– Maths à la carte –

ABDELKADER HAMMAMI

Translations

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro sept : translations. Bech nabdew b l'application du plan : koll point M 3andou image wa7da M prime. Men ghadi n3arrfou la translation de vecteur u : el point M yemchi l M prime, w le vecteur MM prime égale u. Ba3d nchoufou chnowa t7afedh 3lih la translation : les distances, l'alignement, le milieu, le parallélisme w les angles, w chnowa l'image mta3 droite w mta3 cercle. W nkammlou b des problèmes de lieux w des problèmes de construction.

عسلامة ! الـ chapitre numéro sept : translations . باش نبداو بـ l'application du plan : كل point M عندو image وحدة M prime . من غادي نعرّفو la translation de vecteur u : الـ point M يمشي لـ le ، w M prime ، بعد نشوفو شنوّة تحافظ عليه la translation : les distances ، l'alignement ، le vecteur M M prime égale u . شنوّة l'image متاع droite w متاع cercle . w نكمّلو بـ des problèmes de lieux w des problèmes de construction .

Bonjour ! Le chapitre numéro sept : translations. Nous commencerons par l'application du plan : chaque point M a une seule image M prime. De là, nous définirons la translation de vecteur u : le point M va en M prime, et le vecteur M M prime égale u. Puis nous verrons ce que la translation conserve : les distances, l'alignement, le milieu, le parallélisme et les angles, et quelle est l'image d'une droite et d'un cercle. Et nous terminerons par des problèmes de lieux et des problèmes de construction.

Faire glisser une figure sans la tourner ni la déformer : c'est une **translation**. Chaque point se déplace du même vecteur.

On commence par la notion d'application du plan, on définit la translation de vecteur $\vec{u}$, puis on étudie ce qu'elle conserve et les images des figures usuelles. Elle devient alors un outil pour prouver des alignements, chercher des lieux géométriques et résoudre des problèmes de construction.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Reconnaître une application du plan, l'image et l'antécédent d'un point
  > Reconnaître une application du plan, l'image et l'antécédent d'un point.
  > *Reconnaître une application du plan, l'image et l'antécédent d'un point.*
- Construire l'image d'un point, d'une droite, d'un segment et d'un cercle par une translation
  > Construire l'image d'un point, d'une droite, d'un segment et d'un cercle par une translation.
  > *Construire l'image d'un point, d'une droite, d'un segment et d'un cercle par une translation.*
- Utiliser la propriété caractéristique $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ pour reconnaître une translation
  > Utiliser la propriété caractéristique, le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N, pour reconnaître une translation.
  > *Utiliser la propriété caractéristique, le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N, pour reconnaître une translation.*
- Utiliser ce que la translation conserve : distances, alignement, milieu, parallélisme, angles
  > Utiliser ce que la translation conserve : les distances, l'alignement, le milieu, le parallélisme et les angles.
  > *Utiliser ce que la translation conserve : les distances, l'alignement, le milieu, le parallélisme et les angles.*
- Résoudre des problèmes de lieux géométriques et des problèmes de construction
  > Résoudre des problèmes de lieux géométriques et des problèmes de construction.
  > *Résoudre des problèmes de lieux géométriques et des problèmes de construction.*

---

1. ACTIVITÉ

Rappels

CE QU'IL DIT

Nabdew b tadhkir. Fel figure 3andna zouz parallélogrammes : ABDC w ABFE. Ya3ni le vecteur AB égale le vecteur CD, w égale le vecteur EF. La translation de vecteur AB teb3ath A l B, w C l D, w E l F : koll point yet7arrek b nafs el vecteur. W rodd belek 3la l'ordre mta3 les sommets : ABDC parallélogramme ma3neha le vecteur AB égale le vecteur CD, mouch le vecteur DC.

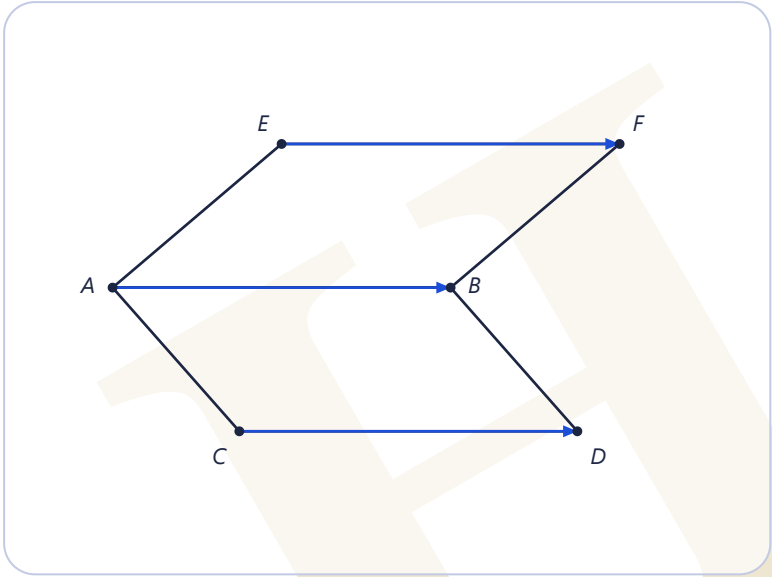
نبداو بتذكير . في الـ figure عندنا زوز parallélogrammes : A B D C w A B F E يعني le vecteur A B égale le vecteur C D ، w égale le vecteur E F . la translation de vecteur A B تبعث A لـ C ، w B لـ E ، w D لـ F : كل point يتحرّك بنفس الـ vecteur . ردّ بالك على l'ordre متاع parallélogramme A B D C les sommets : معناها le vecteur A B égale le vecteur C D ، موش le vecteur D C .

Commençons par un rappel. Sur la figure, on a deux parallélogrammes : A B D C et A B F E. Donc le vecteur A B égale le vecteur C D, et égale le vecteur E F. La translation de vecteur A B envoie A sur B, C sur D, et E sur F : chaque point se déplace du même vecteur. Et attention à l'ordre des sommets : A B D C parallélogramme signifie que le vecteur A B égale le vecteur C D, et non le vecteur D C.

Dans la figure, $ABDC$ et $ABFE$ sont deux parallélogrammes. On a donc trois vecteurs égaux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ envoie A sur B, C sur D et E sur F : chaque point se déplace du **même vecteur**.

On rappelle que $ABDC$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



ABDC et ABFE sont deux parallélogrammes.

Deux parallélogrammes qui partagent le côté [AB]. Le segment [AB] est horizontal, A à gauche et B à droite. Au-dessus, le parallélogramme ABFE : E est au-dessus à droite de A, F au-dessus à droite de B. En dessous, le parallélogramme ABDC : C est en dessous à droite de A, D en dessous à droite de B. Les trois vecteurs AB, CD et EF, tracés en bleu, sont égaux.

TROIS VECTEURS ÉGAUX

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, $ABDC$ et $ABFE$ sont deux parallélogrammes. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. a) t envoie A sur B, C sur D et E sur F. b) L'image de la droite (AC) par t est la droite (BD). c) L'image de la droite (EF) par t est la droite (CD).

Les points — Les deux parallélogrammes donnent trois vecteurs égaux : chaque point part du même vecteur. L'affirmation a) est vraie.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$$

La droite (AC) — A a pour image B et C a pour image D : la droite qui passe par A et C devient la droite qui passe par B et D. L'affirmation b) est vraie.

$$(AC) \longmapsto (BD)$$

La droite (EF) — E a pour image F, et l'image de F est encore un point de la droite (EF), car le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est le vecteur de la translation. La droite (EF) a pour image elle-même, et non la droite (CD) : l'affirmation c) est fausse.

$$(EF) \longmapsto (EF)$$

a) vraie ; b) vraie ; c) fausse

À ne pas faire : $ABDC$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ — $ABDC$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On lit les sommets dans l'ordre : dans $ABDC$, le côté opposé à $[AB]$ est $[DC]$, et il se parcourt de C vers D pour garder le même sens.

---

2. DÉFINITION

Application du plan

CE QU'IL DIT

Tawa 7aja jdida : l'application du plan. Ki na3tiw l koll point M men le plan, point wa7ed bark M prime, n9oulou 3arrafna application du plan dans lui-même. Nsammiwha f, w nektbou f de M égale M prime. M prime houwa l'image de M, w M houwa antécédent de M prime. Ta3ref menha barcha : la symétrie centrale S I, win I le milieu de MM prime ; la symétrie orthogonale S D, win la droite D hiya la médiatrice de MM prime ; w le quart de tour.

توّا حاجة جديدة : l'application du plan . كي نعطيو لكل point M من point ، le plan واحد برك M prime ، نقولو عرّفنا application du plan dans lui-même . نسمّيوها f ، w نكتبو f de M égale M prime . M prime هو l'image w M هو de M ، antécédent de M prime . تعرف منها برشة : la symétrie centrale S I ، وين I le milieu de M M w le quart de ؛ la médiatrice de M M prime هي la droite D وين ، la symétrie orthogonale S D ؛ prime . tour

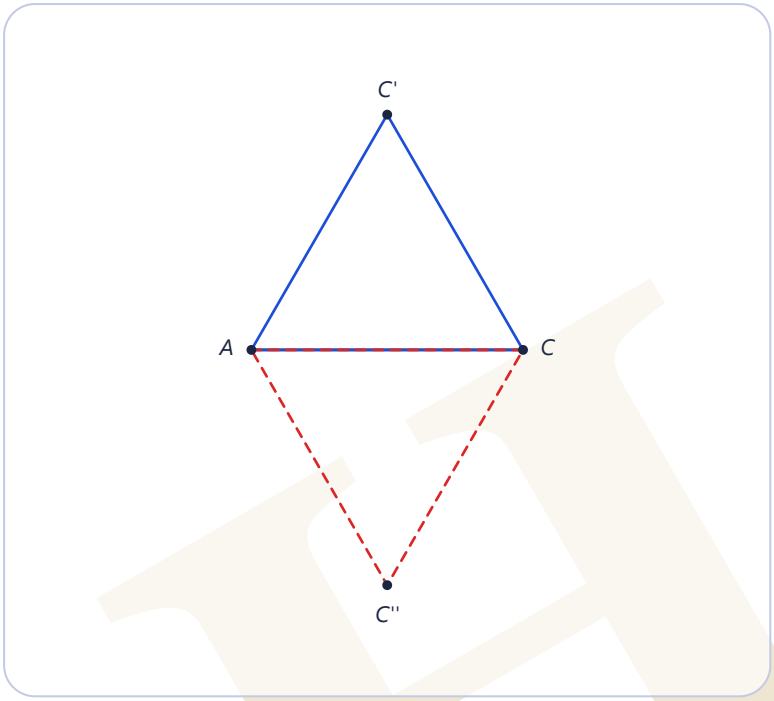
Voici une notion nouvelle : l'application du plan. Quand on associe à chaque point M du plan un seul point M prime, on dit qu'on a défini une application du plan dans lui-même. On l'appelle f, et on écrit f de M égale M prime. M prime est l'image de M, et M est un antécédent de M prime. Tu en connais déjà plusieurs : la symétrie centrale S I, où I est le milieu de M M prime ; la symétrie orthogonale S D, où la droite D est la médiatrice de M M prime ; et le quart de tour.

Lorsqu'on associe à tout point M du plan **un seul** point M', on définit une **application du plan dans lui-même**.

Si on désigne par f cette application, on écrit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, $M \mapsto M'$.

- M' s'appelle l'**image** du point M par l'application f.
- M s'appelle un **antécédent** du point M' par l'application f.

Exemples. Soit I un point du plan. La symétrie centrale S_I, qui à M associe le point M' tel que I est le milieu de $[MM']$, est une application du plan dans lui-même. Soit D une droite. La symétrie orthogonale S_D, qui à M associe le point M' tel que D soit la médiatrice du segment $[MM']$, est une application du plan dans lui-même. Un quart de tour direct, un quart de tour indirect sont aussi des applications du plan.



Deux points conviennent : ACC' et ACC'' sont équilatéraux.

Un segment [AC] horizontal, A à gauche et C à droite. Deux triangles équilatéraux sont construits sur ce segment : l'un au-dessus, de sommet C' ; l'autre en dessous, de sommet C'' en pointillés. Les deux points C' et C'' sont symétriques par rapport à la droite (AC).

UNE APPLICATION DU PLAN

$$f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}, \quad M \mapsto M'$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit A un point du plan. a) À tout point M, on associe son symétrique N par rapport à A. Définit-on ainsi une application du plan ? b) À tout point C distinct de A, on associe un point C' tel que ACC' soit un triangle équilatéral. Définit-on ainsi une application ?

Le symétrique — Un point M a un seul symétrique par rapport à A : c'est le point N tel que A est le milieu de $[MN]$. On définit bien une application : c'est la symétrie centrale de centre A.

$$M \longmapsto N, \quad A \text{ milieu de } [MN]$$

Le triangle équilatéral — Sur un segment $[AC]$ donné, on peut construire deux triangles équilatéraux, un de chaque côté de la droite (AC). Deux points C' répondent à la question.

$$2 \text{ points } C' \text{ possibles}$$

Conclure — Une application associe à chaque point un seul point. Ici le point C en aurait deux : ce procédé ne définit pas une application.

a) oui ; b) non

À ne pas faire : $f(M) = M'$: M est l'image de M' — $f(M) = M'$: M' est l'image de M, et M est un antécédent de M'. L'image est le point d'arrivée ; l'antécédent est le point de départ.

3. ACTIVITÉ

Pour comprendre : deux symétries centrales

CE QU'IL DIT

Bech nefhmou mnin tji la translation, ne5dhou zouz points I w J. El point M na3mloulou la symétrie centrale de centre I : nal9aw M un. Ba3d M un na3mloulou la symétrie centrale de centre J : nal9aw M prime. I houwa le milieu de MM un, w J houwa le milieu de M un M prime. B la relation de Chasles : le vecteur MM prime égale deux fois le vecteur IJ. El vecteur hedha ma fihech M : el points el koll yet7arrkou b nafs el vecteur. Hedhi hiya la translation.

باش نفهمو منين تجي la translation ، ناخذو زوز points I w J . الـ point M نعملولو la symétrie centrale de
centre I : nلقاو M un . بعد M un نعملولو la symétrie centrale de centre J : nلقاو I . هو M prime le milieu de
M M un ، w J هو M prime le milieu de . بـ deux égale prime M M la relation de Chasles : le vecteur
. translation la هذي هي . vecteur الـ بنفس يتحرّكو الكل points الـ : M فيهش ما هذا vecteur الـ . fois le vecteur I J

Pour comprendre d'où vient la translation, prenons deux points I et J. Au point M, on applique la symétrie centrale de centre I : on obtient M un. Puis à M un, on applique la symétrie centrale de centre J : on obtient M prime. I est le milieu de M M un, et J est le milieu de M un M prime. Par la relation de Chasles : le vecteur M M prime égale deux fois le vecteur I J. Ce vecteur ne contient pas M : tous les points se déplacent du même vecteur. C'est cela, la translation.

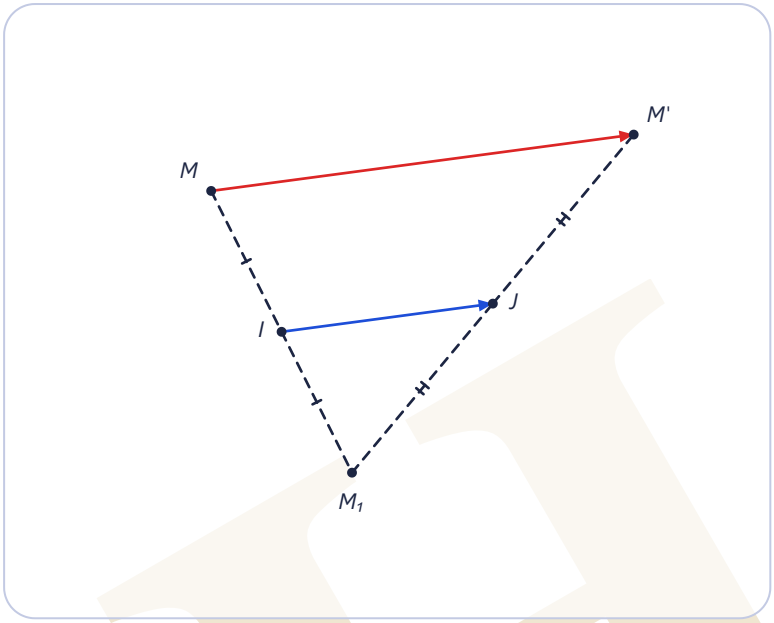
Soient I et J deux points distincts du plan. Pour un point M, on désigne par M_1 son image par la symétrie centrale S_I, et par M' l'image de M_1 par la symétrie centrale S_J. On considère l'application $t : M \mapsto M'$.

I est le milieu de $[MM_1]$ et J est le milieu de $[M_1M']$. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{IM_1} + 2\overrightarrow{M_1J} = 2\overrightarrow{IJ}$$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ **ne dépend pas** du point M : pour tout autre point C d'image C', on a aussi $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{IJ}$, donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CC'}$. Tous les points se déplacent du même vecteur.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



MM' = 2 IJ.

Deux points I et J. Un point M en haut à gauche ; son symétrique M1 par rapport à I, en bas ; puis le symétrique M' de M1 par rapport à J, en haut à droite. I est le milieu de [MM1] et J le milieu de [M1M']. Le vecteur IJ est tracé en bleu, le vecteur MM' en rouge : il est parallèle à IJ et deux fois plus long.

LE MÊME VECTEUR POUR TOUT POINT M

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IJ}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient I et J deux points tels que $IJ = 3$. À un point M, on associe le point M_1, symétrique de M par rapport à I, puis le point M', symétrique de M_1 par rapport à J. Calculer la distance MM'.

Les milieux — I est le milieu de $[MM_1]$ et J est le milieu de $[M_1M']$: chaque vecteur vaut deux fois sa moitié.

$$\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{IM_1} \quad ; \quad \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1J}$$

Chasles — On ajoute les deux vecteurs : le point M_1 disparaît.

$$\overrightarrow{MM'} = 2\left(\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$$

La distance — La distance MM' est le double de la distance IJ, quel que soit le point M.

$$MM' = 2 \times 3 = 6$$

$$MM' = 6$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{IJ}$ — $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IJ}$. I et J sont des milieux : le segment qui joint les milieux de deux côtés du triangle MM_1M' mesure la moitié du troisième côté.

4. DÉFINITION

Translation de vecteur u

CE QU'IL DIT

Tawa el définition. 3andna vecteur u. L'application elli ta3ti l koll point M, el point el wa7id M prime elli y7a99e9 le vecteur MM prime égale u, nsammiwha la translation de vecteur u, w nektbouha t indice u. Ya3ni : t indice u de M égale M prime, équivaut à le vecteur MM prime égale u. T5ayyel el figure el koll tezle9 fi nafs la direction w nafs le sens, b nafs la longueur. W ken u houwa le vecteur AB, wa9tha ABM prime M parallélogramme.

تو الـ définition . عندنا l'application اللي تعطي لكل point M ، الـ point الوحيد M prime اللي vecteur u . يحقّق u le vecteur M M prime ، w نسمّيوها la translation de vecteur u نكتبوها t indice u . يعني : t تخيّل الـ figure في الكل تزلق . indice u de M égale M prime ، équivaut à le vecteur M M prime égale u A B M prime M وقتها ، le vecteur A B هو u كان la longueur . w بنفس ، le sens نفس la direction w نفس . parallélogramme

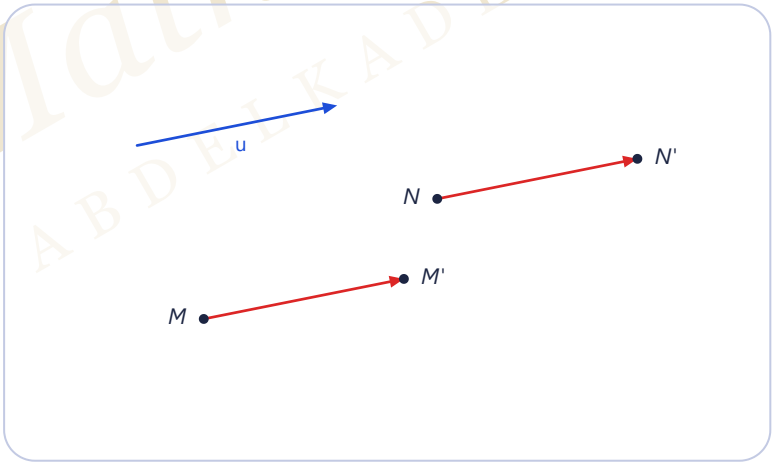
Voici la définition. On a un vecteur u. L'application qui associe à chaque point M l'unique point M prime qui vérifie le vecteur M M prime égale u s'appelle la translation de vecteur u, et on la note t indice u. Autrement dit : t indice u de M égale M prime, équivaut à le vecteur M M prime égale u. Imagine toute la figure qui glisse dans la même direction et le même sens, de la même longueur. Et si u est le vecteur A B, alors A B M prime M est un parallélogramme.

Soit $\vec{u}$ un vecteur. L'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est appelée **translation de vecteur $\vec{u}$.** Elle est notée $t_{\vec{u}}$.

On écrit $t_{\vec{u}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, $M \mapsto t_{\vec{u}}(M) = M'$. Le point M' est l'image de M par $t_{\vec{u}}$.

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \text{ équivaut à } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et que M n'est pas sur la droite (AB), l'égalité $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ signifie que $ABM'M$ est un parallélogramme.



Chaque point se déplace du vecteur u.

En haut, un vecteur u tracé en bleu, dirigé vers la droite et légèrement vers le haut. En dessous, deux points M et N, et leurs images M' et N' : les vecteurs MM' et NN', en rouge, sont égaux au vecteur u — même direction, même sens, même longueur.

LA DÉFINITION

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points distincts et M un point qui n'est pas sur la droite (AB). Construire l'image M' du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Traduire — Par définition, M' est le point tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Reconnaître — Deux vecteurs égaux dessinent un parallélogramme : on lit les lettres dans l'ordre A, B, puis M', puis M.

$ABM'M$ est un parallélogramme

Construire — On trace la parallèle à la droite (AB) passant par M, et la parallèle à la droite (AM) passant par B : elles se coupent en M'. Au compas, on reporte la longueur AB à partir de M et la longueur AM à partir de B : les deux arcs se coupent en deux points, et M' est celui qui est de l'autre côté de la droite (BM) par rapport à A.

$ABM'M$ est un parallélogramme

À ne pas faire : $t_{\vec{u}}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{M'M} = \vec{u}$ — $t_{\vec{u}}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Le vecteur part du point M et arrive à son image M' : on écrit d'abord le point de départ.

À ne pas faire : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, donc $ABMM'$ est un parallélogramme — $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, donc $ABM'M$ est un parallélogramme. On tourne autour du parallélogramme : après B vient l'image M', puis on revient à M.

5. REMARQUE

Image et antécédent

CE QU'IL DIT

Mola7dha. Ken 3tinek el point M prime, famma point wa7ed bark M elli t indice u de M égale M prime : houwa l'antécédent de M prime. Bech tal9ah, erja3 bel vecteur : le vecteur M prime M égale moins u. Ya3ni l'image nemchiwlha b u, w l'antécédent narj3oulou b moins u. Tawa ntabb9ou hedha 3la figure fiha zouz parallélogrammes.

ملاحظة . كان عطيناك الـ point M prime ، فمّا point واحد برك M اللي t indice u de M égale M prime : هو l'antécédent de M prime . باش تلقاه ، ارجع بالـ vecteur : le vecteur M prime M égale moins u . يعني l'image نمشيولها بـ w l'antécédent ، u نرجعولو بـ moins u . توّا نطبّقو هذا على figure فيها زوز parallélogrammes .

Une remarque. Si on te donne le point M prime, il existe un seul point M tel que t indice u de M égale M prime : c'est l'antécédent de M prime. Pour le trouver, reviens en arrière avec le vecteur : le vecteur M

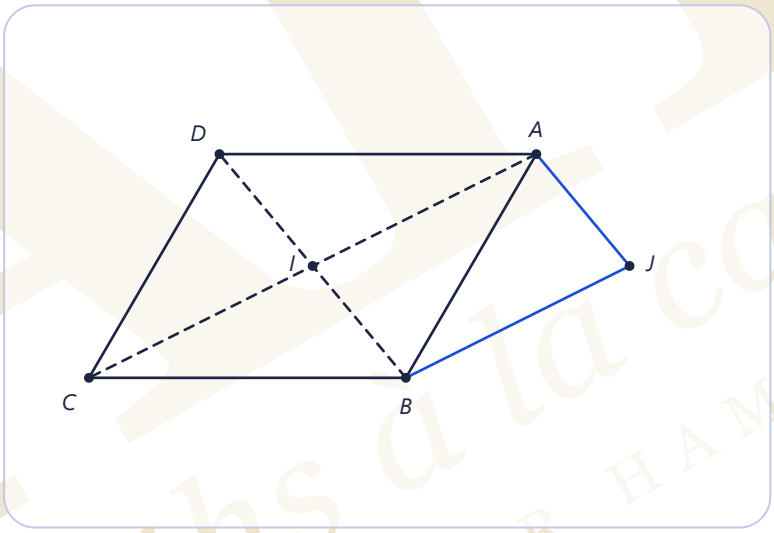
prime M égale moins u. Autrement dit, on va vers l'image avec u, et on revient à l'antécédent avec moins u. Appliquons cela à une figure qui contient deux parallélogrammes.

Étant donné un point M', il existe **un seul** point M du plan tel que $t_{\vec{u}}(M) = M'$. Le point M est l'**antécédent** de M' par $t_{\vec{u}}$.

En effet, $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ équivaut à $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$: pour trouver l'antécédent, on part de M' et on **remonte** le vecteur.

Sur une figure. $ABCD$ est un parallélogramme de centre I, et $AIBJ$ est un parallélogramme. On lit les vecteurs égaux :

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{JB}$;
- $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DI}$;
- $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



ABCD est un parallélogramme de centre I ; AIBJ est un parallélogramme.

Un parallélogramme ABCD : D en haut à gauche, A en haut à droite, C en bas à gauche, B en bas à droite. Ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en son centre I. À droite, le point J est tel que AIBJ est un parallélogramme : J est à droite de I, à la même hauteur, et les segments [AJ] et [BJ] sont tracés.

POUR L'ANTÉCÉDENT

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, $ABCD$ est un parallélogramme de centre I, et $AIBJ$ est un parallélogramme. a) Déterminer l'image de chacun des points A, I et J par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$. b) Déterminer l'image de chacun des points A, B et J par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$. c) Déterminer l'antécédent de chacun des points B, I et J par la translation de vecteur $\overrightarrow{AJ}$.

Le vecteur AI — I est le milieu de $[AC]$, et $AIBJ$ est un parallélogramme : trois vecteurs sont égaux. Donc A a pour image I, I a pour image C, et J a pour image B.

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{JB}$$

Le vecteur JI — Par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{JI}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{AI}$, c'est-à-dire des vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IC}$. Donc A a pour image D, B a pour image C, et J a pour image I.

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

Les antécédents — Pour un antécédent, on cherche le point de départ : celui d'où part un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AJ}$ et qui arrive au point donné. L'antécédent de B est I, celui de J est A, et celui de I est D.

$$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{DI}$$

les images I, C et B, puis D, C et I ; les antécédents I, D et A

À ne pas faire : L'antécédent de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AJ}$ est B — L'antécédent de I est D, car $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AJ}$. B est l'image de I, pas son antécédent. Pour l'antécédent, on cherche le point X tel que le vecteur $\overrightarrow{XI}$ soit égal au vecteur de la translation.

6. THÉORÈME

Propriété caractéristique

CE QU'IL DIT

La propriété caractéristique, hiya elli t3arrfek b la translation. Ne5dhou application t, w zouz points M w N, w les images mte3hom M prime w N prime. T translation, équivaut à : le vecteur M prime N prime égale le vecteur MN, mahma kenou M w N. 3lech ? Ken t translation de vecteur u, b Chasles : le vecteur M prime N prime égale moins u plus le vecteur MN plus u, ya3ni le vecteur MN. W bel 3aks, ken el égalité hedhi dima s7i7a, nchoddou point A w l'image mte3ou A prime : nal9aw le vecteur MM prime égale le vecteur AA prime, l koll point M. Donc t translation de vecteur AA prime.

points M w N ، w زوز application t ، w ناخذو . la translation بـ تعرّفك اللي هي ، la propriété caractéristique M prime w N prime . t translation ، équivaut à : le vecteur M prime N prime égale le متاعهم les images Chasles : le vecteur M prime N بـ ، t translation de vecteur u كان ؟ علاش . M w N مهما كانو ، vecteur M N هذي égalité الـ كان ، بالعكس le vecteur M N . w يعني ، prime égale moins u plus le vecteur M N plus u le vecteur M M prime égale le vecteur A A نلقاو : A prime متاعو point A w l'image نشدّو ، ديما صحيحة . point M . donc t translation de vecteur A A prime لكل ، prime

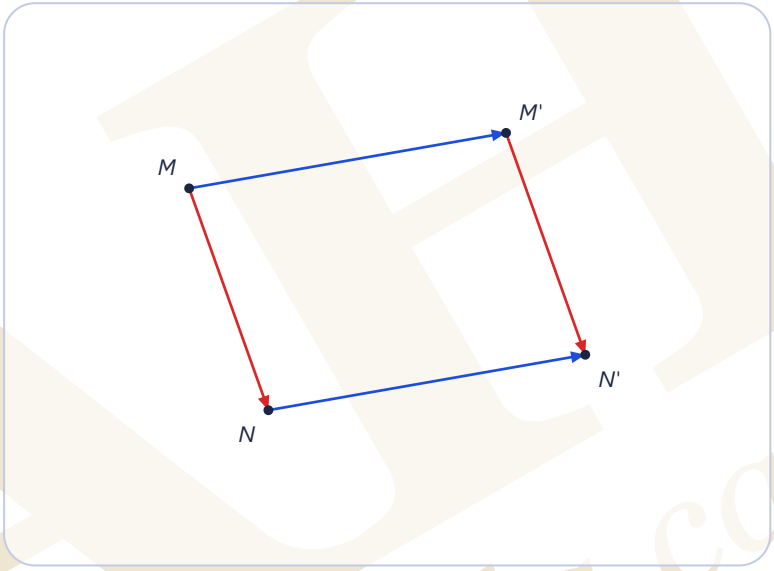
La propriété caractéristique, c'est celle qui te fait reconnaître une translation. Prenons une application t, deux points M et N, et leurs images M prime et N prime. t est une translation, équivaut à : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N, quels que soient M et N. Pourquoi ? Si t est la translation de vecteur u, par Chasles : le vecteur M prime N prime égale moins u plus le vecteur M N plus u, c'est-à-dire le vecteur M N. Et réciproquement, si cette égalité est toujours vraie, on fixe un point A et son image A prime

: on trouve que le vecteur M M prime égale le vecteur A A prime, pour tout point M. Donc t est la translation de vecteur A A prime.

Soit t une application du plan dans le plan, et M et N deux points quelconques du plan, d'images respectives M' et N' par t.

$$(t \text{ est une translation}) \text{ équivaut à } \left(\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}\right)$$

Autrement dit : une translation ne change pas les vecteurs, et c'est la seule sorte d'application qui ait cette propriété.



Le vecteur M'N' est égal au vecteur MN.

Deux points M et N à gauche, et leurs images M' et N' à droite. Les vecteurs MM' et NN', en bleu, sont égaux. Les vecteurs MN et M'N', en rouge, sont égaux eux aussi : le quadrilatère MNN'M' est un parallélogramme.

POUR TOUS POINTS M ET N

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

DÉMONSTRATION

Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$, alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$, et par la relation de Chasles $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$. Réciproquement, soit f une application telle que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N. On fixe un point A et on note A' son image. Pour tout point M d'image M', on a $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$, donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est le même pour tous les points : f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit t une translation, A et B deux points distincts, d'images A' et B'. On suppose que A' n'est pas sur la droite (AB). Montrer que $ABB'A'$ est un parallélogramme.

La propriété — Une translation ne change pas les vecteurs : le vecteur qui joint les images est égal au vecteur qui joint les points.

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

Conclure — Deux vecteurs égaux dessinent un parallélogramme. On lit dans l'ordre : A, B, puis B', puis A'.

$ABB'A'$ est un parallélogramme

$ABB'A'$ est un parallélogramme

À ne pas faire : $M'N' = MN$ pour tous points M et N, donc f est une translation — Il faut l'égalité des vecteurs : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. Une symétrie centrale conserve aussi les distances, mais elle change le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en son opposé : ce n'est pas une translation.

---

7. PROPRIÉTÉ

Distances et directions

CE QU'IL DIT

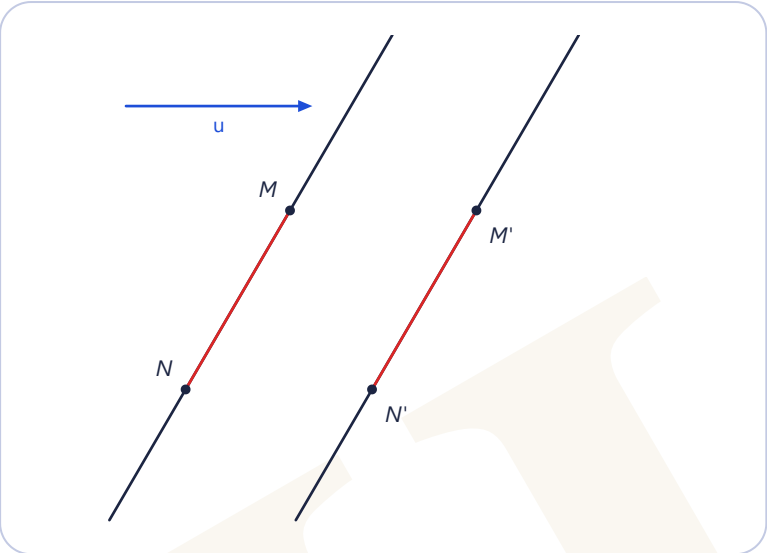
Men la propriété caractéristique n5arrjou zouz conséquences. Numéro un : MN égale M prime N prime, ya3ni la translation t7afedh 3la les distances. Numéro deux : ken M w N mo5talfin, la droite MN parallèle à la droite M prime N prime. 5ater le vecteur M prime N prime égale le vecteur MN : nafs la longueur w nafs la direction. El figure tezle9, ma tekberch w ma tdourch.

من la propriété caractéristique نخرّجو زوز conséquences . numéro un : M N égale M prime N prime ، يعني la translation تحافظ على les distances . numéro deux : كان M w N مختلفين ، la droite M N parallèle . à la droite M prime N prime خاطر le vecteur M N égale le vecteur M prime N prime : نفس la longueur w نفس la direction . الـ figure تزلق ، ما تكبرش w ما تدورش .

De la propriété caractéristique, on tire deux conséquences. Numéro un : M N égale M prime N prime, donc la translation conserve les distances. Numéro deux : si M et N sont distincts, la droite M N est parallèle à la droite M prime N prime. Car le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N : même longueur et même direction. La figure glisse, elle ne grandit pas et elle ne tourne pas.

- Pour tous points M et N, d'images respectives M' et N' par une translation, on a $MN = M'N'$. On dit qu'une translation **conserve les distances**.
- Pour tous points M et N **distincts**, d'images respectives M' et N' par une translation, les droites (MN) et $(M'N')$ sont **parallèles**.

Ces deux résultats viennent de l'égalité $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$: deux vecteurs égaux ont la même longueur et la même direction.



(MN) et (M'N') sont parallèles, et MN = M'N'.

Une droite oblique passe par deux points M et N. À sa droite, une seconde droite, parallèle à la première, passe par leurs images M' et N'. En haut, le vecteur u de la translation, en bleu. Les segments [MN] et [M'N'], en rouge, ont la même longueur.

LES DISTANCES

$$MN = M'N'$$

LES DIRECTIONS

$$(MN) \parallel (M'N')$$

EXEMPLE TRAITÉ

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. On note A', B' et C' les images de A, B et C par une translation. Calculer la distance $B'C'$.

Pythagore — Dans le triangle ABC, rectangle en A, on calcule l'hypoténuse.

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \quad \text{donc} \quad BC = 5$$

La translation — Une translation conserve les distances : la distance entre les images est la distance entre les points.

$$B'C' = BC = 5$$

$$B'C' = 5$$

À ne pas faire : Par une translation de vecteur $\vec{u}$ de norme 5, la longueur MN augmente de 5 — $M'N' = MN$. Tous les points se déplacent du même vecteur : la figure glisse sans se déformer, aucune longueur ne change.

8. MÉTHODE

Reconnaître une translation

CE QU'IL DIT

Kifech nthabtou elli application hiya translation ? N7esbou le vecteur MM prime, w nchoufou ken yatla3 vecteur constant, ma fihech M. Mathalan : le vecteur MM prime égale le vecteur MA plus le vecteur MB moins deux fois le vecteur MC. Nda55lou C b Chasles fi le vecteur MA w fi le vecteur MB : les termes elli fihom M yti7ou, w yo93ed le vecteur CA plus le vecteur CB. Hedha vecteur constant, donc f hiya la translation de vecteur CA plus CB.

كيفاش نثبتو اللي application هي translation ؟ نحسبو le vecteur M M prime ، w نشوفو كان يطلع vecteur constant ، ما فيهش M . مثلا : le vecteur M A plus le vecteur M B moins deux fois le vecteur M C . ندخّلو C بـ Chasles في le vecteur M A w في le vecteur M B : les termes اللي فيهم M يطيحو ، w يقعد le vecteur C A plus le vecteur C B . هذا donc f ، vecteur constant هي la translation de vecteur C A plus C B .

Comment prouver qu'une application est une translation ? On calcule le vecteur M M prime, et on regarde s'il donne un vecteur constant, qui ne contient pas M. Par exemple : le vecteur M M prime égale le vecteur M A plus le vecteur M B moins deux fois le vecteur M C. On introduit C par Chasles dans le vecteur M A et dans le vecteur M B : les termes qui contiennent M disparaissent, et il reste le vecteur C A plus le vecteur C B. C'est un vecteur constant, donc f est la translation de vecteur C A plus C B.

Pour montrer qu'une application $f : M \mapsto M'$ est une translation, on calcule le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et on montre qu'il est égal à un vecteur **qui ne dépend pas de M.**

Exemple. Soit A, B et C trois points du plan et f l'application qui à M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. On introduit le point C par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MM'} = \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}\right) - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

Le vecteur $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ ne contient plus M : f est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

UN VECTEUR CONSTANT

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points du plan. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{AN}$ soit égal à 3 fois le vecteur $\overrightarrow{AM}$ moins 2 fois le vecteur $\overrightarrow{BM}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis en déduire la nature de f.

Chasles — On décompose le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en passant par A, puis on remplace le vecteur $\overrightarrow{AN}$ par son expression.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}$$

Réduire — Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AM}$, et l'opposé du vecteur $\overrightarrow{BM}$ est le vecteur $\overrightarrow{MB}$.

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AB}$$

Conclure — Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ ne dépend pas du point M : f est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB}$$

À ne pas faire : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA}$, donc f est la translation de vecteur $2\overrightarrow{MA}$ — f n'est pas une translation : c'est la symétrie centrale de centre A. Le vecteur $2\overrightarrow{MA}$ change quand M change. Pour une translation, le vecteur doit être le même pour tous les points.

---

9. PROPRIÉTÉ

Conservation de l'alignement

CE QU'IL DIT

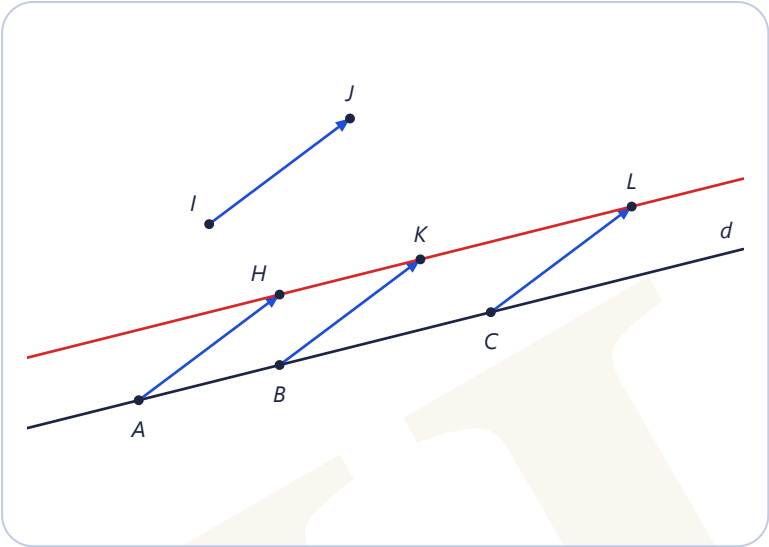
La translation t7afedh 3la l'alignement : les images mta3 points alignés, houma points alignés. 3lech ? Ken M, N w P alignés, le vecteur MP égale k fois le vecteur MN. W la translation ma tbaddelch les vecteurs : le vecteur M prime P prime égale k fois le vecteur M prime N prime. Donc M prime, N prime w P prime alignés. Nesta3mlouha barcha : bech nthabtou elli trois points alignés, nwarriw elli houma les images mta3 trois points alignés.

la translation تحافظ على l'alignement : les images متاع points alignés ، هوما points alignés . علاش ؟ كان
les vecteurs : le ما تبدّلش M ، N w P alignés ، le vecteur M P égale k fois le vecteur M N . w la translation
vecteur M prime P prime égale k fois le vecteur M prime N prime . donc M prime ، N prime w P prime
trois points متاع les images هوما نوريو اللي ، trois points alignés باش نثبتو اللي : نستعملوها برشة . alignés
. alignés

La translation conserve l'alignement : les images de points alignés sont des points alignés. Pourquoi ? Si M, N et P sont alignés, le vecteur M P égale k fois le vecteur M N. Et la translation ne change pas les vecteurs : le vecteur M prime P prime égale k fois le vecteur M prime N prime. Donc M prime, N prime et P prime sont alignés. On s'en sert souvent : pour prouver que trois points sont alignés, on montre que ce sont les images de trois points alignés.

Les images, par une translation, de points alignés sont des points alignés.

On s'en sert pour **prouver un alignement** : on montre que les trois points sont les images, par une même translation, de trois points que l'on sait alignés.



H, K et L sont les images de A, B et C par la translation de vecteur IJ.

Une droite d passe par trois points A, B et C, de gauche à droite. Au-dessus, deux points I et J. On a construit les points H, K et L tels que AIJH, BIJK et CIJL soient des parallélogrammes : les vecteurs AH, BK et CL, en bleu, sont tous égaux au vecteur IJ. Les points H, K et L sont alignés sur une droite rouge parallèle à d.

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN} \implies \overrightarrow{M'P'} = k\overrightarrow{M'N'}$$

DÉMONSTRATION

Soient M, N et P trois points alignés, avec $M \neq N$, et M', N' et P' leurs images par une translation. Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN}$. Par la propriété caractéristique, $\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, donc $\overrightarrow{M'P'} = k\overrightarrow{M'N'}$: les points M', N' et P' sont alignés.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A, B et C trois points d'une droite d, et I et J deux points qui ne sont pas sur d. On construit les points H, K et L tels que $AIJH$, $BIJK$ et $CIJL$ soient des parallélogrammes. Montrer que les points H, K et L sont alignés.

Les vecteurs — $AIJH$ est un parallélogramme : le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Il en est de même pour les deux autres parallélogrammes.

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{IJ}$$

La translation — Les points H, K et L sont donc les images de A, B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Conclure — A, B et C sont alignés, et une translation conserve l'alignement : leurs images sont alignées.

H, K et L sont alignés

H, K et L sont alignés

À ne pas faire : $AIJH$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JH}$ — $AIJH$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IJ}$. Deux côtés opposés se parcourent dans le même sens : de A vers I d'un côté, de

H vers J de l'autre.

10. THÉORÈME

Image d'une droite

CE QU'IL DIT

Chnowa l'image mta3 droite ? El théorème y9oul : l'image d'une droite par une translation, hiya droite parallèle liha. Ken A prime w B prime houma les images de A w B, l'image de la droite AB hiya la droite A prime B prime. W l'image du segment AB hiya le segment A prime B prime, 3andou nafs la longueur. W l'image de la demi-droite d'origine A hiya demi-droite d'origine A prime. Fel pratique : bech tarsem l'image mta3 droite, yekfik point wa7ed. 5oudh point A 3la la droite, arsem A prime, w 3addi men A prime la parallèle.

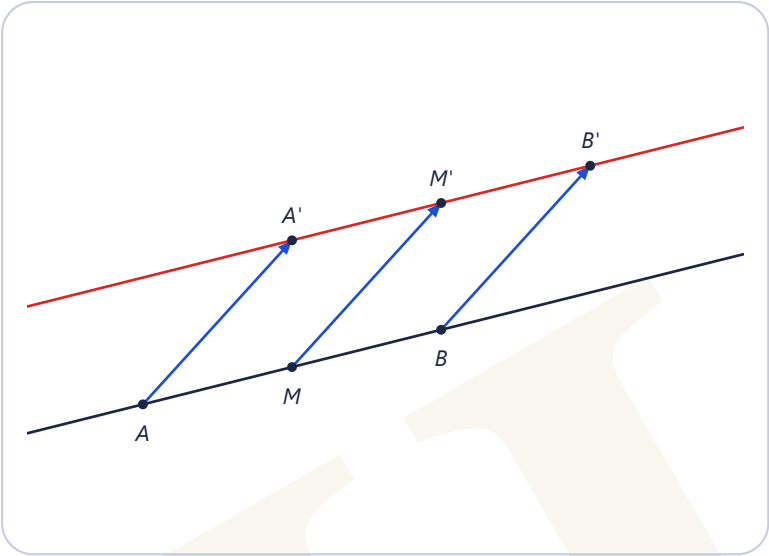
شنوّة l'image متاع droite ؟ الـ théorème يقول : l'image d'une droite par une translation ، هي droite
la droite A هي les images de A w B ، l'image de la droite A B هوما A prime w B prime كان . ليها parallèle
la longueur . w عندو نفس ، le segment A prime B prime هي prime B prime . w l'image du segment A B
باش ترسم : pratique في الـ . demi-droite d'origine A prime هي l'image de la demi-droite d'origine A
A prime la عدّي من A prime ، w ارسم ، la droite على point A خوذ . واحد point يكفيك ، droite متاع l'image
. parallèle

Quelle est l'image d'une droite ? Le théorème dit : l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle. Si A prime et B prime sont les images de A et B, l'image de la droite A B est la droite A prime B prime. Et l'image du segment A B est le segment A prime B prime, de même longueur. Et l'image de la demi-droite d'origine A est une demi-droite d'origine A prime. En pratique : pour tracer l'image d'une droite, un seul point suffit. Prends un point A sur la droite, construis A prime, et trace par A prime la parallèle.

Soient A et B deux points distincts et A' et B' leurs images respectives par une translation t.

- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est **parallèle** : l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est **isométrique** : l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image d'une demi-droite par une translation est une demi-droite : l'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.

En pratique. Pour tracer l'image d'une droite, un seul point suffit : on construit l'image A' d'un point A de la droite, puis on trace la parallèle à la droite passant par A'.



L'image de la droite (AB) est la droite (A'B'), parallèle à (AB).

Une droite passe par deux points A et B ; un point M est placé entre eux. Au-dessus, la droite image, parallèle à la première, passe par les images A' et B', et par l'image M' de M. Les vecteurs AA', MM' et BB', en bleu, sont égaux.

UNE DROITE PARALLÈLE

$$(AB) \longmapsto (A'B')$$

UN SEGMENT ISOMÉTRIQUE

$$[AB] \longmapsto [A'B'], \quad A'B' = AB$$

DÉMONSTRATION

Soit M un point de (AB) et M' son image. Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{A'B'}$: M' est sur $(A'B')$. Réciproquement, soit N' un point de $(A'B')$ et N son antécédent : $\overrightarrow{A'N'} = k\overrightarrow{A'B'}$ donne $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AB}$, donc N est sur (AB). L'image de (AB) est donc exactement $(A'B')$, et ces droites sont parallèles car $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Pour le segment, le même calcul avec $0 \leq k \leq 1$; pour la demi-droite, avec $k \geq 0$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit $[AB]$ un segment de milieu O. On note D_1 la médiatrice du segment $[OA]$ et D_2 la médiatrice du segment $[OB]$. Montrer que la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ transforme la droite D_1 en la droite D_2.

Un point de la droite — On note I le milieu de $[OA]$ et K le milieu de $[OB]$. Le point I est sur D_1. Par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{IK}$ est la somme de la moitié du vecteur $\overrightarrow{AO}$ et de la moitié du vecteur $\overrightarrow{OB}$, et ces deux vecteurs sont égaux : l'image de I est K.

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO}$$

La direction — L'image de D_1 est la droite parallèle à D_1 qui passe par K. Comme D_1 est perpendiculaire à la droite (AB), son image l'est aussi.

Conclure — La droite perpendiculaire à (AB) qui passe par le milieu K de $[OB]$ est la médiatrice de $[OB]$: c'est la droite D_2.

$D_1 \longmapsto D_2$

$$D_1 \longmapsto D_2$$

À ne pas faire : L'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une autre droite, parallèle à (AB) — L'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB) elle-même. A a pour image B, qui est sur la droite (AB) : la parallèle à (AB) passant par B est la droite (AB) elle-même. Une droite qui a la direction du vecteur glisse sur elle-même.

---

11. EXEMPLE

Exemple : images de droites

CE QU'IL DIT

Mithel. 3andna parallélogramme ABCD, w la droite D un hiya la parallèle à la droite AC elli tet3adda men B. W t hiya la translation de vecteur AC. Bech nal9aw l'image mta3 droite, nal9aw l'image mta3 point wa7ed menha, w nrasmou la parallèle. A yemchi l C : l'image de la droite AB hiya la parallèle elli tet3adda men C, ya3ni la droite DC. Kif kif, l'image de la droite AD hiya la droite BC. Amma la droite D un, 3andha nafs la direction mta3 el vecteur : tezle9 3la rou7ha, w l'image mte3ha hiya D un bidha.

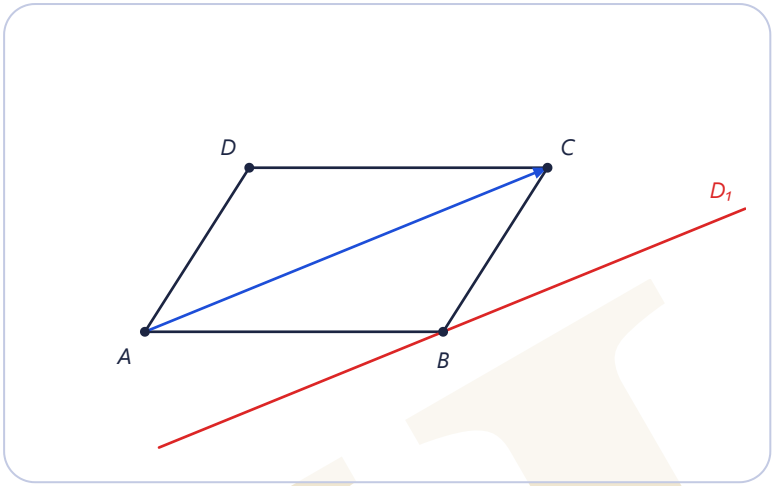
مثال . عندنا la parallèle à la droite A C هي parallélogramme A B C D ، w la droite D un اللي تتعدّى من B . w t هي la translation de vecteur A C . باش نلقاو l'image متاع droite ، نلقاو l'image متاع point واحد منها ، w نرسمو A . la parallèle يمشي لـ la parallèle هي C : l'image de la droite A B اللي تتعدّى من C ، يعني la droite D C . كيف كيف ، l'image de la droite A D هي la droite B C . أمّا la droite D un ، عندها نفس la direction متاع الـ vecteur : تزلق على روحها ، w l'image متاعها هي D un بيدها .

Un exemple. On a un parallélogramme A B C D, et la droite D un est la parallèle à la droite A C qui passe par B. Et t est la translation de vecteur A C. Pour trouver l'image d'une droite, on cherche l'image d'un seul de ses points, et on trace la parallèle. A va en C : l'image de la droite A B est la parallèle qui passe par C, c'est-à-dire la droite D C. De même, l'image de la droite A D est la droite B C. Quant à la droite D un, elle a la même direction que le vecteur : elle glisse sur elle-même, et son image est D un elle-même.

Soient $ABCD$ un parallélogramme et D_1 la parallèle à la droite (AC) passant par B. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Pour trouver l'image d'une droite, on cherche l'image d'**un** de ses points, puis on trace la parallèle :

- l'image de la droite (AB) est la droite (DC) ;
- l'image de la droite (AD) est la droite (BC) ;
- l'image de la droite D_1 est la droite D_1 elle-même, car D_1 a la direction du vecteur de la translation.



D₁ est la parallèle à (AC) passant par B.

Un parallélogramme ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. La diagonale [AC] porte le vecteur AC, en bleu. Une droite D1, en rouge, passe par B et elle est parallèle à la diagonale (AC).

$$(AB) \longmapsto (DC) \quad ; \quad (AD) \longmapsto (BC) \quad ; \quad D_1 \longmapsto D_1$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note D_1 la parallèle à la droite (AC) passant par B, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Déterminer l'image par t de chacune des droites (AB), (AD) et D_1.

La droite (AB) — A a pour image C. L'image de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par C : comme $ABCD$ est un parallélogramme, c'est la droite (DC).

$(AB) \longmapsto (DC)$

La droite (AD) — De même, l'image de la droite (AD) est la parallèle à (AD) passant par C : c'est la droite (BC).

$(AD) \longmapsto (BC)$

La troisième droite — On note B' l'image de B. Le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$, et D_1 est la parallèle à (AC) passant par B : le point B' est sur D_1. L'image de D_1 est la parallèle à D_1 passant par B', c'est-à-dire D_1 elle-même.

$D_1 \longmapsto D_1$

les droites (DC), (BC) et D_1

12. PROPRIÉTÉ

Conservation du milieu

CE QU'IL DIT

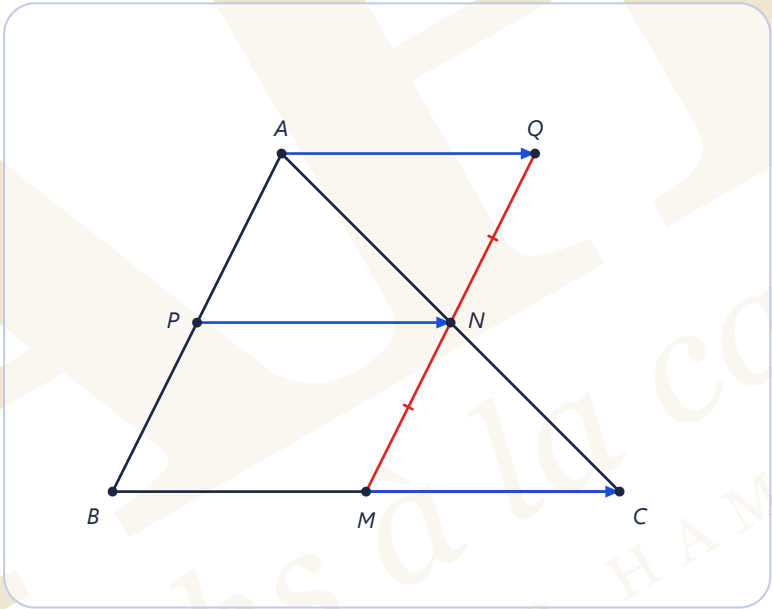
La translation t7afedh 3la le milieu. Ken O le milieu de IJ, w I prime, J prime w O prime houma les images mte3hom, wa9tha O prime houwa le milieu de I prime J prime. 5ater le vecteur OI plus le

vecteur OJ égale le vecteur nul, w la translation ma tbaddelch les vecteurs. Nchoufou mithel fi triangle : M, N w P houma les milieux de BC, AC w AB, w t hiya la translation de vecteur MC.

les images هوما O le milieu de I J ، w I prime ، J prime w O prime كان . le milieu تحافظ على la translation le vecteur O I plus le vecteur O J égale le خاطر . le milieu de I prime J prime هو O prime متاعهم ، وقتها les milieux هوما triangle : M ، N w P في نشوفو مثال . les vecteurs ما تبدّلش vecteur nul ، w la translation . la translation de vecteur M C هي de B C ، A C w A B ، w t

La translation conserve le milieu. Si O est le milieu de I J, et si I prime, J prime et O prime sont leurs images, alors O prime est le milieu de I prime J prime. Car le vecteur O I plus le vecteur O J égale le vecteur nul, et la translation ne change pas les vecteurs. Voyons un exemple dans un triangle : M, N et P sont les milieux de B C, A C et A B, et t est la translation de vecteur M C.

La translation **conserve le milieu** : si O est le milieu d'un segment $[IJ]$, et si I', J' et O' sont les images respectives de I, J et O par une translation, alors O' est le milieu de $[I'J']$.



N est le milieu de [MQ].

Un triangle ABC : A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. M, N et P sont les milieux des côtés [BC], [AC] et [AB]. Le vecteur MC est tracé en bleu. Le point Q, à droite de A, est l'image de A par la translation de vecteur MC. Le segment [MQ], en rouge, passe par N, qui est son milieu.

$$O \text{ milieu de } [IJ] \implies O' \text{ milieu de } [I'J']$$

DÉMONSTRATION

O est le milieu de $[IJ]$: $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$. Par la propriété caractéristique, $\overrightarrow{O'I'} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{O'J'} = \overrightarrow{OJ}$, donc $\overrightarrow{O'I'} + \overrightarrow{O'J'} = \vec{0}$: O' est le milieu de $[I'J']$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient ABC un triangle et M, N et P les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{MC}$. a) Déterminer les images de B et de P par t. b) Soit Q

l'image de A par t. Montrer que les points M, N et Q sont alignés, et préciser la position de N sur le segment $[MQ]$.

L'image de B — M est le milieu de $[BC]$: le vecteur $\overrightarrow{BM}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{MC}$. L'image de B est M.

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$$

L'image de P — P et N sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$: le vecteur $\overrightarrow{PN}$ est la moitié du vecteur $\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{MC}$. L'image de P est N.

$$\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC}$$

Le milieu — P est le milieu de $[AB]$, et une translation conserve le milieu : l'image de P, qui est N, est le milieu du segment qui joint les images de A et de B, c'est-à-dire Q et M. Les trois points sont donc alignés.

N est le milieu de $[MQ]$

> N est le milieu de $[MQ]$

À ne pas faire : Le vecteur de la translation est $\overrightarrow{MC}$, donc l'image de B est C — L'image de B est M, car $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$. L'image de B est le point X tel que le vecteur $\overrightarrow{BX}$ soit égal au vecteur de la translation. Ici M est le milieu de $[BC]$.

13. PROPRIÉTÉ

Conservation du barycentre

CE QU'IL DIT

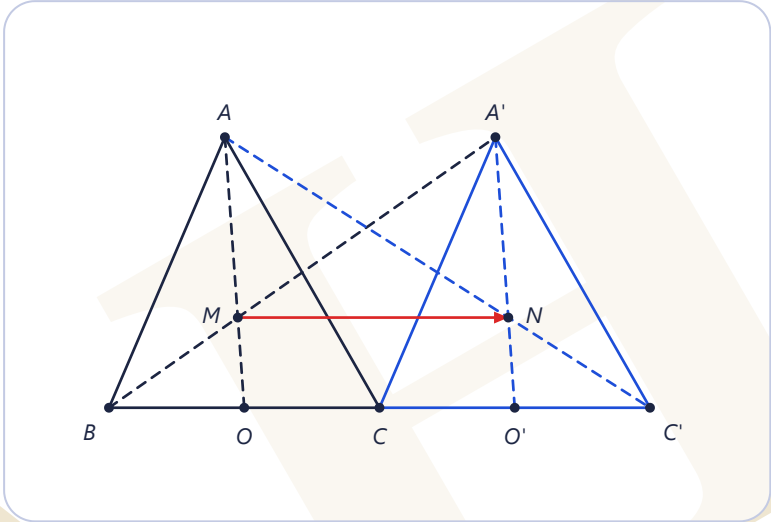
La translation t7afedh zeda 3la le barycentre. Ken G le barycentre de I, a w J, b, w a plus b différent de zéro, wa9tha l'image G prime houwa le barycentre de I prime, a w J prime, b : nafs les coefficients. 5ater a fois le vecteur GI plus b fois le vecteur GJ égale le vecteur nul, w el vecteurs ma yetbaddlouch. W kif kif fi trois points : l'image du centre de gravité mta3 triangle, hiya le centre de gravité mta3 le triangle image.

G le barycentre de I ، a w J ، b ، w a plus b différent de كان . le barycentre على تحافظ زادة la translation a خاطر . les coefficients نفس : le barycentre de I prime ، a w J prime ، b هو l'image G prime وقتها ، zéro كيف كيف w . ما يتبدّلوش vecteurs الـ fois le vecteur G I plus b fois le vecteur G J égale le vecteur nul ، w le triangle متاع le centre de gravité هي ، triangle متاع trois points : l'image du centre de gravité في . image

La translation conserve aussi le barycentre. Si G est le barycentre de I, a et J, b, avec a plus b différent de zéro, alors l'image G prime est le barycentre de I prime, a et J prime, b : les mêmes coefficients. Car a fois le vecteur G I plus b fois le vecteur G J égale le vecteur nul, et les vecteurs ne changent pas. Et de même avec trois points : l'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

La translation **conserve le barycentre**. Soient I et J deux points du plan et a et b deux réels tels que $a+b\neq 0$. On désigne par G le barycentre de (I,a) et (J,b), et par I', J' et G' les images respectives de I, J et G par une translation. Alors G' est le barycentre de (I',a) et (J',b).

Il en est de même pour trois points : en particulier, l'image du **centre de gravité** d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.



M est le centre de gravité de ABC, N celui de A'CC'.

Un triangle ABC : A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite, et O le milieu de [BC]. À droite, le triangle image A'CC', en bleu, obtenu par la translation de vecteur BC : A' est à droite de A, C' à droite de C, et O' est le milieu de [CC']. Les médianes (AO) et (BA') se coupent en M ; les droites (A'O') et (AC') se coupent en N. Le vecteur MN, en rouge, est égal au vecteur BC.

$$a\overrightarrow{GI}+b\overrightarrow{GJ}=\vec{0}\implies a\overrightarrow{G'I'}+b\overrightarrow{G'J'}=\vec{0}$$

DÉMONSTRATION

G est le barycentre de (I,a) et (J,b) : $a\overrightarrow{GI}+b\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$. Par la propriété caractéristique, $\overrightarrow{G'I'}=\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{G'J'}=\overrightarrow{GJ}$, donc $a\overrightarrow{G'I'}+b\overrightarrow{G'J'}=\vec{0}$: G' est le barycentre de (I',a) et (J',b). Le même calcul vaut avec trois points.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle, O le milieu de $[BC]$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On note A', C' et O' les images de A, C et O par t. La droite (BA') coupe la droite (AO) en M, et la droite (AC') coupe la droite $(A'O')$ en N. Montrer que M est le centre de gravité du triangle ABC, puis que N est l'image de M par t.

Le point M — Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BC}$: $AA'CB$ est un parallélogramme, et ses diagonales $[AC]$ et $[BA']$ se coupent en leur milieu. La droite (BA') passe donc par le milieu de $[AC]$: c'est une médiane du triangle ABC. La droite (AO) en est une autre. Leur point d'intersection M est le centre de gravité de ABC.

$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BC}$

Le triangle image — L'image de A est A', celle de B est C, celle de C est C' : le triangle $A'CC'$ est l'image du triangle ABC. Et O', image du milieu de $[BC]$, est le milieu de $[CC']$.

$ABC \longmapsto A'CC'$

Le point N — La droite $(A'O')$ est une médiane du triangle $A'CC'$. Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont égaux : $AA'C'C$ est un parallélogramme, donc la droite (AC') passe par le milieu de $[A'C]$. C'est une autre médiane : N est le centre de gravité du triangle $A'CC'$.

Conclure — Le centre de gravité est l'isobarycentre des trois sommets, et une translation conserve le barycentre : l'image de M est le centre de gravité du triangle image, c'est-à-dire N.

$M \longmapsto N$

$$M \longmapsto N$$

À ne pas faire : G est le barycentre de $(I, 2)$ et $(J, 3)$, donc G' est le barycentre de $(I', 3)$ et $(J', 2)$ — G' est le barycentre de $(I', 2)$ et $(J', 3)$. Chaque point garde son coefficient : l'image de I porte le coefficient de I.

---

14. PROPRIÉTÉ

Parallélisme et orthogonalité

CE QU'IL DIT

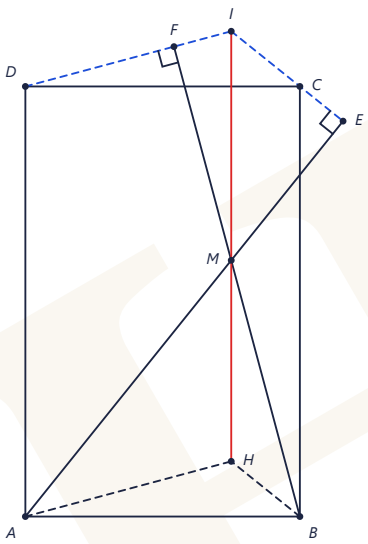
La translation t7afedh 3la le parallélisme w 3la l'orthogonalité. Les images mta3 zouz droites parallèles, houma zouz droites parallèles. W les images mta3 zouz droites perpendiculaires, houma zouz droites perpendiculaires. 5ater koll droite parallèle à l'image mte3ha. W 7aja tanfa3 barcha : ken point houwa l'intersection mta3 zouz droites, l'image mte3ou hiya l'intersection mta3 les images mte3hom. Nchoufouha fi mithel fih rectangle w orthocentre.

la translation تحافظ على le parallélisme w على les images . l'orthogonalité متاع زوز ، droites parallèles
هوما زوز les images w . droites parallèles متاع زوز droites perpendiculaires ، هوما زوز droites
خاطر كل . droite parallèle à l'image متاعها w حاجة تنفع برشة : كان point هو l'intersection
perpendiculaires
متاع زوز l'image ، droites متاعو هي l'intersection متاع les images . متاعهم نشوفوها في مثال فيه rectangle
w orthocentre .

La translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité. Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles. Et les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Car chaque droite est parallèle à son image. Et une idée très utile : si un point est l'intersection de deux droites, son image est l'intersection de leurs images. Voyons-la dans un exemple avec un rectangle et un orthocentre.

- Les images par une translation de deux droites **parallèles** sont deux droites parallèles.
- Les images par une translation de deux droites **perpendiculaires** sont deux droites perpendiculaires.

Une idée utile. Si un point A est le point d'intersection de deux droites, son image est le point d'intersection des images de ces deux droites.



I, M et H sont alignés.

Un rectangle ABCD, plus haut que large : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. À l'intérieur, un point M et le triangle ABM. H est l'orthocentre de ce triangle, sous M. La droite (AM) est prolongée jusqu'au point E, projeté orthogonal de C ; la droite (BM) jusqu'au point F, projeté orthogonal de D. Les droites (CE) et (DF), en pointillés bleus, se coupent en I, au-dessus du rectangle. Les points H, M et I sont sur une même droite verticale rouge.

DÉMONSTRATION

Soient D et L deux droites, D' et L' leurs images par une translation : D' est parallèle à D et L' est parallèle à L. Si D et L sont parallèles, alors D', D, L et L' ont la même direction : D' et L' sont parallèles. Si D et L sont perpendiculaires, alors D', parallèle à D, est perpendiculaire à L, donc à L', qui est parallèle à L.

EXEMPLE TRAITÉ

$ABCD$ est un rectangle, M est un point à l'intérieur de ce rectangle tel que le triangle ABM ne soit pas rectangle en M, et H est l'orthocentre du triangle ABM. Soit E le projeté orthogonal de C sur la droite (AM) et F le projeté orthogonal de D sur la droite (BM). On note I le point d'intersection des droites (CE) et (DF), et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Montrer que les points I, M et H sont alignés.

L'image de (BH) — La droite (BH) est une hauteur du triangle ABM : elle est perpendiculaire à la droite (AM). B a pour image C : l'image de la droite (BH) est la parallèle à (BH) passant par C, donc la perpendiculaire à (AM) passant par C. C'est la droite (CE).

$(BH) \longmapsto (CE)$

L'image de (AH) — De même, la hauteur (AH) est perpendiculaire à la droite (BM), et A a pour image D, car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux. L'image de la droite (AH) est la perpendiculaire à (BM) passant par D : c'est la droite (DF).

$(AH) \longmapsto (DF)$

L'image de H — H est le point d'intersection des hauteurs (AH) et (BH) : son image est le point d'intersection de leurs images, les droites (DF) et (CE), c'est-à-dire I.

$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{BC}$

Conclure — La droite (HI) est parallèle à (BC), donc perpendiculaire à (AB). La hauteur (MH) est elle aussi perpendiculaire à (AB), et elle passe par H : les deux droites sont confondues.

$I,\ M$ et H sont alignés

> $I,\ M$ et H sont alignés

À ne pas faire : D est perpendiculaire à L, donc l'image D' est perpendiculaire à D — D' est parallèle à D, et D' est perpendiculaire à L'. Une droite et son image sont parallèles. C'est entre les deux images que l'orthogonalité est conservée.

---

15. PROPRIÉTÉ

Angles et polygones

CE QU'IL DIT

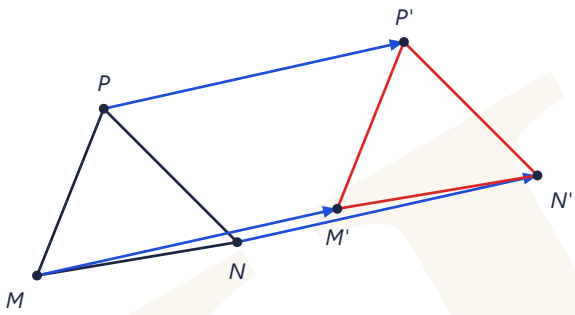
La translation t7afedh 3la les grandeurs. Les distances ma yetbaddlouch, w les angles zeda : l'angle xOy égale l'angle x prime O prime y prime. W l'image mta3 polygone, hiya polygone superposable lih : tnajjem t7ottou fou9ou bedh-dhabt. Mathalan l'image mta3 triangle MNP, hiya triangle M prime N prime P prime isométrique lih. L'image mta3 rectangle hiya rectangle, w l'image mta3 losange hiya losange.

la translation تحافظ على les distances . les grandeurs ما يتبدّلوش ، les angles w زادة : l'angle x O y égale
l'image متاع l'angle x prime O prime y prime . w l'image متاع polygone ، هي polygone superposable ليه : تنجّم تحطّو
l'image متاع triangle M N P ، هي triangle M prime N prime P prime isométrique ليه . مثلا فوقو بالضبط .
l'image متاع rectangle ، w l'image هي rectangle متاع losange ، هي losange .

La translation conserve les grandeurs. Les distances ne changent pas, et les angles non plus : l'angle x O y égale l'angle x prime O prime y prime. Et l'image d'un polygone est un polygone qui lui est superposable : on peut le poser exactement dessus. Par exemple, l'image du triangle M N P est un triangle M prime N prime P prime qui lui est isométrique. L'image d'un rectangle est un rectangle, et l'image d'un losange est un losange.

- Une translation conserve les **distances**.
- Une translation conserve les **angles** : si $[O'x')$ et $[O'y')$ sont les images des demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ par une translation, alors $\widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy}$.
- L'image d'un **polygone** par une translation est un polygone qui lui est **superposable**.

En particulier, l'image d'un triangle MNP est un triangle $M'N'P'$ qui lui est isométrique ; l'image d'un rectangle est un rectangle, l'image d'un losange est un losange.



Les triangles MNP et M'N'P' sont isométriques.

Un triangle MNP à gauche, et son image M'N'P' à droite, en rouge : les deux triangles ont la même forme et les mêmes dimensions, l'un est le glissement de l'autre. Les vecteurs MM', NN' et PP', en bleu, sont égaux.

LES ANGLES

$\widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy}$

DÉMONSTRATION

Soit MNP un triangle et $M'N'P'$ son image. Une translation conserve les distances : $M'N' = MN$, $N'P' = NP$ et $M'P' = MP$. Les deux triangles ont leurs trois côtés égaux deux à deux : ils sont isométriques, donc leurs angles sont égaux deux à deux. Pour un secteur $[Ox, Oy]$, on choisit un point A sur $[Ox)$ et un point B sur $[Oy)$, distincts de O : les triangles OAB et $O'A'B'$ sont isométriques, donc $\widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit $ABCD$ un quadrilatère et $A'B'C'D'$ son image par une translation. Déterminer la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$ dans chacun des cas suivants. a) $ABCD$ est un rectangle. b) $ABCD$ est un losange.

Un parallélogramme — Une translation ne change pas les vecteurs. Dans les deux cas $ABCD$ est un parallélogramme, donc son image aussi.

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'}$

Le rectangle — Les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires : leurs images, les droites $(A'B')$ et $(A'D')$, le sont aussi. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

Le losange — Les distances sont conservées : si $AB = AD$, alors $A'B' = A'D'$. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux est un losange.

a) un rectangle ; b) un losange

À ne pas faire : L'image d'un rectangle par une translation peut être un parallélogramme qui n'est pas un rectangle — L'image d'un rectangle par une translation est un rectangle de mêmes dimensions. Une translation conserve les distances et les angles : un angle droit reste un angle droit.

---

16. THÉORÈME

Image d'un cercle

CE QU'IL DIT

W le cercle ? L'image d'un cercle par une translation, hiya cercle 3andou nafs le rayon. El centre O yemchi l O prime, w le cercle ej-jdid centre mte3ou O prime. 3lech ? Ken M 3la le cercle, OM égale R. W la translation t7afedh 3la les distances : O prime M prime égale R, donc M prime 3la le cercle de centre O prime. Bech tarsem l'image mta3 cercle, arsem l'image mta3 el centre bark, w 5alli nafs le rayon.

يمشي لـ centre O الـ . le rayon عندو نفس cercle هي ، l'image d'un cercle par une translation ؟ w le cercle le cercle ، O M égale R . w la على M كان ؟ علاش . O prime متاعو centre الجديد O prime ، w le cercle le cercle de centre O على les distances : O prime M prime égale R ، donc M prime تحافظ على translation . le rayon خلّي نفس w ، برك centre متاع الـ l'image ارسم ، cercle متاع l'image ترسم باش . prime

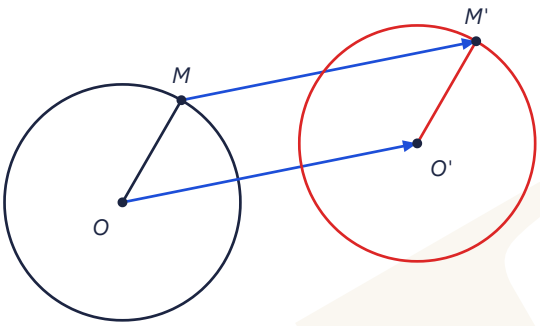
Et le cercle ? L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon. Le centre O va en O prime, et le nouveau cercle a pour centre O prime. Pourquoi ? Si M est sur le cercle, O M égale R. Et la translation conserve les distances : O prime M prime égale R, donc M prime est sur le cercle de centre O prime. Pour tracer l'image d'un cercle, construis seulement l'image du centre, et garde le même rayon.

L'image d'un cercle par une translation est un cercle de **même rayon**.

Plus précisément : soit t une translation, $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et O' l'image de O par t. L'image de $\mathscr{C}$ par t est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon R.

En pratique. Pour tracer l'image d'un cercle, on construit l'image de son centre et on garde le même rayon.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



Le centre va en O' ; le rayon ne change pas.

Un cercle de centre O, à gauche, et un point M sur ce cercle. À droite, le cercle image, de centre O' et de même rayon, en rouge, avec le point M' image de M. Les vecteurs OO' et MM', en bleu, sont égaux ; les rayons [OM] et [O'M'] ont la même longueur.

LE MÊME RAYON

$$O'M' = OM = R$$

DÉMONSTRATION

Soit M un point de $\mathscr{C}$ et M' son image : $O'M' = OM = R$, car une translation conserve les distances. Donc M' est sur $\mathscr{C}'$. Réciproquement, soit N' un point de $\mathscr{C}'$ et N son antécédent : $ON = O'N' = R$, donc N est sur $\mathscr{C}$. L'image de $\mathscr{C}$ est exactement $\mathscr{C}'$.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points d'un cercle (C) de centre O. On note (C') l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. a) Construire (C'). b) À tout point M de (C), on associe le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{MB}$ moins le vecteur $\overrightarrow{MA}$. Montrer que N est un point de (C').

Construire — On construit l'image O' du centre : c'est le point tel que $ABO'O$ est un parallélogramme. Le cercle (C') a pour centre O' et le même rayon que (C). Il passe par B, qui est l'image de A.

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$$

Le vecteur MN — L'opposé du vecteur $\overrightarrow{MA}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$: par Chasles, on obtient le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$$

Conclure — N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Comme M est sur (C), son image est sur l'image de (C).

$$N \in (C')$$

$N \in (C')$

À ne pas faire : Par une translation de vecteur $\vec{u}$, le rayon du cercle image est R plus la norme de $\vec{u}$ — Le cercle image a le même rayon R. Seul le centre se déplace. Les distances sont conservées, donc le rayon aussi.

---

17. APPLICATION

Deux cercles

CE QU'IL DIT

Tatbi9 3la les cercles. 3andna zouz cercles C un w C deux, 3andhom nafs le rayon, centres mte3hom I w J, w sécants fi A w B. La droite d tet3adda men A w parallèle à la droite IJ : t9oss C un fi M, w C deux fi N. Ne5dhou la translation de vecteur IJ. La droite d tezle9 3la rou7ha, w C un ywalli C deux. Donc l'image de A lezem tkoun 3la d w 3la C deux : hiya N. W l'image de M hiya A. Donc le vecteur MA égale le vecteur AN, w égale le vecteur IJ.

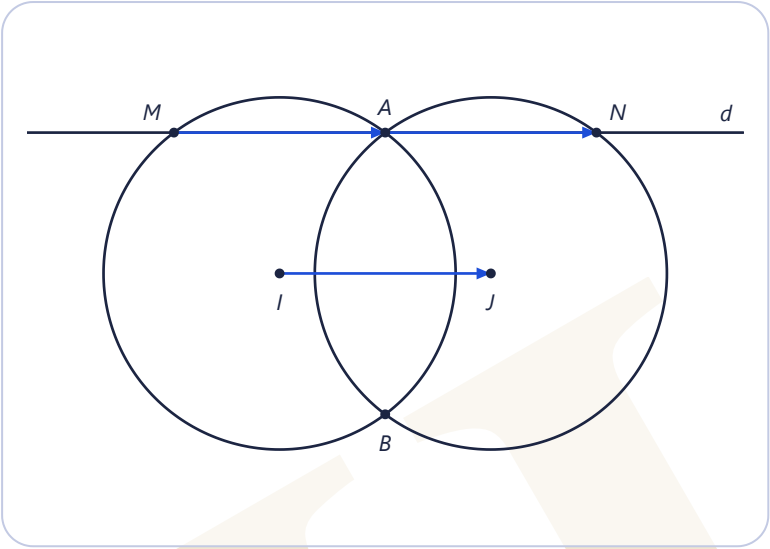
تطبيق على les cercles . عندنا زوز cercles C un w C deux ، عندهم نفس centres ، متاعهم le rayon ، w J ، I w
. N في M ، w C deux في C un تقصّ : A w parallèle à la droite I J من تتعدّى A w B . la droite d في sécants
C deux . donc l'image de A يولّي w C un ، تزلق على روحها la translation de vecteur I J . la droite d ناخذو
A . donc le vecteur M A égale le vecteur A N هي N . w l'image de M هي : C deux على d w على لازم تكون
. ، w égale le vecteur I J

Une application aux cercles. On a deux cercles C un et C deux, de même rayon, de centres I et J, sécants en A et B. La droite d passe par A et elle est parallèle à la droite I J : elle recoupe C un en M, et C deux en N. Prenons la translation de vecteur I J. La droite d glisse sur elle-même, et C un devient C deux. Donc l'image de A doit être sur d et sur C deux : c'est N. Et l'image de M est A. Donc le vecteur M A égale le vecteur A N, et égale le vecteur I J.

Soient (C_1) et (C_2) deux cercles de même rayon, sécants en A et B, de centres respectifs I et J. La droite d passant par A et parallèle à (IJ) recoupe (C_1) en M et (C_2) en N. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

- La droite d a la direction du vecteur : son image est d elle-même.
- Le cercle (C_1) a pour image le cercle de centre J et de même rayon : c'est (C_2).
- L'image d'un point commun à d et à (C_1) est un point commun à d et à (C_2) : l'image de A est N, et l'image de M est A.

On en déduit $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{IJ}$.



MA = AN = IJ.

Deux cercles de même rayon, de centres I à gauche et J à droite, qui se coupent en deux points : A en haut et B en bas. Une droite horizontale d passe par A, parallèle à la droite des centres (IJ) ; elle recoupe le cercle de gauche en M, à gauche de A, et le cercle de droite en N, à droite de A. Les vecteurs IJ, MA et AN, en bleu, sont égaux.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{IJ}$$

EXEMPLE TRAITÉ

(C_1) et (C_2) sont deux cercles de même rayon, sécants en A et B, de centres respectifs I et J. La droite d passant par A et parallèle à (IJ) recoupe (C_1) en M et (C_2) en N. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. a) Déterminer les images de A et de M par t. b) Soit P un point du cercle (C_1), distinct de B, de M et du point de (C_1) diamétralement opposé à A, et P' son image par t. Montrer que A est l'orthocentre du triangle BPP'.

Les images de d et du cercle — La droite d est parallèle à (IJ) : son image est d elle-même. Le centre I a pour image J, et le rayon ne change pas : l'image du cercle (C_1) est le cercle (C_2).

Les images de A et de M — A et M sont les deux points communs à d et à (C_1) : leurs images sont les deux points communs à d et à (C_2), c'est-à-dire A et N. Le vecteur n'est pas nul, donc l'image de A n'est pas A : c'est N. Et l'image de M est A.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{IJ}$$

Une première hauteur — I et J sont à égale distance de A et de B : la droite (IJ) est la médiatrice de $[AB]$. Le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{IJ}$, donc la droite (BA) est perpendiculaire à (PP') : c'est la hauteur issue de B.

Une deuxième hauteur — La droite d est perpendiculaire à (AB) : le triangle MAB est rectangle en A, donc le segment $[MB]$ est un diamètre de (C_1), et le triangle MPB est rectangle en P. Or M a pour image A et P a pour image P' : la droite (AP') est parallèle à (MP), donc perpendiculaire à (BP). C'est la hauteur issue de P'.

Conclure — Deux hauteurs du triangle BPP' passent par A.

A est l'orthocentre du triangle BPP'

A est l'orthocentre du triangle BPP'

À ne pas faire : L'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est A, car A est sur les deux cercles — L'image de A est N. Par une translation de vecteur non nul, aucun point n'est sa propre image. L'image de A est l'autre point commun à d et à (C_2).

---

18. PROPRIÉTÉ

Conservation du contact

CE QU'IL DIT

La translation t7afedh 3la le contact. Ken droite tangente à un cercle fi point M, wa9tha l'image mta3 la droite tangente à l'image mta3 le cercle, fi M prime, l'image de M. 5ater la tangente perpendiculaire au rayon OM, w la translation t7afedh 3la l'orthogonalité. Ya3ni le point de contact yet7arrek houwa zeda m3a el figure.

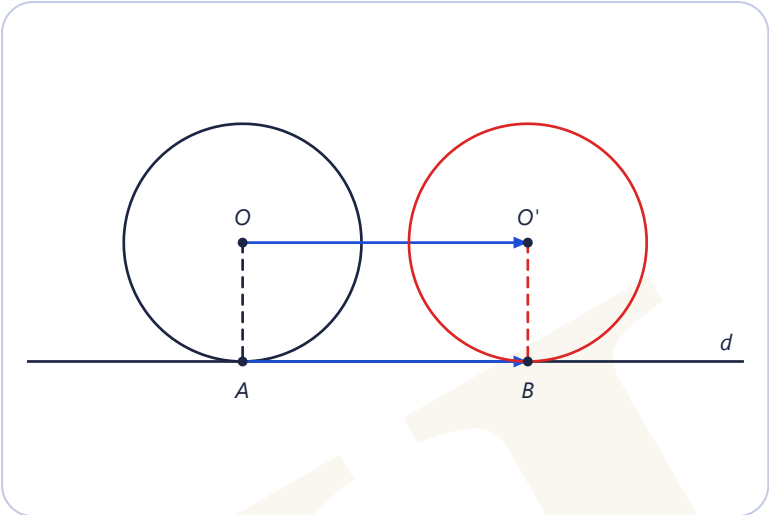
la translation تحافظ على le contact . كان droite tangente à un cercle في point M ، وقتها l'image متاع
la tangente perpendiculaire خاطر . M prime ، l'image de M في ، le cercle متاع droite tangente à l'image
au rayon O M ، w la translation تحافظ على l'orthogonalité . يعني le point de contact يتحرّك هو زادة مع الـ
. figure

La translation conserve le contact. Si une droite est tangente à un cercle en un point M, alors l'image de la droite est tangente à l'image du cercle, en M prime, l'image de M. Car la tangente est perpendiculaire au rayon O M, et la translation conserve l'orthogonalité. Autrement dit, le point de contact se déplace lui aussi avec la figure.

Si une droite et un cercle sont **tangents**, alors leurs images par une translation sont tangentes.

Plus précisément : soit $\mathscr{C}$ un cercle et D une droite tangente à $\mathscr{C}$ en un point M. On désigne par $\mathscr{C}'$, D' et M' les images respectives de $\mathscr{C}$, D et M par une translation. Alors D' est tangente à $\mathscr{C}'$ en M'.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



Le cercle image est tangent à la droite en B.

Une droite horizontale d passe par deux points A et B. Un cercle de centre O est posé sur la droite : il lui est tangent en A. À droite, son image par la translation de vecteur AB, en rouge : un cercle de même rayon, de centre O', tangent à la même droite en B. Les vecteurs AB et OO', en bleu, sont égaux.

DÉMONSTRATION

Soit O le centre de $\mathscr{C}$ et O' son image. D est tangente à $\mathscr{C}$ en M : M est sur $\mathscr{C}$ et D est perpendiculaire à (OM) en M. L'image M' est sur $\mathscr{C}'$ et sur D'. L'image de la droite (OM) est la droite $(O'M')$, et une translation conserve l'orthogonalité : D' est perpendiculaire à $(O'M')$ en M'. Donc D' est tangente à $\mathscr{C}'$ en M'.

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points distincts d'une droite d, et (C) un cercle tangent à d en A. On note (C') l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Montrer que (C') est tangent à d, et préciser le point de contact.

L'image de la droite — La droite d passe par A et B : elle a la direction du vecteur de la translation. Son image est d elle-même.

$d \longmapsto d$

L'image du point de contact — Le point de contact A a pour image B.

$A \longmapsto B$

Conclure — Une translation conserve le contact : l'image du cercle est tangente à l'image de la droite, au point image du point de contact.

(C') est tangent à d en B

$$(C') \text{ est tangent à } d \text{ en } B$$

À ne pas faire : Le cercle image (C') est tangent à la droite d en A — Le cercle image (C') est tangent à la droite d en B, image de A. Le point de contact se déplace avec la figure : il a lui aussi une image.

19. APPLICATION

Deux symétries axiales

CE QU'IL DIT

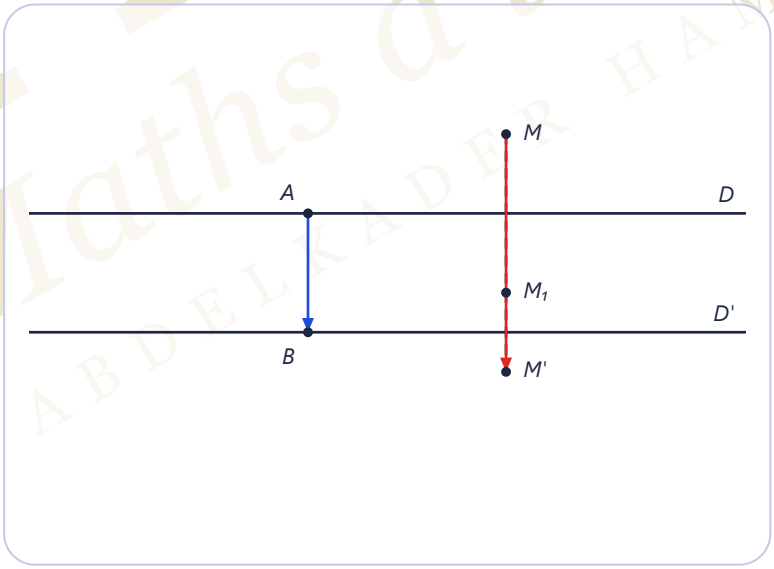
Rina zouz symétries centrales ya3tiw translation. W zouz symétries axiales ? Ne5dhou zouz droites parallèles D w D prime. A point 3la D, w B houwa le projeté orthogonal de A 3la D prime. El point M na3mloulou la symétrie d'axe D : nal9aw M un. Ba3d la symétrie d'axe D prime : nal9aw M prime. M, M un w M prime 3la nafs la perpendiculaire, w b Chasles nal9aw : le vecteur MM prime égale deux fois le vecteur AB. Donc hedhi la translation de vecteur deux fois AB.

droites parallèles D w D زوز ناخذو ؟ symétries axiales زوز translation . w يعطيو symétries centrales زوز رينا la symétrie نعملولو point M الـ . D prime على le projeté orthogonal de A هو D ، w B على prime . A point la على نفس M prime . M ، M un w M prime نلقاو : la symétrie d'axe D prime بعد . M un نلقاو : d'axe D la هذي le vecteur M M prime égale deux fois le vecteur A B . donc : نلقاو Chasles بـ perpendiculaire ، w . translation de vecteur deux fois A B

Nous avons vu que deux symétries centrales donnent une translation. Et deux symétries axiales ? Prenons deux droites parallèles D et D prime. A est un point de D, et B est le projeté orthogonal de A sur D prime. Au point M, on applique la symétrie d'axe D : on obtient M un. Puis la symétrie d'axe D prime : on obtient M prime. M, M un et M prime sont sur la même perpendiculaire, et par Chasles on trouve : le vecteur M M prime égale deux fois le vecteur A B. Donc c'est la translation de vecteur deux fois A B.

Soient D et D' deux droites parallèles, A un point de la droite D et B le projeté orthogonal de A sur la droite D'. Pour un point M du plan, on désigne par M_1 l'image de M par la symétrie axiale S_D, et par M' l'image de M_1 par la symétrie axiale $S_{D'}$. On considère l'application $t : M \mapsto M'$.

Alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$: l'application t est la **translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$**.



MM' = 2 AB.

Deux droites horizontales parallèles : D en haut, D' en dessous. Le point A est sur D, et B, juste en dessous, est son projeté orthogonal sur D' ; le vecteur AB, en bleu, est vertical. À droite, un point M au-dessus de D ; son symétrique M1 par rapport à D, entre les deux droites ; puis le symétrique M' de M1 par rapport à D', sous D'. Les trois points sont sur une même verticale, et le vecteur MM', en rouge, est deux fois le vecteur AB.

POUR TOUT POINT M

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$$

DÉMONSTRATION

Les points M, M_1 et M' sont sur la perpendiculaire à D qui passe par M ; elle est aussi perpendiculaire à D', car D et D' sont parallèles. Elle coupe D en H, milieu de $[MM_1]$, et D' en K, milieu de $[M_1M']$. Ainsi K est le projeté orthogonal de H sur D', comme B est celui de A : puisque D et D' sont parallèles, $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AB}$ (lorsque H est distinct de A, le quadrilatère $ABKH$ est un rectangle). Par Chasles, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1K} = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}$.

EXEMPLE TRAITÉ

D et D' sont deux droites parallèles, distantes de 3. À un point M, on associe son symétrique M_1 par rapport à D, puis le symétrique M' de M_1 par rapport à D'. Calculer la distance MM'.

Le vecteur — On note A un point de D et B son projeté orthogonal sur D'. Faire la symétrie d'axe D puis la symétrie d'axe D' revient à faire la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$

La distance — La distance AB est la distance entre les deux droites.

$MM' = 2 \times 3 = 6$

$$MM' = 6$$

À ne pas faire : Faire S_D puis $S_{D'}$, ou $S_{D'}$ puis S_D, donne la même translation — S_D puis $S_{D'}$ donne la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$; $S_{D'}$ puis S_D donne la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$. L'ordre compte : le vecteur va de la première droite vers la deuxième.

20. MÉTHODE

Problèmes de lieux

CE QU'IL DIT

Tawa les problèmes de lieux. Ki point yet7arrek fel figure, w point e5er marbout bih, nes2lou : el point hedha, win yet7arrek ? El ligne elli yet7arrek 3liha nsammiwha le lieu géométrique. Ne5dmou 3la trois étapes. Numéro un : nrasmou figure, w n7ottou barcha positions. Numéro deux : na3mlou conjecture, ya3ni n5ammnou chnowa le lieu. Numéro trois : nthabtouha b démonstration. W 3andna zouz tor9 : les propriétés des configurations, walla application du plan kif la translation.

توّا les problèmes de lieux . كي point يتحرّك في الـ w point ، figure آخر مربوط بيه ، نسألو : الـ point هذا ، وين يتحرّك ؟ الـ ligne اللي يتحرّك عليها نسمّيوها le lieu géométrique . نخدمو على un numéro : trois étapes . نرسمو w figure نحطّو برشة numéro deux . positions : نعملو conjecture ، يعني نخمّنو شنوّة le lieu . عندنا زوز طرق démonstration . نثبتوها بـ w numéro trois : les propriétés des configurations ، ولا application du plan كيف la translation .

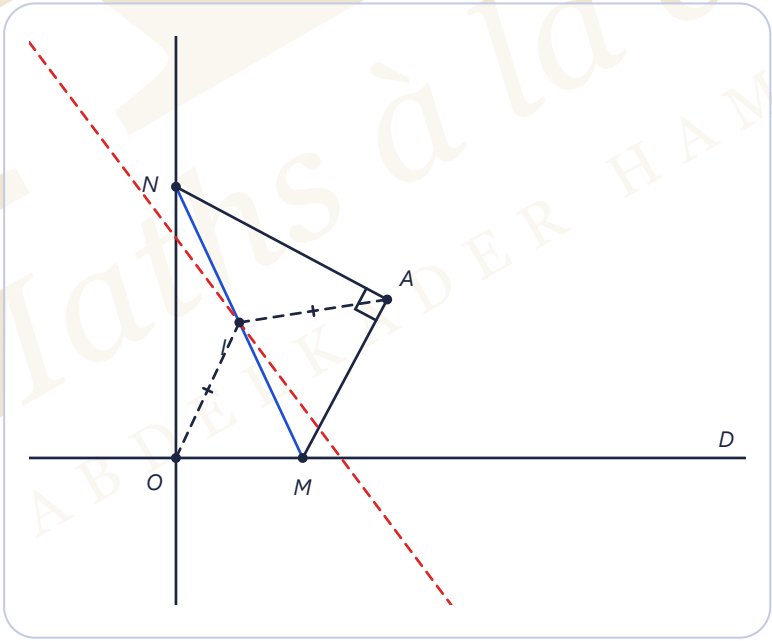
Passons aux problèmes de lieux. Quand un point se déplace dans la figure, et qu'un autre point lui est lié, on se demande : sur quelle ligne ce point se déplace-t-il ? Cette ligne s'appelle le lieu géométrique. On travaille en trois étapes. Numéro un : on fait une figure, et on place plusieurs positions. Numéro deux : on émet une conjecture, c'est-à-dire qu'on devine quel est le lieu. Numéro trois : on la prouve par une démonstration. Et on a deux moyens : les propriétés des configurations, ou une application du plan comme la translation.

Quand un point varie, la ligne qu'il décrit est appelée l'**ensemble** de ces points, ou le **lieu géométrique** de ces points, ou tout simplement leur **lieu**.

On cherche un lieu en trois étapes :

1. **Phase expérimentale** : on fait une figure, on repère les éléments fixes et les éléments variables, on place plusieurs positions du point.
2. **Conjecture** : on émet une conjecture sur la ligne décrite.
3. **Démonstration** de la conjecture, par les propriétés des configurations ou par une application du plan.

Un lieu par les configurations. On considère deux droites D et D' perpendiculaires en un point O et un point A qui n'est ni sur D ni sur D'. Soit M un point variable sur D. La perpendiculaire à (AM) en A coupe D' en N, et I est le milieu de $[MN]$. Le point I varie sur la **médiatrice** du segment $[OA]$.



I est à égale distance de O et de A.

Deux droites perpendiculaires en O : D horizontale, D' verticale. Un point A en haut à droite de O. Un point M sur D et un point N sur D', tels que l'angle MAN soit droit. Le point I est le milieu du segment [MN]. Les segments [IO] et [IA] ont la même longueur. Une droite rouge en pointillés, la médiatrice de [OA], passe par I.

$$IO = IA = \frac{MN}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

On considère deux droites D et D' perpendiculaires en un point O et un point A qui n'est ni sur D ni sur D'. Soit M un point variable sur D. La perpendiculaire à la droite (AM) en A coupe la droite D' en N, et I est le milieu du segment $[MN]$. Montrer que I varie sur une ligne que l'on précisera.

Fixe ou variable — Les droites D et D' et les points O et A sont fixes. Les points M, N et I sont variables. En plaçant plusieurs positions de I, on conjecture qu'il se déplace sur une droite.

Le triangle MAN — Le triangle MAN est rectangle en A, et I est le milieu de son hypoténuse $[MN]$: I est le centre de son cercle circonscrit.

$$IA = \frac{MN}{2}$$

Le triangle MON — M est sur D et N est sur D' : le triangle MON est rectangle en O, et I est encore le milieu de l'hypoténuse.

$$IO = \frac{MN}{2}$$

Conclure — I est à égale distance des deux points fixes O et A.

$$IO = IA$$

> I varie sur la médiatrice de $[OA]$

À ne pas faire : Trois positions de I sont alignées sur ma figure, donc le lieu est une droite — Une figure donne une conjecture ; il reste à la démontrer. Quelques positions ne prouvent rien pour toutes les autres : seule la démonstration vaut pour chaque position de M.

---

21. APPLICATION

Un lieu par une translation

CE QU'IL DIT

Nchoufou lieu b la translation. A w B zouz points, w D droite tet3adda men A w ma tet3addech men B. M yet7arrek 3la D, w N houwa el point elli ABNM parallélogramme. Ya3ni le vecteur MN égale le vecteur AB : N houwa l'image de M par la translation de vecteur AB. El 9a3da : le lieu mta3 l'image, houwa l'image mta3 le lieu. M yet7arrek 3la D, donc N yet7arrek 3la l'image de D : la parallèle à D elli tet3adda men B. W ken M yet7arrek 3la cercle de centre A, N yet7arrek 3la cercle de centre B, b nafs le rayon.

نشوفو lieu بـ A w B la translation . A w B زوز droite D ، w points تتعدّى من A w ما تتعدّاش من M . B يتحرّك على D ، w N هو الـ point اللي A B N M parallélogramme . A B : N يعني le vecteur A B égale le vecteur M N هو l'image ، هو l'image متاع le lieu : القاعدة . de M par la translation de vecteur A B يتحرّك le lieu . M متاع l'image

l'image de D : la parallèle à D يتحرّك على D ، donc N على
cercle de يتحرّك على M كان B . w اللي تتعدّى من
. le rayon بنفس ، cercle de centre B يتحرّك على centre A ، N

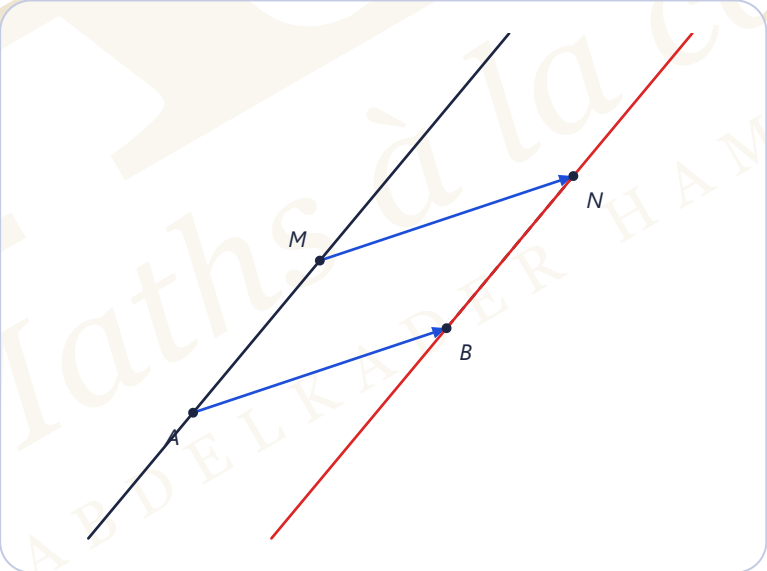
Voyons un lieu par la translation. A et B sont deux points, et D est une droite qui passe par A et ne passe pas par B. M se déplace sur D, et N est le point tel que A B N M est un parallélogramme. Donc le vecteur M N égale le vecteur A B : N est l'image de M par la translation de vecteur A B. La règle : le lieu de l'image est l'image du lieu. M se déplace sur D, donc N se déplace sur l'image de D : la parallèle à D qui passe par B. Et si M se déplace sur un cercle de centre A, N se déplace sur un cercle de centre B, de même rayon.

Soient A et B deux points donnés et D une droite passant par A et ne passant pas par B. Soit M un point variable sur la droite D, distinct de A. On désigne par N le point tel que $ABNM$ soit un parallélogramme.

$ABNM$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$. Le point N est donc l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le lieu de l'image est l'image du lieu.

- Quand M varie sur D, le point N varie sur l'image de D : la droite parallèle à D passant par B. Comme M est distinct de A, le point N est distinct de B.
- Quand M varie sur un cercle fixe de centre A et de rayon 3, le point N varie sur le cercle de centre B et de rayon 3.



Quand M décrit D, N décrit la parallèle à D passant par B.

Deux points A et B. Une droite D passe par A ; un point M est sur cette droite. Le point N est tel que ABNM est un parallélogramme, tracé en pointillés. Les vecteurs AB et MN, en bleu, sont égaux. Une droite rouge, parallèle à D, passe par B et par N : c'est le lieu de N.

N EST L'IMAGE DE M

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Deux droites D_1 et D_2 sont sécantes en un point O, et A est un point de D_1 distinct de O. Soit M un point variable sur D_2, et N le point tel que le vecteur $\overrightarrow{AN}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{OM}$. Déterminer l'ensemble des points N lorsque M varie sur D_2.

Le vecteur MN — Par Chasles, on passe par O puis par A, et on remplace le vecteur $\overrightarrow{AN}$ par le vecteur $\overrightarrow{OM}$: les deux vecteurs opposés s'annulent.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}$$

La translation — Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est fixe : N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Le lieu — Quand M décrit la droite D_2, son image décrit l'image de D_2 : la droite parallèle à D_2 qui passe par l'image de O, c'est-à-dire par A.

N décrit la parallèle à D_2 passant par A

N décrit la parallèle à D_2 passant par A

À ne pas faire : Quand M décrit la droite D, le point N décrit aussi la droite D — N décrit l'image de D : la parallèle à D passant par B. N n'est pas M, c'est son image. Le lieu de l'image est l'image du lieu.

22. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : le lieu de l'orthocentre

CE QU'IL DIT

Problème bech nemchiw ab3ed. A w B zouz points fixes 3la cercle, w M yet7arrek 3la le cercle. H houwa l'orthocentre du triangle AMB. N7ebbou na3rfou le lieu de H. Ne5dhou D, el point diamétralement opposé à A. El triangle ABD rectangle en B, w el triangle AMD rectangle en M. Nal9aw elli MHBD parallélogramme, donc le vecteur MH égale le vecteur DB. W le vecteur DB fixe : H houwa l'image de M par une translation. M yet7arrek 3la cercle, donc H yet7arrek 3la cercle 3andou nafs le rayon.

باش نمشيو أبعد . problème A w B زوز points fixes على M ، w cercle يتحرّك على H . هو le cercle
. l'orthocentre du triangle A M B نحبّو نعرفو H . le lieu de ناخذو D ، الـ A . point diamétralement opposé à
M H B D نلقاو اللي . triangle A M D rectangle en M الـ triangle A B D rectangle en B ، w الـ
l'image de M هو parallélogramme ، donc le vecteur M H égale le vecteur D B . w le vecteur D B fixe : H
. le rayon عندو نفس cercle على يتحرّك cercle ، donc H على يتحرّك par une translation . M

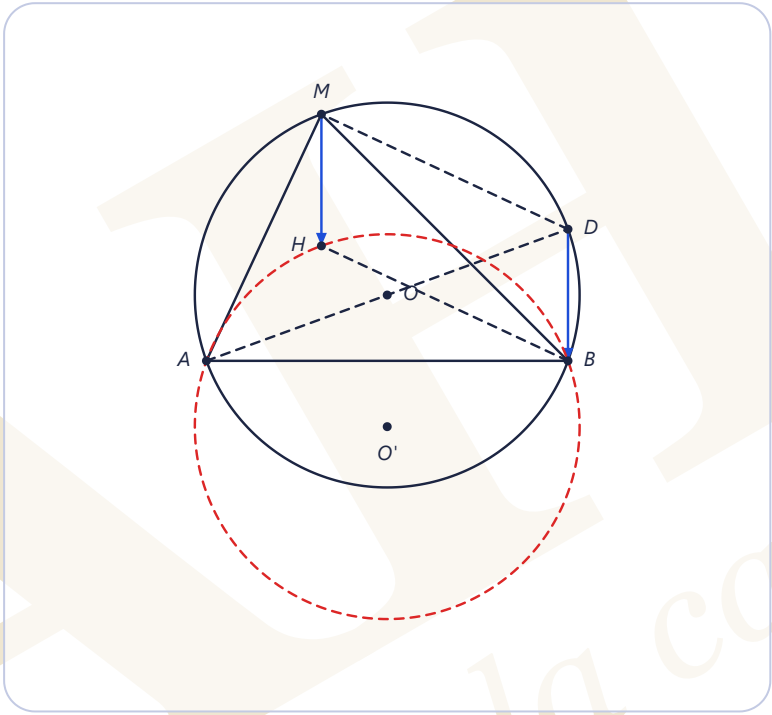
Un problème pour aller plus loin. A et B sont deux points fixes d'un cercle, et M se déplace sur le cercle. H est l'orthocentre du triangle A M B. On veut connaître le lieu de H. Prenons D, le point diamétralement opposé à A. Le triangle A B D est rectangle en B, et le triangle A M D est rectangle en M. On trouve que M H B D est un parallélogramme, donc le vecteur M H égale le vecteur D B. Et le vecteur D B est fixe : H est l'image de M par une translation. M se déplace sur un cercle, donc H se déplace sur un cercle de même rayon.

Soient A et B deux points fixes d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et M un point de $\mathscr{C}$, distinct de A et de B. Soit H l'orthocentre du triangle AMB, et D le point du cercle $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à

A.

Le quadrilatère $MHBD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{DB}$: le point H est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$, qui est un vecteur fixe.

Lorsque M varie sur le cercle $\mathscr{C}$ privé de A et de B, le point H varie sur le cercle image de $\mathscr{C}$ par cette translation, privé des images de A et de B : un cercle de même rayon, dont le centre O' est l'image de O.



H est l'image de M par la translation de vecteur DB.

Un cercle de centre O. Deux points A et B sur le cercle, à la même hauteur, A à gauche et B à droite ; le point D, diamétralement opposé à A, est au-dessus de B. Un point M en haut du cercle, et l'orthocentre H du triangle AMB, juste en dessous de M. Les vecteurs DB et MH, en bleu, sont égaux et verticaux. En rouge pointillé, le cercle image, de même rayon et de centre O', situé sous O : il passe par H.

UN VECTEUR FIXE

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{DB}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient A et B deux points fixes d'un cercle (C) et M un point de (C), distinct de A et de B. Soit H l'orthocentre du triangle AMB, et D le point de (C) diamétralement opposé à A. On suppose que M est distinct de D. Quelle est la nature du quadrilatère $MHBD$? En déduire le lieu des points H lorsque M varie sur le cercle.

Deux droites parallèles — Le segment $[AD]$ est un diamètre : le triangle ABD est rectangle en B, donc la droite (DB) est perpendiculaire à la droite (AB). La hauteur (MH) est elle aussi perpendiculaire à (AB) : les droites (DB) et (MH) sont parallèles.

Deux autres — De même, le triangle AMD est rectangle en M : la droite (DM) est perpendiculaire à la droite (AM). La hauteur (BH) aussi : les droites (DM) et (BH) sont parallèles.

Le parallélogramme — Les côtés opposés de $MHBD$ sont parallèles deux à deux : c'est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{DB}$$

Le lieu — D et B sont fixes : H est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Quand M décrit le cercle, privé de A et de B, le point H décrit le cercle image, privé des images de A et de B : même rayon, et pour centre l'image du centre.

> H décrit l'image du cercle par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$

23. MÉTHODE

Problèmes de construction

CE QU'IL DIT

Tawa les problèmes de construction. Ne5dmouhom 3la zouz étapes. L'analyse : n9oulou el problème ma7loul, nrasmou figure, w nlawwjou fiha 3la les propriétés elli t3awenna. Ba3d la synthèse : narj3ou lel données, nrasmou el points bel propriétés hedhoukom, w nthabtou elli el figure s7i7a. Mithel : 3andna trois points I, J w K, w n7ebbou triangle ABC, ykounou fih I, J w K houma les milieux mta3 les côtés. Fi l'analyse, la droite des milieux ta3tina : la droite AB parallèle à la droite IJ, la droite AC parallèle à la droite IK, w la droite BC parallèle à la droite JK. Donc fi la synthèse nrasmou trois parallèles : wa7da men K, wa7da men J w wa7da men I. Win yetle9aw, nal9aw A, B w C.

étapes : نقولو الـ problème محلول ، نرسمو l'analyse . نخدموهم على زوز les problèmes de construction توّا . la synthèse : نرجعو للـ données ، نرسمو الـ points اللي تعاونّا . بعد les propriétés نلوّجو فيها على figure ، w مثال : عندنا صحيحة figure نثبتو اللي الـ w ، propriétés بالـ هاذوكم trois points I ، J w K ، w نحبّو triangle A B ، C يكونو فيه I ، J w K هوما les milieux متاع les côtés . في la droite des milieux ، l'analyse تعطينا : la droite A B parallèle à la droite I J ، la droite A C parallèle à la droite I K ، w la droite B C parallèle à la droite J K . donc في la synthèse نرسمو trois parallèles : وحدة من K ، وحدة من J w وحدة من I . وين يتلاقاو ، نلقاو A ، B w C .

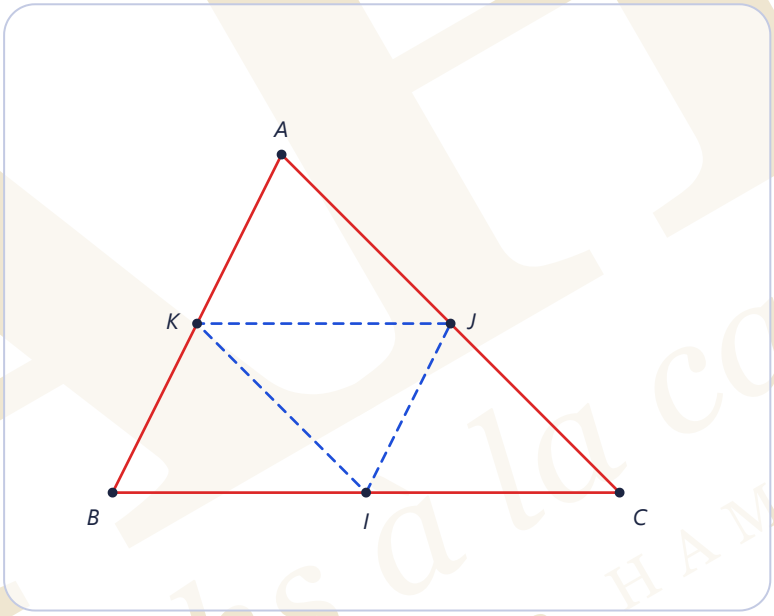
Passons aux problèmes de construction. On les traite en deux étapes. L'analyse : on suppose le problème résolu, on fait une figure, et on y cherche les propriétés qui nous aident. Puis la synthèse : on revient aux données, on construit les points avec ces propriétés, et on vérifie que la figure est correcte. Un exemple : on a trois points I, J et K, et on veut un triangle A B C dont les milieux des côtés sont I, J et K. Dans l'analyse, la droite des milieux nous donne : la droite A B est parallèle à la droite I J, la droite A C est parallèle à la droite I K, et la droite B C est parallèle à la droite J K. Donc dans la synthèse, on trace trois parallèles : une par K, une par J et une par I. Là où elles se coupent, on trouve A, B et C.

Un problème de construction se traite en deux étapes.

1. **Analyse**, à partir d'une figure d'étude : on suppose le problème résolu, c'est-à-dire que la construction est effectivement réalisée. On fait une figure « à l'envers », et on y cherche les propriétés qui permettent de retrouver les points inconnus.
2. **Synthèse** et retour aux données initiales : on reprend les données, on construit les points grâce aux propriétés trouvées, et on vérifie que la figure obtenue répond à la question.

Par les propriétés des configurations. Soient I, J et K trois points non alignés. On veut construire un triangle ABC dont les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ sont les points I, J et K.

Sur la figure d'étude, la droite des milieux donne trois parallélismes : (AB) est parallèle à (IJ), (AC) est parallèle à (IK) et (BC) est parallèle à (JK). On trace donc la parallèle à (IJ) passant par K, la parallèle à (IK) passant par J et la parallèle à (JK) passant par I : elles se coupent deux à deux en A, B et C.



Chaque côté de ABC est parallèle à un côté du triangle IJK.

Trois points I, J et K non alignés : I en bas, J à droite et K à gauche, joints par un triangle en pointillés bleus. Par K passe la parallèle à (IJ), par J la parallèle à (IK) et par I la parallèle à (JK), en rouge : ces trois droites dessinent le triangle ABC, avec A en haut, B en bas à gauche et C en bas à droite. I est le milieu de [BC], J celui de [AC] et K celui de [AB].

LA DROITE DES MILIEUX

$$(AB) \parallel (IJ) \quad ; \quad (AC) \parallel (IK) \quad ; \quad (BC) \parallel (JK)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soient I, J et K trois points non alignés. Construire un triangle ABC tel que I soit le milieu du côté $[BC]$, J celui du côté $[AC]$ et K celui du côté $[AB]$.

Analyse — On suppose le problème résolu : on trace d'abord un triangle ABC, puis on place les milieux I, J et K de ses côtés. Dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième : la droite (AB) est parallèle à la droite (IJ), la droite (AC) à la droite (IK), et la droite (BC) à la droite (JK).

$(AB) \parallel (IJ) \quad ; \quad (AC) \parallel (IK) \quad ; \quad (BC) \parallel (JK)$

Synthèse — On revient aux données : les trois points I, J et K. On trace la parallèle à (IJ) passant par K et la parallèle à (IK) passant par J. Les droites (IJ) et (IK) sont sécantes, donc ces deux parallèles le sont aussi : elles se coupent en A.

Achever — On trace la parallèle à (JK) passant par I : elle coupe la première droite en B et la deuxième en C.

Vérifier — Les quadrilatères $AKIJ$ et $KBIJ$ ont leurs côtés opposés parallèles : ce sont des parallélogrammes. Le vecteur $\overrightarrow{AK}$ et le vecteur $\overrightarrow{KB}$ sont donc tous deux égaux au vecteur $\overrightarrow{JI}$: K est le milieu de $[AB]$. On montre de même que I et J sont les milieux des deux autres côtés.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{KB}$

les trois parallèles se coupent en A, B et C

24. APPLICATION

Une construction par une translation

CE QU'IL DIT

Nchoufou construction b la translation. 3andna zouz droites sécantes D un w D deux, w zouz points A w B. N7ebbou M 3la D un w N 3la D deux, bech ABMN ykoun parallélogramme. Fi l'analyse nal9aw le vecteur MN égale le vecteur BA : N houwa l'image de M par la translation de vecteur BA. Donc N 3la l'image de D un, w 3la D deux : houwa l'intersection mte3hom. Fi la synthèse : nrasmou l'image de D un, nal9aw N, w ba3d M houwa l'antécédent de N.

نحبّو . points A w B زوز droites sécantes D un w D deux ، w عندنا زوز . la translation بـ construction نشوفو le vecteur M N نلقاو l'analyse في . parallélogramme يكون A B M N باش ، D deux على D un w N على M l'image de D un على l'image de M par la translation de vecteur B A . donc N هو égale le vecteur B A : N هو M بعد N ، w نلقاو ، l'image de D un نرسمو : la synthèse في . متاعهم l'intersection هو : D deux على ، w . l'antécédent de N

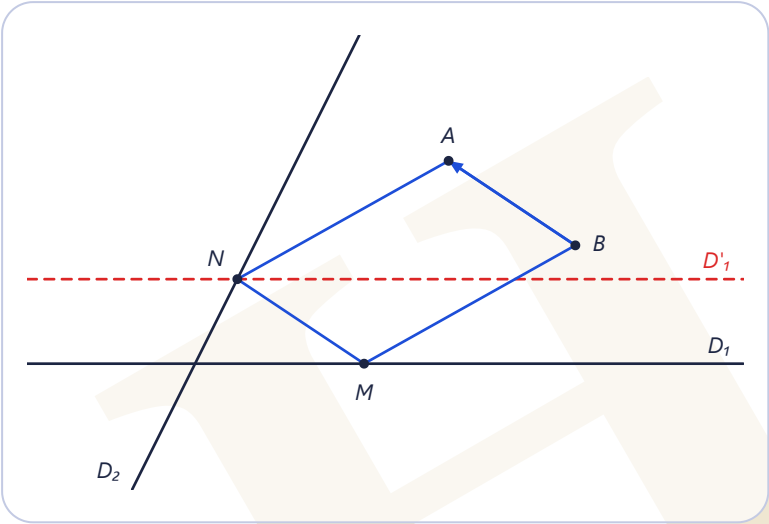
Voyons une construction par la translation. On a deux droites sécantes D un et D deux, et deux points A et B. On veut M sur D un et N sur D deux, pour que A B M N soit un parallélogramme. Dans l'analyse, on trouve que le vecteur M N égale le vecteur B A : N est l'image de M par la translation de vecteur B A. Donc N est sur l'image de D un, et sur D deux : c'est leur intersection. Dans la synthèse : on trace l'image de D un, on trouve N, puis M est l'antécédent de N.

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes, et A et B deux points distincts qui ne sont ni sur D_1 ni sur D_2. On veut construire un point M de D_1 et un point N de D_2 tels que $ABMN$ soit un parallélogramme.

Analyse. Si $ABMN$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$: N est l'image de M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{BA}$. Comme M est sur D_1, le point N est sur la droite D_1', image de D_1

par t ; il est aussi sur D_2. Donc N est le point d'intersection de D'_1 et de D_2.

Synthèse. On construit la droite D'_1 : elle coupe D_2 en un point N. Le point M est alors l'antécédent de N par t : il est sur D_1, et $ABMN$ est un parallélogramme.



N est à l'intersection de D_2 et de D'_1, image de D_1.

Deux droites sécantes : D1 horizontale et D2 oblique, qui monte vers la droite. Deux points A et B à droite, hors des deux droites, B plus bas et plus à droite que A. En pointillés rouges, la droite D'1, parallèle à D1, image de D1 par la translation de vecteur BA ; elle coupe D2 en N. Le point M est sur D1, et ABMN est un parallélogramme tracé en bleu.

ABMN PARALLÉLOGRAMME

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Deux droites D_1 et D_2 sont sécantes, et A et B sont deux points distincts qui ne sont ni sur D_1 ni sur D_2. Construire un point M de D_1 et un point N de D_2 tels que le quadrilatère $ABMN$ soit un parallélogramme.

Analyse — On suppose le problème résolu. $ABMN$ est un parallélogramme : en lisant les sommets dans l'ordre, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$$

L'application — N est l'image de M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{BA}$. Comme M est sur D_1, le point N est sur D'_1, image de D_1 par t. Il est aussi sur D_2.

Synthèse — On construit D'_1 : c'est la parallèle à D_1 passant par l'image d'un point de D_1. La droite D_2 coupe D_1, donc elle coupe aussi sa parallèle D'_1 : on note N leur point d'intersection.

Le point M — On construit le point M tel que le vecteur $\overrightarrow{NM}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. C'est l'antécédent de N par t : il est sur D_1. Le quadrilatère $ABMN$ est bien un parallélogramme, et la solution est unique.

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB}$$

N est le point d'intersection de D'_1 et de D_2

À ne pas faire : $ABMN$ est un parallélogramme, donc N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ — N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$. Dans $ABMN$, le côté opposé à $[AB]$ est $[NM]$: le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{NM}$, donc le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.

---

25. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : le pont

CE QU'IL DIT

Problème e5er bech nemchiw ab3ed : le pont. D w D prime houma les berges mta3 rivière, w houma parallèles. A w B zouz villages, koll wa7ed men jiha. N7ebbou nebniw pont MN, perpendiculaire aux berges, bech le trajet men A l B ykoun el a9sar. El fekra : le vecteur MN dima houwa bidou, win ma n7ottou le pont. Ne5dhou A prime, l'image de A par la translation de vecteur MN. Wa9tha AM égale A prime N. Donc le trajet ywalli A prime N plus NB, plus MN elli ma yetbaddelch. W a9sar tri9 men A prime l B houwa la ligne droite : N houwa l'intersection mta3 la droite A prime B m3a la berge D prime.

problème آخر باش نمشيو أبعد : D w D prime le pont هوما les berges متاع rivière ، w هوما parallèles . A
B زوز villages ، كل واحد من جيهة . نحبّو نبنيو perpendiculaire aux berges ، pont M N ، باش le trajet من A لـ B
يكون الأقصر . الفكرة : le vecteur M N ديما هو بيدو ، وين ما نحطّو le pont . ناخذو A prime ، l'image de A par
A M égale A prime N . donc le trajet وقتها . la translation de vecteur M N يولّي plus ، A prime N plus N B
اللي ما يتبدّلش M N . w أقصر طريق من A prime لـ B هو la ligne droite : N هو l'intersection متاع la droite A
B prime مع la berge D prime .

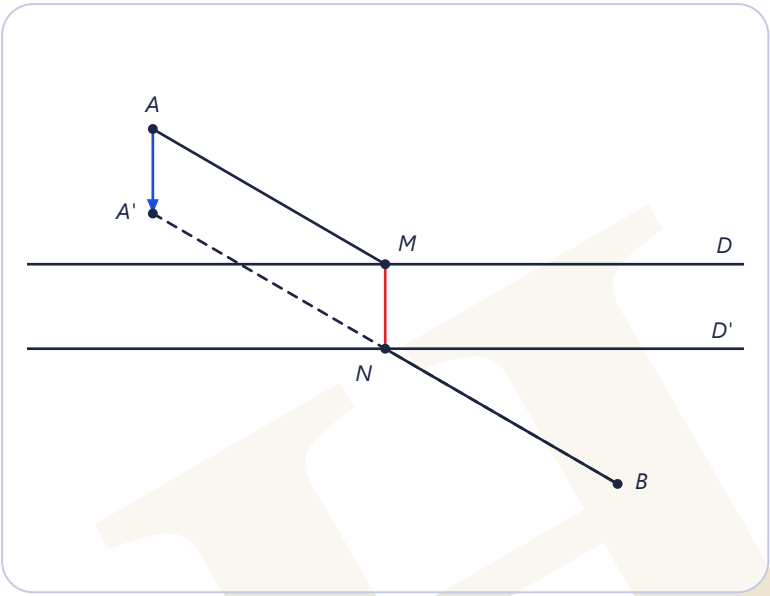
Un autre problème pour aller plus loin : le pont. D et D prime sont les berges d'une rivière, et elles sont parallèles. A et B sont deux villages, chacun d'un côté. On veut construire un pont M N, perpendiculaire aux berges, pour que le trajet de A à B soit le plus court. L'idée : le vecteur M N est toujours le même, où que l'on place le pont. Prenons A prime, l'image de A par la translation de vecteur M N. Alors A M égale A prime N. Donc le trajet devient A prime N plus N B, plus M N qui ne change pas. Et le plus court chemin de A prime à B est la ligne droite : N est l'intersection de la droite A prime B avec la berge D prime.

Les droites D et D' représentent les berges, parallèles, d'une rivière. Deux villages A et B sont de part et d'autre de la rivière. Où faut-il construire le pont $[MN]$, perpendiculaire aux berges, avec M sur D et N sur D', pour que le trajet du village A au village B soit le plus court possible ?

- Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est un vecteur **constant** : il est perpendiculaire aux berges et sa longueur est la largeur de la rivière.
- Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$. Alors $AMNA'$ est un parallélogramme, donc $AM = A'N$.

Le trajet mesure $AM + MN + NB = A'N + NB + MN$. Comme MN est constant, le trajet est le plus court quand $A'N + NB$ est le plus petit, c'est-à-dire quand N est sur le segment

$[A'B]$: N est le point d'intersection de la droite $(A'B)$ et de la berge D'.



N est à l'intersection de (A'B) et de la berge D'.

Deux droites horizontales parallèles, les berges : D en haut et D' en dessous. Le village A est au-dessus de D, à gauche ; le village B est sous D', à droite. Le point A' est juste sous A : le vecteur AA', en bleu, est perpendiculaire aux berges et il a la largeur de la rivière. Le segment en pointillés [A'B] coupe la berge D' au point N. Le pont [MN], en rouge, est vertical, avec M sur D. Le trajet A, M, N, B est tracé.

$$AM + MN + NB = A'N + NB + MN$$

EXEMPLE TRAITÉ

Les droites D et D' sont les berges parallèles d'une rivière, et A et B sont deux villages situés de part et d'autre. On veut construire un pont $[MN]$ perpendiculaire aux berges, avec M sur D et N sur D', pour que le trajet de A à B soit le plus court possible. Où placer le point N ?

Un vecteur constant — Quel que soit l'endroit du pont, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est le même : il est perpendiculaire aux berges, et sa longueur est la largeur de la rivière.

Remplacer AM — On note A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux : $AMNA'$ est un parallélogramme.

$AM = A'N$

Le plus court — La longueur MN ne change pas. Il reste à rendre la somme de $A'N$ et de NB la plus petite possible : le plus court chemin de A' à B est la ligne droite.

$A'N + NB \geq A'B$

Construire — On construit A', on trace la droite $(A'B)$: elle coupe la berge D' au point N cherché. Le point M est en face, sur D.

N est le point d'intersection de $(A'B)$ et de D'

26. REMARQUE

Pavages

CE QU'IL DIT

Kelma 3al culture : le pavage du plan. Paver le plan ma3neha nghattiweh b formes, men ghir fragh w men ghir ma yerkbou 3la b3adhhom. Hedha elli ya3mlou el carreleur ki yrakkeb ej-jliz. Najjmou nghattiw le plan b carrés, b triangles équilatéraux, walla b hexagones réguliers. W 7awl koll sommet, la somme des angles hiya trois cent soixante degrés. El fann hedha 9dim barcha : nal9aweh fi Rome, Byzance, Grenade w Séville, w fi la mosaïque arabo-musulmane. W fi le pavage b carrés walla b hexagones réguliers, bech net3addew men pavé lelli b janbou, nzal9ouh : hedhi translation. Amma b triangles équilatéraux, el pavé elli b janbou dayer bel 3aks : lezmou demi-tour, mouch translation.

كلمة على الـ culture : le pavage du plan . paver le plan معناها نغطّيوه بـ formes ، من غير فراغ w من غير ما يركبو على بعضهم . هذا اللي يعملو الـ carreleur كي يركّب الجليز . نجّمو نغطّيو le plan بـ carrés ، بـ triangles équilatéraux ، و بـ hexagones réguliers . حول كل la somme des angles ، sommet هي trois cent soixante degrés . الفنّ هذا قديم برشة : نلقاوه في Grenade w Séville ، w في Byzance ، Rome في la mosaïque arabo-musulmane . w في le pavage بـ carrés ولا بـ hexagones réguliers ، باش نتعدّاو من pavé للّي بجنبو ، نزلقوه : هذي translation . أمّا بـ triangles équilatéraux ، الـ pavé اللي بجنبو داير بالعكس : لازمو demi-tour ، موش translation .

Un mot de culture : le pavage du plan. Paver le plan, c'est le couvrir par des formes, sans vide et sans qu'elles se chevauchent. C'est ce que fait le carreleur quand il pose du carrelage. On peut couvrir le plan avec des carrés, des triangles équilatéraux, ou des hexagones réguliers. Et autour de chaque sommet, la somme des angles est trois cent soixante degrés. Cet art est très ancien : on le trouve à Rome, Byzance, Grenade et Séville, et dans la mosaïque de la civilisation arabo-musulmane. Et dans le pavage par des carrés ou par des hexagones réguliers, pour passer d'un pavé à son voisin, on le fait glisser : c'est une translation. Avec des triangles équilatéraux, le pavé voisin est retourné : il faut un demi-tour, et non une translation.

Paver le plan, c'est le couvrir par des formes, sans espace (sans trou) et sans chevauchement. C'est ce que fait un carreleur.

On peut commencer par paver le plan avec des polygones réguliers : c'est le pavage régulier. On peut paver le plan à l'aide d'un carré, d'un triangle équilatéral, d'un hexagone régulier. Autour de chaque sommet du pavage, la somme des angles des polygones est à chaque fois $360°$.

L'art de paver une surface plane, comme le sol ou les murs d'un palais, est très ancien et se pratiquait à Rome, Byzance, Grenade ou Séville. Né en Grèce, l'art de la mosaïque s'est répandu sur tout le pourtour de la Méditerranée par l'intermédiaire des Romains. Repris par les civilisations byzantine et arabo-musulmane, il a connu son apogée dans le sud de l'Espagne et au Maroc.

Dans le pavage par des carrés ou par des hexagones réguliers, on passe d'un pavé à ses voisins en le faisant glisser : c'est une translation. Avec des triangles équilatéraux, le pavé voisin est retourné : on passe de l'un à l'autre par un demi-tour, et non par une translation.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

1. $t_{\vec{u}}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

   > T indice u de M égale M prime, ma3neha le vecteur MM prime égale u.
   > *T indice u de M égale M prime, cela signifie que le vecteur M M prime égale u.*

2. Propriété caractéristique : une application t est une translation si, et seulement si, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N, d'images M' et N'.

   > La propriété caractéristique : application t hiya translation, ki le vecteur M prime N prime égale le vecteur MN, l koll zouz points M w N.
   > *La propriété caractéristique : une application t est une translation quand le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N, pour tous points M et N.*

3. Les images, par une translation, de points alignés sont des points alignés.

   > Les images mta3 points alignés, houma points alignés.
   > *Les images de points alignés sont des points alignés.*

4. L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle ; l'image d'un segment est un segment qui lui est isométrique ; l'image d'une demi-droite est une demi-droite ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

   > L'image d'une droite hiya droite parallèle liha ; l'image d'un segment hiya segment 3andou nafs la longueur ; l'image d'une demi-droite hiya demi-droite ; w l'image d'un cercle hiya cercle 3andou nafs le rayon.
   > *L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle ; l'image d'un segment est un segment de même longueur ; l'image d'une demi-droite est une demi-droite ; et l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.*

5. La translation conserve le milieu et le barycentre.

   > La translation t7afedh 3la le milieu w 3la le barycentre.
   > *La translation conserve le milieu et le barycentre.*

6. Les images de deux droites parallèles sont parallèles ; les images de deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires ; si une droite et un cercle sont tangents, leurs images sont tangentes.

   > Zouz droites parallèles yo93dou parallèles, zouz droites perpendiculaires yo93dou perpendiculaires, w droite tangente à un cercle to93ed tangente.
   > *Deux droites parallèles restent parallèles, deux droites perpendiculaires restent perpendiculaires, et une droite tangente à un cercle reste tangente.*

7. Une translation conserve les distances et les angles ; l'image d'un polygone est un polygone qui lui est superposable.

> La translation t7afedh 3la les distances w 3la les angles, w l'image mta3 polygone hiya polygone superposable lih.
> *La translation conserve les distances et les angles, et l'image d'un polygone est un polygone qui lui est superposable.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna el chapitre. Tfakker : la translation de vecteur u teb3ath M l M prime, ki le vecteur MM prime égale u. W la propriété caractéristique : le vecteur M prime N prime égale le vecteur MN. La translation ma tbaddel chay fel figure : les distances, les angles, l'alignement, le milieu w le parallélisme el koll yo93dou kima houma. La droite twalli droite parallèle, w le cercle ywalli cercle 3andou nafs le rayon. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا الـ chapitre . تفكّر : la translation de vecteur u تبعث M لـ M prime ، كي le vecteur M M prime égale u . w la propriété caractéristique : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N . la translation ما تبدّل شي في الـ le parallélisme ، le milieu ، l'alignement ، les angles ، les distances : figure الكل يقعدو . exercices لـلـ يالله . le rayon نفس عندو cercle يولّي droite parallèle ، w le cercle تولّي la droite . كيما هوما

Voilà, nous avons terminé ce chapitre. Retiens : la translation de vecteur u envoie M sur M prime quand le vecteur M M prime égale u. Et la propriété caractéristique : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N. La translation ne change rien à la figure : les distances, les angles, l'alignement, le milieu et le parallélisme restent tous tels quels. Une droite devient une droite parallèle, et un cercle devient un cercle de même rayon. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · TRANSLATION DE VECTEUR U

c'est quoi une translation | chnowa la translation | translation ma3neha chnowa | définition de la translation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

CE QU'IL RÉPOND

La translation de vecteur $\vec{u}$ hiya l'application elli teb3ath koll point M l point M', b7ith $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Ya3ni el points el koll yet7arrkou b nafs el vecteur : nafs la direction, nafs le sens w nafs la longueur. El figure tezle9, ma tdourch w ma tekberch.

la نفس le sens w نفس ، la direction نفس : vecteur الـ بنفس يتحرّكو الكل points الـ يعني . M prime égale u le vecteur M بحيث ، point M prime لـ point M كل تبعث اللي l'application هي la translation de vecteur u

. longueur الـ figure تزلق ، ما تدورش w ما تكبرش .

La translation de vecteur u est l'application qui envoie chaque point M sur le point M prime tel que le vecteur M M prime égale u. Autrement dit, tous les points se déplacent du même vecteur : même direction, même sens et même longueur. La figure glisse, elle ne tourne pas et elle ne grandit pas.

QUESTION 2 · APPLICATION DU PLAN

c'est quoi une application du plan | application du plan chnowa | définition d'une application | application ma3neha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$f : M \longmapsto M'$$

CE QU'IL RÉPOND

Application du plan dans lui-même, ma3neha koll point M na3tiweh point wa7ed bark M'. M' houwa l'image de M. El mohemm houwa « wa7ed bark » : ken point ynajjem ykoun 3andou zouz images, hedhi mouch application. La symétrie centrale, la symétrie orthogonale, le quart de tour w la translation el koll applications du plan.

application du plan dans lui-même ، معناها كل point M نعطيوه point واحد برك M prime . M prime هو l'image de M . المهمّ هو « واحد برك » : كان point ينجّم يكون عندو زوز images ، هذي موش la application . applications du plan الكل symétrie centrale ، la symétrie orthogonale ، le quart de tour w la translation .

Une application du plan dans lui-même, c'est associer à chaque point M un seul point M prime. M prime est l'image de M. L'important, c'est « un seul » : si un point pouvait avoir deux images, ce ne serait pas une application. La symétrie centrale, la symétrie orthogonale, le quart de tour et la translation sont toutes des applications du plan.

QUESTION 3 · IMAGE ET ANTÉCÉDENT

c'est quoi un antécédent | différence entre image et antécédent | antecedent chnowa | kifech nal9a l'antécédent

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken $t(M) = M'$, M' houwa l'image de M, w M houwa l'antécédent de M'. L'image hiya point d'arrivée, w l'antécédent houwa point de départ. Bech tal9a l'antécédent fi translation de vecteur $\vec{u}$, erja3 bel vecteur : $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$.

كان M prime ، M prime هو t de M égale M prime ، w M هو l'image de M ، l'image هو l'antécédent de M prime . point de départ هو point d'arrivée ، w l'antécédent باش تلقى l'antécédent في translation de vecteur u ، ارجع بالـ u moins égale M prime M le vecteur : vecteur .

Si t de M égale M prime, alors M prime est l'image de M, et M est l'antécédent de M prime. L'image est le point d'arrivée, et l'antécédent est le point de départ. Pour trouver l'antécédent dans une translation de vecteur u, reviens en arrière avec le vecteur : le vecteur M prime M égale moins u.

QUESTION 4 · TRANSLATION DE VECTEUR U

comment construire l'image d'un point | kifech nrasem l'image mta3 point | construire le point M' par une translation | tracer l'image d'un point

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

Bech tarsem l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, lezem $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Ya3ni $ABM'M$ parallélogramme. Arsem men M la parallèle à la droite (AB), w 7ott 3liha M', fi nafs le sens, b7ith $MM' = AB$. W bel compas : 5oudh la longueur AB men M, w la longueur AM men B. Ez-zouz arcs yetle9aw fi zouz points : 5oudh elli jey mel jiha lo5ra mta3 la droite (BM), mouch men jihet A.

باش ترسم l'image de M par la translation de vecteur A B ، لازم le vecteur M M prime égale le vecteur A B . يعني A B M prime M parallélogramme . ارسم من M la parallèle à la droite A B ، w حطّ عليها M prime ، في نفس le sens ، بحيث M M prime égale A B . w بالـ compas : خوذ la longueur A B من la longueur M ، w موش من la droite B M ، الزوز arcs يتلاقاو في زوز points : خوذ اللي جاي من الجيهة الأخرى متاع A M من B . جيهة A .

Pour construire l'image de M par la translation de vecteur A B, il faut que le vecteur M M prime égale le vecteur A B. Autrement dit, A B M prime M est un parallélogramme. Trace par M la parallèle à la droite A B, et place dessus M prime, dans le même sens, de sorte que M M prime égale A B. Et au compas : reporte la longueur A B à partir de M, et la longueur A M à partir de B. Les deux arcs se coupent en deux points : garde celui qui est de l'autre côté de la droite B M par rapport à A.

QUESTION 5 · TRANSLATION DE VECTEUR U

translation de vecteur nul | ken le vecteur nul chnowa ysir | translation avec le vecteur zéro | est-ce qu un point peut rester à sa place

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{0} \iff M' = M$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken le vecteur houwa le vecteur nul, $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$, ya3ni M' houwa M : koll point yo93ed fi blastou. W ken le vecteur mouch nul, 7atta point ma yo93ed fi blastou : el koll yet7arrkou.

كان le vecteur هو le vecteur M M prime égale le vecteur nul ، le vecteur nul ، يعني M prime هو M : كل point يقعد في بلاصتو . w كان le vecteur موش nul ، حتّى point ما يقعد في بلاصتو : الكل يتحرّكو .

Si le vecteur est le vecteur nul, le vecteur M M prime égale le vecteur nul, donc M prime est M : chaque point reste à sa place. Et si le vecteur n'est pas nul, aucun point ne reste à sa place : tous se déplacent.

QUESTION 6 · PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE

c'est quoi la propriété caractéristique | propriete caracteristique mta3 la translation | la propriété caractéristique chnowa | propriété caractéristique d'une translation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

CE QU'IL RÉPOND

La propriété caractéristique t9oul : application t hiya translation, équivaut à : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, l koll zouz points M w N. Ya3ni la translation ma tbaddelch les vecteurs, w hiya el wa7ida elli ta3mel hakka. Rodd belek : lezem l'égalité mta3 les vecteurs, mouch mta3 les distances bark.

translation ، équivaut à : le vecteur M prime N prime هي application t : تقول la propriété caractéristique
هي الوحيدة les vecteurs ، w تبدّلش ما la translation يعني . points M w N لكل زوز ، égale le vecteur M N
. برك les distances متاع موش ، les vecteurs متاع l'égalité : لازم ردّ بالك . هكّا تعمل اللي

La propriété caractéristique dit : une application t est une translation, équivaut à : le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N, pour tous points M et N. Autrement dit, la translation ne change pas les vecteurs, et elle est la seule à le faire. Attention : il faut l'égalité des vecteurs, pas seulement celle des distances.

QUESTION 7 · RECONNAÎTRE UNE TRANSLATION

comment montrer qu'une application est une translation | kifech nthabbet elli f translation | prouver que f est une translation | démontrer que c est une translation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \text{ (constant)}$$

CE QU'IL RÉPOND

A7seb $\overrightarrow{MM'}$, w bassatou b la relation de Chasles. Ken yatla3 vecteur constant, ma fihech M, wa9tha f hiya la translation bel vecteur hedhaka. W ken el vecteur yetbaddel m3a M, f mouch translation. Tri9a o5ra : warri elli $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ l koll M w N.

، M ما فيهش ، vecteur constant كان يطلع . la relation de Chasles بسّطو بـ le vecteur M M prime ، w احسب
: طريقة أخرى . translation موش M ، f يتبدّل مع vecteur الـ كان w . هذاكا vecteur بالـ la translation هي f وقتها
. M w N لكل le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N وزّي اللي

Calcule le vecteur M M prime, et simplifie-le par la relation de Chasles. S'il donne un vecteur constant, qui ne contient pas M, alors f est la translation de ce vecteur. Et si le vecteur change avec M, f n'est pas une

translation. Autre méthode : montre que le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N pour tous M et N.

QUESTION 8 · DISTANCES ET DIRECTIONS

la translation change-t-elle les distances | 3lech les distances ma yetbaddlouch | les longueurs ba3d la translation | est-ce que les distances restent les mêmes

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$MN = M'N'$$

CE QU'IL RÉPOND

Le, la translation ma tbaddelch les distances : $MN = M'N'$. 5ater $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, w zouz vecteurs égaux 3andhom nafs la longueur. N9oulou la translation t7afedh 3la les distances.

لا ، la translation ما تبدّلش les distances : M N égale M prime N prime خاطر . le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N ، w زوز vecteurs égaux عندهم نفس la longueur . la translation نقولو les تحافظ على distances .

Non, la translation ne change pas les distances : M N égale M prime N prime. Car le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N, et deux vecteurs égaux ont la même longueur. On dit que la translation conserve les distances.

QUESTION 9 · CONSERVATION DE L'ALIGNEMENT

points alignés par une translation | 3lech les images alignés | comment montrer un alignement avec une translation | trois points alignes w la translation

CE QU'IL RÉPOND

Les images mta3 points alignés, houma points alignés : la translation t7afedh 3la l'alignement. Bech tthabbet elli trois points alignés, warri elli houma les images, b nafs la translation, mta3 trois points ta3refhom alignés.

les images متاع points alignés ، هوما la translation تحافظ على points alignés : l'alignement . باش تثبت trois points alignés ، وزّي اللي هوما les images ، بنفس la translation ، متاع trois points تعرفهم alignés .

Les images de points alignés sont des points alignés : la translation conserve l'alignement. Pour prouver que trois points sont alignés, montre que ce sont les images, par une même translation, de trois points que tu sais alignés.

QUESTION 10 · IMAGE D'UNE DROITE

image d'une droite par une translation | l'image mta3 droite chnowa | kifech nal9a l'image d'une droite

comment tracer l'image d'une droite

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$(AB) \longmapsto (A'B')$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image d'une droite par une translation hiya droite parallèle liha. Bech tarsemha, yekfik point wa7ed : 5oudh point A 3la la droite, arsem l'image mte3ou A', w 3addi men A' la parallèle. W ken 3andek zouz points A w B, l'image de la droite (AB) hiya la droite $(A'B')$.

خوذ point واحد : يكفيك ، باش ترسمها droite parallèle هي l'image d'une droite par une translation ليها . كان عندك زوز A prime la parallèle . w عدّي من A prime ، w متاعو l'image ارسم ، la droite على point A . la droite A prime B prime هي points A w B ، l'image de la droite A B

L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle. Pour la tracer, un seul point suffit : prends un point A sur la droite, construis son image A prime, et trace par A prime la parallèle. Et si tu as deux points A et B, l'image de la droite A B est la droite A prime B prime.

QUESTION 11 · EXEMPLE : IMAGES DE DROITES

quand une droite est sa propre image | droite invariante par translation | la droite hiya nafsha ba3d la translation | une droite qui glisse sur elle-même

CE QU'IL RÉPOND

Ki la droite 3andha nafs la direction mta3 le vecteur. Mathalan la droite (AB) w la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: A yemchi l B, elli houwa 3la la droite, donc la droite tezle9 3la rou7ha w l'image mte3ha hiya bidha. Rodd belek : la droite ma tetbaddelch, amma el points mte3ha yet7arrkou.

كي la droite عندها نفس la direction متاع le vecteur . مثلا A B : la droite A B w la translation de vecteur يمشي لـ B ، اللي هو على la droite ، donc la droite تزلق على روحها w l'image متاعها هي بيدها . ردّ بالك : la droite ما تتبدّلش ، أمّا الـ points متاعها يتحرّكو .

Quand la droite a la même direction que le vecteur. Par exemple la droite A B et la translation de vecteur A B : A va en B, qui est sur la droite, donc la droite glisse sur elle-même et son image est elle-même. Attention : la droite ne change pas, mais ses points, eux, se déplacent.

QUESTION 12 · IMAGE D'UNE DROITE

image d'un segment par une translation | l'image mta3 segment chnowa | segment isométrique ma3neha | c'est quoi l'image du segment AB

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$[AB] \longmapsto [A'B'], \quad A'B' = AB$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image du segment $[AB]$ hiya le segment $[A'B']$, win A' w B' houma les images de A w B. W houwa isométrique lih, ya3ni 3andou nafs la longueur : $A'B' = AB$. W zeda parallèle lih.

les images de A هوما A prime w B prime وين ، le segment A prime B prime هي l'image du segment A B parallèle زادة la longueur : A prime B prime égale A B . w ليه isométrique هو w B . w عندو نفس ، يعني ليه .

L'image du segment A B est le segment A prime B prime, où A prime et B prime sont les images de A et B. Et il lui est isométrique, c'est-à-dire qu'il a la même longueur : A prime B prime égale A B. Et il lui est aussi parallèle.

QUESTION 13 · IMAGE D'UNE DROITE

image d'une demi-droite | l'image mta3 demi-droite chnowa | demi droite par une translation

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$[AB) \longmapsto [A'B')$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image d'une demi-droite hiya demi-droite. Ken la demi-droite origine mte3ha A w tet3adda men B, l'image mte3ha origine mte3ha A' w tet3adda men B'. W 3andha nafs la direction w nafs le sens.

B ، l'image تتعدّى من A w متاعها la demi-droite origine كان . demi-droite هي l'image d'une demi-droite le sens نفس la direction w عندها نفس B prime . w تتعدّى من A prime w متاعها origine متاعها .

L'image d'une demi-droite est une demi-droite. Si la demi-droite a pour origine A et passe par B, son image a pour origine A prime et passe par B prime. Et elle a la même direction et le même sens.

QUESTION 14 · CONSERVATION DU MILIEU

la translation et le milieu | 3lech l'image du milieu hiya le milieu | milieu ba3d la translation | l'image du milieu d'un segment

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$O \text{ milieu de } [IJ] \iff O' \text{ milieu de } [I'J']$$

CE QU'IL RÉPOND

La translation t7afedh 3la le milieu : ken O le milieu de $[IJ]$, l'image O' houwa le milieu de $[I'J']$. 5ater $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$, w la translation ma tbaddelch les vecteurs. Tanfa3 barcha bech tthabbet elli point houwa milieu, walla elli trois points alignés.

le milieu de I prime J هو O le milieu de I J ، l'image O prime كان : le milieu تحافظ على la translation les vecteurs ما تبدّلش le vecteur O I plus le vecteur O J égale le vecteur nul ، w la translation خاطر . prime trois points alignés ولا اللي ، milieu هو point اللي تثبت برشة باش تنفع .

La translation conserve le milieu : si O est le milieu de I J, l'image O prime est le milieu de I prime J prime. Car le vecteur O I plus le vecteur O J égale le vecteur nul, et la translation ne change pas les vecteurs. C'est très utile pour prouver qu'un point est un milieu, ou que trois points sont alignés.

QUESTION 15 · CONSERVATION DU BARYCENTRE

la translation et le barycentre | l'image du barycentre chnowa | barycentre ba3d la translation | l'image du centre de gravité

CE QU'IL RÉPOND

La translation t7afedh 3la le barycentre : ken G le barycentre de (I, a) w (J, b), l'image G' houwa le barycentre de (I', a) w (J', b), b nafs les coefficients. W bel 5sous : l'image du centre de gravité mta3 triangle, hiya le centre de gravité mta3 le triangle image.

la translation تحافظ على le barycentre : كان l'image G prime ، b w J ، a w I de barycentre le G هو
l'image du centre de : بالخصوص les coefficients . w بنفس ، barycentre de I prime ، a w J prime ، b
. le triangle image متاع le centre de gravité هي ، triangle متاع gravité

La translation conserve le barycentre : si G est le barycentre de I, a et J, b, l'image G prime est le barycentre de I prime, a et J prime, b, avec les mêmes coefficients. Et en particulier : l'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

QUESTION 16 · PARALLÉLISME ET ORTHOGONALITÉ

deux droites parallèles restent-elles parallèles | les droites paralleles ba3d la translation | la translation et le parallélisme | images de deux paralleles

CE QU'IL RÉPOND

Ih : les images mta3 zouz droites parallèles, houma zouz droites parallèles. 5ater koll droite parallèle à l'image mte3ha, donc el arb3a droites 3andhom nafs la direction. N9oulou la translation t7afedh 3la le parallélisme.

إيه : les images متاع زوج droites parallèles ، هوما زوج droites parallèles . خاطر كل droite parallèle à l'image
متاعها ، donc الأربعة droites عندهم نفس la direction . نقولو la translation تحافظ على le parallélisme .

Oui : les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles. Car chaque droite est parallèle à son image, donc les quatre droites ont la même direction. On dit que la translation conserve le parallélisme.

QUESTION 17 · PARALLÉLISME ET ORTHOGONALITÉ

deux droites perpendiculaires par une translation | les droites perpendiculaires ba3d la translation | la translation et l'orthogonalité | les droites orthogonales ba3d la translation

CE QU'IL RÉPOND

Les images mta3 zouz droites perpendiculaires, houma zouz droites perpendiculaires : la translation t7afedh 3la l'orthogonalité. Rodd belek : la droite w l'image mte3ha parallèles, mouch perpendiculaires. L'angle droit yo93ed bin ezzouz images.

تحافظ على droites perpendiculaires : la translation هوما زوز ، droites perpendiculaires متاع زوز les images
يقعد perpendiculaires . l'angle droit موش ، parallèles متاعها la droite w l'image : ردّ بالك . l'orthogonalité
بين الزوز images .

Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires : la translation conserve l'orthogonalité. Attention : une droite et son image sont parallèles, pas perpendiculaires. L'angle droit se retrouve entre les deux images.

QUESTION 18 · ANGLES ET POLYGONES

la translation change-t-elle les angles | les angles ba3d la translation | est-ce que les angles restent pareils | mesure de l'angle image

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le, la translation t7afedh 3la les angles : l'angle image 3andou nafs la mesure. Mathalan ken $\widehat{BAC} = 35^\circ$, $\widehat{B'A'C'}$ zeda 35°. 5ater el triangle w l'image mte3ou isométriques.

l'angle B A C égale مثلا كان . la mesure عندو نفس les angles : l'angle image تحافظ على la translation ، لا
triangle w l'image الـ خاطر . trente-cinq degrés زادة trente-cinq degrés ، l'angle B prime A prime C prime
متاعو isométriques .

Non, la translation conserve les angles : l'angle image a la même mesure. Par exemple, si l'angle B A C mesure trente-cinq degrés, l'angle B prime A prime C prime mesure aussi trente-cinq degrés. Car le triangle et son image sont isométriques.

QUESTION 19 · IMAGE D'UN CERCLE

image d'un cercle par une translation | l'image mta3 cercle chnowa | le rayon change ou non | kifech nrasem l'image d'un cercle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\mathscr{C}(O, R) \longmapsto \mathscr{C}'(O', R)$$

CE QU'IL RÉPOND

L'image d'un cercle hiya cercle 3andou nafs le rayon. El centre bark elli yet7arrek : O yemchi l O'. Bech tarsmou, arsem l'image mta3 el centre, w 7ell el compas 3la nafs le rayon.

l'image d'un cercle هي cercle عندو نفس le rayon . الـ centre برك اللي يتحرّك : O يمشي لـ O prime . باش
ترسمو ، ارسم l'image متاع الـ w ، centre حلّ الـ compas على نفس le rayon .

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon. Seul le centre se déplace : O va en O prime. Pour le tracer, construis l'image du centre, et ouvre le compas au même rayon.

QUESTION 20 · CONSERVATION DU CONTACT

la tangente par une translation | c'est quoi la conservation du contact | droite tangente au cercle ba3d la translation | le point de contact win yemchi

CE QU'IL RÉPOND

Ken droite tangente à un cercle, les images mte3hom zeda tangentes : la translation t7afedh 3la le contact. W le point de contact yet7arrek m3ahom : le nouveau point de contact houwa l'image mta3 el 9dim.

كان les images ، droite tangente à un cercle متاعهم زادة tangentes : la translation تحافظ على le contact . w le point de contact يتحرّك معاهم : le nouveau point de contact هو l'image متاع القديم .

Si une droite est tangente à un cercle, leurs images sont elles aussi tangentes : la translation conserve le contact. Et le point de contact se déplace avec elles : le nouveau point de contact est l'image de l'ancien.

QUESTION 21 · ANGLES ET POLYGONES

image d'un triangle par une translation | polygone superposable ma3neha | l'image mta3 rectangle chnowa | image d'un polygone

CE QU'IL RÉPOND

L'image mta3 polygone hiya polygone superposable lih : nafs les côtés w nafs les angles, tnajjem t7ottou fou9ou bedh-dhabt. L'image mta3 triangle hiya triangle isométrique lih, l'image mta3 rectangle hiya rectangle, w l'image mta3 losange hiya losange.

l'image متاع polygone هي polygone superposable ليه : نفس les côtés w نفس les angles ، تنجّم تحطّو فوقو بالضبط . l'image متاع triangle هي triangle isométrique ليه ، l'image متاع rectangle هي rectangle ، w l'image متاع losange هي losange .

L'image d'un polygone est un polygone qui lui est superposable : mêmes côtés et mêmes angles, on peut le poser exactement dessus. L'image d'un triangle est un triangle qui lui est isométrique, l'image d'un rectangle est un rectangle, et l'image d'un losange est un losange.

QUESTION 22 · POUR COMPRENDRE : DEUX SYMÉTRIES CENTRALES

deux symétries centrales donnent quoi | symétrie de centre I puis symétrie de centre J | zouz symetries centrales ya3tiw chnowa | composée de deux symétries centrales

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IJ}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ki ta3mel la symétrie de centre I, w ba3dha la symétrie de centre J, tal9a translation : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IJ}$. 5ater I w J houma les milieux, w b Chasles el vecteur

yatla3 $2\overrightarrow{IJ}$, w ma fihech M.

translation : le vecteur M M تلقى ، la symétrie de centre J بعدها la symétrie de centre I ، w كي تعمل deux fois le يطلع vecteur الـ Chasles بـ les milieux ، w هوما I w J خاطر . prime égale deux fois le vecteur I J ، w vecteur I J ما فيهش M .

Quand tu fais la symétrie de centre I, puis la symétrie de centre J, tu obtiens une translation : le vecteur M M prime égale deux fois le vecteur I J. Car I et J sont les milieux, et par Chasles le vecteur vaut deux fois le vecteur I J, et il ne contient pas M.

QUESTION 23 · DEUX SYMÉTRIES AXIALES

deux symétries axiales donnent quoi | symétrie d'axe D puis symétrie d'axe D' | zouz symetries axiales ya3tiw chnowa | deux symétries orthogonales d axes parallèles

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken ezzouz axes D w D' parallèles, la symétrie d'axe D w ba3dha la symétrie d'axe D' ya3tiw translation. Le vecteur mte3ha $2\overrightarrow{AB}$, win A point 3la D, w B houwa le projeté orthogonal de A 3la D'. Rodd belek 3la l'ordre : ken tabda b D', el vecteur ywalli $2\overrightarrow{BA}$.

يعطيو la symétrie d'axe D prime بعدها axes D w D prime parallèles ، la symétrie d'axe D w كان الزوز le projeté orthogonal هو D ، w B على A point وين ، deux fois le vecteur A B متاعها translation . le vecteur . deux fois le vecteur B A يولّي vecteur الـ ، D prime بـ كان تبدا : l'ordre على ردّ بالك . D prime على de A

Si les deux axes D et D prime sont parallèles, la symétrie d'axe D suivie de la symétrie d'axe D prime donne une translation. Son vecteur est deux fois le vecteur A B, où A est un point de D, et B le projeté orthogonal de A sur D prime. Attention à l'ordre : si tu commences par D prime, le vecteur devient deux fois le vecteur B A.

QUESTION 24 · PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE

différence entre translation et symétrie | el far9 bin translation w symetrie | translation ou symétrie comment savoir

CE QU'IL RÉPOND

Ezzouz y7afdhou 3la les distances, amma mouch kif kif. Fi la translation, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$: el figure tezle9. Fi la symétrie centrale, $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$: el figure tdour noss doura. W fi la translation, $\overrightarrow{MM'}$ dima houwa bidou ; fi la symétrie yetbaddel m3a M.

la translation ، le vecteur M prime N prime égale في . أمّا موش كيف كيف ، les distances الزوز يحافظو على la symétrie centrale ، le vecteur M prime N prime égale l'opposé du في . تزلق figure الـ : le vecteur M N

la في ديما هو بيدو ؛ la translation ، le vecteur M M prime في w . تدور نصف دورة figure الـ : vecteur M N يتبدّل مع symétrie M .

Les deux conservent les distances, mais pas de la même façon. Dans la translation, le vecteur M prime N prime égale le vecteur M N : la figure glisse. Dans la symétrie centrale, le vecteur M prime N prime égale l'opposé du vecteur M N : la figure fait un demi-tour. Et dans la translation, le vecteur M M prime est toujours le même ; dans la symétrie, il change avec M.

QUESTION 25 · PROBLÈMES DE LIEUX

c'est quoi un lieu géométrique | lieu des points chnowa | kifech nal9a le lieu | comment chercher un ensemble de points

CE QU'IL RÉPOND

Le lieu géométrique houwa el ligne elli yet7arrek 3liha point, ki point e5er yet7arrek. Bech tal9ah : arsem figure w 7ott barcha positions, a3mel conjecture, w ba3d athbetha. W b la translation : ken N houwa l'image de M, le lieu de N houwa l'image mta3 le lieu de M. M 3la droite, N 3la droite parallèle ; M 3la cercle, N 3la cercle 3andou nafs le rayon.

حطّ figure w ارسم : باش تلقاه . آخر يتحرّك point كي ، point اللي يتحرّك عليها ligne الـ هو le lieu géométrique l'image de M ، le lieu de N هو N كان : la translation بـ w . بعد اثبتها conjecture ، w اعمل ، positions برشة عندو cercle على cercle ، N على M ؛ droite parallèle على droite ، N على le lieu de M . M متاع l'image هو نفس le rayon .

Le lieu géométrique est la ligne sur laquelle se déplace un point, quand un autre point se déplace. Pour le trouver : fais une figure et place plusieurs positions, émets une conjecture, puis démontre-la. Et avec la translation : si N est l'image de M, le lieu de N est l'image du lieu de M. M sur une droite, N sur une droite parallèle ; M sur un cercle, N sur un cercle de même rayon.

QUESTION 26 · PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

c'est quoi l'analyse et la synthèse | problème de construction kifech | méthode analyse synthèse | supposer le problème résolu

CE QU'IL RÉPOND

Problème de construction ne5dmouh 3la zouz étapes. L'analyse : n9oulou el problème ma7loul, nrasmou figure d'étude, w nlawwjou 3la les propriétés elli tarbet el points. La synthèse : narj3ou lel données, nrasmou el points bel propriétés hedhoukom, w nthabtou elli el figure tjeweb 3al question.

figure نرسمو ، محلول problème الـ نقولو : étapes . l'analyse زوز على نخدموه problème de construction d'étude ، w نلوّجو على les propriétés اللي تربط الـ la synthèse . points : نرجعو للـ données ، نرسمو الـ points بالـ propriétés هاذوكم ، w نثبتو اللي الـ figure تجاوب على الـ question .

Un problème de construction se traite en deux étapes. L'analyse : on suppose le problème résolu, on fait une figure d'étude, et on cherche les propriétés qui relient les points. La synthèse : on revient aux données,

on construit les points avec ces propriétés, et on vérifie que la figure répond à la question.

QUESTION 27 · TRANSLATION DE VECTEUR U

lien entre translation et parallélogramme | 3lech ABM'M parallélogramme | translation w parallelogramme | ordre des lettres dans le parallélogramme

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \iff ABM'M \text{ parallélogramme}$$

CE QU'IL RÉPOND

Ken M' houwa l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, w zouz vecteurs égaux yrasmou parallélogramme : $ABM'M$. Rodd belek 3la l'ordre : A, B, ba3d M', ba3d M. Ken tekteb $ABMM'$, taghlet.

l'image de M par la translation de vecteur A B ، le vecteur M M prime égale le vecteur A هو M prime كان
M بعد ، l'ordre : A ، B على ردّ بالك . parallélogramme : A B M prime M يرسمو vecteurs égaux زوز B ، w
. تغلط ، A B M M prime كان تكتب . M بعد ، prime

Si M prime est l'image de M par la translation de vecteur A B, le vecteur M M prime égale le vecteur A B, et deux vecteurs égaux dessinent un parallélogramme : A B M prime M. Attention à l'ordre : A, B, puis M prime, puis M. Si tu écris A B M M prime, c'est faux.

QUESTION 28 · RECONNAÎTRE UNE TRANSLATION

comment trouver le vecteur d'une translation | kifech nal9a le vecteur mta3 la translation | déterminer le vecteur de la translation | préciser le vecteur

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le vecteur mta3 translation yemchi men point l l'image mte3ou. Donc yekfik point wa7ed A w l'image mte3ou A' : le vecteur houwa $\overrightarrow{AA'}$. Ken 3andek zouz droites w les images mte3hom, 5oudh le point d'intersection : l'image mte3ou hiya l'intersection mta3 les images.

A متاعو A w l'image واحد point يكفيك donc . متاعو l'image لـ point من يمشي translation متاع le vecteur
le point خوذ ، متاعهم droites w les images زوز عندك كان . le vecteur A A prime هو prime : le vecteur
. les images متاع l'intersection متاعو هي d'intersection : l'image

Le vecteur d'une translation va d'un point à son image. Il te suffit donc d'un seul point A et de son image A prime : le vecteur est le vecteur A A prime. Si tu as deux droites et leurs images, prends le point d'intersection : son image est l'intersection des images.

QUESTION 29 · PAVAGES

c'est quoi un pavage | pavage du plan chnowa | paver le plan ma3neha | peut-on paver avec un pentagone régulier

CE QU'IL RÉPOND

Paver le plan ma3neha nghattiweh b formes, men ghir fragh w men ghir ma yerkbou 3la b3adhhom. B polygones réguliers, ynajjem b carré, b triangle équilatéral walla b hexagone régulier, 5ater les angles 7awl koll sommet yetjam3ou 360°. Le pentagone régulier ma ynajjemch : l'angle mte3ou 108°, w 360 mouch multiple de 108.

paver le plan معناها نغطّيوه بـ formes ، من غير فراغ w من غير ما يركبو على بعضهم . بـ polygones réguliers ، ينجّم بـ carré ، بـ triangle équilatéral ولا بـ hexagone régulier ، خاطر les angles حول كل sommet يتجمعو trois cent soixante degrés . le pentagone régulier ما ينجّمش : l'angle متاعو w trois cent huit degrés ، soixante موش multiple de cent huit .

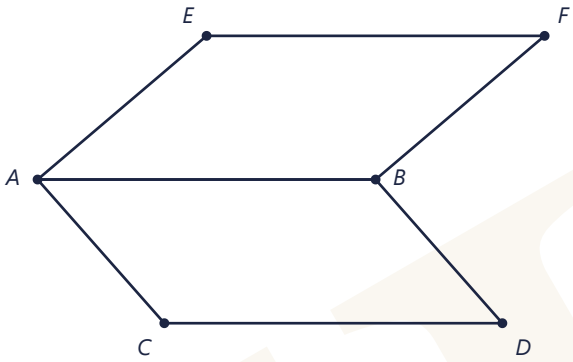
Paver le plan, c'est le couvrir par des formes, sans vide et sans chevauchement. Avec des polygones réguliers, c'est possible avec un carré, un triangle équilatéral ou un hexagone régulier, car les angles autour de chaque sommet totalisent trois cent soixante degrés. Le pentagone régulier ne convient pas : son angle mesure cent huit degrés, et trois cent soixante n'est pas divisible par cent huit.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE **L'image d'un point**

Dans la figure, $ABDC$ et $ABFE$ sont deux parallélogrammes. Quelle est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$?

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



ABDC et ABFE sont deux parallélogrammes.

Deux parallélogrammes qui partagent le côté [AB]. Le segment [AB] est horizontal, A à gauche et B à droite. Au-dessus, le parallélogramme ABFE : E est au-dessus à droite de A, F au-dessus à droite de B. En dessous, le parallélogramme ABDC : C est en dessous à droite de A, D en dessous à droite de B.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : D — aussi acceptées : le point D · point D · c'est D · c'est le point D · = D · l'image de B est D · l'image de B est le point D · B a pour image D · l'image est D · l'image est le point D · l'image de B c'est D · l'image c'est D · l'image de B c'est le point D

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de B est le point X tel que le vecteur $\overrightarrow{BX}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Regarde le parallélogramme $ABDC$: quel côté est opposé au côté $[AC]$?

CORRECTION

Le parallélogramme — Dans le parallélogramme $ABDC$, le côté $[BD]$ est opposé au côté $[AC]$, et on les parcourt dans le même sens.

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$$

L'image — Le vecteur de la translation va donc de B à D.

$$B \longmapsto D$$

L'image de B est le point D.

PIÈGES ANTICIPÉS

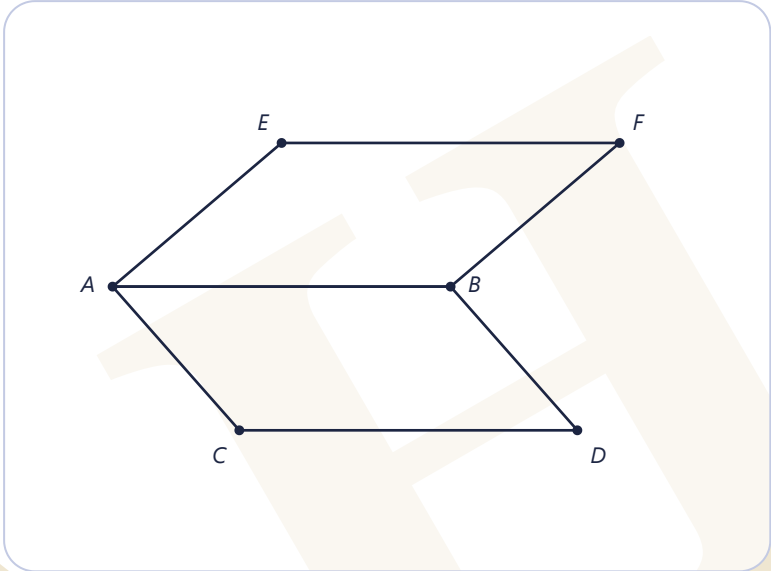
`C / le point C / point C` → C est l'image de A : le vecteur $\overrightarrow{AC}$ part de A. On demande l'image de B : pars de B et avance du même vecteur.

`F / le point F / point F` → F est l'image de B par une autre translation, celle que donne le parallélogramme $ABFE$. Ici le vecteur est le vecteur $\overrightarrow{AC}$: regarde le parallélogramme $ABDC$.

EXERCICE 2 · BASE

L'image d'une droite sur la figure

Dans la figure, $ABDC$ et $ABFE$ sont deux parallélogrammes. Quelle est l'image de la droite (CE) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?



ABDC et ABFE sont deux parallélogrammes.

Deux parallélogrammes qui partagent le côté [AB]. Le segment [AB] est horizontal, A à gauche et B à droite. Au-dessus, le parallélogramme ABFE : E est au-dessus à droite de A, F au-dessus à droite de B. En dessous, le parallélogramme ABDC : C est en dessous à droite de A, D en dessous à droite de B.

Écris la droite avec deux points, par exemple (AC).

Réponse attendue : (DF) — aussi acceptées : la droite (DF) · droite (DF) · c'est (DF) · c'est la droite (DF) · l'image est (DF) · l'image est la droite (DF) · DF · la droite DF · droite DF · c'est DF · c'est la droite DF · l'image est DF · l'image est la droite DF · (FD) · la droite (FD) · droite (FD) · c'est (FD) · c'est la droite (FD) · l'image est (FD) · l'image est la droite (FD) · FD · la droite FD · droite FD · c'est FD · c'est la droite FD · l'image est FD · l'image est la droite FD

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche l'image de deux points de la droite.
2. Chaque parallélogramme te donne une image : celle de C, puis celle de E.

CORRECTION

Deux points — Chaque parallélogramme donne un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: le vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans $ABDC$, le vecteur $\overrightarrow{EF}$ dans $ABFE$.

$C \longmapsto D \quad ; \quad E \longmapsto F$

La droite — L'image de la droite qui passe par C et E est la droite qui passe par leurs images.

$(CE) \longmapsto (DF)$

L'image de la droite (CE) est la droite (DF) : elle lui est parallèle.

PIÈGES ANTICIPÉS

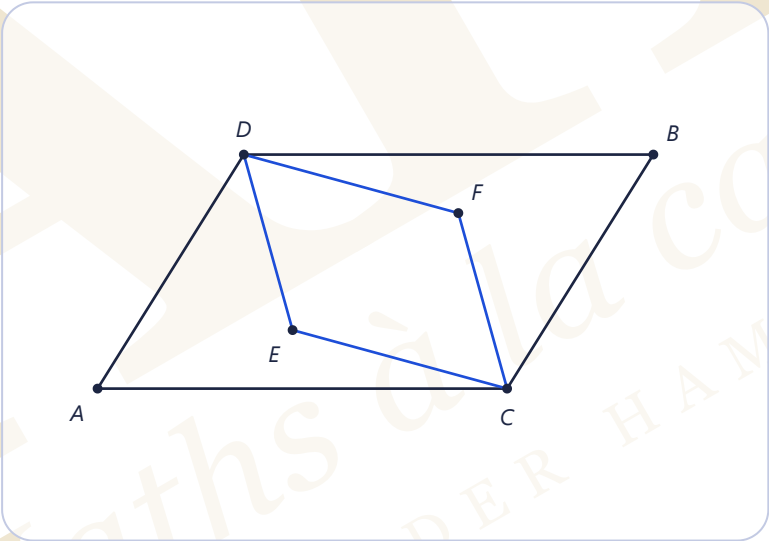
(EF) / EF / (FE) / FE / (CD) / CD / (DC) / DC / la droite (EF) / la droite EF / droite (EF) / droite EF / c'est (EF) / c'est la droite (EF) / la droite (FE) / la droite FE / droite (FE) / droite FE / c'est (FE) / c'est la droite (FE) / la droite (CD) / la droite CD / droite (CD) / droite CD / c'est (CD) / c'est la droite (CD) / la droite (DC) / la droite DC / droite (DC) / droite DC / c'est (DC) / c'est la droite (DC) → Les droites (CD) et (EF) ont la direction du vecteur : chacune est sa propre image. Cherche les images de C et de E.

(BD) / BD / (DB) / DB / (BF) / BF / (FB) / FB / la droite (BD) / la droite BD / droite (BD) / droite BD / c'est (BD) / c'est la droite (BD) / la droite (DB) / la droite DB / droite (DB) / droite DB / c'est (DB) / c'est la droite (DB) / la droite (BF) / la droite BF / droite (BF) / droite BF / c'est (BF) / c'est la droite (BF) / la droite (FB) / la droite FB / droite (FB) / droite FB / c'est (FB) / c'est la droite (FB) → Cette droite passe par B, qui est l'image de A : or A n'est pas sur la droite (CE). Cherche les images de C et de E.

EXERCICE 3 · BASE

Une symétrie centrale

Dans la figure, $ACBD$ et $CEDF$ sont deux parallélogrammes. On note K le milieu du segment $[DC]$. Quelle est l'image du point E par la symétrie centrale de centre K ?



ACBD et CEDF sont deux parallélogrammes.

Un grand parallélogramme ACBD : A en bas à gauche, C en bas à droite, B en haut à droite, D en haut à gauche. Le segment [DC] est une de ses diagonales. À l'intérieur, un petit parallélogramme CEDF qui a la même diagonale [DC] : E est sous la diagonale, F au-dessus.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : F — aussi acceptées : le point F · point F · c'est F · c'est le point F · = F · l'image de E est F · l'image de E est le point F · E a pour image F · l'image est F · l'image est le point F · le symétrique de E est F · l'image de E c'est F · l'image c'est F · l'image de E c'est le point F

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
2. Dans le parallélogramme $CEDF$, les diagonales sont $[CD]$ et $[EF]$.

CORRECTION

Les diagonales — $CEDF$ est un parallélogramme : ses diagonales $[CD]$ et $[EF]$ ont le même milieu, qui est K.

K est le milieu de $[EF]$

La symétrie — Le symétrique de E par rapport à K est donc l'autre extrémité de la diagonale.

L'image de E est le point F. De même, cette symétrie envoie A sur B et C sur D.

PIÈGES ANTICIPÉS

`B / le point B / point B` → B est l'image de A : le segment $[AB]$ est une diagonale de $ACBD$. Pour E, regarde le parallélogramme $CEDF$.

`D / le point D / point D` → D est l'image de C. La diagonale qui part de E arrive en un autre point.

EXERCICE 4 · BASE

Application ou non ?

Soit B un point du plan. À un point D distinct de B, on veut associer un point B' tel que le triangle DBB' soit rectangle en B'. Combien de points B' conviennent ?

Réponds par : un seul, deux, ou une infinité.

Réponse attendue : `une infinité` — aussi acceptées : infinité · une infinité de points · infinité de points · il y en a une infinité · une infinite · infinite · infini · un nombre infini

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un triangle rectangle est inscrit dans un cercle : lequel ?
2. Le triangle DBB' est rectangle en B' quand B' est sur le cercle de diamètre $[DB]$, sans être en D ni en B.

CORRECTION

Le cercle — Un triangle est rectangle en B' quand son sommet B' est sur le cercle qui a pour diamètre le côté opposé, sans en être une extrémité.

B' est sur le cercle de diamètre $[DB]$

Compter — Tous les points de ce cercle conviennent, sauf D et B : on ne peut pas les compter.

Une infinité de points conviennent. Ce procédé ne définit donc pas une application : il faudrait un seul point B' pour chaque point D.

PIÈGES ANTICIPÉS

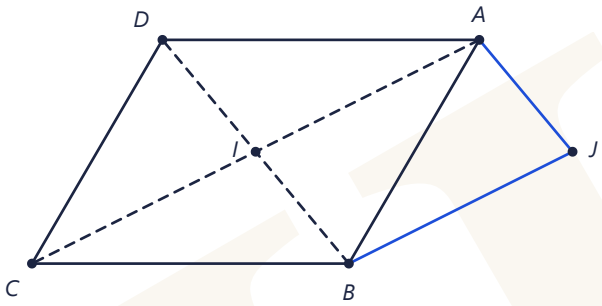
`un / un seul / un seul point / 1` → Il n'y en a pas qu'un : tous les points du cercle de diamètre $[DB]$, sauf D et B, donnent un triangle rectangle en B'.

`deux / deux points / 2` → Ce n'est pas comme le triangle équilatéral, où deux points conviennent. Ici l'angle droit est en B' : pense au cercle de diamètre $[DB]$.

EXERCICE 5 · BASE

Lire une image sur la figure

Dans la figure, $ABCD$ est un parallélogramme de centre I, et $AIBJ$ est un parallélogramme. Quelle est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$?



ABCD est un parallélogramme de centre I ; AIBJ est un parallélogramme.

Un parallélogramme ABCD : D en haut à gauche, A en haut à droite, C en bas à gauche, B en bas à droite. Ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en son centre I. À droite, le point J est tel que AIBJ est un parallélogramme : J est à droite de I, à la même hauteur, et les segments [AJ] et [BJ] sont tracés.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `I` — aussi acceptées : le point I · point I · c'est I · c'est le point I · = I · l'image de C est I · l'image de C est le point I · C a pour image I · l'image est I · l'image est le point I · l'image de C c'est I · l'image c'est I · l'image de C c'est le point I

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On cherche le point X tel que le vecteur $\overrightarrow{CX}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{IA}$.
2. I est le milieu de la diagonale $[AC]$.

CORRECTION

Le milieu — I est le centre du parallélogramme $ABCD$: c'est le milieu de la diagonale $[AC]$. De C à I, on parcourt le même vecteur que de I à A.

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$$

L'image de C est le point I.

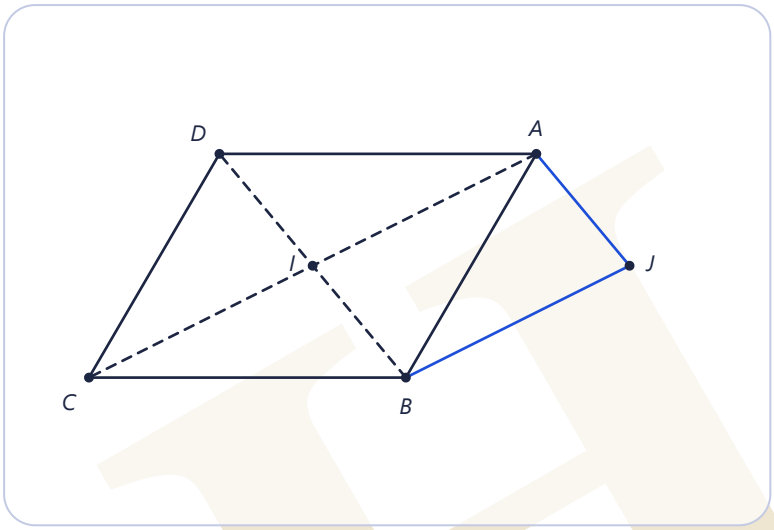
PIÈGES ANTICIPÉS

`A / le point A / point A` → A est l'image de I, pas celle de C. En partant de C, on n'avance que d'un vecteur $\overrightarrow{IA}$: on s'arrête au milieu de la diagonale.

`J / le point J / point J` → J est l'image de B, car $AIBJ$ est un parallélogramme. Pour C, avance le long de la diagonale $[AC]$.

EXERCICE 6 · PRATIQUE Trouver le bon vecteur

Dans la figure, $ABCD$ est un parallélogramme de centre I, et $AIBJ$ est un parallélogramme. Quelle est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$?



ABCD est un parallélogramme de centre I ; AIBJ est un parallélogramme.

Un parallélogramme ABCD : D en haut à gauche, A en haut à droite, C en bas à gauche, B en bas à droite. Ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en son centre I. À droite, le point J est tel que AIBJ est un parallélogramme : J est à droite de I, à la même hauteur, et les segments [AJ] et [BJ] sont tracés.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : B — aussi acceptées : le point B · point B · c'est B · c'est le point B · = B · l'image de C est B · l'image de C est le point B · C a pour image B · l'image est B · l'image est le point B · l'image de C c'est B · l'image c'est B · l'image de C c'est le point B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Décompose le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ par Chasles, en passant par A.
2. Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CI}$, et le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ au vecteur $\overrightarrow{IB}$.

CORRECTION

Chasles — On passe par A, puis on remplace chaque vecteur par un vecteur égal : I est le milieu de $[AC]$, et $AIBJ$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CB}$$

L'image — Le vecteur de la translation va de C à B.

$C \longmapsto B$

L'image de C est le point B.

PIÈGES ANTICIPÉS

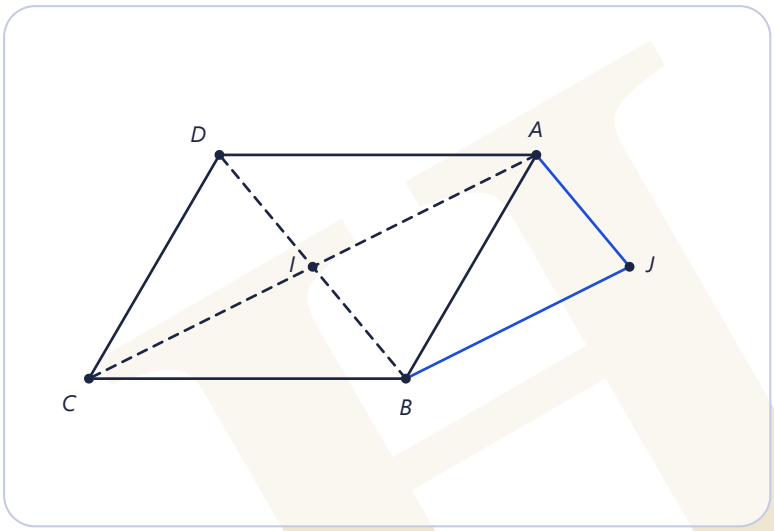
`J / le point J / point J` → J est l'image de I. On demande l'image de C : pars de C avec le même vecteur.

`A / le point A / point A` → A est l'image de D, car le vecteur $\overrightarrow{DA}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CB}$. À partir de C, on arrive sur l'autre sommet.

EXERCICE 7 · PRATIQUE

Un antécédent

Dans la figure, $ABCD$ est un parallélogramme de centre I, et $AIBJ$ est un parallélogramme. Quel est l'antécédent du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JA}$?



ABCD est un parallélogramme de centre I ; AIBJ est un parallélogramme.

Un parallélogramme ABCD : D en haut à gauche, A en haut à droite, C en bas à gauche, B en bas à droite. Ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en son centre I. À droite, le point J est tel que AIBJ est un parallélogramme : J est à droite de I, à la même hauteur, et les segments [AJ] et [BJ] sont tracés.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : B — aussi acceptées : le point B · point B · c'est B · c'est le point B · = B · l'antécédent de I est B · l'antécédent de I est le point B · l'antécédent est B · l'antécédent est le point B · B a pour image I · l'antécédent de I c'est B · l'antécédent c'est B · l'antécédent de I c'est le point B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'antécédent de I est le point X tel que le vecteur $\overrightarrow{XI}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{JA}$.
2. $AIBJ$ est un parallélogramme : quel côté est opposé au côté $[JA]$?

CORRECTION

Le parallélogramme — Dans le parallélogramme $AIBJ$, le côté $[BI]$ est opposé au côté $[JA]$, et on les parcourt dans le même sens.

$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{JA}$

Remonter — Le vecteur qui arrive en I part donc de B.

$B \longmapsto I$

L'antécédent de I est le point B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`D / le point D / point D` → D est l'image de I, car le vecteur $\overrightarrow{ID}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{JA}$. Pour l'antécédent, on remonte le vecteur : on cherche le point d'où l'on part pour arriver en I.

`J / le point J / point J` → J est le point de départ du vecteur : son image est A. On cherche le point dont l'image est I.

EXERCICE 8 · PRATIQUE

Un barycentre qui cache une translation

Soient A et B deux points distincts. On désigne par f l'application du plan qui à tout point M associe le point M', barycentre des points A, B et M affectés des coefficients 1, -1 et 1. On montre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$, où k est un réel. Calculer k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la relation vectorielle qui définit le barycentre M'.
2. Par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{M'A}$ moins le vecteur $\overrightarrow{M'B}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

CORRECTION

Le barycentre — La somme des coefficients vaut 1 : le barycentre existe, et il vérifie cette relation.

$$\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

Chasles — Les deux premiers vecteurs se réduisent au vecteur $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

Le vecteur — On isole le vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

$k = -1$: l'application f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Attention au sens : le vecteur $\overrightarrow{M'A}$ moins le vecteur $\overrightarrow{M'B}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, et non le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 9 · PRATIQUE

Le vecteur de la translation

Soient A et B deux points distincts. À tout point M du plan, on associe le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{MA}$ moins le vecteur $\overrightarrow{MB}$. Cette application est une translation. Quel est son vecteur ?

Écris le vecteur avec deux lettres, par exemple CD.

Réponse attendue : `BA` — aussi acceptées : vecteur BA · le vecteur BA · \overrightarrow{BA} · BA→ · -AB · - AB · -\overrightarrow{AB} · le vecteur -AB · vecteur -AB · c'est le vecteur BA · c'est BA · c'est le vecteur -AB · c'est -AB

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{MB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BM}$.
2. Applique la relation de Chasles au vecteur $\overrightarrow{BM}$ plus le vecteur $\overrightarrow{MA}$.

CORRECTION

L'opposé — Soustraire le vecteur $\overrightarrow{MB}$, c'est ajouter le vecteur $\overrightarrow{BM}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}$$

Chasles — Le point M disparaît : le vecteur ne dépend plus de M.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$$

C'est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`AB / vecteur AB / le vecteur AB / \overrightarrow{AB} / c'est AB / c'est le vecteur AB` → Le sens est inversé : le vecteur $\overrightarrow{BM}$ plus le vecteur $\overrightarrow{MA}$ donne le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

Une distance conservée

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ et $AC = 12$. On note E et F les images de B et de C par une translation. Calculer la distance EF.

Donne la distance EF.

Réponse attendue : 13

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve les distances : il suffit de connaître BC.
2. Dans le triangle ABC, rectangle en A, applique le théorème de Pythagore.

CORRECTION

Pythagore — Dans le triangle ABC, rectangle en A, on calcule l'hypoténuse.

$$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

La distance — On prend la racine carrée, puis on utilise la conservation des distances.

$$EF = BC = 13$$

$EF = 13$: la translation ne change aucune longueur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`17` → On n'ajoute pas les deux côtés : l'hypoténuse se calcule par le théorème de Pythagore.

`169` → 169 est le carré de la distance : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 11 · BASE

Un angle conservé

Dans un triangle ABC, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 35 degrés. On note E, F et G les images de A, B et C par une translation. Combien mesure, en degrés, l'angle $\widehat{FEG}$?

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : 35

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Que fait une translation aux angles ?

CORRECTION

La propriété — Une translation conserve les angles : l'angle image a la même mesure.

$\widehat{FEG} = \widehat{BAC} = 35°$

L'angle mesure 35 degrés : le triangle EFG est superposable au triangle ABC.

PIÈGES ANTICIPÉS

`145` → L'angle ne devient pas son supplémentaire : une translation ne change pas les angles.

EXERCICE 12 · PRATIQUE

Quel quadrilatère ?

Soit t une translation, M et N deux points distincts, d'images M' et N'. On suppose que M' n'est pas sur la droite (MN). Quelle est la nature du quadrilatère $MNN'M'$?

Réponds par un mot : trapèze, parallélogramme, rectangle, losange…

Réponse attendue : `parallelogramme` — aussi acceptées : un parallelogramme · c'est un parallelogramme · parallélogramme · un parallélogramme · mnn'm' est un parallelogramme · le quadrilatere est un parallelogramme · le quadrilatere mnn'm' est un parallelogramme

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare le vecteur $\overrightarrow{MN}$ et le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$.
2. Deux vecteurs égaux : quel quadrilatère dessinent-ils ?

CORRECTION

La propriété caractéristique — Une translation ne change pas les vecteurs.

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Conclure — Deux côtés opposés portés par des vecteurs égaux : le quadrilatère est un parallélogramme.

$MNN'M'$ est un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

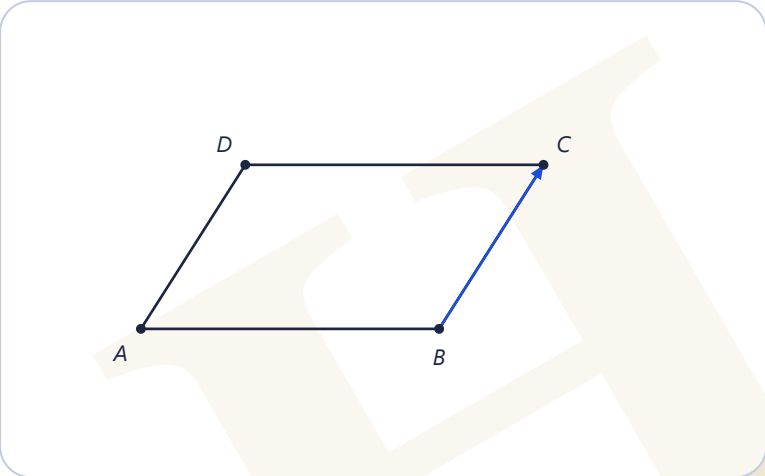
`rectangle / un rectangle` → Rien ne dit que les angles sont droits : on sait seulement que deux côtés opposés sont portés par des vecteurs égaux.

`trapeze / un trapeze` → C'est plus qu'un trapèze : les côtés opposés sont parallèles et de même longueur.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

L'image d'un côté

Soit $ABCD$ un parallélogramme et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Quelle est l'image de la droite (AB) par t ?



Le vecteur de la translation est le vecteur BC.

Un parallélogramme ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. Le côté [BC] porte le vecteur BC, en bleu.

Écris la droite avec deux sommets, par exemple (BD).

Réponse attendue : `(DC)` — aussi acceptées : la droite (DC) · droite (DC) · c'est (DC) · c'est la droite (DC) · l'image est (DC) · l'image est la droite (DC) · DC · la droite DC · droite DC · c'est DC · c'est la droite DC · l'image est DC · l'image est la droite DC · (CD) · la droite (CD) · droite (CD) · c'est (CD) · c'est la droite (CD) · l'image est (CD) · l'image est la droite (CD) · CD · la droite CD · droite CD · c'est CD · c'est la droite CD · l'image est CD · l'image est la droite CD

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche l'image du point A : compare le vecteur $\overrightarrow{AD}$ et le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. L'image est la parallèle à (AB) qui passe par D.

CORRECTION

Un point — $ABCD$ est un parallélogramme : le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BC}$, qui est le vecteur de la translation.

$A \longmapsto D$

La parallèle — L'image de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par D : dans le parallélogramme, c'est le côté opposé.

$(AB) \longmapsto (DC)$

L'image de la droite (AB) est la droite (DC).

PIÈGES ANTICIPÉS

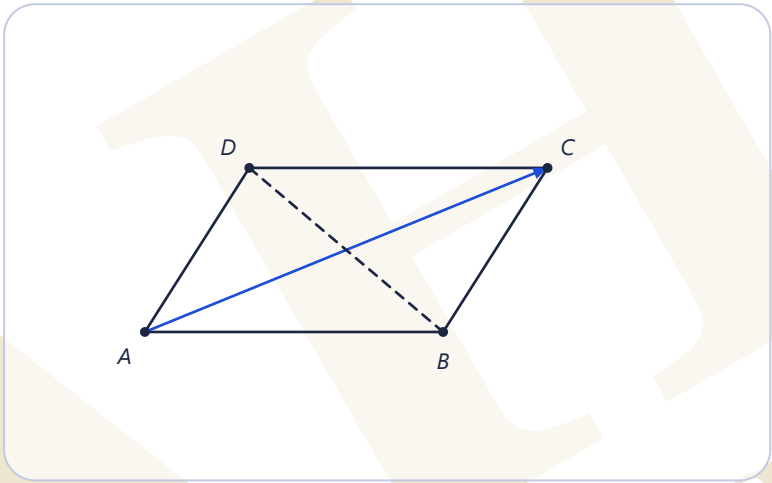
`(BC)` / `BC` / `(CB)` / `CB` / `la droite (BC)` / `la droite BC` / `droite (BC)` / `droite BC` / `c'est (BC)` / `c'est la droite (BC)` / `la droite (CB)` / `la droite CB` / `droite (CB)` / `droite CB` / `c'est (CB)` / `c'est la droite (CB)` → La droite (BC) porte le vecteur de la translation : elle est sa propre image. L'image de la droite (AB) doit être parallèle à (AB).

`(AD) / AD / (DA) / DA / la droite (AD) / la droite AD / droite (AD) / droite AD / c'est (AD) / c'est la droite (AD) / la droite (DA) / la droite DA / droite (DA) / droite DA / c'est (DA) / c'est la droite (DA)` → La droite (AD) a la direction du vecteur : elle est sa propre image. L'image de la droite (AB) lui est parallèle : c'est la parallèle à (AB) qui passe par l'image de A.

EXERCICE 14 · RAISONNEMENT

La droite qui glisse sur elle-même

Soit $ABCD$ un parallélogramme et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Parmi les droites (AB), (AD), (AC) et (BD), laquelle est sa propre image par t ?



Le vecteur de la translation est le vecteur AC.

Un parallélogramme ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. La diagonale [AC] porte le vecteur AC, en bleu. L'autre diagonale [BD] est tracée en pointillés.

Écris la droite avec deux sommets, par exemple (CD).

Réponse attendue : `(AC)` — aussi acceptées : la droite (AC) · droite (AC) · c'est (AC) · c'est la droite (AC) · l'image est (AC) · l'image est la droite (AC) · AC · la droite AC · droite AC · c'est AC · c'est la droite AC · l'image est AC · l'image est la droite AC · (CA) · la droite (CA) · droite (CA) · c'est (CA) · c'est la droite (CA) · l'image est (CA) · l'image est la droite (CA) · CA · la droite CA · droite CA · c'est CA · c'est la droite CA · l'image est CA · l'image est la droite CA · la diagonale (AC) · la diagonale AC

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une droite et son image sont toujours parallèles. Quand sont-elles confondues ?
2. Cherche la droite qui a la direction du vecteur de la translation.

CORRECTION

Un point et son image — Le vecteur de la translation va de A à C : l'image de A est encore un point de la droite (AC).

$A \longmapsto C$

La parallèle — L'image de la droite (AC) est la parallèle à (AC) passant par C : c'est la droite (AC) elle-même.

$(AC) \longmapsto (AC)$

Les trois autres — Les droites (AB), (AD) et (BD) n'ont pas la direction du vecteur : l'image de chacune lui est parallèle, mais ce n'est pas la même droite.

C'est la droite (AC) : une droite qui a la direction du vecteur de la translation est sa propre image.

PIÈGES ANTICIPÉS

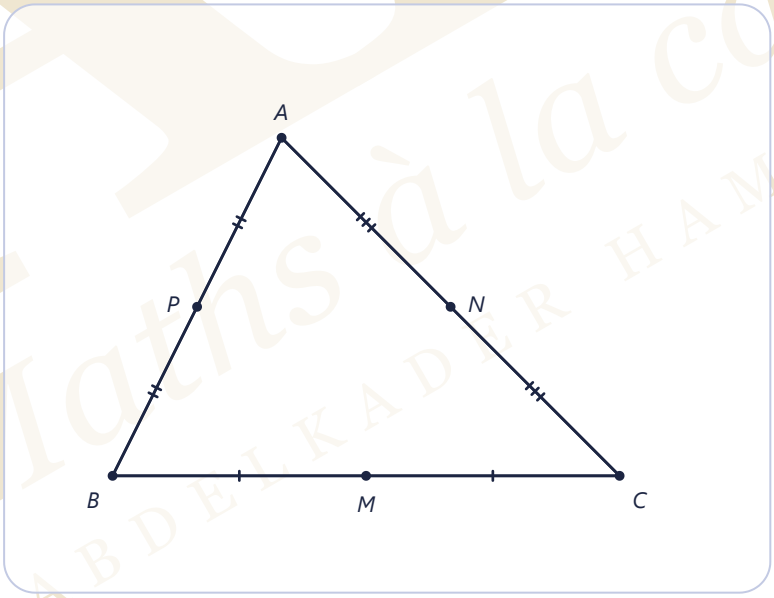
`(BD) / BD / (DB) / DB / la droite (BD) / la droite BD / droite (BD) / droite BD / c'est (BD) / c'est la droite (BD) / la droite (DB) / la droite DB / droite (DB) / droite DB / c'est (DB) / c'est la droite (DB) / la diagonale (BD) / la diagonale BD` → La droite (BD) n'a pas la direction du vecteur $\overrightarrow{AC}$: son image est une autre droite, parallèle à (BD).

`(AB) / AB / (BA) / BA / (AD) / AD / (DA) / DA / la droite (AB) / la droite AB / droite (AB) / droite AB / c'est (AB) / c'est la droite (AB) / la droite (BA) / la droite BA / droite (BA) / droite BA / c'est (BA) / c'est la droite (BA) / la droite (AD) / la droite AD / droite (AD) / droite AD / c'est (AD) / c'est la droite (AD) / la droite (DA) / la droite DA / droite (DA) / droite DA / c'est (DA) / c'est la droite (DA)` → Un côté n'a pas la direction du vecteur $\overrightarrow{AC}$: l'image de la droite (AB) est la droite (DC), et celle de la droite (AD) est la droite (BC).

EXERCICE 15 · PRATIQUE

Avec les milieux

Soient ABC un triangle et M, N et P les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Quelle est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{NP}$?



M, N et P sont les milieux des côtés.

Un triangle ABC : A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. M est le milieu du côté [BC], N le milieu du côté [AC] et P le milieu du côté [AB].

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `M` — aussi acceptées : le point M · point M · c'est M · c'est le point M · = M · l'image de C est M · l'image de C est le point M · C a pour image M · l'image est M · l'image est le point M · l'image de C c'est M · l'image c'est M · l'image de C c'est le point M

INDICES, DANS L'ORDRE

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

1. N et P sont les milieux de $[AC]$ et $[AB]$: compare le vecteur $\overrightarrow{NP}$ et le vecteur $\overrightarrow{CB}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{NP}$ est la moitié du vecteur $\overrightarrow{CB}$.

CORRECTION

La droite des milieux — Dans le triangle ABC, le segment qui joint les milieux de deux côtés donne la moitié du troisième.

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

Le milieu — M est le milieu de $[BC]$: le vecteur $\overrightarrow{CM}$ est aussi la moitié du vecteur $\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NP}$$

L'image de C est le point M.

PIÈGES ANTICIPÉS

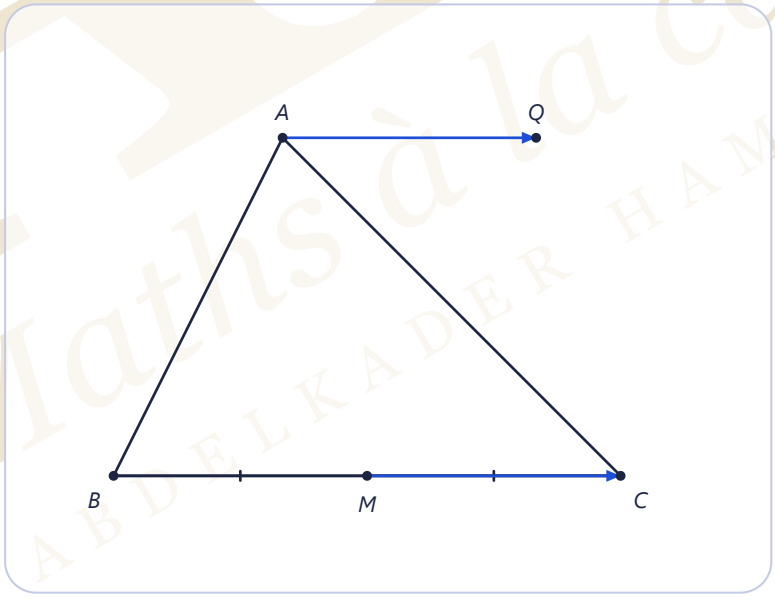
`B / le point B / point B` → Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est le double du vecteur $\overrightarrow{NP}$: on s'arrête à mi-chemin.

`P / le point P / point P` → P est l'image de N. On demande l'image de C.

EXERCICE 16 · RAISONNEMENT

L'image d'un segment

Soient ABC un triangle et M le milieu du segment $[BC]$. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{MC}$ et Q l'image de A par t. On donne $AB = 8$. Calculer la distance MQ.



M est le milieu de [BC].

Un triangle ABC : A en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. M est le milieu du côté [BC]. Le vecteur MC est tracé en bleu. Le point Q, à droite de A, est l'image de A par la translation de vecteur MC : le vecteur AQ, en bleu, est égal au vecteur MC.

Donne la distance MQ.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est l'image du point B par t ?
2. B a pour image M et A a pour image Q : quelle est l'image du segment $[BA]$?

CORRECTION

L'image de B — M est le milieu de $[BC]$: le vecteur $\overrightarrow{BM}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{MC}$.

$B \longmapsto M$

Le segment — L'image du segment $[BA]$ est le segment $[MQ]$, et une translation conserve les distances.

$MQ = BA = 8$

$MQ = 8$: le segment $[MQ]$ est l'image du segment $[BA]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est la moitié de AB. Ici le segment $[MQ]$ est l'image du segment $[BA]$ tout entier.

16 → Une translation ne double aucune longueur : l'image d'un segment a la même longueur.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

Le barycentre suit

Soient I et J deux points tels que $IJ = 10$, et G le barycentre des points I et J affectés des coefficients 2 et 3. On note A, B et K les images de I, J et G par une translation. Calculer la distance AK.

Donne la distance AK.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. K est le barycentre des points A et B affectés des mêmes coefficients 2 et 3 ; mais il est plus simple de calculer IG, puisque les distances sont conservées.
2. Le vecteur $\overrightarrow{IG}$ est égal à trois cinquièmes du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

CORRECTION

Placer G — En partant de I, c'est le coefficient de J qui est au numérateur, et la somme des coefficients, $2 + 3$, au dénominateur.

$\overrightarrow{IG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$

La distance — On calcule IG, puis on utilise la conservation des distances.

$AK = IG = \frac{3}{5} \times 10 = 6$

$AK = 6$.

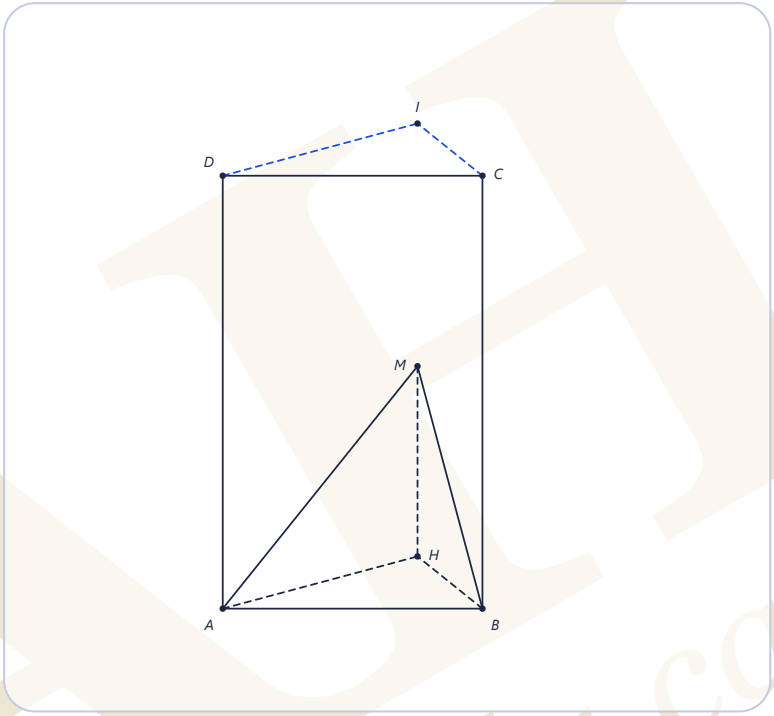
PIÈGES ANTICIPÉS

4 → Tu as pris le coefficient de I : en partant de I, c'est le coefficient de J, c'est-à-dire 3, qui est au numérateur.

EXERCICE 18 · RAISONNEMENT

L'orthocentre et son image

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 3$ et $BC = 5$. M est un point à l'intérieur de ce rectangle, et H est l'orthocentre du triangle ABM. La perpendiculaire à la droite (AM) passant par C et la perpendiculaire à la droite (BM) passant par D se coupent en I. Calculer la distance HI.



I est le point commun aux deux perpendiculaires.

Un rectangle ABCD, plus haut que large : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. À l'intérieur, un point M et le triangle ABM. H est l'orthocentre de ce triangle, sous M. Deux droites en pointillés bleus partent de C et de D et se coupent au point I, au-dessus du rectangle.

Donne la distance HI.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$: quelle est l'image de la hauteur (BH) ?
2. L'image de H est le point commun aux images des deux hauteurs (AH) et (BH).

CORRECTION

La hauteur (BH) — La hauteur (BH) est perpendiculaire à la droite (AM), et B a pour image C : l'image de la hauteur (BH) est la perpendiculaire à (AM) passant par C.

La hauteur (AH) — De même, A a pour image D : l'image de la hauteur (AH) est la perpendiculaire à (BM) passant par D.

L'image de H — H est le point commun aux deux hauteurs : son image est le point commun aux deux images, c'est-à-dire I.

$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{BC}$

La distance — Deux vecteurs égaux ont la même longueur.

$$HI = BC = 5$$

$HI = 5$: le point I est l'image de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est la longueur AB. Le vecteur de la translation est le vecteur $\overrightarrow{BC}$, de longueur 5.

EXERCICE 19 · BASE

Le rayon du cercle image

Un cercle (C) a pour centre O et pour rayon 3. On note (C') son image par une translation dont le vecteur a pour norme 7, et r le rayon du cercle (C'). Calculer r.

Donne la valeur de r.

Réponse attendue : 3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Qu'est-ce qui se déplace : le centre, ou le rayon ?

CORRECTION

La propriété — L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon : seul le centre se déplace, de 7.

$$r = 3$$

Le rayon reste égal à 3. C'est la distance entre les deux centres qui vaut 7.

PIÈGES ANTICIPÉS

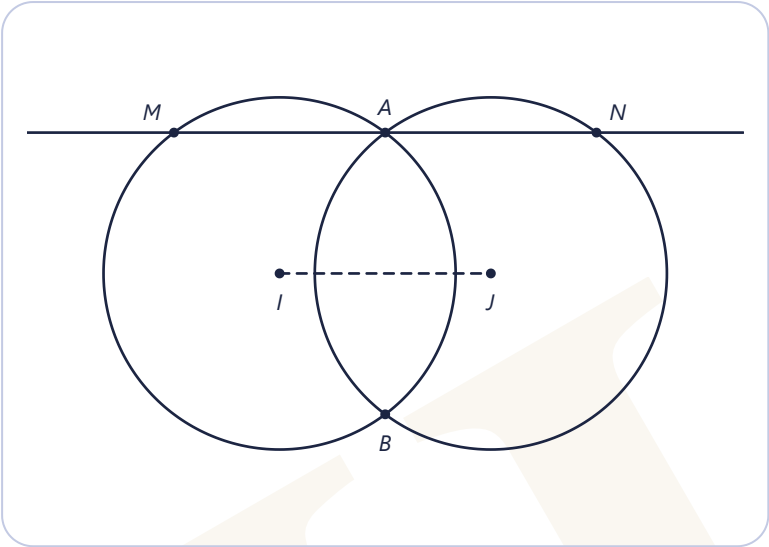
10 → On n'ajoute pas la norme du vecteur au rayon : le cercle glisse, il ne grandit pas.

7 → 7 est la distance entre les deux centres, pas le rayon.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

Deux cercles de même rayon

(C_1) et (C_2) sont deux cercles de rayon 5, de centres I et J tels que $IJ = 6$, sécants en A et B. La droite passant par A et parallèle à (IJ) recoupe (C_1) en M et (C_2) en N. Calculer la distance MN.



Les deux cercles ont le même rayon.

Deux cercles de même rayon, de centres I à gauche et J à droite, qui se coupent en deux points : A en haut et B en bas. Une droite horizontale passe par A, parallèle à la droite des centres (IJ) ; elle recoupe le cercle de gauche en M, à gauche de A, et le cercle de droite en N, à droite de A.

Donne la distance MN.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$: quelle est l'image du cercle (C_1) ?
2. L'image de M est A, et l'image de A est N.

CORRECTION

Les images — La translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ transforme (C_1) en (C_2), et la droite (MN) en elle-même. Les points M et A ont donc pour images A et N.

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{IJ}$

La distance — A est entre M et N : on ajoute les deux longueurs.

$MN = MA + AN = 6 + 6 = 12$

$MN = 12$: c'est le double de la distance entre les centres.

PIÈGES ANTICIPÉS

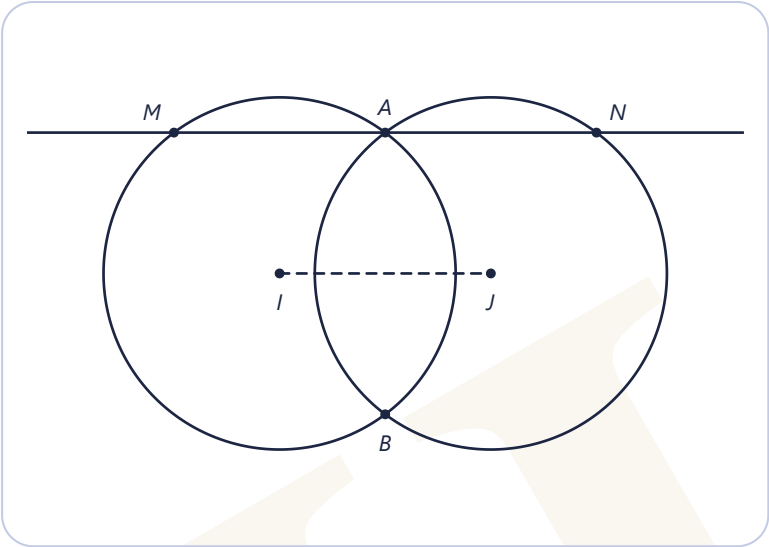
`6` → 6 est la longueur MA, ou la longueur AN. La distance MN est la somme des deux.

`10` → 10 est le diamètre d'un cercle. Ici la longueur MN se lit avec le vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

EXERCICE 21 · DEFI

Un diamètre caché

(C_1) et (C_2) sont deux cercles de rayon 5, de centres I et J tels que $IJ = 6$, sécants en A et B. La droite passant par A et parallèle à (IJ) recoupe (C_1) en M et (C_2) en N. Calculer la distance MB.



Les deux cercles ont le même rayon.

Deux cercles de même rayon, de centres I à gauche et J à droite, qui se coupent en deux points : A en haut et B en bas. Une droite horizontale passe par A, parallèle à la droite des centres (IJ) ; elle recoupe le cercle de gauche en M, à gauche de A, et le cercle de droite en N, à droite de A.

Donne la distance MB.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$, le point M a pour image A : que vaut la distance MA ?
2. La droite (IJ) est la médiatrice de $[AB]$: le triangle MAB est rectangle en A. Il te reste à calculer AB, avec le losange $IAJB$.

CORRECTION

La translation — La translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ transforme (C_1) en (C_2), et la droite (MN) en elle-même. Les points M et A ont donc pour images A et N.

$MA = IJ = 6$

La corde — IA, AJ, JB et BI valent tous 5 : $IAJB$ est un losange. Ses diagonales $[IJ]$ et $[AB]$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu K, avec $IK = 3$.

$AK^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \quad \text{donc} \quad AB = 2 \times 4 = 8$

Un angle droit — La droite (MA) est parallèle à (IJ), donc perpendiculaire à (AB) : le triangle MAB est rectangle en A.

$MB^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$MB = 10$: c'est deux fois le rayon. Le segment $[MB]$ est un diamètre du cercle (C_1).

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → 8 est la longueur de la corde $[AB]$. Il reste à utiliser le triangle MAB, rectangle en A.

6 → 6 est la longueur MA, un côté de l'angle droit. On demande l'hypoténuse $[MB]$.

14 → On n'ajoute pas MA et AB : dans le triangle MAB, rectangle en A, l'hypoténuse se calcule par le théorème de Pythagore.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

Le point de contact

Soient A et B deux points distincts d'une droite d, et (C) un cercle tangent à d en B. L'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est un cercle tangent à la droite d. En quel point ?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · c'est A · c'est le point A · = A · en A · au point A · tangent en A · il est tangent en A · le point de contact est A · le point de contact c'est A · le point de contact est le point A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est l'image de la droite d par cette translation ?
2. Le point de contact a lui aussi une image.

CORRECTION

La droite — La droite d passe par A et B : elle a la direction du vecteur, donc elle est sa propre image.

$d \longmapsto d$

Le contact — Une translation conserve le contact : le cercle image est tangent à d au point image de B.

$B \longmapsto A$

Le cercle image est tangent à la droite d au point A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`B / le point B / point B / c'est B / en B / au point B / tangent en B / il est tangent en B / le point de contact est B / le point de contact c'est B` → Le point de contact se déplace avec le cercle : c'est l'image de B qu'il faut donner.

EXERCICE 23 · RAISONNEMENT

Deux symétries axiales

D et D' sont deux droites parallèles, distantes de $2{,}5$. À un point M, on associe son symétrique M_1 par rapport à D, puis le symétrique N de M_1 par rapport à D'. Calculer la distance MN.

Donne la distance MN.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Faire les deux symétries l'une après l'autre revient à faire une translation.
2. Si A est un point de D et B son projeté orthogonal sur D', le vecteur de cette translation est deux fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

La translation — On note A un point de D et B son projeté orthogonal sur D'.

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB}$

La distance — La distance AB est la distance entre les deux droites.

$MN = 2 \times 2{,}5 = 5$

$MN = 5$, quel que soit le point M.

PIÈGES ANTICIPÉS

2.5 → Chaque symétrie double une distance : le vecteur de la translation est deux fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 24 · PRATIQUE

Deux symétries centrales

Soient I et J deux points tels que $IJ = 4$. À un point M, on associe son symétrique M_1 par rapport à I, puis le symétrique N de M_1 par rapport à J. Calculer la distance MN.

Donne la distance MN.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. I est le milieu de $[MM_1]$ et J est le milieu de $[M_1N]$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal à deux fois le vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

CORRECTION

Chasles — On passe par M_1, et on écrit chaque vecteur comme le double de sa moitié.

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{IM_1} + 2\overrightarrow{M_1J} = 2\overrightarrow{IJ}$

La distance — On double la distance IJ.

$MN = 2 \times 4 = 8$

$MN = 8$: les deux symétries centrales reviennent à la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → I et J sont des milieux : la distance MN est le double de IJ.

EXERCICE 25 · RAISONNEMENT

Reconnaître un lieu

Soient A et B deux points distincts et D une droite passant par B et ne passant pas par A. Un point M varie sur D, et N est le point tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$. Le point N varie alors sur une droite parallèle à D. Par quel point passe-t-elle ?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : A — aussi acceptées : le point A · point A · c'est A · c'est le point A · = A · elle passe par A · elle passe par le point A · passe par A · par A · par le point A · la droite passe par A · la parallèle à D passant par A · c'est la parallèle à D passant par A · la droite parallèle à D passant par A · une droite parallèle à D passant par A · la parallèle à D qui passe par A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle application envoie M sur N ?
2. Le lieu de l'image est l'image du lieu : quel point de D connais-tu, et quelle est son image ?

CORRECTION

La translation — N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Le lieu — Quand M décrit D, son image décrit l'image de D : une droite parallèle à D.

Un point — B est un point de D : la droite image passe par l'image de B.

$B \longmapsto A$

N varie sur la parallèle à D passant par A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`B / le point B / point B / par B / elle passe par B / c'est B / par le point B / elle passe par le point B / passe par B / la droite passe par B / la parallèle à D passant par B / la droite parallèle à D passant par B` → B est sur D, la ligne que décrit M. La ligne que décrit N passe par l'image de B.

EXERCICE 26 · RAISONNEMENT

Le lieu quand M tourne

Soient A et B deux points distincts, et O un point qui n'est pas sur la droite (AB). On note P le point tel que $ABPO$ soit un parallélogramme. Un point M varie sur le cercle de centre O et de rayon 4, et N est le point tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le point N varie sur un cercle de rayon 4. Quel est son centre ?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : P — aussi acceptées : le point P · point P · c'est P · c'est le point P · = P · le centre est P · le centre est le point P · centre P · son centre est P · c'est le centre P

INDICES, DANS L'ORDRE

1. N est l'image de M par une translation : laquelle ?
2. Le centre du cercle image est l'image du centre : quel point est l'image de O ?

CORRECTION

La translation — N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'image du centre — $ABPO$ est un parallélogramme : le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$O \longmapsto P$

Le cercle image — L'image du cercle de centre O est le cercle de même rayon dont le centre est l'image de O.

N varie sur le cercle de centre P et de rayon 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`O / le point O / point O / c'est O / le centre est O / centre O` → Le centre se déplace lui aussi : il faut donner l'image de O par la translation.

B / le point B / point B → B est l'image de A. Le centre du cercle est O : c'est son image qu'il faut donner.

EXERCICE 27 · DEFI

Un lieu sur un cercle

Soient O et A deux points tels que $OA = 3$, et (C) le cercle de centre O et de rayon OA. Soit M un point variable sur (C). La droite (OM) recoupe (C) en I. La parallèle à (OA) passant par M coupe la droite (AI) en N. Calculer la distance MN.

Donne la distance MN.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O est le milieu de $[IM]$: pense à la droite des milieux dans le triangle IMN.
2. La droite (OA) passe par le milieu de $[IM]$ et elle est parallèle à (MN) : elle coupe le côté $[IN]$ en son milieu, qui est A.

CORRECTION

Le milieu — I et M sont diamétralement opposés : O est le milieu de $[IM]$.

La droite des milieux — Dans le triangle IMN, la droite (OA) passe par le milieu de $[IM]$ et elle est parallèle à (MN) : A est le milieu de $[IN]$.

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{OA}$$

La distance — On double la distance OA.

$$MN = 2 \times 3 = 6$$

$MN = 6$. Le point N est l'image de M par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$: il varie sur un cercle de rayon 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est la distance OA. Par la droite des milieux, la longueur MN en est le double.

EXERCICE 28 · DEFI

Un parallélogramme dans un cercle

Soit $ABCD$ un parallélogramme inscrit dans un cercle de centre O. On note O' l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: le cercle image a pour centre O' et le même rayon. En remarquant que le cercle image passe par B et par C, trouver la nature du parallélogramme $ABCD$.

Réponds par un mot : losange, rectangle, carré…

Réponse attendue : `rectangle` — aussi acceptées : un rectangle · c'est un rectangle · abcd est un rectangle · le parallelogramme est un rectangle · le parallelogramme abcd est un rectangle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. O et O' sont tous les deux à égale distance de B et de C : que dire de la droite (OO') et du segment $[BC]$?
2. Le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: compare les directions des droites (AB) et (BC).

CORRECTION

Le cercle image — A a pour image B et D a pour image C : comme A et D sont sur le cercle, les points B et C sont sur le cercle image.

Une médiatrice — Les deux cercles ont le même rayon et passent par B et C : O et O' sont à égale distance de B et de C. La droite (OO') est la médiatrice de $[BC]$.

Un angle droit — Le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: la droite (AB) est parallèle à (OO'), donc perpendiculaire à (BC).

$ABCD$ est un parallélogramme qui a un angle droit : c'est un rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`losange / un losange` → Rien ne dit que les côtés sont égaux. On a trouvé un angle droit, entre les droites (AB) et (BC).

`carre / un carre` → On a bien un angle droit, mais rien ne dit que AB est égal à BC.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

Deux projetés orthogonaux

Soit $ABCD$ un parallélogramme qui n'est pas un rectangle, et E le symétrique de A par rapport à D. Soit H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB), et K le projeté orthogonal de E sur la droite (CD). Quelle est la nature du quadrilatère $DEKH$?

Réponds par un mot : trapèze, parallélogramme, rectangle, losange…

Réponse attendue : `parallelogramme` — aussi acceptées : un parallelogramme · c'est un parallelogramme · parallélogramme · un parallélogramme · dekh est un parallelogramme · le quadrilatere est un parallelogramme · le quadrilatere dekh est un parallelogramme

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$: quelles sont les images de A et de D ?
2. Cherche l'image de la droite (AB), puis celle de la droite (DH) : le point H est à leur intersection.

CORRECTION

Deux points — D est le milieu du segment $[AE]$: par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$, A a pour image D et D a pour image E.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$

Deux droites — L'image de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par D : c'est la droite (CD). L'image de la droite (DH) est la perpendiculaire à (CD) passant par E : c'est la droite (EK).

L'image de H — H est le point commun aux droites (AB) et (DH) : son image est le point commun aux droites (CD) et (EK), c'est-à-dire K.

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont égaux : $DEKH$ est un parallélogramme.

PIÈGES ANTICIPÉS

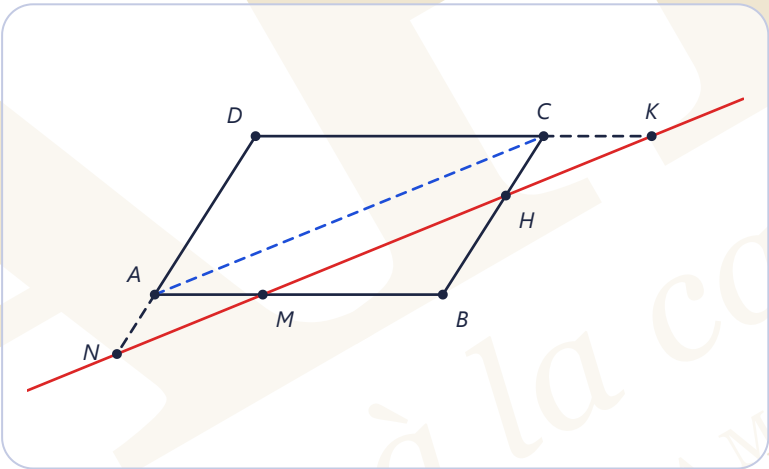
`rectangle / un rectangle` → La droite (DH) est perpendiculaire à la droite (AB), alors que la droite (DE) n'est autre que la droite (AD), qui n'est pas parallèle à (AB) : l'angle en D n'est pas droit. $DEKH$ n'est jamais un rectangle.

`losange / un losange` → Rien ne dit que DE est égal à DH. On sait seulement que deux côtés opposés sont portés par des vecteurs égaux.

EXERCICE 30 · PRATIQUE

Une sécante parallèle à la diagonale

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Une droite parallèle à (AC) coupe les droites (AB), (AD), (CB) et (CD) respectivement en M, N, H et K. On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Quelle est l'image du point M par t ?



La droite rouge est parallèle à (AC).

Un parallélogramme ABCD : A en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut à droite, D en haut à gauche. Une droite rouge, parallèle à la diagonale (AC), traverse la figure de bas en haut vers la droite. Elle coupe le prolongement de (AD) en N, sous A ; le côté [AB] en M ; le côté [CB] en H ; et le prolongement de (DC) en K, à droite de C.

Écris le nom du point.

Réponse attendue : K — aussi acceptées : le point K · point K · c'est K · c'est le point K · = K · l'image de M est K · l'image de M est le point K · M a pour image K · l'image est K · l'image est le point K · l'image de M c'est K · l'image c'est K · l'image de M c'est le point K

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est le point commun à la droite (AB) et à la droite (MN) : cherche l'image de chacune de ces deux droites.
2. L'image de la droite (AB) est la droite (CD) ; et la droite (MN), parallèle à (AC), est sa propre image.

CORRECTION

Deux droites — A a pour image C : l'image de la droite (AB) est la droite (CD). La droite (MN) a la direction du vecteur : elle est sa propre image.

L'intersection — L'image de M est le point commun à ces deux images : la droite (CD) et la droite (MN).

$M \longmapsto K$

L'image de M est K. De même, l'image de N est H : on en déduit que $MN = KH$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`H / le point H / point H` → Le point H est sur la droite (CB), qui est l'image de la droite (AD) : c'est l'image de N. Pour M, prends l'image de la droite (AB).

EXERCICE 31 · DEFI

Le pont le mieux placé

Les berges D et D' d'une rivière sont deux droites parallèles, distantes de 1. Le village A est à la distance 3 de la berge D, et le village B, de l'autre côté de la rivière, est à la distance 2 de la berge D'. Les projetés orthogonaux de A et de B sur la berge D sont distants de 12. On construit le pont $[MN]$, perpendiculaire aux berges, de façon que le trajet de A à M, puis de M à N, puis de N à B, soit le plus court possible. Combien mesure ce trajet ?

Donne la longueur du trajet.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On note A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$: alors $AM = A'N$.
2. Le trajet le plus court vaut la distance $A'B$, plus la longueur du pont. Calcule $A'B$ par le théorème de Pythagore.

CORRECTION

La translation — A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$: $AMNA'$ est un parallélogramme, donc $AM = A'N$. Le trajet vaut $A'N$ plus NB, plus la longueur du pont.

Le plus court — La somme de $A'N$ et de NB est la plus petite quand N est sur le segment $[A'B]$: elle vaut alors $A'B$.

Pythagore — A' est à la distance 3 de la berge D', et B à la distance 2 de l'autre côté : l'écart est de 5 dans un sens, et de 12 dans l'autre.

$A'B^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \quad \text{donc} \quad A'B = 13$

Le trajet — On ajoute la longueur du pont.

$13 + 1 = 14$

Le trajet le plus court mesure 14.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → 13 est la distance $A'B$: il faut encore ajouter la longueur du pont, qui vaut 1.

18 → On n'ajoute pas toutes les distances : le plus court chemin de A' à B est la ligne droite, qui se calcule par le théorème de Pythagore.

EXERCICE 32 · RAISONNEMENT

Retrouver le vecteur

Soit $ABCD$ un parallélogramme et t une translation qui transforme la droite (AB) en la droite (CD), et la droite (AD) en la droite (BC). Quel est le vecteur de t ?

Écris le vecteur avec deux lettres, par exemple AB.

Réponse attendue : AC — aussi acceptées : vecteur AC · le vecteur AC · \overrightarrow{AC} · AC→ · -CA · le vecteur -CA · vecteur -CA · c'est le vecteur AC · c'est AC

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quel point est commun aux droites (AB) et (AD) ?
2. L'image de A est le point commun aux deux droites images.

CORRECTION

Un point commun — A est le point commun aux droites (AB) et (AD) : son image est le point commun aux droites (CD) et (BC).

$A \longmapsto C$

Le vecteur — Le vecteur d'une translation va d'un point à son image.

Le vecteur de t est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`BD / vecteur BD / le vecteur BD / c'est BD / c'est le vecteur BD` → Cherche l'image d'un point précis : A est sur les deux droites de départ, donc son image est sur les deux droites d'arrivée.

`AB / vecteur AB / AD / vecteur AD / le vecteur AB / le vecteur AD / c'est AB / c'est AD / c'est le vecteur AB / c'est le vecteur AD` → Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, la droite (AB) serait sa propre image ; par celle de vecteur $\overrightarrow{AD}$, ce serait la droite (AD). Cherche plutôt l'image du point A.

EXERCICE 33 · PRATIQUE

Deux médiatrices

Soit $[AB]$ un segment de milieu O tel que $AB = 8$. On note D_1 la médiatrice du segment $[OA]$ et D_2 celle du segment $[OB]$. La translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ transforme D_1 en D_2. Quelle est la distance entre ces deux droites ?

Donne la distance entre les deux droites.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les deux droites sont perpendiculaires à la droite (AB) : leur distance se lit sur le segment $[AB]$.

2. Le milieu de $[OA]$ a pour image le milieu de $[OB]$: la distance cherchée est la norme du vecteur de la translation.

CORRECTION

Le vecteur — O est le milieu de $[AB]$.

$$AO = \frac{8}{2} = 4$$

La distance — Le milieu de $[OA]$ a pour image le milieu de $[OB]$, et le vecteur est perpendiculaire aux deux droites : leur distance est la longueur AO.

Les deux médiatrices sont distantes de 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → 8 est la longueur AB. Le vecteur de la translation est le vecteur $\overrightarrow{AO}$, deux fois plus court.

2 → 2 est la distance de A à la première médiatrice. Entre les deux médiatrices, il y a la longueur AO.

EXERCICE 34 · DEFI

La hauteur qui ne change pas

Soient A et B deux points d'un cercle (C) de rayon 5, tels que $AB = 6$. Soit M un point de (C), distinct de A et de B, et H l'orthocentre du triangle AMB. On note D le point de (C) diamétralement opposé à A. On sait que H est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Calculer la distance MH.

Donne la distance MH.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le segment $[AD]$ est un diamètre : quelle est la nature du triangle ABD ?
2. Dans le triangle ABD, rectangle en B, l'hypoténuse $[AD]$ mesure 10.

CORRECTION

Un triangle rectangle — Le segment $[AD]$ est un diamètre du cercle et B est sur le cercle : le triangle ABD est rectangle en B.

$$AD = 10$$

Pythagore — On calcule le côté $[DB]$.

$$DB^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \quad \text{donc} \quad DB = 8$$

La translation — H est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$.

$$MH = DB = 8$$

$MH = 8$, quelle que soit la position de M sur le cercle.

PIÈGES ANTICIPÉS

10 → 10 est le diamètre AD. Le vecteur de la translation est le vecteur $\overrightarrow{DB}$, un côté du triangle rectangle ABD.

EXERCICE 35 · BASE

Une somme de vecteurs

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Écrire la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ sous la forme d'un seul vecteur.

Écris le vecteur avec deux lettres, par exemple EF.

Réponse attendue : AD — aussi acceptées : vecteur AD · le vecteur AD · \overrightarrow{AD} · AD→ · c'est AD · c'est le vecteur AD · -DA · - DA · -\overrightarrow{DA} · le vecteur -DA · vecteur -DA

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la relation de Chasles sur les deux premiers vecteurs : l'extrémité du premier est l'origine du second.
2. Ajoute ensuite le vecteur $\overrightarrow{CD}$ au vecteur obtenu.

CORRECTION

Les deux premiers — Par la relation de Chasles, le point B disparaît.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Le troisième — On recommence avec le point C.

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

La somme est le vecteur $\overrightarrow{AD}$: on va de la première origine à la dernière extrémité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`DA / vecteur DA / le vecteur DA / \overrightarrow{DA} / c'est DA / c'est le vecteur DA` → Le vecteur part de A, la première origine, et arrive en D, la dernière extrémité : c'est le vecteur $\overrightarrow{AD}$, pas son opposé.

EXERCICE 36 · BASE

La règle du parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Écrire la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ sous la forme d'un seul vecteur.

Écris le vecteur avec deux lettres, par exemple EF.

Réponse attendue : AC — aussi acceptées : vecteur AC · le vecteur AC · \overrightarrow{AC} · AC→ · c'est AC · c'est le vecteur AC · -CA · - CA · -\overrightarrow{CA} · le vecteur -CA · vecteur -CA

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le parallélogramme $ABCD$, le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Remplace le vecteur $\overrightarrow{AD}$, puis applique la relation de Chasles.

CORRECTION

Le parallélogramme — $ABCD$ est un parallélogramme : deux côtés opposés, parcourus dans le même sens, sont des vecteurs égaux.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Chasles —
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

La somme est le vecteur $\overrightarrow{AC}$: c'est la diagonale issue de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`BD / vecteur BD / le vecteur BD / \overrightarrow{BD} / c'est BD / c'est le vecteur BD / DB / vecteur DB / le vecteur DB / \overrightarrow{DB} / c'est DB / c'est le vecteur DB` → La diagonale $[BD]$ correspond à la différence des deux vecteurs. La somme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{AD}$ suit la diagonale issue de A.

EXERCICE 37 · BASE

Le milieu comme application

Soit A un point du plan. À tout point M du plan, on associe le milieu I du segment $[AM]$ (pour $M = A$, on prend $I = A$). Définit-on ainsi une application du plan dans lui-même ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui c'est une application · c'est une application · oui une application · une application · oui on définit une application · on définit une application

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour avoir une application, il faut associer à chaque point M **un seul** point.
2. Un segment peut-il avoir plusieurs milieux ?

CORRECTION

Un seul point — Un segment a un seul milieu : chaque point M a une seule image I. Pour $M = A$, l'image est A lui-même.

$M \longmapsto I$

Oui : chaque point a une seule image, on définit bien une application du plan dans lui-même.

PIÈGES ANTICIPÉS

`non` → Ce qui empêche d'avoir une application, c'est d'avoir plusieurs images, ou aucune. Ici chaque point M a exactement une image : le milieu de $[AM]$.

EXERCICE 38 · PRATIQUE

Deux points ou un seul ?

Soit A un point du plan. À un point M distinct de A, on veut associer un point N tel que le triangle AMN soit rectangle et isocèle en A. Combien de points N conviennent ?

Réponds par : un seul, deux, ou une infinité.

Réponse attendue : `deux` — aussi acceptées : 2 · deux points · il y en a deux · deux points conviennent · 2 points

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point N est à la même distance de A que M, et la droite (AN) est perpendiculaire à la droite (AM).
2. Sur la perpendiculaire à (AM) passant par A, combien de points sont à la distance AM de A ?

CORRECTION

Traduire — Le triangle est rectangle en A : N est sur la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A. Il est isocèle en A : $AN = AM$.

$$AN = AM$$

Compter — Sur cette perpendiculaire, il y a deux points à la distance AM de A, un de chaque côté de A.

$$\text{deux points } N$$

Deux points conviennent : ce procédé ne définit pas une application, puisqu'un point M aurait deux images.

PIÈGES ANTICIPÉS

`un / un seul / 1 / un seul point` → Sur la perpendiculaire à (AM) passant par A, on peut reporter la longueur AM des deux côtés de A.

`une infinité / infinité / une infinite / infini` → Les points tels que $AN = AM$ forment un cercle, mais l'angle droit en A n'en garde que deux.

EXERCICE 39 · PRATIQUE Un point sans antécédent

Soit D une droite. On désigne par f l'application du plan qui à tout point M associe son projeté orthogonal sur la droite D. Soit K un point qui n'est pas sur D. Combien le point K a-t-il d'antécédents par f ?

Donne le nombre d'antécédents, ou écris « aucun ».

Réponse attendue : aucun — aussi acceptées : 0 · zéro · zero · aucun antécédent · pas d'antécédent · il n'a pas d'antécédent · il n'a aucun antécédent · il n'en a aucun · il n'en a pas

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un antécédent de K est un point M dont l'image est K.
2. Où se trouvent toutes les images par f ?

CORRECTION

Les images — Le projeté orthogonal d'un point sur D est toujours un point de D : toutes les images sont sur la droite D.

Le point K — K n'est pas sur D : aucun point n'a K pour image.

$$K \notin D$$

Le point K n'a aucun antécédent. Un point de D, au contraire, en a une infinité : tous les points de la perpendiculaire à D qui passe par lui.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / un seul / un seul antécédent` → Si K avait un antécédent M, K serait le projeté de M sur D, donc un point de D. Or K n'est pas sur D.

`une infinité / infinité / une infinite` → C'est le cas d'un point de D. Ici K n'est pas sur D : aucun projeté ne tombe sur lui.

EXERCICE 40 · RAISONNEMENT

L'ordre des symétries

Soient I et J deux points distincts. À un point M, on associe son symétrique M_1 par rapport à J, puis le symétrique N de M_1 par rapport à I. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Calculer le réel k.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. J est le milieu de $[MM_1]$ et I est le milieu de $[M_1N]$.
2. Par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ et du vecteur $\overrightarrow{M_1N}$: écris chacun comme le double d'un vecteur.

CORRECTION

Les milieux —

$$\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{JM_1} \quad ; \quad \overrightarrow{M_1N} = 2\overrightarrow{M_1I}$$

Chasles — On ajoute : le point M_1 disparaît.

$$\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{JM_1} + \overrightarrow{M_1I}\right) = 2\overrightarrow{JI}$$

Le réel k — Le vecteur $\overrightarrow{JI}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

$$\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{IJ} \quad \text{donc} \quad k = -2$$

$k = -2$: en commençant par la symétrie de centre J, on obtient la translation de vecteur $2\overrightarrow{JI}$. L'ordre des deux symétries change le vecteur en son opposé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → C'est le vecteur obtenu en commençant par la symétrie de centre I. Ici on commence par celle de centre J : le vecteur est le double du vecteur $\overrightarrow{JI}$.

`-1` → Chaque symétrie double un vecteur : le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ vaut deux fois le vecteur $\overrightarrow{JM_1}$.

EXERCICE 41 · PRATIQUE

Retrouver la distance des centres

Soient I et J deux points. À un point M, on associe son symétrique M_1 par rapport à I, puis le symétrique N de M_1 par rapport à J. On mesure $MN = 11$. Calculer la distance IJ.

Donne la distance IJ.

Réponse attendue : `11/2` — aussi acceptées : 5.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Faire les deux symétries l'une après l'autre revient à faire une translation : de quel vecteur ?
2. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal à deux fois le vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

CORRECTION

La translation — I est le milieu de $[MM_1]$ et J celui de $[M_1N]$: par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ vaut deux fois le vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{IJ}$

Les distances —

$$MN = 2\,IJ \quad \text{donc} \quad IJ = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

$IJ = 5{,}5$: la distance des deux centres est la moitié du déplacement.

PIÈGES ANTICIPÉS

22 → C'est MN qui est le double de IJ, pas l'inverse : on divise 11 par 2.

11 → La translation déplace chaque point de deux fois le vecteur $\overrightarrow{IJ}$: IJ est la moitié de MN.

EXERCICE 42 · BASE **Une image par le calcul**

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(1, 2)$, $B(4, -1)$ et $M(-2, 3)$.

Déterminer les coordonnées du point E, image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Écris le couple de coordonnées de E, entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(1;0)` — aussi acceptées : (1,0) · E(1;0) · E(1,0) · E=(1;0) · E=(1,0) · 1;0 · x=1;y=0 · x=1 et y=0 · x=1,y=0 · (x;y)=(1;0) · (x,y)=(1,0)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. E est le point tel que le vecteur $\overrightarrow{ME}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calcule d'abord les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$: extrémité moins origine.

CORRECTION

Le vecteur AB —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Le point E — Avec $E(x, y)$, le vecteur $\overrightarrow{ME}$ a pour composantes $x + 2$ et $y - 3$.

$x + 2 = 3 \quad ; \quad y - 3 = -3$

Résoudre —

$x = 1 \quad ; \quad y = 0 \quad \text{donc} \quad E(1, 0)$

$E(1, 0)$: on ajoute aux coordonnées de M les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-5;6)` / `(-5,6)` / `E(-5;6)` / `E(-5,6)` → Tu as retranché le vecteur. L'image s'obtient en **ajoutant** les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ aux coordonnées de M.

`(2;2)` / `(2,2)` / `E(2;2)` / `E(2,2)` → Tu as ajouté les coordonnées du point B. Il faut ajouter les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, soit 3 et -3.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Le long d'une diagonale

Soit $ABCD$ un carré de côté 4. On note E l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$. Calculer la distance AE, en valeur exacte.

Donne la distance AE, en valeur exacte.

Réponse attendue : `4*sqrt(2)` — aussi acceptées : sqrt(32)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Par définition, le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BD}$: les distances AE et BD sont égales.
2. $[BD]$ est une diagonale du carré : applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABD.

CORRECTION

La définition —

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD} \quad \text{donc} \quad AE = BD$

Pythagore — Le triangle ABD est rectangle en A.

$BD^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

La distance —

$AE = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$AE = 4\sqrt{2}$: chaque point se déplace de la longueur du vecteur de la translation.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5.66` / `5.65` / `5.7` → C'est une valeur approchée : garde la racine carrée, on demande la valeur exacte.

`4` → 4 est le côté du carré. Le point se déplace de la longueur du vecteur $\overrightarrow{BD}$, qui est une diagonale.

`8` → On n'ajoute pas deux côtés : la diagonale se calcule par le théorème de Pythagore.

`32` → 32 est le carré de la distance : prends la racine carrée.

EXERCICE 44 · BASE

Remonter le vecteur

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et E le symétrique de B par rapport à A. Quel est l'antécédent du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `B` — aussi acceptées : le point B · point B · c'est B · c'est le point B · = B · l'antécédent est B · l'antécédent de A est B · l'antécédent est le point B · c'est l'antécédent B

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le parallélogramme $ABCD$, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est égal à un vecteur qui arrive en A : lequel ?
2. L'antécédent de A est le point X tel que le vecteur $\overrightarrow{XA}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$.

CORRECTION

Le parallélogramme — $ABCD$ est un parallélogramme : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{DC}$, donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

L'antécédent — Le vecteur de la translation va de B à A.

$$B \longmapsto A$$

L'antécédent de A est le point B. Attention : l'image de A, elle, est le point E.

PIÈGES ANTICIPÉS

`E / le point E / point E` → E est l'**image** de A : le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$. On demande l'antécédent : le point qui arrive en A.

`C / le point C / point C` → C est l'origine du vecteur : c'est l'antécédent de D, pas celui de A.

EXERCICE 45 · PRATIQUE

Un antécédent par le calcul

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le vecteur $\vec{u}$ de composantes -3 et 2, et le point $B(1, 4)$. Déterminer les coordonnées du point C dont l'image par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point B.

Écris le couple de coordonnées de C, entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(4;2)` — aussi acceptées : (4,2) · C(4;2) · C(4,2) · C=(4;2) · C=(4,2) · 4;2 · x=4;y=2 · x=4 et y=2 · x=4,y=2 · (x;y)=(4;2) · (x,y)=(4,2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est égal au vecteur $\vec{u}$.
2. Pour trouver l'antécédent, on part de B et on remonte le vecteur : on retranche ses composantes.

CORRECTION

Traduire — Avec $C(x, y)$, le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour composantes $1 - x$ et $4 - y$.

$$1 - x = -3 \quad ; \quad 4 - y = 2$$

Résoudre —

$$x = 4 \quad ; \quad y = 2 \quad \text{donc} \quad C(4, 2)$$

$C(4, 2)$: on retranche aux coordonnées de B les composantes du vecteur $\vec{u}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-2;6) / (-2,6) / C(-2;6) / C(-2,6)` → Tu as calculé l'image de B. On cherche le point qui **arrive** en B : on retranche les composantes du vecteur.

EXERCICE 46 · BASE

Le vecteur des images

Soit t une translation, et M et N deux points du plan, d'images respectives P et Q par t. Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est égal à quel vecteur formé avec les points M et N ?

Écris le vecteur avec deux lettres, par exemple EF.

Réponse attendue : `MN` — aussi acceptées : vecteur MN · le vecteur MN · \overrightarrow{MN} · MN→ · c'est MN · c'est le vecteur MN · -NM · - NM · -\overrightarrow{NM} · le vecteur -NM · vecteur -NM

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation ne change pas les vecteurs.
2. P est l'image de M et Q celle de N : remplace chaque image par son point de départ.

CORRECTION

Chasles — On passe par M et par N. Le vecteur $\overrightarrow{MP}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{NQ}$: les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{NQ}$ sont opposés.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MN}$$

Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{MN}$: c'est la propriété caractéristique des translations.

PIÈGES ANTICIPÉS

`NM` / `vecteur NM` / `le vecteur NM` / `\overrightarrow{NM}` / `c'est NM` / `c'est le vecteur NM` → Les deux vecteurs vont dans le même sens : de l'image de M vers l'image de N, comme de M vers N.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Translation ou non ?

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une application f du plan envoie le point $A(1, 0)$ sur le point $E(3, 1)$, et le point $B(4, 1)$ sur le point $F(5, 3)$. L'application f peut-elle être une translation ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non ce n'est pas une translation · ce n'est pas une translation · pas une translation · f n'est pas une translation · non f n'est pas une translation · non elle ne peut pas · elle ne peut pas · non f ne peut pas être une translation · f ne peut pas être une translation

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Si f est une translation, le vecteur qui joint les images est égal au vecteur qui joint les points.
2. Compare les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et celles du vecteur $\overrightarrow{EF}$.

CORRECTION

Les vecteurs —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

Conclure — Les deux vecteurs ne sont pas égaux, alors qu'une translation conserve les vecteurs.

$$\overrightarrow{EF} \neq \overrightarrow{AB}$$

Non : f n'est pas une translation. On le voit aussi sur les déplacements : le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour composantes 2 et 1, le vecteur $\overrightarrow{BF}$ a pour composantes 1 et 2 ; les deux points ne bougent pas du même vecteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui` → Pour une translation, tous les points se déplacent du même vecteur. Compare le vecteur $\overrightarrow{AE}$ et le vecteur $\overrightarrow{BF}$: ils sont différents.

EXERCICE 48 · RAISONNEMENT

Un rectangle caché

Soient A et B deux points tels que $AB = 7$. Une translation envoie A sur E et B sur F. On sait que $AE = 24$ et que la droite (AE) est perpendiculaire à la droite (AB). Calculer la distance AF.

Donne la distance AF.

Réponse attendue : 25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation ne change pas les vecteurs : compare le vecteur $\overrightarrow{EF}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABFE$?
2. Le quadrilatère $ABFE$ a un angle droit en A : $[AF]$ est une de ses diagonales.

CORRECTION

Un parallélogramme — Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: $ABFE$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$$

Un rectangle — Il a un angle droit en A : c'est un rectangle. Le triangle ABF est donc rectangle en B, avec $BF = AE = 24$.

$$BF = AE = 24$$

Pythagore —

$$AF^2 = 7^2 + 24^2 = 625 \quad \text{donc} \quad AF = 25$$

$AF = 25$: la propriété caractéristique a fait apparaître un rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`31` → On n'ajoute pas les deux longueurs : $[AF]$ est la diagonale d'un rectangle, elle se calcule par le théorème de Pythagore.

`625` → 625 est le carré de la distance : prends la racine carrée.

EXERCICE 49 · BASE

Le périmètre de l'image

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 5$ et $CA = 6$. On note E, F et G les images respectives de A, B et C par une translation. Calculer le périmètre du triangle EFG.

Donne le périmètre du triangle EFG.

Réponse attendue : 15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve les distances.
2. Chaque côté du triangle EFG a la même longueur que le côté correspondant du triangle ABC.

CORRECTION

Les côtés — Une translation conserve les distances.

$EF = AB = 4 \quad ; \quad FG = BC = 5 \quad ; \quad GE = CA = 6$

Le périmètre —

$4 + 5 + 6 = 15$

Le périmètre du triangle EFG est 15, comme celui du triangle ABC.

EXERCICE 50 · PRATIQUE

Trois points sur une droite

Les points A, B et C sont alignés dans cet ordre, avec $AB = 3$ et $BC = 5$. On note F l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Calculer la distance AF.

Donne la distance AF.

Réponse attendue : 11

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$: il a la direction de la droite (AC) et la longueur AC.
2. Le point F est sur la droite (AC), du côté de C : place les points sur une règle graduée.

CORRECTION

Le vecteur —

$AC = AB + BC = 8$

Le point F — Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$: F est sur la droite, à 8 de B, du côté de C.

$BF = AC = 8$

La distance — B est entre A et F.

$AF = AB + BF = 3 + 8 = 11$

$AF = 11.$

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → 8 est la distance de A à son image, qui est C. On demande la distance de A à l'image de B.

5 → Le point F est du côté de C : on avance de 8 à partir de B, on ne recule pas.

EXERCICE 51 · DEFI

Un losange né d'un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6, et E l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calculer la distance BE, en valeur exacte.

Donne la distance BE, en valeur exacte.

Réponse attendue : `6*sqrt(3)` — aussi acceptées : sqrt(108)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BC}$: quelle est la nature du quadrilatère $ABCE$? Compare ses quatre côtés.
2. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu : $[AC]$ et $[BE]$ sont les diagonales de $ABCE$.

CORRECTION

Un losange — Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BC}$: $ABCE$ est un parallélogramme. Ses côtés consécutifs $[AB]$ et $[BC]$ ont la même longueur : c'est un losange.

$$AB = BC = CE = EA = 6$$

Les diagonales — Les diagonales $[AC]$ et $[BE]$ se coupent en leur milieu K, à angle droit. Dans le triangle BKC, rectangle en K, on a $KC = 3$.

$$BK^2 = BC^2 - KC^2 = 36 - 9 = 27$$

La distance —

$$BK = 3\sqrt{3} \quad \text{donc} \quad BE = 2\,BK = 6\sqrt{3}$$

$$BE = 6\sqrt{3}.$$

PIÈGES ANTICIPÉS

`10.39 / 10.4 / 10.3` → C'est une valeur approchée : garde la racine carrée, on demande la valeur exacte.

`3*sqrt(3) / sqrt(27)` → C'est la moitié de la diagonale $[BE]$: les diagonales du losange se coupent en leur milieu.

`12` → Les points B, C et E ne sont pas alignés : la distance BE n'est pas la somme de BC et de CE.

EXERCICE 52 · PRATIQUE

Une distance de déplacement

Soient A et B deux points tels que $AB = 3$. À tout point M, on associe le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{MA}$ moins 2 fois le vecteur $\overrightarrow{MB}$. Calculer la distance MN.

Donne la distance MN.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Mets 2 en facteur : il reste le vecteur $\overrightarrow{MA}$ moins le vecteur $\overrightarrow{MB}$.
2. Par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{MA}$ moins le vecteur $\overrightarrow{MB}$ est un vecteur qui ne dépend pas de M : lequel ?

CORRECTION

Factoriser —

$$\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)$$

Chasles — Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ moins le vecteur $\overrightarrow{MB}$, c'est le vecteur $\overrightarrow{BM}$ plus le vecteur $\overrightarrow{MA}$: c'est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA}$$

La distance —

$$MN = 2 \times 3 = 6$$

$MN = 6$ pour tout point M : l'application est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → N'oublie pas le facteur 2 : le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal à deux fois le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

0 → Les deux vecteurs ne s'annulent pas : le vecteur $\overrightarrow{MA}$ moins le vecteur $\overrightarrow{MB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, qui n'est pas nul.

EXERCICE 53 · RAISONNEMENT

Translation ou pas ?

Soient A, B et C trois points non alignés. À tout point M, on associe le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal à la somme du vecteur $\overrightarrow{MA}$ et du vecteur $\overrightarrow{MB}$, moins le vecteur $\overrightarrow{MC}$. Cette application est-elle une translation ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : non — aussi acceptées : non ce n'est pas une translation · ce n'est pas une translation · pas une translation · elle n'est pas une translation · non elle n'est pas une translation · non ce n'en est pas une · ce n'en est pas une

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Introduis le point C dans chaque vecteur par la relation de Chasles.
2. Après simplification, reste-t-il un vecteur qui dépend de M ?

CORRECTION

Chasles —

$$\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{MC}$$

Simplifier —

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

Conclure — Le vecteur $\overrightarrow{MC}$ change avec M : pour $M = C$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{CA}$ et du vecteur $\overrightarrow{CB}$; pour un autre point, ce n'est plus le même vecteur.

$\overrightarrow{MN}$ dépend de M

Non : ce n'est pas une translation. Les coefficients 1, 1 et -1 ont pour somme 1, et non 0 : le point M ne disparaît pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`oui` → Pour une translation, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ ne doit pas dépendre de M. Ici, après Chasles, il reste le vecteur $\overrightarrow{MC}$.

EXERCICE 54 · RAISONNEMENT

Le bon coefficient

Soient A et B deux points distincts et a un réel. À tout point M, on associe le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal à a fois le vecteur $\overrightarrow{MA}$ plus 3 fois le vecteur $\overrightarrow{MB}$. Déterminer le réel a pour que cette application soit une translation.

Donne la valeur de a.

Réponse attendue : `-3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Introduis le point A dans le vecteur $\overrightarrow{MB}$ par la relation de Chasles.
2. Il reste un multiple du vecteur $\overrightarrow{MA}$: son coefficient doit être nul.

CORRECTION

Chasles —

$$\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = (a+3)\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB}$$

La condition — Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ ne dépend pas de M si, et seulement si, le coefficient du vecteur $\overrightarrow{MA}$ est nul.

$$a + 3 = 0 \iff a = -3$$

Pour $a = -3$, l'application est la translation de vecteur $3\overrightarrow{AB}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Avec $a = 3$, le coefficient du vecteur $\overrightarrow{MA}$ vaut 6 : il faut que $a + 3$ soit nul.

EXERCICE 55 · RAISONNEMENT

Un barycentre qui glisse

Soient A et B deux points distincts et b un réel. À tout point M, on associe le point N, barycentre des points A, B et M affectés des coefficients 2, b et 1. Déterminer le réel b pour que cette application soit une translation.

Donne la valeur de b.

Réponse attendue : `-2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le barycentre N vérifie $2\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$: exprime le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en passant par M.
2. Écris ensuite le vecteur $\overrightarrow{MB}$ en passant par A : le coefficient du vecteur $\overrightarrow{MA}$ doit être nul.

CORRECTION

Le barycentre — La somme des coefficients est $3 + b$; on la suppose non nulle. En passant par M :

$$(3+b)\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$$

Chasles —

$$(3+b)\overrightarrow{MN} = (2+b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB}$$

La condition — Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ ne dépend pas de M si le coefficient du vecteur $\overrightarrow{MA}$ est nul.

$$2 + b = 0 \iff b = -2$$

Pour $b = -2$, la somme des coefficients vaut 1, et le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal à -2 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$: c'est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → Pour $b = -3$, la somme des coefficients est nulle : le barycentre n'existe pas.

2 → Le coefficient du vecteur $\overrightarrow{MA}$ est $2 + b$: il s'annule pour une valeur négative de b.

EXERCICE 56 · DEFI **L'image de l'origine**

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(1, 2)$, $B(3, -1)$ et $C(-2, 4)$. À tout point M, on associe le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal à 2 fois le vecteur $\overrightarrow{MA}$, moins le vecteur $\overrightarrow{MB}$, moins le vecteur $\overrightarrow{MC}$. Déterminer les coordonnées du point P, image de l'origine O.

Écris le couple de coordonnées de P, entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(1;1)` — aussi acceptées : (1,1) · P(1;1) · P(1,1) · P=(1;1) · P=(1,1) · 1;1 · x=1;y=1 · x=1 et y=1 · x=1,y=1 · (x;y)=(1;1) · (x,y)=(1,1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Introduis le point A dans le vecteur $\overrightarrow{MB}$ et dans le vecteur $\overrightarrow{MC}$: le point M disparaît.
2. Le vecteur de la translation est l'opposé de la somme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{AC}$: calcule ses composantes.

CORRECTION

Chasles —

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

Les composantes —

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \quad -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

L'image de O — Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est égal au vecteur de la translation : les coordonnées de P sont ses composantes.

$P(1, 1)$

$P(1, 1)$. L'application est la translation de vecteur $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$: les coefficients 2, -1 et -1 ont une somme nulle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(-1;-1)` / `(-1,-1)` / `P(-1;-1)` / `P(-1,-1)` → Tu as pris la somme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur de la translation est son **opposé**.

EXERCICE 57 · BASE

Des images alignées

Les points A, B et C sont alignés. On note E, F et G leurs images respectives par une translation. Les points E, F et G sont-ils alignés ?

Répondre par oui ou par non.

Réponse attendue : `oui` — aussi acceptées : oui ils sont alignés · ils sont alignés · alignés · oui alignés · oui les points sont alignés · les points sont alignés · oui e f et g sont alignés · e f et g sont alignés

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation ne change pas les vecteurs : si le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$, que dire du vecteur $\overrightarrow{EG}$?
2. Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$, et le vecteur $\overrightarrow{EF}$ au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

Les vecteurs — A, B et C sont alignés : si A et B sont distincts, il existe un réel k tel que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ soit égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

Les images — Une translation ne change pas les vecteurs.

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{EF}$

Oui : E, F et G sont alignés. Une translation conserve l'alignement.

PIÈGES ANTICIPÉS

non → Une translation déplace tous les points du même vecteur : la droite qui porte A, B et C glisse tout entière, et les images restent sur une même droite.

EXERCICE 58 · PRATIQUE

Le rapport conservé

Soient A, B et C trois points tels que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ soit égal à -3 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note E, F et G les images respectives de A, B et C par une translation. Déterminer le réel k tel que le

vecteur $\overrightarrow{FG}$ soit égal à k fois le vecteur $\overrightarrow{EF}$.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : -4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation ne change pas les vecteurs : le vecteur $\overrightarrow{FG}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BC}$, et le vecteur $\overrightarrow{EF}$ au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{BA}$ et du vecteur $\overrightarrow{AC}$: exprime-le en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

Les images —

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$

Chasles —

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AB}$

Conclure —

$\overrightarrow{FG} = -4\overrightarrow{EF}$ donc $k = -4$

$k = -4$: les images gardent les mêmes rapports que les points de départ.

PIÈGES ANTICIPÉS

-3 → -3 relie le vecteur $\overrightarrow{AC}$ au vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc le vecteur $\overrightarrow{EG}$ au vecteur $\overrightarrow{EF}$. On demande le vecteur $\overrightarrow{FG}$, qui correspond au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

-2 → Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$: la somme fait $-\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB}$, soit $-4\overrightarrow{AB}$.

4 → Attention au signe : B et C sont de part et d'autre de A, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 59 · BASE

Une droite et son image

Soit D une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul qui n'a pas la direction de D. On note D' l'image de D par la translation de vecteur $\vec{u}$. Combien les droites D et D' ont-elles de points communs ?

Donne le nombre de points communs, ou écris « aucun ».

Réponse attendue : aucun — aussi acceptées : 0 · zéro · zero · aucun point · aucun point commun · pas de point commun · aucun point en commun · elles n'ont aucun point commun · elles n'ont pas de point commun · il n'y a aucun point commun

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
2. Prends un point A de D : son image A' est-elle sur D ?

CORRECTION

Parallèles — L'image d'une droite par une translation lui est parallèle.

$D' \parallel D$

Distinctes — Soit A un point de D et A' son image. Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est le vecteur $\vec{u}$, qui n'a pas la direction de D : le point A' n'est pas sur D. Les droites D et D' sont parallèles et distinctes.

$A' \notin D$

Les droites D et D' n'ont aucun point commun. Si le vecteur $\vec{u}$ avait la direction de D, on aurait au contraire $D' = D$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / un / un seul / un point / un seul point` → Deux droites qui se coupent en un seul point ne sont pas parallèles. Or l'image d'une droite par une translation lui est parallèle.

EXERCICE 60 · PRATIQUE

L'image d'une demi-droite

Soient A et B deux points distincts, et C le symétrique de B par rapport à A. Quelle est l'image de la demi-droite $[AB)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$?

Écris la demi-droite avec son origine en premier, par exemple $[EF)$.

Réponse attendue : `[CA)` — aussi acceptées : la demi-droite [CA) · demi-droite [CA) · c'est [CA) · c'est la demi-droite [CA) · l'image est [CA) · l'image est la demi-droite [CA) · [CB) · la demi-droite [CB) · demi-droite [CB) · c'est [CB) · c'est la demi-droite [CB) · l'image est [CB) · l'image est la demi-droite [CB)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite qui a pour origine l'image de A et qui passe par l'image de B.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$: quelle est l'image de A ? Et celle de B ?

CORRECTION

Les deux images — A est le milieu de $[BC]$: le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$. Et le vecteur de la translation va de B à A.

$A \longmapsto C \quad ; \quad B \longmapsto A$

La demi-droite — L'image de la demi-droite $[AB)$ a pour origine l'image de A et passe par l'image de B.

$[AB) \longmapsto [CA)$

L'image est la demi-droite $[CA)$, qui est aussi la demi-droite $[CB)$: elle part de C et contient la demi-droite $[AB)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`[AB) / la demi-droite [AB) / demi-droite [AB)` → La demi-droite $[AB)$ a la direction du vecteur, mais son origine bouge : A a pour image C.

`[AC) / la demi-droite [AC) / demi-droite [AC)` → La demi-droite $[AC)$ part de A dans l'autre sens. L'image part de l'image de A, qui est C, et va vers l'image de B, qui est A.

EXERCICE 61 · RAISONNEMENT

La droite des milieux par une translation

Soit ABC un triangle tel que $AC = 10$, et I le milieu du segment $[BC]$. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$. L'image de la droite (AB) par t coupe la droite (AC) en un point K. Calculer la distance AK.

Donne la distance AK.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de B par t est I : l'image de la droite (AB) est la parallèle à (AB) qui passe par I.
2. Dans le triangle ABC, une droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.

CORRECTION

L'image de la droite — Le vecteur de la translation va de B à I : B a pour image I. L'image de la droite (AB) est donc la parallèle à (AB) passant par I.

$B \longmapsto I$

La droite des milieux — Dans le triangle ABC, cette droite passe par le milieu I de $[BC]$ et elle est parallèle à (AB) : elle coupe $[AC]$ en son milieu.

K est le milieu de $[AC]$

La distance —

$$AK = \frac{10}{2} = 5$$

$AK = 5$: le point K est le milieu de $[AC]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 est la longueur du côté $[AC]$. Le point K en est le milieu.

EXERCICE 62 · PRATIQUE

La distance entre deux droites

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Calculer la distance entre la droite (AD) et l'image de la droite (BC) par t.

Donne la distance entre les deux droites.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de la droite (BC) est la parallèle à (BC) qui passe par l'image de B.
2. Le point B avance encore de 6, dans le sens de A vers B : à quelle distance de la droite (AD) arrive-t-il ?

CORRECTION

L'image de B — On note E l'image de B : le vecteur $\overrightarrow{BE}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les points A, B et E sont alignés, et B est le milieu de $[AE]$.

$$AE = 2\,AB = 12$$

L'image de la droite — L'image de la droite (BC) est la parallèle à (BC) passant par E : elle est perpendiculaire à la droite (AE) en E, comme la droite (AD) l'est en A.

La distance — Les deux droites sont perpendiculaires à la droite (AE), en A et en E : leur distance est AE.

$$AE = 12$$

La distance est 12 : la droite (BC) a glissé de 6, et elle était déjà à 6 de la droite (AD).

PIÈGES ANTICIPÉS

`6` → 6 est la distance entre les droites (AD) et (BC). L'image de la droite (BC) est encore 6 plus loin.

`10` → On n'ajoute pas AD : la largeur AD se mesure le long des deux droites, pas entre elles.

EXERCICE 63 · PRATIQUE

L'image d'un côté par une diagonale

Soit $ABCD$ un parallélogramme et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$. Quelle est l'image de la droite (BC) par t ?

Écris la droite avec deux sommets, par exemple (AC).

Réponse attendue : `(AD)` — aussi acceptées : la droite (AD) · droite (AD) · c'est (AD) · c'est la droite (AD) · l'image est (AD) · l'image est la droite (AD) · AD · la droite AD · droite AD · c'est AD · c'est la droite AD · l'image est AD · l'image est la droite AD · (DA) · la droite (DA) · droite (DA) · c'est (DA) · c'est la droite (DA) · l'image est (DA) · l'image est la droite (DA) · DA · la droite DA · droite DA · c'est DA · c'est la droite DA · l'image est DA · l'image est la droite DA

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point B est sur la droite (BC) : quelle est son image ?
2. L'image de la droite (BC) est la parallèle à (BC) passant par l'image de B.

CORRECTION

Un point — Le vecteur de la translation va de B à D : B a pour image D.

$$B \longmapsto D$$

La parallèle — L'image de la droite (BC) est la parallèle à (BC) passant par D. Dans le parallélogramme $ABCD$, c'est la droite (AD).

$$(BC) \longmapsto (AD)$$

L'image de la droite (BC) est la droite (AD).

PIÈGES ANTICIPÉS

`(BD) / la droite (BD) / droite (BD) / c'est (BD) / c'est la droite (BD) / BD / la droite BD / droite BD / c'est BD / c'est la droite BD / (DB) / la droite (DB) / droite (DB) / c'est (DB) / c'est la droite (DB) / DB / la droite DB / droite DB / c'est DB / c'est la droite DB` → La droite

(BD) a la direction du vecteur : elle est sa propre image. Cherche l'image de B, puis trace la parallèle à (BC).

`(BC) / la droite (BC) / droite (BC) / c'est (BC) / c'est la droite (BC) / BC / la droite BC / droite BC / c'est BC / c'est la droite BC / (CB) / la droite (CB) / droite (CB) / c'est (CB) / c'est la droite (CB) / CB / la droite CB / droite CB / c'est CB / c'est la droite CB` → La droite (BC) n'a pas la direction du vecteur $\overrightarrow{BD}$: elle n'est pas sa propre image.

`(DC) / la droite (DC) / droite (DC) / c'est (DC) / c'est la droite (DC) / DC / la droite DC / droite DC / c'est DC / c'est la droite DC / (CD) / la droite (CD) / droite (CD) / c'est (CD) / c'est la droite (CD) / CD / la droite CD / droite CD / c'est CD / c'est la droite CD` → La droite (DC) passe bien par D, mais elle est parallèle à (AB), pas à (BC).

EXERCICE 64 · BASE

Le milieu des images

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$. Une translation envoie A sur E, B sur F et I sur K. Quel point est le milieu du segment $[EF]$?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : K — aussi acceptées : le point K · point K · c'est K · c'est le point K · = K · le milieu est K · le milieu est le point K · le milieu de [EF] est K

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation ne change pas les vecteurs : compare le vecteur $\overrightarrow{EK}$ et le vecteur $\overrightarrow{AI}$, puis le vecteur $\overrightarrow{KF}$ et le vecteur $\overrightarrow{IB}$.
2. I est le milieu de $[AB]$: le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{IB}$.

CORRECTION

Les vecteurs —

$$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{KF}$$

Le milieu — Le vecteur $\overrightarrow{EK}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{KF}$: K est le milieu de $[EF]$.

$$K \text{ milieu de } [EF]$$

Le milieu de $[EF]$ est K, l'image de I : une translation conserve le milieu.

PIÈGES ANTICIPÉS

`I / le point I / point I` → I est le milieu de $[AB]$. Le milieu des images est l'image du milieu.

EXERCICE 65 · PRATIQUE

Le milieu par le calcul

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-1, 3)$ et $B(5, -1)$, et le vecteur $\vec{u}$ de composantes 2 et 4. On note E et F les images de A et de B par la translation de vecteur $\vec{u}$. Déterminer les coordonnées du milieu K du segment $[EF]$.

Écris le couple de coordonnées de K, entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(4;5)` — aussi acceptées : (4,5) · K(4;5) · K(4,5) · K=(4;5) · K=(4,5) · 4;5 · x=4;y=5 · x=4 et y=5 · x=4,y=5 · (x;y)=(4;5) · (x,y)=(4,5)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve le milieu : K est l'image du milieu de $[AB]$.
2. Calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$, puis ajoute les composantes du vecteur $\vec{u}$.

CORRECTION

Le milieu de [AB] —

$$I\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = I(2,1)$$

Son image — Une translation conserve le milieu : K est l'image de I.

$$K(2+2, 1+4) = K(4,5)$$

$K(4,5)$. On peut le vérifier : $E(1,7)$ et $F(7,3)$ ont bien pour milieu le point $K(4,5)$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(2;1) / (2,1) / K(2;1) / K(2,1)` → $(2,1)$ sont les coordonnées du milieu de $[AB]$. Il reste à lui appliquer la translation de vecteur $\vec{u}$.

`(8;10) / (8,10) / K(8;10) / K(8,10)` → Tu as ajouté les coordonnées de E et de F sans diviser par 2.

EXERCICE 66 · RAISONNEMENT

Le milieu d'une diagonale image

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. Quel est le milieu du segment image de la diagonale $[BD]$ par t ?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `C` — aussi acceptées : le point C · point C · c'est C · c'est le point C · = C · le milieu est C · le milieu est le point C

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le milieu de $[BD]$ est O, et une translation conserve le milieu.
2. Quelle est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$? Pense à l'autre diagonale.

CORRECTION

Le milieu — Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : O est le milieu de $[BD]$, et aussi celui de $[AC]$.

$$O \text{ milieu de } [BD] \text{ et de } [AC]$$

Conclure — Une translation conserve le milieu : le milieu du segment image est l'image de O. Comme O est le milieu de $[AC]$, le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AO}$.

$$O \longmapsto C$$

Le milieu du segment image de $[BD]$ est le point C.

PIÈGES ANTICIPÉS

`O / le point O / point O` → O est le milieu de $[BD]$. Le segment a bougé : son milieu est l'image de O.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Un barycentre et son image

Soient A et B deux points tels que $AB = 15$, et G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 1 et 4. Une translation envoie A sur E, B sur F et G sur K. Calculer la distance EK.

Donne la distance EK.

Réponse attendue : `12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve les distances : la distance EK est égale à la distance AG.
2. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$: la somme des coefficients est 5.

CORRECTION

Le barycentre — La somme des coefficients est 5.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} \quad \text{donc} \quad AG = \frac{4}{5} \times 15 = 12$$

L'image — La translation conserve les distances.

$$EK = AG = 12$$

$EK = 12$: le point K est le barycentre des points E et F affectés des coefficients 1 et 4.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Le barycentre est plus près du point qui a le plus gros coefficient : G est près de B, et AG vaut les quatre cinquièmes de AB.

EXERCICE 68 · PRATIQUE

Un centre de gravité qui se déplace

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(1, 0)$, $B(7, 0)$ et $C(1, 9)$, et le vecteur $\vec{u}$ de composantes 1 et -2. On note E, F et H les images de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité K du triangle EFH.

Écris le couple de coordonnées de K, entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(4;1)` — aussi acceptées : (4,1) · K(4;1) · K(4,1) · K=(4;1) · K=(4,1) · 4;1 · x=4;y=1 · x=4 et y=1 · x=4,y=1 · (x;y)=(4;1) · (x,y)=(4,1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve le centre de gravité : K est l'image du centre de gravité du triangle ABC.
2. Le centre de gravité a pour coordonnées les moyennes des coordonnées des trois sommets.

CORRECTION

Le centre de gravité —

$$G\left(\frac{1+7+1}{3}, \frac{0+0+9}{3}\right) = G(3,3)$$

Son image —

$K(3+1, 3-2) = K(4,1)$

$K(4,1)$: on translate le centre de gravité au lieu de translater les trois sommets.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3;3) / (3,3) / K(3;3) / K(3,3)` → $(3,3)$ sont les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC. Il reste à lui appliquer la translation.

`(2;5) / (2,5) / K(2;5) / K(2,5)` → Pour l'image, on **ajoute** les composantes du vecteur $\vec{u}$: $3+1$ et $3-2$.

EXERCICE 69 · RAISONNEMENT

Un barycentre hors du segment

Soient A et B deux points tels que $AB = 2$, et G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 1 et -3. On note C et K les images respectives de B et de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Calculer la distance AK.

Donne la distance AK.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$: la somme des coefficients est -2.
2. Le vecteur $\overrightarrow{GK}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: par Chasles, le vecteur $\overrightarrow{AK}$ est la somme du vecteur $\overrightarrow{AG}$ et du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

Le point G — La somme des coefficients est -2.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{-2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Le point K —

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$$

La distance —

$$AK = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

$AK = 5$. On peut le vérifier : K est le barycentre des points B et C affectés des coefficients 1 et -3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → 3 est la distance AG. Le point K est l'image de G : il faut encore avancer du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

`1` → Le vecteur $\overrightarrow{GK}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: il va dans le même sens que le vecteur $\overrightarrow{AG}$, les longueurs s'ajoutent.

EXERCICE 70 · RAISONNEMENT

Le centre de gravité du triangle image

Soit ABC un triangle de centre de gravité G, tel que $AG = 6$. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$, et E et F les images de B et de C par t. Soit K le centre de gravité du triangle GEF. Calculer la distance AK.

Donne la distance AK.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est l'image de A par t ? Le triangle GEF est donc l'image du triangle ABC.
2. Une translation conserve le centre de gravité : K est l'image de G.

CORRECTION

Le triangle image — Le vecteur de la translation va de A à G : A a pour image G, et le triangle GEF est l'image du triangle ABC.

$$A \longmapsto G \quad ; \quad B \longmapsto E \quad ; \quad C \longmapsto F$$

Le centre de gravité — Une translation conserve le centre de gravité : K est l'image de G.

$$\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AG}$$

La distance — G est le milieu de $[AK]$.

$$AK = 2\,AG = 12$$

$AK = 12$: les points A, G et K sont alignés, et G est le milieu de $[AK]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → 6 est la distance AG. Le point K est l'image de G : il est encore 6 plus loin.

EXERCICE 71 · BASE

Deux perpendiculaires

Les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires. On note D_3 et D_4 leurs images respectives par une translation. Quelle est, en degrés, la mesure de l'angle formé par les droites D_3 et D_4 ?

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : 90

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image d'une droite par une translation lui est parallèle : D_3 est parallèle à D_1, et D_4 à D_2.
2. Une droite parallèle à D_1 et une droite parallèle à D_2 forment le même angle que D_1 et D_2.

CORRECTION

Les parallèles —

$$D_3 \parallel D_1 \quad ; \quad D_4 \parallel D_2$$

L'orthogonalité — D_1 et D_2 sont perpendiculaires, donc leurs parallèles D_3 et D_4 le sont aussi.

$D_3 \perp D_4$

Les droites D_3 et D_4 forment un angle de 90 degrés : une translation conserve l'orthogonalité.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0 / 180` → Les images ne sont pas parallèles entre elles : chacune est parallèle à sa droite de départ, et ces deux droites sont perpendiculaires.

EXERCICE 72 · PRATIQUE

Le quadrilatère d'un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $AB = 3$ et $AC = 5$. On note E l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABEC$?

Réponds par un mot : losange, rectangle, carré…

Réponse attendue : `rectangle` — aussi acceptées : un rectangle · c'est un rectangle · abec est un rectangle · le quadrilatere est un rectangle · le quadrilatere abec est un rectangle

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compare le vecteur $\overrightarrow{CE}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$: quel quadrilatère dessinent-ils ?
2. Ce quadrilatère a un angle en A : combien mesure-t-il ?

CORRECTION

Un parallélogramme — Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: $ABEC$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$$

Un angle droit — Le triangle ABC est rectangle en A : le parallélogramme $ABEC$ a un angle droit, c'est un rectangle. Ses côtés $[AB]$ et $[AC]$ n'ont pas la même longueur : ce n'est pas un carré.

$ABEC$ est un rectangle

$ABEC$ est un rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`carre / un carre` → Un carré a quatre côtés de même longueur. Ici $AB = 3$ et $AC = 5$.

`losange / un losange` → Les côtés consécutifs $[AB]$ et $[AC]$ n'ont pas la même longueur : ce n'est pas un losange.

`parallelogramme / un parallelogramme / c'est un parallelogramme / abec est un parallelogramme` → C'est vrai, $ABEC$ est un parallélogramme, mais ce n'est pas assez précis : il a un angle droit en A. Quel parallélogramme a un angle droit ?

EXERCICE 73 · BASE

Un angle du triangle image

Dans un triangle ABC, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 50 degrés et l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 60 degrés. On note E, F et G les images de A, B et C par une translation. Combien mesure, en degrés, l'angle $\widehat{EGF}$?

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `70`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve les angles : l'angle $\widehat{EGF}$ est égal à l'angle de sommet C du triangle ABC.
2. La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés.

CORRECTION

L'angle en C —

$\widehat{ACB} = 180° - 50° - 60° = 70°$

La translation — Une translation conserve les angles : l'angle en G du triangle image est l'angle en C.

$\widehat{EGF} = \widehat{ACB} = 70°$

L'angle $\widehat{EGF}$ mesure 70 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`110` → 110 degrés est la somme des deux angles donnés : l'angle en G est ce qui reste pour atteindre 180 degrés.

`50 / 60` → Cet angle est celui de sommet E ou F. L'angle $\widehat{EGF}$ a pour sommet G, l'image de C.

EXERCICE 74 · BASE

L'aire d'un rectangle image

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 7$ et $BC = 4$. On note $EFGH$ son image par une translation. Calculer l'aire du quadrilatère $EFGH$, sans écrire l'unité.

Donne l'aire, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : `28`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image d'un rectangle par une translation est un rectangle qui lui est superposable.
2. Les côtés de $EFGH$ ont les mêmes longueurs que ceux de $ABCD$.

CORRECTION

Le rectangle image — Une translation conserve les distances et les angles : $EFGH$ est un rectangle superposable à $ABCD$.

$EF = AB = 7 \quad ; \quad FG = BC = 4$

L'aire —

$7 \times 4 = 28$

L'aire de $EFGH$ est 28, comme celle de $ABCD$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`22` → 22 est le périmètre du rectangle. L'aire est le produit de la longueur par la largeur.

EXERCICE 75 · RAISONNEMENT

La partie commune

Soit $ABCD$ un carré de côté 6 et de centre O. On note $EFGH$ l'image de ce carré par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. Calculer l'aire de la partie commune aux deux carrés, sans écrire l'unité.

Donne l'aire, sans écrire l'unité.

Réponse attendue : 9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'image de A est O : le carré $EFGH$ a un sommet en O, et ses côtés sont parallèles à ceux de $ABCD$.
2. La partie commune est un carré qui a pour sommets opposés O et C : quelle est la longueur de son côté ?

CORRECTION

Le carré image — A a pour image O : le carré $EFGH$ a pour sommet $E = O$, et ses côtés partent de O parallèlement aux côtés $[AB]$ et $[AD]$, dans le même sens.

$$A \longmapsto O$$

La partie commune — Le côté de $EFGH$ issu de O et parallèle à (AB) passe par le milieu de $[BC]$, celui qui est parallèle à (AD) passe par le milieu de $[DC]$. La partie commune est le carré de diagonale $[OC]$, dont le côté est la moitié de 6.

$$3 \times 3 = 9$$

L'aire de la partie commune est 9, le quart de l'aire du carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → La partie commune n'est pas la moitié du carré : c'est un carré de côté 3.

36 → Les deux carrés ne se superposent pas : le carré image est décalé du vecteur $\overrightarrow{AO}$.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Un angle du losange image

Soit $ABCD$ un losange tel que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 70 degrés. On note E, F, G et H les images respectives de A, B, C et D par une translation. Combien mesure, en degrés, l'angle $\widehat{FGH}$?

Donne la mesure en degrés, sans le symbole.

Réponse attendue : `110`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve les angles : l'angle $\widehat{FGH}$ est égal à l'angle $\widehat{BCD}$ du losange.
2. Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs ont pour somme 180 degrés.

CORRECTION

Le losange — Un losange est un parallélogramme : ses angles consécutifs sont supplémentaires.

$\widehat{BCD} = 180° - 70° = 110°$

La translation —

$\widehat{FGH} = \widehat{BCD} = 110°$

L'angle $\widehat{FGH}$ mesure 110 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`70` → 70 degrés est l'angle en B, donc l'angle en F. L'angle $\widehat{FGH}$ a pour sommet G, l'image de C.

EXERCICE 77 · BASE

Le centre du cercle image

Un cercle (C) a pour centre O et pour rayon 4, et A est un point de (C). Quel est le centre du cercle image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$?

Écris le nom du point.

Réponse attendue : `A` — aussi acceptées : le point A · point A · c'est A · c'est le point A · = A · le centre est A · le centre est le point A · centre A · c'est le centre A

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cercle image a pour centre l'image du centre.
2. Le vecteur de la translation part de O : où arrive-t-il ?

CORRECTION

Le centre — L'image d'un cercle est le cercle de même rayon qui a pour centre l'image du centre.

$O \longmapsto A$

Le cercle image — Le cercle image a pour centre A et pour rayon 4 : il passe par O, puisque $OA = 4$.

$(C) \longmapsto$ le cercle de centre A et de rayon 4

Le centre du cercle image est le point A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`O / le point O / point O` → Le centre aussi se déplace : O a pour image A.

EXERCICE 78 · PRATIQUE

Le centre par le calcul

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle (C) a pour centre le point $K(2, -1)$ et pour rayon 3. Déterminer les coordonnées du centre L du cercle image de (C) par la translation de vecteur $\vec{u}$ de composantes -5 et 3.

Écris le couple de coordonnées de L, entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(-3;2)` — aussi acceptées : (-3,2) · L(-3;2) · L(-3,2) · L=(-3;2) · L=(-3,2) · -3;2 · x=-3;y=2 · x=-3 et y=2 · x=-3,y=2 · (x;y)=(-3;2) · (x,y)=(-3,2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cercle image a pour centre l'image du centre K.
2. Le vecteur $\overrightarrow{KL}$ est égal au vecteur $\vec{u}$: ajoute ses composantes aux coordonnées de K.

CORRECTION

Le centre — L'image du cercle a pour centre l'image de K et pour rayon 3.

$\overrightarrow{KL} = \vec{u}$

Les coordonnées —

$L(2-5, -1+3) = L(-3, 2)$

$L(-3, 2)$, et le cercle image a le même rayon, 3.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(7;-4)` / `(7,-4)` / `L(7;-4)` / `L(7,-4)` → Tu as retranché les composantes du vecteur : l'image s'obtient en les **ajoutant**.

EXERCICE 79 · DEFI

La corde commune

Un cercle (C) a pour centre O et pour rayon 13. On note (C') son image par une translation dont le vecteur a pour longueur 10. Les deux cercles se coupent en deux points P et Q. Calculer la distance PQ.

Donne la distance PQ.

Réponse attendue : 24

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cercle (C') a pour centre l'image O' de O, avec $OO' = 10$, et le même rayon que (C).
2. P est à la même distance de O et de O' : la droite (PQ) est la médiatrice de $[OO']$. Applique le théorème de Pythagore dans le triangle formé par O, P et le milieu de $[OO']$.

CORRECTION

Le cercle image — Le cercle (C') a pour centre O', image de O, et pour rayon 13.

$OO' = 10$

La médiatrice — P et Q sont chacun à la distance 13 de O et de O' : la droite (PQ) est la médiatrice de $[OO']$. Elle coupe $[OO']$ en son milieu I, qui est aussi le milieu de $[PQ]$.

$OI = 5$

Pythagore — Le triangle OIP est rectangle en I.

$IP^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \quad \text{donc} \quad IP = 12$

La corde —

$PQ = 2 \times 12 = 24$

$PQ = 24.$

PIÈGES ANTICIPÉS

`12` → 12 est la distance IP : le milieu I de $[OO']$ est aussi le milieu de $[PQ]$, il faut doubler.

`10` → 10 est la distance des centres OO', pas la longueur de la corde $[PQ]$.

EXERCICE 80 · PRATIQUE

Le périmètre du parallélogramme

(C_1) et (C_2) sont deux cercles de rayon 4, de centres respectifs I et J tels que $IJ = 3$, sécants en A et B. La droite passant par A et parallèle à (IJ) recoupe (C_1) en M. Calculer le périmètre du quadrilatère $MAJI$.

Donne le périmètre du quadrilatère $MAJI$.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ envoie le cercle (C_1) sur le cercle (C_2), et la droite (MA) sur elle-même : quelle est l'image de M ?
2. Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{IJ}$: $MAJI$ est un parallélogramme. Ses côtés $[IM]$ et $[JA]$ sont des rayons.

CORRECTION

La translation — La translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ envoie (C_1) sur (C_2), et la droite (MA), qui a la direction du vecteur, sur elle-même. Le point M, commun à cette droite et à (C_1), a pour image un point commun à la droite et à (C_2) : c'est A.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{IJ}$$

Les côtés — $MAJI$ est un parallélogramme. Les côtés $[MA]$ et $[JI]$ mesurent IJ, les côtés $[AJ]$ et $[IM]$ sont des rayons.

$$MA = JI = 3 \quad ; \quad AJ = IM = 4$$

Le périmètre —

$$2 \times (3 + 4) = 14$$

Le périmètre de $MAJI$ est 14.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → 7 est la somme de deux côtés consécutifs : le parallélogramme a quatre côtés.

EXERCICE 81 · RAISONNEMENT

Quand le rayon égale la distance des centres

(C_1) et (C_2) sont deux cercles de rayon 5, de centres respectifs I et J tels que $IJ = 5$, sécants en A et B. La droite passant par A et parallèle à (IJ) recoupe (C_1) en M. Quelle est la nature du quadrilatère $MAJI$?

Réponds par un mot : losange, rectangle, carré…

Réponse attendue : `losange` — aussi acceptées : un losange · c'est un losange · maji est un losange · le quadrilatere est un losange · le quadrilatere maji est un losange

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Montre d'abord, avec la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$, que le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
2. Compare les longueurs MA, AJ, JI et IM, puis regarde le triangle AIJ.

CORRECTION

Un parallélogramme — La translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ envoie (C_1) sur (C_2) et laisse la droite (MA) en place : elle envoie M et A sur les deux points de (C_2) de cette droite. L'image de A n'est pas A : l'image de M est donc A.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{IJ}$$

Les côtés — $MAJI$ est un parallélogramme dont les côtés consécutifs $[AJ]$ et $[JI]$ mesurent tous deux 5 : c'est un losange.

$$AJ = JI = 5$$

Pas un carré — Le triangle AIJ a ses trois côtés égaux à 5 : il est équilatéral, et l'angle $\widehat{AJI}$ mesure 60 degrés, pas 90.

$$\widehat{AJI} = 60°$$

$MAJI$ est un losange, qui n'est pas un carré.

PIÈGES ANTICIPÉS

`carre / un carre` → Un carré a des angles droits. Ici le triangle AIJ est équilatéral : l'angle en J mesure 60 degrés.

`rectangle / un rectangle` → Les angles ne sont pas droits : l'angle $\widehat{AJI}$ mesure 60 degrés.

`parallelogramme / un parallelogramme / c'est un parallelogramme / maji est un parallelogramme` → C'est vrai, $MAJI$ est un parallélogramme, mais ce n'est pas assez précis : compare ses côtés consécutifs $[AJ]$ et $[JI]$.

EXERCICE 82 · BASE

La distance du centre à la tangente

Un cercle (C) de centre O et de rayon 5 est tangent à une droite d. Une translation envoie O sur K et la droite d sur une droite d_1. Calculer la distance du point K à la droite d_1.

Donne la distance du point K à la droite d_1.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une translation conserve le contact : l'image du cercle est tangente à l'image de la droite.
2. Le cercle image a pour centre K et le même rayon que (C).

CORRECTION

Le contact — Le cercle image a pour centre K et pour rayon 5, et il est tangent à la droite d_1, image de d.

La distance — Un cercle est tangent à une droite quand la distance de son centre à la droite est égale à son rayon.

$$\text{distance de } K \text{ à } d_1 = 5$$

La distance du point K à la droite d_1 est 5, comme celle de O à d.

PIÈGES ANTICIPÉS

`10` → 10 est le diamètre. Le centre d'un cercle est à la distance d'un rayon de chaque tangente.

EXERCICE 83 · PRATIQUE

Un cercle qui s'éloigne

Un cercle (C) de centre O et de rayon 2 est tangent en A à une droite d. On note K l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. Calculer la distance du point K à la droite d.

Donne la distance du point K à la droite d.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le rayon $[OA]$ est perpendiculaire à la tangente d.
2. Le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AO}$: les points A, O et K sont alignés sur la perpendiculaire à d en A.

CORRECTION

La perpendiculaire — La tangente en A est perpendiculaire au rayon $[OA]$: la droite (AO) est perpendiculaire à d.

Le point K — Le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AO}$: O est le milieu de $[AK]$, et K est sur la perpendiculaire à d en A.

$$AK = 2\,AO = 4$$

La distance — La droite (AK) est perpendiculaire à d en A : la distance de K à d est AK.

$$AK = 4$$

La distance de K à d est 4 : le cercle image, de rayon 2, ne touche plus la droite d. Il est tangent à l'image de d, la parallèle à d passant par O.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → 2 est la distance de O à d. Le point K est l'image de O : il s'éloigne encore de 2.

`0` → Le vecteur $\overrightarrow{AO}$ éloigne le cercle de la droite : K n'est pas sur d.

EXERCICE 84 · RAISONNEMENT

Deux cercles tangents

Soient A et B deux points d'une droite d tels que $AB = 8$, et (C) un cercle de rayon 4 tangent à d en A. On note (C') l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Combien les cercles (C) et (C') ont-ils de points communs ?

Donne le nombre de points communs.

Réponse attendue : 1 — aussi acceptées : un · un seul · un seul point · un point · un point commun · un seul point commun · ils sont tangents · tangents

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cercle (C') a pour centre l'image O' du centre O de (C), et le même rayon 4 : calcule la distance OO'.
2. Compare la distance des centres à la somme des rayons.

CORRECTION

Les centres — Le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$OO' = AB = 8$$

Comparer — La distance des centres est égale à la somme des rayons.

$$OO' = 4 + 4$$

Conclure — Les deux cercles sont tangents extérieurement : ils ont un seul point commun, le milieu de $[OO']$.

$$(C) \text{ et } (C') \text{ sont tangents}$$

Les cercles ont un seul point commun : ils sont tangents en le milieu de $[OO']$. La droite d, elle, est tangente aux deux cercles, en A et en B.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2 / deux / deux points` → Deux points communs, c'est pour une distance des centres plus petite que la somme des rayons. Ici $OO' = 8$, exactement la somme des rayons.

`0 / aucun / aucun point` → Les cercles ne sont pas trop éloignés : la distance des centres est exactement la somme des rayons.

EXERCICE 85 · DEFI

Encore tangent

Un cercle (C) de centre O et de rayon 3 est tangent en A à une droite d. Pour un réel k, on considère la translation de vecteur $k\overrightarrow{AO}$. Déterminer le réel k, non nul, pour lequel l'image de (C) est encore tangente à la droite d.

Donne la valeur de k.

Réponse attendue : -2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cercle image a pour centre l'image O' de O et pour rayon 3 : il est tangent à d quand O' est à la distance 3 de d.
2. Le point O' est sur la droite (AO), perpendiculaire à d. Le vecteur $\overrightarrow{AO'}$ est égal à $(1 + k)$ fois le vecteur $\overrightarrow{AO}$.

CORRECTION

Le centre image —

$$\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{AO} = (1 + k)\overrightarrow{AO}$$

La condition — O' est sur la perpendiculaire à d en A : sa distance à d est AO', et elle doit valoir le rayon.

$$|1+k| \times 3 = 3 \iff 1+k = 1 \text{ ou } 1+k = -1$$

Le réel k — La valeur $k = 0$ ne déplace pas le cercle : on l'écarte.

$$k = -2$$

$k = -2$: le cercle passe de l'autre côté de d et la touche encore en A.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → Avec $k = 2$, le centre s'éloigne : il est à la distance 9 de d.

-1 → Avec $k = -1$, le centre arrive en A, sur la droite d : le cercle coupe d en deux points.

EXERCICE 86 · PRATIQUE

La distance entre les axes

D et D' sont deux droites parallèles. À un point M, on associe son symétrique M_1 par rapport à D, puis le symétrique N de M_1 par rapport à D'. On mesure $MN = 9$. Calculer la distance entre les droites D et D'.

Donne la distance entre les deux droites.

Réponse attendue : 9/2 — aussi acceptées : 4.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Faire les deux symétries l'une après l'autre revient à faire une translation.
2. Le vecteur de cette translation est deux fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A est un point de D et B son projeté orthogonal sur D'.

CORRECTION

La translation —

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB}$$

La distance — AB est la distance entre les deux droites.

$$AB = \frac{MN}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Les droites D et D' sont distantes de $4{,}5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

18 → C'est MN qui vaut le double de la distance des droites : on divise 9 par 2.

9 → Chaque symétrie double une distance : le déplacement MN est deux fois la distance entre les droites.

EXERCICE 87 · RAISONNEMENT

Un point sur le second axe

D et D' sont deux droites parallèles, distantes de 2, et M est un point de D'. On note M_1 le symétrique de M par rapport à D, puis N le symétrique de M_1 par rapport à D'. Calculer la

distance M_1N.

Donne la distance M_1N.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Place les points sur la perpendiculaire aux deux droites qui passe par M.
2. M est à la distance 2 de D : à quelle distance de D' se trouve M_1 ?

CORRECTION

Le point M1 — M est sur D', donc à la distance 2 de D. Son symétrique M_1 est de l'autre côté de D, à la distance 2 : il est à la distance 4 de D'.

$$MM_1 = 4$$

Le point N — N est le symétrique de M_1 par rapport à D' : il est de l'autre côté de D', à la même distance 4.

$$M_1N = 2 \times 4 = 8$$

$M_1N = 8$. Le déplacement MN, lui, vaut 4 : deux fois la distance des droites, comme pour tout point.

PIÈGES ANTICIPÉS

4 → 4 est la distance MN, le déplacement de la translation. On demande la distance de M_1 à N.

EXERCICE 88 · BASE

La médiatrice comme lieu

Soient A et B deux points distincts. Quel est le lieu des points M du plan tels que $MA = MB$?

Nomme la ligne, par exemple « le cercle de centre A ».

Réponse attendue : `la médiatrice de [AB]` — aussi acceptées : médiatrice de [AB] · la médiatrice du segment [AB] · médiatrice du segment [AB] · la médiatrice · médiatrice · la médiatrice de AB · médiatrice de AB · c'est la médiatrice de [AB] · c'est la médiatrice · la médiatrice de [BA] · médiatrice de [BA]

INDICES, DANS L'ORDRE

1. M est à la même distance de A et de B.
2. Quelle droite est formée des points équidistants des extrémités d'un segment ?

CORRECTION

Équidistant — Un point M tel que $MA = MB$ est à égale distance des extrémités du segment $[AB]$.

$$MA = MB$$

Le lieu — Les points équidistants de A et de B forment la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

$$\text{la médiatrice de } [AB]$$

Le lieu est la médiatrice du segment $[AB]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`le cercle de diamètre [AB] / cercle de diamètre [AB] / le cercle / cercle` → Le cercle de diamètre $[AB]$ est le lieu des points d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle droit. Ici on veut $MA = MB$.

`(AB) / la droite (AB) / droite (AB)` → Sur la droite (AB), seul le milieu de $[AB]$ est à égale distance de A et de B.

EXERCICE 89 · DEFI

La plus courte diagonale

On considère deux droites D et D' perpendiculaires en un point O, et un point A qui n'est ni sur D ni sur D', tel que $OA = 10$. Soit M un point variable sur D. La perpendiculaire à la droite (AM) passant par A coupe la droite D' en N. Calculer la plus petite valeur possible de la distance MN.

Donne la plus petite valeur de MN.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On note I le milieu de $[MN]$: les triangles MON et MAN sont rectangles, en O et en A. Compare IO, IA et MN.
2. I est sur la médiatrice de $[OA]$: quelle est la plus petite distance possible entre I et O ?

CORRECTION

Les milieux — Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets.

$$IO = IA = \frac{MN}{2}$$

Le lieu de I — I est sur la médiatrice de $[OA]$. Le point de cette droite le plus proche de O est le milieu de $[OA]$.

$$IO \geqslant \frac{OA}{2} = 5$$

Le minimum — Il est atteint quand M est le projeté orthogonal de A sur D : $OMAN$ est alors un rectangle.

$$MN = 2\,IO \geqslant 10$$

La plus petite valeur de MN est 10, la longueur OA : c'est quand $OMAN$ est un rectangle, dont $[MN]$ et $[OA]$ sont les diagonales.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5` → 5 est la plus petite valeur de IO. La distance MN en est le double.

`20` → MN vaut deux fois IO, et IO vaut au moins la moitié de OA : le minimum est OA lui-même.

EXERCICE 90 · RAISONNEMENT

Une droite décalée

Soit D une droite, A un point de D et B un point tel que la droite (AB) soit perpendiculaire à D et que $AB = 3$. Un point M varie sur D, et N est le point tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal à 2

fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le point N décrit une droite. Calculer la distance entre cette droite et la droite D.

Donne la distance entre les deux droites.

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. N est l'image de M par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$: le lieu de N est l'image de D.
2. Cherche l'image de A : à quelle distance de D est-elle ?

CORRECTION

Le lieu — N est l'image de M par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$. Quand M décrit D, N décrit l'image de D : la parallèle à D passant par l'image E de A.

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$$

La distance — La droite (AE) est perpendiculaire à D en A : la distance entre les deux droites est AE.

$$AE = 2 \times 3 = 6$$

Le point N décrit la parallèle à D située à la distance 6, du côté de B.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → 3 est la distance AB. Le vecteur de la translation est deux fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 91 · RAISONNEMENT

Le centre du lieu

Soient O et A deux points tels que $OA = 8$, et (C) le cercle de centre O et de rayon 2. Un point M varie sur (C), et N est le point tel que le vecteur $\overrightarrow{NM}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{OA}$. Le point N décrit un cercle. Calculer la distance entre le point A et le centre de ce cercle.

Donne la distance entre A et le centre du cercle.

Réponse attendue : 16

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Attention à l'ordre des lettres : c'est le vecteur $\overrightarrow{NM}$ qui est donné. Écris le vecteur $\overrightarrow{MN}$.
2. Le centre du cercle décrit par N est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

CORRECTION

La translation — Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{NM}$.

$$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO}$$

Le centre — N décrit l'image de (C) : le cercle de rayon 2 dont le centre K est l'image de O.

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AO}$$

La distance — Le point O est le milieu de $[AK]$.

$AK = 2\,AO = 16$

Le centre du cercle décrit par N est à la distance 16 de A.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Le centre serait A avec la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. Ici le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est l'opposé : c'est le vecteur $\overrightarrow{AO}$.

`8` → 8 est la distance de A à O. Le centre du cercle décrit par N est l'image de O, encore 8 plus loin.

EXERCICE 92 · RAISONNEMENT

Un parallélogramme qui devient rectangle

Soient A et B deux points tels que $AB = 15$. Un point M varie sur le cercle de centre A et de rayon 8, et N est le point tel que $ABNM$ soit un parallélogramme. Calculer la distance AN lorsque la droite (AM) est perpendiculaire à la droite (AB).

Donne la distance AN.

Réponse attendue : 17

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $ABNM$ est un parallélogramme : le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$, et $BN = AM$.
2. Quand l'angle en A est droit, le parallélogramme est un rectangle : $[AN]$ en est une diagonale.

CORRECTION

Le rectangle — $ABNM$ est un parallélogramme avec un angle droit en A : c'est un rectangle, et $BN = AM = 8$.

$BN = AM = 8$

Pythagore — Le triangle ABN est rectangle en B.

$AN^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \quad \text{donc} \quad AN = 17$

$AN = 17$. Quand M décrit son cercle, N décrit le cercle de centre B et de rayon 8, image du premier par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`23` → On n'ajoute pas les deux côtés : $[AN]$ est la diagonale d'un rectangle, elle se calcule par le théorème de Pythagore.

`289` → 289 est le carré de la distance : prends la racine carrée.

EXERCICE 93 · RAISONNEMENT

La corde retrouvée par les orthocentres

Soient A et B deux points d'un cercle (C) de centre O et de rayon $6{,}5$. Pour un point M de (C), distinct de A et de B, on note H l'orthocentre du triangle AMB. Le point H décrit un cercle de centre K, et on mesure $OK = 5$. Calculer la distance AB.

Donne la distance AB.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On note D le point de (C) diamétralement opposé à A : le point H est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$, et K est l'image de O.
2. La distance OK est donc égale à la distance DB. Le triangle ABD est rectangle en B : applique le théorème de Pythagore.

CORRECTION

La translation — H est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$: il décrit l'image du cercle (C), dont le centre K est l'image de O.

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{DB} \quad \text{donc} \quad DB = OK = 5$$

Le triangle ABD — $[AD]$ est un diamètre : $AD = 13$, et le triangle ABD est rectangle en B.

$$AB^2 = AD^2 - DB^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

La distance —

$$AB = 12$$

$AB = 12$: la distance OK est la longueur du vecteur $\overrightarrow{DB}$, et le théorème de Pythagore dans le triangle ABD donne la corde.

PIÈGES ANTICIPÉS

`8` → On ne retranche pas les longueurs : dans le triangle ABD, rectangle en B, ce sont les carrés qui se retranchent.

`sqrt(194)` → L'hypoténuse du triangle ABD est le diamètre $[AD]$: on retranche le carré de DB au carré de AD, on ne les ajoute pas.

`144` → 144 est le carré de la distance : prends la racine carrée.

`5` → 5 est la distance OK, égale à la distance DB : c'est un côté de l'angle droit du triangle ABD. On demande la corde AB.

`13` → 13 est le diamètre AD, l'hypoténuse du triangle ABD. La corde AB se calcule par le théorème de Pythagore.

EXERCICE 94 · DEFI

De l'autre côté de la corde

Soient A et B deux points d'un cercle (C) de centre O et de rayon 10, tels que $AB = 16$. Pour un point M de (C), distinct de A et de B, on note H l'orthocentre du triangle AMB ; il décrit un cercle de centre K. Calculer la distance du point K à la droite (AB).

Donne la distance du point K à la droite (AB).

Réponse attendue : 6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point H est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$, où D est le point de (C) diamétralement opposé à A : K est l'image de O.
2. On note I le milieu de $[AB]$. Dans le triangle ABD, la droite (OI) joint les milieux de deux côtés : compare le vecteur $\overrightarrow{DB}$ et le vecteur $\overrightarrow{OI}$.

CORRECTION

Le centre K —

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{DB}$$

La droite des milieux — O est le milieu de $[AD]$ et I celui de $[AB]$: dans le triangle ABD, le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est le double du vecteur $\overrightarrow{OI}$.

$$\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OI}$$

Le symétrique — I est le milieu de $[OK]$, et la droite (OI) est perpendiculaire à (AB) : K est le symétrique de O par rapport à la droite (AB).

La distance — Dans le triangle OIA, rectangle en I, on a $IA = 8$.

$$OI^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \quad \text{donc} \quad IK = OI = 6$$

Le point K est à la distance 6 de la droite (AB) : c'est le symétrique de O par rapport à (AB).

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → 12 est la distance OK. On demande la distance de K à la droite (AB), qui coupe $[OK]$ en son milieu.

8 → 8 est la moitié de la corde AB. La distance cherchée se lit sur la perpendiculaire à (AB).

EXERCICE 95 · PRATIQUE

Le triangle des milieux

On veut construire un triangle ABC dont les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ sont trois points donnés I, J et K, avec $IJ = 4$, $JK = 5$ et $KI = 6$. Calculer le périmètre du triangle ABC ainsi construit.

Donne le périmètre du triangle ABC.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.
2. $[IJ]$ joint les milieux de $[BC]$ et de $[AC]$: il mesure la moitié de AB.

CORRECTION

Les côtés — Par la droite des milieux, chaque côté du triangle ABC mesure le double du segment qui lui est parallèle.

$$AB = 2\,IJ = 8 \quad ; \quad BC = 2\,JK = 10 \quad ; \quad AC = 2\,KI = 12$$

Le périmètre —

$$8 + 10 + 12 = 30$$

Le périmètre du triangle ABC est 30, le double de celui du triangle IJK.

PIÈGES ANTICIPÉS

`15` → 15 est le périmètre du triangle IJK. Chaque côté de ABC mesure le double.

`7.5` → Les côtés de ABC sont plus longs que ceux de IJK : on double, on ne divise pas.

EXERCICE 96 · BASE

Combien de solutions ?

Soient I, J et K trois points non alignés. Combien existe-t-il de triangles ABC tels que I soit le milieu de $[BC]$, J celui de $[AC]$ et K celui de $[AB]$?

Donne le nombre de triangles.

Réponse attendue : `1` — aussi acceptées : un · un seul · un seul triangle · un triangle · une seule solution · il y en a un seul · il n'y en a qu'un · un seul triangle convient

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Reprends l'analyse : la droite (AB) est parallèle à la droite (IJ) et passe par K.
2. Les trois côtés du triangle sont des droites entièrement déterminées : en combien de points se coupent-elles deux à deux ?

CORRECTION

Analyse — Si ABC convient, la droite (AB) est la parallèle à (IJ) passant par K, la droite (AC) la parallèle à (IK) passant par J, et la droite (BC) la parallèle à (JK) passant par I.

$$(AB) \parallel (IJ) \quad ; \quad (AC) \parallel (IK) \quad ; \quad (BC) \parallel (JK)$$

Synthèse — Ces trois droites sont imposées : elles se coupent deux à deux en trois points, qui sont forcément A, B et C. Et le triangle obtenu a bien I, J et K pour milieux.

un seul triangle ABC

Il existe un seul triangle : l'analyse ne laisse qu'une possibilité, et la synthèse vérifie qu'elle convient.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3 / trois / trois triangles` → Avec trois points, on peut construire trois parallélogrammes, mais un seul triangle dont ce sont les milieux des côtés.

`une infinité / infinité` → Les droites des côtés sont imposées par les parallèles : il n'y a aucun choix à faire.

EXERCICE 97 · DEFI

Un parallélogramme entre deux axes

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(1, 3)$ et $B(4, 5)$. On veut construire un point M sur l'axe des abscisses et un point N sur l'axe des ordonnées tels que $ABMN$ soit un parallélogramme. Déterminer les coordonnées du point N.

Écris le couple de coordonnées de N, entre parenthèses, par exemple $(3\,;-4)$.

Réponse attendue : `(0;-2)` — aussi acceptées : (0,-2) · N(0;-2) · N(0,-2) · N=(0;-2) · N=(0,-2) · 0;-2 · x=0;y=-2 · x=0 et y=-2 · x=0,y=-2 · (x;y)=(0;-2) · (x,y)=(0,-2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. $ABMN$ est un parallélogramme : le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$, donc N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
2. Écris $M(m, 0)$: son image a pour abscisse $m - 3$, et elle doit être sur l'axe des ordonnées.

CORRECTION

L'analyse — $ABMN$ est un parallélogramme : le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$, de composantes -3 et -2.

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$$

L'image de M — Avec $M(m, 0)$ sur l'axe des abscisses, son image N a pour coordonnées $m - 3$ et -2. Elle est sur l'axe des ordonnées si son abscisse est nulle.

$$m - 3 = 0 \iff m = 3$$

Les points —

$$M(3, 0) \quad ; \quad N(0, -2)$$

$N(0, -2)$, avec $M(3, 0)$. On vérifie : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{NM}$ ont tous deux pour composantes 3 et 2.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(0;2) / (0,2) / N(0;2) / N(0,2)` → Dans $ABMN$, c'est le vecteur $\overrightarrow{MN}$ qui est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$, et non au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

`(3;0) / (3,0) / N(3;0) / N(3,0)` → $(3, 0)$ sont les coordonnées de M. Le point N est son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

EXERCICE 98 · DEFI **Deux droites parallèles**

Les droites D_1 et D_2 sont parallèles et distantes de 5, et A et B sont deux points tels que $AB = 3$, qui ne sont ni sur D_1 ni sur D_2. On cherche un point M de D_1 et un point N de D_2 tels que $ABMN$ soit un parallélogramme. Combien de solutions ce problème a-t-il ?

Donne le nombre de solutions, ou écris « aucune ».

Réponse attendue : aucune — aussi acceptées : 0 · zéro · zero · aucune solution · aucun · pas de solution · il n'y a pas de solution · il n'y a aucune solution

INDICES, DANS L'ORDRE

1. N doit être l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$: il est sur l'image D_1' de la droite D_1, et sur D_2.
2. La droite D_1' est parallèle à D_1. À quelle distance de D_1 peut-elle être, au plus, si le vecteur mesure 3 ?

CORRECTION

L'analyse — Si $ABMN$ est un parallélogramme, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$: N est sur la droite D_1', image de D_1, et sur D_2.

$N \in D_1' \cap D_2$

La droite image — D_1' est parallèle à D_1, et chaque point de D_1 se déplace de 3 : la distance entre D_1 et D_1' vaut au plus 3.

$\text{distance}(D_1, D_1') \leqslant 3 < 5$

Conclure — D_1' et D_2 sont deux droites parallèles distinctes : elles n'ont aucun point commun, et aucun point N ne convient.

$D_1' \cap D_2 = \varnothing$

Le problème n'a aucune solution : le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est trop court pour passer d'une droite à l'autre.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1 / une / une seule / une seule solution / un` → Avec deux droites sécantes, il y aurait une solution. Ici D_1' est parallèle à D_2 sans lui être égale.

`une infinité / infinité / une infinite` → Il y aurait une infinité de solutions si D_1' était confondue avec D_2. Mais D_1' est à au plus 3 de D_1, et D_2 à 5.

EXERCICE 99 · DEFI

Ce que le bon pont fait gagner

Les berges D et D' d'une rivière sont deux droites parallèles, distantes de 2. Le village A est à la distance 8 de la berge D, et le village B, de l'autre côté de la rivière, est à la distance 10 de la berge D'. Les projetés orthogonaux de A et de B sur la berge D sont distants de 24. On compare deux ponts $[MN]$, perpendiculaires aux berges, avec M sur D et N sur D' : le pont placé juste en face du village A, et celui qui rend le trajet de A à B le plus court possible. De combien le second trajet est-il plus court que le premier ?

Donne la différence des deux trajets.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour le pont en face de A, le trajet de N à B se calcule par le théorème de Pythagore : l'écart est de 24 dans un sens et de 10 dans l'autre.
2. Pour le meilleur pont, on note A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$: le trajet vaut $A'B$ plus la longueur du pont.

CORRECTION

Le pont en face de A — On va de A à la berge en ligne droite, on traverse, puis on rejoint B.

$8 + 2 + \sqrt{24^2 + 10^2} = 8 + 2 + 26 = 36$

Le meilleur pont — A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$: $AM = A'N$, et le trajet le plus court vaut $A'B$ plus le pont. A' est à la distance 8 de la berge D', et B à la distance 10 de l'autre côté : l'écart est de 18 dans un sens et de 24 dans l'autre.

$\sqrt{18^2 + 24^2} + 2 = 30 + 2 = 32$

La différence —

$36 - 32 = 4$

Le meilleur pont fait gagner 4 sur le trajet.

PIÈGES ANTICIPÉS

32 → 32 est la longueur du trajet le plus court. On demande de combien il est plus court que le trajet par le pont en face de A.

36 → 36 est le trajet par le pont en face de A. Il reste à le comparer au trajet le plus court.

6 → Le trajet le plus court traverse aussi le pont : il vaut $A'B$ plus 2, soit $30 + 2 = 32$, et non 30.

EXERCICE 100 · DEFI

Où placer le pont ?

Les berges D et D' d'une rivière sont deux droites parallèles, distantes de 3. Le village A est à la distance 6 de la berge D, et le village B, de l'autre côté, est à la distance 2 de la berge D'. On note H le projeté orthogonal de A sur la berge D', et K celui de B : on a $HK = 10$. Le pont $[MN]$, perpendiculaire aux berges, avec M sur D et N sur D', est placé pour que le trajet de A à B soit le plus court possible. Calculer la distance HN.

Donne la distance HN.

Réponse attendue : 15/2 — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On note A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$: le meilleur pont place N sur le segment $[A'B]$.
2. A' est sur la droite (AH). Les droites $(A'H)$ et (BK) sont parallèles : applique le théorème de Thalès aux triangles $A'HN$ et BKN.

CORRECTION

Le point A' — Le meilleur pont place N sur le segment $[A'B]$, où A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$. A est à la distance 9 de D', et le vecteur le rapproche de 3.

$$A'H = 9 - 3 = 6$$

Thalès — Les droites $(A'H)$ et (BK) sont parallèles, et N est le point commun des droites $(A'B)$ et (HK).

$$\frac{HN}{KN} = \frac{A'H}{BK} = \frac{6}{2} = 3$$

La distance — N est entre H et K, et HN vaut trois fois KN : HN est les trois quarts de HK.

$$HN = \frac{3}{4} \times 10 = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

$HN = 7{,}5$: le pont est plus près du village le plus proche de la rivière.

PIÈGES ANTICIPÉS

90/11 → Tu as joint A à B sans translater A : le segment $[AB]$ traverse la rivière en biais, alors que le pont doit être perpendiculaire aux berges.

5 → Le pont n'est pas au milieu : il est plus près du village le plus proche de la rivière.

`5/2` / `2.5` → $2{,}5$ est la distance KN. On demande la distance HN, du côté de A.

EXERCICE 101 · BASE

Autour d'un sommet

On pave le plan avec des triangles équilatéraux identiques. Combien de triangles se rejoignent en chaque sommet du pavage ?

Donne le nombre de triangles.

Réponse attendue : 6 — aussi acceptées : six · six triangles · 6 triangles

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60 degrés.
2. Autour d'un sommet, la somme des angles vaut 360 degrés.

CORRECTION

Les angles — Autour d'un sommet, les angles des triangles remplissent un tour complet, 360 degrés, et chacun mesure 60 degrés.

$$\frac{360}{60} = 6$$

Six triangles se rejoignent en chaque sommet du pavage.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` / `trois` → Trois, c'est pour les hexagones réguliers, dont l'angle mesure 120 degrés.

EXERCICE 102 · PRATIQUE

Le vecteur d'un pavage

On pave le plan avec des carrés de côté 2, alignés en lignes et en colonnes. Une translation envoie un carreau sur le carreau situé deux colonnes plus à droite et une ligne plus haut. Calculer la longueur du vecteur de cette translation, en valeur exacte.

Donne la longueur, en valeur exacte.

Réponse attendue : `2*sqrt(5)` — aussi acceptées : sqrt(20)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Chaque sommet du carreau se déplace du même vecteur : suis un seul sommet.
2. Deux colonnes à droite font 4, une ligne plus haut fait 2 : applique le théorème de Pythagore.

CORRECTION

Le déplacement — Un sommet du carreau avance de deux côtés vers la droite et d'un côté vers le haut.

$$2 \times 2 = 4 \quad ; \quad 1 \times 2 = 2$$

Pythagore —

$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Le vecteur mesure $2\sqrt{5}$: tout le pavage glisse sur lui-même, chaque carreau tombe sur un autre carreau.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4.47 / 4.48 / 4.5` → C'est une valeur approchée : garde la racine carrée, on demande la valeur exacte.

`6` → On n'ajoute pas les deux déplacements : le vecteur est l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

`sqrt(5)` → Tu as compté en carreaux, pas en longueur : chaque carreau mesure 2.

`20` → 20 est le carré de la longueur : prends la racine carrée.

AH
Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI