– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Suites géométriques

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Lyoum bech nfassrou m3a b3adhna chapitre jdid : les suites géométriques. Bech nchoufou chnowa hiya suite géométrique, w kifech na3rfou la raison mte3ha. W mba3d net3allmou le terme général, w la somme mta3 des termes consécutifs. Yalla, nabdew.

عسلامة ! ليوم باش نفسّرو مع بعضنا chapitre جديد : les suites géométriques . باش نشوفو شنوّة هي suite géométrique ، w كيفاش نعرفو la raison متاعها . w مبعّد نتعلّمو le terme général ، w la somme متاع des termes consécutifs . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Aujourd'hui, on va expliquer ensemble un nouveau chapitre : les suites géométriques. Nous verrons ce qu'est une suite géométrique, et comment reconnaître sa raison. Ensuite, nous apprendrons le terme général, et la somme de termes consécutifs. Allez, on commence.

Un loyer qui augmente de 5 % par an, un capital placé à intérêts composés, une aire divisée par deux à chaque étape : dans ces situations, on passe d'un nombre au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre. Ce sont des suites **géométriques**.

Ce chapitre apprend à les reconnaître, à calculer n'importe lequel de leurs termes sans passer par tous les autres, et à additionner d'un seul coup leurs termes consécutifs.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Reconnaître une suite géométrique et déterminer sa raison

  > Reconnaître une suite géométrique et déterminer sa raison.
  > *Reconnaître une suite géométrique et déterminer sa raison.*

- Utiliser les formules $V_n = V_0 \times q^n$ et $V_n = V_p \times q^{n-p}$

> Utiliser les formules V indice n égale V indice zéro fois q puissance n, et V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p).
> *Utiliser les formules V indice n égale V indice zéro fois q puissance n, et V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p).*

- Retrouver la raison ou l'indice à partir de termes connus
  > Retrouver la raison ou l'indice à partir de termes connus.
  > *Retrouver la raison ou l'indice à partir de termes connus.*
- Lire le premier terme et la raison d'une suite géométrique sur un graphique
  > Lire le premier terme et la raison d'une suite géométrique sur un graphique.
  > *Lire le premier terme et la raison d'une suite géométrique sur un graphique.*
- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique
  > Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
  > *Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.*

---

1. ACTIVITÉ

Pour comprendre : un loyer qui augmente

CE QU'IL DIT

Dar tekrat fi deux mille cinq b deux cents dinars fel chhar, w koll 3am el kra yzid cinq pour cent. Rodd belek : ki nzidou cinq pour cent, ma3neha nadhrbou fi un virgule zéro cinq. Fi deux mille six : deux cents fois un virgule zéro cinq, ya3ni deux cent dix dinars. Fi deux mille sept : deux cent vingt virgule cinq. W fi deux mille huit : deux cent trente-et-un virgule cinq cent vingt-cinq. Bech net3addew men 3am lelli ba3dou, nadhrbou dima fi nafs le nombre. W fi deux mille neuf, el kra yfout deux cent quarante dinars.

دار تكرات في deux mille cinq بـ deux cents dinars في الشهر ، w كل عام الكراء يزيد cinq pour cent . ردّ بالك :
كي نزيدو cinq pour cent ، معناها نضربو في un virgule zéro cinq . في deux mille six : deux cents fois un
في deux mille sept : deux cent vingt virgule cinq . w في . deux cent dix dinars يعني ، virgule zéro cinq
باش نتعدّاو من عام للّي بعدو ، نضربو . deux mille huit : deux cent trente-et-un virgule cinq cent vingt-cinq
ديما في نفس الـ w . nombre في deux mille neuf ، الكراء يفوت deux cent quarante dinars .

Une maison est louée en deux mille cinq à deux cents dinars par mois, et chaque année le loyer augmente de cinq pour cent. Attention : augmenter de cinq pour cent, cela veut dire multiplier par un virgule zéro cinq. En deux mille six : deux cents fois un virgule zéro cinq, donc deux cent dix dinars. En deux mille sept : deux cent vingt virgule cinq. Et en deux mille huit : deux cent trente-et-un virgule cinq cent vingt-cinq. Pour passer d'une année à la suivante, on multiplie toujours par le même nombre. Et en deux mille neuf, le loyer dépasse deux cent quarante dinars.

Une maison a été louée, au 1er janvier 2005, à 200 dinars par mois. Le contrat de location prévoit une augmentation annuelle de $5\,\%$ du loyer.

1. Détermine le loyer mensuel de cette maison en 2006, en 2007 et en 2008.

2. En quelle année le loyer dépassera-t-il 240 dinars ?

EXEMPLE TRAITÉ

Le loyer est de 200 dinars par mois en 2005 et il augmente de $5\,\%$ chaque année. Calcule le loyer en 2006, en 2007 et en 2008, puis trouve l'année où il dépasse 240 dinars.

Augmenter de 5 pour cent — Augmenter un nombre de $5\,\%$, c'est le multiplier par $1{,}05$.

$x + \frac{5}{100}\,x = 1{,}05 \times x$

En 2006 —

$200 \times 1{,}05 = 210$

En 2007 —

$210 \times 1{,}05 = 220{,}5$

En 2008 —

$220{,}5 \times 1{,}05 = 231{,}525$

En 2009 — On continue : le loyer dépasse 240 dinars pour la première fois.

$231{,}525 \times 1{,}05 = 243{,}10125 > 240$

Conclusion — On passe du loyer d'une année à celui de l'année suivante en multipliant toujours par le même nombre, $1{,}05$.

210 ; $220{,}5$; $231{,}525$; le loyer dépasse 240 dinars en 2009

À ne pas faire : Le loyer augmente de 10 dinars chaque année : 200 ; 210 ; 220 ; 230 — 200 ; 210 ; $220{,}5$; $231{,}525$. Les $5\,\%$ se calculent chaque année sur le **dernier** loyer, pas sur celui de 2005 : l'augmentation grandit d'une année à l'autre.

2. ACTIVITÉ

Pour comprendre : des carrés emboîtés

CE QU'IL DIT

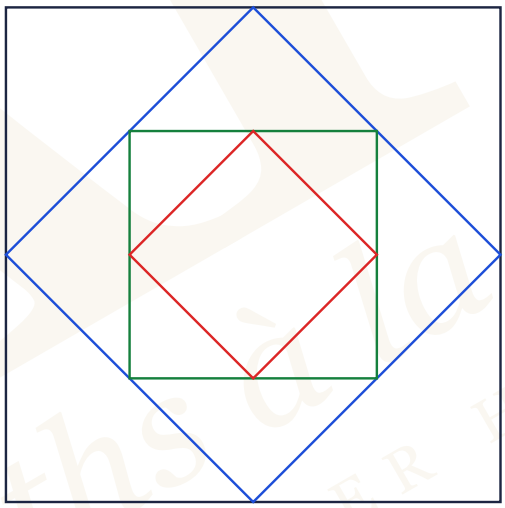
Chouf la figure : carré, le côté mte3ou un. Ne5dhou les milieux mta3 les côtés w norbtouhom : yatla3lna carré jdid fi wostou. W n3awdou nafs el 5edma koll marra. Le carré el jdid, l'aire mte3ou hiya el noss mta3 l'aire mta3 le carré elli sab9ou. Idhan les aires houma : un, un demi, un quart, un huitième, un seizième. Koll marra nadhrbou fi un demi. W l'aire mta3 le douzième carré hiya un demi puissance onze, ya3ni un sur deux mille quarante-huit. W ma fammech carré l'aire mte3ou un dixième, 5ater un dixième bin un huitième w un seizième.

شوف الـ le côté ، figure : carré متاعو un . ناخذو les milieux متاع les côtés w نربطوهم : يطلعلنا carré جديد
في وسطو . w نعاودو نفس الخدمة كل مرّة . الـ carré الجديد ، l'aire متاعو هي النصّ متاع l'aire متاع الـ carré اللي
سبقو . إذن les aires هوما : un ، un demi ، un quart ، un huitième ، un seizième . كل مرّة نضربو في un demi
un sur deux mille quarante-huit . w يعني ، un demi puissance onze هي le douzième carré متاع . w l'aire
ما فمّاش carré l'aire متاعو un dixième ، خاطر un dixième بين un huitième w un seizième .

Regarde la figure : un carré de côté un. On prend les milieux de ses côtés et on les relie : on obtient un nouveau carré à l'intérieur. Et on recommence à chaque fois. L'aire du nouveau carré est la moitié de l'aire du carré précédent. Donc les aires sont : un, un demi, un quart, un huitième, un seizième. À chaque fois, on multiplie par un demi. Et l'aire du douzième carré est un demi puissance onze, c'est-à-dire un sur deux mille quarante-huit. Et aucun carré n'a pour aire un dixième, car un dixième est entre un huitième et un seizième.

On construit un carré de côté 1, puis on en construit un second en reliant les milieux des côtés du premier. En répétant ce procédé, on trace à chaque fois un nouveau carré.

1. Détermine l'aire du deuxième carré, du troisième carré, du quatrième carré et du cinquième carré.
2. Quelle est l'aire du douzième carré ?
3. Parmi ces carrés, y en a-t-il un dont l'aire est le dixième de l'aire du carré initial ?



Chaque carré relie les milieux des côtés du précédent.

Quatre carrés emboîtés. Le premier, le plus grand, a pour côté 1. Le deuxième a pour sommets les milieux des côtés du premier : il est posé sur la pointe, à l'intérieur du premier. Le troisième a pour sommets les milieux des côtés du deuxième : il est de nouveau droit, à l'intérieur du deuxième. Le quatrième a pour sommets les milieux des côtés du troisième. Chaque carré occupe exactement la moitié de l'aire du précédent.

EXEMPLE TRAITÉ

Le premier carré a pour côté 1. Chaque nouveau carré relie les milieux des côtés du précédent. Calcule l'aire du deuxième au cinquième carré, puis celle du douzième, et dis si l'un des carrés a pour aire $\frac{1}{10}$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

D'un carré au suivant — Si un carré a pour côté c, le côté du carré suivant est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés mesurent $\frac{c}{2}$. Son aire est le carré de cette hypoténuse.

$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{2}$

Les premières aires — L'aire est divisée par 2 à chaque étape. Voici les aires, du premier au cinquième carré.

$1 \quad ; \quad \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{1}{8} \quad ; \quad \frac{1}{16}$

Le douzième carré — Du premier au douzième carré, on a multiplié onze fois par $\frac{1}{2}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048}$

Le dixième ? — Les aires diminuent, et $\frac{1}{10}$ tombe entre deux aires qui se suivent : aucun carré n'a cette aire.

$\frac{1}{16} < \frac{1}{10} < \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; douzième carré : $\frac{1}{2048}$; aucun carré d'aire $\frac{1}{10}$

À ne pas faire : L'aire du douzième carré est $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ — C'est $\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048}$. Le premier carré a pour aire 1 : pour arriver au douzième, on ne multiplie que **onze** fois par $\frac{1}{2}$.

3. ACTIVITÉ

Pour comprendre : les triangles complémentaires

CE QU'IL DIT

Chouf la figure : triangle A B C, le périmètre mte3ou P indice zéro. Norbtou les milieux mta3 les côtés, yatla3lna triangle sghir fi wostou, nsammiwah le triangle complémentaire. Koll côté mte3ou houwa el noss mta3 côté mta3 A B C. Idhan P indice un égale un demi fois P indice zéro. W ki n3awdou : P indice deux égale un demi fois P indice un, w hakka dima. Koll marra nadhrbou fi un demi. Ken P indice zéro égale trois cent quatre-vingt-quatre : P indice un égale cent quatre-vingt-douze, P indice deux égale quatre-vingt-seize, w P indice cinq égale douze.

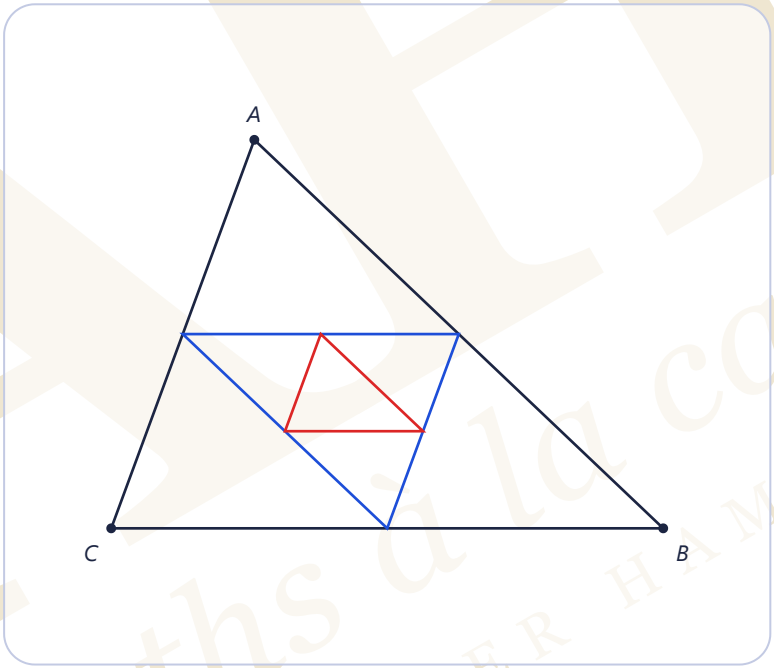
شوف الـ figure : triangle A B C ، le périmètre متاعو P indice zéro . نربطو les milieux متاع les côtés ، يطلعلنا triangle صغير في وسطو ، نسمّيوه le triangle complémentaire . كل côté متاعو هو النصّ متاع côté A B متاع C . إذن w ، هكّا ديما indice un P indice un égale un demi fois P indice zéro . كي نعاودو P indice deux égale un demi fois P : كل مرّة نضربو في un demi . كان P indice zéro égale trois cent quatre-vingt-quatre ، w P indice cinq égale douze ، P indice deux égale quatre-vingt-seize ، P indice un égale cent quatre-vingt-douze :

Regarde la figure : un triangle A B C, de périmètre P indice zéro. On relie les milieux de ses côtés : on obtient un petit triangle à l'intérieur, qu'on appelle le triangle complémentaire. Chacun de ses côtés est la moitié d'un côté de A B C. Donc P indice un égale un demi fois P indice zéro. Et quand on recommence : P indice deux égale un demi fois P indice un, et ainsi de suite. À chaque fois, on multiplie par un demi. Si P

indice zéro égale trois cent quatre-vingt-quatre : P indice un égale cent quatre-vingt-douze, P indice deux égale quatre-vingt-seize, et P indice cinq égale douze.

Soit ABC un triangle. On désigne par P_0 son périmètre et par t_1 le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle ABC. On dit que t_1 est le **triangle complémentaire** de ABC.

1. Soit P_1 le périmètre du triangle t_1. Exprime P_1 en fonction de P_0.
2. Soient t_2 le triangle complémentaire de t_1 et t_3 le triangle complémentaire de t_2, de périmètres P_2 et P_3. Exprime P_2 en fonction de P_1 et P_3 en fonction de P_2.
3. Pour un entier naturel non nul n, on désigne par t_n le triangle complémentaire de t_{n-1}, et par P_n et P_{n-1} leurs périmètres. Exprime P_n en fonction de P_{n-1}.
4. On donne $P_0 = 384$. Calcule P_1, P_2 et P_5.



Le triangle complémentaire joint les milieux des côtés.

Un triangle ABC, avec A en haut, C en bas à gauche et B en bas à droite. Au palier 2, on joint les milieux de ses trois côtés : on obtient un triangle plus petit, t1, à l'intérieur de ABC ; chacun de ses côtés est parallèle à un côté de ABC et mesure la moitié de ce côté. Au palier 3, on joint les milieux des côtés de t1 : on obtient le triangle t2, encore deux fois plus petit, à l'intérieur de t1.

POUR TOUT ENTIER NATUREL NON NUL N

$$P_n = \frac{1}{2} \times P_{n-1}$$

EXEMPLE TRAITÉ

t_1 est le triangle des milieux des côtés de ABC, t_2 celui des milieux des côtés de t_1, et ainsi de suite. Exprime P_n en fonction de P_{n-1}, puis calcule P_1, P_2 et P_5 quand $P_0 = 384$.

> t_1 est le triangle des milieux des côtés de ABC, t_2 celui des milieux des côtés de t_1, et ainsi de suite. Exprime P_n en fonction de P indice (n moins un), puis calcule P_1, P_2 et P_5 quand $P_0 = 384$.

> t indice 1 est le triangle des milieux des côtés de A B C, t indice 2 celui des milieux des côtés de t indice 1, et ainsi de suite. Exprime P indice n en fonction de P indice (n moins un), puis calcule P indice 1, P indice 2 et P indice 5 quand P indice 0 égale 384.

Les milieux — Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté. Chaque côté de t_1 est donc la moitié d'un côté de ABC.

$P_1 = \frac{1}{2} \times P_0$

À chaque étape — Le même raisonnement vaut d'un triangle au suivant.

$P_2 = \frac{1}{2} \times P_1 \quad ; \quad P_3 = \frac{1}{2} \times P_2 \quad ; \quad P_n = \frac{1}{2} \times P_{n-1}$

Avec 384 —

$P_1 = 192 \quad ; \quad P_2 = 96$

P5 — On continue à diviser par 2 : $P_3 = 48$, $P_4 = 24$.

$P_5 = \frac{384}{2^5} = \frac{384}{32} = 12$

$$P_n = \frac{1}{2} \times P_{n-1} \quad ; \quad P_1 = 192 \quad ; \quad P_2 = 96 \quad ; \quad P_5 = 12$$

> P indice n égale un demi fois P indice (n moins un) ; $P_1 = 192$; $P_2 = 96$; $P_5 = 12$
>
> P indice n égale un demi fois P indice (n moins un); P indice 1 égale 192; P indice 2 égale 96; P indice 5 égale 12

4. ACTIVITÉ

Pour comprendre : les intérêts composés

CE QU'IL DIT

7attina fel banka capital : dix mille dinars, b intérêts composés, quatre pour cent fel 3am. Ma3neha koll 3am les intérêts yet7asbou 3la e5er capital. Ba3d 3am : C indice un égale dix mille fois un virgule zéro quatre, ya3ni dix mille quatre cents. Ba3d 3amin : C indice deux égale dix mille quatre cents fois un virgule zéro quatre, ya3ni dix mille huit cent seize. W ba3d trois ans : C indice trois égale onze mille deux cent quarante-huit virgule soixante-quatre. Chouf : koll marra nadhrbou fi un virgule zéro quatre. Nektbou : C indice (n plus un) égale un virgule zéro quatre fois C indice n.

حطّينا في البنك capital : dix mille dinars ، بـ quatre pour cent ، intérêts composés في العام . معناها كل عام يتحسبو على آخر capital . بعد عام : C indice un égale dix mille fois un virgule zéro quatre ، يعني les intérêts . بعد عامين : C indice deux égale dix mille quatre cents fois un virgule zéro quatre dix mille quatre cents . بعد dix mille huit cent seize ، يعني w trois ans : C indice trois égale onze mille deux cent quarante-huit . شوف : كل مرّة نضربو في un virgule zéro quatre . نكتبو : C indice (n plus un) virgule soixante-quatre . égale un virgule zéro quatre fois C indice n

On a placé à la banque un capital : dix mille dinars, à intérêts composés, quatre pour cent par an. Cela veut dire que chaque année les intérêts se calculent sur le dernier capital. Après un an : C indice un égale dix mille fois un virgule zéro quatre, donc dix mille quatre cents. Après deux ans : C indice deux égale dix mille quatre cents fois un virgule zéro quatre, donc dix mille huit cent seize. Et après trois ans : C indice trois égale onze mille deux cent quarante-huit virgule soixante-quatre. Regarde : à chaque fois, on

multiplie par un virgule zéro quatre. On écrit : C indice (n plus un) égale un virgule zéro quatre fois C indice n.

Au 1er janvier 2004, on a placé un capital de $10\,000$ dinars dans une banque, au taux d'intérêts composés de $4\,\%$: chaque année, les intérêts se calculent sur le dernier capital.

On note C_0 le capital initial ($C_0 = 10\,000$ dinars), C_1 le capital après une année, C_2 le capital après deux années et C_3 le capital après trois années.

1. Calcule C_1, C_2 et C_3.
2. On désigne par C_n le capital après n années. Trouve une relation entre C_{n+1} et C_n.

CHAQUE ANNÉE, LE CAPITAL EST MULTIPLIÉ PAR 1,04

$$C_{n+1} = 1{,}04 \times C_n$$

EXEMPLE TRAITÉ

Un capital $C_0 = 10\,000$ dinars est placé à intérêts composés au taux de $4\,\%$ par an. Calcule C_1, C_2 et C_3, puis écris la relation entre C_{n+1} et C_n.

> Un capital $C_0 = 10\,000$ dinars est placé à intérêts composés au taux de $4\,\%$ par an. Calcule C_1, C_2 et C_3, puis écris la relation entre C indice (n plus un) et C_n.
> Un capital C indice 0 égale 10 000 dinars est placé à intérêts composés au taux de 4 pour cent par an. .Calcule C indice 1, C indice 2 et C indice 3, puis écris la relation entre C indice (n plus un) et C indice n

Après une année — On ajoute au capital ses intérêts, soit $4\,\%$ de $10\,000$.

$$C_1 = 10\,000 + \tfrac{4}{100} \times 10\,000 = 10\,400$$

Après deux années — Les intérêts se calculent maintenant sur $10\,400$.

$$C_2 = 10\,400 \times 1{,}04 = 10\,816$$

Après trois années —

$$C_3 = 10\,816 \times 1{,}04 = 11\,248{,}64$$

La relation — D'une année à la suivante : $C_{n+1} = C_n + \dfrac{4}{100} C_n$.

$$C_{n+1} = 1{,}04 \times C_n$$

> La relation. D'une année à la suivante : C indice (n plus un) égale C indice n, plus quatre centièmes fois C indice n.
> La relation. D'une année à la suivante: C indice (n plus un) égale C indice n, plus quatre centièmes fois .C indice n

$C_1 = 10\,400$; $C_2 = 10\,816$; $C_3 = 11\,248{,}64$; $C_{n+1} = 1{,}04 \times C_n$

> $C_1 = 10\,400$; $C_2 = 10\,816$; $C_3 = 11\,248{,}64$; C indice (n plus un) égale 1,04 fois C indice n
> C indice 1 égale 10 400; C indice 2 égale 10 816; C indice 3 égale 11 248,64; C indice (n plus un) égale 1,04 fois C indice n

À ne pas faire : $C_2 = 10\,400 + 400 = 10\,800$ — $C_2 = 10\,400 \times 1{,}04 = 10\,816$. À intérêts composés, les intérêts de la deuxième année se calculent sur $10\,400$, pas sur le capital de départ : ils valent 416 dinars, pas 400.

5. DÉFINITION

Suite géométrique

CE QU'IL DIT

Suite géométrique, ma3neha : bech net3addew men ayy terme lelli ba3dou, nadhrbou dima fi nafs le réel q. Nektbou : U indice (n plus un) égale q fois U indice n, pour tout entier naturel n. W q nsammiwah la raison. Mathalan : deux, six, dix-huit, cinquante-quatre : koll marra nadhrbou fi trois, idhan la raison égale trois. W ki des termes consécutifs ykounou hakka, n9oulou houma en progression géométrique. Rodd belek : fel suite arithmétique nzidou la raison, amma fel suite géométrique nadhrbou fi la raison.

suite géométrique ، معناها : باش نتعدّاو من أيّ terme للّي بعدو ، نضربو ديما في نفس الـ réel q . نكتبو : U indice (n plus un) égale q fois U indice n ، pour tout entier naturel n . w q نسمّيوه la raison . مثلا : deux ، six ، dix-huit ، cinquante-quatre : كل مرّة نضربو في trois ، إذن w . la raison égale trois كي des termes consécutifs يكونو هكّا ، نقولو هوما en progression géométrique . ردّ بالك : في الـ suite arithmétique نزيدو la raison ، أمّا في الـ suite géométrique نضربو في la raison .

Une suite géométrique, cela veut dire : pour passer de n'importe quel terme au suivant, on multiplie toujours par le même réel q. On écrit : U indice (n plus un) égale q fois U indice n, pour tout entier naturel n. Et q s'appelle la raison. Par exemple : deux, six, dix-huit, cinquante-quatre : on multiplie par trois à chaque fois, donc la raison égale trois. Et quand des termes consécutifs se suivent ainsi, on dit qu'ils sont en progression géométrique. Attention : dans une suite arithmétique on ajoute la raison, alors que dans une suite géométrique on multiplie par la raison.

On retient la définition suivante :

> On dit qu'une suite (U_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = q\,U_n$. Le nombre réel q est appelé **raison** de cette suite.

Remarque. Si a, b, c, d, … sont des termes consécutifs d'une suite géométrique, on dit qu'ils sont en **progression géométrique**.

Autrement dit : on passe de chaque terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q.

POUR TOUT ENTIER NATUREL N

$$U_{n+1} = q \times U_n$$

EXEMPLE TRAITÉ

La suite (U_n) est définie par $U_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $3U_{n+1} - 2U_n = 0$. Montre qu'elle est géométrique, donne sa raison et calcule U_1, U_2 et U_3.

> La suite (U_n) est définie par $U_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, 3 fois U indice (n plus un) moins 2 fois U indice n égale 0. Montre qu'elle est géométrique, donne sa raison et calcule U_1, U_2 et U_3.
>
> La suite U indice n est définie par U indice 0 égale moins 1 et, pour tout entier naturel n, 3 fois U indice (n plus un) moins 2 fois U indice n égale 0. Montre qu'elle est géométrique, donne sa raison et calcule U indice 1, U indice 2 et U indice 3.

Isoler le terme suivant —

$3U_{n+1} = 2U_n \iff U_{n+1} = \frac{2}{3} \times U_n$

> Isoler le terme suivant : 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n, équivaut à U indice (n plus un) égale deux tiers fois U indice n
>
> Isoler le terme suivant: 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n, équivaut à U indice (n plus un) égale deux tiers fois U indice n

Conclusion — Pour tout n, on passe de U_n à U_{n+1} en multipliant par $\frac{2}{3}$: la suite est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $U_0 = -1$.

> Conclusion. Pour tout n, on passe de U_n à U indice (n plus un) en multipliant par $\frac{2}{3}$: la suite est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $U_0 = -1$.
>
> Conclusion. Pour tout n, on passe de U indice n à U indice (n plus un) en multipliant par 2 sur 3: la suite est géométrique de raison q égale 2 sur 3 et de premier terme U indice 0 égale moins 1.

Les premiers termes —

$U_1 = -\frac{2}{3} \quad ; \quad U_2 = -\frac{4}{9} \quad ; \quad U_3 = -\frac{8}{27}$

$U_{n+1} = \frac{2}{3} \times U_n \quad : \quad$ suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

> U indice (n plus un) égale deux tiers fois U indice n : suite géométrique de raison deux tiers
>
> U indice (n plus un) égale deux tiers fois U indice n: suite géométrique de raison deux tiers

À ne pas faire : La raison de la suite géométrique 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; … est 4 — La raison est 3, car $6 = 3 \times 2$. Dans une suite géométrique, on **multiplie** pour passer au terme suivant : la raison se lit sur un quotient, pas sur une différence.

À ne pas faire : La suite 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; … est géométrique — $6 = 2 \times 3$ mais $9 = 1{,}5 \times 6$: elle n'est pas géométrique. Ici on **ajoute** 3 à chaque fois : c'est une suite arithmétique. Dans une suite géométrique, le multiplicateur ne change jamais.

6. MÉTHODE

Reconnaître une suite géométrique

CE QU'IL DIT

Kifech nbayynou elli suite hiya géométrique ? Nektbou U indice (n plus un), w ntall3ou fih U indice n : lezem nal9aw q fois U indice n, w q ma yetbaddelch m3a n. W ken les termes el koll mouch zéro, na7sbou le quotient : U indice (n plus un) sur U indice n, w lezem yatla3 dima nafs le nombre. Mathalan U indice n égale deux fois trois puissance n : U indice (n plus un) égale trois fois U indice n, idhan hiya géométrique w la raison égale trois. W bech nbayynou elli suite mouch géométrique, yekfi nal9aw zouz quotients mouch kif kif.

كيفاش نبيّنو اللي suite هي géométrique ؟ نكتبو w ، U indice (n plus un) نطلّعو فيه U indice n : لازم نلقاو q
le quotient : U indice (n نحسبو ، zéro موش الكل les termes كان n . w ما يتبدّلش مع fois U indice n ، w q
U indice n égale deux fois trois puissance مثلا . nombre لازم يطلع ديما نفس الـ plus un) sur U indice n ، w
باش géométrique w la raison égale trois . w إذن هي ، n : U indice (n plus un) égale trois fois U indice n
نبيّنو اللي suite موش géométrique ، يكفي نلقاو زوز quotients موش كيف كيف .

Comment montrer qu'une suite est géométrique ? On écrit U indice (n plus un), et on y fait apparaître U indice n : il faut trouver q fois U indice n, avec q qui ne change pas avec n. Et si tous les termes sont non nuls, on calcule le quotient : U indice (n plus un) sur U indice n, et il doit toujours donner le même nombre. Par exemple U indice n égale deux fois trois puissance n : U indice (n plus un) égale trois fois U indice n, donc elle est géométrique et la raison égale trois. Et pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, il suffit de trouver deux quotients différents.

Pour montrer qu'une suite (U_n) est géométrique, on écrit U_{n+1} sous la forme $q \times U_n$, où q est un réel qui **ne dépend pas de n**. Quand tous les termes sont non nuls, cela revient à montrer que le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ est le même pour tout n.

Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, il suffit de trouver deux passages qui ne se font pas avec le même multiplicateur : par exemple $\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$.

LE MÊME QUOTIENT POUR TOUT N (TERMES NON NULS)

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dis si chacune des suites suivantes est géométrique. a) $U_n = 2 \times 3^n$ pour tout entier naturel n. b) $V_0 = 3$ et $V_{n+1} = (V_n)^2$ pour tout entier naturel n.

> Dis si chacune des suites suivantes est géométrique. a) $U_n = 2 \times 3^n$ pour tout entier naturel n. b) $V_0 = 3$ et V indice (n plus un) égale la parenthèse V indice n, au carré pour tout entier naturel n.
>
> Dis si chacune des suites suivantes est géométrique. a) U indice n égale 2 fois 3 puissance n pour tout entier naturel n. b) V indice 0 égale 3 et V indice (n plus un) égale la parenthèse V indice n, au carré .pour tout entier naturel n

a) Le terme suivant — On écrit U_{n+1} et on y fait apparaître U_n.

$$U_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 3 \times (2 \times 3^n) = 3 \times U_n$$

> a) Le terme suivant. On écrit U indice (n plus un) et on y fait apparaître U_n.
>
> .a) Le terme suivant. On écrit U indice (n plus un) et on y fait apparaître U indice n

a) Conclusion — (U_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $U_0 = 2 \times 3^0 = 2$.

b) Les premiers termes —

$V_0 = 3 \quad ; \quad V_1 = 3^2 = 9 \quad ; \quad V_2 = 9^2 = 81$

b) Les quotients — On multiplie par 3, puis par 9 : le multiplicateur change.

$\frac{V_1}{V_0} = 3 \quad \text{mais} \quad \frac{V_2}{V_1} = 9$

b) Conclusion — (V_n) n'est pas géométrique.

$U_{n+1} = 3 \times U_n \quad ; \quad \frac{V_1}{V_0} \neq \frac{V_2}{V_1}$

> U indice (n plus un) égale 3 fois U indice n ; $\frac{V_1}{V_0} \neq \frac{V_2}{V_1}$
>
> U indice (n plus un) égale 3 fois U indice n; V indice 1 sur V indice 0 différent de V indice 2 sur V indice 1

À ne pas faire : $\frac{U_1}{U_0} = \frac{U_2}{U_1}$, donc la suite est géométrique — Il faut $U_{n+1} = q\,U_n$ **pour tout** entier naturel n. Deux quotients égaux ne prouvent rien pour la suite entière. Deux quotients **différents**, en revanche, suffisent à prouver qu'elle n'est pas géométrique.

À ne pas faire : $U_{n+1} = 3U_n + 5$: la suite est géométrique de raison 3 — Avec $U_0 = -2$: $U_1 = -1$ et $U_2 = 2$; les quotients $\frac{1}{2}$ et -2 sont différents. À cause du « $+5$ », on ne passe pas d'un terme au suivant par une simple multiplication.

---

7. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la pression atmosphérique

CE QU'IL DIT

La pression atmosphérique ton9es ta9riban un pour cent, koll ma natl3ou cent mètres. Ki ton9es un pour cent, ma3neha nadhrbou fi zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf. Idhan p indice un égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf fois p indice zéro. p indice deux égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf au carré, fois p indice zéro. W p indice trois égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf au cube, fois p indice zéro. Chouf : l'exposant houwa bidou l'indice. Idhan p indice n égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf puissance n, fois p indice zéro. Ken p indice zéro égale mille millibars, fi quatre cents mètres nal9aw ta9riban neuf cent soixante virgule six.

la pression atmosphérique تنقص تقريبا un pour cent ، كل ما نطلعو cent mètres . كي تنقص un pour cent ، إذن p indice un égale zéro virgule quatre-vingt-dix- . zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf معناها نضربو في neuf fois p indice zéro . p indice deux égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf au carré ، fois p indice zéro . w p indice trois égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf au cube ، fois p indice zéro . شوف : l'exposant هو بيدو l'indice . إذن p indice n égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf puissance n ، fois p indice zéro égale mille millibars كان . indice zéro quatre cents mètres في ، neuf cent تقريبا نلقاو soixante virgule six .

La pression atmosphérique diminue d'environ un pour cent chaque fois qu'on monte de cent mètres. Diminuer de un pour cent, cela veut dire multiplier par zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf. Donc p indice un égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf fois p indice zéro. p indice deux égale zéro virgule quatre-

vingt-dix-neuf au carré, fois p indice zéro. Et p indice trois égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf au cube, fois p indice zéro. Regarde : l'exposant est justement l'indice. Donc p indice n égale zéro virgule quatre-vingt-dix-neuf puissance n, fois p indice zéro. Si p indice zéro égale mille millibars, à quatre cents mètres on trouve environ neuf cent soixante virgule six.

La pression atmosphérique diminue, approximativement, de $1\,\%$ à chaque fois que l'altitude de l'observateur augmente de 100 mètres.

On note p_0 la pression, en millibars, au niveau de la mer (niveau zéro), p_1 la pression à l'altitude 100 mètres, p_2 la pression à l'altitude 200 mètres et p_3 la pression à l'altitude 300 mètres.

1. Exprime p_1, p_2 et p_3 en fonction de p_0.
2. p_n étant la pression en millibars à l'altitude $(n \times 100)$ mètres, conjecture l'expression de p_n en fonction de p_0.
3. Un jour, la pression atmosphérique au niveau de la mer était 1000 millibars. Calcule la pression à 400 mètres au-dessus du niveau de la mer.
4. Le même jour, le baromètre d'un observateur indique 950 millibars. À quelle altitude était cet observateur ?

LA PRESSION À L'ALTITUDE N × 100 MÈTRES

$$p_n = 0{,}99^{\,n} \times p_0$$

EXEMPLE TRAITÉ

La pression diminue de $1\,\%$ chaque fois que l'altitude augmente de 100 mètres. Exprime p_1, p_2, p_3 puis p_n en fonction de p_0. Avec $p_0 = 1000$ millibars, calcule la pression à 400 mètres et trouve l'altitude où le baromètre indique 950 millibars.

Diminuer de 1 pour cent — Diminuer un nombre de $1\,\%$, c'est le multiplier par $0{,}99$.

$p_1 = p_0 - \frac{1}{100}\,p_0 = 0{,}99 \times p_0$

De proche en proche —

$p_2 = 0{,}99 \times p_1 = 0{,}99^2 \times p_0 \quad ; \quad p_3 = 0{,}99^3 \times p_0$

La conjecture — L'exposant de $0{,}99$ est égal à l'indice.

$p_n = 0{,}99^{\,n} \times p_0$

À 400 mètres — $400 = 4 \times 100$: c'est p_4.

$p_4 = 0{,}99^4 \times 1000 \approx 960{,}6$

950 millibars — On essaie l'indice suivant : le baromètre indique 950 millibars vers $5 \times 100 = 500$ mètres.

$p_5 = 0{,}99^5 \times 1000 \approx 951$

$$p_n = 0{,}99^{\,n} \times p_0 \quad ; \quad p_4 \approx 960{,}6 \text{ millibars} \quad ; \quad \text{environ } 500 \text{ mètres}$$

À ne pas faire : À 400 mètres la pression a diminué de $4\,\%$: $p_4 = 0{,}96 \times p_0$ — $p_4 = 0{,}99^4 \times p_0 \approx 0{,}9606 \times p_0$. Chaque baisse de $1\,\%$ porte sur la pression de l'étage d'en dessous, pas sur la pression au niveau de la mer : les pourcentages ne s'ajoutent pas.

---

8. REMARQUE

Trois cas particuliers

CE QU'IL DIT

Tawa nchoufou trois cas sehlin. Ken la raison q égale un : nadhrbou dima fi un, idhan les termes el koll égaux à U indice zéro, w la suite hiya constante. Ken le premier terme U indice zéro égale zéro : zéro fois q ya3ti dima zéro, idhan les termes el koll nuls. W ken q égale zéro : men U indice un w enti tala3, les termes el koll nuls. El trois cas hedhom n7ottouhom 3la jnab, w ne5dmou b U indice zéro différent de zéro, w q différent de zéro w différent de un. Amma le cas q égale un, bech narj3oulou fel somme.

توّة نشوفو trois cas ساهلين . كان la raison q égale un : نضربو ديما في un ، إذن les termes الكل égaux à U
يعطي le premier terme U indice zéro égale zéro : zéro fois q كان . constante هي suite الـ indice zéro ، w
nuls الكل les termes ، إنت طالع U indice un w من : q égale zéro كان nuls . w الكل les termes ، إذن ، zéro ديما
U indice zéro différent de zéro ، w q différent de zéro w نخدمو بـ w ، هاذم نحطّوهم على جنب trois cas الـ .
. la somme في نرجعولو باش ، le cas q égale un أمّا . différent de un

Voyons maintenant trois cas faciles. Si la raison q égale un : on multiplie toujours par un, donc tous les termes sont égaux à U indice zéro, et la suite est constante. Si le premier terme U indice zéro égale zéro : zéro fois q donne toujours zéro, donc tous les termes sont nuls. Et si q égale zéro : à partir de U indice un, tous les termes sont nuls. Ces trois cas mis de côté, on travaille avec U indice zéro différent de zéro, et q différent de zéro et différent de un. Mais le cas q égale un, on y reviendra pour la somme.

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q. Trois cas se règlent tout de suite :

- si $q = 1$, alors $U_{n+1} = U_n$ pour tout n : tous les termes sont égaux à U_0, la suite est **constante** ;
- si $U_0 = 0$, alors $U_1 = q \times 0 = 0$, puis $U_2 = 0$, … : tous les termes sont **nuls** ;
- si $q = 0$, alors $U_{n+1} = 0 \times U_n = 0$: tous les termes sont nuls **à partir de** U_1.

Ces trois cas mis à part, on s'intéresse aux suites où $U_0 \neq 0$, $q \neq 0$ et $q \neq 1$; le cas $q = 1$ reviendra pour la somme.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme $U_0 = 7$. Écris ses quatre premiers termes quand $q = 1$, puis quand $q = 0$.

Avec q = 1 — Multiplier par 1 ne change rien.

$7 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 7$

Avec q = 0 — Dès le deuxième terme, on multiplie par 0.

$7 \;;\; 0 \;;\; 0 \;;\; 0$

$q = 1$: $U_n = 7$ pour tout n ; $q = 0$: $U_n = 0$ pour tout $n \geq 1$

9. THÉORÈME

Terme général d'une suite géométrique

CE QU'IL DIT

Ken la suite géométrique, le premier terme mte3ha V indice zéro w la raison q, wa9tha V indice n égale V indice zéro fois q puissance n. 3lech ? 5ater bech nouslou men V indice zéro l V indice n, nadhrbou fi la raison n marrat. V indice un égale V indice zéro fois q. V indice deux égale V indice zéro fois q au carré. V indice trois égale V indice zéro fois q au cube, w hakka. Mathalan le capital mta3 dix mille dinars, la raison un virgule zéro quatre : C indice n égale un virgule zéro quatre puissance n, fois dix mille. Ma 3adech lezemna na7sbou les termes el koll wa7ed wa7ed.

V indice n égale V وقتها ، V indice zéro w la raison q متاعها suite géométrique ، le premier terme كان الـ la نضربو في ، V indice n لـ V indice zéro من نوصلو باش خاطر ؟ علاش . indice zéro fois q puissance n V indice un égale V indice zéro fois q . V indice deux égale V indice zéro fois q au carré . . مرّات raison n dix mille dinars ، la raison un متاع capital الـ مثلا . هكّا V indice trois égale V indice zéro fois q au cube ، w ما عادش لازمنا . virgule zéro quatre : C indice n égale un virgule zéro quatre puissance n ، fois dix mille نحسبو les termes الكل واحد واحد .

Si la suite est géométrique, de premier terme V indice zéro et de raison q, alors V indice n égale V indice zéro fois q puissance n. Pourquoi ? Parce que pour aller de V indice zéro à V indice n, on multiplie n fois par la raison. V indice un égale V indice zéro fois q. V indice deux égale V indice zéro fois q au carré. V indice trois égale V indice zéro fois q au cube, et ainsi de suite. Par exemple, pour le capital de dix mille dinars, de raison un virgule zéro quatre : C indice n égale un virgule zéro quatre puissance n, fois dix mille. Plus besoin de calculer tous les termes un par un.

Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme V_0 et de raison $q \neq 0$. On a :

> $V_n = V_0\, q^n$, pour tout entier naturel n.

On le voit sur les premiers termes : $V_1 = V_0\, q$, $V_2 = V_0\, q^2$, $V_3 = V_0\, q^3$, … Pour aller de V_0 à V_n, on multiplie n fois par la raison. Grâce à cette formule, on calcule un terme lointain sans passer par tous ceux qui le précèdent.

POUR TOUT ENTIER NATUREL N

$$V_n = V_0 \times q^n$$

DÉMONSTRATION

On calcule de proche en proche : $V_1 = q \times V_0$; $V_2 = q \times V_1 = q^2 \times V_0$; $V_3 = q \times V_2 = q^3 \times V_0$; $V_4 = q \times V_3 = q^4 \times V_0$. À chaque pas, l'exposant de q augmente de 1, comme l'indice. Pour passer de

> V_0 à V_n, on a multiplié n fois par q, d'où $V_n = V_0 \times q^n$. Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit $V_0 = V_0 \times q^0 = V_0$.

EXEMPLE TRAITÉ

On considère la suite (C_n) définie par $C_0 = 10\,000$ et $C_{n+1} = 1{,}04 \times C_n$ pour tout entier naturel n. Exprime C_1, C_2, C_3 et C_4 en fonction de C_0, puis C_n en fonction de C_0 et de n. Calcule enfin C_{10}.

> On considère la suite (C_n) définie par $C_0 = 10\,000$ et C indice (n plus un) égale 1,04 fois C indice n pour tout entier naturel n. Exprime C_1, C_2, C_3 et C_4 en fonction de C_0, puis C_n en fonction de C_0 et de n. Calcule enfin C_{10}.
>
> On considère la suite C indice n définie par C indice 0 égale 10 000 et C indice (n plus un) égale 1,04 fois C indice n pour tout entier naturel n. Exprime C indice 1, C indice 2, C indice 3 et C indice 4 en fonction de C indice 0, puis C indice n en fonction de C indice 0 et de n. Calcule enfin C indice 10.

De proche en proche —

$C_1 = 1{,}04 \times C_0 \quad ; \quad C_2 = 1{,}04^2 \times C_0$

$C_3 = 1{,}04^3 \times C_0 \quad ; \quad C_4 = 1{,}04^4 \times C_0$

Le terme général — (C_n) est géométrique de premier terme C_0 et de raison $1{,}04$.

$C_n = 1{,}04^n \times C_0$

C10 — On ne calcule pas dix termes : on applique la formule, avec la calculatrice.

$C_{10} = 1{,}04^{10} \times 10\,000 \approx 14\,802{,}44$

$$C_n = 1{,}04^n \times C_0 \quad ; \quad C_{10} \approx 14\,802{,}44$$

À ne pas faire : $V_5 = V_0 \times 5q$ — $V_5 = V_0 \times q^5$. On multiplie cinq fois par q : $q \times q \times q \times q \times q = q^5$. C'est dans une suite arithmétique qu'on écrit $5r$.

À ne pas faire : $V_n = (V_0 \times q)^n$ — $V_n = V_0 \times q^n$. Seule la raison est élevée à la puissance n ; le premier terme n'est compté qu'une fois.

10. PROPRIÉTÉ

D'un terme à un autre

CE QU'IL DIT

Ma yelzemch dima nabdew men V indice zéro. Ken na3rfou ayy terme, V indice p, wa9tha V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p). L'exposant houwa la différence mta3 les indices, ya3ni 9addech men marra nadhrbou fi la raison. W ken le premier terme houwa V indice un : V indice n égale V indice un, fois q puissance (n moins un). Mathalan q égale racine carrée de deux w V indice neuf égale seize racine carrée de deux. V indice quarante-trois égale V indice neuf, fois q puissance trente-quatre. W racine carrée de deux puissance trente-quatre égale deux puissance dix-sept.

ما يلزمش ديما نبداو من V indice zéro . كان نعرفو أيّ V indice p ، terme ، وقتها V indice n égale V indice p fois q puissance (n moins p) . l'exposant هو la différence متاع les indices ، يعني قدّاش من مرّة نضربو في la

Maths à la carte ABDELKADER HAMMA

V indice un : V indice n égale V indice un ، fois q puissance (n moins هو le premier terme كان raison . w q égale racine carrée de deux w V indice neuf égale seize racine carrée de deux . V indice مثلا . un) quarante-trois égale V indice neuf ، fois q puissance trente-quatre . w racine carrée de deux puissance . trente-quatre égale deux puissance dix-sept

On n'est pas toujours obligé de partir de V indice zéro. Si on connaît un terme quelconque, V indice p, alors V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p). L'exposant est la différence des indices, c'est-à-dire le nombre de fois où l'on multiplie par la raison. Et si le premier terme est V indice un : V indice n égale V indice un, fois q puissance (n moins un). Par exemple q égale racine carrée de deux et V indice neuf égale seize racine carrée de deux. V indice quarante-trois égale V indice neuf, fois q puissance trente-quatre. Et racine carrée de deux puissance trente-quatre égale deux puissance dix-sept.

Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$. On n'est pas obligé de repartir de V_0 :

> $V_n = V_p\, q^{n-p}$, pour tous entiers n et p. En particulier $V_n = V_1\, q^{n-1}$, pour tout entier naturel n.

L'exposant de q est la **différence des indices** : c'est le nombre de pas qui séparent V_p de V_n.

POUR TOUS ENTIERS N ET P

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

QUAND LE PREMIER TERME EST V_1

$$V_n = V_1 \times q^{n-1}$$

DÉMONSTRATION

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. On a $V_n = V_0 \times q^n$ et $V_p = V_0 \times q^p$. Comme $q^n = q^p \times q^{n-p}$, on obtient $V_n = V_0 \times q^p \times q^{n-p} = V_p \times q^{n-p}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et telle que $V_9 = 16\sqrt{2}$. Détermine V_{43}.

La formule — On part de V_9 : de l'indice 9 à l'indice 43, il y a $43 - 9 = 34$ pas.

$V_{43} = V_9 \times q^{43-9} = 16\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{34}$

La puissance — $(\sqrt{2})^2 = 2$, donc $(\sqrt{2})^{34} = 2^{17}$.

$(\sqrt{2})^{34} = 2^{17} = 131\,072$

Le résultat — On écrit $16 = 2^4$, puis on ajoute les exposants : $4 + 17 = 21$.

$V_{43} = 2^4 \times 2^{17} \times \sqrt{2} = 2^{21} \times \sqrt{2}$

$$V_{43} = 2^{21} \times \sqrt{2}$$

À ne pas faire : $V_{43} = V_9 \times q^{43}$ — $V_{43} = V_9 \times q^{43-9} = V_9 \times q^{34}$. L'exposant compte les pas entre les deux indices. q^{43} ne convient que si l'on part de V_0.

À ne pas faire : Le premier terme est U_1, donc $U_n = U_1 \times q^n$ — $U_n = U_1 \times q^{n-1}$. De U_1 à U_n, il n'y a que $n - 1$ pas.

11. MÉTHODE

Retrouver la raison à partir de deux termes

CE QU'IL DIT

Kifech nal9aw la raison ki na3rfou zouz termes ? Nesta3mlou la formule : V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p). Idhan q puissance (n moins p) égale V indice n sur V indice p. Mathalan U indice quatre égale vingt-cinq, w U indice onze égale un million neuf cent cinquante-trois mille cent vingt-cinq. q puissance sept égale soixante-dix-huit mille cent vingt-cinq, ya3ni cinq puissance sept, idhan q égale cinq. Rodd belek : ken l'exposant pair, tnajjem tal9a zouz valeurs. Mathalan q puissance huit égale deux cent cinquante-six : q égale deux, walla q égale moins deux.

formule : V indice n égale V indice p ، fois q الـ نستعملو ؟ termes زوز la raison كي نعرفو كيفاش نلقاو
U indice quatre مثلا . q puissance (n moins p) égale V indice n sur V indice p إذن . puissance (n moins p)
égale vingt-cinq ، w U indice onze égale un million neuf cent cinquante-trois mille cent vingt-cinq . q
q égale إذن ، cinq puissance sept يعني ، puissance sept égale soixante-dix-huit mille cent vingt-cinq
q puissance huit égale deux cent مثلا . valeurs زوز تنجّم تلقى ، l'exposant pair كان : ردّ بالك . cinq
. q égale moins deux ولّا ، cinquante-six : q égale deux

Comment trouver la raison quand on connaît deux termes ? On utilise la formule : V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p). Donc q puissance (n moins p) égale V indice n sur V indice p. Par exemple U indice quatre égale vingt-cinq, et U indice onze égale un million neuf cent cinquante-trois mille cent vingt-cinq. q puissance sept égale soixante-dix-huit mille cent vingt-cinq, c'est-à-dire cinq puissance sept, donc q égale cinq. Attention : si l'exposant est pair, on peut trouver deux valeurs. Par exemple q puissance huit égale deux cent cinquante-six : q égale deux, ou q égale moins deux.

Quand on connaît deux termes V_p et V_n d'une suite géométrique (avec $n > p$ et $V_p \neq 0$), la formule $V_n = V_p\, q^{n-p}$ donne une **puissance** de la raison :

$$q^{n-p} = \frac{V_n}{V_p}$$

Il reste à trouver q :

- si l'exposant $n - p$ est **impair**, il y a une seule valeur de q ;
- si l'exposant $n - p$ est **pair**, il peut y avoir deux valeurs opposées : il faut les donner toutes les deux.

UNE PUISSANCE DE LA RAISON

$$q^{n-p} = \frac{V_n}{V_p}$$

EXEMPLE TRAITÉ

a) (U_n) est une suite géométrique telle que $U_4 = 25$ et $U_{11} = 1\,953\,125$. Détermine sa raison q. b) (V_n) est une suite géométrique telle que $V_0 = -6$ et $V_8 = -1536$. Détermine sa raison q.

> a) (U_n) est une suite géométrique telle que $U_4 = 25$ et U indice 11 égale 1 953 125. Détermine sa raison q. b) (V_n) est une suite géométrique telle que $V_0 = -6$ et $V_8 = -1536$. Détermine sa raison q.
>
> a) U indice n est une suite géométrique telle que U indice 4 égale 25 et U indice 11 égale un million neuf cent cinquante-trois mille cent vingt-cinq. Détermine sa raison q. b) V indice n est une suite géométrique telle que V indice 0 égale moins 6 et V indice 8 égale moins 1536. Détermine sa raison .q

a) La puissance — De l'indice 4 à l'indice 11, il y a 7 pas : $U_{11} = U_4 \times q^7$.

$q^7 = \frac{1\,953\,125}{25} = 78\,125$

a) La raison — $78\,125 = 5^7$, et l'exposant 7 est impair : une seule valeur.

$q^7 = 5^7 \quad \text{donc} \quad q = 5$

b) La puissance — $V_8 = V_0 \times q^8$.

$q^8 = \frac{-1536}{-6} = 256$

b) La raison — $256 = 2^8$, et l'exposant 8 est pair : $(-2)^8 = 256$ aussi.

$q = 2 \quad \text{ou} \quad q = -2$

$$q^7 = 5^7 \Rightarrow q = 5 \quad ; \quad q^8 = 2^8 \Rightarrow q = 2 \text{ ou } q = -2$$

À ne pas faire : $q^8 = 256$, donc $q = 2$ — $q = 2$ ou $q = -2$. Une puissance d'exposant **pair** efface le signe : $(-2)^8 = 2^8 = 256$. Les deux suites existent.

À ne pas faire : $U_4 = 25$ et $U_{11} = 1\,953\,125$, donc $q = \frac{1\,953\,125}{25}$ — $q^7 = \frac{1\,953\,125}{25} = 78\,125$, puis $q = 5$. Le quotient de deux termes donne q seulement s'ils sont **consécutifs**. Ici sept pas les séparent : on obtient q^7.

---

12. APPLICATION

Exemple : lire une suite géométrique sur un graphique

CE QU'IL DIT

Fi repère, n7ottou les points A indice n : l'abscisse hiya l'indice n, w l'ordonnée hiya le terme U indice n. Chouf la figure : les ordonnées houma quatre, deux, un, zéro virgule cinq, w zéro virgule vingt-cinq. Le premier terme houwa l'ordonnée mta3 le point elli l'abscisse mte3ou zéro, idhan U indice zéro égale quatre. W la raison hiya U indice un sur U indice zéro, ya3ni deux sur quatre, idhan q égale un demi. Rodd belek : les points houni mouch 3la droite wa7da, mouch kima fel suite arithmétique.

. le terme U indice n هي l'indice n ، w l'ordonnée هي les points A indice n : l'abscisse نحطّو ، repère في quatre ، deux ، un ، zéro virgule cinq ، w zéro virgule vingt-cinq . le هوما figure : les ordonnées الـ شوف U indice zéro égale quatre . w إذن ، zéro متاعو l'abscisse اللي le point متاع l'ordonnée هو premier terme

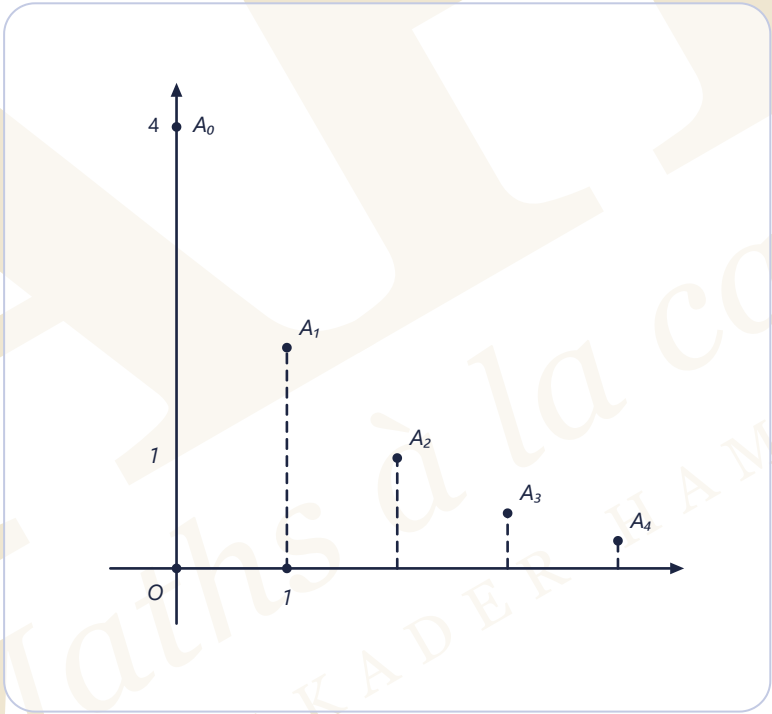
les : ردّ بالك . q égale un demi إذن ، deux sur quatre يعني ، U indice un sur U indice zéro هي la raison
points هنا موش على droite وحدة ، موش كيما في الـ suite arithmétique .

Dans un repère, on place les points A indice n : l'abscisse est l'indice n, et l'ordonnée est le terme U indice n. Regarde la figure : les ordonnées sont quatre, deux, un, zéro virgule cinq, et zéro virgule vingt-cinq. Le premier terme est l'ordonnée du point d'abscisse zéro, donc U indice zéro égale quatre. Et la raison est U indice un sur U indice zéro, c'est-à-dire deux sur quatre, donc q égale un demi. Attention : ici les points ne sont pas sur une même droite, contrairement à une suite arithmétique.

Dans un repère, on représente une suite (U_n) par les points A_n de coordonnées (n, U_n) : l'abscisse est l'indice, l'ordonnée est le terme.

Sur la figure, les ordonnées des points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les cinq premiers termes consécutifs d'une suite géométrique (U_n).

Détermine le premier terme et la raison de cette suite.



Les ordonnées de A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 : 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25.

Un repère orthonormé d'origine O, avec l'unité 1 marquée sur chaque axe. Cinq points sont placés : A0 d'abscisse 0 et d'ordonnée 4, A1 d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, A2 d'abscisse 2 et d'ordonnée 1, A3 d'abscisse 3 et d'ordonnée 0,5, A4 d'abscisse 4 et d'ordonnée 0,25. Chaque fois que l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée est divisée par 2 : les points descendent de moins en moins vite et se rapprochent de l'axe des abscisses, sans être alignés.

EXEMPLE TRAITÉ

Les points $A_0(0;4)$, $A_1(1;2)$, $A_2(2;1)$, $A_3(3;0{,}5)$ et $A_4(4;0{,}25)$ représentent les cinq premiers termes d'une suite géométrique (U_n). Détermine son premier terme et sa raison.

Le premier terme — C'est l'ordonnée du point d'abscisse 0.

$U_0 = 4$

La raison — U_1 est l'ordonnée de A_1, soit 2. La raison est le quotient de deux termes consécutifs.

$q = \frac{U_1}{U_0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Vérification — Les ordonnées suivantes s'obtiennent bien en multipliant par $\frac{1}{2}$.

$2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad ; \quad 1 \times \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad ; \quad 0{,}5 \times \frac{1}{2} = 0{,}25$

$$U_0 = 4 \quad ; \quad q = \frac{1}{2}$$

À ne pas faire : Les points qui représentent une suite géométrique sont alignés — Ici, de A_0 à A_1 l'ordonnée baisse de 2, puis de A_1 à A_2 elle ne baisse que de 1 : les points ne sont pas alignés. Ce sont les points d'une suite **arithmétique** qui sont alignés : on y ajoute toujours le même nombre. Ici on multiplie.

À ne pas faire : $q = U_0 - U_1 = 4 - 2 = 2$ — $q = \frac{U_1}{U_0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. La raison d'une suite géométrique est un quotient : le terme suivant **divisé** par le terme d'avant.

---

13. ACTIVITÉ

Pour comprendre : trois raisons, trois comportements

CE QU'IL DIT

Ne5dhou trois suites géométriques, le premier terme mte3hom un. La suite numéro un, la raison mte3ha zéro virgule cinq : un, zéro virgule cinq, zéro virgule vingt-cinq, w hakka. Les termes yon9sou w ya9rbou l zéro. La suite numéro deux, la raison mte3ha trois demis : un, un virgule cinq, deux virgule vingt-cinq. Les termes yekbrou, w koll marra akther. W la suite numéro trois, la raison mte3ha moins deux : un, moins deux, quatre, moins huit, seize. Les termes ybaddlou le signe koll marra, w yeb3dou 3la zéro. Idhan la raison hiya elli ta7kem fel suite.

ناخذو trois suites géométriques متاعهم un . الـ la raison ، zéro متاعها suite numéro un ، le premier terme w ، zéro virgule vingt-cinq ، zéro virgule cinq ، un virgule cinq : هكّا les termes . ينقصو w يقربو لـ zéro . الـ trois demis : un ، un virgule cinq ، deux virgule vingt-cinq . les متاعها suite numéro deux ، la raison termes يكبرو ، w كل مرّة أكثر . الـ w la raison ، متاعها suite numéro trois ، moins deux : un ، moins huit ، seize . les termes يبدّلو le signe كل مرّة ، w يبعدو على zéro . إذن la raison هي اللي تحكم في الـ suite .

Prenons trois suites géométriques de premier terme un. La suite numéro un a pour raison zéro virgule cinq : un, zéro virgule cinq, zéro virgule vingt-cinq, et ainsi de suite. Les termes diminuent et se rapprochent de zéro. La suite numéro deux a pour raison trois demis : un, un virgule cinq, deux virgule vingt-cinq. Les termes grandissent, et de plus en plus. Et la suite numéro trois a pour raison moins deux : un, moins deux, quatre, moins huit, seize. Les termes changent de signe à chaque fois, et s'éloignent de zéro. C'est donc la raison qui commande la suite.

On considère les suites géométriques (U_n), (V_n) et (W_n) de raisons respectives $0{,}5$, $\frac{3}{2}$ et -2, et telles que $U_0 = V_0 = W_0 = 1$.

1. Calcule, à la calculatrice ou avec un tableur, les premiers termes de chacune des trois suites.
2. Quelles remarques peut-on faire sur les valeurs des termes de chacune des trois suites, lorsque n devient de plus en plus grand ?

EXEMPLE TRAITÉ

Trois suites géométriques ont pour premier terme 1, et pour raisons $0{,}5$, $\frac{3}{2}$ et -2. Écris les cinq premiers termes de chacune, puis décris ce que deviennent les termes quand n grandit.

Raison 0,5 — Les termes diminuent et se rapprochent de 0.

$1 \quad ; \quad 0{,}5 \quad ; \quad 0{,}25 \quad ; \quad 0{,}125 \quad ; \quad 0{,}0625$

Raison 3/2 — Les termes augmentent, de plus en plus vite.

$1 \quad ; \quad 1{,}5 \quad ; \quad 2{,}25 \quad ; \quad 3{,}375 \quad ; \quad 5{,}0625$

Raison −2 — Les termes changent de signe à chaque pas, et s'éloignent de plus en plus de 0.

$1 \quad ; \quad -2 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad -8 \quad ; \quad 16$

Au dixième pas — À la calculatrice, on regarde le terme d'indice 10 de chaque suite.

$0{,}5^{10} \approx 0{,}001 \quad ; \quad 1{,}5^{10} \approx 57{,}7 \quad ; \quad (-2)^{10} = 1024$

$q = 0{,}5$: les termes se rapprochent de 0 ; $q = \frac{3}{2}$: ils grandissent ; $q = -2$: ils changent de signe et s'éloignent de 0

$q = 0{,}5$: les termes se rapprochent de 0 ; $q = \frac{3}{2}$: ils grandissent ; $q = -2$: ils changent de signe et s'éloignent de 0

q égale 0,5: les termes se rapprochent de 0; q égale 3 sur 2: ils grandissent; q égale moins 2: ils changent de signe et s'éloignent de 0

À ne pas faire : Une suite géométrique augmente toujours — Avec un premier terme positif : elle augmente si $q > 1$, elle diminue si $0 < q < 1$. Multiplier un nombre positif par un nombre plus petit que 1 le rend plus petit : $1 \times 0{,}5 = 0{,}5$.

14. ACTIVITÉ

Pour comprendre : quitte ou double !

CE QU'IL DIT

Lo3ba bin zouz : A w B. A ya3ti l B cent dinars koll nhar, moddet dix jours, ya3ni mille dinars. W B ya3ti l A : un dinar fi le premier jour, deux fi le deuxième, quatre fi le troisième, w koll nhar yadhreb fi deux. Bech na3rfou B 9addech ya3ti, na7sbou S : un plus deux plus quatre, 7atta cinq cent douze. Nadhrbou S fi deux : deux S égale deux plus quatre plus huit, 7atta mille vingt-quatre. Ki natr7ou, les termes el koll yemchiw, w yab9a : S égale mille vingt-quatre moins un, ya3ni mille vingt-trois. Idhan B ye5ser vingt-trois dinars.

لعبة بين زوز : A w B . A يعطي لـ B cent dinars كل نهار ، مدّة dix jours ، يعني B . w mille dinars يعطي لـ A : deux في un dinar ، quatre في le premier jour ، w في le deuxième ، le troisième كل نهار يضرب في deux .

باش نعرفو B قدّاش يعطي ، نحسبو S : un plus deux plus quatre ، حتّى cinq cent douze . نضربو S في : deux
w ، الكل يمشيو les termes ، كي نطرحو . mille vingt-quatre حتّى ، deux S égale deux plus quatre plus huit
. يبقى : S égale mille vingt-quatre moins un ، يعني mille vingt-trois . إذن B يخسر vingt-trois dinars .

Un jeu entre deux personnes : A et B. A donne à B cent dinars par jour pendant dix jours, donc mille dinars. Et B donne à A : un dinar le premier jour, deux le deuxième, quatre le troisième, et chaque jour il multiplie par deux. Pour savoir combien B donne, on calcule S : un plus deux plus quatre, jusqu'à cinq cent douze. On multiplie S par deux : deux S égale deux plus quatre plus huit, jusqu'à mille vingt-quatre. En soustrayant, tous les termes s'en vont, et il reste : S égale mille vingt-quatre moins un, donc mille vingt-trois. B perd donc vingt-trois dinars.

Dans un jeu entre deux personnes A et B, A propose à B de lui donner 100 dinars par jour pendant 10 jours. En contrepartie, B donne à A 1 dinar le premier jour, 2 dinars le deuxième jour, 4 dinars le troisième jour, et ainsi de suite jusqu'au dixième jour, en doublant chaque jour le montant du jour qui précède.

La personne B a-t-elle intérêt à accepter cette proposition ?

EXEMPLE TRAITÉ

A donne à B 100 dinars par jour pendant 10 jours. B donne à A 1 dinar le premier jour, puis le double de la veille chaque jour, jusqu'au dixième jour. Compare ce que B reçoit et ce que B donne.

Ce que B reçoit —

$10 \times 100 = 1000$

Ce que B donne — Dix termes d'une suite géométrique de raison 2 : le dixième est $2^9 = 512$.

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 256 + 512$

L'astuce — On multiplie S par la raison 2 : tous les termes se décalent d'un cran.

$2 \times S = 2 + 4 + 8 + \ldots + 512 + 1024$

La soustraction — Dans $2 \times S - S$, tous les termes communs s'en vont. Il reste le dernier terme de $2 \times S$ et le premier terme de S.

$2 \times S - S = 1024 - 1 \quad \text{donc} \quad S = 1023$

Conclusion — B donne 1023 dinars et n'en reçoit que 1000 : il perd 23 dinars. Il n'a pas intérêt à accepter.

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 512 = 1023 > 1000$$

À ne pas faire : B donne $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{10}$ dinars — Le dixième jour, B donne $2^9 = 512$ dinars. Le premier jour correspond à $2^0 = 1$: dix jours vont de 2^0 à 2^9.

15. THÉORÈME

La somme des puissances d'un réel

CE QU'IL DIT

La somme mta3 les puissances mta3 q : un plus q plus q au carré, 7atta q puissance n. Ken q différent de un, la somme hedhi égale un moins q puissance (n plus un), le tout sur (un moins q). 3lech ? Nsammiwha S. Nadhrbou S fi q, w natr7ou : les termes el koll yemchiw, w yab9a S moins q fois S égale un moins q puissance (n plus un). Rodd belek : men un 7atta q puissance n, famma n plus un termes, 3la hedhaka l'exposant houwa n plus un. W ken q égale un, koll terme égale un, idhan la somme égale n plus un.

la somme متاع les puissances متاع q : un plus q plus q au carré ، حتّى q puissance n . كان différent de q
S نسمّيوها ؟ علاش . égale un moins q puissance (n plus un) ، le tout sur (un moins q) هاذي somme الـ ، un
S moins q fois S égale un moins q puissance (n يبقى w ، الكل les termes : نطرحو q ، w في S نضربو .
n plus un . هو l'exposant هذاكا على ، n plus un termes فمّا ، q puissance n حتّى un من : ردّ بالك . plus un)
. somme égale n plus un إذن الـ ، terme égale un كل ، q égale un كان w

La somme des puissances de q : un plus q plus q au carré, jusqu'à q puissance n. Si q est différent de un, cette somme égale un moins q puissance (n plus un), le tout sur (un moins q). Pourquoi ? On l'appelle S. On multiplie S par q, et on soustrait : tous les termes s'en vont, et il reste S moins q fois S égale un moins q puissance (n plus un). Attention : de un jusqu'à q puissance n, il y a n plus un termes, c'est pourquoi l'exposant est n plus un. Et si q égale un, chaque terme égale un, donc la somme égale n plus un.

$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, où q est un réel différent de 1 et n est un entier naturel. Si $q = 1$, on a $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = n + 1$.

Cette somme a $n + 1$ termes, de $q^0 = 1$ jusqu'à q^n : l'exposant qui apparaît dans la formule est le **nombre de termes**.

Q DIFFÉRENT DE 1

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

DÉMONSTRATION

On pose $S_1 = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$. On multiplie par q : $q\,S_1 = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$. On soustrait membre à membre : les termes q, q^2, …, q^n figurent dans les deux sommes et s'éliminent. Il reste $S_1 - q\,S_1 = 1 - q^{n+1}$, c'est-à-dire $(1 - q)\,S_1 = 1 - q^{n+1}$. Si $q \neq 1$, on divise par $1 - q$, qui n'est pas nul : $S_1 = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Si $q = 1$, chacun des $n + 1$ termes vaut 1 : $S_1 = n + 1$.

EXEMPLE TRAITÉ

Calcule la somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$.

Reconnaître — C'est la somme des puissances de $q = 2$, jusqu'à l'exposant $n = 9$: elle a 10 termes.

$S = \frac{1-2^{9+1}}{1-2} = \frac{1-2^{10}}{1-2}$

Calculer —

$S = \frac{1-1024}{-1} = 1023$

Vérification — On retrouve la somme du jeu « quitte ou double ».

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1023$$

À ne pas faire : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ — $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. De q^0 à q^n il y a $n + 1$ termes, pas n : l'exposant de la formule est le nombre de termes.

À ne pas faire : Avec $q = 1$: $\dfrac{1 - 1^{n+1}}{1 - 1} = 0$ — Avec $q = 1$: $1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$. La formule divise par $1 - q$: elle n'a pas de sens quand $q = 1$, car on ne divise pas par 0.

---

16. THÉORÈME

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

CE QU'IL DIT

La somme mta3 n termes consécutifs mta3 suite géométrique, la raison mte3ha q différent de un : S égale a, fois (un moins q puissance n), le tout sur (un moins q). a houwa le premier terme mta3 la somme, w n houwa le nombre de termes. Ya3ni : le premier terme, fois la parenthèse un moins la raison puissance le nombre de termes, le tout sur la parenthèse un moins la raison. Mathalan vingt-sept plus quatre-vingt-un, 7atta dix-neuf mille six cent quatre-vingt-trois. La raison égale trois, w famma sept termes, men trois au cube 7atta trois puissance neuf. Idhan la somme égale vingt-sept fois mille quatre-vingt-treize, ya3ni vingt-neuf mille cinq cent onze.

q différent de un : S égale a متاعها suite géométrique ، la raison متاع n termes consécutifs متاع la somme هو somme ، w n الـ متاع le premier terme هو ، fois (un moins q puissance n) ، le tout sur (un moins q) . a le premier terme ، fois la parenthèse un moins la raison puissance le : يعني . le nombre de termes ، vingt-sept plus quatre-vingt-un مثلا . nombre de termes ، le tout sur la parenthèse un moins la raison trois au من ، sept termes فمّا dix-neuf mille six cent quatre-vingt-trois . la raison égale trois ، w حتّى يعني ، somme égale vingt-sept fois mille quatre-vingt-treize إذن الـ . trois puissance neuf حتّى cube . vingt-neuf mille cinq cent onze

La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de un : S égale a, fois (un moins q puissance n), le tout sur (un moins q). a est le premier terme de la somme, et n le nombre de termes. Autrement dit : le premier terme, fois la parenthèse un moins la raison puissance le nombre de termes, le tout sur la parenthèse un moins la raison. Par exemple vingt-sept plus quatre-vingt-un, jusqu'à dix-neuf mille six cent quatre-vingt-trois. La raison égale trois, et il y a sept termes, de trois au cube jusqu'à trois puissance neuf. Donc la somme égale vingt-sept fois mille quatre-vingt-treize, c'est-à-dire vingt-neuf mille cinq cent onze.

La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est $S = a \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, où a est le premier terme de cette somme. Si $q = 1$ alors $S = n\,a$.

En mots :

$$S = \text{le premier terme de la somme} \times \frac{1 - (\text{la raison})^{\text{le nombre de termes}}}{1 - \text{la raison}}$$

Pour compter les termes : de U_p à U_n, il y a $n - p + 1$ termes.

N TERMES CONSÉCUTIFS, DE PREMIER TERME A, Q DIFFÉRENT DE 1

$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$

DÉMONSTRATION

Les n termes consécutifs s'écrivent a, $a\,q$, $a\,q^2$, ..., $a\,q^{n-1}$. Donc $S = a + a\,q + a\,q^2 + \ldots + a\,q^{n-1} = a \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$. Si $q \neq 1$, la somme entre parenthèses vaut $\frac{1 - q^n}{1 - q}$, d'où $S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Si $q = 1$, les n termes sont tous égaux à a et $S = n\,a$.

EXEMPLE TRAITÉ

Calcule la somme $A = 27 + 81 + 243 + \ldots + 19\,683$.

La suite — On passe d'un terme au suivant en multipliant par 3 : ce sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 3$.

$\frac{81}{27} = 3 \quad ; \quad \frac{243}{81} = 3$

Le nombre de termes — On écrit les termes comme des puissances de 3 : les exposants vont de 3 à 9.

$27 = 3^3 \quad ; \quad 19\,683 = 3^9 \quad ; \quad 9 - 3 + 1 = 7 \text{ termes}$

La formule — Premier terme de la somme : 27. Raison : 3. Nombre de termes : 7.

$A = 27 \times \frac{1-3^7}{1-3} = 27 \times \frac{1-2187}{-2}$

Le calcul —

$A = 27 \times 1093 = 29\,511$

$$A = 27 \times \frac{1-3^7}{1-3} = 29\,511$$

À ne pas faire : De 3^3 à 3^9, il y a $9 - 3 = 6$ termes — Il y a $9 - 3 + 1 = 7$ termes. On compte les deux bouts : $3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9$.

À ne pas faire : Dans la formule, a est toujours U_0 — a est le **premier terme de la somme**. Pour $U_{11} + U_{12} + \ldots + U_{20}$, on prend $a = U_{11}$ et $n = 10$ termes.

17. APPLICATION

Exemple : une somme à signes alternés

CE QU'IL DIT

Chouf la somme hedhi : racine carrée de trois, moins trois, plus trois racine carrée de trois, moins neuf, w hakka 7atta quatre-vingt-un racine carrée de trois. Les signes yetbaddlou koll marra, ma3neha la raison négative. Na7sbou : moins trois sur racine carrée de trois égale moins racine carrée de trois, idhan q égale moins racine carrée de trois. Na7sbou les termes : famma neuf. L'exposant neuf impair,

idhan la puissance négative : moins quatre-vingt-un racine carrée de trois. Ntabb9ou la formule mta3 la somme, w nbasstou : nal9aw cent vingt-et-un racine carrée de trois, moins cent vingt.

شوف الـ somme هاذي : racine carrée de trois ، moins trois ، plus trois racine carrée de trois ، moins neuf ، w هكّا حتّى quatre-vingt-un racine carrée de trois . les signes يتبدّلو كل مرّة ، معناها la raison négative . نحسبو : moins trois sur racine carrée de trois égale moins racine carrée de trois ، إذن q égale moins . les termes نحسبو : فمّا neuf . l'exposant neuf impair ، إذن : la puissance négative . racine carrée de trois نطبّقو الـ formule متاع w ، la somme نبسّطو : نلقاو cent moins quatre-vingt-un racine carrée de trois . ، moins cent vingt vingt-et-un racine carrée de trois .

Regarde cette somme : racine carrée de trois, moins trois, plus trois racine carrée de trois, moins neuf, et ainsi de suite jusqu'à quatre-vingt-un racine carrée de trois. Les signes changent à chaque fois, ce qui veut dire que la raison est négative. On calcule : moins trois sur racine carrée de trois égale moins racine carrée de trois, donc q égale moins racine carrée de trois. On compte les termes : il y en a neuf. L'exposant neuf est impair, donc la puissance est négative : moins quatre-vingt-un racine carrée de trois. On applique la formule de la somme, et on simplifie : on trouve cent vingt-et-un racine carrée de trois, moins cent vingt.

Quand les termes d'une somme changent de signe à chaque pas, la raison est **négative**. La formule de la somme s'applique sans changement : il faut seulement faire attention au signe de la puissance.

Calcule la somme $C = \sqrt{3} - 3 + 3\sqrt{3} - 9 + 9\sqrt{3} - \ldots - 81 + 81\sqrt{3}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Calcule la somme $C = \sqrt{3} - 3 + 3\sqrt{3} - 9 + 9\sqrt{3} - \ldots - 81 + 81\sqrt{3}$.

La raison — On divise chaque terme par celui qui le précède.

$\frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$; $\frac{3\sqrt{3}}{-3} = -\sqrt{3}$ donc $q = -\sqrt{3}$

Le nombre de termes — On écrit tous les termes : $\sqrt{3}$; -3 ; $3\sqrt{3}$; -9 ; $9\sqrt{3}$; -27 ; $27\sqrt{3}$; -81 ; $81\sqrt{3}$. Il y en a 9.

La puissance — L'exposant 9 est impair : la puissance d'un nombre négatif est négative. Et $(\sqrt{3})^9 = 3^4 \times \sqrt{3}$.

$(-\sqrt{3})^9 = -81\sqrt{3}$

La formule — Premier terme $\sqrt{3}$, raison $-\sqrt{3}$, neuf termes. Soustraire un nombre négatif, c'est ajouter son opposé : $1 - q^9 = 1 + 81\sqrt{3}$ et $1 - q = 1 + \sqrt{3}$.

$C = \sqrt{3} \times \frac{1+81\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+243}{1+\sqrt{3}}$

Simplifier — On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3} - 1$.

$C = \frac{(243+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{242\sqrt{3}-240}{2} = 121\sqrt{3} - 120$

Vérification — On regroupe les termes en $\sqrt{3}$ d'un côté, les entiers de l'autre.

$(1 + 3 + 9 + 27 + 81)\sqrt{3} - (3 + 9 + 27 + 81) = 121\sqrt{3} - 120$

$$C = 121\sqrt{3} - 120$$

À ne pas faire : $(-\sqrt{3})^9 = 81\sqrt{3}$ — $(-\sqrt{3})^9 = -81\sqrt{3}$. Une puissance d'exposant **impair** d'un nombre négatif est négative ; c'est avec un exposant pair que le signe disparaît.

À ne pas faire : Les signes alternent, donc ce n'est pas une suite géométrique — C'est une suite géométrique de raison négative, $q = -\sqrt{3}$. Multiplier par un nombre négatif change le signe à chaque pas : c'est exactement ce qu'on observe.

---

18. ACTIVITÉ

Un problème pour aller plus loin : une ligne polygonale dans un carré

CE QU'IL DIT

Chouf la figure : carré, le centre mte3ou O, w le côté six centimètres. Les points A indice un, A indice deux, A indice trois, ydourou 3la les demi-diagonales, w koll marra la distance l O twalli el noss. Nsammiw U indice n la distance O A indice n. La demi-diagonale égale trois racine carrée de deux, idhan U indice n égale trois racine carrée de deux, sur deux puissance n. Hedhi suite géométrique, la raison mte3ha un demi. W les côtés mta3 la ligne polygonale zeda suite géométrique, la raison un demi, 5ater koll triangle rectangle fi O. Idhan la longueur mta3 la ligne hiya somme mta3 suite géométrique : trois racine carrée de dix, fois (un moins un sur deux puissance n).

شوف الـ figure : carré ، le centre O ، w le côté six centimètres . les points A indice un ، A indice متاعو ، deux ، A indice trois ، يدورو على w ، les demi-diagonales كل مرّة la distance لـ O تولّي النصّ . نسمّيو U indice n إذن ، indice n la distance O A indice n . la demi-diagonale égale trois racine carrée de deux un متاعها suite géométrique ، la raison هاذي . égale trois racine carrée de deux ، sur deux puissance n triangle كل خاطر ، suite géométrique ، la raison un demi زادة la ligne polygonale متاع demi . w les côtés suite géométrique : trois racine carrée de متاع somme هي la ligne متاع la longueur إذن . O في rectangle . dix ، fois (un moins un sur deux puissance n)

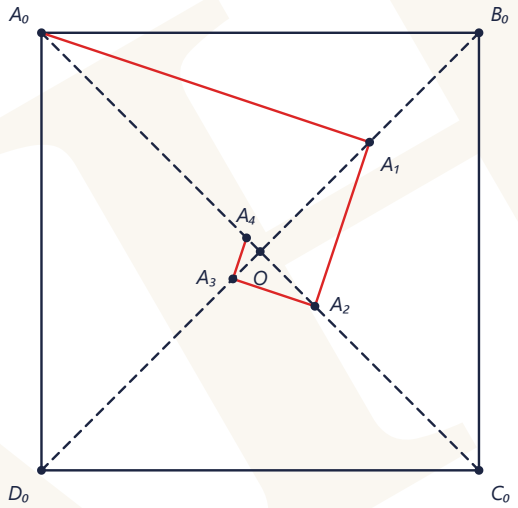
Regarde la figure : un carré de centre O et de côté six centimètres. Les points A indice un, A indice deux, A indice trois tournent sur les demi-diagonales, et à chaque fois la distance à O est divisée par deux. On appelle U indice n la distance O A indice n. La demi-diagonale égale trois racine carrée de deux, donc U indice n égale trois racine carrée de deux, sur deux puissance n. C'est une suite géométrique de raison un demi. Et les côtés de la ligne polygonale forment aussi une suite géométrique de raison un demi, car chaque triangle est rectangle en O. Donc la longueur de la ligne est la somme d'une suite géométrique : trois racine carrée de dix, fois (un moins un sur deux puissance n).

Soit $A_0B_0C_0D_0$ un carré de centre O et de 6 cm de côté. On définit la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4$ de la figure de la façon suivante : les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont respectivement sur les segments $[OB_0]$, $[OC_0]$, $[OD_0]$ et $[OA_0]$, et tels que

$$OA_1 = \frac{1}{2}\,OB_0 \quad ; \quad OA_2 = \frac{1}{2^2}\,OC_0 \quad ; \quad OA_3 = \frac{1}{2^3}\,OD_0 \quad ; \quad OA_4 = \frac{1}{2^4}\,OA_0$$

On reconduit le même procédé : A_5, A_6, … sont sur $[OB_0]$, $[OC_0]$, … avec $OA_5 = \frac{1}{2^5}\,OB_0$, $OA_6 = \frac{1}{2^6}\,OC_0$, …

1. Sur quel segment se trouve le point A_n, suivant les valeurs de n ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = OA_n$. Calcule U_0, U_1 et U_2. Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Exprime U_n en fonction de n.
3. Soit (L_n) la suite définie par $L_n = A_nA_{n+1}$. Montre que $L_n = \dfrac{3\sqrt{10}}{2^{n+1}}$.
4. Soit p_n la longueur de la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3\ldots A_n$. Exprime p_n en fonction de n.



La ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4$ dans le carré $A_0B_0C_0D_0$.

Un carré A0 B0 C0 D0 de centre O : A0 en haut à gauche, B0 en haut à droite, C0 en bas à droite, D0 en bas à gauche. Ses deux diagonales se coupent en O à angle droit. Le point A1 est le milieu du segment [O B0]. Le point A2 est sur le segment [O C0], au quart de la distance en partant de O. Le point A3 est sur le segment [O D0], au huitième. Le point A4 est sur le segment [O A0], au seizième. La ligne brisée A0 A1 A2 A3 A4 tourne autour de O en s'en rapprochant, comme une spirale.

LA DISTANCE OA_n

$$U_n = \frac{3\sqrt{2}}{2^n}$$

LA LONGUEUR DE LA LIGNE $A_0A_1\ldots A_n$

$$p_n = 3\sqrt{10} \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans ce carré de côté 6 centimètres, dis où se trouve A_n, exprime $U_n = OA_n$ et $L_n = A_nA_{n+1}$ en fonction de n, puis la longueur p_n de la ligne.

> Dans ce carré de côté 6 centimètres, dis où se trouve A_n, exprime $U_n = OA_n$ et L indice n égale A indice n A indice (n plus un) en fonction de n, puis la longueur p_n de la ligne.
>
> Dans ce carré de côté 6 centimètres, dis où se trouve A indice n, exprime U indice n égale O A indice n et L indice n égale A indice n A indice (n plus un) en fonction de n, puis la longueur p indice n de la

.ligne

Où est le point ? — Les points tournent sur les quatre demi-diagonales, et reviennent sur la même tous les quatre pas. On regarde le reste de la division de n par 4 : reste 0, A_n est sur $[OA_0]$; reste 1, sur $[OB_0]$; reste 2, sur $[OC_0]$; reste 3, sur $[OD_0]$.

La demi-diagonale — La diagonale d'un carré de côté 6 mesure $6\sqrt{2}$, et O est son milieu. Les quatre demi-diagonales ont la même longueur.

$U_0 = OA_0 = 3\sqrt{2} \quad ; \quad U_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad U_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

La nature de la suite — $U_n = \dfrac{1}{2^n} \times 3\sqrt{2}$, donc $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,U_n$: la suite est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $3\sqrt{2}$.

$U_n = 3\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3\sqrt{2}}{2^n}$

La nature de la suite. $U_n = \dfrac{1}{2^n} \times 3\sqrt{2}$, donc U indice (n plus un) égale un demi fois U indice n : la suite est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $3\sqrt{2}$.

La nature de la suite. U indice n égale 1 sur 2 puissance n, fois 3 racine carrée de 2, donc U indice (n plus un) égale un demi fois U indice n: la suite est géométrique de raison 1 sur 2 et de premier terme .3 racine carrée de 2

Un côté de la ligne — Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires : le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en O. On applique le théorème de Pythagore, avec $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,U_n$.

$L_n^2 = U_n^2 + \frac{1}{4}\,U_n^2 = \frac{5}{4}\,U_n^2$

Un côté de la ligne. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires : le triangle O A indice n A indice (n plus un) est rectangle en O. On applique le théorème de Pythagore, avec U indice (n plus un) égale un demi fois U indice n.

Un côté de la ligne. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires: le triangle O A indice n A indice (n plus un) est rectangle en O. On applique le théorème de Pythagore, avec U indice (n plus un) égale .un demi fois U indice n

$L_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2^n} = \frac{3\sqrt{10}}{2^{n+1}}$

La longueur de la ligne — (L_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $L_0 = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$. La ligne qui va de A_0 à A_n compte n côtés : $p_n = L_0 + L_1 + \ldots + L_{n-1}$.

$p_n = \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3\sqrt{10} \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

La longueur de la ligne. (L_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme L indice 0 égale 3 racine carrée de 10, le tout sur 2. La ligne qui va de A_0 à A_n compte n côtés : p indice n égale L indice 0 plus L indice 1 plus et ainsi de suite plus L indice (n moins un).

La longueur de la ligne. L indice n est géométrique de raison 1 sur 2 et de premier terme L indice 0 égale 3 racine carrée de 10, le tout sur 2. La ligne qui va de A indice 0 à A indice n compte n côtés: p .indice n égale L indice 0 plus L indice 1 plus et ainsi de suite plus L indice (n moins un)

$$U_n = \frac{3\sqrt{2}}{2^n} \quad ; \quad L_n = \frac{3\sqrt{10}}{2^{n+1}} \quad ; \quad p_n = 3\sqrt{10} \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

U indice n égale 3 racine carrée de 2, le tout sur 2 puissance n ; L indice n égale 3 racine carrée de 10, le tout sur 2 puissance (n plus un) ; p indice n égale 3 racine carrée de 10, fois la parenthèse 1 moins 1 sur 2 puissance n

U indice n égale 3 racine carrée de 2, le tout sur 2 puissance n; L indice n égale 3 racine carrée de 10, le tout sur 2 puissance (n plus un); p indice n égale 3 racine carrée de 10, fois la parenthèse 1 moins 1 sur 2 puissance n

À ne pas faire : La ligne $A_0A_1 \dots A_n$ a $n+1$ côtés — Elle a n côtés : L_0, L_1, ..., L_{n-1}. Il y a $n+1$ points, donc n segments entre eux. Le dernier côté est $A_{n-1}A_n = L_{n-1}$.

Il y a $n+1$ points, donc n segments entre eux. Le dernier côté est A indice (n moins un) A indice n égale L indice (n moins un).

Il y a n plus 1 points, donc n segments entre eux. Le dernier côté est A indice (n moins un) A indice n égale L indice (n moins un).

19. ACTIVITÉ

Un problème pour aller plus loin : un zigzag de projetés orthogonaux

CE QU'IL DIT

Chouf la figure : triangle O A B, rectangle fi B. O A égale cinq, O B égale quatre, w A B égale trois. Nhabbtou men B 3moudi 3la O A : nal9aw H indice un. Men H indice un 3moudi 3la O B : nal9aw H indice deux, w hakka. Koll marra 3andna triangle rectangle, w l'angle fi O houwa bidou. Le cosinus de l'angle O égale quatre cinquièmes. Idhan O H indice un égale quatre cinquièmes fois O B, w koll distance jdida hiya quatre cinquièmes fois elli sab9etha. Hedhi suite géométrique, la raison quatre cinquièmes. W les côtés mta3 le zigzag, koll wa7ed égale trois cinquièmes fois la distance elli m3ah, idhan la longueur mte3ou somme mta3 suite géométrique.

شوف الـ figure : triangle O A B ، rectangle في . B . O A égale cinq ، O B égale quatre ، w A B égale trois نهبّطو من B عمودي على O A : نلقاو H indice un . من H indice un عمودي على O B : نلقاو H indice deux ، w هكّا . كل مرّة عندنا l'angle w ، triangle rectangle في O هو بيدو . le cosinus de l'angle O égale quatre cinquièmes . إذن w ، O B fois cinquièmes quatre هي جديدة distance كل O H indice un égale quatre متاع الـ suite géométrique ، la raison quatre cinquièmes . w les côtés هاذي . اللي سبقتها cinquièmes fois متاع somme متاعو la longueur إذن ، معاه اللي égale trois cinquièmes fois la distance كل واحد ، zigzag . suite géométrique

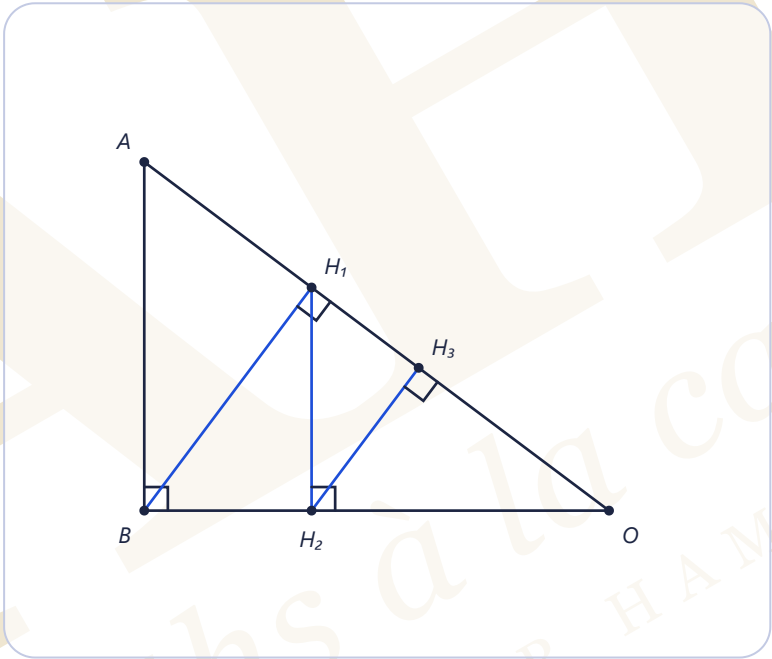
Regarde la figure : un triangle O A B, rectangle en B. O A égale cinq, O B égale quatre, et A B égale trois. On abaisse de B la perpendiculaire à O A : on obtient H indice un. De H indice un, la perpendiculaire à O B : on obtient H indice deux, et ainsi de suite. À chaque fois, on a un triangle rectangle, avec le même angle en O. Le cosinus de l'angle O égale quatre cinquièmes. Donc O H indice un égale quatre cinquièmes fois O B, et chaque nouvelle distance est quatre cinquièmes fois la précédente. C'est une suite géométrique de raison quatre cinquièmes. Et les côtés du zigzag valent chacun trois cinquièmes fois la distance correspondante, donc sa longueur est la somme d'une suite géométrique.

Dans la figure, OAB est un triangle rectangle en B tel que $OA = 5$, $OB = 4$ et $AB = 3$.

H_1 est le projeté orthogonal de B sur (OA), H_2 le projeté orthogonal de H_1 sur (OB), H_3 le projeté orthogonal de H_2 sur (OA), H_4 le projeté orthogonal de H_3 sur (OB), et ainsi de suite.

1. Calcule $\frac{OH_1}{OB}$ et déduis-en OH_1. Montre que $\frac{OH_1}{OB} = \frac{OH_2}{OH_1} = \frac{OH_3}{OH_2} = \frac{4}{5}$, puis déduis-en OH_2 et OH_3.
2. Sur quel côté du triangle OAB se trouve le point H_n ? Calcule OH_{n+1} en fonction de OH_n, puis déduis-en l'expression de OH_n en fonction de n.
3. Vérifie que $BH_1 = \frac{3}{5}OB$, $H_1H_2 = \frac{3}{5}OH_1$ et $H_2H_3 = \frac{3}{5}OH_2$. Soit $S = BH_1 + H_1H_2 + H_2H_3 + \ldots + H_nH_{n+1}$. Donne l'expression de S en fonction de n.

Indication : pense aux rapports trigonométriques dans un triangle rectangle.



Le zigzag B, H_1, H_2, H_3 entre les côtés [OA] et [OB].

Un triangle OAB rectangle en B : B en bas à gauche, O en bas à droite, A au-dessus de B. OA mesure 5, OB mesure 4 et AB mesure 3. Le point H1 est le pied de la perpendiculaire menée de B au côté [OA]. Le point H2 est le pied de la perpendiculaire menée de H1 au côté [OB]. Le point H3 est le pied de la perpendiculaire menée de H2 au côté [OA]. Les segments [B H1], [H1 H2] et [H2 H3] forment un zigzag entre les côtés [OA] et [OB], de plus en plus court en allant vers O.

POUR TOUT ENTIER NATUREL NON NUL N

$$OH_n = 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

LA LONGUEUR DU ZIGZAG

$$S = 12 \times \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans le triangle OAB rectangle en B, avec $OA = 5$, $OB = 4$ et $AB = 3$, calcule OH_1, OH_2 et OH_3, exprime OH_n en fonction de n, puis la somme $S = BH_1 + H_1H_2 + \ldots + H_nH_{n+1}$.

> Dans le triangle OAB rectangle en B, avec $OA = 5$, $OB = 4$ et $AB = 3$, calcule OH_1, OH_2 et OH_3, exprime OH_n en fonction de n, puis la somme S égale B H indice 1 plus H indice 1 H indice 2 plus et ainsi de suite plus H indice n H indice (n plus un).
>
> Dans le triangle O A B rectangle en B, avec O A égale 5, O B égale 4 et A B égale 3, calcule O H indice 1, O H indice 2 et O H indice 3, exprime O H indice n en fonction de n, puis la somme S égale B H .indice 1 plus H indice 1 H indice 2 plus et ainsi de suite plus H indice n H indice (n plus un)

L'angle en O — Dans le triangle OAB rectangle en B, on lit le cosinus et le sinus de l'angle en O.

$\cos\widehat{O} = \frac{OB}{OA} = \frac{4}{5}$; $\sin\widehat{O} = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{5}$

La première distance — Le triangle OBH_1 est rectangle en H_1, avec le même angle en O : $\frac{OH_1}{OB} = \cos\widehat{O}$.

$\frac{OH_1}{OB} = \frac{4}{5}$ donc $OH_1 = \frac{4}{5} \times 4 = \frac{16}{5}$

Les deux suivantes — Chaque nouveau triangle est rectangle, avec le même angle en O : le rapport est toujours $\frac{4}{5}$.

$OH_2 = \frac{4}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{64}{25}$; $OH_3 = \frac{4}{5} \times \frac{64}{25} = \frac{256}{125}$

Où est le point ? — Les projetés alternent : H_n est sur $[OA]$ si n est impair, sur $[OB]$ si n est pair.

La suite des distances — $OH_{n+1} = \frac{4}{5}OH_n$: les distances forment une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$. En partant de $OB = 4$, on multiplie n fois par $\frac{4}{5}$.

$OH_n = 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$

> La suite des distances. O H indice (n plus un) égale quatre cinquièmes fois O H indice n : les distances forment une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$. En partant de $OB = 4$, on multiplie n fois par $\frac{4}{5}$.
>
> La suite des distances. O H indice (n plus un) égale quatre cinquièmes fois O H indice n: les distances forment une suite géométrique de raison 4 sur 5. En partant de O B égale 4, on multiplie n fois par 4 .sur 5

Les côtés du zigzag — Dans chaque triangle rectangle, le côté opposé à l'angle en O vaut $\sin\widehat{O}$ fois l'hypoténuse.

$BH_1 = \frac{3}{5}OB$; $H_1H_2 = \frac{3}{5}OH_1$; $H_nH_{n+1} = \frac{3}{5}OH_n$

La somme — On met $\frac{3}{5}$ en facteur : il reste la somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique de premier terme 4 et de raison $\frac{4}{5}$.

$S = \frac{3}{5} \times 4 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = 12 \times \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$

$$OH_n = 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \quad ; \quad S = 12 \times \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$$

> $OH_n = 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$; S égale 12 fois la parenthèse 1 moins quatre cinquièmes puissance (n plus un)

> O H indice n égale 4 fois la parenthèse 4 sur 5, puissance n; S égale 12 fois la parenthèse 1 moins quatre cinquièmes puissance (n plus un)

20. ACTIVITÉ

Un problème pour aller plus loin : l'échiquier et les grains de blé

CE QU'IL DIT

7keya ma3roufa : elli e5tara3 le jeu d'échecs, el malek 9allou otlob elli t7eb. Tlab : grain de blé wa7ed fi la première case, deux fi la deuxième, quatre fi la troisième, w koll marra yadhreb fi deux, 7atta la case numéro soixante-quatre. El malek dh7ak, 9al 7aja 9lila. Amma ki na7sbou : un plus deux plus quatre, 7atta deux puissance soixante-trois. Hedhi la somme mta3 les puissances de deux, w hiya deux puissance soixante-quatre, moins un. Nombre kbir barcha : akther men dix-huit milliards de milliards. Bech nhezzouh, yelzemna ta9riban quatre-vingt-douze millions de bateaux. Chouft suite géométrique kifech tekber fisa3 !

حكاية معروفة : اللي اخترع le jeu d'échecs ، الملك قالّو أطلب اللي تحبّ . طلب : grain de blé واحد في la première case ، deux في la deuxième ، quatre w في la troisième ، كل مرّة يضرب في deux ، حتّى la case numéro soixante-quatre . الملك ضحك ، قال حاجة قليلة . أمّا كي نحسبو : un plus deux plus quatre ، حتّى deux puissance soixante-trois . هاذي la somme متاع les puissances de deux ، w هي deux puissance soixante-quatre ، moins un . nombre كبير برشا : أكثر من dix-huit milliards de milliards . باش نهزّوه ، يلزمنا تقريبا quatre-vingt-douze millions de bateaux . شفت suite géométrique كيفاش تكبر فيسع !

Une histoire célèbre : le roi dit à l'inventeur du jeu d'échecs de demander ce qu'il voulait. Il demanda : un seul grain de blé sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, en multipliant chaque fois par deux, jusqu'à la case numéro soixante-quatre. Le roi rit, et trouva que c'était peu. Mais quand on calcule : un plus deux plus quatre, jusqu'à deux puissance soixante-trois. C'est la somme des puissances de deux, et elle vaut deux puissance soixante-quatre, moins un. Un nombre énorme : plus de dix-huit milliards de milliards. Pour le transporter, il faudrait environ quatre-vingt-douze millions de bateaux. Tu vois comme une suite géométrique grandit vite !

Un auteur arabe, Al-Sephadi, raconte que l'inventeur du jeu d'échecs fut présenté à son maître, roi de Perse. Pour le récompenser, celui-ci promit de lui accorder ce qu'il désirerait. L'inventeur, qui devait être un mathématicien de talent, demanda un grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 pour la seconde, 4 pour la troisième, 8 pour la quatrième et ainsi de suite, jusqu'à la dernière case (un échiquier comporte 64 cases).

Le roi pensa que c'était une bien faible récompense, mais ses conseillers firent le calcul : le nombre de grains de blé est $2^{64} - 1$. Un nombre qui dépasse de beaucoup de fois la récolte de nos jours, chaque année, dans le monde entier !

Un grain de blé pèse en moyenne $0{,}05$ g. Combien faut-il de bateaux de $10\,000$ tonnes pour transporter ce blé ?

LE NOMBRE DE GRAINS DE BLÉ

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

EXEMPLE TRAITÉ

On pose 1 grain de blé sur la première case d'un échiquier, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^{e} case. Calcule le nombre total de grains, puis le nombre de bateaux de $10\,000$ tonnes nécessaires, si un grain pèse $0{,}05$ gramme.

La somme — La case numéro k porte 2^{k-1} grains : la dernière en porte 2^{63}. C'est la somme des puissances de 2, de 2^0 à 2^{63}.

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$

Un ordre de grandeur — À la calculatrice, on trouve un nombre de vingt chiffres.

$2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \times 10^{19}$

La masse — Chaque grain pèse $0{,}05$ gramme, et une tonne vaut 10^6 grammes.

$1{,}84 \times 10^{19} \times 0{,}05 \approx 9{,}2 \times 10^{17}\ \text{g} = 9{,}2 \times 10^{11}\ \text{tonnes}$

Les bateaux —

$\frac{9{,}2 \times 10^{11}}{10^4} = 9{,}2 \times 10^7$

Conclusion — Il faudrait environ 92 millions de bateaux de $10\,000$ tonnes.

$2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \times 10^{19}$ grains ; environ 92 millions de bateaux

> $2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \times 10^{19}$ grains ; environ 92 millions de bateaux
>
> puissance 64, moins 1, vaut environ 1,84 fois 10 puissance 19 grains; environ 92 millions de 2 bateaux

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. (U_n) est géométrique de raison q si $U_{n+1} = q \times U_n$ pour tout entier naturel n.

   > Suite géométrique de raison q : U indice (n plus un) égale q fois U indice n, pour tout entier naturel n.
   >
   > *Une suite géométrique de raison q : U indice (n plus un) égale q fois U indice n, pour tout entier naturel n.*

2. Des termes consécutifs d'une suite géométrique sont en progression géométrique.

   > Des termes consécutifs mta3 suite géométrique, n9oulou houma en progression géométrique.
   >
   > *Des termes consécutifs d'une suite géométrique sont dits en progression géométrique.*

3. Augmenter de $t\,\%$, c'est multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$; diminuer de $t\,\%$, c'est multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

   > Nzidou t pour cent : nadhrbou fi un plus t sur cent. Non9sou t pour cent : nadhrbou fi un moins t sur cent.
   > *Augmenter de t pour cent : on multiplie par un plus t sur cent. Diminuer de t pour cent : on multiplie par un moins t sur cent.*

4. $V_n = V_0 \times q^n$; $V_n = V_p \times q^{n-p}$; en particulier $V_n = V_1 \times q^{n-1}$.

   > V indice n égale V indice zéro fois q puissance n. W V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p).
   > *V indice n égale V indice zéro fois q puissance n. Et V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p).*

5. $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, pour $q \neq 1$.

   > Un plus q plus q au carré, 7atta q puissance n, égale un moins q puissance (n plus un), le tout sur (un moins q), ki q différent de un.
   > *Un plus q plus q au carré, jusqu'à q puissance n, égale un moins q puissance (n plus un), le tout sur (un moins q), quand q est différent de un.*

6. Somme de n termes consécutifs ($q \neq 1$) : $S = a \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, où a est le premier terme de la somme.

   > La somme mta3 n termes consécutifs : le premier terme, fois (un moins q puissance n), le tout sur (un moins q).
   > *La somme de n termes consécutifs : le premier terme, fois (un moins q puissance n), le tout sur (un moins q).*

7. Si $q = 1$, la suite est constante et $S = n \times a$.

   > Ken q égale un, la suite constante, w la somme hiya n fois a.
   > *Si q égale un, la suite est constante, et la somme est n fois a.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna les suites géométriques. Tfakker : bech tet3adda men terme lelli ba3dou, tadhreb dima fi la raison q. V indice n égale V indice zéro fois q puissance n. W la somme mta3 n termes hiya le premier terme, fois (un moins q puissance n), le tout sur (un moins q). Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا les suites géométriques . تفكّر : باش تتعدّى من terme للّي بعدو ، تضرب ديما في la raison q . V indice n égale V indice zéro fois q puissance n . w la somme متاع n termes هي fois ، le premier terme . يالله للـ exercices . (un moins q puissance n) ، le tout sur (un moins q)

Voilà, nous avons terminé les suites géométriques. Retiens : pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par la raison q. V indice n égale V indice zéro fois q puissance n. Et la somme de n termes, c'est le premier terme, fois (un moins q puissance n), le tout sur (un moins q). Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · SUITE GÉOMÉTRIQUE

chnowa hiya suite géométrique | c'est quoi une suite géométrique | définition d'une suite géométrique | suite géométrique ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_{n+1} = q \times U_n$$

CE QU'IL RÉPOND

Suite géométrique hiya suite net3addew fiha men terme lelli ba3dou ki nadhrbou dima fi nafs le réel q. Nektbou : $U_{n+1} = q \times U_{n}$. Mathalan : 1, 2, 4, 8 : koll marra nadhrbou fi 2.

suite géométrique هي suite نتعدّاو فيها من terme للّي بعدو كي نضربو ديما في نفس الـ réel q . نكتبو : U indice (n plus un) égale q fois U indice n . مثلا : huit ، quatre ، deux ، un : كل مرّة نضربو في deux .

Une suite géométrique est une suite où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même réel q. On écrit : U indice (n plus un) égale q fois U indice n. Par exemple : un, deux, quatre, huit : on multiplie par deux à chaque fois.

QUESTION 2 · SUITE GÉOMÉTRIQUE

chnowa hiya la raison | c'est quoi la raison d'une suite | la raison ma3neha chnowa

CE QU'IL RÉPOND

La raison hiya le nombre q elli nadhrbou fih bech net3addew men terme lelli ba3dou. Hiya dima nafsha fel suite el koll. Mathalan fi 3, 6, 12, 24, la raison égale 2.

la raison هي الـ nombre q اللي نضربو فيه باش نتعدّاو من terme للّي بعدو . هي ديما نفسها في الـ suite الكل . مثلا في la raison égale deux ، vingt-quatre ، douze ، six ، trois .

La raison est le nombre q par lequel on multiplie pour passer d'un terme au suivant. Elle est la même dans toute la suite. Par exemple dans trois, six, douze, vingt-quatre, la raison égale deux.

QUESTION 3 · RETROUVER LA RAISON À PARTIR DE DEUX TERMES

kifech nal9a la raison | comment calculer la raison | comment trouver la raison avec deux termes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$q = \frac{U_1}{U_0}$$

$$q^{n-p} = \frac{V_n}{V_p}$$

CE QU'IL RÉPOND

Tdivisi terme 3la le terme elli sab9ou, mathalan $\frac{U_{1}}{U_{0}}$. W ken ta3ref zouz termes b3ad 3la b3adhhom, ta7seb q^{n-p} : hiya $\frac{V_{n}}{V_{p}}$, w mba3d tal9a q.

تديفيزي terme على terme اللي سبقو ، مثلا le terme . w U indice un sur U indice zéro كان تعرف زوج termes بعاد على بعضهم ، تحسب q puissance (n moins p) : هي w ، V indice n sur V indice p مبعّد تلقى q .

On divise un terme par le terme précédent, par exemple U indice un sur U indice zéro. Et si on connaît deux termes éloignés, on calcule q puissance (n moins p) : c'est V indice n sur V indice p, puis on trouve q.

QUESTION 4 · EXEMPLE : UNE SOMME À SIGNES ALTERNÉS

la raison tnajjem tkoun négative | est-ce que la raison peut être négative | raison négative chnowa ysir

CE QU'IL RÉPOND

Ey, la raison tnajjem tkoun négative. Wa9tha les termes ybaddlou le signe koll marra : wa7ed positif, w elli ba3dou négatif. Mathalan la raison -2 : 1, -2, 4, -8.

إي ، la raison تنجّم تكون négative . وقتها les termes يبدّلو le signe كل مرّة : واحد ، w positif اللي بعدو négatif . مثلا moins huit ، quatre ، moins deux ، un : la raison moins deux .

Oui, la raison peut être négative. Dans ce cas les termes changent de signe à chaque fois : un positif, puis le suivant négatif. Par exemple avec la raison moins deux : un, moins deux, quatre, moins huit.

QUESTION 5 · RECONNAÎTRE UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

kifech nbayyen elli suite géométrique | comment montrer qu'une suite est géométrique | comment prouver que la suite est géométrique | comment démontrer suite géométrique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_{n+1} = q \times U_n$$

CE QU'IL RÉPOND

Tekteb U_{n+1}, w ttalla3 fih U_{n} : lezem tal9a $q \times U_{n}$, w q ma yetbaddelch m3a n. W ken les termes mouch zéro, ta7seb $\frac{U_{n+1}}{U_{n}}$: lezem yatla3 dima nafs le nombre.

تكتب ، w U indice (n plus un) تطلّع فيه U indice n : لازم تلقى q fois U indice n ، w q ما يتبدّلش مع n . كان les termes موش zéro ، تحسب U indice (n plus un) sur U indice n : لازم يطلع ديما نفس الـ nombre .

On écrit U indice (n plus un), et on y fait apparaître U indice n : il faut trouver q fois U indice n, avec q qui ne change pas avec n. Et si les termes sont non nuls, on calcule U indice (n plus un) sur U indice n : il doit toujours donner le même nombre.

QUESTION 6 · RECONNAÎTRE UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

kifech nbayyen elli suite mouch géométrique | comment savoir qu'une suite n'est pas géométrique | suite pas géométrique kifech na3ref

CE QU'IL RÉPOND

Yekfi tal9a zouz quotients mouch kif kif. Ta7seb $\frac{U_{1}}{U_{0}}$, w $\frac{U_{2}}{U_{1}}$: ken ma tal3ouch kif kif, la suite mouch géométrique.

يكفي تلقى زوز quotients موش كيف كيف . تحسب U indice un sur U indice zéro ، w U indice deux sur U indice un : كان ما طلعوش كيف كيف ، الـ suite موش géométrique .

Il suffit de trouver deux quotients différents. On calcule U indice un sur U indice zéro, et U indice deux sur U indice un : s'ils ne sont pas égaux, la suite n'est pas géométrique.

QUESTION 7 · SUITE GÉOMÉTRIQUE

chnowa el far9 bin suite arithmétique w suite géométrique

quelle est la différence entre arithmétique et géométrique

arithmétique walla géométrique kifech na3ref

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_{n+1} = U_n + r$$

$$U_{n+1} = q \times U_n$$

CE QU'IL RÉPOND

Fel suite arithmétique, nzidou dima nafs le nombre : la raison r. Fel suite géométrique, nadhrbou dima fi nafs le nombre : la raison q. Ya3ni wa7da bel addition, w lo5ra bel multiplication.

في الـ suite arithmétique ، نزيدو ديما نفس الـ nombre : la raison r . في الـ suite géométrique ، نضربو ديما في نفس الـ nombre : la raison q . يعني وحدة بالـ addition ، w الأخرى بالـ multiplication .

Dans une suite arithmétique, on ajoute toujours le même nombre : la raison r. Dans une suite géométrique, on multiplie toujours par le même nombre : la raison q. L'une avance par addition, l'autre par multiplication.

QUESTION 8 · TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

chnowa le terme général mta3 suite géométrique

c'est quoi la formule du terme général

kifech nekteb Un en fonction de n

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$V_n = V_0 \times q^n$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken le premier terme houwa V_{0} w la raison q, le terme général houwa : $V_{n} = V_{0} \times q^{n}$. 5ater bech nouslou l V_{n}, nadhrbou fi q n marrat.

كان le premier terme هو V indice zéro w la raison q ، le terme général هو V indice n égale V indice zéro : خاطر باش نوصلو لـ V indice n ، نضربو في q n مرّات . fois q puissance n .

Si le premier terme est V indice zéro et la raison q, le terme général est : V indice n égale V indice zéro fois q puissance n. Car pour arriver à V indice n, on multiplie n fois par q.

QUESTION 9 · D'UN TERME À UN AUTRE

ken le premier terme houwa U1 chnowa la formule | la formule quand la suite commence par U1 | w ken nabdew men U1

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_n = U_1 \times q^{n-1}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken la suite tabda men U_{1}, nektbou : $U_{n} = U_{1} \times q^{n-1}$. 5ater men U_{1} l U_{n}, famma $n - 1$ pas bark.

كان الـ suite تبدا من U indice un ، نكتبو : U indice n égale U indice un ، fois q puissance (n moins un) .
خاطر من U indice un لـ U indice n ، فمّا برك n moins un pas .

Si la suite commence à U indice un, on écrit : U indice n égale U indice un, fois q puissance (n moins un). Car de U indice un à U indice n, il n'y a que n moins un pas.

QUESTION 10 · D'UN TERME À UN AUTRE

chnowa la formule b Vp | c'est quoi la formule avec Up | kifech nesta3mel Vp

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

CE QU'IL RÉPOND

$V_{n} = V_{p} \times q^{n-p}$. Nesta3mlouha ki na3rfou terme e5er mouch le premier. L'exposant houwa la différence mta3 les indices.

نستعملوها كي نعرفو le terme آخر موش . V indice n égale V indice p ، fois q puissance (n moins p)
. les indices متاع la différence هو premier . l'exposant

V indice n égale V indice p, fois q puissance (n moins p). On l'utilise quand on connaît un autre terme que le premier. L'exposant est la différence des indices.

QUESTION 11 · TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

kifech nal9a l'indice n | comment trouver l'indice n | comment chercher n sachant Un

CE QU'IL RÉPOND

Tekteb le terme général, w t7ottou égale la valeur elli 3tawhelek. Tal9a q^{n} égale nombre. Mba3d ta7seb les puissances mta3 q, wa7da wa7da, 7atta tousel lel nombre hedhaka : l'exposant houwa n.

تكتب le terme général ، w تحطّو égale الـ valeur اللي عطاوهالك . تلقى q puissance n égale nombre . مبعّد
تحسب les puissances متاع q ، وحدة وحدة ، حتّى توصل للـ nombre هذاكا : l'exposant هو n .

On écrit le terme général, et on le pose égal à la valeur donnée. On obtient q puissance n égale un nombre. Ensuite on calcule les puissances de q, une par une, jusqu'à atteindre ce nombre : l'exposant est

n.

QUESTION 12 · RETROUVER LA RAISON À PARTIR DE DEUX TERMES

3lech la raison 3andha deux valeurs | pourquoi il y a deux valeurs possibles pour q | wa9tech nal9a zouz valeurs

CE QU'IL RÉPOND

Ki l'exposant ykoun pair, la puissance tna77i le signe. Mathalan $q^{2} = 9$: q égale 3, walla q égale -3, 5ater $(-3)^{2}$ zeda 9. Ken l'exposant impair, famma valeur wa7da.

كي l'exposant يكون pair ، la puissance تنحّي le signe . مثلا q égale trois : q au carré égale neuf ، ولّا q
. وحدة valeur فمّا ، l'exposant impair كان . neuf زادة au carré (moins trois) خاطر ، égale moins trois

Quand l'exposant est pair, la puissance efface le signe. Par exemple q au carré égale neuf : q égale trois, ou q égale moins trois, car (moins trois) au carré vaut aussi neuf. Si l'exposant est impair, il n'y a qu'une valeur.

QUESTION 13 · TROIS CAS PARTICULIERS

wa9tech la suite tkoun constante | quand est-ce que la suite est constante | suite constante hiya géométrique

CE QU'IL RÉPOND

Ki la raison q égale 1. Nadhrbou dima fi 1, idhan les termes el koll égaux à U_{0}. Suite constante hiya suite géométrique, la raison mte3ha 1.

كي la raison q égale un . نضربو ديما في un ، إذن les termes الكل . suite constante égaux à U indice zéro
. un متاعها suite géométrique ، la raison هي

Quand la raison q égale un. On multiplie toujours par un, donc tous les termes sont égaux à U indice zéro. Une suite constante est une suite géométrique de raison un.

QUESTION 14 · TROIS CAS PARTICULIERS

ken la raison égale zéro chnowa ysir | que se passe-t-il si la raison est nulle | la raison tnajjem tkoun zéro

CE QU'IL RÉPOND

Ken la raison égale zéro, men U_{1} w enti tala3, les termes el koll zéro, 5ater nadhrbou fi zéro. Les formules mta3 le cours nesta3mlouhom ki q différent de zéro.

كان la raison égale zéro ، من U indice un w إنت طالع ، zéro الكل les termes ، خاطر نضربو في zéro . الـ
. q différent de zéro كي نستعملوهم cours متاع الـ formules

Si la raison égale zéro, à partir de U indice un tous les termes sont nuls, car on multiplie par zéro. Les formules du cours s'utilisent quand q est différent de zéro.

QUESTION 15 · TROIS CAS PARTICULIERS

ken le premier terme égale zéro chnowa ysir | que se passe-t-il si le premier terme est nul | ken U0 égale zéro chnowa ysir

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$U_0 = 0 \ : \ U_n = 0$ pour tout n

CE QU'IL RÉPOND

Ken le premier terme U_{0} égale zéro, les termes el koll zéro, w U_{0} m3ahom, 5ater zéro fois q ya3ti dima zéro.

كان les termes ، le premier terme U indice zéro égale zéro ، w U indice zéro الكل معاهم ، خاطر zéro ، zéro fois q يعطي ديما zéro .

Si le premier terme U indice zéro égale zéro, tous les termes sont nuls, U indice zéro compris, car zéro fois q donne toujours zéro.

QUESTION 16 · POUR COMPRENDRE : UN LOYER QUI AUGMENTE

3lech augmentation b pourcentage ta3ti suite géométrique | quel est le lien entre pourcentage et suite géométrique | kifech nal9a la raison men pourcentage

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$1 + \frac{t}{100}$

$1 - \frac{t}{100}$

CE QU'IL RÉPOND

Ki 7aja tzid b pourcentage thebet, ma3neha nadhrbou dima fi nafs le nombre. Nzidou t pour cent : nadhrbou fi $1 + \frac{t}{100}$. Non9sou t pour cent : nadhrbou fi $1 - \frac{t}{100}$. Le nombre hedha houwa la raison.

كي حاجة تزيد بـ pourcentage ثابت ، معناها نضربو ديما في نفس الـ nombre . نزيدو t pour cent : نضربو في un plus t sur cent . ننقصو t pour cent : نضربو في un moins t sur cent . الـ nombre هذا هو la raison .

Quand une quantité augmente d'un pourcentage fixe, cela veut dire qu'on multiplie toujours par le même nombre. Augmenter de t pour cent : on multiplie par un plus t sur cent. Diminuer de t pour cent : on multiplie par un moins t sur cent. Ce nombre est la raison.

QUESTION 17 · POUR COMPRENDRE : LES INTÉRÊTS COMPOSÉS

chnowa ma3neha intérêts composés | c'est quoi les intérêts composés | intérêts composés kifech yet7asbou

CE QU'IL RÉPOND

Intérêts composés, ma3neha koll 3am les intérêts yet7asbou 3la e5er capital, mouch 3la le capital mta3 el bidaya. Idhan le capital yetdhrab koll 3am fi nafs le nombre, w les capitaux ya3mlou suite

géométrique.

intérêts composés ، معناها كل عام les intérêts يتحسبو على آخر capital ، موش على الـ capital متاع البداية . إذن الـ capital يتضرب كل عام في نفس الـ w les capitaux ، nombre يعملو suite géométrique .

Des intérêts composés, cela veut dire que chaque année les intérêts se calculent sur le dernier capital, pas sur le capital de départ. Le capital est donc multiplié chaque année par le même nombre, et les capitaux forment une suite géométrique.

QUESTION 18 · SUITE GÉOMÉTRIQUE

chnowa ma3neha progression géométrique | c'est quoi une progression géométrique | en progression géométrique ma3neha chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Ki n9oulou des nombres houma en progression géométrique, ma3neha houma des termes consécutifs mta3 suite géométrique : net3addew men wa7ed lelli ba3dou ki nadhrbou fi nafs le nombre.

كي نقولو des nombres هوما en progression géométrique ، معناها هوما des termes consécutifs متاع suite géométrique : نتعدّاو من واحد للّي بعدو كي نضربو في نفس الـ nombre .

Quand on dit que des nombres sont en progression géométrique, cela veut dire que ce sont des termes consécutifs d'une suite géométrique : on passe de l'un au suivant en multipliant par le même nombre.

QUESTION 19 · SUITE GÉOMÉTRIQUE

chnowa hiya la moyenne géométrique | c'est quoi la moyenne géométrique | moyenne géométrique kifech na7sebha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$b = \sqrt{a \times c}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken a, b w c, trois réels positifs, w houma des termes consécutifs mta3 suite géométrique, wa9tha $b^{2} = a \times c$, ya3ni $b = \sqrt{a \times c}$. N9oulou b houwa la moyenne géométrique mta3 a w c.

كان w ، trois réels positifs ، a ، b w c هوما des termes consécutifs متاع suite géométrique ، وقتها b au carré égale a fois c ، يعني b égale racine carrée de a fois c . نقولو b هو la moyenne géométrique متاع a w c .

Si a, b et c sont trois réels positifs, termes consécutifs d'une suite géométrique, alors b au carré égale a fois c, donc b égale racine carrée de a fois c. On dit que b est la moyenne géométrique de a et c.

QUESTION 20 · EXEMPLE : LIRE UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE SUR UN GRAPHIQUE

les points mta3 suite géométrique alignés walla le | est-ce que les points sont alignés sur une droite | la représentation graphique mta3 suite géométrique kifech

CE QU'IL RÉPOND

N7ottou les points A_{n} : l'abscisse hiya n, w l'ordonnée hiya U_{n}. Fel suite géométrique, les points mouch alignés fel 3ada, 5ater ma nzidouch nafs le nombre. Les points alignés nal9awhom fel suite arithmétique.

نحطّو les points A indice n : l'abscisse هي n ، w l'ordonnée هي U indice n . في الـ suite géométrique ، les points موش alignés في العادة ، خاطر ما نزيدوش نفس الـ nombre . les points alignés نلقاوهم في الـ suite arithmétique .

On place les points A indice n : l'abscisse est n, et l'ordonnée est U indice n. Pour une suite géométrique, les points ne sont en général pas alignés, car on n'ajoute pas le même nombre. Les points alignés, on les trouve pour une suite arithmétique.

QUESTION 21 · SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

chnowa la formule mta3 la somme | comment calculer la somme des termes | kifech na7seb la somme mta3 suite géométrique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

CE QU'IL RÉPOND

$S = a \times \frac{1 - q^{n}}{1 - q}$. a houwa le premier terme mta3 la somme, q hiya la raison, w n houwa le nombre de termes. La formule hedhi nesta3mlouha ki q différent de 1.

somme متاع الـ le premier terme هو S égale a ، fois (un moins q puissance n) ، le tout sur (un moins q) . a . q différent de un كي نستعملوها هاذي formule الـ . le nombre de termes هو la raison ، w n هي ، q

S égale a, fois (un moins q puissance n), le tout sur (un moins q). a est le premier terme de la somme, q la raison, et n le nombre de termes. Cette formule s'utilise quand q est différent de un.

QUESTION 22 · SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

kifech na7seb le nombre de termes | comment compter les termes de la somme | 9addech men terme fel somme

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$n - p + 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Men U_{p} l U_{n}, famma $n - p + 1$ termes : na7sbou el tarfin. W ken les termes houma des puissances, chouf les exposants : men 3^{3} l 3^{9}, famma 7 termes.

من U indice p لـ U indice n ، فمّا n moins p plus un termes : نحسبو الطرفين . w كان les termes هوما des puissances ، شوف les exposants : من trois au cube لـ trois puissance neuf ، فمّا sept termes .

De U indice p à U indice n, il y a n moins p plus un termes : on compte les deux bouts. Et si les termes sont des puissances, regarde les exposants : de trois au cube à trois puissance neuf, il y a sept termes.

QUESTION 23 · LA SOMME DES PUISSANCES D'UN RÉEL

3lech q lezem ykoun différent de 1 | pourquoi q doit être différent de 1 dans la somme | w ken q égale 1 la somme chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$q = 1 \ : \ S = n \times a$$

CE QU'IL RÉPOND

5ater fel formule ndivisiw 3la $1 - q$, w ma najjmouch ndivisiw 3la zéro. Ken q égale 1, les termes el koll kif kif, égaux à a, idhan la somme hiya $n \times a$.

خاطر في الـ formule ديفيزيو على w ، un moins q ما نجّموش ديفيزيو على zéro . كان les termes ، q égale un
الكل كيف كيف ، égaux à a ، إذن الـ somme هي a fois n .

Parce que dans la formule on divise par un moins q, et on ne peut pas diviser par zéro. Si q égale un, tous les termes sont égaux à a, donc la somme est n fois a.

QUESTION 24 · LA SOMME DES PUISSANCES D'UN RÉEL

fel somme l'exposant n walla n plus 1 | dans la somme l'exposant est n ou n plus 1 | 3lech l'exposant n plus 1 fel somme

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

CE QU'IL RÉPOND

L'exposant houwa le nombre de termes. Fi $1 + q + q^{2} + \ldots + q^{n}$, famma $n + 1$ termes, 3la hedhaka nektbou q^{n+1}. W ken la somme fiha n termes, nektbou q^{n}.

n plus un فمّا ، q puissance n حتّى ، un plus q plus q au carré في . le nombre de termes هو l'exposant
. q puissance n نكتبو ، n termes فيها somme كان الـ q puissance (n plus un) . w على هذاكا نكتبو ، termes

L'exposant est le nombre de termes. Dans un plus q plus q au carré, jusqu'à q puissance n, il y a n plus un termes, c'est pourquoi on écrit q puissance (n plus un). Et si la somme a n termes, on écrit q puissance n.

QUESTION 25 · EXEMPLE : UNE SOMME À SIGNES ALTERNÉS

3lech les termes ybaddlou le signe | pourquoi les signes alternent | les termes un positif un négatif 3lech

CE QU'IL RÉPOND

5ater la raison négative. Ki nadhrbou fi nombre négatif, le signe yetbaddel : positif ywalli négatif, w négatif ywalli positif. 3la hedhaka les termes yjiw wa7ed positif w wa7ed négatif.

négatif ، w négatif يولّي positif : يتبدّل nombre négatif ، le signe في نضربو كي . la raison négative خاطر
. négatif واحد positif w يجيو واحد les termes هذاكا على . positif يولّي

Parce que la raison est négative. Quand on multiplie par un nombre négatif, le signe change : un positif devient négatif, et un négatif devient positif. C'est pourquoi les termes sont tour à tour positifs et négatifs.

QUESTION 26 · UN PROBLÈME POUR ALLER PLUS LOIN : L'ÉCHIQUIER ET LES GRAINS DE BLÉ

9addech men grain de blé fel échiquier | combien de grains de blé sur l'échiquier | l'histoire de l'échiquier chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Fel échiquier famma 64 cases. Na7sbou $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{63}$: nal9aw $2^{64} - 1$. Nombre kbir barcha, akther men 18 milliards de milliards.

deux puissance حتّى ، un plus deux plus quatre نحسبو . soixante-quatre cases فمّا échiquier الـ في
dix-huit من أكثر ، برشا كبير deux puissance soixante-quatre ، moins un . nombre نلقاو : soixante-trois
. milliards de milliards

Sur l'échiquier il y a soixante-quatre cases. On calcule un plus deux plus quatre, jusqu'à deux puissance soixante-trois : on trouve deux puissance soixante-quatre, moins un. Un nombre énorme, plus de dix-huit milliards de milliards.

QUESTION 27 · TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

kifech nal9a le terme précédent | comment calculer le terme précédent | le terme elli 9bal kifech na7sbou

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$U_n = \frac{U_{n+1}}{q}$$

CE QU'IL RÉPOND

Bech tarja3 l le terme elli sba9, tdivisi 3la la raison : $U_{n} = \frac{U_{n+1}}{q}$. Mathalan la raison 2 w terme égale 16 : elli sab9ou 8.

la مثلا . la raison : U indice n égale U indice (n plus un) sur q على تديفيزي ، سبق اللي le terme لـ ترجع باش
. huit سبقو اللي : raison deux w terme égale seize

Pour revenir au terme précédent, on divise par la raison : U indice n égale U indice (n plus un) sur q. Par exemple avec la raison deux et un terme égal à seize : le précédent est huit.

QUESTION 28 · POUR COMPRENDRE : TROIS RAISONS, TROIS COMPORTEMENTS

la suite géométrique tzid walla ton9es | est-ce que la suite géométrique est croissante ou décroissante | wa9tech les termes yekbrou

CE QU'IL RÉPOND

Hedha yetba3 la raison. Ken le premier terme positif : ki q akber men 1, les termes yekbrou. Ki q bin zéro w 1, les termes yon9sou w ya9rbou l zéro. W ki q négatif, les termes ybaddlou le signe koll marra.

هذا يتبع la raison . كان le premier terme positif : كي q أكبر من 1 ، les termes يكبرو . كي q بين zéro w 1 ، les termes ينقصو w يقربو لـ zéro . كي les termes q négatif ، les termes يبدّلو le signe كل مرّة .

Cela dépend de la raison. Si le premier terme est positif : quand q est plus grand que un, les termes grandissent. Quand q est entre zéro et un, les termes diminuent et se rapprochent de zéro. Et quand q est négatif, les termes changent de signe à chaque fois.

QUESTION 29 · POUR COMPRENDRE : LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE

kifech na7seb puissance bel calculatrice | comment calculer une puissance avec la calculatrice | calculatrice kifech nekteb puissance

CE QU'IL RÉPOND

Fel calculatrice, tekteb le nombre, mba3d la touche puissance, mba3d l'exposant. Rodd belek ki le nombre négatif : 7ottou bin parenthèses, kima $(-2)^{4}$, 5ater blech parenthèses la calculatrice ta7seb 7aja o5ra.

في الـ calculatrice ، تكتب الـ nombre ، مبعّد la touche puissance ، مبعّد l'exposant . ردّ بالك كي الـ nombre négatif : حطّو بين parenthèses ، كيما puissance quatre (moins deux) ، خاطر بلاش الـ parenthèses تحسب حاجة أخرى calculatrice .

Sur la calculatrice, on tape le nombre, puis la touche puissance, puis l'exposant. Attention quand le nombre est négatif : mets-le entre parenthèses, comme (moins deux) puissance quatre, car sans parenthèses la calculatrice calcule autre chose.

QUESTION 30 · POUR COMPRENDRE : LES TRIANGLES COMPLÉMENTAIRES

chnowa houwa le triangle complémentaire | c'est quoi le triangle complémentaire | triangle complémentaire ma3neha chnowa

CE QU'IL RÉPOND

Le triangle complémentaire mta3 triangle, houwa le triangle elli les sommets mte3ou houma les milieux mta3 les côtés. Koll côté mte3ou houwa el noss mta3 côté mta3 le triangle el kbir, idhan le périmètre mte3ou houwa el noss.

le triangle complémentaire متاع triangle ، هو الـ triangle اللي les sommets متاعو هوما les milieux متاع les côtés . كل côté متاعو هو النصّ متاع côté متاع الـ triangle الكبير ، إذن le périmètre متاعو هو النصّ .

Le triangle complémentaire d'un triangle est le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés. Chacun de ses côtés est la moitié d'un côté du grand triangle, donc son périmètre est la moitié.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE

Le loyer de 2007

Une maison est louée 200 dinars par mois en 2005. Le contrat prévoit une augmentation annuelle de $5\,\%$ du loyer. Quel est le loyer mensuel, en dinars, en 2007 ?

Donne le loyer en dinars, par exemple 215,5.

Réponse attendue : `220.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Augmenter de $5\,\%$, c'est multiplier par $1{,}05$.
2. De 2005 à 2007, le loyer augmente deux fois : calcule d'abord celui de 2006.

CORRECTION

En 2006 —

$200 \times 1{,}05 = 210$

En 2007 —

$210 \times 1{,}05 = 220{,}5$

En 2007, le loyer est de $220{,}5$ dinars par mois.

PIÈGES ANTICIPÉS

`220` → Tu as ajouté 10 dinars deux fois. La deuxième année, les $5\,\%$ se calculent sur 210 dinars, pas sur 200 : l'augmentation est de $10{,}5$ dinars.

`210` → 210 dinars, c'est le loyer de 2006. Il reste une augmentation de $5\,\%$ à appliquer pour arriver à 2007.

EXERCICE 2 · PRATIQUE

L'année des 240 dinars

Une maison est louée 200 dinars par mois en 2005, et son loyer augmente de $5\,\%$ chaque année. En quelle année le loyer dépassera-t-il 240 dinars pour la première fois ?

Donne seulement l'année, par exemple 2015.

Réponse attendue : `2009`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque année, le loyer est multiplié par $1{,}05$: calcule-le année après année.
2. En 2008, le loyer est de $231{,}525$ dinars : il n'a pas encore dépassé 240.

CORRECTION

Année après année —

$210 \quad ; \quad 220{,}5 \quad ; \quad 231{,}525 \quad ; \quad 243{,}10125$

L'année — Le quatrième loyer calculé est celui de $2005 + 4$.

$231{,}525 < 240 < 243{,}10125$

Le loyer dépasse 240 dinars en 2009.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4` → 4 est le nombre d'augmentations : ajoute-le à 2005 pour avoir l'année.

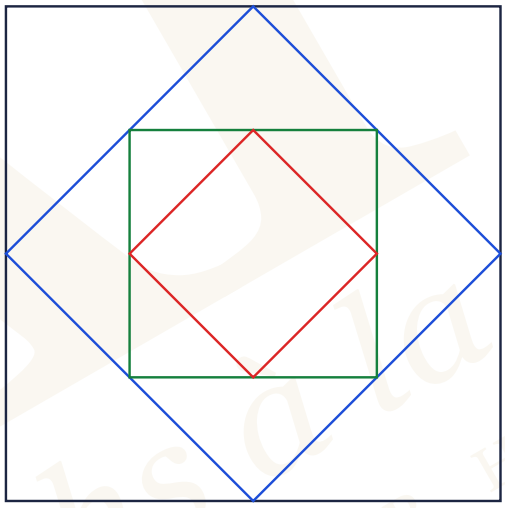
`2010` → Tu as ajouté 10 dinars par an. Or les $5\,\%$ se calculent chaque année sur le dernier loyer : il monte plus vite.

`2008` → En 2008, le loyer est de $231{,}525$ dinars : il n'a pas encore dépassé 240.

EXERCICE 3 · BASE

Le douzième carré

On construit un carré de côté 1, puis un deuxième en reliant les milieux des côtés du premier, et on répète ce procédé. L'aire est divisée par 2 d'un carré au suivant. Quelle est l'aire du douzième carré ?



Chaque carré relie les milieux des côtés du précédent.

Quatre carrés emboîtés. Le premier, le plus grand, a pour côté 1. Le deuxième a pour sommets les milieux des côtés du premier : il est posé sur la pointe, à l'intérieur du premier. Le troisième a pour sommets les milieux des côtés du deuxième : il est de nouveau droit, à l'intérieur du deuxième. Le quatrième a pour sommets les milieux des côtés du troisième. Chaque carré occupe exactement la moitié de l'aire du précédent.

Réponse attendue : `1/2048`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire du premier carré est 1, celle du deuxième $\frac{1}{2}$, celle du troisième $\frac{1}{4}$.
2. Du premier au douzième carré, combien de fois multiplie-t-on par $\frac{1}{2}$?

CORRECTION

La suite — Les aires forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$a_1 = 1 \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_3 = \frac{1}{4}$

Le douzième —

$a_{12} = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2^{11}}$

L'aire du douzième carré est $\frac{1}{2048}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/4096` → Tu as multiplié douze fois par $\frac{1}{2}$. Le premier carré a déjà pour aire 1 : il ne faut que onze pas pour arriver au douzième.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

La série télévisée

Une série télévisée voit son audience diminuer de $10\,\%$ par semaine. Si cette audience diminue de moitié, la série sera retirée des programmes. Avec la calculatrice, détermine le nombre de semaines au bout desquelles elle risque d'être retirée.

Donne seulement le nombre, en chiffres, par exemple 12.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Diminuer de $10\,\%$, c'est multiplier par $0{,}9$.
2. Après n semaines, l'audience est multipliée par $0{,}9^n$. Cherche le premier n pour lequel $0{,}9^n$ passe sous $0{,}5$.

CORRECTION

Le modèle — L'audience forme une suite géométrique de raison $0{,}9$.

$a_n = 0{,}9^n \times a_0$

À la calculatrice —

$0{,}9^6 \approx 0{,}531 \quad ; \quad 0{,}9^7 \approx 0{,}478$

Après 6 semaines il reste plus de la moitié de l'audience ; après 7 semaines, moins de la moitié. La série risque d'être retirée au bout de 7 semaines.

PIÈGES ANTICIPÉS

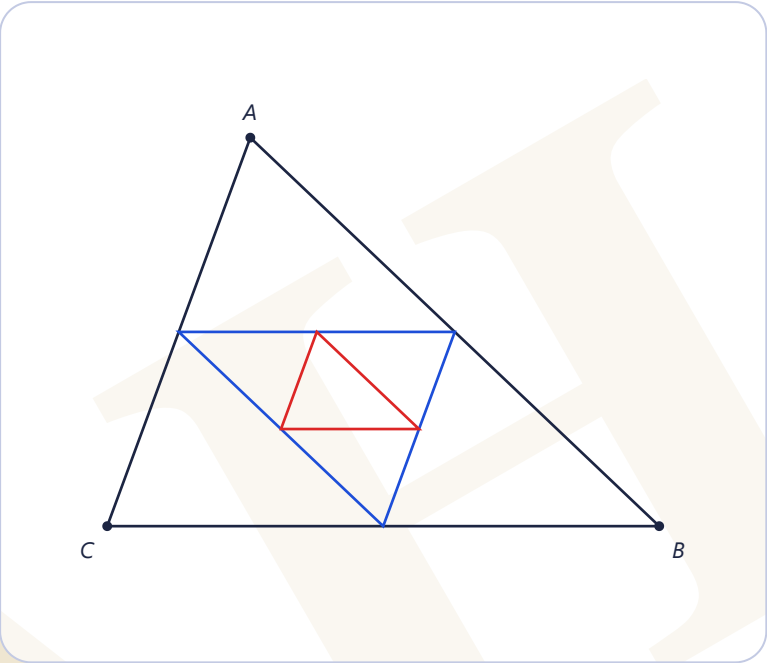
`5` → Cinq baisses de $10\,\%$ ne font pas $50\,\%$: chaque baisse porte sur l'audience de la semaine précédente. Calcule $0{,}9^5$: il vaut environ $0{,}59$.

`6` → $0{,}9^6 \approx 0{,}531$: après six semaines, il reste encore un peu plus de la moitié de l'audience.

EXERCICE 5 · BASE

Le cinquième triangle

Le périmètre d'un triangle ABC est $P_0 = 384$. On construit le triangle des milieux de ses côtés, puis le triangle des milieux du nouveau triangle, et ainsi de suite : les périmètres vérifient $P_n = \frac{1}{2} \times P_{n-1}$. Calcule P_5.



Le triangle complémentaire joint les milieux des côtés.

Un triangle ABC, avec A en haut, C en bas à gauche et B en bas à droite. Au palier 2, on joint les milieux de ses trois côtés : on obtient un triangle plus petit, t1, à l'intérieur de ABC ; chacun de ses côtés est parallèle à un côté de ABC et mesure la moitié de ce côté. Au palier 3, on joint les milieux des côtés de t1 : on obtient le triangle t2, encore deux fois plus petit, à l'intérieur de t1.

> Le périmètre d'un triangle ABC est $P_0 = 384$. On construit le triangle des milieux de ses côtés, puis le triangle des milieux du nouveau triangle, et ainsi de suite : les périmètres vérifient P indice n égale un demi fois P indice (n moins un). Calcule P_5.
>
> Le périmètre d'un triangle A B C est P indice 0 égale 384. On construit le triangle des milieux de ses côtés, puis le triangle des milieux du nouveau triangle, et ainsi de suite: les périmètres vérifient P indice n égale un demi fois P indice (n moins un). Calcule P indice 5

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque périmètre est la moitié du précédent : $P_1 = 192$.
2. De P_0 à P_5, on divise cinq fois par 2, c'est-à-dire par 2^5.

CORRECTION

La suite — (P_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$P_n = P_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Le calcul —

$P_5 = \frac{384}{32} = 12$

$P_5 = 12$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`76.8 / 384/5` → On ne divise pas par 5 : on divise cinq fois de suite par 2, donc par $2^5 = 32$.

`24` → 24, c'est P_4. Il reste une division par 2.

`6` → 6, c'est P_6 : tu as divisé une fois de trop.

EXERCICE 6 · BASE

Le capital après trois ans

On place $10\,000$ dinars à intérêts composés, au taux de $4\,\%$ par an : chaque année, les intérêts se calculent sur le dernier capital. Quel est le capital, en dinars, après trois années ?

Donne le capital en dinars. Écris le nombre sans espace, par exemple 10400,5.

Réponse attendue : `11248.64`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque année, le capital est multiplié par $1{,}04$.
2. Après un an : $10\,400$. Après deux ans : $10\,816$. Continue.

CORRECTION

La suite — Les capitaux forment une suite géométrique de raison $1{,}04$.

$C_{n+1} = 1{,}04 \times C_n$

> La suite. Les capitaux forment une suite géométrique de raison $1{,}04$. C indice (n plus un) égale 1,04 fois C indice n
>
> La suite. Les capitaux forment une suite géométrique de raison 1,04. C indice (n plus un) égale 1,04 fois C indice n

Année après année —

$C_1 = 10\,400 \quad ; \quad C_2 = 10\,816 \quad ; \quad C_3 = 11\,248{,}64$

Après trois années, le capital est de $11\,248{,}64$ dinars.

PIÈGES ANTICIPÉS

`11200` → Tu as ajouté 400 dinars par an. À intérêts composés, les intérêts se calculent sur le dernier capital : 416 dinars la deuxième année, puis $432{,}64$ la troisième.

EXERCICE 7 · BASE

Lire la raison

La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = 2 \times 3^n$. Elle est géométrique. Quelle est sa raison ?

Réponse attendue : `3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule U_0, U_1 et U_2.
2. Par quel nombre multiplie-t-on pour passer de U_0 à U_1 ?

CORRECTION

Les premiers termes —

$U_0 = 2 \quad ; \quad U_1 = 6 \quad ; \quad U_2 = 18$

Pour tout n —

$U_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 3 \times (2 \times 3^n) = 3 \times U_n$

> Pour tout n : U indice (n plus un) égale 2 fois 3 puissance la parenthèse n plus 1, égale 3 fois la parenthèse 2 fois 3 puissance n, égale 3 fois U indice n
>
> Pour tout n: U indice (n plus un) égale 2 fois 3 puissance la parenthèse n plus 1, égale 3 fois la parenthèse 2 fois 3 puissance n, égale 3 fois U indice n

La raison est 3, et le premier terme est $U_0 = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est le premier terme U_0. La raison est le nombre par lequel on multiplie pour passer d'un terme au suivant.

6 → 6 est le terme U_1. Divise U_1 par U_0 pour trouver la raison.

EXERCICE 8 · BASE

Une relation à transformer

La suite (U_n) est définie par $U_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $3U_{n+1} - 2U_n = 0$. Elle est géométrique. Quelle est sa raison ?

> La suite (U_n) est définie par $U_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, 3 fois U indice (n plus un) moins 2 fois U indice n égale 0. Elle est géométrique. Quelle est sa raison ?
>
> La suite U indice n est définie par U indice 0 égale moins 1 et, pour tout entier naturel n, 3 fois U indice (n ?plus un) moins 2 fois U indice n égale 0. Elle est géométrique. Quelle est sa raison

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Isole U_{n+1} dans la relation.
   > Isole U indice (n plus un) dans la relation.
   >
   > .Isole U indice (n plus un) dans la relation
2. $3U_{n+1} = 2U_n$: divise les deux membres par 3.
   > 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n : divise les deux membres par 3.
   >
   > .fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n: divise les deux membres par 3 3

CORRECTION

Isoler —

$3U_{n+1} = 2U_n \iff U_{n+1} = \frac{2}{3} \times U_n$

> Isoler : 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n, équivaut à U indice (n plus un) égale deux tiers fois U indice n
>
> Isoler: 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n, équivaut à U indice (n plus un) égale deux tiers fois U indice n

La suite est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/2 / 1.5` → Tu as divisé dans le mauvais sens : $3U_{n+1} = 2U_n$ donne $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n$.

> Tu as divisé dans le mauvais sens : 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n donne U indice (n plus un) égale deux tiers fois U indice n.
>
> Tu as divisé dans le mauvais sens: 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n donne U indice (n plus un) égale deux tiers fois U indice n.

`-2/3` → Attention au signe : $3U_{n+1} - 2U_n = 0$ s'écrit $3U_{n+1} = 2U_n$, avec un 2 positif.

> Attention au signe : 3 fois U indice (n plus un) moins 2 fois U indice n égale 0 s'écrit 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n, avec un 2 positif.
>
> Attention au signe: 3 fois U indice (n plus un) moins 2 fois U indice n égale 0 s'écrit 3 fois U indice (n plus un) égale 2 fois U indice n, avec un 2 positif.

`0.67 / 0.667 / 0.6667 / 0.66 / 0.666 / 0.6666 / 0.6 / 0.7` → C'est une valeur approchée. La raison est un nombre exact : écris-la sous forme de fraction.

EXERCICE 9 · BASE

Diviser par racine de 2

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{2}}$. Calcule U_4.

> La suite (U_n) est définie par $U_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, U indice (n plus un) égale U indice n sur racine carrée de 2. Calcule U_4.
>
> La suite U indice n est définie par U indice 0 égale 6 et, pour tout entier naturel n, U indice (n plus un) égale U indice n sur racine carrée de 2. Calcule U indice 4.

Réponse attendue : `3/2` — aussi acceptées : `1.5`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Diviser par $\sqrt{2}$, c'est multiplier par $\frac{1}{\sqrt{2}}$: la suite est géométrique.
2. $(\sqrt{2})^2 = 2$, donc $(\sqrt{2})^4 = 4$.

CORRECTION

La suite — (U_n) est géométrique de premier terme 6 et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$U_n = 6 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

Le calcul —

$U_4 = \frac{6}{(\sqrt{2})^4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$U_4 = \frac{3}{2}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3, c'est U_2. Il faut encore diviser deux fois par $\sqrt{2}$.

24 → Tu as multiplié par $(\sqrt{2})^4$: ici on **divise** par $\sqrt{2}$ à chaque pas.

EXERCICE 10 · BASE

Géométrique ou pas ?

La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel non nul n par $U_n = n^n$. Est-elle géométrique ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas geometrique · elle n'est pas geometrique · non elle n'est pas geometrique · non, elle n'est pas geometrique · n'est pas geometrique · la suite n'est pas geometrique · non la suite n'est pas geometrique · non, la suite n'est pas geometrique · non geometrique · non pas geometrique · non, pas geometrique · non elle ne l'est pas · non, elle ne l'est pas · elle ne l'est pas · elle est pas geometrique · ce n'est pas une suite geometrique · non ce n'est pas une suite geometrique · non, ce n'est pas une suite geometrique · elle n'est pas une suite geometrique

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule U_1, U_2 et U_3.
2. Compare les deux quotients $\dfrac{U_2}{U_1}$ et $\dfrac{U_3}{U_2}$.

CORRECTION

Les premiers termes —

$U_1 = 1 \quad ; \quad U_2 = 2^2 = 4 \quad ; \quad U_3 = 3^3 = 27$

Les quotients —

$\frac{U_2}{U_1} = 4 \quad ; \quad \frac{U_3}{U_2} = \frac{27}{4}$

Les deux quotients ne sont pas égaux : la suite n'est pas géométrique.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui elle est geometrique / oui, elle est geometrique / elle est geometrique / oui geometrique / geometrique / oui c'est une suite geometrique / oui, c'est une suite geometrique / c'est une suite geometrique / la suite est geometrique / oui la suite est geometrique / oui, la suite est geometrique` → Une puissance ne suffit pas : dans n^n, le nombre qu'on élève à la puissance change aussi. Calcule $\dfrac{U_2}{U_1}$ et $\dfrac{U_3}{U_2}$: ils ne sont pas égaux.

EXERCICE 11 · PRATIQUE

Moins quatre, quatre, moins quatre…

La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par : $U_n = -4$ si n est pair, et $U_n = 4$ si n est impair. Elle est géométrique. Quelle est sa raison ?

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les premiers termes : U_0, U_1, U_2, U_3.

2. Par quel nombre multiplie-t-on -4 pour obtenir 4 ? Et 4 pour obtenir -4 ?

CORRECTION

Les premiers termes —

$-4 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad -4 \quad ; \quad 4$

La relation — D'un terme au suivant, on prend l'opposé.

$U_{n+1} = (-1) \times U_n$

> La relation. D'un terme au suivant, on prend l'opposé. U indice (n plus un) égale moins 1 fois U indice n
>
> La relation. D'un terme au suivant, on prend l'opposé. U indice (n plus un) égale moins 1 fois U indice n

La suite est géométrique de raison -1 et de premier terme $U_0 = -4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → 8 est l'écart entre -4 et 4. Mais on n'ajoute pas toujours 8 : de 4 à -4 on retranche 8. On **multiplie** par un même nombre.

1 → Avec une raison égale à 1, tous les termes seraient égaux. Ici le signe change à chaque pas.

-4 → -4 est le premier terme. La raison est le nombre par lequel on multiplie pour passer au terme suivant.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Une relation à l'envers

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = 3U_{n+1}$. Elle est géométrique. Quelle est sa raison ?

> La suite (U_n) est définie par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, U indice n égale 3 fois U indice (n plus un). Elle est géométrique. Quelle est sa raison ?
>
> La suite U indice n est définie par U indice 0 égale 1 et, pour tout entier naturel n, U indice n égale 3 fois U ?indice (n plus un). Elle est géométrique. Quelle est sa raison

Réponse attendue : 1/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La raison est le nombre q tel que $U_{n+1} = q \times U_n$: isole U_{n+1}.
   > La raison est le nombre q tel que U indice (n plus un) égale q fois U indice n : isole U indice (n plus un).
   >
   > .La raison est le nombre q tel que U indice (n plus un) égale q fois U indice n: isole U indice (n plus un)
2. $U_n = 3U_{n+1}$: divise les deux membres par 3.
   > U indice n égale 3 fois U indice (n plus un) : divise les deux membres par 3.
   >
   > .U indice n égale 3 fois U indice (n plus un): divise les deux membres par 3

CORRECTION

Isoler —

$U_n = 3U_{n+1} \iff U_{n+1} = \frac{1}{3} \times U_n$

> Isoler : U indice n égale 3 fois U indice (n plus un), équivaut à U indice (n plus un) égale un tiers fois U indice n

> Isoler: U indice n égale 3 fois U indice (n plus un), équivaut à U indice (n plus un) égale un tiers fois U indice n

Les premiers termes —

$1 \quad ; \quad \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{1}{9}$

La suite est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → La relation donne U_n en fonction de U_{n+1}. La raison fait passer de U_n à U_{n+1} : $U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n$.

> La relation donne U_n en fonction de U indice (n plus un). La raison fait passer de U_n à U indice (n plus un) : U indice (n plus un) égale un tiers fois U indice n.
>
> La relation donne U indice n en fonction de U indice (n plus un). La raison fait passer de U indice n à U indice (n plus un): U indice (n plus un) égale un tiers fois U indice n.

`0.33 / 0.333 / 0.3333 / 0.3` → C'est une valeur approchée. La raison est un nombre exact : écris-la sous forme de fraction.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

Une racine sous la puissance

La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = \sqrt{7^n}$. Elle est géométrique. Quelle est sa raison ?

Tu peux écrire une racine carrée avec le mot « racine », par exemple « racine 5 ».

Réponse attendue : `sqrt(7)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $U_{n+1} = \sqrt{7^{n+1}}$ et sépare le facteur 7 en trop.

   > Écris U indice (n plus un) égale racine carrée de 7 puissance la parenthèse n plus 1 et sépare le facteur 7 en trop.
   >
   > Écris U indice (n plus un) égale racine carrée de 7 puissance la parenthèse n plus 1 et sépare le facteur 7 en trop.

2. $\sqrt{7^n \times 7} = \sqrt{7^n} \times \sqrt{7}$.

CORRECTION

Le terme suivant —

$U_{n+1} = \sqrt{7^{n+1}} = \sqrt{7^n \times 7} = \sqrt{7^n} \times \sqrt{7}$

> Le terme suivant : U indice (n plus un) égale racine carrée de 7 puissance la parenthèse n plus 1 égale racine carrée de la parenthèse 7 puissance n fois 7, égale racine carrée de 7 puissance n fois racine carrée de 7
>
> Le terme suivant: U indice (n plus un) égale racine carrée de 7 puissance la parenthèse n plus 1 égale racine carrée de la parenthèse 7 puissance n fois 7, égale racine carrée de 7 puissance n fois racine carrée de 7

Conclusion — Le premier terme est $U_0 = \sqrt{7^0} = 1$.

$U_{n+1} = \sqrt{7} \times U_n$

> Conclusion. Le premier terme est $U_0 = \sqrt{7^0} = 1$. U indice (n plus un) égale racine carrée de 7 fois U indice n
>
> Conclusion. Le premier terme est U indice 0 égale racine carrée de 7 puissance 0 égale 1. U indice (n plus un) égale racine carrée de 7 fois U indice n

La suite est géométrique de raison $\sqrt{7}$ et de premier terme $U_0 = 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → 7 serait la raison de la suite 7^n. Ici il y a une racine carrée : $U_1 = \sqrt{7}$ et $U_0 = 1$.

EXERCICE 14 · PRATIQUE

La pression à 400 mètres

La pression atmosphérique diminue d'environ $1\,\%$ chaque fois que l'altitude augmente de 100 mètres. Un jour, la pression au niveau de la mer est de 1000 millibars. Calcule la pression à 400 mètres au-dessus du niveau de la mer, arrondie au millibar près.

Donne seulement le nombre entier, sans l'unité, par exemple 987.

Réponse attendue : `961`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Diminuer de $1\,\%$, c'est multiplier par $0{,}99$.
2. 400 mètres, c'est quatre fois 100 mètres : calcule $1000 \times 0{,}99^4$.

CORRECTION

La suite — p_n est la pression à l'altitude $n \times 100$ mètres.

$p_n = 0{,}99^{\,n} \times p_0$

Le calcul —

$p_4 = 0{,}99^4 \times 1000 \approx 960{,}596$

À 400 mètres, la pression est d'environ 961 millibars.

PIÈGES ANTICIPÉS

`960` → Quatre baisses de $1\,\%$ ne font pas exactement $4\,\%$: chaque baisse porte sur la pression de l'étage d'en dessous. Calcule $1000 \times 0{,}99^4$, puis arrondis.

`960.6 / 960.596 / 960.59601` → Le calcul est juste. Il reste à arrondir à l'unité : le chiffre des dixièmes est 5 ou plus, donc on arrondit au-dessus.

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Un quotient constant

(U_n) est une suite de réels non nuls telle que $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{3}$.

Calcule U_6.

> (U_n) est une suite de réels non nuls telle que $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, U indice (n plus un) sur U indice n égale racine carrée de 3. Calcule U_6.

> U indice n est une suite de réels non nuls telle que U indice 0 égale 1 et, pour tout entier naturel n, U indice (n plus un) sur U indice n égale racine carrée de 3. Calcule U indice 6

Réponse attendue : 27

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le quotient de deux termes consécutifs est constant : la suite est géométrique de raison $\sqrt{3}$.
2. $U_n = U_0 \times (\sqrt{3})^n$, et $(\sqrt{3})^2 = 3$.

CORRECTION

Le terme général —

$U_n = 1 \times (\sqrt{3})^n = (\sqrt{3})^n$

Le calcul — On regroupe les facteurs deux par deux : $(\sqrt{3})^2 = 3$, et il y a trois groupes.

$U_6 = (\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$

$U_6 = 27.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`6*sqrt(3)` → On ne multiplie pas la raison par 6 : on l'élève à la puissance 6. C'est dans une suite arithmétique qu'on écrit $6r$.

`729` → $729 = 3^6$: tu as pris 3 pour raison. La raison est $\sqrt{3}$, et $(\sqrt{3})^6 = 3^3$.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

De U4 à U10

(U_n) est une suite géométrique de raison $q = -7$ et telle que $U_4 = 2401$. Calcule U_{10}.

Tu peux répondre par une puissance de 7.

Réponse attendue : 282475249 — aussi acceptées : 7^10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_{10} = U_4 \times q^{10-4}$.
2. $2401 = 7^4$, et l'exposant 6 est pair : $(-7)^6 = 7^6$.

CORRECTION

La formule —

$U_{10} = U_4 \times q^6 = 2401 \times (-7)^6$

Le signe — Une puissance d'exposant pair d'un nombre négatif est positive.

$(-7)^6 = 7^6 = 117\,649$

Le calcul —

$U_{10} = 7^4 \times 7^6 = 7^{10} = 282\,475\,249$

> Le calcul : U indice 10 égale 7 puissance 4 fois 7 puissance 6 égale 7 puissance 10 égale 282 475 249
>
> Le calcul: U indice 10 égale 7 puissance 4 fois 7 puissance 6 égale 7 puissance 10 égale deux cent quatre-vingt-deux millions quatre cent soixante-quinze mille deux cent quarante-neuf

$U_{10} = 7^{10} = 282\,475\,249.$

U indice 10 égale 7 puissance 10 égale 282 475 249.

U indice 10 égale 7 puissance 10 égale deux cent quatre-vingt-deux millions quatre cent soixante-quinze .mille deux cent quarante-neuf

PIÈGES ANTICIPÉS

`-282475249 / -7^10` → L'exposant 6 est pair : $(-7)^6$ est positif.

`2401*(-7)^10 / 2401*7^10 / 7^14` → On part de U_4, pas de U_0 : l'exposant est la différence des indices, $10 - 4 = 6$.

EXERCICE 17 · PRATIQUE **Retrouver l'indice**

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$. Détermine l'entier n sachant que $U_n = \dfrac{5}{59049}$.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_n = 5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{5}{3^n}$.

   U indice n égale 5 fois la parenthèse 1 sur 3, puissance n, égale 5, le tout sur 3 puissance n.

   .U indice n égale 5 fois la parenthèse 1 sur 3, puissance n, égale 5, le tout sur 3 puissance n

2. Cherche l'exposant n tel que $3^n = 59\,049$: multiplie par 3 autant de fois qu'il le faut.

CORRECTION

Le terme général —

$U_n = \frac{5}{3^n}$

Le terme général : U indice n égale 5, le tout sur 3 puissance n

Le terme général: U indice n égale 5, le tout sur 3 puissance n

L'équation —

$\frac{5}{3^n} = \frac{5}{59\,049} \iff 3^n = 59\,049$

L'équation : 5, le tout sur 3 puissance n, égale 5 sur 59 049, équivaut à 3 puissance n égale 59 049

L'équation: 5, le tout sur 3 puissance n, égale 5 sur 59 049, équivaut à 3 puissance n égale 59 049

Les puissances de 3 —

$3^8 = 6561 \quad ; \quad 3^9 = 19\,683 \quad ; \quad 3^{10} = 59\,049$

$n = 10$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → $3^9 = 19\,683$: il manque encore une multiplication par 3.

`59049` → $59\,049$ est la valeur de 3^n. On demande l'exposant n.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 18 · PRATIQUE

De U9 à U17

(U_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et telle que $U_9 = \dfrac{-1}{32768}$. Calcule U_{17}.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_{17} = U_9 \times q^{17-9}$.
2. $4^8 = 65\,536$ et $32\,768 = 2^{15}$.

CORRECTION

La formule —

$U_{17} = U_9 \times 4^8$

Le calcul —

$U_{17} = \frac{-65\,536}{32\,768} = -2$

$U_{17} = -2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → U_9 est négatif et la raison est positive : tous les termes sont négatifs.

`-524288 / -4^17/32768` → On part de U_9 : l'exposant est $17 - 9 = 8$, pas 17.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

La raison entre U4 et U11

(U_n) est une suite géométrique telle que $U_4 = 25$ et $U_{11} = 1\,953\,125$. Détermine sa raison q.

> (U_n) est une suite géométrique telle que $U_4 = 25$ et U indice 11 égale 1 953 125. Détermine sa raison q.
>
> U indice n est une suite géométrique telle que U indice 4 égale 25 et U indice 11 égale un million neuf cent cinquante-trois mille cent vingt-cinq. Détermine sa raison q

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_{11} = U_4 \times q^{11-4}$: calcule d'abord q^7.
2. $q^7 = 78\,125$. Essaie les puissances d'un petit entier.

CORRECTION

La puissance —

$q^7 = \frac{1\,953\,125}{25} = 78\,125$

> La puissance : q puissance 7 égale 1 953 125 sur 25 égale 78 125
>
> La puissance: q puissance 7 égale un million neuf cent cinquante-trois mille cent vingt-cinq sur 25 égale 78 125

La raison — L'exposant 7 est impair : il n'y a qu'une valeur.

$78\,125 = 5^7 \quad \text{donc} \quad q = 5$

$q = 5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

78125 → $78\,125$ est q^7 : sept pas séparent U_4 de U_{11}. Cherche le nombre dont la puissance 7 vaut $78\,125$.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

Deux raisons, un seul V9

(V_n) est une suite géométrique telle que $V_3 = 12$ et $V_5 = 36$. Il y a deux valeurs possibles pour la raison, mais une seule pour V_9. Calcule V_9.

Réponse attendue : 324

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $V_5 = V_3 \times q^2$: calcule q^2.
2. $V_9 = V_5 \times q^4$, et $q^4 = (q^2)^2$: pas besoin de connaître le signe de q.

CORRECTION

La raison —

$q^2 = \frac{36}{12} = 3 \quad \text{donc} \quad q = \sqrt{3}$ ou $q = -\sqrt{3}$

V9 — Dans les deux cas, $q^4 = (q^2)^2 = 9$.

$V_9 = V_5 \times q^4 = 36 \times 3^2 = 324$

La raison est $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$, et dans les deux cas $V_9 = 324$.

PIÈGES ANTICIPÉS

84 → Tu as ajouté 24 tous les deux pas, comme dans une suite arithmétique. Ici on multiplie : $V_5 = V_3 \times q^2$.

108 → 108, c'est V_7. Il faut encore multiplier par $q^2 = 3$.

EXERCICE 21 · PRATIQUE

Quand le premier terme est U1

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_1 = -5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calcule U_8.

Réponse attendue : `-5/128` — aussi acceptées : -0.0390625

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier terme est U_1 : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.
2. De U_1 à U_8, il y a 7 pas, et $2^7 = 128$.

CORRECTION

La formule —

$U_8 = U_1 \times q^{8-1} = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$

Le calcul —

$U_8 = \frac{-5}{128}$

$$U_8 = -\frac{5}{128}.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

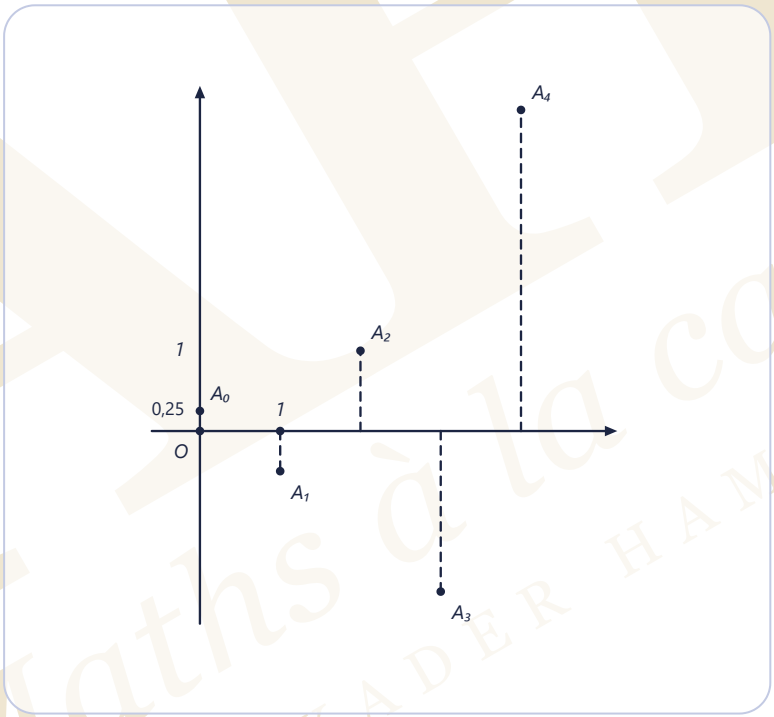
`-5/256` → Tu as multiplié huit fois par $\frac{1}{2}$. Le premier terme est U_1 : de U_1 à U_8, il n'y a que sept pas.

`5/128` → Le premier terme est négatif et la raison est positive : tous les termes sont négatifs.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

Lire la raison sur un graphique

Sur la figure, les ordonnées des points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les cinq premiers termes consécutifs d'une suite géométrique (U_n) : dans l'ordre, $0{,}25$, puis $-0{,}5$, puis 1, puis -2, puis 4. Détermine la raison de cette suite.



Les ordonnées de A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 : 0,25 ; −0,5 ; 1 ; −2 ; 4.

Un repère orthonormé d'origine O, avec l'unité 1 marquée sur chaque axe. Cinq points sont placés : A0 d'abscisse 0 et d'ordonnée 0,25, juste au-dessus de l'origine ; A1 d'abscisse 1 et d'ordonnée moins 0,5, sous l'axe des abscisses ; A2 d'abscisse 2 et d'ordonnée 1, au-dessus ; A3 d'abscisse 3 et d'ordonnée moins 2, en dessous ; A4 d'abscisse 4 et d'ordonnée 4, au-dessus. Les points passent alternativement au-dessus et en dessous de l'axe des abscisses, en s'en éloignant de plus en plus.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier terme U_0 est l'ordonnée de A_0, et U_1 celle de A_1.
2. La raison est le quotient $\frac{U_1}{U_0}$. Attention au signe.

CORRECTION

Les deux premiers termes —

$U_0 = 0{,}25 \quad ; \quad U_1 = -0{,}5$

La raison —

$q = \frac{-0{,}5}{0{,}25} = -2$

Vérification —

$-0{,}5 \times (-2) = 1 \quad ; \quad 1 \times (-2) = -2 \quad ; \quad -2 \times (-2) = 4$

La suite a pour premier terme $U_0 = 0{,}25$ et pour raison $q = -2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → Les points passent tour à tour au-dessus et en dessous de l'axe : les termes changent de signe, donc la raison est négative.

`-0.75 / -3/4` → Tu as calculé $U_1 - U_0$. La raison d'une suite géométrique est un quotient : $\frac{U_1}{U_0}$.

`-1/2 / -0.5` → Tu as divisé U_0 par U_1. La raison est le terme suivant divisé par le terme d'avant.

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Quitte ou double

B donne à A 1 dinar le premier jour, 2 dinars le deuxième jour, 4 dinars le troisième jour, et ainsi de suite pendant 10 jours, en doublant chaque jour le montant de la veille. Combien de dinars B donne-t-il en tout ?

Donne le total en dinars.

Réponse attendue : `1023`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les montants sont dix termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.
2. Applique la formule $S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$, avec $a = 1$, $q = 2$ et $n = 10$.

CORRECTION

Les termes — Dix termes, de 2^0 à 2^9.

$1 \; ; \; 2 \; ; \; 4 \; ; \; \ldots \; ; \; 2^9 = 512$

La somme —

$S = 1 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1$

> La somme : $S = 1 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1$
>
> La somme: S égale 1 fois le quotient de 1 moins 2 puissance 10, par la parenthèse 1 moins 2, égale 2 puissance 10, moins 1

B donne 1023 dinars, soit 23 dinars de plus que les 1000 dinars qu'il reçoit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2047` → Tu as compté onze jours. Le premier jour correspond à 2^0 : dix jours vont de 2^0 à 2^9.

`512` → 512 dinars, c'est ce que B donne le dixième jour seulement. On demande le total des dix jours.

`1024` → $1024 = 2^{10}$. La somme est $\dfrac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10}-1$.

> $1024 = 2^{10}$. La somme est $\dfrac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10}-1$.
>
> égale 2 puissance 10. La somme est le quotient de 1 moins 2 puissance 10, par la parenthèse 1 1024 .moins 2, égale 2 puissance 10, moins 1

EXERCICE 24 · PRATIQUE

De 32 à 2048

Calcule la somme $B = 32 + 64 + 128 + \ldots + 2048$.

Réponse attendue : `4064`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On passe d'un terme au suivant en multipliant par 2. Écris 32 et 2048 comme des puissances de 2.
2. $32 = 2^5$ et $2048 = 2^{11}$: il y a $11 - 5 + 1 = 7$ termes.

CORRECTION

La raison —

$\frac{64}{32} = 2 \quad ; \quad \frac{128}{64} = 2$

Le nombre de termes —

$32 = 2^5 \quad ; \quad 2048 = 2^{11} \quad ; \quad 11 - 5 + 1 = 7$

La somme —

$B = 32 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 32 \times 127$

$B = 4064.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`2016` → Tu as compté 6 termes. De 2^5 à 2^{11}, il y en a $11 - 5 + 1 = 7$: on compte les deux bouts.

`8160` → Tu as compté 8 termes. De 2^5 à 2^{11}, il y en a $11 - 5 + 1 = 7$.

EXERCICE 25 · RAISONNEMENT

Une somme de fractions à signes alternés

Calcule la somme $A = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots - \dfrac{1}{2187}$.

Réponse attendue : `1640/2187`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les signes alternent : la raison est négative, $q = -\dfrac{1}{3}$.
2. $2187 = 3^7$: les exposants vont de 0 à 7, il y a 8 termes. Et $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^8$ est positif.

CORRECTION

La raison — On passe d'un terme au suivant en multipliant par $-\dfrac{1}{3}$.

$q = -\frac{1}{3}$

Le nombre de termes —

$2187 = 3^7 \quad ; \quad 7 - 0 + 1 = 8$

La formule —

$A = 1 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^8}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1-\frac{1}{6561}}{\frac{4}{3}}$

Le calcul —

$A = \frac{6560}{6561} \times \frac{3}{4} = \frac{1640}{2187}$

$A = \dfrac{1640}{2187}.$

PIÈGES ANTICIPÉS

3280/2187 → Tu as pris $q = \dfrac{1}{3}$. Les signes alternent : la raison est $-\dfrac{1}{3}$, et le dénominateur de la formule est $1 + \dfrac{1}{3}$.

547/729 → Tu as compté 7 termes. De $\dfrac{1}{3^0}$ à $\dfrac{1}{3^7}$, il y en a 8.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

Les sept premiers termes

Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme $V_0 = 5$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$. Calcule $S = V_0 + V_1 + \ldots + V_6$.

Réponse attendue : 215/64 — aussi acceptées : 3.359375

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De V_0 à V_6, il y a 7 termes.
2. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^7 = -\dfrac{1}{128}$: l'exposant est impair, la puissance est négative.

CORRECTION

Les données —

$a = V_0 = 5 \quad ; \quad q = -\frac{1}{2} \quad ; \quad n = 7$

La formule —

$S = 5 \times \frac{1+\frac{1}{128}}{\frac{3}{2}} = 5 \times \frac{129}{128} \times \frac{2}{3}$

Le calcul —

$S = \frac{5 \times 43}{64} = \frac{215}{64}$

$S = \dfrac{215}{64}.$

PIÈGES ANTICIPÉS

635/64 → Tu as pris $q = \frac{1}{2}$. La raison est négative : $1 - q = \frac{3}{2}$ et $q^7 = -\frac{1}{128}$.

105/32 → Tu as compté 6 termes. De V_0 à V_6, il y en a $6 - 0 + 1 = 7$.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

De U1 à U8

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_1 = -5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calcule la somme $S = U_1 + U_2 + \ldots + U_8$.

Réponse attendue : `-1275/128` — aussi acceptées : -9.9609375

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De U_1 à U_8, il y a 8 termes, et le premier terme de la somme est U_1.
2. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{255}{256}$, et diviser par $\frac{1}{2}$ revient à multiplier par 2.

CORRECTION

Les données —

$a = U_1 = -5 \quad ; \quad q = \frac{1}{2} \quad ; \quad n = 8$

La formule —

$S = -5 \times \frac{\frac{255}{256}}{\frac{1}{2}} = -5 \times \frac{255}{128}$

$S = -\frac{1275}{128}.$

PIÈGES ANTICIPÉS

-2555/256 → Tu as compté 9 termes. De U_1 à U_8, il y en a $8 - 1 + 1 = 8$.

1275/128 → Tous les termes sont négatifs : leur somme l'est aussi.

EXERCICE 28 · RAISONNEMENT

Une somme qui ne part pas du début

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison 2. Calcule la somme $S = U_3 + U_4 + \ldots + U_8$.

Réponse attendue : `504`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier terme de cette somme est U_3, pas U_0 : calcule $U_3 = U_0 \times 2^3$.
2. De U_3 à U_8, il y a $8 - 3 + 1 = 6$ termes. Applique la formule $S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$, avec $a = 8$, $q = 2$ et $n = 6$.

CORRECTION

Le premier terme de la somme —

$U_3 = 1 \times 2^3 = 8$

Le nombre de termes — De U_3 à U_8, on compte les deux bouts.

$8 - 3 + 1 = 6$

La somme —

$S = 8 \times \frac{1-2^6}{1-2} = 8 \times 63 = 504$

$S = 504$: dans la formule, a est le premier terme de la somme, ici $U_3 = 8$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`63` → Tu as pris $a = U_0 = 1$. Dans la formule, a est le premier terme de la somme : ici $U_3 = 8$.

`248` → Tu as compté cinq termes. De U_3 à U_8, il y en a $8 - 3 + 1 = 6$: on compte les deux bouts.

`2040` → Tu as pris pour exposant 8, l'indice du dernier terme. L'exposant de la formule est le nombre de termes : 6.

`511` → 511, c'est la somme de U_0 à U_8. Celle qu'on demande commence à U_3 : il faut lui enlever $U_0 + U_1 + U_2 = 7$.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT **Retrouver le premier terme**

Soit (V_n) une suite géométrique de raison 2. On sait que $V_0 + V_1 + \ldots + V_{14} = 98\,301$. Calcule V_0.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. De V_0 à V_{14}, il y a 15 termes : écris la somme en fonction de V_0.
2. $V_0 \times \dfrac{1-2^{15}}{1-2} = V_0 \times 32\,767$.

CORRECTION

La somme —

$V_0 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = V_0 \times (2^{15} - 1) = 32\,767 \times V_0$

> La somme : $V_0 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = V_0 \times (2^{15} - 1) = 32\,767 \times V_0$
>
> La somme: V indice 0 fois le quotient de 1 moins 2 puissance 15, par la parenthèse 1 moins 2, égale V indice 0 fois la parenthèse 2 puissance 15, moins 1, égale 32 767 fois V indice 0

L'équation —

$32\,767 \times V_0 = 98\,301 \iff V_0 = 3$

Le terme général —

$V_n = 3 \times 2^n$

$V_0 = 3$, et $V_n = 3 \times 2^n$ pour tout entier naturel n.

PIÈGES ANTICIPÉS

`32767` → $32\,767$, c'est-à-dire $2^{15} - 1$, est le nombre par lequel V_0 est multiplié. Divise $98\,301$ par ce nombre.

$32\,767$, c'est-à-dire $2^{15}-1$, est le nombre par lequel V_0 est multiplié. Divise $98\,301$ par ce nombre.

c'est-à-dire 2 puissance 15, moins 1, est le nombre par lequel V indice 0 est multiplié. Divise 98 ,767 32 .301 par ce nombre

---

EXERCICE 30 · RAISONNEMENT

Combien de termes ?

Soit (V_n) la suite géométrique de premier terme $V_0 = 3$ et de raison 2. Détermine l'entier n pour que la somme des n premiers termes de cette suite soit $3\,145\,725$.

Soit (V_n) la suite géométrique de premier terme $V_0 = 3$ et de raison 2. Détermine l'entier n pour que la somme des n premiers termes de cette suite soit 3 145 725.

Soit V indice n la suite géométrique de premier terme V indice 0 égale 3 et de raison 2. Détermine l'entier n pour que la somme des n premiers termes de cette suite soit trois millions cent quarante-cinq mille sept .cent vingt-cinq

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme des n premiers termes est $3 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = 3 \times (2^n - 1)$.

   La somme des n premiers termes est $3 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = 3 \times (2^n - 1)$.

   La somme des n premiers termes est 3 fois le quotient de 1 moins 2 puissance n, par la parenthèse 1 .moins 2, égale 3 fois la parenthèse 2 puissance n, moins 1

2. $2^n - 1 = 1\,048\,575$, donc $2^n = 1\,048\,576$. Et $2^{10} = 1024$.

   2 puissance n, moins 1, égale 1 048 575, donc 2 puissance n égale 1 048 576. Et $2^{10} = 1024$.

   puissance n, moins 1, égale un million quarante-huit mille cinq cent soixante-quinze, donc 2 2 .puissance n égale un million quarante-huit mille cinq cent soixante-seize. Et 2 puissance 10 égale 1024

CORRECTION

La somme —

$3 \times (2^n - 1) = 3\,145\,725$

La somme : 3 fois la parenthèse 2 puissance n, moins 1, égale 3 145 725

La somme: 3 fois la parenthèse 2 puissance n, moins 1, égale trois millions cent quarante-cinq mille sept cent vingt-cinq

La puissance —

$2^n - 1 = 1\,048\,575 \iff 2^n = 1\,048\,576$

La puissance : 2 puissance n, moins 1, égale 1 048 575, équivaut à 2 puissance n égale 1 048 576

La puissance: 2 puissance n, moins 1, égale un million quarante-huit mille cinq cent soixante-quinze, équivaut à 2 puissance n égale un million quarante-huit mille cinq cent soixante-seize

L'exposant —

$1\,048\,576 = 1024 \times 1024 = 2^{10} \times 2^{10}$

L'exposant : 1 048 576 égale 1024 fois 1024 égale 2 puissance 10 fois 2 puissance 10

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

> L'exposant: un million quarante-huit mille cinq cent soixante-seize égale 1024 fois 1024 égale 2 puissance 10 fois 2 puissance 10

$n = 20$: il faut additionner les vingt premiers termes, de V_0 à V_{19}.

PIÈGES ANTICIPÉS

19 → 19 est l'indice du dernier terme, V_{19}. De V_0 à V_{19}, il y a vingt termes : c'est ce nombre de termes qu'on demande.

21 → Vérifie : $2^{21} = 2\,097\,152$, c'est trop. Cherche l'exposant tel que $2^n = 1\,048\,576$.

> Vérifie : 2 puissance 21 égale 2 097 152, c'est trop. Cherche l'exposant tel que 2 puissance n égale 1 048 576.
>
> Vérifie: 2 puissance 21 égale deux millions quatre-vingt-dix-sept mille cent cinquante-deux, c'est trop. .Cherche l'exposant tel que 2 puissance n égale un million quarante-huit mille cinq cent soixante-seize

---

EXERCICE 31 · RAISONNEMENT

Jusqu'à 33 554 432

Calcule la somme $B = 2 - 4 + 8 - 16 + 32 - \ldots + 33\,554\,432$, sachant que $33\,554\,432 = 2^{25}$.

> Calcule la somme B égale 2 moins 4 plus 8 moins 16 plus 32 moins et ainsi de suite plus 33 554 432, sachant que 33 554 432 égale 2 puissance 25.
>
> Calcule la somme B égale 2 moins 4 plus 8 moins 16 plus 32 moins et ainsi de suite plus trente-trois millions cinq cent cinquante-quatre mille quatre cent trente-deux, sachant que trente-trois millions cinq .cent cinquante-quatre mille quatre cent trente-deux égale 2 puissance 25

Réponse attendue : 22369622

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les signes alternent : la raison est -2, et le premier terme est 2.
2. Les termes vont de 2^1 à 2^{25} : il y en a 25. Et $(-2)^{25}$ est négatif.

CORRECTION

Les données —

$a = 2 \quad ; \quad q = -2 \quad ; \quad n = 25$

La puissance — L'exposant 25 est impair.

$(-2)^{25} = -33\,554\,432$

> La puissance. L'exposant 25 est impair. la parenthèse moins 2, puissance 25 égale moins 33 554 432
>
> La puissance. L'exposant 25 est impair. la parenthèse moins 2, puissance 25 égale moins trente-trois millions cinq cent cinquante-quatre mille quatre cent trente-deux

La formule —

$B = 2 \times \frac{1+33\,554\,432}{3} = 2 \times 11\,184\,811$

> La formule : B égale 2 fois la parenthèse 1 plus 33 554 432, sur 3 égale 2 fois 11 184 811
>
> La formule: B égale 2 fois la parenthèse 1 plus trente-trois millions cinq cent cinquante-quatre mille quatre cent trente-deux, sur 3 égale 2 fois onze millions cent quatre-vingt-quatre mille huit cent onze

$B = 22\,369\,622.$

> B égale 22 369 622.
>
> .B égale vingt-deux millions trois cent soixante-neuf mille six cent vingt-deux

PIÈGES ANTICIPÉS

`67108862` → Tu as pris $q = 2$. Les signes alternent : la raison est -2, et le dénominateur de la formule, $1 - q$, vaut $1 + 2 = 3$.

EXERCICE 32 · BASE

Trois nombres qui se ressemblent

Les nombres $428\,442$, 4242 et 42 sont-ils, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Réponds par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui ils le sont · ils le sont · oui c'est une suite geometrique · c'est une suite geometrique · oui ils sont en progression geometrique · ils sont en progression geometrique · oui ce sont des termes consecutifs · ce sont des termes consecutifs · oui ce sont des termes consecutifs d'une suite geometrique · ce sont des termes consecutifs d'une suite geometrique · oui geometrique

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois nombres sont des termes consécutifs d'une suite géométrique quand on passe du premier au deuxième, puis du deuxième au troisième, en multipliant par le même nombre.
2. Compare les quotients $\dfrac{428\,442}{4242}$ et $\dfrac{4242}{42}$.

CORRECTION

Les quotients —

$\frac{428\,442}{4242} = 101$; $\frac{4242}{42} = 101$

La raison —

$4242 = 428\,442 \times \frac{1}{101}$; $42 = 4242 \times \frac{1}{101}$

Oui : on passe de chaque nombre au suivant en multipliant par $\dfrac{1}{101}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / non ils ne le sont pas / non, ils ne le sont pas / ils ne le sont pas / non ils ne sont pas en progression geometrique / non, ils ne sont pas en progression geometrique / ils ne sont pas en progression geometrique / non ce n'est pas une suite geometrique / non, ce n'est pas une suite geometrique / ce n'est pas une suite geometrique / pas geometrique / non geometrique` → Fais les deux divisions : $428\,442 \div 4242$ et $4242 \div 42$ donnent le même résultat, 101.

EXERCICE 33 · PRATIQUE

La moyenne géométrique

a, b et c sont trois réels positifs, termes consécutifs d'une suite géométrique. On sait alors que $b = \sqrt{ac}$: b est la **moyenne géométrique** de a et c. Avec $a = 3$ et $c = 12$, calcule b.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si q est la raison, $b = a\,q$ et $c = b\,q$: donc $b^2 = a\,c$.
2. Calcule le produit 3×12, puis sa racine carrée.

CORRECTION

Pourquoi —

$b = a\,q \quad ; \quad c = b\,q \quad \text{donc} \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \quad \text{et} \quad b^2 = a\,c$

Le calcul —

$b = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$

Vérification — La raison est 2.

$3 \times 2 = 6 \quad ; \quad 6 \times 2 = 12$

$b = 6$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7.5 / 15/2` → $7{,}5$ est la demi-somme de 3 et 12 : c'est la moyenne **arithmétique**. Ici, c'est le produit qui compte : $b^2 = a\,c$.

`36` → 36 est le produit $a\,c$, c'est-à-dire b^2. Il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 34 · RAISONNEMENT

De l'arithmétique au géométrique

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $r = 3$: $U_n = 3n + 1$. Pour tout entier naturel n, on pose V_n égal à 2 élevé à la puissance U_n, c'est-à-dire $V_n = 2^{3n+1}$. La suite (V_n) est géométrique. Quelle est sa raison ?

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris V_{n+1} : l'exposant devient $3(n+1) + 1 = 3n + 1 + 3$.

   > Écris V indice (n plus un) : l'exposant devient $3(n+1) + 1 = 3n + 1 + 3$.
   >
   > .Écris V indice (n plus un): l'exposant devient 3 fois la parenthèse n plus 1, plus 1 égale 3n plus 1 plus 3

2. $2^{3n+1+3} = 2^{3n+1} \times 2^3$.

CORRECTION

Le terme suivant — Quand n augmente de 1, l'exposant U_n augmente de la raison 3.

$V_{n+1} = 2^{3(n+1)+1} = 2^{3n+1+3} = 2^{3n+1} \times 2^3$

> Le terme suivant. Quand n augmente de 1, l'exposant U_n augmente de la raison 3. V indice (n plus un) égale 2 puissance la parenthèse 3 fois la parenthèse n plus 1, plus 1, égale 2 puissance la parenthèse 3n plus 1 plus 3, égale 2 puissance la parenthèse 3n plus 1, fois 2 au cube

> Le terme suivant. Quand n augmente de 1, l'exposant U indice n augmente de la raison 3. V indice (n plus un) égale 2 puissance la parenthèse 3 fois la parenthèse n plus 1, plus 1, égale 2 puissance la parenthèse 3n plus 1 plus 3, égale 2 puissance la parenthèse 3n plus 1, fois 2 au cube

Conclusion — Le premier terme est $V_0 = 2^1 = 2$.

$V_{n+1} = 8 \times V_n$

> Conclusion. Le premier terme est $V_0 = 2^1 = 2$. V indice (n plus un) égale 8 fois V indice n
>
> Conclusion. Le premier terme est V indice 0 égale 2 puissance 1 égale 2. V indice (n plus un) égale 8 fois V indice n

(V_n) est géométrique de raison $2^3 = 8$, c'est-à-dire 2^r, et de premier terme $V_0 = 2^1 = 2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est la raison de la suite arithmétique (U_n). Quand l'exposant augmente de 3, la puissance de 2 est multipliée par 2^3.

6 → Ce n'est pas 2×3 : c'est 2^3.

2 → 2 est le premier terme $V_0 = 2^1$. La raison est le nombre par lequel on multiplie pour passer de V_n à V_{n+1}.

> 2 est le premier terme $V_0 = 2^1$. La raison est le nombre par lequel on multiplie pour passer de V_n à V indice (n plus un).
>
> est le premier terme V indice 0 égale 2 puissance 1. La raison est le nombre par lequel on multiplie 2 .pour passer de V indice n à V indice (n plus un)

EXERCICE 35 · RAISONNEMENT

Deux formules de placement

Un épargnant place 8000 dinars pendant six ans, à intérêts composés. Il hésite entre un taux annuel de $4\,\%$ et un taux semestriel de $2\,\%$. La seconde formule est la plus avantageuse : calcule le capital qu'elle donne au bout des six ans, arrondi au dinar près.

Donne un nombre entier de dinars.

Réponse attendue : `10146`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Six ans, c'est 12 semestres : le capital est multiplié 12 fois par $1{,}02$.
2. Calcule $8000 \times 1{,}02^{12}$ à la calculatrice, puis arrondis à l'unité.

CORRECTION

Taux annuel de 4 pour cent — Six années, donc six multiplications par $1{,}04$.

$8000 \times 1{,}04^6 \approx 10\,122{,}55$

Taux semestriel de 2 pour cent — Douze semestres, donc douze multiplications par $1{,}02$.

$8000 \times 1{,}02^{12} \approx 10\,145{,}93$

Le taux semestriel de $2\,\%$ rapporte environ 23 dinars de plus : il donne environ $10\,146$ dinars.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10123 / 10122.55 / 8000*1.04^6 / 10122.5 / 10122.552` → C'est le capital avec le taux annuel de $4\,\%$. On demande celui du taux semestriel de $2\,\%$: douze multiplications par $1{,}02$.

`9009` → Tu as multiplié six fois par $1{,}02$. En six ans, il y a douze semestres.

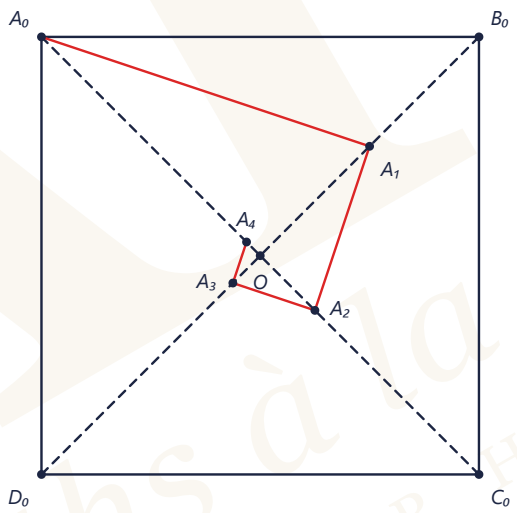
`10145.93 / 10145.9 / 8000*1.02^12 / 10145.934 / 10145.9344 / 10145.9343 / 10145.93436` → Le calcul est juste. Il reste à arrondir au dinar près : le chiffre des dixièmes est 9, donc on arrondit au-dessus.

`10145` → Tu as coupé les décimales. Arrondir au dinar près, c'est prendre l'entier le plus proche de $10\,145{,}93$: on arrondit au-dessus.

EXERCICE 36 · DEFI

Les points sur une demi-diagonale

Dans un carré $A_0B_0C_0D_0$ de centre O, les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, … sont placés tour à tour sur les segments $[OB_0]$, $[OC_0]$, $[OD_0]$, $[OA_0]$, $[OB_0]$, … Pour n inférieur ou égal à 1000, combien de points A_n sont sur le segment $[OA_0]$? On compte aussi le point A_0.



La ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4$ dans le carré $A_0B_0C_0D_0$.

Un carré A0 B0 C0 D0 de centre O : A0 en haut à gauche, B0 en haut à droite, C0 en bas à droite, D0 en bas à gauche. Ses deux diagonales se coupent en O à angle droit. Le point A1 est le milieu du segment [O B0]. Le point A2 est sur le segment [O C0], au quart de la distance en partant de O. Le point A3 est sur le segment [O D0], au huitième. Le point A4 est sur le segment [O A0], au seizième. La ligne brisée A0 A1 A2 A3 A4 tourne autour de O en s'en rapprochant, comme une spirale.

Réponse attendue : 251

INDICES, DANS L'ORDRE

1. A_0, A_4, A_8, … : sur $[OA_0]$, on trouve les points dont l'indice est un multiple de 4.
2. Les multiples de 4 jusqu'à 1000 s'écrivent $4k$ avec k de 0 à 250. Combien de valeurs de k ?

CORRECTION

Les indices — On revient sur $[OA_0]$ tous les quatre pas : n est un multiple de 4.

$n = 4k$

Le compte — De 0 à 250, il y a $250 - 0 + 1$ entiers.

$0 \leq 4k \leq 1000 \iff 0 \leq k \leq 250$

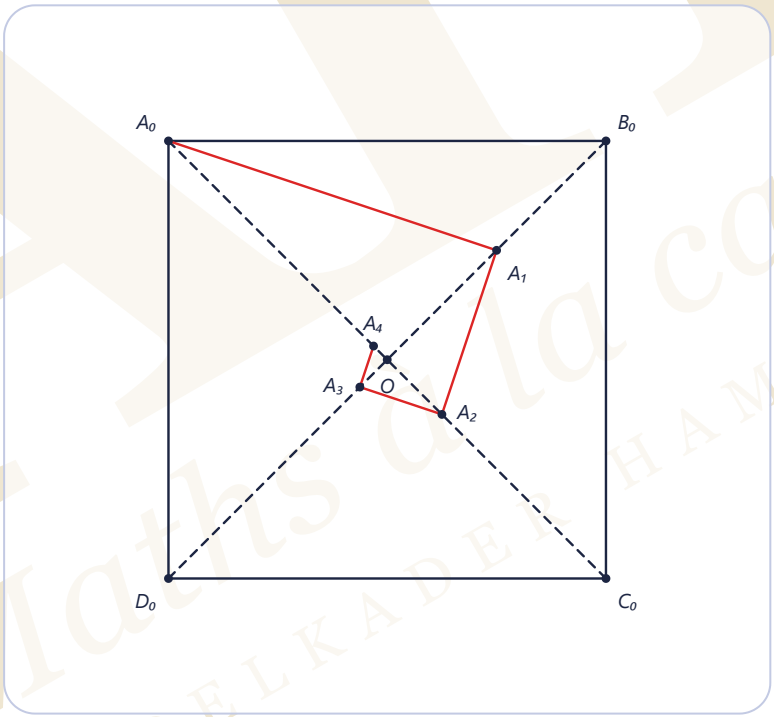
Il y a 251 points : A_0, A_4, A_8, ..., A_{1000}.

PIÈGES ANTICIPÉS

`250` → $1000 \div 4 = 250$, mais il faut aussi compter A_0 : de $k = 0$ à $k = 250$, il y a un entier de plus.

EXERCICE 37 · DEFI **Plus petit qu'un centième**

Dans le carré $A_0B_0C_0D_0$ de centre O et de côté 6 centimètres, les points A_n se rapprochent de O : la distance $U_n = OA_n$ vérifie $U_n = \dfrac{3\sqrt{2}}{2^n}$ pour tout entier naturel n. À partir de quelle valeur de n a-t-on $U_n < 10^{-2}$?



La ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4$ dans le carré $A_0B_0C_0D_0$.

Un carré A0 B0 C0 D0 de centre O : A0 en haut à gauche, B0 en haut à droite, C0 en bas à droite, D0 en bas à gauche. Ses deux diagonales se coupent en O à angle droit. Le point A1 est le milieu du segment [O B0]. Le point A2 est sur le segment [O C0], au quart de la distance en partant de O. Le point A3 est sur le segment [O D0], au huitième. Le point A4 est sur le segment [O A0], au seizième. La ligne brisée A0 A1 A2 A3 A4 tourne autour de O en s'en rapprochant, comme une spirale.

Donne seulement l'entier n, par exemple 12.

> Dans le carré $A_0B_0C_0D_0$ de centre O et de côté 6 centimètres, les points A_n se rapprochent de O : la distance $U_n = OA_n$ vérifie U indice n égale 3 racine carrée de 2, le tout sur 2 puissance n, pour tout

entier naturel n. À partir de quelle valeur de n a-t-on $U_n < 10^{-2}$? Donne seulement l'entier n, par exemple 12.

Dans le carré A indice 0 B indice 0 C indice 0 D indice 0 de centre O et de côté 6 centimètres, les points A indice n se rapprochent de O: la distance U indice n égale O A indice n vérifie U indice n égale 3 racine carrée de 2, le tout sur 2 puissance n, pour tout entier naturel n. À partir de quelle valeur de n a-t-on U .indice n inférieur à 10 puissance moins 2? Donne seulement l'entier n, par exemple 12

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_n < 0{,}01$ revient à $2^n > 300\sqrt{2}$, et $300\sqrt{2} \approx 424{,}3$.
2. Écris les puissances de 2 : $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, …

CORRECTION

L'inéquation —

$$\frac{3\sqrt{2}}{2^n} < \frac{1}{100} \iff 2^n > 300\sqrt{2} \approx 424{,}3$$

L'inéquation : 3 racine carrée de 2, le tout sur 2 puissance n, inférieur à 1 sur 100, équivaut à 2 puissance n supérieur à 300 racine carrée de 2, soit environ 424,3

L'inéquation: 3 racine carrée de 2, le tout sur 2 puissance n, inférieur à 1 sur 100, équivaut à 2 puissance n supérieur à 300 racine carrée de 2, soit environ 424,3

Les puissances de 2 —

$2^8 = 256 < 424{,}3 < 512 = 2^9$

C'est à partir de $n = 9$: $U_8 \approx 0{,}0166$ et $U_9 \approx 0{,}0083$.

PIÈGES ANTICIPÉS

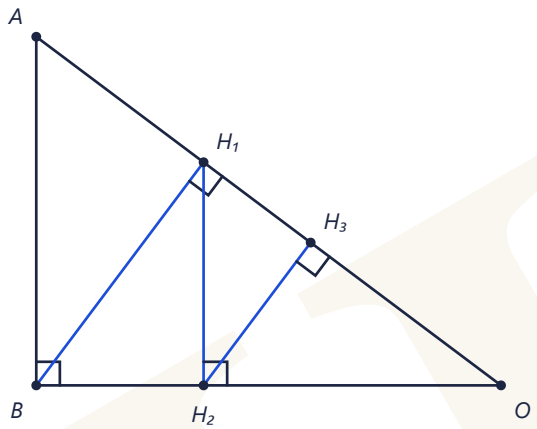
`8` → $2^8 = 256$ est encore plus petit que $424{,}3$: U_8, qui vaut environ $0{,}0166$, dépasse $0{,}01$.

`10` → U_{10} est bien plus petit que $0{,}01$, mais ce n'est pas le premier : vérifie U_9.

EXERCICE 38 · DEFI

Le troisième projeté

OAB est un triangle rectangle en B avec $OA = 5$, $OB = 4$ et $AB = 3$. H_1 est le projeté orthogonal de B sur (OA), H_2 celui de H_1 sur (OB) et H_3 celui de H_2 sur (OA). On a $\dfrac{OH_1}{OB} = \dfrac{OH_2}{OH_1} = \dfrac{OH_3}{OH_2} = \dfrac{4}{5}$. Calcule OH_3.



Le zigzag B, H_1, H_2, H_3 entre les côtés [OA] et [OB].

Un triangle OAB rectangle en B : B en bas à gauche, O en bas à droite, A au-dessus de B. OA mesure 5, OB mesure 4 et AB mesure 3. Le point H1 est le pied de la perpendiculaire menée de B au côté [OA]. Le point H2 est le pied de la perpendiculaire menée de H1 au côté [OB]. Le point H3 est le pied de la perpendiculaire menée de H2 au côté [OA]. Les segments [B H1], [H1 H2] et [H2 H3] forment un zigzag entre les côtés [OA] et [OB], de plus en plus court en allant vers O.

Réponse attendue : 256/125 — aussi acceptées : 2.048

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque distance est $\frac{4}{5}$ fois la précédente : c'est une suite géométrique qui part de $OB = 4$.
2. De OB à OH_3, on multiplie trois fois par $\frac{4}{5}$.

CORRECTION

De proche en proche —

$OH_1 = \frac{16}{5}$; $OH_2 = \frac{64}{25}$

Le résultat —

$OH_3 = \frac{4}{5} \times \frac{64}{25} = \frac{256}{125}$

$$OH_3 = \frac{256}{125} = 2{,}048.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

64/25 / 2.56 → $\frac{64}{25}$, c'est OH_2. Il reste à multiplier une fois par $\frac{4}{5}$.

1024/625 → Tu as multiplié quatre fois par $\frac{4}{5}$: c'est OH_4.

EXERCICE 39 · DEFI Un nombre parfait

Un entier naturel est **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire de ses diviseurs autres que lui-même : $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. On montre que si p est un nombre premier de la forme $p = 2^{n+1} - 1$, alors $N = p \times 2^n$ est parfait. Détermine N pour $p = 31$.

> Un entier naturel est **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire de ses diviseurs autres que lui-même : $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. On montre que si p est un nombre premier de la forme $p = 2^{n+1} - 1$, alors le nombre N, égal à $p \times 2^n$, est parfait. Détermine N pour $p = 31$.
>
> Un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire de ses diviseurs autres que lui-même: 6 égale 1 plus 2 plus 3 et 28 égale 1 plus 2 plus 4 plus 7 plus 14. On montre que si p est un nombre premier de la forme p égale 2 puissance la parenthèse n plus 1, moins 1, alors le nombre .grand N, égal à p fois 2 puissance n, est parfait. Détermine grand N pour p égale 31

Réponse attendue : 496

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche n tel que $2^{n+1} - 1 = 31$, c'est-à-dire $2^{n+1} = 32$.
2. $32 = 2^5$ donc $n = 4$: calcule 31×2^4.

CORRECTION

L'exposant —

$2^{n+1} = 32 = 2^5 \iff n = 4$

Le nombre —

$N = 31 \times 2^4 = 31 \times 16$

> Le nombre : $N = 31 \times 2^4 = 31 \times 16$
>
> Le nombre: grand N égale 31 fois 2 puissance 4 égale 31 fois 16

Vérification — Les diviseurs propres sont les puissances de 2 jusqu'à 16, et 31 fois les puissances de 2 jusqu'à 8.

$(1 + 2 + 4 + 8 + 16) + (31 + 62 + 124 + 248) = 31 + 465$

$N = 496$: c'est le troisième nombre parfait, après 6 et 28.

> $N = 496$: c'est le troisième nombre parfait, après 6 et 28.
>
> .Grand N égale 496: c'est le troisième nombre parfait, après 6 et 28

PIÈGES ANTICIPÉS

992 → Tu as multiplié par 2^5. Dans $N = p \times 2^n$, l'exposant est $n = 4$; c'est p qui vaut $2^{n+1} - 1$.

> Tu as multiplié par 2^5. Dans $N = p \times 2^n$, l'exposant est $n = 4$; c'est p qui vaut $2^{n+1} - 1$.
>
> Tu as multiplié par 2 puissance 5. Dans grand N égale p fois 2 puissance n, l'exposant est n égale 4; .c'est p qui vaut 2 puissance la parenthèse n plus 1, moins 1

248 → Tu as multiplié par 2^3. Ici $n = 4$, car $2^{4+1} - 1 = 31$.

EXERCICE 40 · BASE Le nénuphar

Sur un lac pousse un nénuphar qui double de taille chaque jour. Au bout de dix jours, il recouvre exactement la surface du lac tout entier. Combien de jours a-t-il fallu au nénuphar pour recouvrir la moitié du lac ?

Donne seulement le nombre de jours, en chiffres.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ne pars pas du début : pars de la fin. Que s'est-il passé entre la veille et le dixième jour ?
2. Chaque jour, la taille est multipliée par 2. La veille du dixième jour, elle était donc deux fois plus petite.

CORRECTION

À reculons — Les tailles forment une suite géométrique de raison 2.

$s_{10} = 2 \times s_9$

Un jour avant — La veille du dixième jour, le nénuphar couvrait la moitié du lac.

$s_9 = \frac{1}{2} \times s_{10}$

> Un jour avant. La veille du dixième jour, le nénuphar couvrait la moitié du lac. s indice 9 égale un demi fois s indice 10
>
> Un jour avant. La veille du dixième jour, le nénuphar couvrait la moitié du lac. s indice 9 égale un demi fois s indice 10

Il a fallu 9 jours : le dernier jour, le nénuphar passe de la moitié du lac au lac tout entier.

PIÈGES ANTICIPÉS

5 → La moitié du lac n'est pas atteinte à la moitié du temps : la taille double chaque jour, elle n'augmente pas régulièrement. Pars du dixième jour et recule d'un jour.

EXERCICE 41 · BASE

Le prix d'un abonnement, deux ans plus tôt

Le prix mensuel d'un abonnement augmente de $10\,\%$ chaque année. La troisième année, il est de $48{,}4$ dinars. Calculer le prix mensuel de l'abonnement, en dinars, la première année.

Donner le prix en dinars, par exemple 41,5.

Réponse attendue : 40

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'une année à la suivante, le prix est multiplié par $1{,}1$. Pour revenir en arrière, on divise par $1{,}1$.
2. De la première à la troisième année, le prix a été multiplié deux fois par $1{,}1$, donc par $1{,}1^2 = 1{,}21$.

CORRECTION

La deuxième année — On divise le prix de la troisième année par $1{,}1$.

$48{,}4 \div 1{,}1 = 44$

La première année —

$44 \div 1{,}1 = 40$

La première année, l'abonnement coûtait 40 dinars par mois. Pour remonter dans une suite géométrique, on divise par la raison ; on ne retire pas $10\,\%$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`39.204` → Tu as retiré $10\,\%$ deux fois. Mais les $10\,\%$ se calculaient sur le prix de l'année d'avant, pas sur $48{,}4$: il faut diviser par $1{,}1$, pas multiplier par $0{,}9$.

`38.72` → Tu as retiré $20\,\%$ d'un coup. Les deux augmentations ne s'ajoutent pas, et on remonte en divisant par $1{,}1$ à chaque année.

`44` → 44 dinars, c'est le prix de la deuxième année. Il reste à diviser une fois encore par $1{,}1$.

EXERCICE 42 · BASE

Une voiture qui perd de sa valeur

Une voiture achetée $40\,000$ dinars perd $15\,\%$ de sa valeur chaque année. Calculer sa valeur, en dinars, au bout de deux ans.

Donner la valeur en dinars.

Réponse attendue : `28900`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Diminuer de $15\,\%$, c'est multiplier par $1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
2. La deuxième année, les $15\,\%$ se calculent sur la valeur au bout d'un an.

CORRECTION

Au bout d'un an —

$$40\,000 \times 0{,}85 = 34\,000$$

Au bout de deux ans —

$$34\,000 \times 0{,}85 = 28\,900$$

Une baisse de $15\,\%$ par an multiplie la valeur par $0{,}85$ chaque année : les valeurs successives forment une suite géométrique de raison $0{,}85$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`28000` → Tu as retiré 6000 dinars deux fois. La deuxième année, la baisse de $15\,\%$ porte sur $34\,000$ dinars : elle n'est que de 5100 dinars.

`34000` → $34\,000$ dinars, c'est la valeur au bout d'un an seulement.

EXERCICE 43 · BASE

Le côté du cinquième carré

On construit un carré de côté 8, puis un deuxième carré en reliant les milieux des côtés du premier, et on répète ce procédé. À chaque étape, le côté est multiplié par $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Calculer le côté du cinquième carré.

Réponse attendue : `2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Du premier au cinquième carré, combien de fois multiplie-t-on par $\frac{\sqrt{2}}{2}$?
2. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

CORRECTION

Le nombre d'étapes — Du premier au cinquième carré, on multiplie quatre fois par $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La puissance —

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Le côté —

$8 \times \frac{1}{4} = 2$

Les côtés forment une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$: le cinquième carré a pour côté 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2 / 0.5` → Le côté n'est pas divisé par 2 à chaque étape : c'est l'aire qui l'est. Le côté est multiplié par $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

`2*sqrt(2)` → $2\sqrt{2}$ est le côté du quatrième carré. Du premier au cinquième, il y a quatre étapes.

`sqrt(2)` → Tu as fait cinq étapes. Le premier carré a pour côté 8 : il n'y a que quatre étapes jusqu'au cinquième.

EXERCICE 44 · PRATIQUE

L'aire des triangles complémentaires

Un triangle t_0 a pour aire 2048 cm². Son triangle complémentaire t_1, dont les sommets sont les milieux des côtés de t_0, a une aire égale au quart de celle de t_0. On construit de même t_2, complémentaire de t_1, et ainsi de suite. Calculer l'aire du triangle t_5, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les aires forment une suite géométrique : quelle est sa raison ?
2. De t_0 à t_5, on divise cinq fois par 4.

CORRECTION

La raison — Chaque aire est le quart de la précédente.

$A_{n+1} = \frac{1}{4} \times A_n$

Le terme général —

$A_5 = 2048 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{2048}{1024}$

Le résultat —

$A_5 = 2$

L'aire de t_5 vaut 2 cm². Les périmètres sont divisés par 2, mais les aires par 4 : les deux suites n'ont pas la même raison.

PIÈGES ANTICIPÉS

`64` → Tu as divisé par 2, comme pour les périmètres. L'aire, elle, est divisée par 4 à chaque étape.

`8` → 8 cm², c'est l'aire de t_4. Il reste une division par 4.

`0.5 / 1/2` → Tu as fait une étape de trop : de t_0 à t_5, on divise cinq fois par 4.

EXERCICE 45 · BASE

La raison d'une population de bactéries

Une population de bactéries augmente de $20\,\%$ chaque heure. On note B_n le nombre de bactéries au bout de n heures : la suite (B_n) est géométrique. Déterminer sa raison.

Donner la raison, par exemple 1,5.

Réponse attendue : `6/5` — aussi acceptées : 1.2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour augmenter un nombre de $20\,\%$, on lui ajoute $\dfrac{20}{100}$ de lui-même.
2. $B_n + 0{,}2\,B_n = (1 + 0{,}2)\,B_n$.

CORRECTION

L'augmentation —

$B_{n+1} = B_n + \frac{20}{100}\,B_n$

La raison —

$B_{n+1} = 1{,}2 \times B_n$

Une augmentation de $t\,\%$ correspond à une suite géométrique de raison $1 + \dfrac{t}{100}$: ici $q = 1{,}2$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.2 / 1/5` → $0{,}2$ est le taux : ce qu'on ajoute. La raison est ce par quoi on multiplie : $1 + 0{,}2$.

`20` → La raison n'est pas le pourcentage. On multiplie le nombre de bactéries par $1 + \dfrac{20}{100}$.

`1.02` → $1{,}02$ correspondrait à une augmentation de $2\,\%$. Ici $20\,\%$ s'écrit $0{,}2$.

`0.8 / 4/5` → $0{,}8$ correspond à une baisse de $20\,\%$. Ici la population augmente.

EXERCICE 46 · PRATIQUE

Les intérêts d'un placement de cinq ans

On place 2500 dinars à intérêts composés, au taux annuel de $6\,\%$: chaque année, les intérêts se calculent sur le dernier capital. Calculer le montant total des intérêts gagnés, en dinars, au bout de cinq ans, arrondi au millime.

Donner les intérêts en dinars, arrondis au millime, par exemple 123,456.

Réponse attendue : `845.564`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque année, le capital est multiplié par $1{,}06$: calcule d'abord le capital au bout de cinq ans.
2. Les intérêts gagnés, c'est ce que le capital a gagné en plus des 2500 dinars placés. Arrondis à trois chiffres après la virgule à la fin seulement.

CORRECTION

La suite des capitaux — Les capitaux forment une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2500$ et de raison $1{,}06$.

$$C_n = 2500 \times 1{,}06^{\,n}$$

Au bout de cinq ans —

$$C_5 = 2500 \times 1{,}06^5 = 3345{,}563\,944\ldots$$

Les intérêts —

$$C_5 - C_0 = 845{,}563\,944\ldots \approx 845{,}564$$

Les intérêts gagnés valent environ $845{,}564$ dinars : on calcule $C_5 = C_0 \times (1+t)^5$, puis on retire le capital placé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`845.563` → Tu as tronqué. Le chiffre suivant est 9 : on arrondit au millime supérieur.

`845.56` → On demande l'arrondi au millime, c'est-à-dire trois chiffres après la virgule.

`3345.564` / `3345.563` → C'est le capital au bout de cinq ans. On demande seulement les intérêts : retire les 2500 dinars placés.

`750` → Tu as compté 150 dinars chaque année. À intérêts composés, les intérêts de chaque année se calculent sur le dernier capital, pas sur les 2500 dinars du départ.

EXERCICE 47 · RAISONNEMENT

Doubler son capital

Un capital est placé à intérêts composés, au taux annuel de $8\,\%$. Déterminer au bout de combien d'années, au minimum, ce capital aura au moins doublé.

Donner seulement le nombre d'années, par exemple 12.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Au bout de n années, le capital a été multiplié par $1{,}08^{\,n}$. Le montant de départ n'intervient pas.
2. Cherche le plus petit entier n tel que $1{,}08^{\,n} \geq 2$, en essayant à la calculatrice. Regarde bien $1{,}08^9$.

CORRECTION

La condition — Si C_0 est le capital placé, $C_n = C_0 \times 1{,}08^{\,n}$. Il a doublé quand $C_n \geq 2\,C_0$.

$$1{,}08^{\,n} \geq 2$$

Neuf ans — Il manque encore un peu.

$$1{,}08^9 \approx 1{,}999 < 2$$

Dix ans —

$1{,}08^{10} \approx 2{,}159 \geq 2$

Le capital a doublé au bout de 10 ans. On cherche le premier rang où q^n dépasse le coefficient voulu, et on vérifie le rang d'avant.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → $1{,}08^{9} \approx 1{,}999$: c'est très proche de 2, mais pas encore le double.

`13 / 12.5` → Tu as raisonné à intérêts simples, $8\,\%$ du capital de départ chaque année. À intérêts composés, les intérêts grandissent : le doublement arrive plus tôt.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

Retrouver le taux d'un placement

Un capital de 4000 dinars, placé à intérêts composés à un taux annuel fixe, est devenu 4840 dinars au bout de deux ans. Déterminer ce taux annuel, en pourcentage.

Donner le taux en pourcentage, par exemple 3 %.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si le taux est t, le capital est multiplié par $1+t$ chaque année, donc par $(1+t)^2$ en deux ans.
2. Calcule $\dfrac{4840}{4000}$, puis cherche le nombre positif dont le carré vaut ce quotient.

CORRECTION

La relation —

$4000 \times (1+t)^2 = 4840$

Le carré —

$(1+t)^2 = \frac{4840}{4000} = 1{,}21$

La raison — $1+t$ est positif.

$1+t = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$

Le taux —

$t = 0{,}1 = 10\,\%$

Le taux annuel est de $10\,\%$. La raison $1+t$ se retrouve comme celle d'une suite géométrique dont on connaît deux termes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10.5` → Tu as partagé les 840 dinars gagnés en deux parts égales. À intérêts composés, la deuxième année rapporte plus que la première.

`21` → $21\,\%$ est l'augmentation sur les deux ans. On demande le taux d'une seule année.

`1.1` → $1{,}1$ est la raison de la suite des capitaux. Le taux est $1{,}1 - 1$, en pourcentage.

`0.1` → $0{,}1$ est bien le taux, mais écrit en nombre décimal. On le demande en pourcentage : $0{,}1 = 10\,\%$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 49 · DEFI

Des versements chaque année

Chaque 1er janvier, Salma dépose 500 dinars sur un compte rémunéré à intérêts composés, au taux annuel de $5\,\%$. Les intérêts sont ajoutés au compte le 31 décembre. Calculer le montant du compte, en dinars, juste après son cinquième versement, arrondi au millime.

Donner le montant en dinars, arrondi au millime.

Réponse attendue : `2762.816`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Juste après le cinquième versement, le premier versement a rapporté pendant quatre ans : il vaut $500 \times 1{,}05^4$. Le dernier n'a encore rien rapporté.
2. Le montant est une somme de cinq termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $1{,}05$, de premier terme 500.

CORRECTION

Chaque versement —

$500 \times 1{,}05^4\ ;\ 500 \times 1{,}05^3\ ;\ 500 \times 1{,}05^2\ ;\ 500 \times 1{,}05\ ;\ 500$

La somme —

$S = 500 \times (1 + 1{,}05 + 1{,}05^2 + 1{,}05^3 + 1{,}05^4)$

La formule —

$S = 500 \times \frac{1-1{,}05^5}{1-1{,}05} = 10\,000 \times (1{,}05^5 - 1)$

Le calcul —

$S = 2762{,}815\,625 \approx 2762{,}816$

Le compte contient environ $2762{,}816$ dinars. Des versements réguliers placés à intérêts composés se totalisent avec la formule de la somme de termes consécutifs.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2762.815` → Tu as tronqué. Le chiffre suivant est 6 : on arrondit au millime supérieur.

`2762.82` → On demande l'arrondi au millime : trois chiffres après la virgule.

`2500` → 2500 dinars, c'est la somme des cinq versements, sans les intérêts.

`2900.956` → Tu as fait rapporter chaque versement une année de plus. Juste après le cinquième versement, celui-ci n'a encore rien rapporté.

EXERCICE 50 · BASE

Compléter une progression géométrique

Les nombres 5, 15, 45 et x sont, dans cet ordre, en progression géométrique. Déterminer x.

Réponse attendue : `135`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par quel nombre multiplie-t-on pour passer de 5 à 15 ?
2. On multiplie toujours par le même nombre.

CORRECTION

La raison —

$q = \frac{15}{5} = 3 \quad ; \quad \frac{45}{15} = 3$

Le terme suivant —

$x = 45 \times 3 = 135$

$x = 135$: dans une progression géométrique, on passe d'un terme au suivant en multipliant par la raison.

PIÈGES ANTICIPÉS

75 → Tu as ajouté 30, l'écart entre 15 et 45. Dans une suite géométrique, on ne regarde pas les écarts : on multiplie.

90 → Tu as multiplié par 2. La raison est $\frac{15}{5} = 3$.

EXERCICE 51 · BASE

La raison à partir de deux termes consécutifs

(V_n) est une suite géométrique telle que $V_1 = 12$ et $V_2 = 18$. Déterminer sa raison q.

Réponse attendue : 3/2 — aussi acceptées : 1.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $V_2 = q \times V_1$.
2. La raison est le quotient du terme suivant par le terme d'avant.

CORRECTION

La définition —

$V_2 = q \times V_1 \iff 18 = 12\,q$

La raison —

$q = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

$q = \frac{3}{2}$: la raison d'une suite géométrique est le quotient de deux termes consécutifs.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Tu as calculé $V_2 - V_1$: ce serait la raison d'une suite arithmétique. Ici, la raison est un quotient.

2/3 → Tu as divisé V_1 par V_2. La raison est le terme suivant divisé par le terme d'avant.

EXERCICE 52 · RAISONNEMENT

Trois termes à trouver

Soit x un réel. Les nombres $x - 2$, $x + 1$ et $x + 7$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer x.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Trois termes consécutifs a, b, c d'une suite géométrique vérifient $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, c'est-à-dire $b^2 = a\,c$.
2. Développe les deux membres de $(x+1)^2 = (x-2)(x+7)$: les termes en x^2 s'éliminent.

CORRECTION

La condition —

$$(x+1)^2 = (x-2)(x+7)$$

Développer —

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 5x - 14$$

Résoudre —

$$15 = 3x \iff x = 5$$

Vérification — Les trois nombres sont 3, 6 et 12 : on multiplie par 2 à chaque fois.

$x = 5$. Trois nombres non nuls a, b, c sont en progression géométrique quand $b^2 = a\,c$.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → 2 est la raison de la progression $3, 6, 12$. On demande la valeur de x.

EXERCICE 53 · BASE **Une division par une puissance**

La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = \dfrac{7}{2^n}$. Est-elle géométrique ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui ils le sont · oui elle l'est · elle l'est · oui elle est geometrique · oui, elle est geometrique · elle est geometrique · oui geometrique · oui c'est une suite geometrique · oui, c'est une suite geometrique · c'est une suite geometrique · la suite est geometrique · oui la suite est geometrique · oui, la suite est geometrique

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris U_{n+1} et fais-y apparaître U_n.
2. $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

CORRECTION

Le terme suivant —

$$U_{n+1} = \frac{7}{2^{n+1}} = \frac{7}{2\times 2^n}$$

La relation —

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2^n} = \frac{1}{2} \times U_n$$

La suite est géométrique, de premier terme $U_0 = 7$ et de raison $\dfrac{1}{2}$: diviser par 2^n, c'est multiplier par $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non / pas geometrique / elle n'est pas geometrique / non elle n'est pas geometrique / non, elle n'est pas geometrique / n'est pas geometrique / la suite n'est pas geometrique / non la suite`

n'est pas geometrique / non, la suite n'est pas geometrique / non geometrique / non pas geometrique / non, pas geometrique / non elle ne l'est pas / non, elle ne l'est pas / elle ne l'est pas / ce n'est pas une suite geometrique / non ce n'est pas une suite geometrique / non, ce n'est pas une suite geometrique / elle n'est pas une suite geometrique → Diviser par 2, c'est multiplier par $\frac{1}{2}$: on passe de U_n à U_{n+1} en multipliant toujours par $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 54 · PRATIQUE

Une somme qui n'est pas géométrique

La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = 2n + 3^n$. Est-elle géométrique ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas geometrique · elle n'est pas geometrique · non elle n'est pas geometrique · non, elle n'est pas geometrique · n'est pas geometrique · la suite n'est pas geometrique · non la suite n'est pas geometrique · non, la suite n'est pas geometrique · non geometrique · non pas geometrique · non, pas geometrique · non elle ne l'est pas · non, elle ne l'est pas · elle ne l'est pas · ce n'est pas une suite geometrique · non ce n'est pas une suite geometrique · non, ce n'est pas une suite geometrique · elle n'est pas une suite geometrique

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule U_0, U_1 et U_2.
2. Compare les quotients $\frac{U_1}{U_0}$ et $\frac{U_2}{U_1}$.

CORRECTION

Les premiers termes —

$U_0 = 0 + 1 = 1 \quad ; \quad U_1 = 2 + 3 = 5 \quad ; \quad U_2 = 4 + 9 = 13$

Les quotients —

$\frac{U_1}{U_0} = 5 \quad ; \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{13}{5}$

Les deux quotients sont différents : la suite n'est pas géométrique. Deux quotients différents suffisent à le prouver.

PIÈGES ANTICIPÉS

oui / oui ils le sont / oui elle l'est / elle l'est / oui elle est geometrique / oui, elle est geometrique / elle est geometrique / oui geometrique / oui c'est une suite geometrique / oui, c'est une suite geometrique / c'est une suite geometrique / la suite est geometrique / oui la suite est geometrique / oui, la suite est geometrique → La présence de 3^n ne suffit pas : le terme $2n$ s'y ajoute. Calcule $\frac{U_1}{U_0}$ et $\frac{U_2}{U_1}$: ils ne sont pas égaux.

EXERCICE 55 · PRATIQUE

Un exposant qui avance de deux

La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = 3^{2n+1}$. Elle est géométrique. Déterminer sa raison.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris U_{n+1} : remplace n par $n+1$ dans l'exposant.
2. $2(n+1)+1 = 2n+3$: l'exposant augmente de 2.

CORRECTION

Le terme suivant —

$U_{n+1} = 3^{2(n+1)+1} = 3^{2n+3}$

Faire apparaître U_n —

$3^{2n+3} = 3^2 \times 3^{2n+1} = 9 \times U_n$

La raison est 9. Pour trouver la raison, on écrit U_{n+1} et on y fait apparaître U_n.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → D'un terme au suivant, l'exposant augmente de 2, pas de 1 : on multiplie par 3^2.

2 → 2 est l'augmentation de l'exposant. La raison est 3^2.

EXERCICE 56 · RAISONNEMENT

Une suite auxiliaire

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2U_n - 3$. On pose $V_n = U_n - 3$; la suite (V_n) est géométrique. Calculer U_{10}.

Réponse attendue : 2051

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime V_{n+1} en fonction de V_n : $V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = 2U_n - 6$.
2. Trouve V_0 et la raison, calcule V_{10}, puis reviens à U_{10}.

CORRECTION

La raison —

$V_{n+1} = 2U_n - 3 - 3 = 2(U_n - 3) = 2\,V_n$

Le premier terme —

$V_0 = U_0 - 3 = 2$

Le terme d'indice 10 —

$V_{10} = 2 \times 2^{10} = 2048$

Retour à U —

$U_{10} = V_{10} + 3 = 2051$

$U_{10} = 2051$. La suite (U_n) n'est pas géométrique, mais la suite auxiliaire (V_n) l'est : on calcule avec elle, puis on revient à (U_n).

PIÈGES ANTICIPÉS

2048 → 2048 est V_{10}. On demande $U_{10} = V_{10} + 3$.

1027 → De V_0 à V_{10}, on multiplie dix fois par 2 : $V_{10} = 2 \times 2^{10}$.

5120 → La suite (U_n) n'est pas géométrique, à cause du « -3 ». C'est (V_n) qui l'est, avec $V_0 = 2$.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Un pendule qui s'amortit

L'amplitude d'un pendule est de 25 cm au départ, puis elle diminue de $4\,\%$ à chaque oscillation. Calculer l'amplitude, en cm, après trois oscillations, arrondie au centième.

Donner l'amplitude en cm, arrondie au centième.

Réponse attendue : `22.12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Diminuer de $4\,\%$, c'est multiplier par $0{,}96$.
2. Après trois oscillations, on a multiplié trois fois par $0{,}96$.

CORRECTION

La raison —

$a_{n+1} = 0{,}96 \times a_n$

Trois oscillations —

$a_3 = 25 \times 0{,}96^3 = 25 \times 0{,}884\,736 = 22{,}1184$

L'arrondi —

$a_3 \approx 22{,}12$

L'amplitude vaut environ $22{,}12$ cm : trois baisses de $4\,\%$ ne font pas une baisse de $12\,\%$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`22.11` → Tu as tronqué. Le chiffre des millièmes est 8 : on arrondit au centième supérieur.

`22.1` → On demande l'arrondi au centième : deux chiffres après la virgule.

`22` → Tu as retiré $12\,\%$ d'un coup. Chaque baisse de $4\,\%$ porte sur l'amplitude précédente, qui est de plus en plus petite.

EXERCICE 58 · PRATIQUE

Plier une feuille en deux

Une feuille de papier a une épaisseur de $0{,}1$ mm. On la plie en deux, puis encore en deux, et ainsi de suite : à chaque pliage, l'épaisseur double. On suppose qu'on peut la plier autant qu'on veut. Déterminer le nombre minimal de pliages pour que l'épaisseur dépasse 1 mètre.

Donner seulement le nombre de pliages, par exemple 12.

Réponse attendue : `14`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Après n pliages, l'épaisseur est $0{,}1 \times 2^n$ mm. Et 1 mètre $= 1000$ mm.
2. Cherche le plus petit n tel que $2^n > 10\,000$.

CORRECTION

L'épaisseur —

$e_n = 0{,}1 \times 2^n \text{ mm}$

La condition —

$0{,}1 \times 2^n > 1000 \iff 2^n > 10\,000$

Les puissances de 2 —

$2^{13} = 8192 < 10\,000 \quad ; \quad 2^{14} = 16\,384 > 10\,000$

Il faut 14 pliages. Une suite géométrique de raison 2 dépasse très vite n'importe quel nombre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → Après 13 pliages, l'épaisseur est $819{,}2$ mm : c'est encore moins d'un mètre.

`10` → Attention aux unités : 1 mètre vaut 1000 mm, pas 100 mm.

EXERCICE 59 · BASE **Une raison égale à 1**

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = -2{,}5$ et de raison $q = 1$. Calculer U_{20}.

Réponse attendue : `-5/2` — aussi acceptées : -2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que devient un nombre qu'on multiplie par 1 ?
2. $1^{20} = 1$.

CORRECTION

La suite constante — Avec $q = 1$, $U_{n+1} = U_n$ pour tout n : tous les termes sont égaux.

Le terme —

$U_{20} = U_0 \times 1^{20} = -2{,}5$

Une suite géométrique de raison 1 est constante : $U_{20} = U_0 = -2{,}5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-50` → Tu as multiplié par 20. On multiplie vingt fois par 1, ce qui ne change rien : $1^{20} = 1$.

EXERCICE 60 · PRATIQUE **Une raison nulle**

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 9$ et de raison $q = 0$. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{10}$.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule U_1, puis U_2.
2. À partir de U_1, tous les termes sont nuls. Mais pas U_0.

CORRECTION

Les termes —

$U_0 = 9 \quad ; \quad U_1 = 0 \times 9 = 0 \quad ; \quad U_2 = 0 \quad ; \quad \ldots$

La somme —

$S = 9 + 0 + \ldots + 0 = 9$

$S = 9$. Avec $q = 0$, tous les termes sont nuls à partir de U_1 ; seul U_0 compte.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Les termes sont nuls à partir de U_1 seulement : $U_0 = 9$ fait partie de la somme.

`99` → Tu as additionné onze fois 9, comme si la raison était 1. Avec $q = 0$, $U_1 = 0 \times 9 = 0$.

EXERCICE 61 · PRATIQUE

Écrire le terme général

(V_n) est la suite géométrique de premier terme $V_0 = 5$ et de raison 3. Exprimer V_n en fonction de n.

Écrire seulement l'expression de V_n, sans « $V_n =$ ». Écrire la puissance avec ^, par exemple 2*7^n.

Réponse attendue : `5*3^n`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $V_1 = 5 \times 3$, $V_2 = 5 \times 3^2$... Que vaut l'exposant de 3 pour V_n ?
2. Pour aller de V_0 à V_n, on multiplie n fois par la raison.

CORRECTION

De proche en proche —

$V_1 = 5 \times 3 \quad ; \quad V_2 = 5 \times 3^2 \quad ; \quad V_3 = 5 \times 3^3$

Le terme général —

$V_n = V_0 \times q^n = 5 \times 3^n$

$V_n = 5 \times 3^n$: seule la raison est élevée à la puissance n.

PIÈGES ANTICIPÉS

`15^n` → Tu as élevé 5×3 à la puissance n. Le premier terme n'est compté qu'une fois : $V_n = 5 \times 3^n$.

`5*3^(n-1)` → Cette formule vaut quand le premier terme est V_1. Ici on part de V_0 : il y a n pas jusqu'à V_n.

`5+3n` / `5+3*n` → C'est le terme général d'une suite arithmétique. Dans une suite géométrique, on multiplie par la raison : $V_n = V_0 \times q^n$.

EXERCICE 62 · PRATIQUE

Une raison égale à racine de 2

(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 = -\sqrt{2}$ et de raison $q = \sqrt{2}$. Calculer U_7.

Réponse attendue : `-16`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_7 = U_0 \times q^7$.
2. $-\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^7 = -(\sqrt{2})^8$, et $(\sqrt{2})^2 = 2$.

CORRECTION

La formule —

$U_7 = -\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^7$

Les puissances —

$\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^7 = (\sqrt{2})^8 = 2^4 = 16$

Le signe —

$U_7 = -16$

$U_7 = -16$. Avec une raison $\sqrt{a}$, on regroupe les racines deux par deux : $(\sqrt{a})^2 = a$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → Le premier terme est négatif et la raison positive : tous les termes sont négatifs.

`-8*sqrt(2)` → $-8\sqrt{2}$ est U_6. De U_0 à U_7, on multiplie sept fois par $\sqrt{2}$.

`-16*sqrt(2)` → Tu as fait un pas de trop : $-16\sqrt{2}$ est U_8.

EXERCICE 63 · BASE De U5 à U9

(U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et telle que $U_5 = 3$. Calculer U_9.

Réponse attendue : 48

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_9 = U_5 \times q^{9-5}$.
2. De l'indice 5 à l'indice 9, il y a 4 pas.

CORRECTION

La formule —

$U_9 = U_5 \times q^{9-5} = 3 \times 2^4$

Le calcul —

$U_9 = 3 \times 16 = 48$

$U_9 = 48$: l'exposant de q est la différence des indices.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1536` → Tu as pris U_5 comme s'il était U_0. L'exposant est la différence des indices : $9 - 5 = 4$.

`24` → 24 est U_8. De l'indice 5 à l'indice 9, il y a quatre pas, pas trois.

`96` → 96 est U_{10}. De l'indice 5 à l'indice 9, il y a quatre pas.

EXERCICE 64 · PRATIQUE Une raison négative fractionnaire

(U_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$ et telle que $U_2 = 40$. Calculer U_7.

Réponse attendue : -5/4 — aussi acceptées : -1.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_7 = U_2 \times q^{7-2}$.
2. L'exposant 5 est impair : $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5$ est négatif.

CORRECTION

La formule —

$U_7 = U_2 \times q^5 = 40 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5$

La puissance —

$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$

Le calcul —

$U_7 = -\frac{40}{32} = -\frac{5}{4}$

$U_7 = -\dfrac{5}{4}$. Avec une raison négative, le signe dépend de la parité de l'exposant.

PIÈGES ANTICIPÉS

5/4 → L'exposant 5 est impair : une puissance impaire d'un nombre négatif est négative.

5/2 → $\dfrac{5}{2}$ est U_6. De l'indice 2 à l'indice 7, il y a cinq pas.

5/8 → $\dfrac{5}{8}$ est U_8 : un pas de trop.

EXERCICE 65 · PRATIQUE **Revenir en arrière**

(U_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et telle que $U_{12} = 4$. Calculer U_9, sous forme d'une fraction.

Réponse attendue : 4/27

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule $U_n = U_p \times q^{n-p}$ vaut aussi quand $n < p$.
2. Pour revenir de U_{12} à U_9, on divise trois fois par 3.

CORRECTION

La formule —

$U_{12} = U_9 \times 3^3 \iff U_9 = \frac{U_{12}}{3^3}$

Le calcul —

$U_9 = \frac{4}{27}$

$U_9 = \dfrac{4}{27}$: pour remonter vers un indice plus petit, on divise par la raison autant de fois qu'il y a de pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`108` → Tu as multiplié par 27 : c'est U_{15}. Pour revenir en arrière, on divise par la raison.

`4/81` → $\dfrac{4}{81}$ est U_8. De l'indice 9 à l'indice 12, il y a trois pas.

`4/9` → $\dfrac{4}{9}$ est U_{10}. Il reste encore une division par 3.

EXERCICE 66 · PRATIQUE

Trouver le rang d'un terme

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_1 = 3$ et de raison $q = 2$. Déterminer l'entier n tel que $U_n = 1536$.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier terme est U_1 : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.
2. Calcule $\dfrac{1536}{3}$ et écris-le comme une puissance de 2.

CORRECTION

Le terme général —

$U_n = 3 \times 2^{n-1}$

L'équation —

$3 \times 2^{n-1} = 1536 \iff 2^{n-1} = 512$

L'exposant —

$512 = 2^9 \quad \text{donc} \quad n - 1 = 9$

$n = 10$. Quand le premier terme est U_1, l'exposant de la raison est $n - 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → 9 est l'exposant $n - 1$. Le premier terme est U_1 : $n = 9 + 1$.

`512` → 512 est 2^{n-1}. Écris-le comme une puissance de 2 pour trouver n.

EXERCICE 67 · RAISONNEMENT

Le terme du milieu

(U_n) est une suite géométrique de raison non nulle telle que $U_3 \times U_7 = 100$ et $U_5 > 0$. Calculer U_5.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime U_3 et U_7 en fonction de U_5 et de la raison q.
2. $U_7 = U_5 \times q^2$ et $U_5 = U_3 \times q^2$.

CORRECTION

Les deux termes —

$U_3 = \frac{U_5}{q^2}$; $U_7 = U_5 \times q^2$

Le produit —

$U_3 \times U_7 = U_5^2 = 100$

Le signe —

$U_5 > 0$ donc $U_5 = 10$

$U_5 = 10$. Deux termes situés à la même distance d'un terme U_p ont pour produit U_p^2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-10` → $(-10)^2 = 100$ aussi, mais l'énoncé impose $U_5 > 0$.

`50` → Tu as divisé par 2. Le produit $U_3 \times U_7$ vaut U_5^2 : il faut une racine carrée.

EXERCICE 68 · RAISONNEMENT

Deux sommes de deux termes

(U_n) est une suite géométrique telle que $U_1 + U_3 = 20$ et $U_2 + U_4 = 60$. Calculer U_1.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_2 = q\,U_1$ et $U_4 = q\,U_3$: compare les deux sommes.
2. Trouve d'abord q, puis écris $U_3 = U_1 \times q^2$.

CORRECTION

La raison —

$U_2 + U_4 = q\,(U_1 + U_3) \iff 60 = 20\,q \iff q = 3$

Le premier terme —

$U_1 + U_1 \times 3^2 = 20 \iff 10\,U_1 = 20$

Le résultat —

$U_1 = 2$

$U_1 = 2$ (et la raison vaut 3). En factorisant par q, une somme de termes donne la somme des termes suivants.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est la raison. On demande U_1.

`10` → U_1 et U_3 ne sont pas égaux : $U_3 = 9\,U_1$.

EXERCICE 69 · BASE

Une puissance troisième

(V_n) est une suite géométrique telle que $V_0 = 2$ et $V_3 = 250$. Déterminer sa raison q.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $V_3 = V_0 \times q^3$.
2. Quel nombre a pour cube 125 ?

CORRECTION

La puissance —

$q^3 = \frac{V_3}{V_0} = \frac{250}{2} = 125$

La raison — L'exposant 3 est impair : une seule valeur.

$125 = 5^3 \quad \text{donc} \quad q = 5$

$q = 5$. Le quotient de deux termes donne une puissance de la raison, d'exposant la différence des indices.

PIÈGES ANTICIPÉS

`125` → 125 est q^3 : V_0 et V_3 ne sont pas consécutifs. Il reste à trouver le nombre dont le cube vaut 125.

`248/3` → Tu as partagé l'écart $250 - 2$ en trois : c'est la méthode d'une suite arithmétique. Ici on multiplie.

EXERCICE 70 · PRATIQUE

Deux raisons possibles

(U_n) est une suite géométrique telle que $U_2 = 3$ et $U_6 = 48$. Déterminer toutes les valeurs possibles de sa raison q.

Écrire l'ensemble des valeurs possibles, par exemple {-5;5}.

Réponse attendue : `{-2;2}` — aussi acceptées : {-2 ; 2} · {2;-2} · -2;2 · 2;-2 · -2 et 2 · 2 et -2 · {-2,2} · 2 ou -2 · -2 ou 2 · q=2 ou q=-2 · q=-2 ou q=2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_6 = U_2 \times q^4$.
2. L'exposant 4 est pair : pense aux deux signes.

CORRECTION

La puissance —

$q^4 = \frac{48}{3} = 16$

Les deux valeurs — $2^4 = 16$ et $(-2)^4 = 16$.

$q = 2 \quad \text{ou} \quad q = -2$

La raison vaut 2 ou -2 : quand la différence des indices est paire, il y a deux raisons opposées possibles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2} / 2` → $(-2)^4 = 16$ aussi : l'exposant 4 est pair, la raison -2 convient également.

`{-4;4} / {4} / 4` → $4^4 = 256$. Ici $q^4 = 16$: c'est q^2 qui vaut 4.

EXERCICE 71 · PRATIQUE

Une raison positive inférieure à 1

(W_n) est une suite géométrique de raison positive telle que $W_1 = 81$ et $W_5 = 16$. Déterminer sa raison q.

Réponse attendue : 2/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $W_5 = W_1 \times q^4$.
2. $16 = 2^4$ et $81 = 3^4$.

CORRECTION

La puissance —

$q^4 = \frac{W_5}{W_1} = \frac{16}{81}$

La raison — q est positive : on garde la valeur positive.

$q = \frac{2}{3}$

$q = \dfrac{2}{3}$. L'énoncé impose une raison positive : la valeur $-\dfrac{2}{3}$ est écartée.

PIÈGES ANTICIPÉS

3/2 → Tu as divisé W_1 par W_5. On a $q^4 = \dfrac{W_5}{W_1} = \dfrac{16}{81}$.

16/81 → $\dfrac{16}{81}$ est q^4. Il reste à trouver le nombre positif dont la puissance quatrième vaut $\dfrac{16}{81}$.

-2/3 → L'énoncé dit que la raison est positive.

EXERCICE 72 · RAISONNEMENT

Remonter au premier terme

(U_n) est une suite géométrique telle que $U_3 = -2$ et $U_8 = 64$. Calculer U_0, sous forme d'une fraction.

Réponse attendue : 1/4 — aussi acceptées : 0.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par la raison : $U_8 = U_3 \times q^5$.
2. L'exposant 5 est impair : une seule valeur, négative ici. Puis $U_3 = U_0 \times q^3$.

CORRECTION

La puissance —

$q^5 = \frac{64}{-2} = -32$

La raison —

$(-2)^5 = -32 \quad \text{donc} \quad q = -2$

Le premier terme —

$U_0 = \frac{U_3}{q^3} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$

$U_0 = \dfrac{1}{4}$. On trouve d'abord la raison avec deux termes connus, puis on remonte au premier terme.

PIÈGES ANTICIPÉS

-1/4 → $q^3 = (-2)^3 = -8$: on divise -2 par -8, le résultat est positif.

-2 → -2 est la raison. On demande U_0.

EXERCICE 73 · BASE

Des points alignés

Dans un repère, les points $A_0(0\,;1)$, $A_1(1\,;3)$, $A_2(2\,;5)$ et $A_3(3\,;7)$ représentent les premiers termes d'une suite (U_n) : l'ordonnée de A_n est U_n. Ces premiers termes peuvent-ils être ceux d'une suite géométrique ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : pas geometrique · elle n'est pas geometrique · non elle n'est pas geometrique · non, elle n'est pas geometrique · n'est pas geometrique · la suite n'est pas geometrique · non la suite n'est pas geometrique · non, la suite n'est pas geometrique · non geometrique · non pas geometrique · non, pas geometrique · non elle ne l'est pas · non, elle ne l'est pas · elle ne l'est pas · ce n'est pas une suite geometrique · non ce n'est pas une suite geometrique · non, ce n'est pas une suite geometrique · elle n'est pas une suite geometrique

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lis les ordonnées : $U_0 = 1, U_1 = 3, U_2 = 5$.
2. Compare $\dfrac{U_1}{U_0}$ et $\dfrac{U_2}{U_1}$.

CORRECTION

Les quotients —

$\frac{U_1}{U_0} = 3 \quad ; \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{5}{3}$

Ce qu'on observe — On ajoute 2 à chaque pas : les points sont alignés, ce sont les termes d'une suite arithmétique.

Non : les quotients sont différents. Des points alignés représentent une suite arithmétique, pas une suite géométrique (sauf si elle est constante).

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui / oui ils le sont / oui elle l'est / elle l'est / oui elle est geometrique / oui, elle est geometrique / elle est geometrique / oui geometrique / oui c'est une suite geometrique / oui, c'est une suite geometrique / c'est une suite geometrique / la suite est geometrique / oui la suite est geometrique / oui, la suite est geometrique` → Les points sont alignés : on ajoute 2 à chaque pas. Pour une suite géométrique, il faudrait multiplier par le même nombre, or $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{5}{3}$.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

Retrouver le premier point

Dans un repère, les points $A_n(n\,;U_n)$ représentent une suite géométrique (U_n), et ils sont tous au-dessus de l'axe des abscisses. On lit $A_1(1\,;6)$ et $A_3(3\,;24)$. Déterminer l'ordonnée de A_0.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_3 = U_1 \times q^2$: trouve q^2.
2. Tous les termes sont positifs : la raison ne peut pas être négative.

CORRECTION

La puissance —

$q^2 = \frac{U_3}{U_1} = \frac{24}{6} = 4$

Le signe — Avec $q = -2$, $U_2 = -12$ et A_2 serait sous l'axe : on garde $q = 2$.

$q = 2$

Le premier terme —

$U_0 = \frac{U_1}{q} = \frac{6}{2} = 3$

L'ordonnée de A_0 est 3. Les informations d'un graphique, ici le signe des termes, permettent de choisir entre deux raisons opposées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-3` → Avec $U_0 = -3$, le point A_0 serait sous l'axe des abscisses : c'est la raison -2, ou une suite arithmétique, qui donnerait cela. Tous les points sont au-dessus de l'axe : $q = 2$.

`15` → 15 est la moyenne de 6 et 24 : ce serait U_2 pour une suite arithmétique. On demande l'ordonnée de A_0.

EXERCICE 75 · BASE

Une raison de 0,1

(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $0{,}1$. Calculer U_6.

Donner la valeur exacte, en écriture décimale ou avec une puissance de 10.

Réponse attendue : `1/1000000` — aussi acceptées : 0.000001 · 10^(-6)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_6 = U_0 \times 0{,}1^6$.
2. Multiplier par $0{,}1$, c'est décaler la virgule d'un rang vers la gauche.

CORRECTION

La formule —

$U_6 = 1 \times 0{,}1^6$

Le calcul —

$0{,}1^6 = 10^{-6} = 0{,}000\,001$

$U_6 = 0{,}000\,001$: avec une raison comprise entre 0 et 1, les termes se rapprochent de 0.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.00001` → $0{,}000\,01$ est U_5 : il y a six multiplications par $0{,}1$ de U_0 à U_6.

`0.0000001` → Tu as fait un pas de trop : c'est U_7.

`0.6` → Tu as calculé $6 \times 0{,}1$. On multiplie six fois par $0{,}1$: c'est une puissance.

EXERCICE 76 · RAISONNEMENT

Dépasser 1000 avec une raison négative

(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison -2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n > 1000$.

Donner seulement l'entier n.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_n = 3 \times (-2)^n$: pour quels n ce terme est-il positif ?
2. Seuls les termes d'indice pair sont positifs. Compare U_8 et U_{10} à 1000.

CORRECTION

Le signe — $(-2)^n$ est positif quand n est pair, négatif quand n est impair.

$U_n = 3 \times (-2)^n$

Les termes pairs —

$U_8 = 3 \times 256 = 768 < 1000 \quad ; \quad U_{10} = 3 \times 1024 = 3072$

Le terme impair — $U_9 = 3 \times (-512) = -1536$ est négatif : il n'est pas supérieur à 1000.

$n = 10$. Avec une raison négative, les termes changent de signe à chaque pas : seuls ceux d'indice pair peuvent dépasser un nombre positif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9` → $U_9 = -1536$: il est négatif, donc inférieur à 1000. C'est seulement sa distance à 0 qui dépasse 1000.

`8` → $U_8 = 768$: il ne dépasse pas encore 1000.

EXERCICE 77 · RAISONNEMENT

Une suite qui rattrape l'autre

On considère deux suites géométriques : (U_n) de premier terme $U_0 = 1000$ et de raison $0{,}8$, et (V_n) de premier terme $V_0 = 1$ et de raison 2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $V_n > U_n$.

Donner seulement l'entier n.

Réponse attendue : `8`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $V_n > U_n$ avec les termes généraux, puis divise par $0{,}8^n$, qui est positif.
2. $\dfrac{2}{0{,}8} = 2{,}5$: cherche le plus petit n tel que $2{,}5^n > 1000$.

CORRECTION

Les termes généraux —

$U_n = 1000 \times 0{,}8^n \quad ; \quad V_n = 2^n$

L'inégalité —

$2^n > 1000 \times 0{,}8^n \iff \left(\frac{2}{0{,}8}\right)^n > 1000 \iff 2{,}5^n > 1000$

À la calculatrice —

$2{,}5^7 \approx 610 < 1000 \quad ; \quad 2{,}5^8 \approx 1526 > 1000$

$n = 8$: $V_8 = 256$ et $U_8 \approx 167{,}8$. Une suite qui grandit finit par dépasser une suite qui diminue, même partie de beaucoup plus bas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Tu as cherché quand 2^n dépasse 1000. Mais U_n ne reste pas égal à 1000 : il diminue à chaque pas.

`7` → $V_7 = 128$ et $U_7 \approx 209{,}7$: (V_n) n'a pas encore rattrapé (U_n).

EXERCICE 78 · PRATIQUE

Un millime qui double

Sami reçoit 1 millime le premier jour, 2 millimes le deuxième jour, 4 millimes le troisième jour, et ainsi de suite en doublant chaque jour. Calculer la somme qu'il reçoit du sixième au quinzième jour inclus, en dinars.

Donner la somme en dinars, par exemple 12,5.

Réponse attendue : `32.736`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le jour numéro k, Sami reçoit 2^{k-1} millimes : le sixième jour, $2^5 = 32$ millimes.
2. Du sixième au quinzième jour, il y a $15 - 6 + 1 = 10$ termes de raison 2. Calcule la somme en millimes, puis convertis : 1 dinar $= 1000$ millimes.

CORRECTION

Le premier terme de la somme —

$2^5 = 32 \quad ; \quad 15 - 6 + 1 = 10 \text{ termes}$

La somme en millimes —

$32 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 32 \times 1023 = 32\,736$

En dinars —

$32\,736 \text{ millimes} = 32{,}736 \text{ dinars}$

Du sixième au quinzième jour, Sami reçoit $32{,}736$ dinars. Pour une somme qui ne commence pas au premier terme, on repère son premier terme et on compte ses termes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`32736` → C'est la somme en millimes. On la demande en dinars : 1 dinar $= 1000$ millimes.

`32.767` → Tu as additionné depuis le premier jour. On ne compte qu'à partir du sixième jour, qui rapporte $2^5 = 32$ millimes.

32.752 → Tu as commencé au cinquième jour. Le sixième jour, Sami reçoit 2^5 millimes : la somme compte 10 termes, pas 11.

EXERCICE 79 · RAISONNEMENT

Un million de grains

Sur un échiquier, on pose 1 grain de blé sur la première case, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite en doublant. Déterminer le nombre minimal de cases à remplir pour que le nombre total de grains posés dépasse un million.

Donner seulement le nombre de cases.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur les n premières cases, il y a $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}$ grains. Calcule cette somme avec la formule.
2. Cherche le plus petit n tel que $2^n - 1 > 1\,000\,000$. On a $2^{10} = 1024$.

CORRECTION

La somme —

$1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$

Les puissances —

$2^{19} = 524\,288 \quad ; \quad 2^{20} = 1\,048\,576$

La conclusion —

$2^{19} - 1 < 10^6 < 2^{20} - 1$

Il faut 20 cases : la somme des n premières puissances de 2 vaut $2^n - 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

19 → Sur 19 cases, il n'y a que $2^{19} - 1 = 524\,287$ grains.

21 → Sur 20 cases, il y a déjà $1\,048\,575$ grains, plus d'un million.

EXERCICE 80 · BASE

Les puissances de 3

Calculer la somme $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^6$.

Réponse attendue : `1093`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C'est la somme $1 + q + \ldots + q^n$ avec $q = 3$ et $n = 6$: combien a-t-elle de termes ?
2. $1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

CORRECTION

La formule — De 3^0 à 3^6, il y a 7 termes.

$S = \frac{1-3^7}{1-3}$

Le calcul —

$S = \frac{1-2187}{-2} = \frac{-2186}{-2} = 1093$

$S = 1093$. Dans la formule, l'exposant est le nombre de termes, ici 7.

PIÈGES ANTICIPÉS

`364` → Tu as utilisé 3^6 dans la formule. De 3^0 à 3^6, il y a 7 termes : c'est 3^7.

`2186` → Il reste à diviser par $1 - 3 = -2$.

`3280` → Tu as utilisé 3^8 : il n'y a que 7 termes.

EXERCICE 81 · BASE

Une raison égale à -1

Calculer la somme $S = 1 + x + x^2 + \ldots + x^9$ pour $x = -1$.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les termes : $1, -1, 1, -1, \ldots$
2. De x^0 à x^9, combien y a-t-il de termes ?

CORRECTION

Les termes — Les puissances paires de -1 valent 1, les impaires valent -1.

La formule — 10 termes, de raison -1.

$S = \frac{1-(-1)^{10}}{1-(-1)} = \frac{1-1}{2} = 0$

$S = 0$: les dix termes se compensent deux par deux. La formule s'applique, car $-1 \neq 1$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1` → -1 est le dernier terme, x^9. On demande la somme des dix termes.

`10` → 10 serait la somme si $x = 1$. Avec $x = -1$, les termes valent tour à tour 1 et -1.

`1` → De x^0 à x^9 il y a 10 termes, un nombre pair : les 1 et les -1 se compensent tous.

EXERCICE 82 · PRATIQUE

Les puissances de un demi

Calculer la somme $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^8}$, sous forme d'une fraction.

Réponse attendue : `511/256` — aussi acceptées : 1.99609375

INDICES, DANS L'ORDRE

1. C'est la somme des puissances de $q = \frac{1}{2}$, de l'exposant 0 à l'exposant 8.
2. Elle a 9 termes, et $1 - q = \frac{1}{2}$.

CORRECTION

La formule —

$S = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{512}\right)$

Le calcul —

$S = 2 - \frac{1}{256} = \frac{511}{256}$

$S = \dfrac{511}{256}$: la somme reste juste en dessous de 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`255/128` → Tu as compté 8 termes. De $\dfrac{1}{2^0}$ à $\dfrac{1}{2^8}$, il y en a 9.

`1023/512` → Tu as compté 10 termes : il n'y en a que 9.

`2 / 1.99 / 1.996` → C'est une valeur approchée. On demande la valeur exacte, sous forme d'une fraction.

EXERCICE 83 · RAISONNEMENT

Retrouver le dernier exposant

Déterminer l'entier naturel n tel que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 4095$.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $1 + 2 + \ldots + 2^n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$.
2. Écris 4096 comme une puissance de 2.

CORRECTION

La somme —

$1 + 2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

L'équation —

$2^{n+1} - 1 = 4095 \iff 2^{n+1} = 4096$

L'exposant —

$4096 = 2^{12} \quad \text{donc} \quad n + 1 = 12$

$n = 11$: la somme a 12 termes, de 2^0 à 2^{11}.

PIÈGES ANTICIPÉS

`12` → 12 est le nombre de termes, $n + 1$. Le dernier exposant est $n = 11$.

`4096` → $4096 = 2^{n+1}$: écris-le comme une puissance de 2 pour trouver n.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

Une division de polynômes

Pour tout réel $x \neq 1$, écrire $\dfrac{1 - x^6}{1 - x}$ sous la forme d'un polynôme développé et réduit.

Écrire seulement le polynôme, par exemple 1+x+x^2.

Réponse attendue : 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lis la formule de la somme des puissances de droite à gauche.
2. $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n$: que vaut n ici ?

CORRECTION

La formule —

$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Avec n + 1 = 6 —

$\frac{1-x^6}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

Vérification —

$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = 1 - x^6$

$\frac{1-x^6}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$: six termes, de x^0 à x^5.

PIÈGES ANTICIPÉS

1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 → Il y a un terme de trop : la somme de x^0 à x^6 vaut $\frac{1-x^7}{1-x}$.

1+x+x^2+x^3+x^4 → Il manque un terme : de x^0 à x^5, il y a six termes.

EXERCICE 85 · BASE **Une somme de raison 1**

(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison 1. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{11}$.

Réponse attendue : 48

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec $q = 1$, que valent tous les termes ?
2. De U_0 à U_{11}, combien y a-t-il de termes ?

CORRECTION

Les termes — Avec $q = 1$, tous les termes valent 4. La formule avec $1 - q$ au dénominateur ne s'applique pas.

Le nombre de termes —

$11 - 0 + 1 = 12$

La somme —

$S = n\,a = 12 \times 4 = 48$

$S = 48$. Si $q = 1$, la somme de n termes vaut $n \times a$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`44` → De U_0 à U_{11}, il y a 12 termes : on compte les deux bouts.

`0` → La formule $a \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ divise par $1-q$: elle n'a pas de sens quand $q = 1$. Ici, tous les termes valent 4.

EXERCICE 86 · PRATIQUE

Une somme de puissances de 4

Calculer la somme $S = 5 + 20 + 80 + 320 + \ldots + 20\,480$.

Réponse attendue : `27305`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La raison est 4. Écris $20\,480$ sous la forme 5×4^k pour compter les termes.
2. $20\,480 = 5 \times 4096 = 5 \times 4^6$: les exposants vont de 0 à 6.

CORRECTION

La raison —

$\frac{20}{5} = \frac{80}{20} = 4$

Le nombre de termes —

$20\,480 = 5 \times 4^6 \quad ; \quad 6 - 0 + 1 = 7 \text{ termes}$

La formule —

$S = 5 \times \frac{1-4^7}{1-4} = 5 \times \frac{-16\,383}{-3} = 5 \times 5461$

Le résultat —

$S = 27\,305$

$S = 27\,305$. Pour compter les termes, on écrit le dernier sous la forme $a \times q^k$: il y a $k+1$ termes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6825` → Tu as compté 6 termes. De 5×4^0 à 5×4^6, il y en a 7.

`81915` / `-81915` → Tu as oublié de diviser par $1 - q = -3$.

`-27305` → Une somme de nombres positifs ne peut pas être négative : vérifie les signes de $1 - 4^7$ et de $1 - 4$.

EXERCICE 87 · PRATIQUE

Des puissances de 10

Calculer la somme $S = 1000 + 100 + 10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001$, en utilisant la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Donner la valeur exacte, en écriture décimale.

Réponse attendue : `1111.111`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On passe d'un terme au suivant en multipliant par $0{,}1$.

2. Premier terme 1000, raison $0{,}1$, sept termes. Tu peux vérifier en posant l'addition.

CORRECTION

La raison —

$q = \frac{100}{1000} = 0{,}1$

La formule —

$S = 1000 \times \frac{1-0{,}1^7}{0{,}9} = 1000 \times \frac{0{,}999\,999\,9}{0{,}9}$

Le calcul —

$S = 1000 \times 1{,}111\,111 = 1111{,}111$

$S = 1111{,}111$. La formule donne le même résultat que l'addition posée.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1111.11` → Il manque le dernier terme : la somme compte sept termes, jusqu'à $0{,}001$.

`111.111` → Il manque le premier terme 1000.

EXERCICE 88 · RAISONNEMENT

Une somme qui ne commence pas à U0

(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison 3. Calculer la somme $S = U_2 + U_3 + \ldots + U_6$.

Réponse attendue : 2178

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le premier terme de la somme est U_2, pas U_0.
2. De U_2 à U_6, il y a $6 - 2 + 1 = 5$ termes.

CORRECTION

Le premier terme de la somme —

$U_2 = 2 \times 3^2 = 18$

Le nombre de termes —

$6 - 2 + 1 = 5$

La formule —

$S = 18 \times \frac{1-3^5}{1-3} = 18 \times \frac{-242}{-2} = 18 \times 121$

Le résultat —

$S = 2178$

$S = 2178$. Dans la formule, a est le premier terme de la somme et n son nombre de termes.

PIÈGES ANTICIPÉS

`242` → Tu as pris $a = U_0 = 2$. Le premier terme de la somme est $U_2 = 18$.

`720` → Tu as compté $6 - 2 = 4$ termes. On compte les deux bouts : $6 - 2 + 1 = 5$.

`2186` → 2186 est la somme de U_0 à U_6. Il faut retirer U_0 et U_1.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAM

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

La production de cinq années

Une entreprise produit 2000 pièces la première année, puis sa production augmente de $10\,\%$ chaque année. Calculer le nombre total de pièces produites pendant les cinq premières années.

Donner la valeur exacte, par exemple 1234,5.

Réponse attendue : `12210.2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les productions annuelles forment une suite géométrique de premier terme 2000 et de raison $1{,}1$.
2. On additionne cinq termes : $S = 2000 \times \dfrac{1 - 1{,}1^5}{1 - 1{,}1}$.

CORRECTION

Les productions —

$2000\ ;\ 2200\ ;\ 2420\ ;\ 2662\ ;\ 2928{,}2$

La formule —

$S = 2000 \times \frac{1-1{,}1^5}{1-1{,}1} = 2000 \times \frac{1{,}1^5-1}{0{,}1}$

Le calcul —

$S = 20\,000 \times 0{,}610\,51 = 12\,210{,}2$

L'entreprise produit $12\,210{,}2$ pièces en cinq ans (une valeur moyenne : c'est un modèle). Un total sur plusieurs années se calcule avec la formule de la somme.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2928.2` → $2928{,}2$ est la production de la cinquième année seulement. On demande le total des cinq années.

`15431.22` → Tu as additionné six années : la première année correspond à $1{,}1^0$, la cinquième à $1{,}1^4$.

`12000` → Tu as ajouté 200 pièces chaque année. Les $10\,\%$ se calculent sur la production de l'année précédente.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Retrouver la raison avec une somme

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q > 0$, telle que $U_0 + U_1 + U_2 = 13$. Déterminer q.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime U_1 et U_2 en fonction de q : on obtient une équation du second degré.
2. $q^2 + q - 12 = 0$: cherche deux nombres de produit -12 et de somme -1, ou calcule le discriminant.

CORRECTION

L'équation —

$1 + q + q^2 = 13 \iff q^2 + q - 12 = 0$

Les solutions —

$\Delta = 1 + 48 = 49 \quad ; \quad q = \frac{-1+7}{2} = 3 \quad \text{ou} \quad q = \frac{-1-7}{2} = -4$

La condition — La raison est positive : on garde $q = 3$. Vérification : $1 + 3 + 9 = 13$.

$q = 3$. Une somme de trois termes connue conduit à une équation du second degré en q.

PIÈGES ANTICIPÉS

-4 → -4 est solution de l'équation ($1 - 4 + 16 = 13$), mais l'énoncé impose $q > 0$.

13/3 → Les trois termes ne sont pas égaux : $U_1 = q$ et $U_2 = q^2$.

EXERCICE 91 · DEFI

Dépasser 100

(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $1{,}5$. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 100$.

Donner seulement l'entier n.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. S_n a $n + 1$ termes : $S_n = \dfrac{1 - 1{,}5^{\,n+1}}{1 - 1{,}5}$.
2. Simplifie : $S_n = 2\left(1{,}5^{\,n+1} - 1\right)$. Cherche ensuite à la calculatrice le premier exposant pour lequel $1{,}5^{\,n+1} > 51$.

CORRECTION

La somme —

$S_n = \frac{1-1{,}5^{\,n+1}}{-0{,}5} = 2\left(1{,}5^{\,n+1} - 1\right)$

L'inégalité —

$2\left(1{,}5^{\,n+1} - 1\right) > 100 \iff 1{,}5^{\,n+1} > 51$

À la calculatrice —

$1{,}5^9 \approx 38{,}4 \quad ; \quad 1{,}5^{10} \approx 57{,}7$

La conclusion —

$n + 1 = 10 \quad ; \quad S_8 \approx 74{,}9 \quad ; \quad S_9 \approx 113{,}3$

$n = 9$. Attention : la somme S_n va de U_0 à U_n, elle a $n + 1$ termes.

PIÈGES ANTICIPÉS

10 → 10 est le nombre de termes, $n + 1$. On demande l'indice n du dernier terme.

8 → $S_8 \approx 74{,}9$: la somme ne dépasse pas encore 100.

12 → Tu as cherché quand le terme U_n dépasse 100. On demande quand la somme S_n le dépasse.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

EXERCICE 92 · DEFI

Deux conditions sur les termes

(U_n) est une suite géométrique dont tous les termes sont positifs, telle que $U_1 + U_2 = 15$ et $U_3 + U_4 = 60$. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_7$.

Réponse attendue : `1275/2` — aussi acceptées : 637.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_3 + U_4 = q^2\,(U_1 + U_2)$: trouve q^2, puis q.
2. Avec la raison, trouve U_1, puis U_0. La somme a 8 termes.

CORRECTION

La raison —

$60 = q^2 \times 15 \iff q^2 = 4 \quad ; \quad q > 0 \Rightarrow q = 2$

Le premier terme —

$U_1 + 2\,U_1 = 15 \iff U_1 = 5 \quad ; \quad U_0 = \frac{5}{2}$

La somme —

$S = \frac{5}{2} \times \frac{1-2^8}{1-2} = \frac{5}{2} \times 255 = \frac{1275}{2}$

$S = \dfrac{1275}{2} = 637{,}5$. On a retrouvé la raison et le premier terme à partir de deux sommes, puis appliqué la formule.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1275` → Tu as pris $U_1 = 5$ comme premier terme de la somme. La somme commence à $U_0 = \dfrac{5}{2}$.

`635/2 / 317.5` → De U_0 à U_7, il y a 8 termes.

`-1275/2 / -637.5` → Les termes sont tous positifs : la raison est 2, pas -2.

EXERCICE 93 · DEFI

Deux propositions de salaire

On propose deux contrats de dix ans. Contrat A : $12\,000$ dinars la première année, puis une augmentation de 600 dinars chaque année. Contrat B : $12\,000$ dinars la première année, puis une augmentation de $4\,\%$ chaque année. Calculer de combien de dinars le total des dix années du contrat A dépasse celui du contrat B, arrondi au dinar.

Donner seulement la différence en dinars, arrondie au dinar.

Réponse attendue : 2927

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les salaires du contrat A forment une suite arithmétique ; ceux du contrat B, une suite géométrique de raison $1{,}04$.

2. Total A : dix termes d'une suite arithmétique, $\frac{10 \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$. Total B : $12\,000 \times \frac{1 - 1{,}04^{10}}{1 - 1{,}04}$.

CORRECTION

Le contrat A — Le dixième salaire est $12\,000 + 9 \times 600 = 17\,400$.

$S_A = \frac{10 \times (12\,000 + 17\,400)}{2} = 147\,000$

Le contrat B —

$S_B = 12\,000 \times \frac{1 - 1{,}04^{10}}{1 - 1{,}04} = 300\,000 \times (1{,}04^{10} - 1) \approx 144\,073{,}29$

La différence —

$S_A - S_B \approx 2926{,}71 \approx 2927$

Sur dix ans, le contrat A rapporte environ 2927 dinars de plus. Sur une durée plus longue, l'augmentation en pourcentage finirait par l'emporter.

PIÈGES ANTICIPÉS

2926 → Tu as tronqué. La différence vaut environ $2926{,}71$: arrondie au dinar, c'est 2927.

5927 → Le dixième salaire du contrat A est $12\,000 + 9 \times 600$: la première année n'a pas encore d'augmentation.

EXERCICE 94 · PRATIQUE

Une somme alternée de multiples de 5

Calculer la somme $S = 5 - 15 + 45 - 135 + \ldots + 3645$.

Réponse attendue : 2735

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les signes alternent : la raison est négative. Que vaut-elle ?
2. $3645 = 5 \times 3^6 = 5 \times (-3)^6$: les exposants vont de 0 à 6. Et $(-3)^7$ est négatif.

CORRECTION

La raison —

$q = \frac{-15}{5} = -3$

Le nombre de termes —

$3645 = 5 \times (-3)^6 \quad ; \quad 7 \text{ termes}$

La formule —

$S = 5 \times \frac{1 - (-3)^7}{1 + 3} = 5 \times \frac{1 + 2187}{4} = 5 \times 547$

Le résultat —

$S = 2735$

$S = 2735$. Quand les signes alternent, la raison est négative : ici $q = -3$, et $1 - q = 4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

5465 → Tu as pris $q = 3$. Les signes alternent : $q = -3$.

`-910` → Tu t'es arrêté à -1215. Le dernier terme est $3645 = 5 \times (-3)^6$: il y a 7 termes.

EXERCICE 95 · RAISONNEMENT

Des deux tiers à signes alternés

Calculer la somme $S = 81 - 54 + 36 - 24 + 16 - \dfrac{32}{3} + \dfrac{64}{9}$, en utilisant la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Réponse attendue : `463/9`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule $\dfrac{-54}{81}$: c'est la raison. Combien la somme a-t-elle de termes ?
2. $q = -\dfrac{2}{3}$, sept termes, et $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^7 = -\dfrac{128}{2187}$.

CORRECTION

La raison —

$q = \frac{-54}{81} = -\frac{2}{3}$

Le nombre de termes —

$81\ ;\ -54\ ;\ 36\ ;\ -24\ ;\ 16\ ;\ -\frac{32}{3}\ ;\ \frac{64}{9}$: 7 termes

La formule —

$S = 81 \times \frac{1+\frac{128}{2187}}{\frac{5}{3}} = 81 \times \frac{2315}{2187} \times \frac{3}{5}$

Le calcul —

$S = \frac{2315}{27} \times \frac{3}{5} = \frac{463}{9}$

$S = \dfrac{463}{9}$. On lit la raison sur deux termes qui se suivent ; les signes qui alternent annoncent une raison négative.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2059/9` → Tu as pris $q = \dfrac{2}{3}$. Les signes alternent : $q = -\dfrac{2}{3}$, et $1 - q = \dfrac{5}{3}$.

`133/3` → Tu as compté 6 termes. De 81 à $\dfrac{64}{9}$, il y en a 7.

`51.44 / 51.4 / 51.444 / 51` → On demande la valeur exacte, sous forme d'une fraction irréductible.

EXERCICE 96 · DEFI

Une somme avec racine de 2

(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1 + \sqrt{2}$ et de raison $q = \sqrt{2}$. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_9$, et l'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b entiers.

Écrire le résultat sous la forme a+b√2, par exemple 3+2√2.

Réponse attendue : `93+62*sqrt(2)`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme a 10 termes, et $(\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32$.
2. Tu obtiens $\dfrac{-31\,(1+\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}$. Pour enlever la racine du dénominateur, multiplie le numérateur et le dénominateur par $1+\sqrt{2}$.

CORRECTION

La formule — De U_0 à U_9, il y a 10 termes.

$$S = (1+\sqrt{2}) \times \frac{1-(\sqrt{2})^{10}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-31\,(1+\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}$$

Le dénominateur —

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 1-2 = -1$$

La simplification —

$$S = \frac{-31\,(1+\sqrt{2})^2}{-1} = 31\,(1+\sqrt{2})^2 = 31\,(3+2\sqrt{2})$$

Le résultat —

$$S = 93 + 62\sqrt{2}$$

$S = 93+62\sqrt{2}$. La formule de la somme marche avec une raison irrationnelle ; on finit en multipliant par l'expression conjuguée du dénominateur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`61+46*sqrt(2)` → Tu as compté 9 termes. De U_0 à U_9, il y en a 10 : l'exposant est 10.

`125+94*sqrt(2)` → Tu as compté 11 termes. De U_0 à U_9, il y en a 10.

`31+31*sqrt(2)` → Tu as fait comme si le premier terme était 1. Ici $U_0 = 1+\sqrt{2}$: il multiplie toute la somme.

EXERCICE 97 · DEFI

Une spirale de segments

On trace une ligne brisée en forme de spirale : le premier segment mesure 8 cm, et chaque segment mesure la moitié du précédent. Déterminer le nombre minimal de segments à tracer pour que la longueur totale de la ligne dépasse $15{,}99$ cm.

Donner seulement le nombre de segments.

Réponse attendue : `11`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La longueur des n premiers segments est $L_n = 8 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$.
2. $L_n = 16 - \dfrac{16}{2^n}$: il faut $\dfrac{16}{2^n} < 0{,}01$.

CORRECTION

La longueur —

$L_n = 8 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 16 - \frac{16}{2^n}$

L'inégalité —

$16 - \frac{16}{2^n} > 15{,}99 \iff \frac{16}{2^n} < 0{,}01 \iff 2^n > 1600$

Les puissances de 2 —

$2^{10} = 1024 < 1600 \quad ; \quad 2^{11} = 2048 > 1600$

Il faut 11 segments. La longueur se rapproche de 16 cm sans jamais l'atteindre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → Avec 10 segments, $L_{10} = 16 - \dfrac{16}{1024} \approx 15{,}984$: c'est encore moins que $15{,}99$.

`1600` → 1600 est le nombre que 2^n doit dépasser. On demande le nombre de segments n.

EXERCICE 98 · DEFI

Un zigzag dans un triangle 5, 12, 13

OAB est un triangle rectangle en B avec $OA = 13$, $OB = 12$ et $AB = 5$. H_1 est le projeté orthogonal de B sur (OA), H_2 celui de H_1 sur (OB), H_3 celui de H_2 sur (OA), et ainsi de suite. On admet qu'à chaque projection, la distance à O est multipliée par le même nombre. Déterminer le plus petit entier n tel que $OH_n < 6$.

Donner seulement l'entier n.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les triangles OBH_1 et OAB sont rectangles et ont le même angle en O : $\dfrac{OH_1}{OB} = \dfrac{OB}{OA}$. C'est le nombre par lequel on multiplie à chaque projection.
2. $OH_n = OB \times \left(\dfrac{12}{13}\right)^n$. Calcule à la calculatrice OH_8 et OH_9.

CORRECTION

Le multiplicateur — Les triangles OBH_1 et OAB sont semblables.

$\frac{OH_1}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{12}{13}$

Le terme général — Les distances $OB, OH_1, OH_2, \ldots$ forment une suite géométrique de premier terme 12 et de raison $\dfrac{12}{13}$.

$OH_n = 12 \times \left(\frac{12}{13}\right)^n$

La comparaison à 6 —

$OH_n < 6 \iff \left(\frac{12}{13}\right)^n < \frac{1}{2}$

À la calculatrice —

$OH_8 \approx 6{,}33 > 6 \quad ; \quad OH_9 \approx 5{,}84 < 6$

Le plus petit entier est $n = 9$: on écrit le terme général de la suite géométrique, puis on cherche le premier indice qui passe sous le seuil.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → $OH_8 \approx 6{,}33$: c'est encore plus grand que 6.

10 → Tu as pris $OA = 13$ comme premier terme. La première distance est $OB = 12$, et $OH_1 = \dfrac{12}{13} \times OB$.

EXERCICE 99 · DEFI

Le triangle de Sierpinski

On part d'un triangle noir. À chaque étape, dans chaque triangle noir, on blanchit le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés : l'aire noire est alors multipliée par $\dfrac{3}{4}$. Déterminer le nombre minimal d'étapes pour que l'aire noire devienne inférieure au dixième de l'aire de départ.

Donner seulement le nombre d'étapes.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Après n étapes, l'aire noire est $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ fois l'aire de départ.
2. Cherche le plus petit n tel que $0{,}75^{\,n} < 0{,}1$. Calcule avec précision $0{,}75^8$.

CORRECTION

L'aire noire —

$A_n = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

La condition —

$\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{10}$

À la calculatrice —

$0{,}75^8 \approx 0{,}1001 \quad ; \quad 0{,}75^9 \approx 0{,}0751$

Il faut 9 étapes : après 8 étapes, il reste encore un tout petit peu plus du dixième de l'aire.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → $0{,}75^8 \approx 0{,}1001$: c'est très proche de $0{,}1$, mais encore un peu au-dessus.

4 → Après 4 étapes, il reste $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}32$ de l'aire : on ne retire pas un quart de l'aire de départ à chaque étape, mais un quart de l'aire noire restante.

EXERCICE 100 · DEFI

Le trajet d'une balle qui rebondit

On lâche une balle d'une hauteur de 10 mètres. À chaque rebond, elle remonte aux $\dfrac{3}{5}$ de la hauteur d'où elle est tombée. Calculer la distance totale parcourue par la balle, en mètres, au moment où elle touche le sol pour la cinquième fois.

Donner la distance en mètres, par exemple 12,5.

Réponse attendue : `36.112`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avant de toucher le sol pour la cinquième fois, la balle a fait quatre rebonds. Chaque rebond se compte deux fois : la montée et la descente.
2. Les hauteurs des rebonds sont $6,\ 3{,}6,$ … : quatre termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$.

CORRECTION

Les rebonds —

$h_1 = 6\ ;\ h_2 = 3{,}6\ ;\ h_3 = 2{,}16\ ;\ h_4 = 1{,}296$

Leur somme —

$6 \times \frac{1-0{,}6^4}{1-0{,}6} = 6 \times \frac{0{,}8704}{0{,}4} = 13{,}056$

Le trajet — La première chute, puis chaque rebond en montée et en descente.

$d = 10 + 2 \times 13{,}056 = 36{,}112$

La balle a parcouru $36{,}112$ mètres. On repère les termes de la suite, puis ce que chacun représente dans le trajet.

PIÈGES ANTICIPÉS

`23.056` → Chaque rebond est parcouru deux fois : la balle monte, puis redescend.

`37.6672` → Tu as compté cinq rebonds. Avant le cinquième contact avec le sol, il n'y en a que quatre.

`46.112` → La première chute de 10 mètres n'est parcourue qu'une fois : la balle part d'en haut.

EXERCICE 101 · DEFI

Une somme et un produit

Trois nombres réels sont, dans cet ordre, en progression géométrique de raison $q > 1$. Leur somme vaut 14 et leur produit vaut 64. Déterminer q.

Réponse attendue : `2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les trois nombres $\dfrac{b}{q}$, b et $b\,q$: leur produit vaut b^3.
2. Avec $b = 4$, la somme donne $\dfrac{4}{q} + 4 + 4q = 14$: multiplie par q.

CORRECTION

Le terme du milieu —

$\frac{b}{q} \times b \times b\,q = b^3 = 64 \iff b = 4$

La somme —

$\frac{4}{q} + 4 + 4q = 14 \iff 4q^2 - 10q + 4 = 0 \iff 2q^2 - 5q + 2 = 0$

Les solutions —

$\Delta = 25 - 16 = 9 \quad ; \quad q = 2 \quad \text{ou} \quad q = \frac{1}{2}$

La condition — $q > 1$: on garde $q = 2$. Les nombres sont 2, 4 et 8.

$q = 2$. Écrire trois termes autour de celui du milieu, $\dfrac{b}{q}$, b, $b\,q$, simplifie le produit.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2 / 0.5` → $q = \dfrac{1}{2}$ donne les nombres 8, 4, 2, mais l'énoncé impose $q > 1$.

`4` → 4 est le terme du milieu. On demande la raison.

EXERCICE 102 · DEFI

Une suite arithmétique et une suite géométrique

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_1 = 2$ et de raison $r \neq 0$. On sait que U_1, U_3 et U_9 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer r.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $U_3 = 2 + 2r$ et $U_9 = 2 + 8r$.
2. Trois termes consécutifs a, b, c d'une suite géométrique vérifient $b^2 = a\,c$.

CORRECTION

Les termes —

$U_3 = 2 + 2r \quad ; \quad U_9 = 2 + 8r$

La condition —

$(2 + 2r)^2 = 2\,(2 + 8r) \iff 4 + 8r + 4r^2 = 4 + 16r$

Résoudre —

$4r^2 - 8r = 0 \iff 4r\,(r - 2) = 0$

La condition r ≠ 0 — On garde $r = 2$: les termes 2, 6, 18 sont en progression géométrique de raison 3.

$r = 2$. On traduit « en progression géométrique » par $b^2 = a\,c$, puis on résout l'équation obtenue.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → $r = 0$ est solution de l'équation, mais l'énoncé impose $r \neq 0$.

`3` → 3 est la raison de la suite géométrique 2, 6, 18. On demande la raison r de la suite arithmétique.
