient. Il reste $U_n = U_0 + nr$, car la raison a été ajoutée n fois. Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit $U_0 = U_0$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit (U_n) la suite arithmétique définie par $U_0 = \sqrt{2}$ et $U_{n+1} = U_n + \dfrac{2}{5}$ pour tout entier naturel n. Calcule U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5, puis U_{1000}.

> Soit (U_n) la suite arithmétique définie par $U_0 = \sqrt{2}$ et U indice (n plus un) égale U indice n plus 2 sur 5 pour tout entier naturel n. Calcule U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5, puis U_{1000}.
>
> Soit U indice n la suite arithmétique définie par U indice 0 égale racine carrée de 2 et U indice (n plus un) égale U indice n plus 2 sur 5 pour tout entier naturel n. Calcule U indice 1, U indice 2, U indice 3, U indice 4 et U indice 5, puis U indice 1000.

De proche en proche — On ajoute $\dfrac{2}{5}$ à chaque pas.

$U_1 = \sqrt{2} + \frac{2}{5}$; $U_2 = \sqrt{2} + \frac{4}{5}$; $U_3 = \sqrt{2} + \frac{6}{5}$

$U_4 = \sqrt{2} + \frac{8}{5}$; $U_5 = \sqrt{2} + \frac{10}{5} = 2 + \sqrt{2}$

Le terme général — Premier terme $\sqrt{2}$, raison $\dfrac{2}{5}$.

$U_n = \frac{2}{5}\,n + \sqrt{2}$

U1000 — On ne calcule pas mille termes : on applique la formule.

$U_{1000} = \frac{2}{5} \times 1000 + \sqrt{2} = 400 + \sqrt{2}$

$$U_n = \frac{2}{5}\,n + \sqrt{2} \quad ; \quad U_{1000} = 400 + \sqrt{2}$$

À ne pas faire : $U_5 = U_0 + 4r$ — $U_5 = U_0 + 5r$. De U_0 à U_5 il y a cinq pas : U_1, U_2, U_3, U_4, U_5. On ajoute la raison autant de fois que l'indice.

À ne pas faire : $U_n = (U_0 + n) \times r$ — $U_n = U_0 + n \times r$. C'est la raison seule qui est multipliée par n ; le premier terme s'ajoute ensuite.

12. PROPRIÉTÉ

D'un terme à un autre

CE QU'IL DIT

Se3at ma na3rfouch U indice zéro, na3rfou terme e5er, U indice p. Wa9tha nesta3mlou : U indice n égale U indice p, plus (n moins p) fois r. El fekra : men l'indice p l l'indice n, nzidou la raison n moins p marrat. Mathalan r égale trois quarts w U indice cent égale soixante-quatorze : U indice deux cent quarante-huit égale soixante-quatorze, plus cent quarante-huit fois trois quarts, ya3ni cent quatre-vingt-cinq. W b nafs la formule tal9a la raison ki ta3ref zouz termes : r égale (U indice n moins U indice p), le tout sur (n moins p).

U indice n égale U indice p : وقتها نستعملو . U indice p ، آخر terme نعرفو ، U indice zéro ساعات ما نعرفوش r égale مثلا . مرّات la raison n moins p نزيدو ، l'indice n لـ l'indice p من : الفكرة . ، plus (n moins p) fois r trois quarts w U indice cent égale soixante-quatorze : U indice deux cent quarante-huit égale soixante-formule الـ بنفس cent quatre-vingt-cinq . w يعني ، quatorze ، plus cent quarante-huit fois trois quarts . termes : r égale (U indice n moins U indice p) ، le tout sur (n moins p) زوز تعرف كي la raison تلقى

Parfois on ne connaît pas U indice zéro, mais un autre terme, U indice p. On utilise alors : U indice n égale U indice p, plus (n moins p) fois r. L'idée : de l'indice p à l'indice n, on ajoute la raison n moins p fois. Par exemple r égale trois quarts et U indice cent égale soixante-quatorze : U indice deux cent quarante-huit égale soixante-quatorze, plus cent quarante-huit fois trois quarts, donc cent quatre-vingt-cinq. Et la même formule donne la raison quand on connaît deux termes : r égale (U indice n moins U indice p), le tout sur (n moins p).

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r. Alors :

> $U_n = U_p + (n - p)\,r$, où n et p sont deux entiers naturels. En particulier, $U_n = U_1 + (n - 1)\,r$.

On n'a donc pas besoin de U_0 : un terme quelconque et la raison suffisent. Et lorsque deux termes sont connus, la même égalité donne la raison : pour $n \neq p$, $r = \dfrac{U_n - U_p}{n - p}$.

N ET P ENTIERS NATURELS

$$U_n = U_p + (n - p)\,r$$

EN PARTICULIER

$$U_n = U_1 + (n - 1)\,r$$

DÉMONSTRATION

On a $U_n = U_0 + nr$ et $U_p = U_0 + pr$. En retranchant membre à membre : $U_n - U_p = nr - pr = (n-p)\,r$, donc $U_n = U_p + (n-p)\,r$.

EXEMPLE TRAITÉ

1. **Soit (U_n) la suite arithmétique de raison $r = \dfrac{3}{4}$ et telle que $U_{100} = 74$. Détermine U_{248}. 2. Calcule la raison d'une suite arithmétique (V_n) sachant que $V_{15} = -12$ et $V_{24} = 15$.**

De U100 à U248 — On part de U_{100} et on ajoute $248 - 100 = 148$ fois la raison.

$U_{248} = U_{100} + (248 - 100) \times \frac{3}{4}$

$U_{248} = 74 + 148 \times \frac{3}{4} = 74 + 111 = 185$

La raison — De V_{15} à V_{24}, il y a $24 - 15 = 9$ pas.

$V_{24} = V_{15} + 9r \iff 15 = -12 + 9r$

$r = \frac{15-(-12)}{24-15} = \frac{27}{9} = 3$

$$U_{248} = 185 \quad ; \quad r = 3$$

À ne pas faire : $U_{248} = 74 + 248 \times \dfrac{3}{4}$ — $U_{248} = 74 + (248 - 100) \times \dfrac{3}{4} = 185$. On part de U_{100}, pas de U_0 : le nombre de pas est la différence des indices, $248 - 100$.

À ne pas faire : $U_{15} = -12$ et $U_{24} = 15$ donc $r = 15 - (-12) = 27$ — $r = \dfrac{27}{24 - 15} = 3$. 27 est l'écart entre deux termes séparés par 9 pas : il faut le diviser par le nombre de pas.

13. PROPRIÉTÉ

Représentation graphique

CE QU'IL DIT

Ki n7ottou fi repère les points A indice n, elli l'abscisse mte3hom n w l'ordonnée mte3hom U indice n, nal9awhom el koll 3la droite wa7da. La pente mta3 la droite hedhi hiya la raison r, w l'ordonnée à l'origine hiya le premier terme U indice zéro. Mathalan V indice zéro égale un w r égale deux : les ordonnées houma un, trois, cinq, sept, w les points el koll 3la la droite y égale deux x plus un. Radd belek : la suite hiya les points bark, mouch la droite el koll.

كي نحطّو في repère les points A indice n ، اللي l'abscisse متاعهم n w l'ordonnée متاعهم ، U indice n متاعهم نلقاوهم الكل على droite وحدة . la pente متاع الـ droite هاذي هي l'ordonnée à l'origine ، w la raison r هي le premier terme U indice zéro . مثلا V indice zéro égale un w r égale deux : les ordonnées هوما un ، trois ، cinq ، sept ، w les points الكل على la droite y égale deux x plus un . ردّ بالك : الـ suite هي les points برك ، موش الـ droite الكل .

Quand on place dans un repère les points A indice n, d'abscisse n et d'ordonnée U indice n, on les trouve tous sur une même droite. La pente de cette droite est la raison r, et l'ordonnée à l'origine est le premier terme U indice zéro. Par exemple V indice zéro égale un et r égale deux : les ordonnées sont un, trois, cinq,

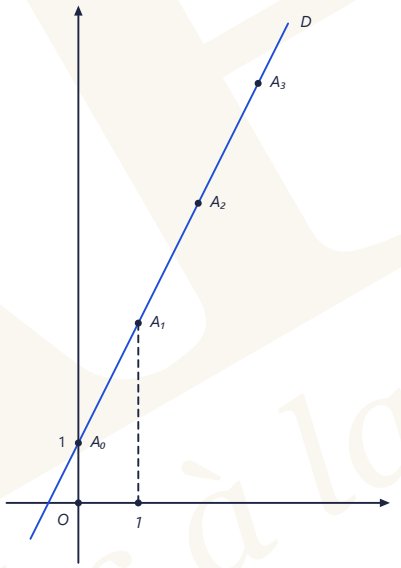
sept, et tous les points sont sur la droite y égale deux x plus un. Attention : la suite, ce sont seulement les points, pas la droite tout entière.

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

> Les points A_n de coordonnées (n, U_n) sont sur la droite de pente r et d'ordonnée à l'origine le premier terme U_0.

En effet $U_n = U_0 + nr$: le point $A_n(n, U_n)$ vérifie l'équation $y = rx + U_0$.

Représenter graphiquement la suite, c'est placer les points A_0, A_1, A_2, ... : des points d'abscisses entières, alignés sur cette droite.



Les points $A_n(n, V_n)$ sont alignés sur la droite D : y = 2x + 1.

Un repère orthonormé d'origine O. Quatre points sont placés : A0 d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, A1 d'abscisse 1 et d'ordonnée 3, A2 d'abscisse 2 et d'ordonnée 5, A3 d'abscisse 3 et d'ordonnée 7. Chaque fois que l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 2. Au palier 2, une droite D passe par les quatre points : c'est la droite d'équation y égale 2 x plus 1.

LA DROITE QUI PORTE LES POINTS $A_n(N, U_n)$

$$D : \ y = rx + U_0$$

EXEMPLE TRAITÉ

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $r = 2$. Place les points A_0, A_1, A_2 et A_3, où A_n est le point d'abscisse n et d'ordonnée V_n. Vérifie qu'ils sont sur une même droite D, puis montre que pour tout entier n le point A_n appartient à D.

Les termes —

$V_0 = 1 \quad ; \quad V_1 = 3 \quad ; \quad V_2 = 5 \quad ; \quad V_3 = 7$

La droite — De A_0 à A_1, puis de A_1 à A_2, puis de A_2 à A_3 : l'abscisse augmente de 1 et l'ordonnée de 2. Les quatre points sont sur la droite de pente 2 passant par A_0.

$D : \ y = 2x + 1$

Pour tout n — Le terme général est $V_n = 1 + 2n$: les coordonnées de A_n vérifient l'équation de D.

$V_n = 2 \times n + 1 \quad \text{donc} \quad A_n \in D$

$$D : \ y = 2x + 1$$

À ne pas faire : La représentation graphique de la suite est la droite D tout entière — Ce sont seulement les points A_0, A_1, A_2, ... de D, d'abscisses entières. Une suite n'a de termes que pour les indices entiers : il n'y a pas de terme d'indice $1{,}5$.

---

14. APPLICATION

Exemple : lire le premier terme et la raison sur un graphique

CE QU'IL DIT

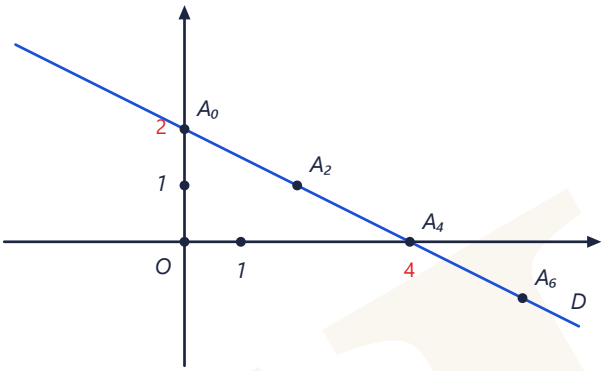
Houni bel 3aks : 3andna la droite D, w n7ebbou nal9aw la suite. Na9raw zouz points : D tet3adda men le point d'abscisse zéro et d'ordonnée deux, w men le point d'abscisse quatre et d'ordonnée zéro. La pente égale (zéro moins deux) sur (quatre moins zéro), ya3ni moins un demi. Idhan U indice n égale moins un demi fois n, plus deux. Hedhi men la forme a n plus b, idhan la suite arithmétique : le premier terme U indice zéro égale deux, w la raison égale moins un demi.

هنا بالعكس : عندنا الـ droite D ، w نحبّو نلقاو الـ suite . نقراو زوز points : D تتعدّى من le point d'abscisse zéro et d'ordonnée deux ، w من le point d'abscisse quatre et d'ordonnée zéro . la pente égale (zéro moins deux) sur (quatre moins zéro) ، يعني moins un demi . إذن plus ، n fois un demi moins égale n'a U indice suite arithmétique : le premier terme U indice zéro égale الـ إذن ، la forme a n plus b من هاذي . deux ، w la raison égale moins un demi .

Ici c'est l'inverse : on a la droite D, et on cherche la suite. On lit deux points : D passe par le point d'abscisse zéro et d'ordonnée deux, et par le point d'abscisse quatre et d'ordonnée zéro. La pente égale (zéro moins deux) sur (quatre moins zéro), donc moins un demi. Donc U indice n égale moins un demi fois n, plus deux. C'est de la forme a n plus b, donc la suite est arithmétique : le premier terme U indice zéro égale deux, et la raison égale moins un demi.

Dans le graphique, D est la droite qui contient les points $A_n(n, U_n)$, où (U_n) est une suite.

Montre que (U_n) est une suite arithmétique, et détermine son premier terme U_0 et sa raison r.



La droite D contient les points $A_n(n, U_n)$.

Un repère d'origine O, avec l'unité 1 marquée sur chaque axe. Une droite D descend de gauche à droite. Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2, passe par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 1, coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4, puis passe par le point d'abscisse 6 et d'ordonnée moins 1. Quand l'abscisse augmente de 2, l'ordonnée diminue de 1.

EXEMPLE TRAITÉ

Montre que la suite est arithmétique et donne son premier terme et sa raison.

Deux points de D — On lit deux points de la droite : celui d'abscisse 0 a pour ordonnée 2, celui d'abscisse 4 a pour ordonnée 0.

La pente —
$\frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2}$

L'équation de D — L'ordonnée à l'origine est 2.
$D : \ y = -\frac{1}{2}x + 2$

La suite — Le point A_n, d'abscisse n et d'ordonnée U_n, est sur D : U_n est de la forme $an + b$, donc la suite est arithmétique.
$U_n = -\frac{1}{2}n + 2$

$$U_0 = 2 \quad ; \quad r = -\frac{1}{2}$$

À ne pas faire : La droite coupe l'axe des abscisses en 4, donc $U_0 = 4$ — U_0 est l'ordonnée du point d'abscisse 0 : $U_0 = 2$. Le premier terme se lit sur l'axe des **ordonnées**, là où $n = 0$. Le point d'abscisse 4 dit seulement que $U_4 = 0$.

À ne pas faire : La droite descend de 2 à 0, donc $r = -2$ — Elle descend de 2 en 4 pas : $r = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. La raison est la variation pour **un** pas : on divise l'écart des ordonnées par l'écart des abscisses.

15. ACTIVITÉ

Pour comprendre : les huit heures du cycliste

CE QU'IL DIT

Cycliste mcha cent quatre-vingts kilomètres fi huit heures, w koll se3a yemchi trois kilomètres a9all mel se3a elli sab9etha. Nsammiw a el masefa mta3 l'heure numéro un. Elli ba3dha : a moins trois, a moins six, 7atta a moins vingt-et-un. Ki njam3ouhom : huit a moins quatre-vingt-quatre égale cent quatre-vingts, idhan a égale trente-trois. Ya3ni : trente-trois, trente, vingt-sept, w hakka 7atta douze. W chouf 7aja behya : le premier plus le dernier égale quarante-cinq, w le deuxième plus l'avant-dernier zeda quarante-cinq.

cycliste مشى cent quatre-vingts kilomètres في w ، huit heures كل ساعة يمشي trois kilomètres أقلّ من
a نسمّيو . l'heure numéro un المسافة متاع a اللي بعدها : a moins six ، a moins trois ، حتّى الساعة اللي سبقتها
a moins vingt-et-un . كي نجمعوهم : huit a moins quatre-vingt-quatre égale cent quatre-vingts ، إذن a
égale trente-trois . w : يعني vingt-sept ، trente ، trente-trois هكّا حتّى w . douze شوف حاجة باهية : le
premier plus le dernier égale quarante-cinq ، w le deuxième plus l'avant-dernier زادة quarante-cinq .

Un cycliste a parcouru cent quatre-vingts kilomètres en huit heures, et chaque heure il fait trois kilomètres de moins que l'heure précédente. On note a la distance de l'heure numéro un. Les suivantes : a moins trois, a moins six, jusqu'à a moins vingt-et-un. En les additionnant : huit a moins quatre-vingt-quatre égale cent quatre-vingts, donc a égale trente-trois. Cela donne : trente-trois, trente, vingt-sept, et ainsi de suite jusqu'à douze. Et regarde une belle chose : le premier plus le dernier égale quarante-cinq, et le deuxième plus l'avant-dernier aussi quarante-cinq.

Un cycliste a parcouru 180 km en huit heures, et il a parcouru chaque heure 3 km de moins que l'heure précédente.

Combien de kilomètres a-t-il parcourus chaque heure ?

EXEMPLE TRAITÉ

Trouve la distance parcourue pendant chacune des huit heures.

Les huit distances — On note a la distance de la première heure, en kilomètres. Les distances sont huit termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison -3.

$$a \ ; \ a-3 \ ; \ a-6 \ ; \ a-9 \ ; \ a-12 \ ; \ a-15 \ ; \ a-18 \ ; \ a-21$$

Leur somme — Huit fois a, moins $3+6+9+12+15+18+21=84$.

$$8a-84=180 \iff 8a=264 \iff a=33$$

Heure par heure —

$$33 \ ; \ 30 \ ; \ 27 \ ; \ 24 \ ; \ 21 \ ; \ 18 \ ; \ 15 \ ; \ 12$$

Une remarque — Le premier et le dernier, le deuxième et l'avant-dernier… : chaque paire a la même somme.

$$33+12=30+15=27+18=24+21=45 \quad ; \quad 4\times 45=180$$

$33 \ ; \ 30 \ ; \ 27 \ ; \ 24 \ ; \ 21 \ ; \ 18 \ ; \ 15 \ ; \ 12$ (en kilomètres)

16. MÉTHODE

Compter les termes d'une somme

CE QU'IL DIT

9bal ma na7sbou somme, lezem na3rfou 9addech fiha men terme. Men un l cent, famma cent termes. Ama men U indice zéro l U indice n, famma n plus un termes, 5ater na7sbou U indice zéro zeda. W fel 3moum : men U indice p l U indice n, famma n moins p plus un termes. Mathalan men U indice quarante-cinq l U indice trois cent quatre-vingt-un : trois cent quatre-vingt-un moins quarante-cinq plus un, ya3ni trois cent trente-sept termes. Ma tensech el plus un.

قُبَلْ ما نحسبو somme ، لازم نعرفو قدّاش فيها من terme . من لـ un ، cent فمّا cent termes . أما من U indice
في العموم : من U indice p لـ U indice zéro ، خاطر نحسبو U indice zéro زادة . w
U indice trois cent quatre- لـ U indice quarante-cinq مثلا من . n moins p plus un termes فمّا ، indice n
. trois cent trente-sept termes يعني ، vingt-un : trois cent quatre-vingt-un moins quarante-cinq plus un
ما تنساش الـ plus un .

Avant de calculer une somme, il faut savoir combien elle a de termes. De un à cent, il y a cent termes. Mais de U indice zéro à U indice n, il y a n plus un termes, car on compte aussi U indice zéro. Et en général : de U indice p à U indice n, il y a n moins p plus un termes. Par exemple de U indice quarante-cinq à U indice trois cent quatre-vingt-un : trois cent quatre-vingt-un moins quarante-cinq plus un, donc trois cent trente-sept termes. N'oublie pas le plus un.

Avant de calculer une somme, on compte ses termes. Détermine le nombre de termes de chacune des sommes suivantes :

- $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$;
- $B = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{14} + \ldots + \dfrac{1}{121} + \dfrac{1}{122}$;
- $C = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 73 + 75$;
- $D = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$;
- $E = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$;
- $F = U_{45} + U_{46} + \ldots + U_{381}$.

On retient : de l'indice p à l'indice n (avec $p \leq n$), il y a $n - p + 1$ termes.

LE NOMBRE DE TERMES

$$U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n \quad : \quad n - p + 1 \text{ termes}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Compte les termes des six sommes.

A et B — De 1 à 100 : 100 termes. De 12 à 122 : on compte les dénominateurs.

$122 - 12 + 1 = 111$

C — Les impairs $1, 3, \ldots, 75$ s'écrivent $2k + 1$ avec k de 0 à 37.

$75 = 2 \times 37 + 1 \quad$ donc $\quad 37 - 0 + 1 = 38$ termes

D et E — D est la somme des 2^k pour k de 0 à n ; E va de l'indice 0 à l'indice n.

$n - 0 + 1 = n + 1$ termes

F —

$381 - 45 + 1 = 337$ termes

$A : 100$; $B : 111$; $C : 38$; $D : n+1$; $E : n+1$; $F : 337$

À ne pas faire : $U_{45} + U_{46} + \ldots + U_{381}$ a $381 - 45 = 336$ termes — Elle a $381 - 45 + 1 = 337$ termes. La différence des indices compte les pas, pas les termes : de U_{45} à U_{46} il y a un pas, mais deux termes.

À ne pas faire : $U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ a n termes — Elle a $n + 1$ termes. On commence à l'indice 0 : U_0 compte aussi.

---

17. THÉORÈME

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

CE QU'IL DIT

La somme mta3 n termes consécutifs mta3 suite arithmétique : S égale n fois (a plus b), le tout sur deux. a houwa le premier terme mta3 la somme, w b houwa le dernier. Ya3ni : le nombre de termes, fois le premier plus le dernier, le tout sur deux. 3lech ? Nektbou la somme marrtin, marra men a l b w marra men b l a. Koll zouz termes fou9 b3adhhom ya3tiw a plus b, w 3andna n menhom, idhan deux S égale n fois (a plus b). Mathalan un plus deux plus trois 7atta cent : cent fois cent un, le tout sur deux, ya3ni cinq mille cinquante.

suite arithmétique : S égale n fois (a plus b) ، le tout sur deux . متاع n termes consécutifs متاع la somme le nombre de termes ، fois le premier : يعني . le dernier هو somme ، w b الـ متاع le premier terme هو a كل زوز . a لـ b مرّة من b w لـ a مرّة من ، مرّتين somme الـ نكتبو ؟ علاش . plus le dernier ، le tout sur deux un plus deux مثلا . deux S égale n fois (a plus b) منهم ، إذن n عندنا a plus b ، w فوق بعضهم يعطيو termes . cinq mille cinquante يعني ، cent : cent fois cent un ، le tout sur deux حتّى plus trois

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique : S égale n fois (a plus b), le tout sur deux. a est le premier terme de la somme, et b le dernier. Autrement dit : le nombre de termes, fois le premier plus le dernier, le tout sur deux. Pourquoi ? On écrit la somme deux fois, une fois de a à b et une fois de b à a. Deux termes l'un sous l'autre donnent toujours a plus b, et il y en a n, donc deux S égale n fois (a plus b). Par exemple un plus deux plus trois jusqu'à cent : cent fois cent un, le tout sur deux, donc cinq mille cinquante.

La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est $S = n \times \dfrac{a+b}{2}$, où a est le premier terme de cette somme et b est le dernier terme.

En mots : S est égale au **nombre de termes** multiplié par la demi-somme du **premier terme de la somme** et du **dernier terme**.

En particulier, pour tout entier naturel non nul n : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

N TERMES, DU PREMIER A AU DERNIER B

$$S = n \times \frac{a+b}{2}$$

LES N PREMIERS ENTIERS

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

DÉMONSTRATION

Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, a le premier terme de cette somme et b le dernier. On range les termes de deux manières. Du premier au dernier : $S = a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + [a + (n-1)r]$. Du dernier au premier : $S = b + (b-r) + (b-2r) + \ldots + [b - (n-1)r]$. On ajoute membre à membre, terme à terme : $a + b$, puis $(a+r) + (b-r) = a + b$, puis $(a+2r) + (b-2r) = a + b$, ... Chacune des n paires vaut $a + b$. Donc $2S = n(a+b)$, d'où $S = n \times \dfrac{a+b}{2}$.

EXEMPLE TRAITÉ

1. **Calcule $S = 1 + 2 + \ldots + 99 + 100$. 2. Calcule $S' = 500 + 501 + \ldots + 1999 + 2000$.**

Deux fois S — On écrit S dans les deux sens et on ajoute : $1 + 100$, $2 + 99$, ..., $100 + 1$. Cela fait 100 paires de somme 101.

$2S = 100 \times 101 = 10\,100$

$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$

Les termes de la seconde somme — De 500 à 2000.

$2000 - 500 + 1 = 1501$ termes

La formule — Premier terme 500, dernier terme 2000.

$S' = 1501 \times \frac{500 + 2000}{2} = 1501 \times 1250 = 1\,876\,250$

$$S = 5050 \quad ; \quad S' = 1\,876\,250$$

> S égale 5050; S prime égale 1 876 250
>
> S égale 5050; S prime égale un million huit cent soixante-seize mille deux cent cinquante

À ne pas faire : $500 + 501 + \ldots + 2000 = 1500 \times \dfrac{500 + 2000}{2}$ — $1501 \times \dfrac{500 + 2000}{2} = 1\,876\,250$. De 500 à 2000 il y a $2000 - 500 + 1 = 1501$ termes : on compte les termes avant d'appliquer la formule.

À ne pas faire : $U_0 + U_1 + \ldots + U_n = n \times \dfrac{U_0 + U_n}{2}$ — $U_0 + U_1 + \ldots + U_n = (n+1) \times \dfrac{U_0 + U_n}{2}$. Dans la formule, n désigne le **nombre de termes**, pas le dernier indice : ici il y en a $n + 1$.

18. APPLICATION

Exemple : le prix d'un puits

CE QU'IL DIT

N7ebbou na7frou puits : le premier mètre b cinquante dinars, w koll mètre yzid dix dinars 3la elli sab9ou. Les prix ya3mlou suite arithmétique, la raison dix. Le quinzième mètre : cinquante plus quatorze fois dix, ya3ni cent quatre-vingt-dix. Radd belek : quatorze, mouch quinze. El puits el koll : quinze fois (cinquante plus cent quatre-vingt-dix), le tout sur deux, ya3ni mille huit cents dinars. W b mille dinars, nouslou l dix mètres bark : dix mètres b neuf cent cinquante, w onze mètres b mille cent.

نحبّو نحفرو puits : le premier mètre بـ cinquante dinars ، w كل mètre يزيد dix dinars على اللي سبقو . les prix يعملو dix fois plus quatorze : cinquante le quinzième mètre . la raison dix ، suite arithmétique ، يعني : ردّ بالك cent quatre-vingt-dix . quinze موش ، quatorze : الـ puits الكل) ، le tout sur deux (quinze fois cent quatre-vingt-dix) ، يعني w . huit cents dinars mille بـ mille dinars ، نوصلو لـ dix mètres : برك dix mètres بـ onze mètres ، w neuf cent cinquante بـ mille cent .

On veut creuser un puits : le premier mètre coûte cinquante dinars, et chaque mètre coûte dix dinars de plus que le précédent. Les prix forment une suite arithmétique de raison dix. Le quinzième mètre : cinquante plus quatorze fois dix, donc cent quatre-vingt-dix. Attention : quatorze, pas quinze. Le puits entier : quinze fois (cinquante plus cent quatre-vingt-dix), le tout sur deux, donc mille huit cents dinars. Et avec mille dinars, on atteint seulement dix mètres : dix mètres coûtent neuf cent cinquante, et onze mètres mille cent.

On veut creuser un puits. Le premier mètre coûte 50 dinars, le deuxième mètre coûte 60 dinars, le troisième mètre coûte 70 dinars et ainsi de suite, en augmentant de 10 dinars à chaque mètre.

1. Combien coûtera le puits si l'on creuse 15 mètres ?
2. Quelle profondeur, en nombre entier de mètres, pourrait-on atteindre si l'on disposait d'un budget de 1000 dinars ?

EXEMPLE TRAITÉ

Les deux questions.

La suite des prix — Les prix des mètres successifs sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme 50 et de raison 10. Le 15^{e} mètre est à 14 pas du premier.

$$50 + 14 \times 10 = 190$$

Quinze mètres — Quinze termes, du premier 50 au dernier 190.

$$S = 15 \times \frac{50+190}{2} = 15 \times 120 = 1800$$

n mètres — Le mètre numéro n coûte $50 + 10(n-1) = 10n + 40$ dinars.

$$S_n = n \times \frac{50+10n+40}{2} = n(5n + 45)$$

Le budget — On cherche le plus grand entier n tel que $n(5n + 45) \leq 1000$.

$$10 \times 95 = 950 \leq 1000 \quad ; \quad 11 \times 100 = 1100 > 1000$$

1800 dinars pour 15 mètres ; 10 mètres avec 1000 dinars

À ne pas faire : Le 15^{e} mètre coûte $50 + 15 \times 10 = 200$ dinars — Il coûte $50 + 14 \times 10 = 190$ dinars. Le premier terme est le prix du mètre numéro 1 : du premier au quinzième il y a 14 pas. C'est $U_n = U_1 + (n-1)r$.

---

19. ACTIVITÉ

Un problème pour aller plus loin : des cercles tangents

CE QU'IL DIT

3andna des cercles tangents fi O, les diamètres mte3hom un, deux, trois centimètres w hakka. a indice n hiya l'aire mta3 la portion elli bin cercle w elli ba3dou. Na7sbouha bettar7 : l'aire mta3 le disque el kbir moins l'aire mta3 es-sghir. Nal9aw a indice n égale (deux n plus un) fois pi, le tout sur quatre. Hedhi men la forme a n plus b, idhan suite arithmétique : le premier terme pi sur quatre, w la raison pi sur deux. W la somme mta3 les aires el koll hiya l'aire mta3 le disque le5er : pi fois (n plus un) au carré, le tout sur quatre.

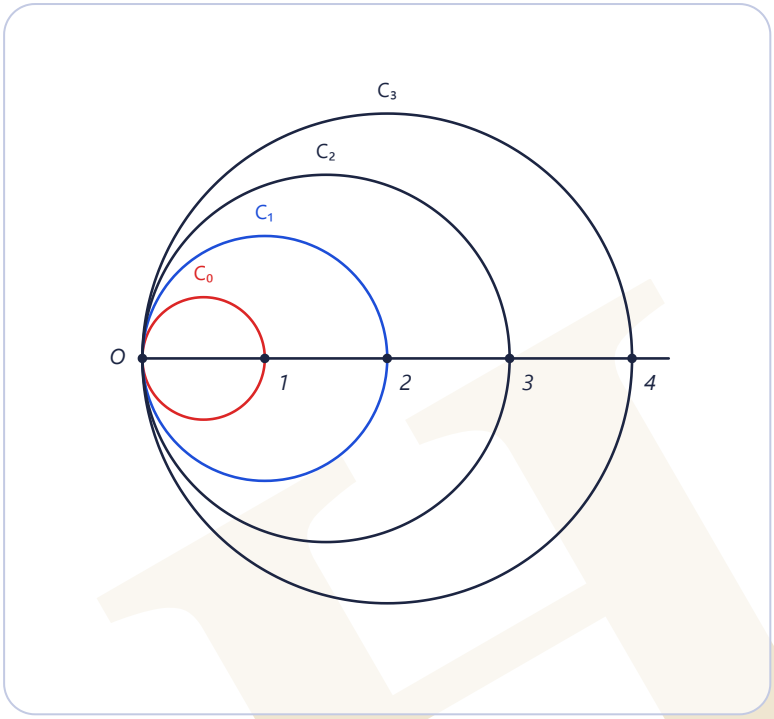
عندنا des cercles tangents في O ، les diamètres متاعهم w ، trois centimètres ، deux ، un هكّا . a indice n هي
l'aire متاع la portion اللي بين cercle w اللي بعدو . نحسبوها بالطرح : l'aire متاع الـ disque الكبير moins l'aire
متاع الصغير . نلقاو a indice n égale (deux n plus un) fois pi ، le tout sur quatre . a n plus b من هاذي la forme
إذن ، b . w la somme ، w la raison pi sur deux ، le premier terme pi sur quatre : suite arithmétique متاع les
. pi fois (n plus un) au carré ، le tout sur quatre : الأخير disque الـ متاع l'aire الكل هي aires

Nous avons des cercles tangents en O, de diamètres un, deux, trois centimètres et ainsi de suite. a indice n est l'aire de la portion comprise entre un cercle et le suivant. On la calcule par différence : l'aire du grand disque moins l'aire du petit. On trouve a indice n égale (deux n plus un) fois pi, le tout sur quatre. C'est de la forme a n plus b, donc une suite arithmétique : premier terme pi sur quatre, et raison pi sur deux. Et la somme de toutes ces aires est l'aire du dernier disque : pi fois (n plus un) au carré, le tout sur quatre.

La figure représente des cercles C_0, C_1, C_2, ... tangents en O. Les diamètres de ces cercles sont respectivement égaux à 1 cm, 2 cm, 3 cm, ... On désigne par :

- a_0 l'aire du disque de frontière C_0 ;
- a_1 l'aire de la portion du plan comprise entre C_0 et C_1 ;
- a_2 l'aire de la portion du plan comprise entre C_1 et C_2 ;
- et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, a_n l'aire de la portion du plan comprise entre C_{n-1} et C_n.

1. Calcule a_n en fonction de n.
2. Montre que (a_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Soit $S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Calcule S de deux manières différentes.



Les cercles C_0, C_1, C_2, C_3 sont tangents en O ; leurs diamètres valent 1, 2, 3 et 4 cm.

Quatre cercles C0, C1, C2 et C3, tous tangents en un même point O, placé à gauche. Leurs centres sont sur une même demi-droite horizontale d'origine O, graduée 1, 2, 3, 4 : le cercle C0 a pour diamètre 1, C1 a pour diamètre 2, C2 a pour diamètre 3 et C3 a pour diamètre 4. Chaque cercle contient le précédent. Le disque limité par C0 a pour aire a0 ; la portion du plan comprise entre C0 et C1 a pour aire a1 ; celle comprise entre C1 et C2, a2 ; celle comprise entre C2 et C3, a3.

EXEMPLE TRAITÉ

Les trois questions.

Le grand disque — Son diamètre est $n+1$, son rayon $\dfrac{n+1}{2}$.

$\pi \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(n+1)^2$

L'aire par différence — Pour $n \geq 1$, on retranche l'aire du disque de frontière C_{n-1}.

$a_n = \frac{\pi}{4}(n+1)^2 - \frac{\pi}{4}n^2 = \frac{\pi}{4}(2n+1)$

> L'aire par différence. Pour $n \geq 1$, on retranche l'aire du disque de frontière C indice (n moins un).
>
> L'aire par différence. Pour n supérieur ou égal à 1, on retranche l'aire du disque de frontière C indice .(n moins un)

Une suite arithmétique — La formule donne aussi $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Elle est de la forme $an+b$: premier terme $\dfrac{\pi}{4}$, raison $\dfrac{\pi}{2}$.

$a_n = \frac{\pi}{2}\,n + \frac{\pi}{4}$

S, première manière — Les portions réunies remplissent le disque de frontière C_n.

$S = \frac{\pi}{4}(n+1)^2$

S, seconde manière — Par la formule : $n+1$ termes, de a_0 à a_n.

$S = (n+1) \times \frac{a_0 + a_n}{2} = (n+1) \times \frac{\pi}{8}(2n+2) = \frac{\pi}{4}(n+1)^2$

$$a_n = \frac{\pi \times (2n+1)}{4} \quad ; \quad S = \frac{\pi \times (n+1)^2}{4}$$

À ne pas faire : Le disque de frontière C_n a pour aire $\pi(n+1)^2$ — Son aire est $\pi \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(n+1)^2$. $n+1$ est le **diamètre** : l'aire d'un disque se calcule avec le rayon, la moitié du diamètre.

---

20. ACTIVITÉ

Un problème pour aller plus loin : la somme des cubes

CE QU'IL DIT

Nsammiw U indice n la somme : un plus deux plus trois 7atta n. Nersmou carré le côté mte3ou U indice n, w de5lou carré le côté mte3ou U indice (n moins un). La bande elli binethom, l'aire mte3ha hiya U indice n au carré, moins U indice (n moins un) au carré. Nesta3mlou l'identité a au carré moins b au carré : la différence mte3hom n, w la somme mte3hom n au carré. Idhan l'aire mta3 la bande égale n au cube. W ki njam3ou les bandes el koll, nal9aw le carré el kbir : la somme des cubes men un l n égale la somme un plus deux 7atta n, le tout au carré.

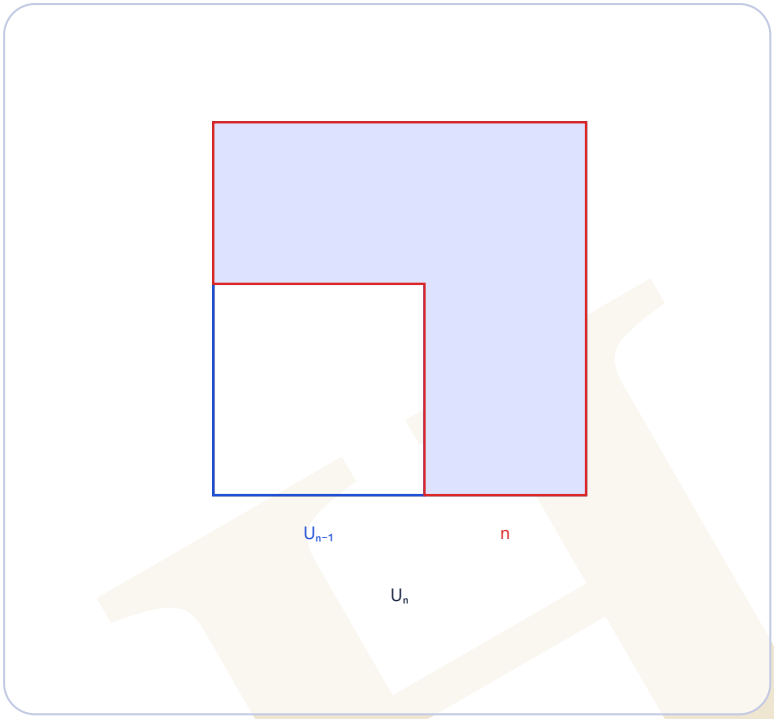
نسمّيو U indice n la somme : un plus deux plus trois حتّى U indice n . نرسمو carré الـ côté متاعو w ، داخلو U indice n
carré الـ côté متاعو U indice (n moins un) . الـ bande اللي بيناتهم ، l'aire متاعها هي ، U indice n au carré
l'identité a au carré moins b au carré : la différence نستعملو . moins U indice (n moins un) au carré
les نجمعو كي bande égale n au cube . w متاع الـ l'aire إذن . n au carré متاعهم n ، w la somme متاعهم
bandes الكل ، نلقاو الـ carré الكبير : la somme des cubes من un لـ la somme un plus deux égale n حتّى ، n
le tout au carré .

On note U indice n la somme : un plus deux plus trois jusqu'à n. On dessine un carré de côté U indice n, et à l'intérieur un carré de côté U indice (n moins un). La bande entre les deux a pour aire U indice n au carré, moins U indice (n moins un) au carré. On utilise l'identité a au carré moins b au carré : leur différence vaut n, et leur somme vaut n au carré. Donc l'aire de la bande égale n au cube. Et en réunissant toutes les bandes, on retrouve le grand carré : la somme des cubes de un à n égale la somme un plus deux jusqu'à n, le tout au carré.

On désigne par U_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls : $U_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

1. Montre que, pour tout entier naturel $n > 1$, l'aire de la bande délimitée par les carrés de côtés U_{n-1} et U_n est égale à n^3.
2. Déduis-en l'égalité $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Cette démonstration, à la fois algébrique et géométrique, est due au mathématicien Al Karagi (fin du Xᵉ siècle – début du XIᵉ siècle).



La bande comprise entre le carré de côté U_{n-1} et le carré de côté U_n.

Un grand carré de côté U indice n. Dans son coin en bas à gauche, un carré plus petit, de côté U indice n moins 1. La partie du grand carré qui n'est pas dans le petit est hachurée : c'est une bande en forme de L renversé, qui longe le côté droit et le côté du haut du grand carré. Sa largeur est la différence des deux côtés, c'est-à-dire n.

LA SOMME DES CUBES

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

EXEMPLE TRAITÉ

Les deux questions.

L'aire de la bande — Elle est la différence des aires des deux carrés.

$$U_n^2 - U_{n-1}^2 = (U_n - U_{n-1})(U_n + U_{n-1})$$

Les deux facteurs — On passe de U_{n-1} à U_n en ajoutant n ; et $U_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $U_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$.

$$U_n - U_{n-1} = n \quad ; \quad U_n + U_{n-1} = \tfrac{n(n+1)+n(n-1)}{2} = n^2$$

> Les deux facteurs. On passe de U indice (n moins un) à U_n en ajoutant n ; et $U_n = \frac{n(n+1)}{2}$, U indice (n moins un) égale la parenthèse n moins 1, fois n, le tout sur 2.
>
> Les deux facteurs. On passe de U indice (n moins un) à U indice n en ajoutant n; et U indice n égale n fois la parenthèse n plus 1, le tout sur 2, U indice (n moins un) égale la parenthèse n moins 1, fois n, le .tout sur 2

$$U_n^2 - U_{n-1}^2 = n \times n^2 = n^3$$

On empile les bandes — Le carré de côté U_n est fait du carré de côté $U_1 = 1$, d'aire 1^3, et des bandes d'aires 2^3, 3^3, …, n^3.

$$U_n^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

Une vérification —

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \quad ; \quad (1+2+3)^2 = 36$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. Une suite (U_n) associe à tout entier naturel $n \geq n_0$ un réel unique U_n, son terme général.
   > Suite : l koll entier naturel n, men n indice zéro w enti tala3, 3andna réel wa7ed, U indice n, w houwa le terme général.
   > *Une suite : à chaque entier naturel n, à partir de n indice zéro, correspond un seul réel, U indice n ; c'est le terme général.*
2. Une suite est définie par son terme général, ou par son premier terme et une relation de récurrence.
   > Suite tet3ata b le terme général, walla b le premier terme w relation de récurrence.
   > *Une suite est donnée par son terme général, ou par son premier terme et une relation de récurrence.*
3. (U_n) est arithmétique de raison r si $U_{n+1} = U_n + r$ pour tout entier naturel n.
   > Suite arithmétique de raison r : U indice (n plus un) égale U indice n, plus r, pour tout entier naturel n.
   > *Une suite arithmétique de raison r : U indice (n plus un) égale U indice n, plus r, pour tout entier naturel n.*
4. $U_n = U_0 + nr$; $U_n = U_p + (n-p)\,r$; en particulier $U_n = U_1 + (n-1)\,r$.
   > U indice n égale U indice zéro, plus n fois r. W U indice n égale U indice p, plus (n moins p) fois r.
   > *U indice n égale U indice zéro, plus n fois r. Et U indice n égale U indice p, plus (n moins p) fois r.*
5. Les points $A_n(n, U_n)$ sont sur la droite de pente r et d'ordonnée à l'origine U_0.
   > Les points A indice n 3la la droite elli la pente mte3ha r, w l'ordonnée à l'origine mte3ha U indice zéro.
   > *Les points A indice n sont sur la droite de pente r et d'ordonnée à l'origine U indice zéro.*
6. De U_p à U_n, il y a $n - p + 1$ termes.
   > Men U indice p l U indice n, famma n moins p plus un termes.
   > *De U indice p à U indice n, il y a n moins p plus un termes.*
7. Somme de n termes consécutifs : $S = n \times \dfrac{a+b}{2}$, où a est le premier terme de la somme et b le dernier ; $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

> La somme : le nombre de termes, fois la somme du premier et du dernier, le tout sur deux. W un plus deux plus trois 7atta n égale n fois (n plus un), le tout sur deux.
> *La somme : le nombre de termes, fois la somme du premier et du dernier, le tout sur deux. Et un plus deux plus trois jusqu'à n égale n fois (n plus un), le tout sur deux.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna les suites arithmétiques. Tfakker : bech tet3adda men terme lelli ba3dou, tzid dima la raison r. U indice n égale U indice zéro, plus n fois r. W la somme hiya le nombre de termes, fois la somme du premier et du dernier, le tout sur deux. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا les suites arithmétiques . تفكّر : باش تتعدّى من terme للّي بعدو ، تزيد ديما la raison r . U indice n égale U indice zéro ، plus n fois r . w la somme le nombre de termes ، fois la somme du premier et هي . du dernier ، le tout sur deux يالله للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé les suites arithmétiques. Retiens : pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours la raison r. U indice n égale U indice zéro, plus n fois r. Et la somme, c'est le nombre de termes, fois la somme du premier et du dernier, le tout sur deux. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · SUITE DE NOMBRES RÉELS

chnowa hiya suite | c'est quoi une suite | définition d'une suite | suite ma3neha chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Suite hiya liste mta3 réels mrattbin : l koll entier naturel n, men n_{0} w enti tala3, 3andna réel wa7ed, nsammiwah U_{n}. Mathalan les entiers pairs : 0, 2, 4, 6, w hakka.

هي suite liste متاع réels مرتّبين : لكل entier naturel n ، من n indice zéro w إنت طالع ، عندنا réel واحد ، نسمّيوه U indice n . مثلا w six ، quatre ، deux ، zéro : les entiers pairs هكّا .

Une suite est une liste de réels rangés : à chaque entier naturel n, à partir de n indice zéro, correspond un seul réel, noté U indice n. Par exemple les entiers pairs : zéro, deux, quatre, six, et ainsi de suite.

QUESTION 2 · SUITE DE NOMBRES RÉELS

chnowa ma3neha l'indice | c'est quoi l'indice dans Un | comment lire U indice n | kifech na9ra l'indice

CE QU'IL RÉPOND

U_{n} na9rawha « U indice n ». n houwa l'indice : y9oul le terme hedha fi ayy blasa. U_{3} houwa le terme elli l'indice mte3ou 3. L'indice yetekteb sghir w louta, mouch puissance.

نقراوها « U indice n » . n هو l'indice : U indice n يقول الـ terme هاذا في أيّ بلاصة . U indice trois هو le
l'indice اللي terme متاعو l'indice . trois يتكتب صغير w لوطة ، موش puissance .

U indice n se lit « U indice n ». n est l'indice : il dit à quelle place se trouve ce terme. U indice trois est le terme dont l'indice est trois. L'indice s'écrit petit et en bas, ce n'est pas une puissance.

QUESTION 3 · SUITE DE NOMBRES RÉELS

3lech n7ottou parenthèses | différence entre Un avec parenthèses et sans parenthèses | Un bel parenthèses w blech parenthèses chnowa el far9

CE QU'IL RÉPOND

Blech parenthèses, U_{n} houwa nombre wa7ed : le terme elli l'indice mte3ou n. Bel parenthèses, (U_{n}), na7kiw 3la la suite el koll, ya3ni les termes el koll m3a b3adhhom.

بلاش U indice n ، parenthèses هو nombre واحد : le terme اللي l'indice متاعو n . بالـ parenthèses ، نحكيو
على الـ suite الكل ، يعني les termes الكل مع بعضهم .

Sans parenthèses, U indice n est un seul nombre : le terme d'indice n. Avec les parenthèses, on parle de la suite tout entière, c'est-à-dire de tous ses termes ensemble.

QUESTION 4 · EXEMPLE : CALCULER DES TERMES ET CHANGER D'INDICE

3lech le cinquième terme houwa U4 | le cinquième terme c'est U5 ou U4 | 3lech le centième terme houwa U99 | cinquième terme kifech nal9ah

CE QU'IL RÉPOND

5ater la suite tabda men U_{0}. Le premier terme houwa U_{0}, elli ba3dou U_{1}, w ki tousel l le cinquième terme tal9a U_{4}. L'indice dima ne9es 1 3la le rang : le centième terme houwa U_{99}. W ken la suite tabda men U_{1}, wa9tha le cinquième terme houwa U_{5}.

خاطر الـ suite تبدا من le premier terme . U indice zéro هو U indice zéro ، اللي بعدو w ، U indice un كي
توصل لـ le cinquième terme تلقى l'indice . U indice quatre ديما ناقص un على le rang : le centième terme
هو w . U indice quatre-vingt-dix-neuf كان الـ suite تبدا من U indice un ، وقتها le cinquième terme هو U
indice cinq .

Parce que la suite commence à U indice zéro. Le premier terme est U indice zéro, le suivant U indice un, et en arrivant au cinquième terme on trouve U indice quatre. L'indice a toujours un de moins que le rang : le centième terme est U indice quatre-vingt-dix-neuf. Et si la suite commence à U indice un, alors le cinquième terme est U indice cinq.

QUESTION 5 · EXEMPLE : CALCULER DES TERMES ET CHANGER D'INDICE

différence entre U(n+1) et Un + 1 | U indice n+1 kif kif Un + 1 ? | chnowa el far9 bin U(n+1) w Un+1

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$U_n = n^2$: $U_{n+1} = (n+1)^2 \neq n^2 + 1$

CE QU'IL RÉPOND

Mouch kif kif. U_{n+1} houwa le terme elli ba3d U_{n} : nbaddlou n b n + 1 fel formule. Ama $U_{n} + 1$, houwa le terme U_{n} w nzidouh 1. Mathalan ken $U_{n} = n^{2}$: $U_{n+1} = (n + 1)^{2}$, mouch $n^{2} + 1$.

موش كيف كيف . U indice (n plus un) هو le terme اللي بعد U indice n : نبدّلو n بـ n plus un في الـ formule .
أما U indice n ، plus un ، هو U indice n w نزيدوه un . مثلا كان U : U indice n égale n au carré
موش ، indice (n plus un) égale (n plus un) au carré . n au carré plus un

Ce n'est pas la même chose. U indice (n plus un) est le terme qui suit U indice n : on remplace n par n plus un dans la formule. Alors que U indice n, plus un, c'est le terme U indice n auquel on ajoute un. Par exemple si U indice n égale n au carré : U indice (n plus un) égale (n plus un) au carré, et non n au carré plus un.

QUESTION 6 · SUITE DE NOMBRES RÉELS

c'est quoi le terme général | chnowa le terme général | terme général ma3neha chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Le terme général houwa U_{n} maktoub b n : formule ta3tik ayy terme ki tbaddel n b l'indice elli t7ebb. Mathalan $U_{n} = 2n$: $U_{10} = 20$.

هو le terme général U indice n مكتوب بـ formule : n تعطيك أيّ terme كي تبدّل n بـ l'indice اللي تحبّ . مثلا
U indice n égale deux n : U indice dix égale vingt .

Le terme général, c'est U indice n écrit en fonction de n : une formule qui donne n'importe quel terme quand on remplace n par l'indice voulu. Par exemple U indice n égale deux n : U indice dix égale vingt.

QUESTION 7 · DEUX FAÇONS DE PRÉSENTER UNE SUITE

c'est quoi une relation de récurrence | chnowa relation de récurrence | récurrence ma3neha chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Relation de récurrence hiya relation ta3tik terme men le terme elli sab9ou. Mathalan $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_{n} - 3$. M3aha lezmek le premier terme, w temchi darja darja : bech ta7seb t_{3}, lezmek t_{2}.

هي relation de récurrence relation تعطيك terme من le terme اللي سبقو . مثلا t indice (n plus un) égale
t indice n ، moins trois ، un demi fois t indice n . معاها لازمك le premier terme ، w تمشي درجة درجة : باش تحسب t
. t indice deux لازمك ، indice trois

Une relation de récurrence est une relation qui donne un terme à partir du terme précédent. Par exemple t indice (n plus un) égale un demi fois t indice n, moins trois. Il faut aussi le premier terme, et on avance pas à pas : pour calculer t indice trois, il faut t indice deux.

QUESTION 8 · DEUX FAÇONS DE PRÉSENTER UNE SUITE

différence entre terme général et relation de récurrence | chnowa el far9 bin terme général w récurrence | terme général walla récurrence chnowa a7sen

CE QU'IL RÉPOND

B le terme général, ta7seb ayy terme toul : tbaddel n w kahaw. B la relation de récurrence, lezmek ta7seb les termes wa7ed wa7ed, men le premier terme. Ezzouz y3arrfou nafs la suite, ama le terme général asra3 ki t7ebb terme b3id, kima U_{1000}.

بـ le terme général ، تحسب أيّ terme طول : تبدّل n w كهو . بـ la relation de récurrence ، لازمك تحسب les termes واحد واحد ، من le premier terme . الزوز يعرّفو نفس الـ suite ، أما le terme général أسرع كي تحبّ terme بعيد ، كيما U indice mille .

Avec le terme général, on calcule directement n'importe quel terme : on remplace n, c'est tout. Avec la relation de récurrence, il faut calculer les termes un par un, à partir du premier terme. Les deux définissent la même suite, mais le terme général est plus rapide pour un terme lointain, comme U indice mille.

QUESTION 9 · SUITE ARITHMÉTIQUE

c'est quoi une suite arithmétique | chnowa suite arithmétique | définition d'une suite arithmétique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_{n+1} = U_n + r$$

CE QU'IL RÉPOND

Suite arithmétique hiya suite net3addew fiha men ayy terme lelli ba3dou b zyedet nafs le réel r, w r nsammiwah la raison. Nektbou : $U_{n+1} = U_{n} + r$. Mathalan 3, 8, 13, 18 : la raison 5.

suite هي suite arithmétique نتعدّاو فيها من أيّ terme للّي بعدو بزيادة نفس الـ r ، w r نسمّيوه réel r la raison .

نكتبو : U indice (n plus un) égale U indice n ، plus r . مثلا U indice (n plus un) égale U indice n . trois ، huit ، treize ، dix-huit : la raison cinq

Une suite arithmétique est une suite où l'on passe de chaque terme au suivant en ajoutant le même réel r, appelé la raison. On écrit : U indice (n plus un) égale U indice n, plus r. Par exemple trois, huit, treize, dix-huit : la raison est cinq.

QUESTION 10 · SUITE ARITHMÉTIQUE

c'est quoi la raison | chnowa la raison mta3 suite | la raison ma3neha chnowa

CE QU'IL RÉPOND

La raison hiya le réel r elli nzidouh koll marra bech net3addew men terme lelli ba3dou fi suite arithmétique. Ya3ni $r = U_{n+1} - U_{n}$. Mathalan fi 5, 3, 1 : la raison −2.

la raison هي الـ réel r اللي نزيدوه كل مرّة باش نتعدّاو من terme للّي بعدو في suite arithmétique . يعني r

مثلا في . égale U indice (n plus un) moins U indice n un ، trois ، cinq : la raison moins deux

La raison est le réel r qu'on ajoute à chaque fois pour passer d'un terme au suivant dans une suite arithmétique. Autrement dit, r égale U indice (n plus un) moins U indice n. Par exemple dans cinq, trois, un : la raison est moins deux.

QUESTION 11 · D'UN TERME À UN AUTRE

kifech nal9a la raison | comment calculer la raison | comment trouver la raison avec deux termes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$r = \frac{U_n - U_p}{n - p}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ta7seb terme moins le terme elli sab9ou, mathalan $U_{1} - U_{0}$. W ken ta3ref zouz termes b3ad 3la b3adhhom, tdivisi la différence mte3hom 3la la différence mta3 les indices : $r = \frac{U_{n} - U_{p}}{n - p}$.

تحسب terme moins le terme اللي سبقو ، مثلا U indice un moins U indice zéro . w كان تعرف زوز termes بعاد على بعضهم ، تديفيزي la différence متاعهم على la différence متاع les indices : r égale (U indice n moins U indice p) ، le tout sur (n moins p) .

On calcule un terme moins le terme précédent, par exemple U indice un moins U indice zéro. Et si on connaît deux termes éloignés, on divise leur différence par la différence des indices : r égale (U indice n moins U indice p), le tout sur (n moins p).

QUESTION 12 · SUITE ARITHMÉTIQUE

la raison tnajjem tkoun négative ? | est-ce que la raison peut être négative | raison négative chnowa ma3neha

CE QU'IL RÉPOND

Ey, la raison tnajjem tkoun négative. Wa9tha les termes yon9sou : koll terme asghar men elli sab9ou. Mathalan 5, 3, 1, −1 : la raison −2. W ken la raison 0, les termes el koll kif kif.

إي ، la raison تنجّم تكون négative . وقتها les termes ينقصو : كل terme أصغر من اللي سبقو . مثلا ، trois ، cinq ، un ، les termes كان ، la raison zéro ، la raison كيف الكل كيف . w moins un : la raison moins deux

Oui, la raison peut être négative. Dans ce cas les termes diminuent : chaque terme est plus petit que le précédent. Par exemple cinq, trois, un, moins un : la raison est moins deux. Et si la raison est zéro, tous les termes sont égaux.

QUESTION 13 · RECONNAÎTRE UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

kifech nbayyen elli suite arithmétique | comment montrer qu'une suite est arithmétique | comment prouver qu'une suite est arithmétique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_{n+1} - U_n = r$$

CE QU'IL RÉPOND

Ta7seb la différence : $U_{n+1} - U_{n}$. Ken tal9a réel ma fihech n, la suite arithmétique w le réel hedha houwa la raison. W ken U_{n} men la forme $an + b$, hiya arithmétique w la raison a.

تحسب la différence : U indice (n plus un) moins U indice n . كان تلقى réel ما فيهش n ، الـ suite arithmétique w le réel الـ هاذا هو . w la raison كان U indice n من la forme a n plus b ، هي la arithmétique w raison a .

On calcule la différence : U indice (n plus un) moins U indice n. Si on trouve un réel qui ne dépend pas de n, la suite est arithmétique et ce réel est la raison. Et si U indice n est de la forme a n plus b, elle est arithmétique de raison a.

QUESTION 14 · RECONNAÎTRE UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique | kifech nbayyen elli suite mouch arithmétique | suite pas arithmétique kifech na3ref

CE QU'IL RÉPOND

Yekfi contre-exemple : ta7seb trois termes wra b3adhhom, w tchouf les deux différences. Ken mouch kif kif, la suite mouch arithmétique. Mathalan 1, 2, 4 : $2 - 1 = 1$, ama $4 - 2 = 2$.

يكفي contre-exemple : تحسب trois termes ورا بعضهم ، w تشوف les deux différences . كان موش كيف كيف quatre moins deux أما ، un ، deux ، quatre : deux moins un égale un مثلا . arithmétique موش suite الـ ، égale deux .

Un contre-exemple suffit : on calcule trois termes qui se suivent et on regarde les deux différences. Si elles ne sont pas égales, la suite n'est pas arithmétique. Par exemple un, deux, quatre : deux moins un égale un, mais quatre moins deux égale deux.

QUESTION 15 · TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

formule du terme général d'une suite arithmétique | kifech nal9a le terme général mta3 suite arithmétique | Un en fonction de n pour une suite arithmétique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_n = U_0 + nr$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken le premier terme U_{0} w la raison r : $U_{n} = U_{0} + nr$. Mathalan $U_{0} = 3$ w $r = 5$: $U_{n} = 3 + 5n$, w $U_{10} = 53$.

مثلا U . le premier terme U indice zéro w la raison r : U indice n égale U indice zéro ، plus n fois r كان indice zéro égale trois w r égale cinq : U indice n égale trois plus cinq n ، w U indice dix égale cinquante-trois .

Si le premier terme est U indice zéro et la raison r : U indice n égale U indice zéro, plus n fois r. Par exemple U indice zéro égale trois et r égale cinq : U indice n égale trois plus cinq n, et U indice dix égale

cinquante-trois.

QUESTION 16 · D'UN TERME À UN AUTRE

ken le premier terme U1 chnowa la formule | si la suite commence à U1 quelle formule | le premier terme U0 walla U1

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_n = U_1 + (n-1)\,r$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken la suite tabda men U_{1}, nesta3mlou : $U_{n} = U_{1} + (n - 1)r$. 5ater men U_{1} l U_{n}, famma n − 1 pas bark. Dima chouf la suite mnin tabda, men U_{0} walla men U_{1}, 9bal ma tekteb la formule.

خاطر . U indice n égale U indice un ، plus (n moins un) fois r : نستعملو ، U indice un من تبدا suite الـ كان
ولّا U indice zéro من ، منين تبدا suite الـ شوف ديما . برك n moins un pas ، فمّا U indice n لـ U indice un من
. formule الـ تكتب ما قُبَيْل ، U indice un من

Si la suite commence à U indice un, on utilise : U indice n égale U indice un, plus (n moins un) fois r. Car de U indice un à U indice n, il n'y a que n moins un pas. Regarde toujours où commence la suite, à U indice zéro ou à U indice un, avant d'écrire la formule.

QUESTION 17 · D'UN TERME À UN AUTRE

wa9tech nesta3mel la formule Un = Up + (n-p)r | à quoi sert la formule avec Up | Up plus n moins p fois r kifech nesta3melha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_n = U_p + (n-p)\,r$$

CE QU'IL RÉPOND

Nesta3mlouha ki ma na3rfouch U_{0}, ama na3rfou terme e5er U_{p}. Men l'indice p l l'indice n, nzidou la raison n − p marrat : $U_{n} = U_{p} + (n - p)r$. Mathalan $U_{8} = -31$ w $r = -4$: $U_{10} = -31 + 2 \times (-4) = -39$.

la نزيدو ، l'indice n لـ l'indice p من . U indice p آخر terme نعرفو أما ، U indice zéro نستعملوها كي ما نعرفوش
U indice huit égale مثلا . U indice n égale U indice p ، plus (n moins p) fois r : مرّات raison n moins p
moins trente-et-un w r égale moins quatre : U indice dix égale moins trente-et-un plus deux fois moins
. moins trente-neuf يعني ، quatre

On l'utilise quand on ne connaît pas U indice zéro, mais un autre terme U indice p. De l'indice p à l'indice n, on ajoute la raison n moins p fois : U indice n égale U indice p, plus (n moins p) fois r. Par exemple U indice huit égale moins trente-et-un et r égale moins quatre : U indice dix égale moins trente-et-un plus deux fois moins quatre, donc moins trente-neuf.

QUESTION 18 · TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

kifech nal9a l'indice n ki na3ref Un | comment trouver l'indice d'un terme | comment trouver n sachant que Un égale 24

CE QU'IL RÉPOND

Tekteb la formule $U_{n} = U_{0} + nr$, w t7ellha kima équation fiha n. Mathalan $U_{0} = -2$, $r = \frac{1}{4}$, w $U_{n} = 24$: $\frac{n}{4} = 26$, idhan $n = 104$.

تكتب الـ w ، r fois n plus zéro égale U indice n ، formule U indice zéro égale U indice n فيها équation كيما تحلّها formule U indice n égale U indice zéro plus n fois r ، w تكتب الـ U indice مثلا . n فيها équation كيما تحلّها formule U indice n égale U indice zéro plus n fois r ، w تكتب الـ zéro égale moins deux ، r égale un quart ، w U indice n égale vingt-quatre : n sur quatre égale vingt-six ، إذن n égale cent quatre .

On écrit la formule U indice n égale U indice zéro plus n fois r, et on la résout comme une équation d'inconnue n. Par exemple U indice zéro égale moins deux, r égale un quart, et U indice n égale vingt-quatre : n sur quatre égale vingt-six, donc n égale cent quatre.

QUESTION 19 · RECONNAÎTRE UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

3lech Un = an + b suite arithmétique | suite de la forme an + b arithmétique ? | an+b chnowa la raison mte3ha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_n = an + b \implies r = a, \quad U_0 = b$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater $U_{n+1} - U_{n} = a(n + 1) + b - (an + b) = a$. La différence ma fihech n, idhan la suite arithmétique : la raison hiya a, w le premier terme houwa b.

هاذا U indice (n plus un) moins U indice n égale a fois (n plus un) plus b ، moins (a n plus b) ، w خاطر . b هو a ، w le premier terme هي suite arithmétique : la raison الـ إذن ، n ما فيهاش égale a . la différence

Parce que U indice (n plus un) moins U indice n égale a fois (n plus un) plus b, moins (a n plus b), et cela égale a. La différence ne dépend pas de n, donc la suite est arithmétique : la raison est a, et le premier terme est b.

QUESTION 20 · REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

3lech les points alignés | pourquoi les points An sont sur une droite | représentation graphique d'une suite arithmétique kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$D : \ y = rx + U_0$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater $U_{n} = U_{0} + nr$. Le point A_{n}, l'abscisse mte3ou n w l'ordonnée mte3ou U_{n}, tsa77 fih l'équation $y = rx + U_{0}$. Idhan les points el koll 3la nafs la droite. W bech tersem la

représentation graphique, t7ott les points bark.

n w l'ordonnée متاعو U indice n égale U indice zéro plus n fois r . le point A indice n ، l'abscisse خاطر
الكل على نفس الـ les points إذن . l'équation y égale r x plus U indice zéro فيه تصحّ ، U indice n متاعو
. برك les points تحطّ ، représentation graphique الـ ترسم باش droite . w

Parce que U indice n égale U indice zéro plus n fois r. Le point A indice n, d'abscisse n et d'ordonnée U indice n, vérifie l'équation y égale r x plus U indice zéro. Donc tous les points sont sur la même droite. Et pour tracer la représentation graphique, on place seulement les points.

QUESTION 21 · REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

la pente hiya la raison ? | chnowa la pente mta3 la droite | pente w ordonnée à l'origine chnowa ya3tiw

CE QU'IL RÉPOND

Ey : la pente mta3 la droite elli fiha les points hiya la raison r, w l'ordonnée à l'origine hiya le premier terme U_{0}. Ya3ni ki l'abscisse tzid 1, l'ordonnée tzid r.

le premier هي la raison r ، w l'ordonnée à l'origine هي les points اللي فيها la droite متاع la pente : إي
. r تزيد un ، l'ordonnée تزيد l'abscisse كي يعني . terme U indice zéro

Oui : la pente de la droite qui porte les points est la raison r, et l'ordonnée à l'origine est le premier terme U indice zéro. Autrement dit, quand l'abscisse augmente de un, l'ordonnée augmente de r.

QUESTION 22 · SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

kifech na7seb la somme mta3 suite arithmétique | formule de la somme des termes | comment calculer la somme de termes consécutifs

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$S = n \times \frac{a+b}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

S = le nombre de termes, fois la somme du premier terme et du dernier, le tout sur deux. Ya3ni $S = n \times \frac{a + b}{2}$. 9bal koll chay a7seb 9addech men terme, w mba3d tabba9 la formule.

S يعني . S égale le nombre de termes ، fois la somme du premier terme et du dernier ، le tout sur deux
. formule الـ مبعّد طبّق terme ، w من قدّاش احسب شي كل قُبَلْ . égale n fois (a plus b) ، le tout sur deux

S égale le nombre de termes, fois la somme du premier terme et du dernier, le tout sur deux. Autrement dit, S égale n fois (a plus b), le tout sur deux. Avant tout, compte les termes, puis applique la formule.

QUESTION 23 · COMPTER LES TERMES D'UNE SOMME

kifech na7seb le nombre de termes | comment compter les termes | 9addech men terme men U5 l U50

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_p + \ldots + U_n \quad : \quad n - p + 1 \text{ termes}$$

CE QU'IL RÉPOND

Men U_{p} l U_{n}, famma $n - p + 1$ termes. Ma tensech el plus un. Mathalan men U_{5} l U_{50} : $50 - 5 + 1 = 46$ termes. W men U_{0} l U_{n} : $n + 1$ termes.

من U indice p لـ U indice n ، فمّا n moins p plus un termes . ما تنساش الـ plus un . مثلا من U indice cinq لـ U indice cinquante : cinquante moins cinq plus un ، يعني w . quarante-six termes من U indice zéro لـ U indice n : n plus un termes .

De U indice p à U indice n, il y a n moins p plus un termes. N'oublie pas le plus un. Par exemple de U indice cinq à U indice cinquante : cinquante moins cinq plus un, donc quarante-six termes. Et de U indice zéro à U indice n : n plus un termes.

QUESTION 24 · SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

1+2+3+…+n 9addech | somme des n premiers entiers | formule de 1 + 2 + … + n

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

CE QU'IL RÉPOND

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$. 5ater famma n termes, le premier 1 w le dernier n. Mathalan men 1 l 100 : $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$.

n termes ، le premier فمّا خاطر . n égale n fois (n plus un) ، le tout sur deux حتّى un plus deux plus trois . un w le dernier n مثلا من un لـ le tout sur deux ، cent : cent fois cent un ، يعني cinq mille cinquante .

Un plus deux plus trois jusqu'à n égale n fois (n plus un), le tout sur deux. Car il y a n termes, le premier vaut un et le dernier n. Par exemple de un à cent : cent fois cent un, le tout sur deux, donc cinq mille cinquante.

QUESTION 25 · SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

somme des nombres impairs | 1+3+5 les impairs 9addech ysewiw | la somme des n premiers impairs

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

CE QU'IL RÉPOND

La somme mta3 les n premiers impairs, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, égale n^{2}. 5ater famma n termes, le premier 1 w le dernier $2n - 1$: $\frac{n \times 2n}{2}$. Mathalan $1 + 3 + 5 = 9 = 3^{2}$.

متاع la somme ، un plus trois plus cinq حتّى les n premiers impairs ، égale n au carré . deux n moins un ، خاطر فمّا le tout sur deux ، n fois deux n moins un : n termes ، le premier un w le dernier deux n moins un . مثلا un ، يعني plus trois plus cinq égale neuf ، trois au carré .

La somme des n premiers impairs, un plus trois plus cinq jusqu'à deux n moins un, égale n au carré. Car il y a n termes, le premier vaut un et le dernier deux n moins un : n fois deux n, le tout sur deux. Par exemple un plus trois plus cinq égale neuf, c'est-à-dire trois au carré.

QUESTION 26 · SUITE ARITHMÉTIQUE

chnowa la moyenne arithmétique | c'est quoi la moyenne arithmétique | moyenne arithmétique de a et c kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$b = \frac{a+c}{2}$

CE QU'IL RÉPOND

Ken a, b w c trois termes consécutifs mta3 suite arithmétique, wa9tha $b = \frac{a + c}{2}$. 5ater $b - a = c - b$, w hiya la raison. N9oulou b houwa la moyenne arithmétique mta3 a w c. W bel 3aks : ken $b = \frac{a + c}{2}$, a, b w c fi progression arithmétique.

كان a ، b w c trois termes consécutifs متاع suite arithmétique ، وقتها b égale (a plus c) ، le tout sur deux . la raison هي b moins a égale c moins b ، w خاطر a w c . w متاع la moyenne arithmétique هو نقولو b . بالعكس : كان a ، b w c ، a sur deux (a plus c) égale b في progression arithmétique .

Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b égale (a plus c), le tout sur deux. En effet b moins a égale c moins b : c'est la raison. On dit que b est la moyenne arithmétique de a et c. Et réciproquement : si b égale (a plus c) sur deux, alors a, b et c sont en progression arithmétique.

QUESTION 27 · POUR COMPRENDRE : LES NOMBRES TRIANGULAIRES

chnowa les nombres triangulaires | c'est quoi un nombre triangulaire | formule des nombres triangulaires

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

CE QU'IL RÉPOND

Les nombres triangulaires houma 1, 3, 6, 10, 15 : koll wa7ed houwa le nombre mta3 les points elli ya3mlou triangle. $T_{n} = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$.

هوما les nombres triangulaires : un ، trois ، six ، dix ، quinze كل واحد هو le nombre متاع les points اللي . n fois (n plus un) ، le tout sur deux يعني ، n حتّى triangle . T indice n égale un plus deux يعملو

Les nombres triangulaires sont un, trois, six, dix, quinze : chacun est le nombre de points qui forment un triangle. T indice n égale un plus deux jusqu'à n, c'est-à-dire n fois (n plus un), le tout sur deux.

QUESTION 28 · SUITE ARITHMÉTIQUE

chnowa progression arithmétique | c'est quoi une progression arithmétique | en progression arithmétique ma3neha

CE QU'IL RÉPOND

Ki n9oulou a, b, c, d fi progression arithmétique, ma3neha houma termes consécutifs mta3 suite arithmétique : net3addew men wa7ed lelli ba3dou b zyedet nafs le réel. Mathalan 2, 5, 8, 11.

كي نقولو a ، b ، c ، d في progression arithmétique ، معناها هوما suite متاع termes consécutifs
arithmétique : نتعدّاو من واحد للّي بعدو بزيادة نفس الـ réel . مثلا onze ، huit ، cinq ، deux .

Dire que a, b, c, d sont en progression arithmétique signifie que ce sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique : on passe de l'un au suivant en ajoutant le même réel. Par exemple deux, cinq, huit, onze.

QUESTION 29 · COMPTER LES TERMES D'UNE SOMME

3lech men U0 l Un fiha n+1 termes | pourquoi n+1 termes et pas n | de U0 à Un 3lech n+1 termes

CE QU'IL RÉPOND

5ater les indices yabdew men 0 : 0, 1, 2, 7atta n. Men 1 l n famma n indices, w nzidou l'indice 0, ywalliw $n + 1$. Mathalan men U_{0} l U_{3} : 4 termes, mouch 3.

خاطر les indices يبداو من deux ، un ، zéro : zéro ، حتّى n . من un لـ n فمّا w ، n indices نزيدو l'indice zéro ، يولّيو n plus un . مثلا من U indice zéro لـ U indice trois : quatre termes ، موش trois .

Parce que les indices commencent à zéro : zéro, un, deux, jusqu'à n. De un à n il y a n indices, et on ajoute l'indice zéro, ce qui fait n plus un. Par exemple de U indice zéro à U indice trois : quatre termes, pas trois.

QUESTION 30 · D'UN TERME À UN AUTRE

kifech nal9a le terme précédent | comment calculer le terme précédent | le terme elli 9bal kifech na7sbou

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_{n-1} = U_n - r$$

CE QU'IL RÉPOND

Bech tarja3 l le terme elli sba9, tna99es la raison : $U_{n-1} = U_{n} - r$. Mathalan $r = 0{,}5$ w $U_{30} = 5{,}5$: $U_{29} = 5$, w $U_{20} = 5{,}5 - 10 \times 0{,}5 = 0{,}5$.

باش ترجع لـ le terme اللي سبق ، تنقّص r مثلا . la raison : U indice (n moins un) égale U indice n ، moins r égale un demi w U indice trente égale cinq virgule cinq : U indice vingt-neuf égale cinq ، w U indice vingt égale cinq virgule cinq moins dix fois un demi ، يعني un demi .

Pour revenir au terme précédent, on retranche la raison : U indice (n moins un) égale U indice n, moins r. Par exemple r égale un demi et U indice trente égale cinq virgule cinq : U indice vingt-neuf égale cinq, et U indice vingt égale cinq virgule cinq moins dix fois un demi, donc un demi.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **Continuer une liste**

La liste de nombres 5 ; 3 ; 1 ; -1 ; -3 ; … obéit à une loi. Quel est le nombre qui vient juste après -3 ?

Réponse attendue : -5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule l'écart entre deux nombres qui se suivent : est-il toujours le même ?
2. On passe d'un nombre au suivant en retranchant 2.

CORRECTION

L'écart —

$3-5=-2 \quad ; \quad 1-3=-2 \quad ; \quad -1-1=-2$

Le suivant —

$-3-2=-5$

On retranche 2 à chaque fois : c'est une suite arithmétique de raison -2.

PIÈGES ANTICIPÉS

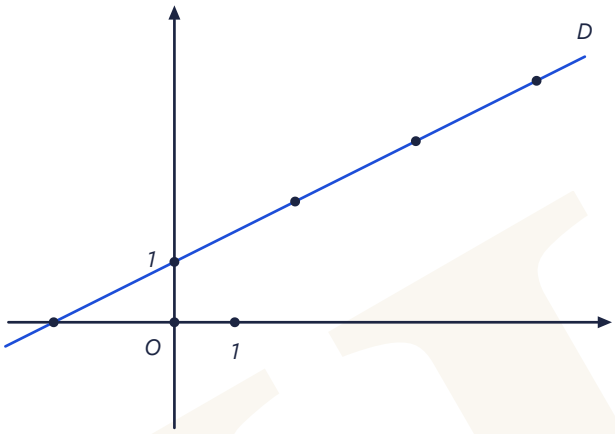
-4 → L'écart n'est pas 1 : de 5 à 3, de 3 à 1, on retranche 2.

-1 → Tu es reparti en arrière : la liste descend, le nombre suivant est plus petit que -3.

EXERCICE 2 · BASE **Lire des ordonnées sur une droite**

La figure représente une droite D dans un repère. Elle passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1, et par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 2. Quelle est l'ordonnée du point de D d'abscisse 100 ?

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



La droite D.

Un repère d'origine O, avec l'unité 1 marquée sur chaque axe. Une droite D monte de gauche à droite. Elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse moins 2, coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1, puis passe par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 2, par le point d'abscisse 4 et d'ordonnée 3 et par le point d'abscisse 6 et d'ordonnée 4. Quand l'abscisse augmente de 2, l'ordonnée augmente de 1.

Réponse attendue : 51

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lis les ordonnées des points d'abscisses 0, 2, 4, 6 : de combien augmentent-elles quand l'abscisse augmente de 2 ?
2. Quand l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente d'un demi. Le point d'abscisse n a pour ordonnée :

   $\frac{n}{2} + 1$

CORRECTION

La loi — De 0 à 2, l'ordonnée passe de 1 à 2 : elle augmente de $\frac{1}{2}$ par unité.

$y = \frac{x}{2} + 1$

L'abscisse 100 —

$\frac{100}{2} + 1 = 51$

Les ordonnées des points d'abscisses 0, 1, 2, 3, … sont 1 ; $1{,}5$; 2 ; $2{,}5$; … : une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`101` → L'ordonnée n'augmente pas de 1 par unité, mais de 1 quand l'abscisse augmente de 2.

`50` → Tu as bien pris la moitié de 100, mais la droite part de l'ordonnée 1 : il faut l'ajouter.

EXERCICE 3 · BASE La population en 2010

La population d'une ville, en milliers d'habitants, était de 100 en 1999, 102 en 2000, 104 en 2001, 106 en 2002, 108 en 2003 et 110 en 2004. On suppose qu'elle continue à évoluer de la même façon. Quelle sera-t-elle en 2010, en milliers d'habitants ?

Donne le nombre de milliers d'habitants.

Réponse attendue : `122`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De combien la population augmente-t-elle chaque année ?
2. Compte le nombre d'années écoulées entre 1999 et 2010, puis ajoute autant de fois l'augmentation annuelle.

CORRECTION

La loi — Chaque année, la population augmente de 2 milliers.

De 1999 à 2010 — Il s'écoule $2010 - 1999 = 11$ années.

$$100 + 11 \times 2 = 122$$

En 2010, la ville comptera 122 milliers d'habitants.

PIÈGES ANTICIPÉS

`120` → De 1999 à 2010 il y a 11 augmentations, pas 10 : $2010 - 1999 = 11$.

`122000` → C'est le bon nombre d'habitants, mais on le demande en milliers : écris seulement le nombre de milliers.

`132` → Tu as ajouté 11 augmentations à la population de 2004. Pars de 1999, ou n'ajoute que 6 augmentations à 110.

EXERCICE 4 · PRATIQUE L'année des 150 000 habitants

La population d'une ville était de 100 milliers d'habitants en 1999, et elle augmente de 2 milliers d'habitants chaque année. En quelle année atteindra-t-elle 150 milliers d'habitants ?

Donne seulement l'année, par exemple 2015.

Réponse attendue : `2024`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Combien de milliers d'habitants faut-il gagner pour passer de 100 à 150 ?
2. n années après 1999, la population est de $100 + 2n$ milliers.

CORRECTION

L'équation —

$$100 + 2n = 150 \iff n = 25$$

L'année —

$$1999 + 25 = 2024$$

La population atteindra $150\,000$ habitants en 2024.

PIÈGES ANTICIPÉS

25 → 25 est le nombre d'années à attendre : ajoute-le à 1999 pour avoir l'année.

2025 / 2023 → Recompte : il faut 25 augmentations de 2 milliers à partir de 1999.

EXERCICE 5 · BASE

Calculer un terme

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 2^n + n$ pour tout entier naturel n. Calcule U_5.

Réponse attendue : 37

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace n par 5 partout dans l'expression.
2. $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

CORRECTION

On remplace n —

$U_5 = 2^5 + 5$

$U_5 = 32 + 5 = 37$

De la même façon, $U_1 = 3$ et $U_{10} = 1024 + 10 = 1034$.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → 2^5 n'est pas 2×5 : c'est 2 multiplié cinq fois par lui-même, soit 32.

30 → Tu as calculé 5^2 : ici c'est $2^5 = 32$.

EXERCICE 6 · PRATIQUE

Trouver l'indice

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \dfrac{n+21}{n+3}$ pour tout entier naturel n. Détermine n pour que $V_n = 2$.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'équation $\dfrac{n+21}{n+3} = 2$ et multiplie les deux membres par $n+3$.
2. Attention : 2 multiplie $n+3$ tout entier.

   $n + 21 = 2(n+3)$

CORRECTION

L'équation —

$\frac{n+21}{n+3} = 2 \iff n + 21 = 2n + 6$

$n = 21 - 6 = 15$

Vérification —

$V_{15} = \frac{36}{18} = 2$

C'est le terme d'indice 15 qui vaut 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → Tu as écrit $n + 21 = 2n + 3$: le 2 doit multiplier aussi le 3, ce qui donne $2n + 6$.

EXERCICE 7 · BASE **Une relation de récurrence**

On considère la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = \frac{1}{2}\, t_n - 3$.

Calcule t_3.

> On considère la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, t indice (n plus un) égale un demi fois t indice n, moins 3. Calcule t_3.
>
> On considère la suite t indice n définie par t indice 0 égale 2 et, pour tout entier naturel n, t indice (n plus .un) égale un demi fois t indice n, moins 3. Calcule t indice 3

Réponse attendue : `-5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avance de proche en proche : calcule d'abord t_1, puis t_2.
2. À chaque pas : la moitié du terme précédent, moins 3.

$t_1 = \frac{1}{2} \times 2 - 3$

> À chaque pas : la moitié du terme précédent, moins 3. t indice 1 égale un demi fois 2, moins 3
>
> À chaque pas: la moitié du terme précédent, moins 3. t indice 1 égale un demi fois 2, moins 3

CORRECTION

t1 —

$t_1 = \frac{1}{2} \times 2 - 3 = -2$

> t1 : t indice 1 égale un demi fois 2, moins 3 égale moins 2
>
> t1 : t indice 1 égale un demi fois 2, moins 3 égale moins 2

t2 —

$t_2 = \frac{1}{2} \times (-2) - 3 = -4$

> t2 : t indice 2 égale un demi fois moins 2, moins 3 égale moins 4
>
> t2 : t indice 2 égale un demi fois moins 2, moins 3 égale moins 4

t3 —

$t_3 = \frac{1}{2} \times (-4) - 3 = -5$

> t3 : t indice 3 égale un demi fois moins 4, moins 3 égale moins 5
>
> t3 : t indice 3 égale un demi fois moins 4, moins 3 égale moins 5

Avec une relation de récurrence, on a besoin de t_2 pour calculer t_3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1.5` / `-3/2` → Tu as mis l'indice 3 à la place d'un terme : dans la relation, on met la **valeur** du terme précédent, $t_2 = -4$.

`-4` → C'est t_2. Il reste un pas à faire pour arriver à t_3.

`-2` → C'est t_1 : il reste deux pas à faire pour arriver à t_3.

EXERCICE 8 · PRATIQUE

Un signe qui alterne

Soit (U_n) la suite définie par son terme général $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, pour tout entier naturel n. Calcule U_{2005}.

Réponse attendue : `-1/2006`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que vaut $(-1)^n$ quand n est pair ? Quand n est impair ?
2. 2005 est impair, et le dénominateur est $n+1$.

CORRECTION

Le numérateur — 2005 est impair.

$(-1)^{2005} = -1$

Le terme —

$U_{2005} = \frac{-1}{2005+1} = -\frac{1}{2006}$

Les premiers termes sont 1 ; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; … : le signe change à chaque pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2006` → 2005 est impair : $(-1)^{2005} = -1$, le terme est négatif.

`-1/2005` → Le dénominateur est $n+1$, donc 2006.

EXERCICE 9 · PRATIQUE

Changer d'indice

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - 3n$ pour tout entier naturel n. Exprime U_{n+1} en fonction de n, sous forme développée et réduite.

Écris seulement l'expression développée, sans rien devant.

> Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - 3n$ pour tout entier naturel n. Exprime U indice (n plus un) en fonction de n, sous forme développée et réduite. Écris seulement l'expression développée, sans rien devant.
>
> Soit U indice n la suite définie par U indice n égale n au carré moins 3n pour tout entier naturel n. Exprime U indice (n plus un) en fonction de n, sous forme développée et réduite. Écris seulement l'expression développée, sans rien devant.

Réponse attendue : `n^2-n-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans l'expression $n^2 - 3n$, remplace chaque n par $n+1$ tout entier, entre parenthèses.

2. Développe $(n+1)^2$ avec l'identité remarquable, puis réduis.

CORRECTION

On remplace —

$U_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1)$

> On remplace : U indice (n plus un) égale la parenthèse n plus 1, au carré moins 3 fois la parenthèse n plus 1
>
> On remplace : U indice (n plus un) égale la parenthèse n plus 1, au carré moins 3 fois la parenthèse n plus 1

On développe —

$U_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3$

> On développe : U indice (n plus un) égale n au carré plus 2n plus 1 moins 3n moins 3
>
> On développe : U indice (n plus un) égale n au carré plus 2n plus 1 moins 3n moins 3

On réduit —

$U_{n+1} = n^2 - n - 2$

> On réduit : U indice (n plus un) égale n au carré moins n moins 2
>
> On réduit : U indice (n plus un) égale n au carré moins n moins 2

De même, $U_{n-1} = n^2 - 5n + 4$ et $U_{2n} = 4n^2 - 6n$.

> De même, U indice (n moins un) égale n au carré moins 5n plus 4 et $U_{2n} = 4n^2 - 6n$.
>
> De même, U indice (n moins un) égale n au carré moins 5n plus 4 et U indice 2n égale 4n au carré moins .6n

PIÈGES ANTICIPÉS

`n^2-3n+1` → Tu as seulement ajouté 1 au terme U_n. Le terme suivant s'obtient en remplaçant n par $n+1$ dans la formule.

`n^2-3n-2` → $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$: il ne faut pas oublier le double produit $2n$.

EXERCICE 10 · BASE **Lire la raison**

La suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{-2n+1}{8}$, pour tout entier naturel n, est arithmétique. Quelle est sa raison ?

Réponse attendue : `-1/4` — aussi acceptées : -0.25 · -2/8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris U_n sous la forme $an + b$ en séparant la fraction en deux.
2. Ou bien calcule U_0 et U_1, puis leur différence $U_1 - U_0$.

CORRECTION

On sépare la fraction —

$U_n = -\frac{2}{8}\,n + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}\,n + \frac{1}{8}$

La raison — C'est le coefficient de n.

$r = -\frac{1}{4}$

La suite est arithmétique de premier terme $U_0 = \frac{1}{8}$ et de raison $-\frac{1}{4}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → -2 est le coefficient de n au numérateur : il reste à le diviser par 8.

`1/8 / 0.125` → $\frac{1}{8}$ est le premier terme U_0. La raison est le coefficient de n.

`1/4 / 0.25` → Les termes diminuent : la raison est négative.

EXERCICE 11 · BASE

Arithmétique ou pas ?

La suite (b_n) est définie par $b_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 3b_n + 7$. Est-elle arithmétique ?

Réponds par oui ou par non.

> La suite (b_n) est définie par $b_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, b indice (n plus un) égale 3b indice n plus 7. Est-elle arithmétique ? Réponds par oui ou par non.
>
> La suite b indice n est définie par b indice 0 égale 2 et, pour tout entier naturel n, b indice (n plus un) égale 3b indice n plus 7. Est-elle arithmétique? Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas arithmetique · elle n'est pas arithmetique · non elle n'est pas arithmetique · non, elle n'est pas arithmetique · n'est pas arithmetique · la suite n'est pas arithmetique · non, la suite n'est pas arithmetique · non arithmetique · non, pas arithmetique · ce n'est pas une suite arithmetique

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule b_1 et b_2.
2. Compare les deux écarts $b_1 - b_0$ et $b_2 - b_1$.

CORRECTION

Les premiers termes —

$b_1 = 3 \times 2 + 7 = 13$; $b_2 = 3 \times 13 + 7 = 46$

Les écarts —

$b_1 - b_0 = 11$; $b_2 - b_1 = 33$

Les deux écarts ne sont pas égaux : la suite n'est pas arithmétique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui` → Le « $+7$ » ne suffit pas : on multiplie d'abord b_n par 3. Calcule $b_1 - b_0$ et $b_2 - b_1$: ils ne sont pas égaux.

EXERCICE 12 · BASE

Un pas en avant, un pas en arrière

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1 - U_n$. Est-elle arithmétique ?

Réponds par oui ou par non.

> La suite (U_n) est définie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, U indice (n plus un) égale 1 moins U indice n. Est-elle arithmétique ? Réponds par oui ou par non.
>
> La suite U indice n est définie par U indice 0 égale 2 et, pour tout entier naturel n, U indice (n plus un) .égale 1 moins U indice n. Est-elle arithmétique? Réponds par oui ou par non

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas arithmetique · elle n'est pas arithmetique · non elle n'est pas arithmetique · non, elle n'est pas arithmetique · n'est pas arithmetique · la suite n'est pas arithmetique · non, la suite n'est pas arithmetique · non arithmetique · non, pas arithmetique · ce n'est pas une suite arithmetique

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule U_1 et U_2.
2. Compare les deux écarts $U_1 - U_0$ et $U_2 - U_1$.

CORRECTION

Les premiers termes —

$$U_1 = 1 - 2 = -1 \quad ; \quad U_2 = 1 - (-1) = 2$$

Les écarts —

$$U_1 - U_0 = -3 \quad ; \quad U_2 - U_1 = 3$$

Les deux écarts ne sont pas égaux : la suite n'est pas arithmétique. Ses termes valent tour à tour 2 et -1.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui` → On ne retranche pas un nombre fixe : on retranche le terme lui-même, qui change à chaque pas. Calcule $U_1 - U_0$ et $U_2 - U_1$: ils ne sont pas égaux.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

Une fraction qui cache une suite arithmétique

La suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{2n^2 + 4n + 2}{n + 1}$, pour tout entier naturel n, est arithmétique. Quelle est sa raison ?

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mets 2 en facteur au numérateur : que reconnais-tu ?
2. Le numérateur est $2(n+1)^2$: simplifie par $n + 1$.

CORRECTION

Le numérateur —

$$2n^2 + 4n + 2 = 2(n^2 + 2n + 1) = 2(n + 1)^2$$

On simplifie —

$$a_n = \frac{2(n+1)^2}{n+1} = 2n + 2$$

La raison — a_n est de la forme $an + b$: la raison est le coefficient de n.

La suite est arithmétique de premier terme $a_0 = 2$ et de raison 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est un coefficient du numérateur. Simplifie d'abord la fraction : $a_n = 2n + 2$.

EXERCICE 14 · BASE

Appliquer la formule du terme général

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = -1$ et de raison $r = -3$. Détermine U_{23}.

Réponse attendue : `-70`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la formule du terme général :
   $U_n = U_0 + nr$
2. Ici $n = 23$: on ajoute 23 fois la raison.

CORRECTION

La formule —

$U_{23} = U_0 + 23r$

$U_{23} = -1 + 23 \times (-3) = -1 - 69 = -70$

De U_0 à U_{23}, on ajoute 23 fois la raison.

PIÈGES ANTICIPÉS

-67 → Tu as ajouté 22 fois la raison : en partant de U_0, c'est 23 fois.

68 → La raison est négative : $23 \times (-3) = -69$.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Un terme avec une racine

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = -\dfrac{1}{6}$ et de raison $r = 2\sqrt{3}$. Détermine U_{23}.

Donne la valeur exacte, avec la racine carrée de 3.

Réponse attendue : `-1/6+46*sqrt(3)` — aussi acceptées : 46*sqrt(3)-1/6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise $U_n = U_0 + nr$ avec $n = 23$.
2. $23 \times 2\sqrt{3}$: multiplie 23 par 2 et garde $\sqrt{3}$.

CORRECTION

La formule —

$U_{23} = -\frac{1}{6} + 23 \times 2\sqrt{3}$

$U_{23} = -\frac{1}{6} + 46\sqrt{3}$

On ne peut pas réduire davantage : $-\dfrac{1}{6}$ et $46\sqrt{3}$ ne sont pas de même nature.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/6+44*sqrt(3)` → Tu as ajouté 22 fois la raison : en partant de U_0, c'est 23 fois.

`-1/6+23*sqrt(3)` → La raison est $2\sqrt{3}$: $23 \times 2\sqrt{3} = 46\sqrt{3}$.

EXERCICE 16 · BASE

La raison à partir de deux termes

Détermine la raison r d'une suite arithmétique (U_n) sachant que $U_0 = 8$ et $U_7 = -13$.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris U_7 en fonction de U_0 et de r.
   $U_7 = U_0 + 7r$
2. Résous l'équation $-13 = 8 + 7r$.

CORRECTION

L'équation —

$-13 = 8 + 7r \iff 7r = -21$

$r = -3$

De U_0 à U_7 il y a 7 pas : l'écart -21 se partage en 7.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-21` → -21 est l'écart entre U_7 et U_0 : il faut le diviser par le nombre de pas, 7.

`3` → Les termes diminuent de 8 à -13 : la raison est négative.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Retrouver l'indice d'un terme

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = -2$ et de raison $r = \dfrac{1}{4}$. Détermine n sachant que $U_n = 24$.

Réponse attendue : `104`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $U_n = U_0 + nr$ avec les valeurs données : tu obtiens une équation d'inconnue n.
2. $-2 + \dfrac{n}{4} = 24$: isole $\dfrac{n}{4}$, puis multiplie par 4.

CORRECTION

L'équation —

$-2 + \frac{1}{4}n = 24 \iff \frac{1}{4}n = 26$

$n = 26 \times 4 = 104$

C'est le terme d'indice 104 qui vaut 24.

PIÈGES ANTICIPÉS

88 → $U_0 = -2$: en le passant de l'autre côté on obtient $24 + 2 = 26$, pas 22.

6.5 / 13/2 → $\frac{n}{4} = 26$ donne $n = 26 \times 4$: on multiplie par 4.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

D'un terme à un autre

(U_n) est une suite arithmétique de raison -4 et telle que $U_8 = -31$. Calcule U_{57}.

Réponse attendue : -227

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Inutile de chercher U_0 : pars de U_8.
   $U_n = U_p + (n - p)\, r$
2. De l'indice 8 à l'indice 57, il y a $57 - 8$ pas.

CORRECTION

La formule —

$U_{57} = U_8 + (57 - 8) \times (-4)$

$U_{57} = -31 + 49 \times (-4) = -31 - 196 = -227$

On ajoute la raison autant de fois qu'il y a de pas entre les deux indices.

PIÈGES ANTICIPÉS

-259 → Tu as ajouté 57 fois la raison, comme si tu partais de U_0. On part de U_8 : il y a $57 - 8 = 49$ pas.

165 → La raison est -4 : $49 \times (-4) = -196$.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Avancer de vingt pas

(U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0{,}5$ et telle que $U_{30} = \frac{11}{2}$. Détermine U_{50}.

Réponse attendue : 31/2 — aussi acceptées : 15.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pars de U_{30} : combien de pas jusqu'à U_{50} ?
2. $U_{50} = U_{30} + 20r$, et $\frac{11}{2} = 5{,}5$.

CORRECTION

La formule —

$U_{50} = U_{30} + (50 - 30) \times 0{,}5$

$U_{50} = 5{,}5 + 10 = 15{,}5$

Dans l'autre sens, $U_{20} = U_{30} - 10 \times 0{,}5 = 0{,}5$: on retranche la raison quand on recule.

PIÈGES ANTICIPÉS

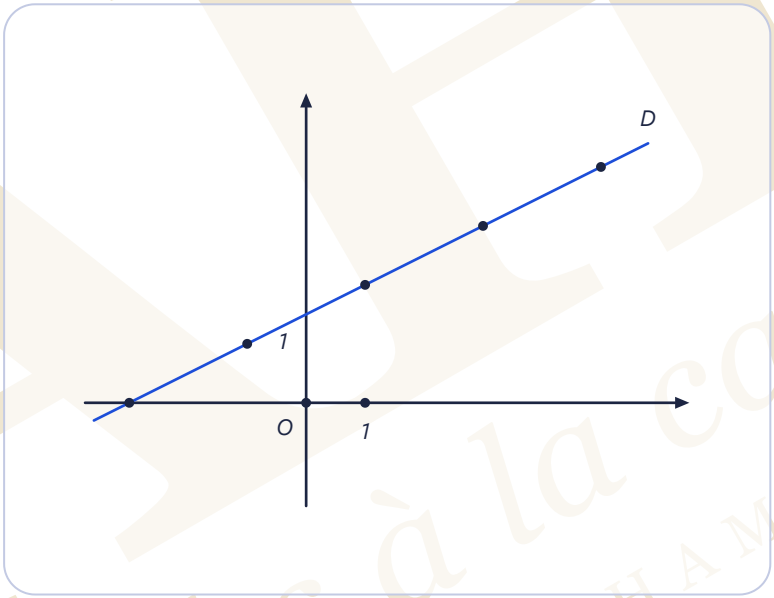
`30.5 / 61/2` → Tu as ajouté 50 fois la raison. On part de U_{30} : il n'y a que 20 pas.

`0.5 / 1/2` → C'est U_{20} : tu as reculé de 20 pas au lieu d'avancer.

EXERCICE 20 · PRATIQUE

La raison lue sur un graphique

Dans le graphique, D est la droite qui contient les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée U_n, où (U_n) est une suite arithmétique. La droite D passe par le point d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, et par le point d'abscisse 3 et d'ordonnée 3. Détermine la raison r de cette suite.



La droite D contient les points $A_n(n, U_n)$.

Un repère d'origine O, avec l'unité 1 marquée sur chaque axe. Une droite D monte de gauche à droite. Elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse moins 3, passe par le point d'abscisse moins 1 et d'ordonnée 1, par le point d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, par le point d'abscisse 3 et d'ordonnée 3 et par le point d'abscisse 5 et d'ordonnée 4. Elle coupe l'axe des ordonnées entre les ordonnées 1 et 2, exactement au milieu.

Réponse attendue : `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La raison est la pente de la droite.
2. Entre les deux points lus, l'abscisse augmente de 2 : de combien augmente l'ordonnée ?

CORRECTION

La pente —

$r = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$

Le premier terme — On recule d'un pas à partir de $U_1 = 2$.

$U_0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

La suite a pour premier terme $U_0 = \frac{3}{2}$ et pour raison $\frac{1}{2}$: $U_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2 / 1.5` → $\frac{3}{2}$ est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire le premier terme U_0. La raison est la pente.

`2` → La pente est l'écart des ordonnées divisé par l'écart des abscisses, pas l'inverse.

`1` → L'ordonnée augmente de 1 quand l'abscisse augmente de 2 : pour un seul pas, c'est la moitié.

EXERCICE 21 · PRATIQUE

Placer les points

On veut représenter graphiquement la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = -2$ et de raison 3. Dans un repère, on place pour cela les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée U_n. Quelle est l'ordonnée du point A_4 ?

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ordonnée du point A_4 est le terme U_4.
2. Utilise $U_n = U_0 + nr$ avec $n = 4$.

CORRECTION

Les premiers points — D'un point au suivant, l'abscisse augmente de 1 et l'ordonnée de 3.

$U_0 = -2 \quad ; \quad U_1 = 1 \quad ; \quad U_2 = 4 \quad ; \quad U_3 = 7$

Le point cherché —

$U_4 = -2 + 4 \times 3 = 10$

Le point A_4 a pour abscisse 4 et pour ordonnée 10. Tous les points sont sur la droite d'équation $y = 3x - 2$: sa pente est la raison 3, son ordonnée à l'origine est le premier terme -2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → 7 est l'ordonnée de A_3. De U_0 à U_4 il y a quatre pas : on ajoute 4 fois la raison.

`12` → Tu as calculé 4×3 : il faut partir du premier terme $U_0 = -2$.

`14` → Le premier terme est -2, pas 2 : $-2 + 12 = 10$.

`4` → 4 est l'abscisse du point A_4. Son ordonnée est le terme U_4.

EXERCICE 22 · BASE

Compter les termes

Combien de termes la somme $C = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 73 + 75$ compte-t-elle ?

Donne seulement le nombre.

Réponse attendue : `38`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les termes sont les impairs : ils forment une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.
2. Compte les pas de 1 à 75, puis ajoute 1 pour avoir le nombre de termes.

CORRECTION

Les pas — De 1 à 75, on avance de 2 en 2.

$\frac{75-1}{2} = 37$ pas

Les termes —

$37 + 1 = 38$ termes

Le nombre de termes est le nombre de pas, plus un.

PIÈGES ANTICIPÉS

37 → 37 est le nombre de pas de 1 à 75. Il y a un terme de plus que de pas.

75 → 75 est le dernier terme, pas le nombre de termes : on ne compte que les impairs.

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Une somme de cinq en cinq

Calcule la somme $A = 3 + 8 + 13 + 18 + \ldots + 103 + 108$.

Réponse attendue : 1221

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les termes forment une suite arithmétique de raison 5. Compte-les d'abord.
2. De 3 à 108 il y a $\dfrac{108-3}{5} = 21$ pas. Applique ensuite :

$S = n \times \frac{a+b}{2}$

CORRECTION

Le nombre de termes —

$\frac{108-3}{5} + 1 = 22$

La somme —

$A = 22 \times \frac{3+108}{2} = 11 \times 111 = 1221$

Le nombre de termes, fois la demi-somme du premier et du dernier.

PIÈGES ANTICIPÉS

1165.5 / 2331/2 → Tu as pris 21 termes : 21 est le nombre de pas, il y a 22 termes.

2442 → Tu as multiplié 22 par $3 + 108$: il reste à diviser par 2.

EXERCICE 24 · PRATIQUE

Une somme de décimaux

Calcule la somme $S = 1 + 2{,}01 + 3{,}02 + 4{,}03 + \ldots + 24{,}23 + 25{,}24$.

Réponse attendue : 328

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On passe d'un terme au suivant en ajoutant $1{,}01$: c'est une suite arithmétique.
2. La partie entière augmente de 1 à chaque terme, de 1 à 25 : compte les termes, puis applique la formule de la somme.

CORRECTION

La raison —

$2{,}01 - 1 = 1{,}01 \quad ; \quad 3{,}02 - 2{,}01 = 1{,}01$

Le nombre de termes —

$\frac{25{,}24-1}{1{,}01} + 1 = 24 + 1 = 25$

La somme —

$S = 25 \times \frac{1+25{,}24}{2} = 25 \times 13{,}12 = 328$

Même avec des décimaux, la méthode ne change pas : la raison, le nombre de termes, puis la formule.

PIÈGES ANTICIPÉS

`314.88` → Tu as pris 24 termes : 24 est le nombre de pas, il y a 25 termes.

`656` → Tu as multiplié 25 par $1 + 25{,}24$: il reste à diviser par 2.

EXERCICE 25 · PRATIQUE

Une somme qui ne commence pas au début

Soit (U_n) la suite arithmétique définie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + 5$. Calcule $S = U_5 + U_6 + \ldots + U_{50}$.

> Soit (U_n) la suite arithmétique définie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, U indice (n plus un) égale U indice n plus 5. Calcule $S = U_5 + U_6 + \ldots + U_{50}$.
>
> Soit U indice n la suite arithmétique définie par U indice 0 égale 2 et, pour tout entier naturel n, U indice (n plus un) égale U indice n plus 5. Calcule S égale U indice 5 plus U indice 6 plus et ainsi de suite plus U indice 50.

Réponse attendue : 6417

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Il te faut trois choses : le premier terme de la somme U_5, le dernier U_{50}, et le nombre de termes.
2. $U_n = 2 + 5n$, et de l'indice 5 à l'indice 50 il y a $50 - 5 + 1$ termes.

CORRECTION

Les deux bouts —

$U_5 = 2 + 5 \times 5 = 27 \quad ; \quad U_{50} = 2 + 5 \times 50 = 252$

Le nombre de termes —

$50 - 5 + 1 = 46$

La somme —

$S = 46 \times \frac{27+252}{2} = 23 \times 279 = 6417$

Dans la formule, a est le premier terme **de la somme**, ici U_5, pas U_0.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6277.5 / 12555/2` → Tu as pris 45 termes : de l'indice 5 à l'indice 50 il y en a $50 - 5 + 1 = 46$.

`6477` → Tu as calculé $U_0 + U_1 + \ldots + U_{50}$: la somme demandée commence à U_5.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

Deux informations, deux inconnues

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r. On donne $U_5 = 6$ et $S = 48$, où $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{11}$. Détermine le premier terme U_0.

Donne seulement le premier terme.

Réponse attendue : 26

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Traduis chaque information par une équation d'inconnues U_0 et r.
2. S a 12 termes, de U_0 à $U_{11} = U_0 + 11r$.
   $12 \times \frac{U_0 + U_0 + 11r}{2} = 48$
3. Tu obtiens le système $U_0 + 5r = 6$ et $2 \times U_0 + 11r = 8$.

CORRECTION

Le terme U5 —

$U_0 + 5r = 6$

La somme —

$6 \times (2 \times U_0 + 11r) = 48 \iff 2 \times U_0 + 11r = 8$

La raison — On double la première équation, $2 \times U_0 + 10r = 12$, et on la retranche de la seconde.

$r = 8 - 12 = -4$

Le premier terme —

$U_0 = 6 - 5 \times (-4) = 26$

Vérification : $U_{11} = 26 - 44 = -18$ et $12 \times \frac{26 - 18}{2} = 48$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-4` → -4 est la raison r. On demande le premier terme : $U_0 = 6 - 5r$.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

Retrouver la suite, puis sommer

(U_n) est une suite arithmétique telle que $U_3 = 2$ et $U_{11} = 26$. On pose $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{15}$. Calcule S.

Réponse attendue : 248

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par la raison : de U_3 à U_{11} il y a 8 pas.
2. Avec $r = 3$, calcule U_0 en reculant de 3 pas depuis U_3, et U_{15} en avançant de 4 pas depuis U_{11}.

CORRECTION

La raison —

$r = \frac{26-2}{11-3} = 3$

Les deux bouts —

$U_0 = 2 - 3 \times 3 = -7 \quad ; \quad U_{15} = 26 + 4 \times 3 = 38$

La somme — De U_0 à U_{15} : 16 termes.

$S = 16 \times \frac{-7+38}{2} = 8 \times 31 = 248$

On retrouve d'abord la raison et les deux termes extrêmes, puis on applique la formule.

PIÈGES ANTICIPÉS

`232.5 / 465/2` → De U_0 à U_{15} il y a 16 termes, pas 15.

`496` → Tu as multiplié 16 par $-7+38$: il reste à diviser par 2.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

Une somme de termes négatifs

(V_n) est une suite arithmétique de premier terme $V_0 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $r = -1$. Calcule la somme $T = V_9 + V_{10} + \ldots + V_{15}$.

Réponse attendue : `-161/2` — aussi acceptées : -80.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le terme général est $V_n = \dfrac{1}{2} - n$: calcule V_9 et V_{15}.
2. De l'indice 9 à l'indice 15, il y a $15 - 9 + 1$ termes.

CORRECTION

Les deux bouts —

$V_9 = \frac{1}{2} - 9 = -\frac{17}{2} \quad ; \quad V_{15} = \frac{1}{2} - 15 = -\frac{29}{2}$

Le nombre de termes —

$15 - 9 + 1 = 7$

La somme — Les deux bouts ajoutés donnent $-\dfrac{46}{2} = -23$.

$T = 7 \times \frac{V_9+V_{15}}{2} = 7 \times \frac{-23}{2} = -\frac{161}{2}$

$T = -80{,}5$. Pour comparer, la somme $V_0 + V_1 + \ldots + V_{15}$, qui a 16 termes, vaut -112.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-69` → De l'indice 9 à l'indice 15 il y a 7 termes, pas 6.

`-112` → C'est la somme depuis V_0 : celle qu'on demande commence à V_9.

EXERCICE 29 · BASE

Les économies de huit mois

Une mère de famille a économisé 10 dinars le premier mois, puis 15 dinars le mois suivant, et ainsi de suite, en économisant chaque mois 5 dinars de plus que le mois précédent. Combien a-t-elle économisé en tout au bout de huit mois ?

Donne la somme en dinars.

Réponse attendue : `220`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les sommes mises de côté chaque mois forment une suite arithmétique de premier terme 10 et de raison 5.
2. Calcule ce qu'elle économise le huitième mois (7 pas après le premier), puis additionne les huit termes.

CORRECTION

Le huitième mois —

$10 + 7 \times 5 = 45$

Le total —

$8 \times \frac{10+45}{2} = 4 \times 55 = 220$

En huit mois, elle a économisé 220 dinars.

PIÈGES ANTICIPÉS

`45` → 45 dinars est ce qu'elle économise le huitième mois. On demande le total des huit mois.

`240` → Le huitième mois est à 7 pas du premier : elle économise 45 dinars ce mois-là, pas 50.

EXERCICE 30 · RAISONNEMENT

L'aspirateur

Une mère de famille économise 10 dinars le premier mois, puis chaque mois 5 dinars de plus que le mois précédent. À la fin de quel mois ses économies suffiront-elles pour acheter un aspirateur qui coûte 205 dinars ?

Écris seulement le numéro du mois, en chiffres, par exemple 5.

Réponse attendue : `8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C'est le total des économies qui doit atteindre le prix, pas le versement d'un seul mois.
2. Au bout de n mois, le dernier versement est $10 + 5(n-1)$ et le total est :
   $n \times \frac{10+10+5(n-1)}{2}$
3. Calcule le total au bout de 7 mois, puis au bout d'un mois de plus.

CORRECTION

Au bout de 7 mois —

$7 \times \frac{10+40}{2} = 175 < 205$

Un mois de plus —

$175 + 45 = 220 \geq 205$

Ses économies suffisent à la fin du huitième mois.

PIÈGES ANTICIPÉS

`40` → Tu as cherché le mois où le versement vaut 205 dinars. C'est le **total** des économies qui doit atteindre 205.

`7` → Au bout de 7 mois, elle n'a que 175 dinars : ce n'est pas encore assez.

EXERCICE 31 · RAISONNEMENT

Des vingt premiers aux cent premiers

La somme des 20 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 est 610. Calcule la somme des 100 premiers termes de cette suite.

Réponse attendue : `15050`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle a le premier terme. Le vingtième terme est à 19 pas du premier : $a + 57$.
2. Résous $20 \times \dfrac{a + a + 57}{2} = 610$ pour trouver a.
3. Le centième terme est à 99 pas du premier.

CORRECTION

Le premier terme —

$$10\,(2a + 57) = 610 \iff 2a + 57 = 61 \iff a = 2$$

Le centième terme —

$$2 + 99 \times 3 = 299$$

La somme —

$$100 \times \tfrac{2+299}{2} = 50 \times 301 = 15\,050$$

Le premier terme vaut 2, et la somme des cent premiers termes $15\,050$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 est le premier terme de la suite. Il reste à calculer la somme des 100 premiers termes.

`15200` → Le centième terme est à 99 pas du premier : il vaut $2 + 99 \times 3 = 299$, pas 302.

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT

Les multiples de 7

Calcule la somme de tous les multiples de 7 compris entre 100 et 1000.

Réponse attendue : `70336`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche le plus petit et le plus grand multiple de 7 entre 100 et 1000.
2. Ce sont $105 = 7 \times 15$ et $994 = 7 \times 142$. Combien y en a-t-il de 7×15 à 7×142 ?

CORRECTION

Les deux bouts —

$105 = 7 \times 15 \quad ; \quad 994 = 7 \times 142$

Le nombre de multiples —

$142 - 15 + 1 = 128$

La somme — Ce sont 128 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 7.

$128 \times \frac{105+994}{2} = 64 \times 1099 = 70\,336$

Il y a 128 multiples de 7 entre 100 et 1000, et leur somme vaut $70\,336$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`128` → 128 est le nombre de multiples de 7. On demande leur somme.

`69786.5 / 139573/2` → Tu as pris 127 termes : de 7×15 à 7×142 il y en a $142 - 15 + 1 = 128$.

EXERCICE 33 · RAISONNEMENT

Les pièces partagées

Un homme donne une pièce à une première personne, deux pièces à une deuxième, trois à une troisième, et ainsi de suite, en donnant chaque fois une pièce de plus, jusqu'à ce qu'il n'ait plus rien en poche. Il se dit alors : « Si j'avais donné autant de pièces à chacun, chacun aurait reçu 8 pièces. » Combien de personnes a-t-il rencontrées ?

Réponse attendue : `15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Appelle n le nombre de personnes. Combien de pièces a-t-il données en tout ?
2. Le total est $1 + 2 + \ldots + n$, et il vaut aussi 8 fois le nombre de personnes.

   $\frac{n(n+1)}{2} = 8n$

CORRECTION

Le total, de deux façons —

$\frac{n(n+1)}{2} = 8n$

On simplifie par n — n n'est pas nul.

$\frac{n+1}{2} = 8 \iff n = 15$

Vérification —

$1 + 2 + \ldots + 15 = \frac{15\times16}{2} = 120 = 8 \times 15$

Il a rencontré 15 personnes et distribué 120 pièces.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → $\dfrac{n+1}{2} = 8$ donne $n + 1 = 16$: il reste à retrancher 1.

`8` → 8 est le nombre de pièces que chacun aurait reçu, pas le nombre de personnes.

EXERCICE 34 · RAISONNEMENT

La table de multiplication

On rassemble dans un tableau carré toutes les tables de multiplication de 1 à n : la première ligne contient $1, 2, 3, \ldots, n$; la deuxième contient $2, 4, 6, \ldots, 2n$; … ; la dernière contient $n, 2n, 3n, \ldots, n^2$. La somme de tous les nombres du tableau est égale à 2025. Détermine n.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La ligne numéro k est k fois la première ligne : sa somme est $k \times (1 + 2 + \ldots + n)$.
2. La somme du tableau est donc $(1 + 2 + \ldots + n)^2$. Or $2025 = 45^2$.

CORRECTION

Ligne par ligne — La ligne numéro k a pour somme $k \times (1 + 2 + \ldots + n)$.

Le tableau —

$$(1 + 2 + \ldots + n) \times (1 + 2 + \ldots + n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

L'équation —

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 2025 = 45^2 \iff n(n+1) = 90 \iff n = 9$$

Pour $n = 9$: $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ et $45^2 = 2025$. De même, la somme vaut 100 pour $n = 4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

45 → 45 est la somme $1 + 2 + \ldots + n$. Il reste à trouver n tel que $\dfrac{n(n+1)}{2} = 45$.

EXERCICE 35 · RAISONNEMENT

Trois grands nombres

Les nombres $3\,529\,461$; $4\,539\,562$ et $5\,549\,663$ sont-ils trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Réponds par oui ou par non.

> Les nombres 3 529 461 ; 4 539 562 et 5 549 663 sont-ils trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ? Réponds par oui ou par non.
>
> Les nombres trois millions cinq cent vingt-neuf mille quatre cent soixante-et-un; quatre millions cinq cent trente-neuf mille cinq cent soixante-deux et cinq millions cinq cent quarante-neuf mille six cent soixante-trois sont-ils trois termes consécutifs d'une suite arithmétique? Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui ils le sont · ils le sont · oui ce sont trois termes consecutifs · oui ce sont trois termes consecutifs d'une suite arithmetique

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois nombres sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique quand on passe du premier au deuxième, puis du deuxième au troisième, en ajoutant le même nombre.
2. Calcule les deux différences et compare-les.

CORRECTION

Première différence —

$4\,539\,562 - 3\,529\,461 = 1\,010\,101$

> Première différence : 4 539 562 moins 3 529 461 égale 1 010 101
>
> Première différence : quatre millions cinq cent trente-neuf mille cinq cent soixante-deux moins trois millions cinq cent vingt-neuf mille quatre cent soixante-et-un égale un million dix mille cent un

Seconde différence —

$5\,549\,663 - 4\,539\,562 = 1\,010\,101$

> Seconde différence : 5 549 663 moins 4 539 562 égale 1 010 101
>
> Seconde différence : cinq millions cinq cent quarante-neuf mille six cent soixante-trois moins quatre millions cinq cent trente-neuf mille cinq cent soixante-deux égale un million dix mille cent un

Les deux différences sont égales : ce sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $1\,010\,101$.

> Les deux différences sont égales : ce sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 010 101.
>
> Les deux différences sont égales: ce sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison un million dix mille cent un.

PIÈGES ANTICIPÉS

non → Calcule les deux différences : elles valent toutes les deux $1\,010\,101$.

> Calcule les deux différences : elles valent toutes les deux 1 010 101.
>
> Calcule les deux différences: elles valent toutes les deux un million dix mille cent un.

EXERCICE 36 · RAISONNEMENT

Un triangle de nombres

On écrit les entiers naturels non nuls en triangle : la ligne 1 contient seulement 1 ; la ligne 2 contient $2, 3, 4$; la ligne 3 contient $5, 6, 7, 8, 9$; la ligne 4 contient les entiers de 10 à 16 ; et ainsi de suite, chaque ligne ayant deux nombres de plus que la précédente. Dans quelle ligne se trouve le nombre 2005 ?

Écris seulement le numéro de la ligne, en chiffres, par exemple 5.

Réponse attendue : 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Regarde le dernier nombre de chaque ligne : $1, 4, 9, 16, \ldots$
2. La ligne k contient $2k - 1$ nombres, et $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$: la ligne k finit par k^2.

CORRECTION

La fin de chaque ligne — Les lignes ont $1, 3, 5, \ldots$ nombres : la ligne k finit par la somme des k premiers impairs.

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k \times \frac{1 + (2k-1)}{2} = k^2$

On encadre 2005 —

$44^2 = 1936 < 2005 \leq 45^2 = 2025$

La ligne 44 finit à 1936 et la ligne 45 à 2025 : le nombre 2005 est dans la ligne 45.

PIÈGES ANTICIPÉS

`44` → La ligne 44 s'arrête à $44^2 = 1936$: 2005 est plus loin, dans la ligne suivante.

EXERCICE 37 · PRATIQUE

Le dernier jeton

Un sac contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. À chaque fois, on tire deux jetons du sac et on les remplace par un seul jeton, qui porte la somme des numéros des deux jetons tirés. Quel est le numéro inscrit sur le dernier jeton qui reste dans le sac ?

Réponse attendue : `210`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quand on remplace deux jetons par leur somme, la somme de tous les numéros du sac change-t-elle ?
2. La somme des numéros reste la même du début à la fin : c'est $1 + 2 + \ldots + 20$.

CORRECTION

Ce qui ne change pas — Remplacer deux jetons par leur somme ne change pas la somme de tous les numéros du sac.

Le dernier jeton — Il porte donc la somme de départ.

$1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

Quel que soit l'ordre des tirages, le dernier jeton porte le numéro 210.

PIÈGES ANTICIPÉS

`420` → $20 \times 21 = 420$ est le double de la somme : il reste à diviser par 2.

`190` → Tu as additionné de 1 à 19 : le jeton 20 compte aussi.

EXERCICE 38 · DEFI

L'arroseur des peupliers

Un fermier verse un seau d'eau au pied de chacun des 100 peupliers qui bordent son champ. Les peupliers sont en ligne droite, espacés de 2 mètres, et le puits est au pied du premier. Le fermier ne porte qu'un seau à la fois, et il revient au puits après chaque arbre, y compris le dernier. Quelle distance, en mètres, parcourt-il en tout ?

Donne seulement le nombre de mètres.

Réponse attendue : `19800`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le peuplier numéro k est à $2(k-1)$ mètres du puits. Quelle distance fait-il pour l'arroser, aller et retour ?
2. Les trajets aller-retour sont 0 ; 4 ; 8 ; … : une suite arithmétique de raison 4, avec 100 termes.

CORRECTION

Un aller-retour — Pour le peuplier numéro k : deux fois $2(k-1)$ mètres.

$4(k-1)$

Le dernier —

$4 \times 99 = 396$

Le total — 100 termes, de 0 à 396.

$100 \times \frac{0+396}{2} = 19\,800$

Il parcourt $19\,800$ mètres, presque 20 kilomètres : plus que l'aller-retour à pied jusqu'à une ville située à 9 kilomètres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9900` → Tu as compté seulement les allers : il revient au puits à chaque fois, la distance est double.

`20200` → Le puits est au pied du premier peuplier : pour celui-là il ne marche pas. Les trajets vont de 0 à 396 mètres.

`19602` → Ici le fermier revient au puits même après le dernier peuplier : il faut compter ce retour de 198 mètres.

EXERCICE 39 · DEFI

Un terme commun à trois suites

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme 6 et de raison 11 ; (V_n) est une suite arithmétique de premier terme -8 et de raison 13 ; (T_n) est une suite arithmétique de premier terme 29 et de raison 17. Quel est le plus petit entier naturel qui est à la fois un terme de (U_n), de (V_n) et de (T_n) ?

Réponse attendue : 369

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Vérifie que, pour tout n, $U_n + 5$ est un multiple de 11. Que peux-tu dire de $T_n + 5$?
2. Si x est un terme commun, $x + 5$ est un multiple de 11 et de 17, donc de 187. Et $x + 8$ doit être un multiple de 13.
3. Essaie $x = 187k - 5$ pour $k = 1$, puis $k = 2$.

CORRECTION

Les termes de U et de T —

$U_n + 5 = 11(n+1) \quad ; \quad T_n + 5 = 17(n+2)$

Un terme commun x — $x + 5$ est multiple de 11 et de 17, qui sont premiers entre eux : c'est un multiple de 187.

$x = 187k - 5$

La suite V — Il faut aussi que $x + 8 = 13n$. Pour $k = 1$: $182 + 8 = 190$, qui n'est pas multiple de 13. Pour $k = 2$:

$369 + 8 = 377 = 13 \times 29$

Le plus petit terme commun est $369 = U_{33} = V_{29} = T_{20}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

182 → 182 est bien un terme de (U_n) et de (T_n), mais pas de (V_n) : $182 + 8 = 190$ n'est pas un multiple de 13.

EXERCICE 40 · DEFI

Dix millions

Une suite arithmétique (a_n) a pour terme général $a_n = \dfrac{\pi \times (2n+1)}{4}$. Détermine le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 10^7$. Tu peux utiliser la calculatrice.

Réponse attendue : 6366198

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Isole n dans l'inéquation : multiplie par 4, divise par π, retranche 1, divise par 2.
2. Divise 4×10^7 par π, retranche 1, puis prends la moitié : n doit être supérieur ou égal à ce nombre, qui n'est pas entier. Lequel des deux entiers voisins convient ?

CORRECTION

L'inéquation —

$\frac{\pi \times (2n+1)}{4} \geq 10^7 \iff 2n + 1 \geq \frac{4 \times 10^7}{\pi}$

À la calculatrice —

$\frac{4 \times 10^7}{\pi} \approx 12\,732\,395{,}4 \quad \text{donc} \quad n \geq 6\,366\,197{,}2$

> À la calculatrice : 4 fois 10 puissance 7, le tout sur pie vaut environ 12 732 395,4 donc n supérieur ou égal à 6 366 197,2
>
> À la calculatrice : 4 fois 10 puissance 7, le tout sur pie vaut environ douze millions sept cent trente-deux mille trois cent quatre-vingt-quinze virgule quatre donc n supérieur ou égal à six millions trois cent soixante-six mille cent quatre-vingt-dix-sept virgule deux

L'entier — n est un entier : le plus petit qui convient est le premier entier au-dessus.

$n = 6\,366\,198$

> L'entier. n est un entier : le plus petit qui convient est le premier entier au-dessus. n égale 6 366 198
>
> L'entier. n est un entier: le plus petit qui convient est le premier entier au-dessus. n égale six millions trois cent soixante-six mille cent quatre-vingt-dix-huit

À partir de $n = 6\,366\,198$, tous les termes dépassent 10^7 : la suite est croissante, car sa raison $\dfrac{\pi}{2}$ est positive.

> À partir de n égale 6 366 198, tous les termes dépassent 10^7 : la suite est croissante, car sa raison $\dfrac{\pi}{2}$ est positive.
>
> À partir de n égale six millions trois cent soixante-six mille cent quatre-vingt-dix-huit, tous les termes .dépassent 10 puissance 7: la suite est croissante, car sa raison pie sur 2 est positive

PIÈGES ANTICIPÉS

6366197 → Pour $n = 6\,366\,197$, a_n est encore un peu en dessous de 10^7 : il faut prendre l'entier suivant.

> Pour n égale 6 366 197, a_n est encore un peu en dessous de 10^7 : il faut prendre l'entier suivant.

> Pour n égale six millions trois cent soixante-six mille cent quatre-vingt-dix-sept, a indice n est encore un peu en dessous de 10 puissance 7: il faut prendre l'entier suivant.

EXERCICE 41 · BASE

Un terme par le terme général

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = 3n^2 - 5$ pour tout entier naturel n. Calculer V_4.

Réponse attendue : 43

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace n par 4 dans l'expression de V_n.
2. Calcule d'abord le carré, 4^2, puis multiplie par 3.

CORRECTION

On remplace n par 4 —

$V_4 = 3 \times 4^2 - 5$

Le calcul —

$V_4 = 3 \times 16 - 5 = 43$

Avec le terme général, on obtient un terme en remplaçant n par son indice : le carré se calcule avant le produit.

PIÈGES ANTICIPÉS

139 → Tu as calculé $(3 \times 4)^2$: seul n est au carré, on calcule $3 \times 4^2 = 48$.

19 → 4^2 ne vaut pas 2×4 : c'est $4 \times 4 = 16$.

EXERCICE 42 · BASE

Le troisième terme

Soit $(W_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $W_n = \dfrac{n-1}{n}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. Calculer le troisième terme de cette suite, en valeur exacte.

Donner la valeur exacte, sous forme de fraction.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La suite commence à l'indice 1 : son premier terme est W_1.
2. Le troisième terme est donc W_3 : remplace n par 3.

CORRECTION

Les premiers termes — Le premier terme est W_1, le deuxième W_2, le troisième W_3.

Le calcul —

$W_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$

Le rang d'un terme dépend de l'indice de départ : ici la suite commence à $n = 1$, donc le troisième terme est W_3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` / `0.5` → $\frac{1}{2}$ est W_2 : tu as compté comme si la suite commençait à W_0. Elle commence à W_1.

`3/4` / `0.75` → $\frac{3}{4}$ est W_4, le quatrième terme.

`0.67` / `0.66` / `0.7` / `0.667` / `0.666` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, sous forme de fraction.

EXERCICE 43 · BASE

Trois pas de récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Calculer u_3.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec une relation de récurrence, on calcule les termes l'un après l'autre : d'abord u_1, puis u_2.
2. $u_1 = 2 \times 4 - 5$. Continue de la même façon.

CORRECTION

u1 —

$u_1 = 2 \times 4 - 5 = 3$

u2 —

$u_2 = 2 \times 3 - 5 = 1$

u3 —

$u_3 = 2 \times 1 - 5 = -3$

Pour atteindre u_3 à partir de u_0, on applique trois fois la relation de récurrence.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → 1 est u_2 : il reste encore un pas pour arriver à u_3.

`-11` → -11 est u_4 : tu as fait un pas de trop.

EXERCICE 44 · PRATIQUE

Retrouver l'indice

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - 6n + 10$ pour tout entier naturel n. Déterminer l'entier naturel n tel que $U_n = 26$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : `8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'équation $n^2 - 6n + 10 = 26$, puis ramène tout dans un membre.
2. Résous l'équation du second degré $n^2 - 6n - 16 = 0$.
3. n est un entier naturel : garde seulement la solution qui convient.

CORRECTION

L'équation —

$n^2 - 6n + 10 = 26 \iff n^2 - 6n - 16 = 0$

Les solutions — Le discriminant vaut $36 + 64 = 100$.

$n = \frac{6+10}{2} = 8 \quad \text{ou} \quad n = \frac{6-10}{2} = -2$

L'indice — -2 n'est pas un entier naturel.

$n = 8$

Chercher l'indice d'un terme donné, c'est résoudre une équation d'inconnue n ; on ne garde que les entiers naturels.

PIÈGES ANTICIPÉS

-2 → -2 est bien solution de l'équation, mais un indice est un entier naturel : il ne peut pas être négatif.

EXERCICE 45 · PRATIQUE **Des signes qui alternent**

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = (-1)^n \times (2n + 1)$ pour tout entier naturel n. Calculer $U_{10} + U_{11}$.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $(-1)^n$ vaut 1 quand n est pair et -1 quand n est impair.
2. Calcule séparément U_{10} et U_{11}, en faisant attention à leur signe.

CORRECTION

U10 — 10 est pair.

$U_{10} = 1 \times 21 = 21$

U11 — 11 est impair.

$U_{11} = -1 \times 23 = -23$

La somme —

$U_{10} + U_{11} = 21 - 23 = -2$

Le facteur $(-1)^n$ donne le signe du terme : positif pour un indice pair, négatif pour un indice impair.

PIÈGES ANTICIPÉS

44 → Tu as oublié le facteur $(-1)^n$: U_{11} est négatif, car 11 est impair.

2 → $(-1)^{10} = 1$ et $(-1)^{11} = -1$: c'est U_{11} qui est négatif, pas U_{10}.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Changer d'indice : U indice 2n

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 4n - 1$ pour tout entier naturel n. Exprimer U_{2n} en fonction de n, sous forme développée et réduite.

Écrire seulement l'expression, en fonction de n.

Réponse attendue : `8n-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. U_{2n} s'obtient en remplaçant n par $2n$ dans la formule.
2. Attention : on ne multiplie pas tout le terme U_n par 2.

CORRECTION

On remplace n par 2n —

$$U_{2n} = 4 \times (2n) - 1$$

On réduit —

$$U_{2n} = 8n - 1$$

Pour écrire U_{2n}, on remplace n par $2n$ dans le terme général : ce n'est pas $2 \times U_n$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8n-2` → Tu as calculé $2 \times U_n$. U_{2n} s'obtient en remplaçant n par $2n$: $4 \times 2n - 1$.

`4n+7` → Tu as calculé U_{n+2} : l'indice demandé est $2n$, pas $n + 2$.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Le terme précédent

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 + n$ pour tout entier naturel n. Exprimer U_{n-1} en fonction de n, pour $n \geq 1$, sous forme développée et réduite.

Écrire seulement l'expression, en fonction de n.

Réponse attendue : `n^2-n`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace n par $n - 1$ partout dans la formule, avec des parenthèses.
2. Développe $(n - 1)^2$ avec l'identité remarquable, sans oublier le double produit.

CORRECTION

On remplace n par n – 1 —

$$U_{n-1} = (n - 1)^2 + (n - 1)$$

On développe —

$$U_{n-1} = n^2 - 2n + 1 + n - 1$$

On réduit —

$$U_{n-1} = n^2 - n$$

Le terme précédent U_{n-1} s'obtient en remplaçant n par $n-1$, avec des parenthèses autour de $n-1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`n^2+n-1` → Tu as retranché 1 au terme U_n. Il faut remplacer n par $n-1$ dans la formule.

`n^2+n-2` → $(n-1)^2$ ne vaut pas n^2-1 : $(n-1)^2 = n^2-2n+1$, sans oublier le double produit $-2n$.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

Conjecturer le terme général

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + 2n + 1$. Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4, conjecturer une expression de U_n en fonction de n, puis calculer U_{20}.

Donner seulement la valeur de U_{20}.

Réponse attendue : `401`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les premiers termes avec la relation : $U_1 = 1 + 0 + 1$, puis U_2, ...
2. Compare chaque terme au carré de son indice : $0, 1, 4, 9, 16$.
3. Chaque terme dépasse de 1 le carré de son indice.

CORRECTION

Les premiers termes —

$U_1 = 2 \quad ; \quad U_2 = 5 \quad ; \quad U_3 = 10 \quad ; \quad U_4 = 17$

La conjecture — $2 = 1^2 + 1, 5 = 2^2 + 1, 10 = 3^2 + 1, 17 = 4^2 + 1$.

$U_n = n^2 + 1$

Vérification — Avec cette expression, $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$: c'est bien la relation donnée.

U20 —

$U_{20} = 20^2 + 1 = 401$

Calculer les premiers termes d'une suite récurrente permet de deviner son terme général ; on vérifie ensuite qu'il satisfait la relation.

PIÈGES ANTICIPÉS

`400` → $400 = 20^2$: il manque le 1, puisque $U_0 = 1$ et non 0.

`442` → Tu as pris $(n+1)^2 + 1$: vérifie avec $U_1 = 2 = 1^2 + 1$.

EXERCICE 49 · RAISONNEMENT

Le rang à partir duquel

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ pour tout entier naturel n. Vérifier que $U_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$, puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 2{,}01$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : `100`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour la vérification, réduis $2 + \dfrac{1}{n+1}$ au même dénominateur.
2. L'inégalité $U_n < 2{,}01$ devient $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}01$.
3. Deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses : passe aux inverses.

CORRECTION

La vérification —

$2 + \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1}$

L'inégalité —

$U_n < 2{,}01 \iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$

On passe aux inverses —

$n + 1 > 100 \iff n > 99$

Le plus petit entier — Pour $n = 99$, $U_{99} = 2{,}01$ exactement : l'inégalité stricte n'est pas vérifiée.

$n = 100$

Écrire le terme général sous la forme $2 + \dfrac{1}{n+1}$ montre comment il s'approche de 2 ; une inégalité stricte exclut le cas d'égalité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`99` → Pour $n = 99$, $U_{99} = 2 + \dfrac{1}{100} = 2{,}01$: l'inégalité est stricte, 99 ne convient pas.

`101` → $n = 100$ convient déjà : $U_{100} = 2 + \dfrac{1}{101} < 2{,}01$.

EXERCICE 50 · RAISONNEMENT

Une suite qui revient sur ses pas

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{1}{1 - U_n}$.

Calculer U_1, U_2 et U_3, puis en déduire U_{100}.

Donner seulement la valeur de U_{100}.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les termes un par un : $U_1 = \dfrac{1}{1-2}$.
2. Tu dois retrouver $U_3 = U_0$: les termes se répètent par blocs de trois.
3. Écris la division euclidienne de 100 par 3 : quel est le reste ?

CORRECTION

Les premiers termes —

$U_1 = \frac{1}{1-2} = -1 \quad ; \quad U_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad U_3 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

La répétition — $U_3 = U_0$: chaque terme ne dépend que du précédent, donc la suite reprend $2, -1, \frac{1}{2}, 2,$ … Ainsi $U_{n+3} = U_n$.

Le reste —

$100 = 3 \times 33 + 1$

U100 —

$U_{100} = U_1 = -1$

Quand une suite récurrente retrouve un terme déjà rencontré, elle se répète : le reste de la division de l'indice par la longueur du cycle donne le terme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 est le terme d'indice multiple de 3. Or $100 = 3 \times 33 + 1$: le reste est 1.

`1/2` / `0.5` → $\frac{1}{2}$ correspond à un reste de 2. Or $100 = 3 \times 33 + 1$.

EXERCICE 51 · DEFI

Une somme qui se télescope

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Vérifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, puis calculer S_{99}, en valeur exacte.

Donner la valeur exacte.

Réponse attendue : `99/100` — aussi acceptées : 0.99

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Réduis $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ au même dénominateur.
2. Écris chaque terme de S_{99} comme une différence : $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots$
3. Presque tout se simplifie : il ne reste que le premier et le dernier morceau.

CORRECTION

L'égalité —

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

La somme —

$S_{99} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$

Les simplifications — Chaque $-\frac{1}{k}$ s'annule avec le $+\frac{1}{k}$ du morceau suivant.

$S_{99} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

Écrire chaque terme comme une différence fait disparaître les termes intermédiaires : on dit que la somme « se télescope ».

PIÈGES ANTICIPÉS

98/99 → Le dernier terme de S_{99} est $\dfrac{1}{99 \times 100} = \dfrac{1}{99} - \dfrac{1}{100}$: il reste $1 - \dfrac{1}{100}$.

100/101 → $\dfrac{100}{101}$ est S_{100} : la somme S_{99} s'arrête au terme $\dfrac{1}{99 \times 100}$.

EXERCICE 52 · BASE

Le terme du milieu

Les nombres 4 ; x ; 18 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer le réel x.

Donner la valeur de x.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans une suite arithmétique, on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même raison.
2. Écris l'égalité des deux écarts : $x - 4 = 18 - x$.

CORRECTION

Les écarts égaux —

$x - 4 = 18 - x$

On résout —

$2x = 22 \iff x = 11$

Le terme du milieu de trois termes consécutifs d'une suite arithmétique est la demi-somme des deux autres.

PIÈGES ANTICIPÉS

7 → 7 est la raison : $4 + 7 = 11$. On demande le terme x.

14 → 14 est l'écart entre 4 et 18 ; ce n'est pas le terme du milieu.

EXERCICE 53 · BASE

La raison cachée dans une relation

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n + 4 = 0$. Elle est arithmétique : déterminer sa raison.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Isole U_{n+1} dans la relation.
2. Tu obtiens $U_{n+1} = U_n + r$: lis r avec son signe.

CORRECTION

On isole U(n+1) —

$U_{n+1} - U_n + 4 = 0 \iff U_{n+1} = U_n - 4$

La raison —
$r = -4$

Pour lire la raison, on écrit la relation sous la forme $U_{n+1} = U_n + r$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $U_{n+1} = U_n - 4$: on retranche 4 à chaque pas, la raison est négative.

3 → 3 est le premier terme U_0, pas la raison.

EXERCICE 54 · BASE **Laquelle est arithmétique ?**

Voici trois suites définies pour tout entier naturel n : a) $U_n = n^2 + 1$; b) $V_n = 3 - \dfrac{2n}{5}$; c) $W_n = 2^n$. Une seule de ces suites est arithmétique : indiquer laquelle (a, b ou c).

Donner seulement la lettre : a, b ou c.

Réponse attendue : b — aussi acceptées : la b · reponse b · la suite b · c'est la b · la reponse b · V · Vn · la suite V · la suite Vn

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une suite de la forme $an + b$ est arithmétique : cherche celle qui s'écrit ainsi.
2. Pour les deux autres, calcule les trois premiers termes et compare les écarts.

CORRECTION

La suite b —
$V_n = -\frac{2}{5}\,n + 3 \quad ; \quad V_{n+1} - V_n = -\frac{2}{5}$

Les deux autres — $U_0 = 1, U_1 = 2, U_2 = 5$: les écarts 1 et 3 diffèrent. $W_0 = 1, W_1 = 2, W_2 = 4$: les écarts 1 et 2 diffèrent.

Une suite de terme général $an + b$ est arithmétique de raison a ; pour montrer qu'une suite ne l'est pas, deux écarts différents suffisent.

PIÈGES ANTICIPÉS

a / U / Un → Pour $U_n = n^2 + 1$: $U_1 - U_0 = 1$ mais $U_2 - U_1 = 3$. Les écarts changent.

c / W / Wn → Pour $W_n = 2^n$: $W_1 - W_0 = 1$ mais $W_2 - W_1 = 2$. On multiplie par 2, on n'ajoute pas une constante.

EXERCICE 55 · PRATIQUE **Des carrés d'allumettes**

Avec des allumettes, on forme une rangée de carrés accolés : il faut 4 allumettes pour un carré, 7 pour deux carrés, 10 pour trois carrés, et ainsi de suite. On note a_n le nombre d'allumettes nécessaires pour n carrés, $n \geq 1$. Calculer le nombre d'allumettes nécessaires pour 25 carrés.

Donner seulement le nombre d'allumettes.

Réponse attendue : 76

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque nouveau carré réutilise un côté du précédent : combien d'allumettes ajoute-t-on à chaque fois ?
2. La suite (a_n) est arithmétique de premier terme $a_1 = 4$: utilise $a_n = a_1 + (n-1)r$.

CORRECTION

La raison — Chaque carré ajouté demande 3 allumettes, car il partage un côté avec le précédent.

$a_{n+1} = a_n + 3$

Le terme général —

$a_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$

Pour 25 carrés —

$a_{25} = 3 \times 25 + 1 = 76$

Une quantité qui augmente de la même valeur à chaque étape est une suite arithmétique ; ici le premier terme est a_1, d'où $a_n = a_1 + (n-1)r$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100` → Les carrés sont accolés : chaque carré ajouté partage un côté avec le précédent, il ne demande que 3 allumettes.

`75` → $3 \times 25 = 75$: il manque l'allumette du tout premier côté, $a_n = 3n + 1$.

`79` → Tu as calculé $4 + 25 \times 3$: de a_1 à a_{25} il y a 24 pas, pas 25.

EXERCICE 56 · PRATIQUE

Une différence de carrés

La suite (V_n) définie par $V_n = (n+3)^2 - (n+1)^2$, pour tout entier naturel n, est arithmétique. Déterminer sa raison.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Développe les deux carrés, puis réduis.
2. Tu obtiens une expression de la forme $an + b$: la raison est le coefficient de n.

CORRECTION

On développe —

$V_n = (n^2 + 6n + 9) - (n^2 + 2n + 1)$

On réduit —

$V_n = 4n + 8$

La raison — V_n est de la forme $an + b$ avec $a = 4$.

$V_{n+1} - V_n = 4$

Après simplification, un terme général de la forme $an + b$ est celui d'une suite arithmétique de raison a.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → 8 est le premier terme V_0. La raison est le coefficient de n dans $V_n = 4n + 8$.

2 → $(n+3)^2 - (n+1)^2$ ne vaut pas 2 : développe chaque carré avec son double produit.

EXERCICE 57 · RAISONNEMENT

Une suite fabriquée à partir d'une autre

(U_n) est une suite arithmétique de raison 3. On définit la suite (V_n) par $V_n = 5 - 2U_n$ pour tout entier naturel n. Montrer que (V_n) est arithmétique et déterminer sa raison.

Donner seulement la raison de (V_n).

Réponse attendue : -6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $V_{n+1} - V_n$ en fonction de U_{n+1} et de U_n.
2. Le 5 disparaît dans la différence ; il reste $-2(U_{n+1} - U_n)$.

CORRECTION

La différence —

$$V_{n+1} - V_n = (5 - 2U_{n+1}) - (5 - 2U_n) = -2(U_{n+1} - U_n)$$

La raison — $U_{n+1} - U_n = 3$ pour tout n.

$$V_{n+1} - V_n = -2 \times 3 = -6$$

Si (U_n) est arithmétique de raison r, la suite $aU_n + b$ est arithmétique de raison ar : la constante b n'intervient pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Le coefficient de U_n est -2 : la raison de (V_n) est -2×3, négative.

-1 → Tu as calculé $5 - 2 \times 3$. Dans la différence $V_{n+1} - V_n$, le 5 disparaît.

EXERCICE 58 · RAISONNEMENT

Trois expressions en progression

Déterminer le réel m pour que les nombres $m - 1$; $2m + 1$; $4m - 3$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Donner la valeur de m.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois nombres a, b, c sont en progression arithmétique lorsque $b - a = c - b$.
2. Écris $(2m + 1) - (m - 1) = (4m - 3) - (2m + 1)$, puis résous.

CORRECTION

Les écarts égaux —

$$(2m + 1) - (m - 1) = (4m - 3) - (2m + 1)$$

On réduit —

$m + 2 = 2m - 4 \iff m = 6$

Vérification — Pour $m = 6$: 5 ; 13 ; 21, avec une raison de 8.

Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ont des écarts égaux : le terme du milieu est la demi-somme des deux autres.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/3 → Tu as écrit $a + c = b$. La bonne relation est $a + c = 2b$: le terme du milieu est la demi-somme des deux autres.

8 → 8 est la raison obtenue pour $m = 6$. On demande la valeur de m.

EXERCICE 59 · RAISONNEMENT

Somme et produit de trois termes

Trois nombres sont, dans l'ordre croissant, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Leur somme vaut 27 et leur produit vaut 693. Déterminer le plus grand de ces trois nombres.

Donner seulement le plus grand nombre.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note les trois nombres $a - r$, a et $a + r$: leur somme se calcule facilement.
2. La somme donne $3a = 27$. Remplace a dans le produit.
3. Tu obtiens $9(81 - r^2) = 693$; les nombres sont rangés dans l'ordre croissant, donc $r > 0$.

CORRECTION

La somme —

$(a - r) + a + (a + r) = 3a = 27 \iff a = 9$

Le produit —

$9(9 - r)(9 + r) = 693 \iff 81 - r^2 = 77 \iff r^2 = 4$

La raison — Les nombres sont croissants, donc $r > 0$.

$r = 2$

Les trois nombres —

7 ; 9 ; 11

Pour trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, on les note $a - r$, a, $a + r$: la somme donne directement a.

PIÈGES ANTICIPÉS

9 → 9 est le terme du milieu. Le plus grand est $9 + r$.

2 → 2 est la raison. Le plus grand nombre est $9 + 2$.

EXERCICE 60 · RAISONNEMENT

Un triangle rectangle en progression

Les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle, exprimées en cm, sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3. Calculer le périmètre de ce triangle, en cm.

Donner le périmètre en cm.

Réponse attendue : 36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note les côtés $a-3$, a et $a+3$: le plus long, $a+3$, est l'hypoténuse.
2. Écris le théorème de Pythagore : $(a-3)^2+a^2=(a+3)^2$.
3. Développe : les termes en 9 s'éliminent et il reste une équation simple en a.

CORRECTION

Pythagore —

$$(a-3)^2+a^2=(a+3)^2$$

On développe —

$$a^2-6a+9+a^2=a^2+6a+9 \iff a^2-12a=0$$

La longueur — a est une longueur, donc $a \neq 0$.

$$a=12$$

Le périmètre —

$$9+12+15=36$$

Les côtés 9, 12, 15 sont proportionnels à 3, 4, 5. Pour trois termes consécutifs, on choisit l'inconnue au milieu : $a-r$, a, $a+r$.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → 15 cm est l'hypoténuse. On demande le périmètre : la somme des trois côtés.

12 → 12 cm est le côté du milieu, a. Il reste à additionner les trois côtés.

EXERCICE 61 · DEFI **Passer par l'inverse**

On considère la suite (U_n) définie par $U_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=\dfrac{U_n}{1+U_n}$. On admet que tous ses termes sont strictement positifs et on pose $V_n=\dfrac{1}{U_n}$. Montrer que (V_n) est arithmétique, puis calculer U_9, en valeur exacte.

Donner la valeur exacte de U_9.

Réponse attendue : `1/10` — aussi acceptées : 0.1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $V_{n+1}=\dfrac{1}{U_{n+1}}=\dfrac{1+U_n}{U_n}$, puis sépare la fraction en deux.
2. Tu trouves $V_{n+1}=V_n+1$: quel est le premier terme V_0 ?

3. Écris V_n en fonction de n, puis reviens à $U_n = \dfrac{1}{V_n}$.

CORRECTION

La relation —

$V_{n+1} = \frac{1+U_n}{U_n} = \frac{1}{U_n} + 1 = V_n + 1$

La suite (Vn) — (V_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $V_0 = 1$.

$V_n = 1 + n$

On revient à U —

$U_n = \frac{1}{n+1}$; $U_9 = \frac{1}{10}$

Une suite auxiliaire bien choisie peut être arithmétique : on calcule son terme général, puis on revient à la suite de départ.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 est V_9. On demande $U_9 = \dfrac{1}{V_9}$.

`1/9` → $V_n = n + 1$, car $V_0 = 1 : V_9 = 10$, pas 9.

EXERCICE 62 · RAISONNEMENT

Les angles d'un triangle

Les mesures des trois angles d'un triangle sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, et le plus grand angle mesure le double du plus petit. Calculer la mesure du plus petit angle, en degrés.

Donner la mesure en degrés.

Réponse attendue : `40`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note les angles $a - r$, a, $a + r$: la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.
2. La somme donne $a = 60$. Traduis ensuite « le plus grand est le double du plus petit ».

CORRECTION

La somme des angles —

$(a - r) + a + (a + r) = 180 \iff a = 60$

Le double —

$60 + r = 2(60 - r) \iff 3r = 60 \iff r = 20$

Le plus petit angle —

$60 - 20 = 40$

Dans tout triangle dont les angles sont en progression arithmétique, l'angle du milieu mesure $60°$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` → $60°$ est l'angle du milieu. Le plus petit est $60 - r$.

`80` → $80°$ est le plus grand angle. On demande le plus petit.

EXERCICE 63 · DEFI

Quatre termes, somme et carrés

Quatre nombres sont, dans l'ordre croissant, quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique. Leur somme vaut 20 et la somme de leurs carrés vaut 120. Déterminer le plus petit de ces quatre nombres.

Donner seulement le plus petit nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour que la somme se simplifie, note les quatre nombres $a-3d$, $a-d$, $a+d$ et $a+3d$: la raison est alors $2d$.
2. La somme donne $4a=20$. Développe ensuite la somme des carrés : les termes en ad s'annulent.
3. Tu obtiens $4a^2+20d^2=120$; les nombres sont croissants, donc $d>0$.

CORRECTION

La somme —

$$4a=20 \iff a=5$$

Les carrés —

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=4a^2+20d^2$$

On résout —

$$100+20d^2=120 \iff d^2=1 \iff d=1$$

Les quatre nombres —

$$2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8$$

Avec un nombre pair de termes, on les écrit symétriquement autour de leur moyenne : $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$, de raison $2d$.

PIÈGES ANTICIPÉS

- 5 → 5 est la moyenne des quatre nombres, ce n'est pas l'un d'eux.
- 8 → 8 est le plus grand des quatre nombres. On demande le plus petit.
- 4 → 4 est le deuxième nombre. Les quatre nombres sont $5-3d$, $5-d$, $5+d$ et $5+3d$.

EXERCICE 64 · DEFI

Deux termes consécutifs additionnés

Une suite (U_n) vérifie $U_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $U_n+U_{n+1}=4n+6$. Calculer U_1, U_2 et U_3, vérifier que la suite de terme général $2n+2$ satisfait ces conditions, puis calculer U_{50}.

Donner seulement la valeur de U_{50}.

Réponse attendue : `102`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour $n=0$: $U_0+U_1=6$. Continue avec $n=1$ et $n=2$.

2. Vérifie que $(2n+2)+(2(n+1)+2) = 4n+6$ et que la formule donne bien $U_0 = 2$.

3. Chaque terme est déterminé par le précédent : la suite est celle de terme général $2n+2$.

CORRECTION

Les premiers termes —

$U_1 = 6-2 = 4 \quad ; \quad U_2 = 10-4 = 6 \quad ; \quad U_3 = 14-6 = 8$

La vérification —

$(2n+2)+(2n+4) = 4n+6 \quad ; \quad 2\times 0+2 = 2$

L'unicité — La relation donne $U_{n+1} = 4n+6-U_n$: connaissant U_0, tous les termes sont déterminés. La suite est arithmétique de raison 2.

U50 —

$U_{50} = 2\times 50+2 = 102$

La relation $U_n + U_{n+1} = 4n+6$ fixe chaque terme à partir du précédent : il suffit de vérifier qu'une formule la satisfait, avec le bon premier terme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`104` → 104 est U_{51} : vérifie avec $U_1 = 4 = 2\times 1+2$.

`206` → 206 est $U_{50}+U_{51}$, d'après la relation pour $n = 50$. On demande U_{50} seul.

EXERCICE 65 · BASE

Quand le premier terme est U indice 1

$(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de premier terme $U_1 = 7$ et de raison 4. Calculer U_{15}.

Réponse attendue : 63

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier terme est U_1, pas U_0 : utilise $U_n = U_1+(n-1)r$.
2. De U_1 à U_{15}, combien de pas fait-on ?

CORRECTION

La formule —

$U_{15} = U_1+(15-1)\times 4$

Le calcul —

$U_{15} = 7+56 = 63$

Quand la suite commence à U_1, on écrit $U_n = U_1+(n-1)r$: il y a $n-1$ pas de U_1 à U_n.

PIÈGES ANTICIPÉS

`67` → Tu as ajouté 15 fois la raison. De U_1 à U_{15} il y a 14 pas.

`60` → $15\times 4 = 60$: il faut partir du premier terme $U_1 = 7$, et faire 14 pas.

EXERCICE 66 · BASE

Écrire le terme général

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 12$ et de raison $r = -\dfrac{5}{2}$. Exprimer U_n en fonction de n, sous forme développée et réduite.

Donner l'expression de U_n.

Réponse attendue : `12-5n/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la formule $U_n = U_0 + nr$.
2. Remplace U_0 et r par leurs valeurs, en gardant le signe de r.

CORRECTION

La formule —

$$U_n = U_0 + nr$$

On remplace —

$$U_n = 12 + n \times \left(-\tfrac{5}{2}\right) = 12 - \tfrac{5}{2}\,n$$

Le terme général d'une suite arithmétique est $U_n = U_0 + nr$: la raison est le coefficient de n.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12n-5/2` → Tu as échangé les rôles : la raison multiplie n, et le premier terme est la constante.

`12+5n/2` → La raison est négative : $U_n = 12 - \dfrac{5}{2}\,n$.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Reculer jusqu'au premier terme

(U_n) est une suite arithmétique telle que $U_4 = 10$ et $U_5 = 13$. Calculer son premier terme U_0.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux termes consécutifs donnent la raison.
2. De U_0 à U_4, il y a 4 pas : $U_4 = U_0 + 4r$.

CORRECTION

La raison —

$$r = U_5 - U_4 = 3$$

Le premier terme —

$$U_0 = U_4 - 4r = 10 - 12 = -2$$

On recule d'un terme connu au premier terme en retranchant autant de fois la raison qu'il y a de pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Tu as retranché 3 fois la raison : de U_0 à U_4 il y a 4 pas.

`22` → Pour reculer, on retranche la raison : $U_0 = U_4 - 4r$.

EXERCICE 68 · BASE

Le loyer de la dixième année

Le loyer annuel d'un local commercial est de $3\,500$ dinars la première année, puis il augmente de 150 dinars chaque année. Calculer le loyer de la dixième année, en dinars.

Donner le loyer en dinars.

Réponse attendue : `4850`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les loyers successifs forment une suite arithmétique de raison 150.
2. De la première à la dixième année, combien d'augmentations y a-t-il ?

CORRECTION

La suite — On note L_n le loyer de la n-ième année : $L_1 = 3\,500$ et la raison vaut 150.

$$L_n = 3\,500 + (n-1) \times 150$$

La dixième année —

$$L_{10} = 3\,500 + 9 \times 150 = 4\,850$$

Entre la première et la dixième année, il y a neuf augmentations : $L_{10} = L_1 + 9r$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5000` → Tu as compté 10 augmentations. La première année, le loyer n'a pas encore augmenté : il y en a 9.

`41750` → $41\,750$ dinars est le total des dix loyers. On demande le loyer de la dixième année seulement.

EXERCICE 69 · RAISONNEMENT

Deux termes à égale distance

(U_n) est une suite arithmétique telle que $U_2 + U_8 = 30$. Calculer U_5.

Réponse attendue : `15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime U_2 et U_8 à partir de U_5 et de la raison r.
2. $U_2 = U_5 - 3r$ et $U_8 = U_5 + 3r$: additionne.

CORRECTION

À partir de U5 —

$$U_2 = U_5 - 3r \quad ; \quad U_8 = U_5 + 3r$$

La somme —

$$U_2 + U_8 = 2U_5 = 30$$

Le résultat —

$$U_5 = 15$$

U_5 est à égale distance de U_2 et de U_8 : c'est leur demi-somme, quelle que soit la raison.

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → 30 est $U_2 + U_8 = 2U_5$: il reste à diviser par 2.

`10` → Tu as divisé par 3. La somme $U_2 + U_8$ vaut $2U_5$.

EXERCICE 70 · PRATIQUE

Une raison fractionnaire

(U_n) est une suite arithmétique telle que $U_7 = 3$ et $U_{19} = -5$. Calculer son premier terme U_0, en valeur exacte.

Donner la valeur exacte, sous forme de fraction.

Réponse attendue : `23/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord la raison : $U_{19} = U_7 + 12r$.
2. Puis recule de U_7 à U_0 : $U_0 = U_7 - 7r$, attention au signe de r.

CORRECTION

La raison —

$r = \frac{U_{19} - U_7}{19 - 7} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$

Le premier terme —

$U_0 = U_7 - 7r = 3 + \frac{14}{3} = \frac{23}{3}$

Deux termes connus donnent la raison, $r = \dfrac{U_n - U_p}{n - p}$; un terme et la raison donnent ensuite n'importe quel autre terme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2/3` → $-\dfrac{2}{3}$ est la raison. On demande le premier terme $U_0 = U_7 - 7r$.

`-5/3` → r est négatif : $-7r = +\dfrac{14}{3}$. Donc $U_0 = 3 + \dfrac{14}{3}$.

`7.67 / 7.66 / 7.7 / 7.667 / 7.666` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, sous forme de fraction.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

Le rang d'un terme

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison 7. Déterminer l'entier naturel n tel que $U_n = 2\,021$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : `288`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris U_n en fonction de n, puis l'équation $U_n = 2\,021$.

2. Résous $5 + 7n = 2\,021$: n doit être un entier naturel.

CORRECTION

Le terme général —

$U_n = 5 + 7n$

L'équation —

$5 + 7n = 2\,021 \iff 7n = 2\,016 \iff n = 288$

Pour savoir si un nombre est un terme de la suite, on résout $U_n =$ ce nombre : il l'est quand la solution est un entier naturel.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2021/7` → Tu as oublié le premier terme : $U_n = 5 + 7n$, donc $7n = 2\,021 - 5$.

`289` → 289 est le rang du terme (U_0 est le premier). On demande l'indice n.

EXERCICE 72 · PRATIQUE **Le premier terme négatif**

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1\,000$ et de raison -13. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 0$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 77

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $U_n = 1\,000 - 13n$ et résous l'inéquation $1\,000 - 13n < 0$.
2. Tu obtiens $n > \dfrac{1\,000}{13}$: quel est le premier entier qui convient ?

CORRECTION

L'inéquation —

$1\,000 - 13n < 0 \iff 13n > 1\,000 \iff n > \frac{1\,000}{13}$

La valeur —

$\frac{1\,000}{13} \approx 76{,}92$

Vérification —

$U_{76} = 12 \quad ; \quad U_{77} = -1$

Le plus petit entier —

$n = 77$

Une inéquation en n donne un réel ; on prend ensuite le premier entier qui la vérifie, et on contrôle avec deux termes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`76` → $U_{76} = 1\,000 - 988 = 12$ est encore positif : il faut l'entier suivant.

`-1` → -1 est la valeur du premier terme négatif. On demande son indice n.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

Les rangées d'un amphithéâtre

Dans un amphithéâtre, la première rangée compte 22 sièges et chaque rangée compte 3 sièges de plus que la précédente. La dernière rangée compte 85 sièges. Déterminer le nombre de rangées de l'amphithéâtre.

Donner seulement le nombre de rangées.

Réponse attendue : 22

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note s_n le nombre de sièges de la rangée n : $s_1 = 22$ et la raison vaut 3.
2. Résous $s_n = 85$, avec $s_n = 22 + 3(n-1)$.

CORRECTION

Le terme général —

$$s_n = 22 + 3(n-1)$$

L'équation —

$$22 + 3(n-1) = 85 \iff n - 1 = 21 \iff n = 22$$

De la rangée 1 à la rangée n, il y a $n - 1$ pas : on n'oublie pas d'ajouter la première rangée.

PIÈGES ANTICIPÉS

21 → 21 est le nombre d'augmentations de 3 sièges. Il y a une rangée de plus que d'augmentations.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

L'entraînement d'un coureur

Un coureur s'entraîne chaque jour. Le premier jour, il court 2 km, puis il augmente chaque jour sa distance de la même longueur. Le quinzième jour, il court 9 km. Calculer la distance qu'il court le trentième jour, en km.

Donner la distance en km.

Réponse attendue : 33/2 — aussi acceptées : 16.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les distances forment une suite arithmétique : $d_1 = 2$ et $d_{15} = 9$.
2. Du premier au quinzième jour, il y a 14 pas : calcule la raison.
3. Du premier au trentième jour, il y a 29 pas.

CORRECTION

La raison —

$$d_{15} = d_1 + 14r \iff 14r = 7 \iff r = 0{,}5$$

Le trentième jour —

$$d_{30} = 2 + 29 \times 0{,}5 = 16{,}5$$

Doubler le nombre de jours ne double pas la distance : on calcule la raison, puis on ajoute autant de pas que nécessaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → La distance n'est pas proportionnelle au nombre de jours : elle commence à 2 km et augmente de $0{,}5$ km par jour.

17 → Tu as ajouté 30 fois la raison : du premier au trentième jour il y a 29 pas.

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT

Deux suites se rencontrent

(U_n) est la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison 5, et (V_n) est la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 59$ et de raison -3. Déterminer l'entier naturel n pour lequel $U_n = V_n$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les deux termes généraux : $U_n = 3 + 5n$ et $V_n = 59 - 3n$.
2. Résous l'équation $U_n = V_n$.

CORRECTION

Les termes généraux —

$U_n = 3 + 5n \quad ; \quad V_n = 59 - 3n$

L'équation —

$3 + 5n = 59 - 3n \iff 8n = 56 \iff n = 7$

Vérification —

$U_7 = 38 = V_7$

Comparer deux suites arithmétiques revient à comparer deux expressions affines en n.

PIÈGES ANTICIPÉS

38 → 38 est la valeur commune $U_7 = V_7$. On demande l'indice n.

28 → Les deux suites vont en sens contraire : l'écart 56 diminue de $5 + 3 = 8$ à chaque pas, pas de 2.

EXERCICE 76 · DEFI

Une somme et un produit de termes

(U_n) est une suite arithmétique croissante telle que $U_3 + U_7 = 26$ et $U_4 \times U_6 = 160$. Calculer son premier terme U_0.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. U_3 et U_7 sont à égale distance de U_5 : la première égalité donne U_5.
2. Écris $U_4 = U_5 - r$ et $U_6 = U_5 + r$, et remplace dans le produit.
3. La suite est croissante : la raison est positive.

CORRECTION

Le terme du milieu —

$U_3 + U_7 = 2U_5 = 26 \iff U_5 = 13$

Le produit —

$(13 - r)(13 + r) = 160 \iff 169 - r^2 = 160 \iff r^2 = 9$

La raison — La suite est croissante, donc $r > 0$.

$r = 3$

Le premier terme —

$U_0 = U_5 - 5r = 13 - 15 = -2$

Exprimer tous les termes à partir du terme du milieu simplifie les calculs : la somme le donne, le produit donne r^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

28 → Avec $r = -3$ on trouve 28, mais la suite serait décroissante. Elle est croissante : $r = 3$.

13 → 13 est U_5. Il reste à reculer de 5 pas : $U_0 = U_5 - 5r$.

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Deux termes qui s'échangent

(U_n) est une suite arithmétique telle que $U_{10} = 25$ et $U_{25} = 10$. Calculer U_{35}.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule la raison à partir des deux termes donnés.
2. De U_{25} à U_{35}, il y a 10 pas.

CORRECTION

La raison —

$r = \frac{U_{25} - U_{10}}{25 - 10} = \frac{-15}{15} = -1$

U35 —

$U_{35} = U_{25} + 10r = 10 - 10 = 0$

On part du terme connu le plus proche : $U_{35} = U_{25} + (35 - 25)r$.

PIÈGES ANTICIPÉS

20 → Les termes diminuent de 25 à 10 : la raison est -1, pas 1.

35 → 35 est l'indice. Calcule $U_{35} = U_{25} + 10r$.

EXERCICE 78 · DEFI

Combien de termes dans un intervalle

(U_n) est la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison 9. Déterminer le nombre de termes de cette suite compris entre $1\,000$ et $2\,000$.

Donner seulement le nombre de termes.

Réponse attendue : 111

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'encadrement $1\,000 \leq 5 + 9n \leq 2\,000$.
2. Tu obtiens $\dfrac{995}{9} \leq n \leq \dfrac{1\,995}{9}$: cherche le plus petit et le plus grand entier qui conviennent.
3. D'un indice p à un indice q, il y a $q - p + 1$ termes.

CORRECTION

L'encadrement —

$1\,000 \leq 5 + 9n \leq 2\,000 \iff \frac{995}{9} \leq n \leq \frac{1\,995}{9}$

Les indices extrêmes — $\dfrac{995}{9} \approx 110{,}6$ et $\dfrac{1\,995}{9} \approx 221{,}7$.

$111 \leq n \leq 221$

Vérification —

$U_{111} = 1\,004 \quad ; \quad U_{221} = 1\,994$

Le nombre de termes —

$221 - 111 + 1 = 111$

On traduit la condition en encadrement de l'indice, puis on compte les entiers : de p à q, il y en a $q - p + 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`110` → $221 - 111 = 110$ compte les pas. Il y a un terme de plus que de pas.

`112` → $U_{110} = 995$ est en dessous de $1\,000$: le premier indice qui convient est 111.

EXERCICE 79 · BASE

La raison lue sur l'équation

Dans un repère, les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée U_n, où (U_n) est une suite arithmétique, sont sur la droite d'équation $y = -2x + 5$. Déterminer la raison de la suite (U_n).

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points A_n d'une suite arithmétique sont sur la droite de pente r et d'ordonnée à l'origine U_0.
2. Dans $y = ax + b$, la pente est a.

CORRECTION

La droite — Le point $A_n(n, U_n)$ est sur la droite, donc $U_n = -2n + 5$.

La raison —

$U_{n+1} - U_n = -2$

La raison d'une suite arithmétique est la pente de la droite qui porte ses points ; l'ordonnée à l'origine est U_0.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire U_0. La raison est la pente.

`2` → La droite descend : la pente, donc la raison, est négative.

EXERCICE 80 · BASE

L'équation de la droite

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$. Dans un repère, les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée U_n sont sur une droite D. Donner l'équation réduite de D, sous la forme $y = ax + b$.

Donner l'expression de y.

Réponse attendue : `x/2+3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La pente de D est la raison de la suite.
2. L'ordonnée à l'origine de D est le premier terme U_0.

CORRECTION

Le terme général —

$U_n = 3 + \frac{1}{2}\,n$

La droite — Le point $A_n(n, U_n)$ vérifie donc :

$y = \frac{1}{2}\,x + 3$

La droite qui porte les points d'une suite arithmétique a pour équation $y = rx + U_0$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3x+1/2` → Tu as échangé les rôles : la pente est la raison $\frac{1}{2}$, l'ordonnée à l'origine est $U_0 = 3$.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Deux points de la droite

Dans un repère, D est la droite qui contient les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée U_n, où (U_n) est une suite arithmétique. La droite D passe par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 7, et par le point d'abscisse 6 et d'ordonnée -1. Calculer U_{10}.

Réponse attendue : `-9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux points donnés sont A_2 et A_6 : $U_2 = 7$ et $U_6 = -1$.
2. La raison est la pente : l'écart des ordonnées divisé par l'écart des abscisses.
3. De U_6 à U_{10}, il y a 4 pas.

CORRECTION

Les termes connus —

$U_2 = 7 \quad ; \quad U_6 = -1$

La raison —

$r = \frac{-1-7}{6-2} = -2$

U10 —

$U_{10} = U_6 + 4r = -1 - 8 = -9$

Deux points de la droite donnent deux termes de la suite, donc sa raison : on prolonge ensuite pas à pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → La droite descend de 7 à -1 : la raison est négative, $r = -2$.

`-3` → La pente est l'écart des ordonnées divisé par l'écart des abscisses : $\frac{-8}{4}$, pas $\frac{4}{-8}$.

EXERCICE 82 · PRATIQUE

Le point d'ordonnée donnée

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = -4$ et de raison $\frac{3}{2}$. On la représente par les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée U_n. Déterminer l'abscisse du point A_n dont l'ordonnée vaut 41.

Donner la valeur de l'abscisse.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ordonnée de A_n est $U_n = -4 + \frac{3}{2}\,n$.
2. Résous l'équation $U_n = 41$.

CORRECTION

Le terme général —

$U_n = -4 + \frac{3}{2}\,n$

L'équation —

$-4 + \frac{3}{2}\,n = 41 \iff \frac{3}{2}\,n = 45 \iff n = 30$

L'abscisse d'un point A_n est l'indice n : on la trouve en résolvant $U_n =$ l'ordonnée donnée.

PIÈGES ANTICIPÉS

`57.5` → Tu as calculé U_{41} : 41 est l'ordonnée du point, pas son abscisse.

`82/3` → Tu as oublié le premier terme : $-4 + \frac{3}{2}\,n = 41$, donc $\frac{3}{2}\,n = 45$.

EXERCICE 83 · PRATIQUE

Des points alignés

Dans un repère, on a placé les six points A_0, A_1, ..., A_5 d'abscisse n et d'ordonnée U_n d'une suite arithmétique (U_n). Le point A_0 a pour ordonnée 6 et le point A_5 a pour ordonnée -4. Calculer l'ordonnée du point A_3.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De A_0 à A_5, combien de pas fait-on ?
2. L'ordonnée baisse de 10 en 5 pas : calcule la raison, puis U_3.

CORRECTION

La raison —

$$U_5 = U_0 + 5r \iff -4 = 6 + 5r \iff r = -2$$

U3 —

$$U_3 = 6 + 3 \times (-2) = 0$$

Six points alignés, de A_0 à A_5 : il y a cinq pas entre le premier et le dernier.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Tu as partagé l'écart -10 en 6 : il y a six points, mais seulement cinq pas de A_0 à A_5.

12 → L'ordonnée descend de 6 à -4 : la raison est négative.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

Une droite donnée par une équation

Dans un repère, les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée U_n d'une suite (U_n) sont tous sur la droite D d'équation $2x + 3y - 6 = 0$. Montrer que (U_n) est arithmétique et déterminer sa raison, en valeur exacte.

Donner la valeur exacte de la raison.

Réponse attendue : `-2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris l'équation de D sous la forme $y = ax + b$.
2. Le point $A_n(n, U_n)$ est sur D : exprime U_n en fonction de n.

CORRECTION

L'équation réduite —

$$2x + 3y - 6 = 0 \iff y = -\tfrac{2}{3}\,x + 2$$

Le terme général —

$$U_n = -\tfrac{2}{3}\,n + 2$$

La raison — U_n est de la forme $an + b$: la suite est arithmétique.

$r = -\frac{2}{3}$

Pour lire la pente, donc la raison, on met d'abord l'équation de la droite sous la forme réduite $y = ax + b$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2 / -2` → Le coefficient de x dans $2x + 3y - 6 = 0$ n'est pas la pente : isole d'abord y.

`2/3` → $3y = -2x + 6$: la pente est $-\frac{2}{3}$, négative.

`-0.67 / -0.66 / -0.7 / -0.667 / -0.666` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, sous forme de fraction.

EXERCICE 85 · RAISONNEMENT

Une droite qui coupe l'axe des abscisses

Dans un repère, D est la droite qui contient les points A_n d'abscisse n et d'ordonnée U_n, où (U_n) est une suite arithmétique. On sait que $U_1 = 5$ et que la droite D coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $3{,}5$. Calculer U_0.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La droite passe par le point A_1, d'abscisse 1 et d'ordonnée 5, et par le point d'abscisse $3{,}5$ et d'ordonnée 0.
2. La pente de D est la raison de la suite.
3. Recule d'un pas à partir de U_1.

CORRECTION

La pente —

$r = \frac{0-5}{3{,}5-1} = \frac{-5}{2{,}5} = -2$

U0 —

$U_0 = U_1 - r = 5 + 2 = 7$

Tout point de la droite, même s'il n'est pas un point A_n, sert à calculer la pente, donc la raison.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-2` → -2 est la raison. On demande $U_0 = U_1 - r$.

`3` → Pour reculer d'un pas, on retranche la raison : $U_0 = 5 - (-2)$.

EXERCICE 86 · RAISONNEMENT

L'aire entre deux droites

Dans un repère orthonormé, on représente la suite arithmétique (U_n) de premier terme 1 et de raison 2 par les points $A_n(n, U_n)$, et la suite arithmétique (V_n) de premier terme 9 et de raison 1 par les points $B_n(n, V_n)$. Calculer l'aire du quadrilatère $A_0A_4B_4B_0$, sans écrire l'unité.

Donner l'aire, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule les coordonnées des quatre sommets : $A_0(0,1)$, $B_0(0,9)$, puis A_4 et B_4.
2. Les côtés $[A_0B_0]$ et $[A_4B_4]$ sont verticaux, donc parallèles : le quadrilatère est un trapèze.
3. Ses bases mesurent $V_0 - U_0$ et $V_4 - U_4$, et sa hauteur vaut 4.

CORRECTION

Les sommets —

$A_0(0,1)$; $A_4(4,9)$; $B_4(4,13)$; $B_0(0,9)$

Les bases —

$A_0B_0 = 9 - 1 = 8$; $A_4B_4 = 13 - 9 = 4$

L'aire du trapèze — La hauteur est la distance entre les deux verticales, 4.

$\frac{(8+4)\times 4}{2} = 24$

Les deux suites sont représentées par des points sur deux droites ; l'écart vertical $V_n - U_n = 8 - n$ diminue de 1 à chaque pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

48 → Tu as oublié de diviser par 2 : l'aire d'un trapèze est la demi-somme des bases fois la hauteur.

32 → Ce n'est pas un rectangle : les deux bases verticales mesurent 8 et 4.

EXERCICE 87 · DEFI

Une droite et un triangle

Dans un repère orthonormé, D est la droite qui contient les points $A_n(n, U_n)$ d'une suite arithmétique (U_n) de raison entière $r < 0$, avec $U_0 > 0$. La droite D passe par le point A_3 d'ordonnée 4, et elle forme avec les deux axes du repère un triangle d'aire 25. Calculer U_0.

Réponse attendue : 10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $U_0 = 4 - 3r$: c'est l'ordonnée à l'origine de D. Où D coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
2. Le triangle a pour côtés de l'angle droit U_0 et $-\dfrac{U_0}{r}$: écris que son aire vaut 25.
3. Tu obtiens $9r^2 + 26r + 16 = 0$: garde la solution entière.

CORRECTION

Les intersections — D a pour équation $y = rx + U_0$, avec $U_0 = 4 - 3r$. Elle coupe l'axe des abscisses en $x = -\dfrac{U_0}{r}$, positif puisque $r < 0$.

L'aire —

$\frac{1}{2} \times U_0 \times \left(-\frac{U_0}{r}\right) = 25 \iff (4 - 3r)^2 = -50r$

L'équation —

$9r^2 + 26r + 16 = 0 \iff r = -2$ ou $r = -\frac{8}{9}$

La raison entière —

$r = -2 \quad ; \quad U_0 = 4 + 6 = 10$

La droite d'une suite arithmétique a pour équation $y = rx + U_0$: ses points d'intersection avec les axes s'expriment avec r et U_0.

PIÈGES ANTICIPÉS

`20/3` → $\frac{20}{3}$ correspond à $r = -\frac{8}{9}$, qui n'est pas entier. L'énoncé impose une raison entière.

`-2` → -2 est la raison. On demande $U_0 = 4 - 3r$.

EXERCICE 88 · BASE

La somme des soixante premiers entiers

Calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 59 + 60$.

Réponse attendue : `1830`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la formule $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Ici $n = 60$.

CORRECTION

La formule —

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Le calcul —

$S = \frac{60 \times 61}{2} = 1\,830$

La somme des n premiers entiers naturels non nuls vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3660` → Tu as oublié de diviser par 2 : $S = \frac{60 \times 61}{2}$.

`1770` → Tu as calculé $\frac{59 \times 60}{2}$. Avec $n = 60$, c'est $\frac{60 \times 61}{2}$.

EXERCICE 89 · PRATIQUE

Compter les termes par leurs indices

(U_n) est une suite arithmétique. Déterminer le nombre de termes de la somme $S = U_{13} + U_{14} + \ldots + U_{60}$.

Donner seulement le nombre.

Réponse attendue : `48`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De l'indice 13 à l'indice 60, on compte les indices.
2. De l'indice p à l'indice n, il y a $n - p + 1$ termes.

CORRECTION

La règle — De l'indice p à l'indice n, il y a $n - p + 1$ termes.

Le calcul —

$$60 - 13 + 1 = 48$$

Le nombre de termes se lit sur les indices : $n - p + 1$, et non $n - p$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`47` → $60 - 13 = 47$ compte les pas. Il y a un terme de plus que de pas.

`60` → 60 est le dernier indice. La somme commence à l'indice 13, pas à 1.

EXERCICE 90 · BASE

La somme des nombres pairs

Calculer la somme $P = 2 + 4 + 6 + \ldots + 98 + 100$ des nombres pairs de 2 à 100.

Réponse attendue : `2550`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C'est une suite arithmétique de raison 2 : compte d'abord ses termes.
2. Applique la formule $S = n \times \dfrac{a + b}{2}$, avec a le premier terme et b le dernier.

CORRECTION

Le nombre de termes —

$$\frac{100-2}{2} + 1 = 50$$

La somme —

$$P = 50 \times \frac{2+100}{2} = 50 \times 51 = 2\,550$$

Nombre de termes, premier terme, dernier terme : la formule $S = n \times \dfrac{a + b}{2}$ fait le reste.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5050` → $5\,050$ est la somme de tous les entiers de 1 à 100. Ici on ne garde que les pairs.

`1275` → $1\,275 = 1 + 2 + \ldots + 50$. Or $P = 2 \times (1 + 2 + \ldots + 50)$.

`5100` → Tu as oublié de diviser par 2 : $P = 50 \times \dfrac{2 + 100}{2}$.

EXERCICE 91 · PRATIQUE

Les vingt premiers termes

(U_n) est la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison 4. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{19}$ de ses vingt premiers termes.

Réponse attendue : `820`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule le dernier terme de la somme, U_{19}.
2. La somme compte 20 termes : applique $S = n \times \dfrac{a+b}{2}$.

CORRECTION

Le dernier terme —

$U_{19} = 3 + 19 \times 4 = 79$

La somme —

$S = 20 \times \frac{3+79}{2} = 20 \times 41 = 820$

Les vingt premiers termes vont de U_0 à U_{19} : le dernier terme a pour indice 19, pas 20.

PIÈGES ANTICIPÉS

`903` → Tu as additionné jusqu'à U_{20} : 21 termes. Les vingt premiers vont de U_0 à U_{19}.

`1640` → Tu as oublié de diviser par 2 : $S = 20 \times \dfrac{3+79}{2}$.

EXERCICE 92 · PRATIQUE

Une somme de fractions

Calculer la somme $S = \dfrac{1}{3} + 1 + \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{3} + \ldots + 13$, en valeur exacte.

Donner la valeur exacte, sous forme de fraction.

Réponse attendue : `400/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris tous les termes avec le dénominateur 3 : $\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{3}, \dfrac{5}{3}, \ldots$ La raison vaut $\dfrac{2}{3}$.
2. Compte les termes : $13 = \dfrac{39}{3}$, et les numérateurs sont les impairs de 1 à 39.
3. Applique ensuite $S = n \times \dfrac{a+b}{2}$.

CORRECTION

La raison —

$1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

Le nombre de termes —

$\frac{13-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + 1 = 19 + 1 = 20$

La somme —

$S = 20 \times \frac{\frac{1}{3}+13}{2} = 10 \times \frac{40}{3} = \frac{400}{3}$

Avec des fractions, la méthode reste la même : raison, nombre de termes, puis formule de la somme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`380/3` → Tu as pris 19 termes : 19 est le nombre de pas, il y a 20 termes.

`133.33 / 133.3 / 133 / 133.34` → C'est une valeur approchée : on demande la valeur exacte, sous forme de fraction.

EXERCICE 93 · PRATIQUE

Une somme qui descend sous zéro

Calculer la somme $S = 40 + 37 + 34 + \ldots + (-17) + (-20)$.

Réponse attendue : `210`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les termes forment une suite arithmétique de raison -3.
2. Compte les termes : de 40 à -20, l'écart est 60, parcouru par pas de 3.

CORRECTION

Le nombre de termes —

$\frac{40-(-20)}{3} + 1 = 20 + 1 = 21$

La somme —

$S = 21 \times \frac{40+(-20)}{2} = 21 \times 10 = 210$

Les termes négatifs compensent une partie des positifs ; la formule $S = n \times \frac{a+b}{2}$ s'applique avec le signe du dernier terme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`200` → Tu as pris 20 termes : c'est le nombre de pas. Il y a 21 termes.

`630` → Le dernier terme est -20 : $a + b = 40 + (-20) = 20$, pas 60.

EXERCICE 94 · PRATIQUE

La somme des premiers impairs

Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n la somme $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ des n premiers nombres impairs.

Écrire seulement l'expression, en fonction de n.

Réponse attendue : `n^2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les impairs forment une suite arithmétique de raison 2. La somme compte n termes.
2. Applique $S = n \times \frac{a+b}{2}$, avec $a = 1$ et $b = 2n - 1$.

CORRECTION

Le nombre de termes —

$\frac{(2n-1)-1}{2} + 1 = n$

La somme —

$S = n \times \frac{1+(2n-1)}{2} = n \times n = n^2$

La somme des n premiers impairs est le carré n^2 : on peut le vérifier avec $1 + 3 + 5 = 9$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2n^2-n` → Tu as multiplié le nombre de termes par le dernier terme : il faut la demi-somme du premier et du dernier, $\frac{1 + (2n - 1)}{2}$.

`2n^2` → Tu as oublié de diviser par 2 : $\frac{1 + (2n - 1)}{2} = n$.

EXERCICE 95 · PRATIQUE

Une pile de rondins

Des rondins de bois sont empilés par couches : la couche du bas compte 20 rondins, chaque couche compte un rondin de moins que celle du dessous, et la couche du haut compte 6 rondins. Calculer le nombre total de rondins de la pile.

Donner seulement le nombre de rondins.

Réponse attendue : `195`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les nombres de rondins par couche forment une suite arithmétique de raison -1, de 20 à 6.
2. Compte d'abord les couches, puis applique la formule de la somme.

CORRECTION

Le nombre de couches —

$20 - 6 + 1 = 15$

Le total —

$15 \times \frac{20+6}{2} = 15 \times 13 = 195$

Pour une pile, la somme des couches est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`182` → Tu as compté 14 couches : de 20 à 6 il y a 14 pas, donc 15 couches.

`210` → $210 = 1 + 2 + \ldots + 20$: la pile s'arrête à la couche de 6 rondins.

EXERCICE 96 · RAISONNEMENT

Retrouver le nombre de termes

Déterminer l'entier naturel non nul n tel que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 465$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace la somme par $\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Tu obtiens $n(n+1) = 930$: cherche deux entiers consécutifs dont le produit vaut 930, ou résous l'équation du second degré.

CORRECTION

L'équation —

$\frac{n(n+1)}{2} = 465 \iff n^2 + n - 930 = 0$

Les solutions — Le discriminant vaut $1 + 3\,720 = 3\,721 = 61^2$.

$n = \frac{-1+61}{2} = 30 \quad \text{ou} \quad n = \frac{-1-61}{2} = -31$

L'entier naturel —

$n = 30$

Connaître la somme permet de retrouver le nombre de termes : on résout $\frac{n(n+1)}{2} = S$ et on garde la solution positive.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-31` → -31 est solution de l'équation, mais n est un entier naturel non nul.

`930` → 930 est $n(n+1)$. Il reste à trouver n : $30 \times 31 = 930$.

EXERCICE 97 · RAISONNEMENT

Quand la somme devient positive

(U_n) est la suite arithmétique de premier terme $U_0 = -10$ et de raison 3. On note $S_N = U_0 + U_1 + \ldots + U_{N-1}$ la somme de ses N premiers termes. Déterminer le plus petit entier $N \geq 1$ tel que $S_N > 0$.

Donner la valeur de N.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le dernier terme de S_N est $U_{N-1} = -10 + 3(N-1)$.
2. Applique la formule de la somme : $S_N = N \times \frac{U_0 + U_{N-1}}{2}$.
3. Tu obtiens $S_N = \frac{N(3N-23)}{2}$; comme $N > 0$, étudie le signe de $3N - 23$.

CORRECTION

Le dernier terme —

$U_{N-1} = -10 + 3(N-1) = 3N - 13$

La somme —

$S_N = N \times \frac{-10+3N-13}{2} = \frac{N(3N-23)}{2}$

Le signe — $N > 0$, donc $S_N > 0$ équivaut à $3N - 23 > 0$.

$N > \frac{23}{3} \approx 7{,}67$

Vérification —

$S_7 = -7 \quad ; \quad S_8 = 4$

Le plus petit entier —

$N = 8$

La somme reste négative tant que les termes négatifs l'emportent : elle devient positive bien après le premier terme positif.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → $U_4 = 2$ est le premier terme positif, mais la somme est encore négative : $S_5 = -20$.

7 → $S_7 = -7$ est encore négative : il faut $N > \dfrac{23}{3}$, soit $N = 8$.

EXERCICE 98 · DEFI

Une citerne qui se vide

Une citerne contient 560 litres d'eau. On l'ouvre : pendant la première minute, il s'écoule 50 litres, puis à chaque minute il s'écoule 2 litres de moins que pendant la minute précédente. Déterminer au bout de combien de minutes la citerne est vide.

Donner la durée en minutes.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les volumes écoulés chaque minute forment une suite arithmétique de premier terme 50 et de raison -2.
2. Au bout de n minutes, le volume écoulé est $n \times \dfrac{50 + (52 - 2n)}{2} = n(51 - n)$.
3. Résous $n(51 - n) = 560$: la citerne se vide la première fois que le total atteint 560 litres.

CORRECTION

La minute numéro k —

$v_k = 50 - 2(k - 1) = 52 - 2k$

Le volume écoulé —

$n \times \frac{50+(52-2n)}{2} = n(51 - n)$

L'équation — Le discriminant vaut $2\,601 - 2\,240 = 361 = 19^2$.

$n^2 - 51n + 560 = 0 \iff n = 16$ ou $n = 35$

La bonne solution — La citerne est vide dès que 560 litres se sont écoulés : on ne continue pas après. D'ailleurs pour $n = 35$, il faudrait des débits négatifs.

$n = 16$

Une équation du second degré a deux solutions : la situation concrète dit laquelle garder.

PIÈGES ANTICIPÉS

35 → Après 26 minutes, le débit deviendrait nul puis négatif : 35 n'a pas de sens. Et la citerne est déjà vide avant.

11.2 / 56/5 → Le débit n'est pas constant : il diminue de 2 litres chaque minute.

EXERCICE 99 · DEFI

Les entiers qui ne sont pas multiples de trois

Calculer la somme de tous les entiers naturels compris entre 1 et 300 qui ne sont pas des multiples de 3.

Réponse attendue : `30000`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord la somme de tous les entiers de 1 à 300.
2. Retranche ensuite la somme des multiples de 3 : $3 + 6 + \ldots + 300$, c'est-à-dire $3 \times (1 + 2 + \ldots + 100)$.

CORRECTION

Tous les entiers —

$$1 + 2 + \ldots + 300 = \frac{300 \times 301}{2} = 45\,150$$

Les multiples de 3 —

$$3 + 6 + \ldots + 300 = 3 \times \frac{100 \times 101}{2} = 15\,150$$

La différence —

$$45\,150 - 15\,150 = 30\,000$$

Quand les termes à additionner ne forment pas une seule suite arithmétique, on passe par le complémentaire : tout, moins ce qu'on exclut.

PIÈGES ANTICIPÉS

`15150` → $15\,150$ est la somme des multiples de 3. On demande la somme des autres entiers.

`45150` → $45\,150$ est la somme de tous les entiers de 1 à 300 : il reste à retirer les multiples de 3.

EXERCICE 100 · DEFI

Une somme de cubes

On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Calculer $S = 11^3 + 12^3 + \ldots + 20^3$.

Réponse attendue : `41075`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. S est la différence entre la somme des cubes de 1 à 20 et celle de 1 à 10.
2. $1 + 2 + \ldots + 20 = 210$ et $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$.

CORRECTION

De 1 à 20 —

$$1^3 + \ldots + 20^3 = 210^2 = 44\,100$$

De 1 à 10 —

$$1^3 + \ldots + 10^3 = 55^2 = 3\,025$$

La différence —

$S = 44\,100 - 3\,025 = 41\,075$

La formule ne s'applique qu'à une somme qui commence à 1^3 : on écrit S comme une différence de deux telles sommes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`24025` → Tu as calculé $(11 + 12 + \ldots + 20)^2$. La formule ne vaut que pour une somme qui commence à 1 : passe par une différence.

`155` → $155 = 11 + 12 + \ldots + 20$: ce sont les cubes qu'il faut additionner.

`44100` → $44\,100$ est la somme des cubes de 1 à 20. La somme demandée commence à 11^3.

EXERCICE 101 · RAISONNEMENT

Un nombre triangulaire qui dépasse mille

Le n-ième nombre triangulaire est $T_n = 1 + 2 + \ldots + n$. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $T_n > 1\,000$.

Donner la valeur de n.

Réponse attendue : 45

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$: l'inégalité devient $n(n+1) > 2\,000$.
2. Cherche un ordre de grandeur : n^2 est proche de $2\,000$, et $\sqrt{2\,000} \approx 44{,}7$.
3. Teste les entiers voisins.

CORRECTION

L'inégalité —

$\frac{n(n+1)}{2} > 1\,000 \iff n(n+1) > 2\,000$

Les entiers voisins —

$44 \times 45 = 1\,980 \quad ; \quad 45 \times 46 = 2\,070$

Les nombres triangulaires —

$T_{44} = 990 \quad ; \quad T_{45} = 1\,035$

Le plus petit entier —

$n = 45$

La suite (T_n) est croissante : on encadre le seuil entre deux termes consécutifs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`44` → $T_{44} = \dfrac{44 \times 45}{2} = 990$: il ne dépasse pas encore $1\,000$.

`1035` → $1\,035$ est la valeur de T_{45}. On demande l'entier n.

EXERCICE 102 · DEFI

La raison cachée dans une somme

Une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est telle que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la somme de ses n premiers termes vaut $U_1 + U_2 + \ldots + U_n = 2n^2 + 3n$. Montrer que (U_n) est arithmétique et déterminer sa raison.

Donner seulement la raison.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Note $S_n = 2n^2 + 3n$. Pour $n \geq 2$, $U_n = S_n - S_{n-1}$.
2. Calcule $S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1)$, puis la différence.
3. Vérifie que la formule trouvée donne aussi $U_1 = S_1$.

CORRECTION

Le premier terme —

$U_1 = S_1 = 2 + 3 = 5$

Pour n ≥ 2 —

$U_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + 3n) - (2n^2 - n - 1) = 4n + 1$

Pour tout n ≥ 1 — $4 \times 1 + 1 = 5 = U_1$: la formule vaut aussi pour $n = 1$.

La raison —

$U_{n+1} - U_n = 4$

Un terme est la différence de deux sommes consécutives : $U_n = S_n - S_{n-1}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → 5 est le premier terme U_1. La raison est $U_2 - U_1$.

2 → 2 est le coefficient de n^2 dans la somme, pas la raison. Calcule $U_n = S_n - S_{n-1}$.

9 → 9 est le deuxième terme U_2. La raison est l'écart $U_2 - U_1$.

EXERCICE 103 · DEFI

La course des deux cyclistes

Deux cyclistes partent en même temps du même point, sur la même route. Le premier roule à vitesse constante et parcourt 15 km chaque heure. Le second parcourt 10 km pendant la première heure, puis, chaque heure, 1 km de plus que l'heure précédente. Déterminer au bout de combien d'heures le second cycliste rattrape le premier.

Donner la durée en heures.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Au bout de n heures, le premier a parcouru $15n$ km.
2. Les distances du second, heure par heure, forment une suite arithmétique : $10, 11, 12, \ldots$ Calcule la somme des n premières.
3. Écris l'égalité des deux distances totales, puis simplifie par n.

CORRECTION

Le premier cycliste —

$15n$

Le second cycliste —

$n \times \frac{10+(10+n-1)}{2} = \frac{n(19+n)}{2}$

L'égalité — n n'est pas nul : on simplifie par n.

$\frac{n(19+n)}{2} = 15n \iff 19+n = 30 \iff n = 11$

Vérification —

$15 \times 11 = 165 \quad ; \quad 10+11+\ldots+20 = 165$

Rattraper, c'est avoir parcouru la même distance totale : on compare des sommes, pas les distances d'une seule heure.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Au bout de 6 heures, le second roule aussi vite que le premier pendant l'heure, mais il est encore en retard : il faut comparer les distances totales.

12 → Vérifie avec $n = 11$: $10+11+\ldots+20 = 165 = 15 \times 11$. Il a déjà rattrapé.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI