— Maths à la carte —

ABDELKADER HAMMAMI

Trigonométrie et mesure des grandeurs

2e année secondaire — sections Sciences et Technologie de l'informatique · Pr Abdelkader Hammami

Le cours

CE QU'IL DIT EN ACCUEILLANT

3aslema ! Le chapitre numéro quatorze : trigonométrie et mesure des grandeurs. El 3am elli fet, chofna le cosinus, le sinus w la tangente mta3 angle aigu, fi le triangle rectangle. Lyoum bech nwass3ouhom l les angles obtus, b le demi-cercle trigonométrique. Bech nchoufou les angles supplémentaires w les angles complémentaires, la tangente w la cotangente, w les relations fondamentales. W ba3d, nesta3mlou hedha el koll bech n9isou : la loi du sinus, l'aire mta3 triangle, w le théorème d'El-Kashi, elli ye5dem fi koll triangle, mouch ken fi le triangle rectangle. Yalla, nabdew.

عسلامة ! الـ chapitre numéro quatorze : trigonométrie et mesure des grandeurs . العام اللي فات ، شفنا le cosinus ، le sinus w la tangente ، angle aigu متاع في ، le triangle rectangle . ليوم باش نوسّعوهم لـ les angles ، obtus بـ le demi-cercle trigonométrique . باش نشوفو les angles supplémentaires w les angles ، la tangente w la cotangente ، w les relations fondamentales . w بعد ، نستعملو هذا الكل complémentaires ، w le théorème d'El-Kashi متاع la loi du sinus ، l'aire : باش نقيسو ، triangle كل في يخدم اللي ، triangle ، موش كان في le triangle rectangle . يالله ، نبداو .

Bonjour ! Le chapitre numéro quatorze : trigonométrie et mesure des grandeurs. L'année dernière, nous avons vu le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu, dans le triangle rectangle. Aujourd'hui, nous allons les étendre aux angles obtus, grâce au demi-cercle trigonométrique. Nous verrons les angles supplémentaires et les angles complémentaires, la tangente et la cotangente, et les relations fondamentales. Ensuite, nous utiliserons tout cela pour mesurer : la loi du sinus, l'aire d'un triangle, et le théorème d'El-Kashi, qui fonctionne dans tous les triangles, et pas seulement dans le triangle rectangle. Allez, on commence.

Ce chapitre prolonge la trigonométrie du triangle rectangle : le **demi-cercle trigonométrique** donne un cosinus et un sinus à tous les angles de 0 à π, y compris les angles obtus.

On s'en sert ensuite pour **mesurer** : longueurs, angles et aires dans un triangle quelconque, avec la loi du sinus et le théorème d'El-Kashi.

OBJECTIFS ANNONCÉS

CE QU'IL DIT EN LES ANNONÇANT

Fi e5er el chapitre hedha, bech tkoun ta3ref :

في آخر الـ chapitre هذا ، باش تكون تعرف :

À la fin de ce chapitre, tu sauras :

- Définir le cosinus et le sinus d'un réel de $[0, \pi]$
  > Définir le cosinus et le sinus d'un réel compris entre zéro et pi.
  > *Définir le cosinus et le sinus d'un réel compris entre zéro et pi.*
- Utiliser les angles supplémentaires et complémentaires, la tangente et la cotangente
  > Utiliser les angles supplémentaires et complémentaires, la tangente et la cotangente.
  > *Utiliser les angles supplémentaires et complémentaires, la tangente et la cotangente.*
- Utiliser les relations fondamentales
  > Utiliser les relations fondamentales.
  > *Utiliser les relations fondamentales.*
- Appliquer la loi du sinus, la formule de l'aire et le théorème d'El-Kashi
  > Appliquer la loi du sinus, la formule de l'aire et le théorème d'El-Kashi.
  > *Appliquer la loi du sinus, la formule de l'aire et le théorème d'El-Kashi.*
- Reconnaître des triangles isométriques ou semblables, utiliser les relations métriques
  > Reconnaître des triangles isométriques ou semblables, et utiliser les relations métriques.
  > *Reconnaître des triangles isométriques ou semblables, et utiliser les relations métriques.*

1. ACTIVITÉ

Rappels

CE QU'IL DIT

Nabdew b tadhkir mel 3am elli fet. Fi triangle rectangle, le cosinus mta3 angle aigu houwa le côté adjacent sur l'hypoténuse, le sinus houwa le côté opposé sur l'hypoténuse, w la tangente hiya le côté opposé sur le côté adjacent. Chedd fi belek zeda les trois angles remarquables : trente degrés hiya pi sur six, quarante-cinq degrés hiya pi sur quatre, w soixante degrés hiya pi sur trois. Cosinus de pi sur trois égale un demi, w sinus de pi sur six égale un demi zeda. Fi el chapitre hedha, bech nwass3ou le cosinus w le sinus 7atta l les angles obtus.

نبداو بتذكير من العام اللي فات . في triangle rectangle ، le cosinus متاع angle aigu هو le côté adjacent sur l'hypoténuse ، le sinus هو le côté opposé sur l'hypoténuse ، w la tangente هي le côté opposé sur le côté adjacent . شدّ في بالك زادة les trois angles remarquables : trente degrés هي pi sur six ، quarante-cinq هي degrés pi sur quatre ، w soixante degrés هي pi sur trois . cosinus de pi sur trois égale un demi ، w sinus de pi sur six égale un demi زادة . في الـ chapitre هذا ، باش نوسّعو le cosinus w le sinus حتّى لـ les angles obtus .

Commençons par un rappel de l'année dernière. Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le côté adjacent sur l'hypoténuse, le sinus est le côté opposé sur l'hypoténuse, et la tangente est le côté opposé sur le côté adjacent. Retiens aussi les trois angles remarquables : trente degrés, c'est pi sur six, quarante-cinq degrés, c'est pi sur quatre, et soixante degrés, c'est pi sur trois. Cosinus de pi sur trois égale

un demi, et sinus de pi sur six égale un demi aussi. Dans ce chapitre, nous allons étendre le cosinus et le sinus jusqu'aux angles obtus.

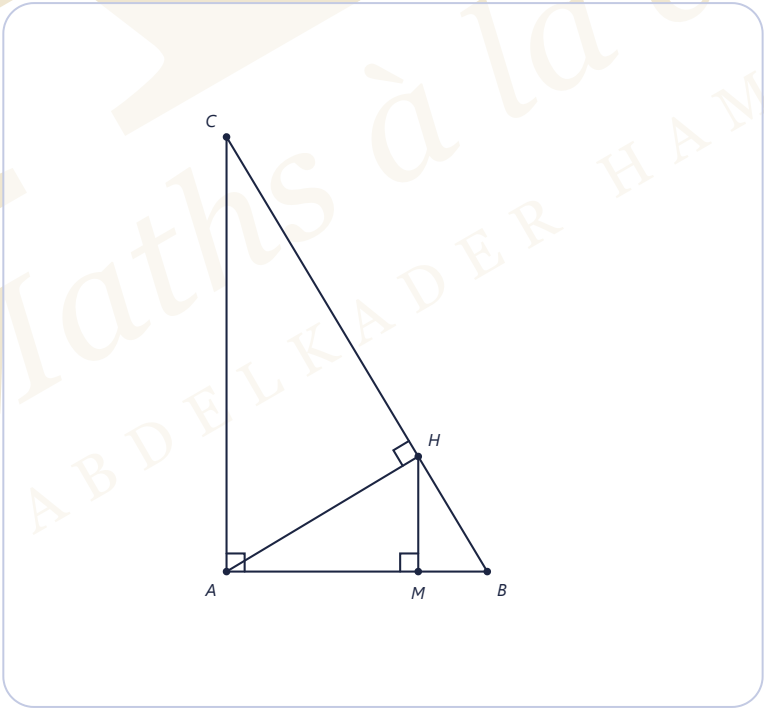
L'année dernière, on a défini le cosinus, le sinus et la tangente d'un **angle aigu** dans un triangle rectangle. Dans un triangle ABC rectangle en A :

$$\cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC}, \qquad \sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC}, \qquad \tan\widehat{C} = \frac{AB}{AC}.$$

On connaît aussi les valeurs pour trois angles remarquables :

Angle α (en radians)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Angle α (en degrés)	$30°$	$45°$	$60°$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Enfin, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point $M(x, y)$ a pour symétriques $M'(x, -y)$ par rapport à l'axe des abscisses, $M''(-x, y)$ par rapport à l'axe des ordonnées, et $N(-x, -y)$ par rapport à O. Le deuxième sert pour les angles supplémentaires.



Cinq triangles rectangles dans une seule figure.

Un triangle ABC rectangle en A : A est en bas à gauche, B en bas à droite et C au-dessus de A. Le point H est sur le côté [BC] : c'est le pied de la hauteur issue de A. Le point M est sur le côté [AB], à la verticale de H : c'est le projeté orthogonal de H sur (AB). Des équerres marquent les angles droits en A, en H et en M.

Maths à la carte · ABDELKADER HAMMAMI

LE COSINUS

$$\cos \widehat{C} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

LE SINUS

$$\sin \widehat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

LA TANGENTE

$$\tan \widehat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, ABC est un triangle rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A, et M est le projeté orthogonal de H sur la droite (AB). a) Citer tous les triangles rectangles. b) Citer les angles égaux à l'angle $\widehat{ACB}$. c) Donner cinq expressions différentes de $\cos \widehat{ACB}$.

Les triangles rectangles — Il y en a cinq. Le triangle ABC est rectangle en A. Les triangles AHC et AHB sont rectangles en H. Les triangles AMH et HMB sont rectangles en M.

Les angles égaux — Dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{ACB}$ est le complémentaire de l'angle $\widehat{ABC}$. Dans le triangle AHB, l'angle $\widehat{BAH}$ l'est aussi, et dans le triangle HMB, c'est l'angle $\widehat{BHM}$. $\widehat{ACB} = \widehat{BAH} = \widehat{BHM}$

Cinq expressions — Dans chacun des cinq triangles rectangles, on écrit le côté adjacent sur l'hypoténuse, pour l'angle qui est égal à l'angle $\widehat{ACB}$.

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB} = \frac{AM}{AH} = \frac{HM}{HB}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB} = \frac{AM}{AH} = \frac{HM}{HB}$$

À ne pas faire : $\cos \widehat{C} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ — $\cos \widehat{C} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$. Le cosinus prend le côté qui touche l'angle, le sinus prend le côté d'en face. Les deux se divisent par l'hypoténuse.

2. ACTIVITÉ

Pour comprendre : le demi-cercle trigonométrique

CE QU'IL DIT

Ne5dhou repère orthonormé : O, A w B, w A prime houwa le symétrique mta3 A par rapport à O. Nrasmou le demi-cercle elli le diamètre mte3ou AA prime w elli yet3adda men B : hedha nsammiwh le demi-cercle trigonométrique, w le rayon mte3ou un. Tawa ne5dhou 3lih point I, elli ya3tina l'angle IOA égale pi sur six. Ki nhabbtou I 3la la droite OA, nal9aw triangle rectangle, l'hypoténuse mte3ou un : donc l'abscisse mta3 I hiya cosinus de pi sur six, w l'ordonnée hiya sinus de pi sur six. W le symétrique I prime

par rapport à la droite OB 3andou nafs l'ordonnée, w l'abscisse opposée. Chedd fi belek : l koll réel alpha bin zéro w pi, thamma point we7ed bark 3la le demi-cercle.

le demi- نرسمو . A par rapport à O متاع le symétrique هو repère orthonormé : O ، A w B ، w A prime ناخذو le demi-cercle trigonométrique ، هذا نسمّيوه : B من اللي يتعدّى A A prime w متاعو le diamètre اللي cercle la على نهبّطو I كي . l'angle I O A égale pi sur six اللي يعطينا ، point I عليه ناخذو توّا . un متاعو w le rayon cosinus de pi sur هي I متاع un : donc l'abscisse متاعو triangle rectangle ، l'hypoténuse نلقاو ، droite O A عندو نفس sinus de pi sur six . w le symétrique I prime par rapport à la droite O B هي six ، w l'ordonnée le على واحد برك point ثمّة ، zéro w pi بين réel alpha لكل : شدّ في بالك . l'ordonnée ، w l'abscisse opposée . demi-cercle

Prenons un repère orthonormé : O, A et B, et A prime est le symétrique de A par rapport à O. On trace le demi-cercle de diamètre A A prime qui passe par B : on l'appelle le demi-cercle trigonométrique, et son rayon vaut un. Plaçons-y un point I tel que l'angle I O A égale pi sur six. En projetant I sur la droite O A, on obtient un triangle rectangle d'hypoténuse un : l'abscisse de I est donc cosinus de pi sur six, et son ordonnée est sinus de pi sur six. Et le symétrique I prime par rapport à la droite O B a la même ordonnée, et l'abscisse opposée. Retiens bien : à chaque réel alpha entre zéro et pi correspond un seul point du demi-cercle.

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan et A' le symétrique de A par rapport à O. On désigne par $\mathscr{C}$ le demi-cercle de diamètre $[AA']$ qui contient le point B. Ce demi-cercle est appelé **demi-cercle trigonométrique**. Son rayon vaut 1, et $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$.

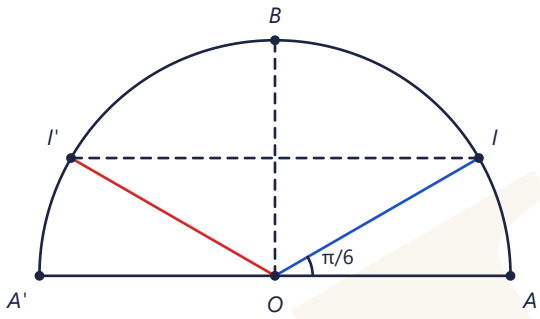
Soit I le point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{IOA} = \dfrac{\pi}{6}$. On projette I sur la droite (OA) : on obtient un triangle rectangle d'hypoténuse $OI = 1$, donc l'abscisse de I est $\cos\dfrac{\pi}{6}$ et son ordonnée est $\sin\dfrac{\pi}{6}$.

$$I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Le symétrique I' de I par rapport à la droite (OB) est encore sur $\mathscr{C}$: il a la même ordonnée et l'abscisse opposée, et l'angle $\widehat{I'OA}$ mesure $\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$.

Plus généralement, pour chaque réel α de l'intervalle $[0, \pi]$, il existe **un seul** point M du demi-cercle $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \alpha$. Sur $\mathscr{C}$, il y a un seul point d'abscisse $0{,}8$, mais deux points d'ordonnée $0{,}5$.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI



I et I' ont la même ordonnée et des abscisses opposées.

Un demi-cercle de centre O et de rayon 1, posé sur le diamètre [A'A] : A est à droite, A' à gauche, et B est le sommet du demi-cercle, au-dessus de O. Le point I est sur le demi-cercle, à droite, avec un angle IOA de pi sur 6. Le point I' est son symétrique par rapport à la droite (OB) : il est à gauche, à la même hauteur que I.

LE REPÈRE

$$A(1,0) \quad ; \quad B(0,1) \quad ; \quad A'(-1,0)$$

I ET SON SYMÉTRIQUE

$$I\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad I'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Sur le demi-cercle trigonométrique, on désigne par J et K les points tels que $\widehat{JOA}=\frac{\pi}{4}$ et $\widehat{KOA}=\frac{\pi}{3}$. a) Préciser les coordonnées de J et de K. b) Déterminer les coordonnées de leurs symétriques J' et K' par rapport à la droite (OB).

Le point J — Le rayon vaut 1 : l'abscisse de J est le cosinus de $\frac{\pi}{4}$ et son ordonnée est le sinus de $\frac{\pi}{4}$.

$$J\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Le point K — De même, l'abscisse de K est le cosinus de $\frac{\pi}{3}$ et son ordonnée est le sinus de $\frac{\pi}{3}$.

$$K\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Les symétriques — La symétrie par rapport à la droite (OB) garde l'ordonnée et change l'abscisse en son opposé.

$$J'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ; \quad K'\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

À ne pas faire : Sur le demi-cercle, il y a un seul point d'ordonnée $0{,}5$ — Il y en a deux : l'un à droite de (OB), l'autre à gauche. Deux points symétriques par rapport à la droite (OB) ont la même ordonnée. C'est l'abscisse qui les distingue.

3. DÉFINITION

Cosinus et sinus d'un réel

CE QU'IL DIT

Tawa et-ta3rif. Ne5dhou réel alpha bin zéro w pi, w M houwa le point el wa7id 3la le demi-cercle trigonométrique elli ya3tina l'angle AOM égale alpha. Le cosinus mta3 alpha houwa l'abscisse mta3 M, w le sinus mta3 alpha houwa l'ordonnée mta3 M. Na9raw toul chwaya valeurs : ki M yji 3la A, cosinus de zéro égale un w sinus de zéro égale zéro. Ki M yji 3la B, cosinus de pi sur deux égale zéro w sinus de pi sur deux égale un. W ki M yji 3la A prime, cosinus de pi égale moins un w sinus de pi égale zéro. W 5ater M dima 3la le demi-cercle, le cosinus yo93ed bin moins un w un, w le sinus bin zéro w un.

تولّا التعريف . ناخذو réel alpha بين M ، w pi zéro هو le point الوحيد على le demi-cercle trigonométrique اللي يعطينا le cosinus égale alpha . A O M l'angle متاع alpha هو l'abscisse متاع le sinus w ، M متاع alpha هو l'ordonnée متاع M . نقراو طول شويّة valeurs : كي M يجي على zéro égale un w sinus de zéro égale zéro ، cosinus de zéro A كي B ، cosinus de pi sur deux égale zéro w sinus de pi sur deux égale un . w على يجي M كي . égale zéro M على يجي w . zéro égale moins un w sinus de pi égale zéro ، cosinus de pi égale A prime خاطر M ديما على le demi-cercle ، le cosinus يقعد بين le sinus w un ، w un بين moins un w un zéro .

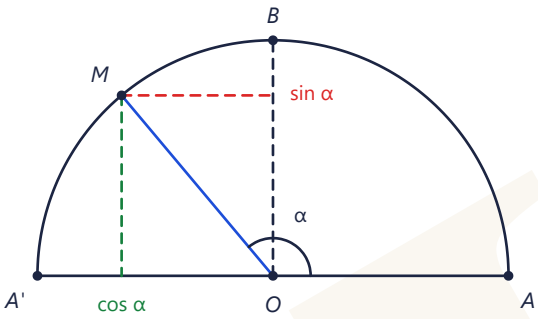
Voici la définition. On prend un réel alpha entre zéro et pi, et M est l'unique point du demi-cercle trigonométrique tel que l'angle A O M égale alpha. Le cosinus de alpha est l'abscisse de M, et le sinus de alpha est l'ordonnée de M. On lit tout de suite quelques valeurs : quand M est en A, cosinus de zéro égale un et sinus de zéro égale zéro. Quand M est en B, cosinus de pi sur deux égale zéro et sinus de pi sur deux égale un. Et quand M est en A prime, cosinus de pi égale moins un et sinus de pi égale zéro. Et comme M reste sur le demi-cercle, le cosinus est toujours entre moins un et un, et le sinus entre zéro et un.

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan. Soit α un réel appartenant à $[0, \pi]$ et soit M l'unique point du demi-cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \alpha$. - On appelle **cosinus** du réel α l'abscisse du point M, et on le note $\cos \alpha$. - On appelle **sinus** du réel α l'ordonnée du point M, et on le note $\sin \alpha$.

On lit tout de suite quelques valeurs sur le demi-cercle :

- $M = A$ pour $\alpha = 0$: $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$;
- $M = B$ pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$: $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$;
- $M = A'$ pour $\alpha = \pi$: $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$.

Comme M reste sur le demi-cercle, pour tout réel α de l'intervalle $[0, \pi]$: $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ et $0 \leq \sin \alpha \leq 1$.



L'abscisse de M est cos α, son ordonnée est sin α.

Le demi-cercle trigonométrique de centre O : A à droite, A' à gauche, B en haut. Un point M est sur le demi-cercle, à gauche de (OB) : l'angle AOM, noté alpha, est obtus. Un trait vertical descend de M jusqu'à l'axe (A'A) : son pied marque l'abscisse de M, c'est cos alpha, ici négatif. Un trait horizontal va de M jusqu'à l'axe (OB) : il marque l'ordonnée de M, c'est sin alpha.

LE POINT M DU DEMI-CERCLE

$$M(\cos\alpha\,,\ \sin\alpha)$$

POUR A DANS [0, Π]

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \sin\alpha \leq 1$$

EXEMPLE TRAITÉ

Sur le demi-cercle trigonométrique, combien y a-t-il de points M tels que $\cos\widehat{AOM} = 0{,}5$? Et combien de points P tels que $\sin\widehat{AOP} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$? Donner chaque fois la mesure de l'angle.

Le cosinus — Le cosinus est l'abscisse : on cherche les points du demi-cercle d'abscisse $0{,}5$. Il y en a un seul, et l'angle mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

$$\cos\widehat{AOM} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$$

Le sinus — Le sinus est l'ordonnée : on cherche les points du demi-cercle d'ordonnée $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Il y en a deux, symétriques par rapport à la droite (OB).

$$\sin\widehat{AOP} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{AOP} = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \widehat{AOP} = \frac{3\pi}{4}$$

À ne pas faire : Pour α dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$, $\cos\alpha$ est toujours positif — $\cos\alpha < 0$ dès que α dépasse $\dfrac{\pi}{2}$. Quand l'angle est obtus, le point M passe à gauche de la droite (OB) : son abscisse est négative. Le sinus, lui, reste positif.

À ne pas faire : $\cos\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 0$ — $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$. Pour l'angle droit, le point M est en B, de coordonnées zéro et un : l'abscisse donne le cosinus, l'ordonnée donne le sinus.

4. ACTIVITÉ

Pour comprendre : le triangle rectangle

CE QU'IL DIT

Et-ta3rif ej-jdid, za3ma yetmecha m3a mta3 el 3am elli fet ? Nchoufou. 3andna triangle OPM rectangle en P, w nrasmou le demi-cercle trigonométrique de centre O. La droite OM t9oss le demi-cercle fi point N. Nhabbtou N 3la la droite OP, w ntabb9ou Thalès : l'abscisse mta3 N hiya OP sur OM, w l'ordonnée hiya MP sur OM. Ya3ni le cosinus mta3 l'angle POM houwa le côté adjacent sur l'hypoténuse, w le sinus houwa le côté opposé sur l'hypoténuse. Donc l angle aigu, et-ta3rif ej-jdid ya3tina nafs elli na3rfouh fi le triangle rectangle.

نرسمو triangle O P M rectangle en P ، w عندنا . نشوفو ؟ التعريف الجديد ، زعما يتماشى مع متاع العام اللي فات
نهبّطو N . point N في le demi-cercle تقصّ le demi-cercle trigonométrique de centre O . la droite O M
. M P sur O M هي O P sur O M ، w l'ordonnée هي N متاع Thalès : l'abscisse نطبّقو la droite O P ، w على
le côté opposé sur هو le côté adjacent sur l'hypoténuse ، w le sinus هو l'angle P O M متاع le cosinus يعني
. le triangle rectangle في نعرفوه اللي نفس يعطينا الجديد التعريف ، angle aigu لـ l'hypoténuse . donc

La nouvelle définition s'accorde-t-elle avec celle de l'année dernière ? Voyons. On a un triangle O P M rectangle en P, et on trace le demi-cercle trigonométrique de centre O. La droite O M coupe le demi-cercle en un point N. On projette N sur la droite O P, et on applique Thalès : l'abscisse de N est O P sur O M, et son ordonnée est M P sur O M. Autrement dit, le cosinus de l'angle P O M est le côté adjacent sur l'hypoténuse, et son sinus est le côté opposé sur l'hypoténuse. Pour un angle aigu, la nouvelle définition redonne donc ce que l'on connaît dans le triangle rectangle.

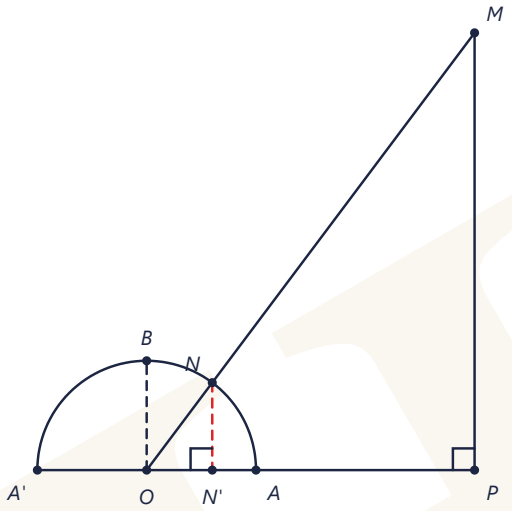
Soit OPM un triangle rectangle en P, et A un point du segment $[OP]$, distinct de O et de P. On munit le plan du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, où B est du même côté que M par rapport à la droite (OP), et on trace le demi-cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Le demi-cercle $\mathscr{C}$ coupe la droite (OM) en un point N. On note N' le projeté orthogonal de N sur (OP) : les droites (NN') et (MP) sont parallèles, et d'après le théorème de Thalès dans le triangle OPM,

$$\frac{ON'}{OP} = \frac{NN'}{MP} = \frac{ON}{OM} = \frac{1}{OM}.$$

L'abscisse du point N est donc égale à $\dfrac{OP}{OM}$, et son ordonnée à $\dfrac{MP}{OM}$.

Autrement dit, pour un angle aigu, la nouvelle définition redonne exactement celle du triangle rectangle : le cosinus est le côté adjacent sur l'hypoténuse, le sinus est le côté opposé sur l'hypoténuse.



N est le point du demi-cercle sur la droite (OM).

Un triangle OPM rectangle en P : O est à gauche, P à droite sur la même horizontale, et M est au-dessus de P. Le point A est sur le segment [OP], et OA est l'unité. Le demi-cercle trigonométrique de centre O passe par A, par B au-dessus de O et par A' à gauche. Il coupe le segment [OM] au point N. Un trait vertical descend de N jusqu'au point N' de (OP).

DANS LE TRIANGLE OPM RECTANGLE EN P

$$\cos\widehat{POM} = \frac{OP}{OM} \quad ; \quad \sin\widehat{POM} = \frac{MP}{OM}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, on suppose que $OP = 3$ et $MP = 4$, l'unité étant OA. Calculer OM, puis donner les coordonnées du point N.

L'hypoténuse — Le triangle OPM est rectangle en P : on applique le théorème de Pythagore.

$$OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Les coordonnées de N — L'abscisse de N est le côté adjacent sur l'hypoténuse, et son ordonnée est le côté opposé sur l'hypoténuse.

$$N\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Ce que cela veut dire — Le cosinus de l'angle $\widehat{POM}$ vaut donc trois cinquièmes, et son sinus vaut quatre cinquièmes.

$$\cos\widehat{POM} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \sin\widehat{POM} = \frac{4}{5}$$

5. PROPRIÉTÉ

Angles supplémentaires

CE QU'IL DIT

Ne5dhou M 3la le demi-cercle, elli ya3tina l'angle AOM égale alpha, w M prime houwa le symétrique mte3ou par rapport à la droite OB. La symétrie t7afedh 3la les angles : donc l'angle AOM prime égale pi moins alpha. W M prime 3andou nafs l'ordonnée mta3 M, w l'abscisse opposée. Men hna ntalla3ou zouz formules : cosinus de pi moins x égale moins cosinus de x, w sinus de pi moins x égale sinus de x. Ya3ni deux angles supplémentaires 3andhom nafs le sinus, w les cosinus opposés. Biha na7sbou mathalan cosinus de cinq pi sur six : houwa moins cosinus de pi sur six, ya3ni moins racine carrée de trois sur deux.

ناخذو M على le demi-cercle ، اللي يعطينا M prime ، w l'angle A O M égale alpha هو le symétrique متاعو
les angles : donc l'angle A O M prime égale pi moins تحافظ على par rapport à la droite O B . la symétrie
formules : من هنا نطلّعو زوز . M ، w l'abscisse opposée متاع l'ordonnée عندو نفس alpha . w M prime
deux يعني . cosinus de pi moins x égale moins cosinus de x ، w sinus de pi moins x égale sinus de x
cosinus de cinq pi بيها نحسبو مثلاً . le sinus ، w les cosinus opposés عندهم نفس angles supplémentaires
. moins racine carrée de trois sur deux يعني ، moins cosinus de pi sur six هو : sur six

Prenons M sur le demi-cercle, avec l'angle A O M égal à alpha, et M prime son symétrique par rapport à la droite O B. La symétrie conserve les angles : l'angle A O M prime égale donc pi moins alpha. Et M prime a la même ordonnée que M, et l'abscisse opposée. On en tire deux formules : cosinus de pi moins x égale moins cosinus de x, et sinus de pi moins x égale sinus de x. Autrement dit, deux angles supplémentaires ont le même sinus et des cosinus opposés. On calcule ainsi, par exemple, cosinus de cinq pi sur six : c'est moins cosinus de pi sur six, c'est-à-dire moins racine carrée de trois sur deux.

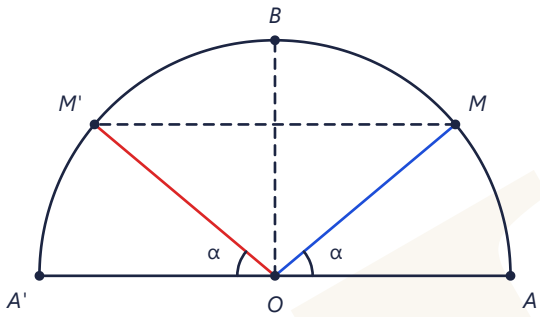
Soit α un réel de l'intervalle $[0, \pi]$ et M le point du demi-cercle trigonométrique tel que $\widehat{AOM} = \alpha$. On désigne par M' le symétrique de M par rapport à la droite (OB).

La symétrie conserve les angles : $\widehat{A'OM'} = \widehat{AOM} = \alpha$, donc $\widehat{AOM'} = \pi - \alpha$. Le point M' est le point du demi-cercle associé au réel $\pi - \alpha$.

Or M a pour coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, et son symétrique M' a la même ordonnée et l'abscisse opposée : $M'(-\cos\alpha, \sin\alpha)$. On en déduit :

> Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$, on a $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Deux angles **supplémentaires** ont donc le même sinus et des cosinus opposés.



M et M' ont la même ordonnée et des abscisses opposées.

Le demi-cercle trigonométrique de centre O : A à droite, A' à gauche, B en haut. Le point M est sur le demi-cercle, à droite : l'angle AOM vaut alpha. Le point M' est son symétrique par rapport à la droite (OB) : il est à gauche, à la même hauteur que M, et l'angle A'OM' vaut aussi alpha. L'angle AOM' vaut donc pi moins alpha.

COSINUS OPPOSÉS

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

MÊME SINUS

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

EXEMPLE TRAITÉ

Donner les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{5\pi}{6}$, de $\frac{2\pi}{3}$ et de $\frac{3\pi}{4}$.

Cinq pi sur six — On écrit $\frac{5\pi}{6}$ comme π moins $\frac{\pi}{6}$: le cosinus change de signe, le sinus reste le même.

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Deux pi sur trois — De même, $\frac{2\pi}{3}$ est π moins $\frac{\pi}{3}$.

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trois pi sur quatre — Enfin, $\frac{3\pi}{4}$ est π moins $\frac{\pi}{4}$.

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

À ne pas faire : $\sin(\pi - x) = -\sin x$ — $\sin(\pi - x) = \sin x$. Les points M et M prime sont à la même hauteur : ils ont la même ordonnée. C'est le cosinus, l'abscisse, qui change de signe.

6. EXEMPLE

Exemple : une somme de cosinus

CE QU'IL DIT

Ntabb9ou elli chofneh 3la somme. 3andna cosinus de pi sur huit, plus cosinus de trois pi sur huit, plus cosinus de cinq pi sur huit, plus cosinus de sept pi sur huit. 7atta we7ed fihom ma na3rfouch la valeur mte3ou, ama ma yelzemnech. Chouf les angles : sept pi sur huit hiya pi moins pi sur huit, w cinq pi sur huit hiya pi moins trois pi sur huit. W deux angles supplémentaires 3andhom les cosinus opposés : donc koll zouz yetna77aw m3a b3adhhom. La somme égale zéro.

نطبّقو اللي شفناه على somme . عندنا cosinus de pi sur huit ، plus cosinus de trois pi sur huit ، plus cosinus de cinq pi sur huit ، plus cosinus de sept pi sur huit . حتّى واحد فيهم ما نعرفوش la valeur متاعو ، أما ما les angles : sept pi sur huit هي pi moins pi sur huit ، w cinq pi sur huit هي pi moins trois . شوف يلزمناش les cosinus opposés : donc عندهم pi sur huit . w deux angles supplémentaires كل زوز يتنحّاو مع بعضهم . la somme égale zéro .

Appliquons ce que nous venons de voir à une somme. On a cosinus de pi sur huit, plus cosinus de trois pi sur huit, plus cosinus de cinq pi sur huit, plus cosinus de sept pi sur huit. Nous ne connaissons la valeur d'aucun d'eux, mais ce n'est pas nécessaire. Regarde les angles : sept pi sur huit, c'est pi moins pi sur huit, et cinq pi sur huit, c'est pi moins trois pi sur huit. Et deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés : les termes s'éliminent donc deux à deux. La somme égale zéro.

On veut calculer, sans utiliser la calculatrice,

$$\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}.$$

Aucun de ces cosinus n'est une valeur remarquable. Mais les angles vont par paires de somme π : $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ et $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$. Deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés : chaque paire donne 0.

DEUX ANGLES SUPPLÉMENTAIRES

$$\cos(\pi-x)+\cos x=0$$

EXEMPLE TRAITÉ

Calculer, sans utiliser la calculatrice, la somme $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}$.

Les paires — On repère les angles supplémentaires : $\frac{7\pi}{8}$ est π moins $\frac{\pi}{8}$, et $\frac{5\pi}{8}$ est π moins $\frac{3\pi}{8}$.

$$\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}\quad;\quad\cos\frac{5\pi}{8}=-\cos\frac{3\pi}{8}$$

La somme — On remplace dans la somme : les termes s'éliminent deux à deux.

$$\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}=0$$

$$\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$$

7. PROPRIÉTÉ

Angles complémentaires

CE QU'IL DIT

Tawa les angles complémentaires, ya3ni elli la somme mte3hom pi sur deux. Ne5dhou alpha bin zéro w pi sur deux, w zouz points 3la l'arc AB : M elli ya3tina l'angle AOM égale alpha, w N elli ya3tina l'angle BON égale alpha. Donc l'angle AON égale pi sur deux moins alpha. Nhabbtou M 3la la droite OA, w N 3la la droite OB : nal9aw zouz triangles rectangles, 3andhom nafs l'hypoténuse w nafs l'angle, ya3ni kif kif. Men hna : cosinus de pi sur deux moins x égale sinus de x, w sinus de pi sur deux moins x égale cosinus de x. Ya3ni deux angles complémentaires yetbedlou le sinus w le cosinus.

توّا les angles complémentaires ، يعني اللي la somme متاعهم pi sur deux . ناخذو alpha بين zéro w pi sur
l'angle B O N اللي يعطينا l'angle A O M égale alpha ، w N اللي يعطينا l'arc A B : M على points زوز deux ، w
la على la droite O A ، w N على M نهبّطو . égale alpha . donc l'angle A O N égale pi sur deux moins alpha
من . يعني كيف كيف ، l'angle نفس l'hypoténuse w عندهم نفس ، triangles rectangles زوز نلقاو : droite O B
. cosinus de pi sur deux moins x égale sinus de x ، w sinus de pi sur deux moins x égale cosinus de x : هنا
. le sinus w le cosinus يتبادلو deux angles complémentaires يعني

Passons aux angles complémentaires, ceux dont la somme vaut pi sur deux. On prend alpha entre zéro et pi sur deux, et deux points de l'arc A B : M tel que l'angle A O M égale alpha, et N tel que l'angle B O N égale alpha. L'angle A O N égale donc pi sur deux moins alpha. On projette M sur la droite O A, et N sur la droite O B : on obtient deux triangles rectangles de même hypoténuse et de même angle, donc superposables. On en déduit : cosinus de pi sur deux moins x égale sinus de x, et sinus de pi sur deux moins x égale cosinus de x. Deux angles complémentaires échangent leur sinus et leur cosinus.

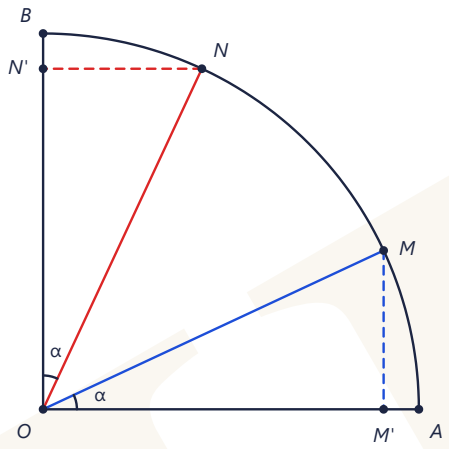
Soit α un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et M et N les points de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du demi-cercle trigonométrique tels que $\widehat{AOM} = \alpha$ et $\widehat{BON} = \alpha$. Alors $\widehat{AON} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Soit M' le projeté orthogonal de M sur (OA) et N' le projeté orthogonal de N sur (OB). Les triangles OMM' et ONN' sont rectangles, ont la même hypoténuse $OM = ON = 1$ et le même angle α en O : ils sont superposables. Donc $OM' = ON'$ et $MM' = NN'$.

Or $OM' = \cos\alpha$ et $MM' = \sin\alpha$, tandis que ON' est l'ordonnée de N et NN' son abscisse. On en déduit :

> Pour tout x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Deux angles **complémentaires** échangent leur sinus et leur cosinus.



Les triangles OMM' et ONN' sont superposables.

Un quart de cercle de centre O et de rayon 1 : A est à droite de O, B au-dessus de O. Le point M est sur l'arc, près de A : l'angle AOM vaut alpha. Le point N est sur l'arc, près de B : l'angle BON vaut aussi alpha. Un trait vertical descend de M jusqu'au point M' de (OA). Un trait horizontal va de N jusqu'au point N' de (OB). Les triangles OMM' et ONN' sont superposables.

LE COSINUS DU COMPLÉMENTAIRE

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

LE SINUS DU COMPLÉMENTAIRE

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

EXEMPLE TRAITÉ

Calculer, sans utiliser la calculatrice, $\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}$.

Deux angles complémentaires — La somme de $\frac{\pi}{8}$ et de $\frac{3\pi}{8}$ vaut $\frac{\pi}{2}$: ces deux angles sont complémentaires.

$$\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Échanger sinus et cosinus — Le cosinus de l'un est le sinus de l'autre.

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} \quad ; \quad \sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$$

La somme — On remplace dans l'expression : tout s'élimine.

$$\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} = 0$$

$$\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} = 0$$

À ne pas faire : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ — $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Le signe moins vient des angles supplémentaires, ceux dont la somme vaut pi. Pour deux angles complémentaires, dont la somme vaut pi sur deux, le sinus et le cosinus s'échangent.

8. DÉFINITION

Tangente et cotangente

CE QU'IL DIT

Ba3d le cosinus w le sinus, n3arrfou zouz rapports o5rin. La tangente mta3 alpha hiya sinus de alpha sur cosinus de alpha. Ama rodd belek : lezem alpha différent de pi sur deux, 5ater cosinus de pi sur deux égale zéro, w ma najjmouch na9smou 3la zéro. W la cotangente mta3 alpha hiya cosinus de alpha sur sinus de alpha. Hna lezem alpha ykoun bin zéro w pi, w ma ysewich la zéro la pi, 5ater le sinus ghadi zéro. W ki ez-zouz mawjoudin, la cotangente hiya l'inverse mta3 la tangente. Fi le triangle rectangle, la tangente hiya le côté opposé sur le côté adjacent, w la cotangente bel3aks.

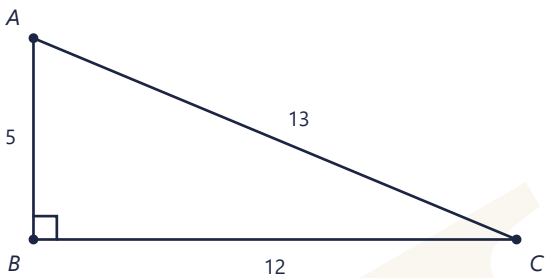
sinus de alpha sur cosinus هي alpha متاع la tangente . أخرين rapports زوز نعرّفو ، le cosinus w le sinus بعد
ما cosinus de pi sur deux égale zéro ، w خاطر ، alpha différent de pi sur deux لازم : أما ردّ بالك . de alpha
هنا لازم . cosinus de alpha sur sinus de alpha هي alpha متاع zéro . w la cotangente نجّموش نقسمو على
la ، موجودين الزوز كي zéro . w غادي le sinus ، خاطر pi لا zéro ما يساويش لا zéro w pi ، w يكون بين alpha
le côté opposé sur le هي le triangle rectangle ، la tangente في . la tangente متاع l'inverse هي cotangente
. بالعكس côté adjacent ، w la cotangente

Après le cosinus et le sinus, définissons deux autres rapports. La tangente de alpha est sinus de alpha sur cosinus de alpha. Mais attention : il faut que alpha soit différent de pi sur deux, car cosinus de pi sur deux égale zéro, et on ne divise pas par zéro. Et la cotangente de alpha est cosinus de alpha sur sinus de alpha. Ici, alpha doit être strictement entre zéro et pi, car le sinus s'annule en zéro et en pi. Et quand les deux existent, la cotangente est l'inverse de la tangente. Dans le triangle rectangle, la tangente est le côté opposé sur le côté adjacent, et la cotangente est l'inverse.

Soit α un réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ et tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. On appelle **tangente** du réel α le réel noté $\tan\alpha$ et défini par $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$. On appelle **cotangente** du réel α le réel noté $\cot\alpha$ et défini par $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

La tangente n'existe pas pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, car $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. La cotangente n'existe ni pour $\alpha = 0$ ni pour $\alpha = \pi$, car le sinus y est nul.

Quand les deux existent, la cotangente est l'inverse de la tangente. Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le côté opposé sur le côté adjacent, et sa cotangente est le côté adjacent sur le côté opposé.



Un triangle de côtés 5, 12 et 13.

Un triangle ABC rectangle en B : B est en bas à gauche, C en bas à droite et A au-dessus de B. Le côté AB mesure 5, le côté BC mesure 12 et le côté AC, l'hypoténuse, mesure 13.

LA TANGENTE

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$$

LA COTANGENTE

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (0 < \alpha < \pi)$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 13$ et $BC = 12$. a) Quelle est la nature de ce triangle ? b) Déterminer la tangente et la cotangente de l'angle $\widehat{A}$, puis celles de l'angle $\widehat{C}$. c) Donner une valeur approchée à un degré près de ces deux angles.

La nature du triangle — On compare le carré du plus grand côté à la somme des carrés des deux autres : le triangle est rectangle en B.

$$AB^2 + BC^2 = 25 + 144 = 169 = AC^2$$

L'angle A — Pour l'angle $\widehat{A}$, le côté opposé est BC et le côté adjacent est AB. La cotangente est l'inverse de la tangente.

$$\tan\widehat{A} = \frac{12}{5} \quad ; \quad \cot\widehat{A} = \frac{5}{12}$$

L'angle C — Pour l'angle $\widehat{C}$, les rôles s'échangent : le côté opposé est AB et le côté adjacent est BC.

$$\tan\widehat{C} = \frac{5}{12} \quad ; \quad \cot\widehat{C} = \frac{12}{5}$$

Les mesures — La calculatrice, réglée en degrés, donne l'angle dont la tangente vaut douze cinquièmes. L'autre angle aigu est son complémentaire.

$$\widehat{A} \approx 67° \quad ; \quad \widehat{C} \approx 23°$$

À ne pas faire : $\tan\frac{\pi}{2} = 0$ — $\tan\frac{\pi}{2}$ n'existe pas. Le cosinus de pi sur deux vaut zéro, et on ne divise pas par zéro. C'est la cotangente de pi sur deux qui vaut zéro.

À ne pas faire : $\tan\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ — $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. La tangente met le sinus en haut. Le cosinus en haut, c'est la cotangente.

9. ACTIVITÉ

Pour comprendre : lire tangente et cotangente

CE QU'IL DIT

La tangente w la cotangente, najjmou na9rawhom 3la el figure. Nrasmou la tangente au demi-cercle fi A, nsammiwha D, w la tangente fi B, nsammiwha D prime, w yet9at3ou fi I. Ne5dhou M 3la le demi-cercle, elli ya3tina l'angle AOM égale alpha. La droite OM t9oss D fi point T, w t9oss D prime fi point T prime. B le théorème de Thalès nal9aw : tangente de alpha hiya la mesure algébrique AT, w cotangente de alpha hiya la mesure algébrique BT prime. Ya3ni la tangente na9rawha 3la la droite D, w la cotangente 3la la droite D prime. W hakka tefhem 3lech alpha différent de pi sur deux : wa9tha la droite OM parallèle à D, w ma t9osshech.

نجّمو نقراوهم على الـ figure . نرسمو la tangente au demi-cercle في A ، la tangente w la cotangente نسمّيوها w la tangente في B ، نسمّيوها D prime يتقاطعو في I . ناخذو M على le demi-cercle ، اللي l'angle A O M égale alpha . la droite O M يعطينا تقصّ D في T point ، w تقصّ D prime في T point . بـ théorème de Thalès نلقاو : tangente de alpha هي la mesure algébrique A T ، w cotangente de alpha نقراوها على la tangente يعني . la mesure algébrique B T prime هي على la droite D ، w la cotangente ما la droite O M parallèle à D ، w وقتها : alpha différent de pi sur deux علاش هكّا تفهم droite D prime . w تقصّهاش .

La tangente et la cotangente peuvent se lire sur la figure. On trace la tangente au demi-cercle en A, qu'on appelle D, et la tangente en B, qu'on appelle D prime : elles se coupent en I. On prend M sur le demi-cercle, avec l'angle A O M égal à alpha. La droite O M coupe D en un point T, et coupe D prime en un point T prime. Avec le théorème de Thalès, on trouve : tangente de alpha est la mesure algébrique A T, et cotangente de alpha est la mesure algébrique B T prime. La tangente se lit donc sur la droite D, et la cotangente sur la droite D prime. Et l'on comprend pourquoi alpha doit être différent de pi sur deux : la droite O M est alors parallèle à D, et ne la coupe pas.

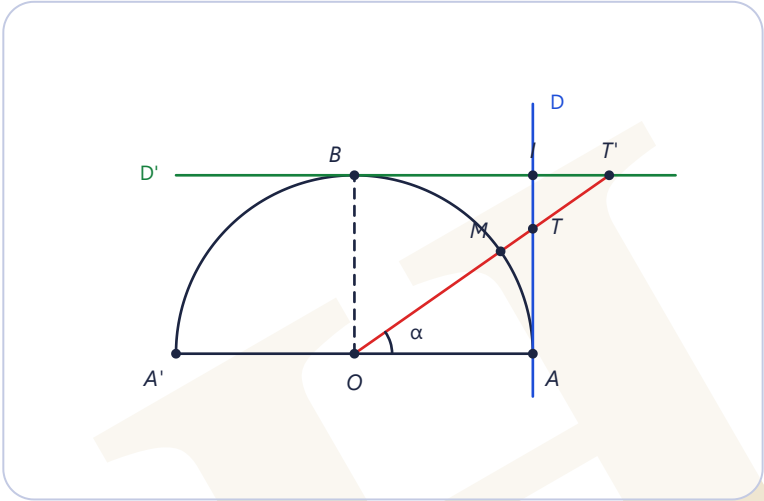
Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ le demi-cercle trigonométrique. On désigne par D et D' les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et en B, et par I leur point d'intersection. On munit la droite D du repère $(A, \overrightarrow{AI})$ et la droite D' du repère $(B, \overrightarrow{BI})$.

Soit α un réel de l'intervalle $]0, \pi[$ tel que $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$, et M le point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \alpha$. On note P et Q les projetés orthogonaux de M sur (OA) et sur (OB) : $\cos\alpha = \overline{OP}$ et $\sin\alpha = \overline{OQ}$.

La droite (OM) coupe D en un point T. Les droites (PM) et (AT) sont parallèles : d'après le théorème de Thalès dans le triangle OAT, $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{PM}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$, donc $\overline{AT} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

De même, la droite (OM) coupe D' en un point T', et $\overline{BT'} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

La tangente se lit donc sur la droite D, et la cotangente sur la droite D'.



tan α se lit sur D, cot α se lit sur D'.

Le demi-cercle trigonométrique de centre O : A à droite, A' à gauche, B en haut. La droite D est la tangente au demi-cercle en A : elle est verticale. La droite D' est la tangente en B : elle est horizontale. Elles se coupent au point I, de coordonnées 1 et 1. Un point M est sur le demi-cercle, avec un angle AOM aigu noté alpha. La droite (OM) coupe D au point T, entre A et I, et coupe D' au point T', à droite de I.

SUR LA TANGENTE EN A

$$\tan\alpha = \overline{AT}$$

SUR LA TANGENTE EN B

$$\cot\alpha = \overline{BT'}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Avec les notations de la figure, où se trouvent les points T et T' lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$? Et lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$?

Pi sur quatre — La tangente et la cotangente de $\dfrac{\pi}{4}$ valent 1 : les points T et T' sont tous les deux en I.

$$\tan\frac{\pi}{4} = \overline{AI} = 1 \quad ; \quad \cot\frac{\pi}{4} = \overline{BI} = 1$$

Pi sur trois — La tangente de $\dfrac{\pi}{3}$ vaut $\sqrt{3}$: le point T est au-dessus de I. La cotangente vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$: le point T' est entre B et I.

$$T\left(1, \sqrt{3}\right) \quad ; \quad T'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$$

À ne pas faire : Pour un angle obtus, le point T est au-dessus de A — Pour un angle obtus, le point T est en dessous de A. La tangente d'un angle obtus est négative : le sinus est positif et le cosinus négatif. La droite (OM), prolongée, coupe D sous le point A.

10. PROPRIÉTÉ

Lignes trigonométriques des angles remarquables

CE QU'IL DIT

Hedha ej-jadwel elli lezmek ta7fdhou. Cosinus de zéro égale un w sinus de zéro égale zéro. L pi sur six : le sinus un demi, w le cosinus racine carrée de trois sur deux. L pi sur quatre : ez-zouz racine carrée de deux sur deux. L pi sur trois, le sinus w le cosinus yetbedlou : le sinus racine carrée de trois sur deux, w le cosinus un demi. W l pi sur deux : le sinus un w le cosinus zéro. L les angles obtus, t3adda b le supplémentaire : nafs le sinus, w le cosinus opposé. W rodd belek ki ta9ra ej-jadwel bel ma9loub : cosinus ya3tik réel we7ed bin zéro w pi, ama sinus ya3tik zouz, supplémentaires.

هذا الجدول اللي لازمك تحفظو . cosinus de zéro égale un w sinus de zéro égale zéro . pi sur six : le sinus لـ
racine carrée de deux sur الزوز : pi sur quatre لـ . un demi ، w le cosinus racine carrée de trois sur deux
le sinus racine carrée de trois sur deux ، w le cosinus un : يتبادلو pi sur trois ، le sinus w le cosinus لـ . deux
نفس : le supplémentaire ، تعدّى بـ les angles obtus لـ . pi sur deux : le sinus un w le cosinus zéro لـ demi . w
، zéro w pi واحد بين réel يعطيك cosinus : ردّ بالك كي تقرا الجدول بالمقلوب le sinus ، w le cosinus opposé . w
. supplémentaires ، زوز يعطيك sinus أما

Voici le tableau à connaître par cœur. Cosinus de zéro égale un et sinus de zéro égale zéro. Pour pi sur six : le sinus vaut un demi, et le cosinus racine carrée de trois sur deux. Pour pi sur quatre : les deux valent racine carrée de deux sur deux. Pour pi sur trois, le sinus et le cosinus s'échangent : le sinus vaut racine carrée de trois sur deux, et le cosinus un demi. Et pour pi sur deux : le sinus vaut un et le cosinus zéro. Pour les angles obtus, passe par le supplémentaire : même sinus, cosinus opposé. Et attention quand tu lis le tableau à l'envers : un cosinus donne un seul réel entre zéro et pi, alors qu'un sinus en donne deux, supplémentaires.

Les angles supplémentaires et les valeurs lues sur le demi-cercle complètent le tableau de l'année dernière :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas	0
$\cot\alpha$	n'existe pas	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	n'existe pas

Pour les angles obtus $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{6}$, on passe par le supplémentaire : même sinus, cosinus opposé.

Ce tableau se lit aussi à l'envers, pour retrouver un réel x de l'intervalle $[0, \pi]$ à partir de son cosinus ou de son sinus. Un cosinus donne **un seul** réel ; un sinus strictement compris entre 0 et 1 en donne **deux**, supplémentaires.

Π/6 ET Π/3

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Π/4

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Π/3 ET Π/6

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$. Déterminer x dans chacun des cas suivants. a) $\cos x = -\frac{1}{2}$. b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. c) Le carré de $\cos x$ vaut $\frac{3}{4}$.

Un cosinus négatif — Le cosinus est négatif : l'angle est obtus. Comme le cosinus de $\frac{\pi}{3}$ vaut un demi, on prend le supplémentaire de $\frac{\pi}{3}$.

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Un sinus — Deux points du demi-cercle ont cette ordonnée : celui de $\frac{\pi}{3}$ et celui de son supplémentaire.

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

Un carré — Le cosinus vaut racine de trois sur deux, ou bien son opposé : on trouve $\frac{\pi}{6}$, ou bien son supplémentaire.

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

À ne pas faire : Dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donne seulement $x = \frac{\pi}{3}$ — $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$. Deux angles supplémentaires ont le même sinus. Il faut toujours penser au deuxième point du demi-cercle, celui qui a la même ordonnée.

11. THÉORÈME

Relations fondamentales

CE QU'IL DIT

Hedhi ahamm formule fi el chapitre. M 3la le demi-cercle, w OM égale un. W fi repère orthonormé, OM au carré hiya l'abscisse au carré plus l'ordonnée au carré. Donc : cosinus de x au carré, plus sinus de x au carré, égale un. W nektbouha : cosinus carré de x, plus sinus carré de x, égale un. Ki na9smou 3la le carré du cosinus, nal9aw : un plus le carré de la tangente, égale un sur le carré du cosinus, w hedhi lezemha x

différent de pi sur deux. W ki na9smou 3la le carré du sinus, nal9aw : un plus le carré de la cotangente, égale un sur le carré du sinus. B les relations hedhom, ki ta3ref rapport we7ed, tnajjem te7seb el be9i.

هذي أهمّ formule في الـ M . chapitre على w . le demi-cercle في O ، repère orthonormé . w O M égale un . l'abscisse au carré plus l'ordonnée au carré . donc : cosinus de x au carré ، plus sinus de x هي M au carré . cosinus carré de x ، plus sinus carré de x ، égale un : نكتبوها au carré ، égale un . w le كي نقسمو على . w : نلقاو ، carré du cosinus x هذي لازمها un plus le carré de la tangente ، égale un sur le carré du cosinus ، un plus le carré de la cotangente ، : نلقاو ، le carré du sinus كي نقسمو على différent de pi sur deux . w les relations بـ . égale un sur le carré du sinus هاذم ، كي تعرف rapport واحد ، تنجّم تحسب الباقي .

Voici la formule la plus importante du chapitre. M est sur le demi-cercle, et O M égale un. Or, dans un repère orthonormé, O M au carré est l'abscisse au carré plus l'ordonnée au carré. Donc : cosinus de x au carré, plus sinus de x au carré, égale un. On l'écrit : cosinus carré de x, plus sinus carré de x, égale un. En divisant par le carré du cosinus, on obtient : un plus le carré de la tangente, égale un sur le carré du cosinus, à condition que x soit différent de pi sur deux. Et en divisant par le carré du sinus, on obtient : un plus le carré de la cotangente, égale un sur le carré du sinus. Avec ces relations, dès que tu connais un rapport, tu peux calculer les autres.

Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2}$, on a $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Pour tout réel x appartenant à $]0, \pi[$, on a $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Une convention d'écriture. On écrit $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\tan^2 x$ et $\cot^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$, $(\sin x)^2$, $(\tan x)^2$ et $(\cot x)^2$.

Ces relations lient les quatre rapports d'un même réel : dès qu'on en connaît un, on peut calculer les autres.

POUR X DANS [0, Π]

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

POUR X ≠ Π/2

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

POUR X DANS]0, Π[

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

DÉMONSTRATION

Soit M le point du demi-cercle trigonométrique associé à x : $M(\cos x, \sin x)$ et $OM = 1$. Le repère est orthonormé, donc $OM^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$: c'est la première relation. Si $x \neq \dfrac{\pi}{2}$, on divise ses deux

membres par $\cos^2 x$, qui n'est pas nul : $1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, c'est la deuxième. Si x est dans $]0, \pi[$, on divise par $\sin^2 x$, qui n'est pas nul : $\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, c'est la troisième.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit x un réel compris entre $\dfrac{\pi}{2}$ et π tel que $\sin x = \dfrac{3}{5}$. Calculer $\cos x$, puis la tangente et la cotangente de x.

Le carré du cosinus — D'après la première relation fondamentale, le carré du cosinus vaut un moins le carré du sinus.

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Le signe — Le réel x est entre $\dfrac{\pi}{2}$ et π : l'angle est obtus, son cosinus est négatif.

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

La tangente et la cotangente — On divise le sinus par le cosinus pour avoir la tangente, puis on prend son inverse pour avoir la cotangente.

$$\tan x = -\frac{3}{4} \quad ; \quad \cot x = -\frac{4}{3}$$

AUTRE EXEMPLE 1 — POUR « UN AUTRE EXEMPLE »

Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle fermé $[0, \pi]$, $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos x \times \sin x$.

> Warri elli, l koll réel x bin zéro w pi : la parenthèse cosinus de x plus sinus de x, au carré, égale un plus deux cosinus de x fois sinus de x.
>
> وزّي اللي ، لكل réel x بين zéro w pi : la parenthèse cosinus de x plus sinus de x ، au carré ، égale un plus deux cosinus de x fois sinus de x .

Développer — On développe le carré de la somme avec l'identité remarquable.

$$(\cos x + \sin x)^2 = (\cos x)^2 + 2\cos x \times \sin x + (\sin x)^2$$

> Na3mlou le développement mta3 le carré de la somme, b l'identité remarquable.
>
> نعملو le développement متاع le carré de la somme ، بـ l'identité remarquable .

La relation fondamentale — On regroupe le carré du cosinus et le carré du sinus : leur somme vaut un.

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

> Njam3ou le carré du cosinus w le carré du sinus : la somme mte3hom égale un.
>
> نجمعو le carré du cosinus w le carré du sinus : la somme متاعهم égale un .

Conclure — Il reste un, plus le double produit : c'est l'égalité demandée.

$$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos x \times \sin x$$

> Yeb9a un, plus le double produit : hedhi l'égalité elli talbouha.
>
> يبقى un ، plus le double produit : هذي l'égalité اللي طلبوها .

À ne pas faire : $\sin x = \dfrac{3}{5}$ donne toujours $\cos x = \dfrac{4}{5}$ — $\cos x = \dfrac{4}{5}$ si x est aigu, $\cos x = -\dfrac{4}{5}$ si x est obtus. La relation fondamentale ne donne que le carré du cosinus. Pour choisir le signe, il faut savoir si l'angle est aigu ou obtus.

À ne pas faire : $\cos^2 x = \cos(x^2)$ — $\cos^2 x = (\cos x)^2$. C'est une convention d'écriture : on calcule d'abord le cosinus, puis on élève le résultat au carré.

12. MÉTHODE

D'un rapport aux trois autres

CE QU'IL DIT

Ki ta3ref rapport we7ed, kifech tal9a el be9i ? Trois étapes. Tabda te5tar la relation fondamentale elli fiha le rapport elli ta3rfou : ta3tik le carré mta3 rapport e5er. Ba3d, le signe : bin zéro w pi, le sinus dima positif. W le cosinus, la tangente w la cotangente 3andhom nafs le signe : positif ki l'angle aigu, w négatif ki l'angle obtus. W fel e5er, tkammel b la définition : le sinus égale la tangente fois le cosinus, walla le cosinus égale la cotangente fois le sinus.

كي تعرف rapport واحد ، كيفاش تلقى الباقي ؟ trois étapes . تبدا تختار la relation fondamentale اللي فيها le rapport اللي تعرفو : تعطيك le carré متاع rapport آخر . بعد ، le signe : بين le sinus ، zéro w pi ديما w positif . l'angle aigu كي le signe : positif عندهم نفس le cosinus ، la tangente w la cotangente l'angle obtus . w في الآخر ، تكمّل بـ la définition : le sinus égale la tangente fois le cosinus ، ولّا le cosinus égale la cotangente fois le sinus .

Quand tu connais un seul rapport, comment trouver les autres ? En trois étapes. D'abord, tu choisis la relation fondamentale qui contient le rapport connu : elle te donne le carré d'un autre rapport. Ensuite, le signe : entre zéro et pi, le sinus est toujours positif. Et le cosinus, la tangente et la cotangente ont le même signe : positif quand l'angle est aigu, négatif quand il est obtus. Enfin, tu termines avec la définition : le sinus égale la tangente fois le cosinus, ou bien le cosinus égale la cotangente fois le sinus.

Quand on connaît un seul des quatre nombres $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ et $\cot x$, les relations fondamentales donnent les trois autres.

1. On choisit la relation qui contient le rapport connu : elle donne le **carré** d'un autre rapport.
2. On choisit le **signe**. Sur $[0, \pi]$, le sinus est toujours positif. Le cosinus, la tangente et la cotangente ont le même signe : positif si l'angle est aigu, négatif s'il est obtus.
3. On termine avec $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, écrit au besoin $\sin x = \tan x \times \cos x$, ou avec $\cos x = \cot x \times \sin x$.

AVEC LA TANGENTE

$$\sin x = \tan x \times \cos x$$

AVEC LA COTANGENTE

$$\cos x = \cot x \times \sin x$$

EXEMPLE TRAITÉ

a) Calculer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sachant que $\tan\alpha = 10$. b) Calculer $\sin a$ et $\cos a$ sachant que la cotangente de a vaut -2.

Avec la tangente — Un plus le carré de la tangente est l'inverse du carré du cosinus.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + 10^2 = 101$$

Le signe du cosinus — La tangente est positive : l'angle est aigu, et son cosinus est positif.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{101}} = \frac{\sqrt{101}}{101}$$

Le sinus — Le sinus est le produit de la tangente par le cosinus.

$$\sin\alpha = 10 \times \frac{\sqrt{101}}{101} = \frac{10\sqrt{101}}{101}$$

Avec la cotangente — Un plus le carré de la cotangente est l'inverse du carré du sinus. On garde la valeur positive, car un sinus est toujours positif ici.

$$\frac{1}{\sin^2 a} = 1 + (-2)^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad \sin a = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Le cosinus — Le cosinus est le produit de la cotangente par le sinus. Il est négatif : l'angle est obtus.

$$\cos a = -2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

À ne pas faire : $\tan\alpha = 10$ donne $\sin\alpha = 10$ et $\cos\alpha = 1$ — $\cos\alpha = \frac{\sqrt{101}}{101}$ et $\sin\alpha = \frac{10\sqrt{101}}{101}$. Un sinus ne dépasse jamais un. La tangente est seulement le quotient du sinus par le cosinus : il faut la relation fondamentale pour les séparer.

13. PROPRIÉTÉ

Tangente et cotangente : angles complémentaires et supplémentaires

CE QU'IL DIT

Chnowa ysir l la tangente w la cotangente m3a les angles complémentaires w les angles supplémentaires ? Narj3ou l la définition. L les angles complémentaires, le sinus w le cosinus yetbedlou : donc la tangente de pi sur deux moins x hiya la cotangente de x, w la cotangente de pi sur deux moins x hiya la tangente de x. W l les angles supplémentaires, le sinus yo93ed kif ma houwa w le cosinus ybaddel le signe : donc tangente de pi moins x égale moins tangente de x, w la cotangente kif kif, tbaddel le signe. Mathalan tangente de trois pi sur quatre égale moins tangente de pi sur quatre, ya3ni moins un.

شنوّة يصير لـ la tangente w la cotangente مع les angles complémentaires w les angles supplémentaires ؟ نرجعو لـ la définition . لـ le sinus w le cosinus ، les angles complémentaires يتبادلو : donc la tangente de pi هي la cotangente de x ، w la cotangente de pi sur deux moins x هي sur deux moins x la tangente de x . w لـ le sinus ، les angles supplémentaires يقعد كيف ما هو w le cosinus يبدّل le signe : donc tangente de pi moins x égale moins tangente de x ، w la cotangente كيف كيف ، تبدّل le signe . مثلاً tangente de trois pi sur quatre égale moins tangente de pi sur quatre ، يعني moins un .

Que deviennent la tangente et la cotangente avec les angles complémentaires et les angles supplémentaires ? Revenons à la définition. Pour les angles complémentaires, le sinus et le cosinus

s'échangent : la tangente de pi sur deux moins x est donc la cotangente de x, et la cotangente de pi sur deux moins x est la tangente de x. Et pour les angles supplémentaires, le sinus ne change pas et le cosinus change de signe : donc tangente de pi moins x égale moins tangente de x, et la cotangente change de signe de la même façon. Par exemple, tangente de trois pi sur quatre égale moins tangente de pi sur quatre, c'est-à-dire moins un.

Angles complémentaires.

Pour tout x appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. Pour tout x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$.

Angles supplémentaires.

Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2}$, on a $\tan(\pi - x) = -\tan x$. Pour tout réel x appartenant à $]0, \pi[$, on a $\cot(\pi - x) = -\cot x$.

Deux angles complémentaires échangent leur tangente et leur cotangente ; deux angles supplémentaires ont des tangentes opposées et des cotangentes opposées.

ANGLES COMPLÉMENTAIRES

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \quad ; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

ANGLES SUPPLÉMENTAIRES

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \quad ; \quad \cot(\pi - x) = -\cot x$$

DÉMONSTRATION

On revient à la définition. Pour les angles complémentaires : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$. Pour les angles supplémentaires : $\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x$. Les deux formules sur la cotangente s'obtiennent de la même façon.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Donner les valeurs exactes de la tangente de $\frac{2\pi}{3}$, de $\frac{3\pi}{4}$ et de $\frac{5\pi}{6}$. b) Calculer, sans utiliser la calculatrice, la somme des tangentes de $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$ et $\frac{6\pi}{7}$.

Les trois valeurs — Chacun de ces angles est le supplémentaire d'un angle remarquable : sa tangente est l'opposé de celle de l'angle remarquable.

$$\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} \quad ; \quad \tan\frac{3\pi}{4} = -1 \quad ; \quad \tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Les paires de la somme — Dans la somme, $\frac{6\pi}{7}$ est le supplémentaire de $\frac{\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$ est celui de $\frac{2\pi}{7}$, et $\frac{4\pi}{7}$ est celui de $\frac{3\pi}{7}$.

$$\tan\frac{6\pi}{7} = -\tan\frac{\pi}{7} \quad ; \quad \tan\frac{5\pi}{7} = -\tan\frac{2\pi}{7} \quad ; \quad \tan\frac{4\pi}{7} = -\tan\frac{3\pi}{7}$$

La somme — Les six tangentes s'éliminent deux à deux : la somme est nulle.

$$\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{2\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{7} + \tan\frac{4\pi}{7} + \tan\frac{5\pi}{7} + \tan\frac{6\pi}{7} = 0$$

À ne pas faire : $\tan(\pi - x) = \tan x$ — $\tan(\pi - x) = -\tan x$. En passant au supplémentaire, le sinus ne change pas mais le cosinus change de signe : leur quotient change donc de signe.

---

14. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : cosinus de π/8

CE QU'IL DIT

Pi sur huit mouch angle remarquable, ama najjmou nal9aw les valeurs exactes mte3ou. Nrasmou triangle ABC rectangle en A, fih BC égale huit, w l'angle B égale pi sur huit. Ne5dhou O le milieu mta3 BC, w H le pied de la hauteur issue de A. Fi triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse b3id kif kif 3la les trois sommets : donc OA égale OB égale quatre. Le triangle OAB isocèle, donc l'angle AOB égale trois pi sur quatre, w l'angle AOH houwa le supplémentaire mte3ou : pi sur quatre. Ya3ni le triangle AOH rectangle w isocèle, w mennou na7sbou OH w AH. W ba3d, fi le triangle ABH, na9raw cosinus, sinus w tangente de pi sur huit.

triangle A B C نرسمو . متاعو les valeurs exactes نلقاو أما نجّمو ، angle remarquable موش pi sur huit B C ، w H le pied متاع O le milieu ناخذو . B C égale huit ، w l'angle B égale pi sur huit فيه ، rectangle en A les trois على كيف كيف بعيد triangle rectangle ، le milieu de l'hypoténuse في . de la hauteur issue de A sommets : donc O A égale O B égale quatre . le triangle O A B isocèle ، donc l'angle A O B égale trois pi le triangle A O H rectangle يعني . pi sur quatre : متاعو le supplémentaire هو sur quatre ، w l'angle A O H cosinus ، sinus w tangente de pi نقراو ، le triangle A B H في ، بعد O H w A H . w منّو نحسبو w isocèle ، w . sur huit

Pi sur huit n'est pas un angle remarquable, mais on peut en trouver les valeurs exactes. On trace un triangle A B C rectangle en A, avec B C égal à huit et l'angle B égal à pi sur huit. On prend O, le milieu de B C, et H, le pied de la hauteur issue de A. Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets : donc O A égale O B égale quatre. Le triangle O A B est isocèle, donc l'angle A O B égale trois pi sur quatre, et l'angle A O H est son supplémentaire : pi sur quatre. Le triangle A O H est donc rectangle et isocèle, et il donne O H et A H. Ensuite, dans le triangle A B H, on lit cosinus, sinus et tangente de pi sur huit.

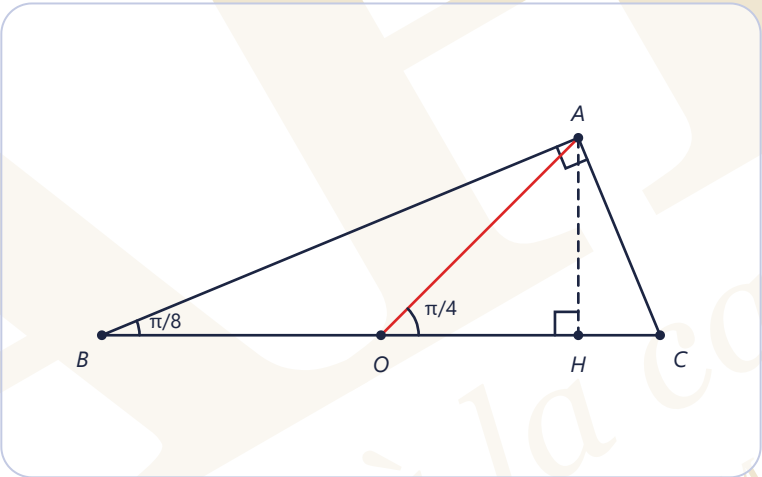
L'angle $\frac{\pi}{8}$ n'est pas un angle remarquable. On peut pourtant trouver les valeurs exactes de son cosinus, de son sinus et de sa tangente, en faisant apparaître son double, $\frac{\pi}{4}$.

On construit un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 8$ et $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{8}$. Soit H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu de $[BC]$.

Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets : $OA = OB = OC = 4$. Le triangle OAB est donc isocèle en O : $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{\pi}{8}$, et $\widehat{AOB} = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$. L'angle $\widehat{AOH}$ est son supplémentaire : il mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

Le triangle AOH a donc pour angles $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{4}$: il est rectangle et isocèle en H. C'est lui qui donne les longueurs.

Une fois ces valeurs trouvées, les angles complémentaires donnent celles de $\dfrac{3\pi}{8}$, et les angles supplémentaires celles de $\dfrac{7\pi}{8}$.



Le triangle AOH est rectangle et isocèle.

Un triangle ABC rectangle en A, posé sur son hypoténuse [BC] : B est à gauche, C à droite, et A est au-dessus, près de C. L'angle en B, très aigu, mesure pi sur 8. Le point O est le milieu de [BC]. Le point H est le pied de la hauteur issue de A : il est sur [BC], entre O et C. Le segment [OA] est tracé : le triangle AOH est rectangle et isocèle en H.

LE COSINUS

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

LE SINUS

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

LA TANGENTE

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, le triangle ABC est rectangle en A, $BC = 8$ et l'angle $\widehat{B}$ mesure $\frac{\pi}{8}$. Le point H est le pied de la hauteur issue de A et O est le milieu de $[BC]$. a) Calculer OH et AH. b) Calculer BH, puis AB. c) En déduire les valeurs exactes du cosinus, du sinus et de la tangente de $\frac{\pi}{8}$.

OH et AH — Le triangle AOH est rectangle et isocèle en H, et son hypoténuse OA mesure 4 : chaque côté de l'angle droit vaut 4 fois le cosinus de $\frac{\pi}{4}$.

$$OH = AH = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

BH — Le point O est entre B et H : on ajoute les deux longueurs.

$$BH = BO + OH = 4 + 2\sqrt{2}$$

AB — Le triangle ABH est rectangle en H : on applique le théorème de Pythagore, puis on met 16 en facteur.

$$AB^2 = (4 + 2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 32 + 16\sqrt{2} = 16\,(2 + \sqrt{2})$$

On prend la racine carrée.

$$AB = 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Le cosinus — Dans le triangle ABH, le cosinus de l'angle $\widehat{B}$ est BH sur AB. On simplifie par 2, puis par $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

La tangente — La tangente de l'angle $\widehat{B}$ est AH sur BH. On simplifie par 2, puis on multiplie en haut et en bas par $2 - \sqrt{2}$.

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Le sinus — D'après la première relation fondamentale, le carré du sinus vaut un moins le carré du cosinus, et ce sinus est positif.

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad ; \quad \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

15. ACTIVITÉ

Pour comprendre : la hauteur

CE QU'IL DIT

Ne5dhou triangle ABC rectangle en A, w H le pied de la hauteur issue de A. L'angle B w l'angle CAH, ez-zouz complémentaires mta3 l'angle C : donc houma kif kif. Tawa nektbou la tangente mta3 l'angle hedha fi zouz triangles rectangles. Fi le triangle AHB, tangente de l'angle B égale AH sur HB. W fi le triangle AHC, tangente de l'angle CAH égale HC sur AH. Ez-zouz quotients kif kif, donc : AH au carré égale HB

fois HC. Ya3ni le carré de la hauteur houwa le produit mta3 ez-zouz segments elli t9osshom 3la l'hypoténuse.

الزوز ، triangle A B C rectangle en A ، w H le pied de la hauteur issue de A . l'angle B w l'angle C A H ناخذو l'angle C : donc متاع complémentaires هذا في زوز l'angle متاع la tangente توّا نكتبو . كيف كيف هوما l'angle C في le triangle A H B ، tangente de l'angle B égale A H sur H B . w في . triangles rectangles le triangle A H في donc : A H au carré égale H B ، كيف كيف quotients الزوز . C ، tangente de l'angle C A H égale H C sur A H . l'hypoténuse على تقصّهم اللي segments متاع الزوز le produit هو le carré de la hauteur يعني . fois H C

Prenons un triangle A B C rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A. L'angle B et l'angle C A H sont tous les deux complémentaires de l'angle C : ils sont donc égaux. Écrivons la tangente de cet angle dans deux triangles rectangles. Dans le triangle A H B, tangente de l'angle B égale A H sur H B. Et dans le triangle A H C, tangente de l'angle C A H égale H C sur A H. Les deux quotients sont égaux, donc : A H au carré égale H B fois H C. Autrement dit, le carré de la hauteur est le produit des deux segments qu'elle découpe sur l'hypoténuse.

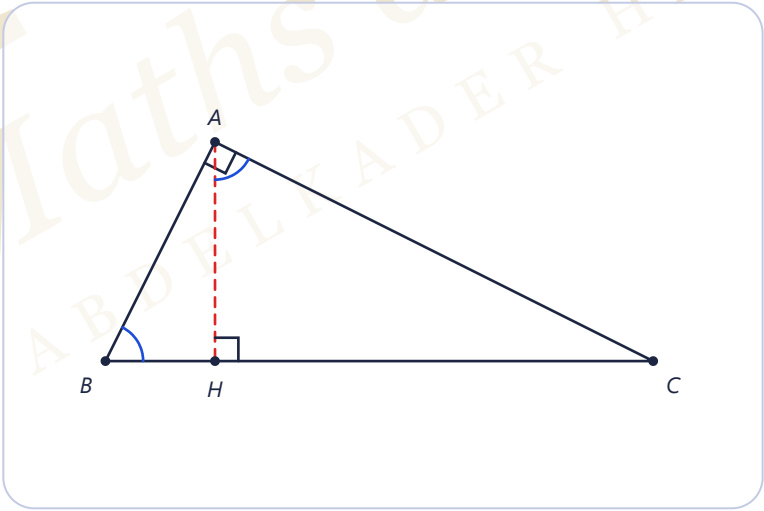
Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

Dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{B}$ est le complémentaire de l'angle $\widehat{C}$. Dans le triangle AHC, rectangle en H, l'angle $\widehat{CAH}$ est lui aussi le complémentaire de l'angle $\widehat{C}$. Donc $\widehat{B} = \widehat{CAH}$.

On écrit alors la tangente de ce même angle dans deux triangles rectangles :

- dans le triangle AHB : $\tan \widehat{B} = \dfrac{AH}{HB}$;
- dans le triangle AHC : $\tan \widehat{CAH} = \dfrac{HC}{AH}$.

Les deux quotients sont égaux : $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{HC}{AH}$, d'où $AH^2 = HB \times HC$.



L'angle B et l'angle CAH sont égaux.

Un triangle ABC rectangle en A, posé sur son hypoténuse [BC] : B est à gauche, C à droite, A au-dessus. Le point H est le pied de la hauteur issue de A : il est sur [BC], plus près de B que de C. L'angle en B et l'angle CAH portent la même marque : ils sont égaux.

DEUX ANGLES ÉGAUX

$\widehat{B} = \widehat{CAH}$

LA HAUTEUR

$AH^2 = HB \times HC$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un triangle ABC rectangle en A, le pied H de la hauteur issue de A vérifie $HB = 3$ et $HC = 12$. Calculer AH, puis la tangente de l'angle $\widehat{B}$.

Le carré de la hauteur — Le carré de la hauteur est le produit des deux segments qu'elle découpe sur l'hypoténuse.

$AH^2 = HB \times HC = 3 \times 12 = 36$

La hauteur — Une longueur est positive : on prend la racine carrée.

$AH = 6$

La tangente — Dans le triangle AHB, rectangle en H, la tangente de l'angle $\widehat{B}$ est AH sur HB.

$\tan \widehat{B} = \dfrac{6}{3} = 2$

$AH = 6 \quad ; \quad \tan \widehat{B} = 2$

À ne pas faire : $AH = HB \times HC$ — $AH^2 = HB \times HC$. C'est le carré de la hauteur qui est égal au produit. Avec trois et douze, la hauteur vaut six, et non trente-six.

16. MÉTHODE

Construire un angle

CE QU'IL DIT

Ki ta3ref rapport we7ed mta3 angle, tnajjem tarsmou. B le cosinus : 3la le demi-cercle trigonométrique, t7ott le point elli l'abscisse mte3ou hiya le cosinus, totla3 3amoudi, w tal9a point we7ed 3la le demi-cercle. W ken le cosinus négatif, l'angle obtus. B le sinus : t7ott l'ordonnée 3la la droite OB, w tarsem parallèle à la droite OA. Rodd belek, hna tal9a zouz points : we7ed ya3tik angle aigu, w le5er l'angle obtus, le supplémentaire mte3ou. W b la tangente : tarsem triangle rectangle, le côté opposé houwa le numérateur, w le côté adjacent houwa le dénominateur.

كي تعرف rapport واحد متاع angle ، تنجّم ترسمو . بـ le cosinus : على le demi-cercle trigonométrique ، تحطّ le point اللي l'abscisse متاعو هي le cosinus ، تطلع عمودي ، w تلقى point واحد على w . le demi-cercle كان le cosinus négatif ، l'angle obtus . بـ le sinus : تحطّ l'ordonnée على w ، la droite O B ترسم parallèle à la droite . O A ردّ بالك ، هنا تلقى زوز points : واحد يعطيك w ، angle aigu الآخر ، le supplémentaire ، l'angle obtus متاعو . بـ w la tangente : ترسم le côté opposé ، triangle rectangle هو le côté adjacent ، w le numérateur هو le dénominateur .

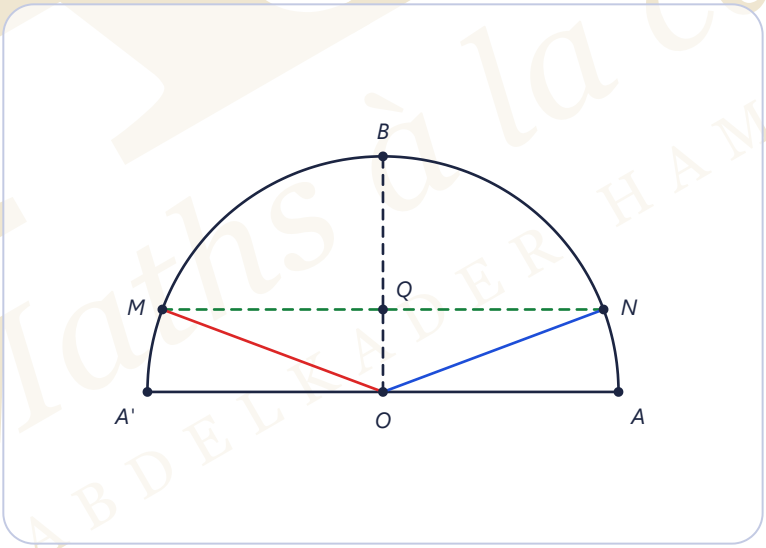
Quand tu connais un seul rapport d'un angle, tu peux le construire. Avec le cosinus : sur le demi-cercle trigonométrique, tu places le point dont l'abscisse est ce cosinus, tu montes à la verticale, et tu trouves un seul point du demi-cercle. Et si le cosinus est négatif, l'angle est obtus. Avec le sinus : tu places l'ordonnée

sur la droite O B, et tu traces la parallèle à la droite O A. Attention, tu trouves ici deux points : l'un donne un angle aigu, l'autre l'angle obtus, son supplémentaire. Et avec la tangente : tu traces un triangle rectangle, le côté opposé est le numérateur, et le côté adjacent est le dénominateur.

Connaître un seul rapport trigonométrique d'un angle suffit pour le construire.

- **Avec le cosinus.** Sur le demi-cercle trigonométrique, on place le point P du diamètre $[A'A]$ d'abscisse $\cos\alpha$. La perpendiculaire à (OA) passant par P coupe le demi-cercle en un seul point M, et $\widehat{AOM} = \alpha$. Si le cosinus est négatif, l'angle est obtus.
- **Avec le sinus.** On place le point Q du segment $[OB]$ d'ordonnée $\sin\alpha$. La parallèle à (OA) passant par Q coupe le demi-cercle en deux points : l'un donne un angle aigu, l'autre l'angle obtus supplémentaire (sauf si le sinus vaut 1 : il n'y a alors qu'un seul point, B). Il faut donc savoir lequel on veut.
- **Avec la tangente.** Si $\tan\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec p et q positifs, on construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent p et q : α est l'angle opposé au côté de longueur p. Si la tangente est négative, on construit l'angle de tangente opposée, puis on prend son supplémentaire.

On peut aussi construire directement un triangle rectangle : pour $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, un côté de l'angle droit de longueur 4 et une hypoténuse de longueur 5.



Deux angles de sinus 0,35 : un aigu, un obtus.

Le demi-cercle trigonométrique de centre O : A à droite, A' à gauche, B en haut. Le point Q est sur le segment [OB], à la hauteur 0,35. Une droite horizontale passant par Q coupe le demi-cercle en deux points : N à droite, qui donne un angle AON aigu, et M à gauche, qui donne un angle AOM obtus. Les deux angles ont le même sinus, 0,35.

EXEMPLE TRAITÉ

a) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ et $BC = 10$. Calculer le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{B}$. b) Dans ce triangle, quel angle a pour cosinus $\dfrac{4}{5}$? c) Comment construire

un angle obtus dont le sinus vaut $0{,}35$?

Le troisième côté — Le triangle est rectangle en A : le théorème de Pythagore donne le côté AC.

$$AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$

L'angle B — Pour l'angle $\widehat{B}$, le côté adjacent est AB et le côté opposé est AC.

$$\cos\widehat{B} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \sin\widehat{B} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \tan\widehat{B} = \frac{4}{3}$$

Un cosinus de quatre cinquièmes — Pour l'angle $\widehat{C}$, le côté adjacent est AC : son cosinus vaut huit dixièmes, c'est-à-dire quatre cinquièmes. Construire ce triangle, c'est donc construire un angle de cosinus quatre cinquièmes.

$$\cos\widehat{C} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

L'angle obtus — Sur le demi-cercle trigonométrique, on trace la parallèle à (OA) à la hauteur $0{,}35$. Elle coupe le demi-cercle en deux points : on garde celui de gauche, le point M, dont l'abscisse est négative.

$$\sin\widehat{AOM} = 0{,}35 \quad \text{et} \quad \widehat{AOM} > \frac{\pi}{2}$$

À ne pas faire : Pour $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, on prend un côté opposé de 3 et un côté adjacent de 4 — Côté opposé 4, côté adjacent 3. La tangente est le côté opposé sur le côté adjacent : le numérateur va en face de l'angle.

17. THÉORÈME

La loi du sinus

CE QU'IL DIT

Tawa no5rjou men le triangle rectangle, w ne5dmou fi triangle quelconque. Nsammiw les côtés bel 7rouf es-sghira : a houwa BC, le côté elli 9belet A, b houwa AC, w c houwa AB. Nhabbtou la hauteur men C, w H houwa le pied mte3ha. Na7sbou CH b zouz tor9 : fi le triangle AHC, CH égale b fois sinus de l'angle A. W fi le triangle BHC, CH égale a fois sinus de l'angle B. Ez-zouz kif kif, donc : a sur sinus de l'angle A, égale b sur sinus de l'angle B. W b hauteur o5ra nkammlou : égale c sur sinus de l'angle C. Hedhi la loi du sinus : les côtés proportionnels aux sinus mta3 les angles opposés.

a : بالحروف الصغيرة نسمّيو les côtés . triangle quelconque في نخدمو le triangle rectangle ، w من نخرجو تو
هو B C ، le côté اللي قبالة b ، A هو w c ، A هو A C . A B هو نهبّطو la hauteur من w H ، C هو le pied متاعها . نحسبو
le triangle B H C ، C H في le triangle A H C ، C H égale b fois sinus de l'angle A . w في : بزوز طرق C H
donc : a sur sinus de l'angle A ، égale b sur sinus de ، الزوز كيف كيف . égale a fois sinus de l'angle B
la loi du sinus : les côtés هذي . égale c sur sinus de l'angle C : أخرى نكمّلو hauteur بـ l'angle B . w
. les angles opposés متاع proportionnels aux sinus

Sortons maintenant du triangle rectangle, pour travailler dans un triangle quelconque. On nomme les côtés avec des lettres minuscules : a est B C, le côté en face de A, b est A C, et c est A B. On abaisse la hauteur issue de C, et H est son pied. On calcule C H de deux façons : dans le triangle A H C, C H égale b fois sinus de l'angle A. Et dans le triangle B H C, C H égale a fois sinus de l'angle B. Les deux sont égaux, donc : a sur sinus de l'angle A, égale b sur sinus de l'angle B. Et avec une autre hauteur, on complète : égale c sur sinus de l'angle C. C'est la loi du sinus : les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

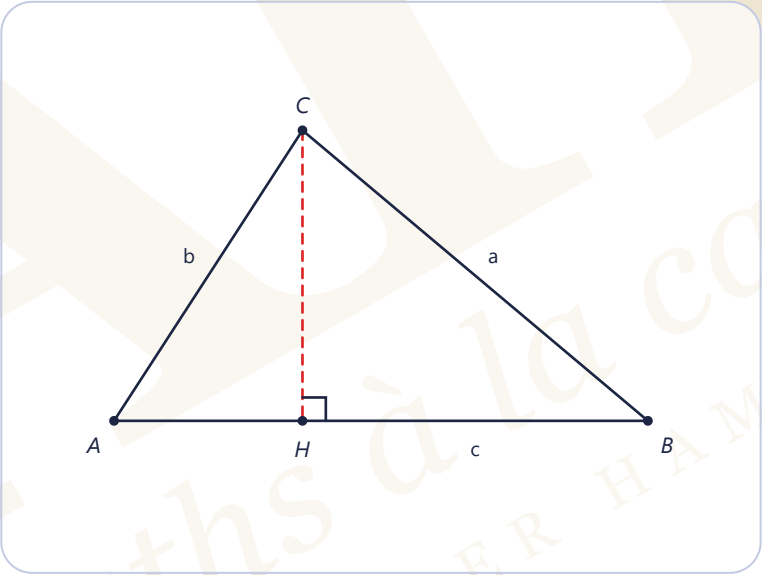
Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$: chaque côté porte la lettre minuscule du sommet qui lui est opposé.

Soit H le pied de la hauteur issue de C. Dans le triangle AHC, rectangle en H, $CH = b\sin\widehat{A}$. Dans le triangle BHC, rectangle en H, $CH = a\sin\widehat{B}$. Si l'un de ces deux angles est obtus, on raisonne avec son supplémentaire, qui a le même sinus.

On a donc $b\sin\widehat{A} = a\sin\widehat{B}$, c'est-à-dire $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}}$. En recommençant avec une autre hauteur, on obtient :

Loi du sinus. Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On a $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$.

Dans un triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.



La hauteur CH se calcule de deux façons.

Un triangle ABC : A est en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut. Le côté [BC] est noté a, le côté [AC] est noté b, le côté [AB] est noté c. Le point H est le pied de la hauteur issue de C : il est sur le côté [AB].

LA LOI DU SINUS

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit MNP un triangle tel que $MN = 8$, $NP = 6$ et $MP = 10$. Montrer que $\sin\widehat{M}$, $\sin\widehat{P}$ et $\sin\widehat{N}$ sont en progression arithmétique.

La nature du triangle — Le carré du plus grand côté est la somme des carrés des deux autres : le triangle est rectangle en N.

$MN^2 + NP^2 = 64 + 36 = 100 = MP^2$

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

Les trois sinus — L'angle $\widehat{N}$ est droit, son sinus vaut 1. Pour les deux autres angles, on écrit le côté opposé sur l'hypoténuse.

$$\sin\widehat{M} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \sin\widehat{P} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \sin\widehat{N} = 1$$

La progression — On passe d'un sinus au suivant en ajoutant toujours un cinquième : ce sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison un cinquième.

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

Ce n'est pas un hasard — Les côtés opposés, 6, 8 et 10, sont eux-mêmes en progression arithmétique. D'après la loi du sinus, les sinus sont proportionnels aux côtés opposés : ils sont donc aussi en progression arithmétique.

À ne pas faire : $\frac{a}{\sin\widehat{B}} = \frac{b}{\sin\widehat{A}}$ — $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}}$. Chaque côté va avec le sinus de l'angle qui est en face de lui : le côté a est en face du sommet A.

18. THÉORÈME

Théorème des bissectrices

CE QU'IL DIT

Tatbi9 mta3 la loi du sinus : le théorème des bissectrices. Ne5dhou triangle ABC, w la bissectrice intérieure mta3 l'angle A t9oss le côté BC fi point I. En-natija : IB sur IC égale AB sur AC. Ya3ni la bissectrice ta9sem le côté opposé 3la 7asb les côtés elli b7dheha. 3lech ? Ntabb9ou la loi du sinus fi le triangle AIB, w fi le triangle AIC. Les angles BAI w CAI kif kif, w les angles AIB w AIC supplémentaires, donc 3andhom nafs le sinus. W ken le triangle mouch isocèle en A, la bissectrice extérieure t9oss la droite BC fi point J, w nal9aw nafs le rapport : JB sur JC égale AB sur AC.

تطبيق متاع la loi du sinus : le théorème des bissectrices . ناخذو triangle A B C ، w la bissectrice intérieure تقسم l'angle A متاع يعني la bissectrice تقصّ le côté B C في point I . النتيجة : I B sur I C égale A B sur A C ؟ نطبّقو la loi du sinus في le triangle A I B ، w في le triangle A I C . les angles B A I w C A I عندهم w les angles A I B w A I C supplémentaires ، donc ، كيف كيف triangle A I C . علاش ؟ les côtés اللي بحذاها على حسب le côté opposé le sinus . w نفس le triangle كان موش la bissectrice extérieure isocèle en A ، la droite B C تقصّ في point J ، w نلقاو نفس le rapport : J B sur J C égale A B sur A C .

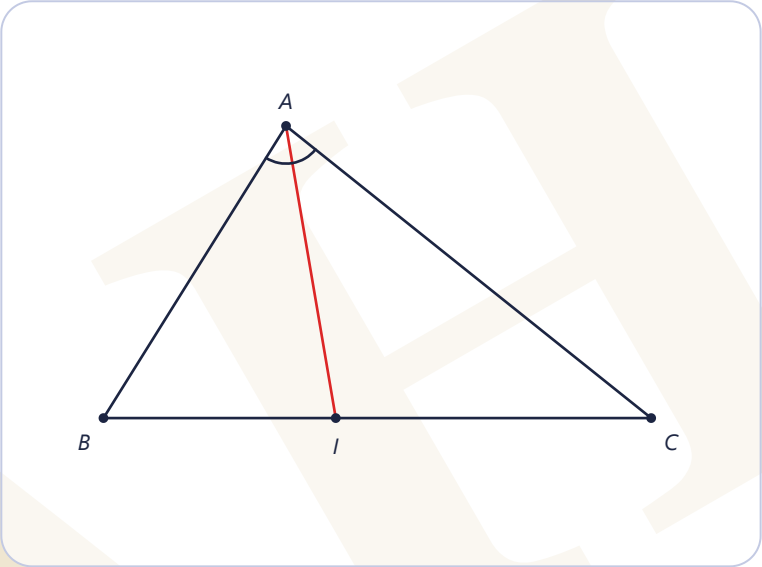
Une application de la loi du sinus : le théorème des bissectrices. On prend un triangle A B C, et la bissectrice intérieure de l'angle A coupe le côté B C en un point I. Le résultat : I B sur I C égale A B sur A C. Autrement dit, la bissectrice partage le côté opposé proportionnellement aux côtés voisins. Pourquoi ? On applique la loi du sinus dans le triangle A I B, puis dans le triangle A I C. Les angles B A I et C A I sont égaux, et les angles A I B et A I C sont supplémentaires, donc ils ont le même sinus. Et si le triangle n'est pas isocèle en A, la bissectrice extérieure coupe la droite B C en un point J, et on trouve le même rapport : J B sur J C égale A B sur A C.

Soit ABC un triangle et I le point d'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et du

côté $[BC]$. Alors $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$.

La bissectrice partage donc le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés voisins.

Si le triangle ABC n'est pas isocèle en A, la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe la droite (BC) en un point J, et l'on a de même $\dfrac{JB}{JC} = \dfrac{AB}{AC}$.



La bissectrice de l'angle A coupe [BC] en I.

Un triangle ABC : B est en bas à gauche, C en bas à droite, A en haut, plus près de B. La bissectrice intérieure de l'angle en A coupe le côté [BC] au point I. Les deux angles BAI et IAC portent la même marque : ils sont égaux.

LA BISSECTRICE INTÉRIEURE

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$$

LA BISSECTRICE EXTÉRIEURE

$$\frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$$

DÉMONSTRATION

Dans le triangle AIB, la loi du sinus donne $\dfrac{IB}{\sin \widehat{BAI}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{AIB}}$. Dans le triangle AIC, elle donne $\dfrac{IC}{\sin \widehat{CAI}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{AIC}}$. Les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{CAI}$ sont égaux, puisque (AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. Les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$ sont supplémentaires : ils ont le même sinus. En divisant membre à membre, on obtient $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$.

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un triangle ABC, on a $AB = 6$, $AC = 9$ et $BC = 10$. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe le côté $[BC]$ en I. Calculer IB et IC.

Le rapport — D'après le théorème des bissectrices, le rapport de IB à IC est celui de AB à AC.

$$\frac{IB}{IC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Le partage — Le point I est sur le segment $[BC]$: la somme de IB et de IC vaut 10. On partage donc 10 en cinq parts égales : deux parts pour IB, trois parts pour IC.

$$IB = \frac{2}{5} \times 10 = 4 \quad ; \quad IC = \frac{3}{5} \times 10 = 6$$

$$IB = 4 \quad ; \quad IC = 6$$

À ne pas faire : La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ passe par le milieu de $[BC]$ — Elle coupe $[BC]$ en un point I tel que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$. La bissectrice ne passe par le milieu que si les deux côtés A B et A C sont égaux. Sinon, le point I est plus près de B quand A B est plus petit que A C : il se rapproche du plus petit des deux côtés.

---

19. THÉORÈME

Loi du sinus et cercle circonscrit

CE QU'IL DIT

Le rapport a sur sinus de l'angle A, chnowa ysewi bedh-dhabt ? Ne5dhou le cercle circonscrit mta3 le triangle ABC, le centre O w le rayon R. W ne5dhou B prime, le point diamétralement opposé à B. Le triangle BB prime C marsoum fi noss cercle, donc houwa rectangle en C : sinus de l'angle BB prime C égale a sur deux R. W les angles BAC w BB prime C ychoufou nafs la corde BC : ya imma kif kif, ya imma supplémentaires, w fel 7altin 3andhom nafs le sinus. Donc : a sur sinus de l'angle A égale deux R. W la loi du sinus twalli : a sur sinus de A, égale b sur sinus de B, égale c sur sinus de C, égale deux R.

le triangle A B C ، متاع le cercle circonscrit ناخذو ؟ شنوّة يساوي بالضبط ، le rapport a sur sinus de l'angle A B prime ، le point diamétralement opposé à B . le triangle B B prime C ناخذو le centre O w le rayon R . w rectangle en C : sinus de l'angle B B prime C égale a sur deux R . w les هو cercle ، donc مرسوم في نصّ supplémentaires ، w يا إمّا كيف كيف ، يا إمّا : la corde B C يشوفو نفس angles B A C w B B prime C في a sur : تولّي le sinus . donc : a sur sinus de l'angle A égale deux R . w la loi du sinus الحالتين عندهم نفس . sinus de A ، égale b sur sinus de B ، égale c sur sinus de C ، égale deux R

Que vaut exactement le rapport a sur sinus de l'angle A ? Prenons le cercle circonscrit au triangle A B C, de centre O et de rayon R. Et prenons B prime, le point diamétralement opposé à B. Le triangle B B prime C est inscrit dans un demi-cercle, donc il est rectangle en C : sinus de l'angle B B prime C égale a sur deux R. Et les angles B A C et B B prime C interceptent la même corde B C : ils sont soit égaux, soit supplémentaires, et dans les deux cas ils ont le même sinus. Donc : a sur sinus de l'angle A égale deux R. Et la loi du sinus devient : a sur sinus de A, égale b sur sinus de B, égale c sur sinus de C, égale deux R.

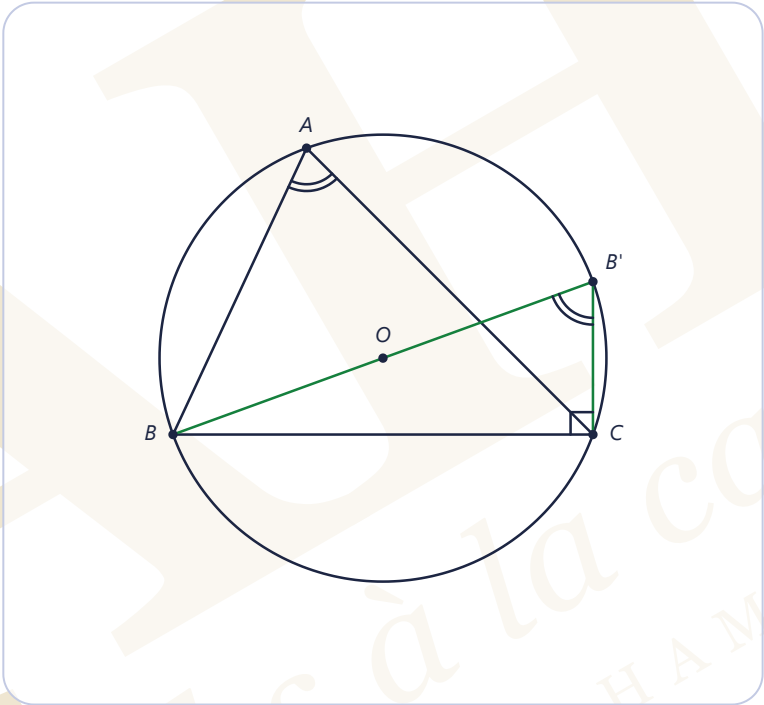
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, O le centre de Γ et R son rayon. On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Soit B' le point diamétralement opposé à B.

Le triangle $BB'C$ est inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[BB']$: il est rectangle en C. Donc $\sin \widehat{BB'C} = \frac{BC}{BB'} = \frac{a}{2R}$.

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BB'C}$ sont deux angles inscrits qui interceptent la corde $[BC]$: ils sont égaux lorsque A et B' sont du même côté de la droite (BC), et supplémentaires sinon. Dans les deux cas, ils ont le même sinus : $\sin\widehat{A} = \dfrac{a}{2R}$.

Soit ABC un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit. On a $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$.

Lorsque le triangle est rectangle en A, $\sin\widehat{A} = 1$ et l'on retrouve $a = 2R$: l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.



Le triangle BB'C est rectangle en C.

Un cercle de centre O. Trois points A, B et C sont sur le cercle : B à gauche, C à droite à la même hauteur, A en haut. Le triangle ABC est tracé. Le point B' est le point du cercle diamétralement opposé à B : le diamètre [BB'] passe par O. Le segment [B'C] est tracé, et une équerre marque l'angle droit en C dans le triangle BB'C. Les angles BAC et BB'C portent la même marque.

R : RAYON DU CERCLE CIRCONSCRIT

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle. Montrer que ABC est rectangle en A si, et seulement si, le carré du sinus de l'angle $\widehat{A}$ est la somme du carré du sinus de l'angle $\widehat{B}$ et du carré du sinus de l'angle $\widehat{C}$.

Des sinus aux côtés — D'après la loi du sinus, chaque sinus est le côté opposé divisé par deux fois le rayon du cercle circonscrit.

$$\sin\widehat{A} = \frac{a}{2R} \quad ; \quad \sin\widehat{B} = \frac{b}{2R} \quad ; \quad \sin\widehat{C} = \frac{c}{2R}$$

Traduire l'égalité — On remplace chaque sinus, puis on multiplie les deux membres par quatre fois le carré du rayon : l'égalité entre les sinus devient une égalité entre les côtés.

$$\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} \iff a^2 = b^2 + c^2$$

Conclure — D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, cette égalité entre les côtés signifie exactement que le triangle est rectangle en A.

À ne pas faire : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = R$ — $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$. Le rapport d'un côté au sinus de l'angle opposé est le diamètre du cercle circonscrit, pas son rayon.

---

20. THÉORÈME

Aire d'un triangle

CE QU'IL DIT

Net3addew l la mesure des grandeurs, w nabdew b l'aire. L'aire mta3 triangle hiya la base fois la hauteur sur deux. Ne5dhou la base AB, ya3ni c, w la hauteur CH. W chofna elli CH égale b fois sinus de l'angle A. Donc : S égale un demi de b c, fois sinus de l'angle A. Chedd fi belek el 9a3da : zouz côtés, w le sinus mta3 l'angle elli binethom. W kif kif m3a ez-zouz côtés lo5rin. W 5ater sinus de l'angle A égale a sur deux R, nal9aw formule o5ra : S égale a b c sur quatre R.

. la base fois la hauteur sur deux هي triangle متاع l'aire . l'aire نبداو بـ la mesure des grandeurs ، w نتعدّاو لـ
C H égale b fois sinus de l'angle A . donc : S شفنا اللي c ، w la hauteur C H . w يعني ، la base A B ناخذو
اللي l'angle متاع côtés ، w le sinus زوز : شدّ في بالك القاعدة . égale un demi de b c ، fois sinus de l'angle A
formule نلقاو ، sinus de l'angle A égale a sur deux R خاطر w . كيف كيف مع الزوز côtés الأخرين w . بيناتهم
. S égale a b c sur quatre R : أخرى

Passons à la mesure des grandeurs, en commençant par l'aire. L'aire d'un triangle est la base fois la hauteur sur deux. On prend la base A B, c'est-à-dire c, et la hauteur C H. Et nous avons vu que C H égale b fois sinus de l'angle A. Donc : S égale un demi de b c, fois sinus de l'angle A. Retiens la règle : deux côtés, et le sinus de l'angle qu'ils forment. Et de même avec les deux autres paires de côtés. Et comme sinus de l'angle A égale a sur deux R, on obtient une autre formule : S égale a b c sur quatre R.

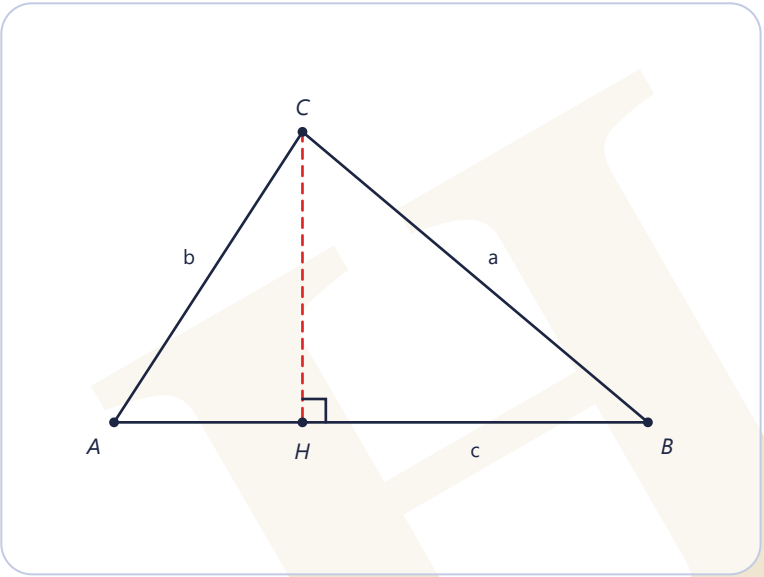
Soit ABC un triangle. On pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$, et on désigne par S son aire. Soit H le pied de la hauteur issue de C : on a vu que $CH = b \sin \widehat{A}$, et la base correspondante est $AB = c$. Donc $S = \dfrac{1}{2}\, c \times CH = \dfrac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A}$.

Soit ABC un triangle. On pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$. S désigne l'aire de ABC et R désigne le rayon du cercle circonscrit à ABC. On a $S = \dfrac{1}{2}\, ab \sin \widehat{C} = \dfrac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A} = \dfrac{1}{2}\, ac \sin \widehat{B}$.

L'aire est le demi-produit de deux côtés par le sinus de l'angle **qu'ils forment**.

Comme $\sin \widehat{A} = \dfrac{a}{2R}$, on obtient aussi $S = \dfrac{abc}{4R}$, ce qui complète la loi du sinus :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}.$$



La base est c, la hauteur est b sin A.

Un triangle ABC : A est en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut. Le côté [BC] est noté a, le côté [AC] est noté b, le côté [AB] est noté c. La hauteur issue de C tombe au point H du côté [AB] : sa longueur est b fois le sinus de l'angle A.

L'AIRE

$$S = \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}\, ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}\, ab \sin \widehat{C}$$

AVEC LE RAYON DU CERCLE CIRCONSCRIT

$$S = \frac{abc}{4R}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit MNP un triangle tel que $MN = 10$, $MP = 7$ et $\widehat{M} = 100°$. Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de l'aire de ce triangle.

La formule — On connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment : l'aire est leur demi-produit par le sinus de cet angle.

$S = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 7 \times \sin 100° = 35 \sin 100°$

La calculatrice — La calculatrice, réglée en degrés, donne le sinus de 100 degrés : environ $0{,}9848$. C'est aussi le sinus de 80 degrés, son supplémentaire.

$S \approx 35 \times 0{,}9848 \approx 34{,}47$

$$S \approx 34{,}47$$

À ne pas faire : $S = \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{B}$ — $S = \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A}$. L'angle de la formule est celui que forment les deux côtés choisis. Les côtés b et c se rejoignent au sommet A.

À ne pas faire : Une aire de 6 avec $AB = 6$ et $BC = 4$ impose $\widehat{B} = 30°$ — $\sin \widehat{B} = \frac{1}{2}$, donc $\widehat{B} = 30°$ ou $\widehat{B} = 150°$. Deux angles supplémentaires ont le même sinus : l'aire ne suffit pas pour savoir si l'angle est aigu ou obtus.

---

21. THÉORÈME

Théorème d'El-Kashi

CE QU'IL DIT

Pythagore ye5dem ken fi le triangle rectangle. W fi triangle quelconque ? Hna yji le théorème d'El-Kashi. Nhabbtou la hauteur men C, w ntabb9ou Pythagore fi le triangle BHC. Nal9aw : a au carré égale b au carré plus c au carré, moins deux b c fois cosinus de l'angle A. Chedd fi belek : le côté a w l'angle A 9belet b3adhhom. W kif kif l les deux autres côtés. Ki l'angle A droit, le cosinus zéro, w narj3ou l Pythagore. W rodd belek ki l'angle obtus : le cosinus négatif, donc moins fois moins ya3ti plus. B le théorème hedha na7sbou côté ki na3rfou zouz côtés w l'angle elli binethom, walla na7sbou angle ki na3rfou les trois côtés.

le théorème d'El-Kashi يجي هنا ؟ triangle quelconque في le triangle rectangle . w في يخدم كان Pythagore a au carré égale b au carré plus c : نلقاو . le triangle B H C في Pythagore نطبّقو C ، w من la hauteur نهبّطو . w . قبالة بعضهم le côté a w l'angle A : شدّ في بالك . au carré ، moins deux b c fois cosinus de l'angle A كيف كيف لـ les deux autres côtés . كي w ، le cosinus zéro ، l'angle A droit نرجعو لـ w . ردّ بالك كي Pythagore هذا نحسبو كي côté le théorème بـ . plus يعطي l'angle obtus : le cosinus négatif ، donc moins fois moins نعرفو زوز l'angle w côtés اللي بيناتهم ، ولّا نحسبو angle كي نعرفو كي les trois côtés .

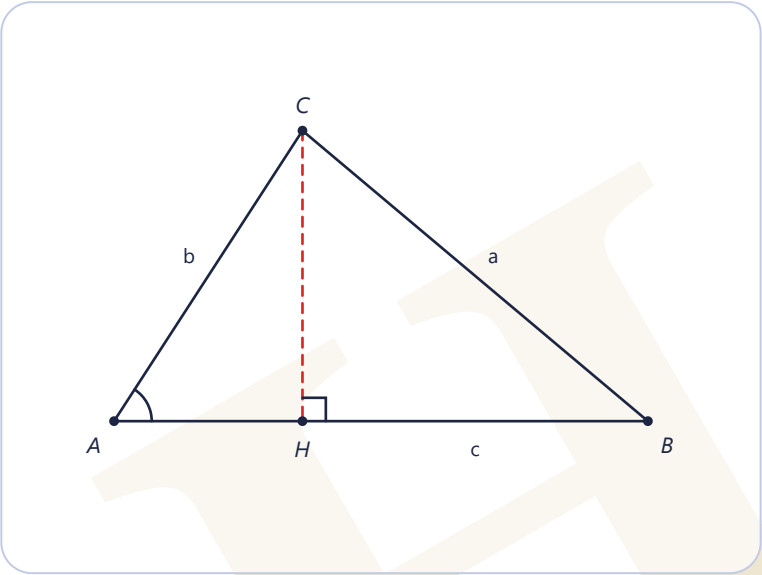
Pythagore ne fonctionne que dans le triangle rectangle. Et dans un triangle quelconque ? C'est là qu'intervient le théorème d'El-Kashi. On abaisse la hauteur issue de C, et on applique Pythagore dans le triangle B H C. On trouve : a au carré égale b au carré plus c au carré, moins deux b c fois cosinus de l'angle A. Retiens bien : le côté a et l'angle A sont en face l'un de l'autre. Et de même pour les deux autres côtés. Quand l'angle A est droit, le cosinus vaut zéro, et on retrouve Pythagore. Et attention quand l'angle est obtus : le cosinus est négatif, donc moins fois moins donne plus. Avec ce théorème, on calcule un côté quand on connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment, ou un angle quand on connaît les trois côtés.

Le théorème de Pythagore relie les trois côtés d'un triangle rectangle. Le théorème d'El-Kashi le généralise à un triangle quelconque.

> **Théorème d'El-Kashi.** Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On a : - $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$; - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$; - $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\widehat{C}$.

Chaque formule relie un côté aux deux autres et à l'angle **opposé** à ce côté. Lorsque l'angle $\widehat{A}$ est droit, $\cos\widehat{A} = 0$ et l'on retrouve le théorème de Pythagore.

Ce théorème sert dans les deux sens : calculer un côté quand on connaît les deux autres et l'angle qu'ils forment, ou calculer un angle quand on connaît les trois côtés.



On applique Pythagore dans le triangle BHC.

Un triangle ABC : A est en bas à gauche, B en bas à droite, C en haut. Le côté [BC] est noté a, le côté [AC] est noté b, le côté [AB] est noté c. L'angle en A est marqué. La hauteur issue de C tombe au point H du côté [AB].

LE CÔTÉ A ET L'ANGLE A

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

LE CÔTÉ B ET L'ANGLE B

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$

LE CÔTÉ C ET L'ANGLE C

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\widehat{C}$$

DÉMONSTRATION

Soit H le pied de la hauteur issue de C. Supposons d'abord l'angle $\widehat{A}$ aigu. Dans le triangle AHC, rectangle en H : $AH = b\cos\widehat{A}$ et $CH = b\sin\widehat{A}$. La distance BH est l'écart entre c et $b\cos\widehat{A}$, donc $BH^2 = (c - b\cos\widehat{A})^2$. Le théorème de Pythagore dans le triangle BHC donne $a^2 = BH^2 + CH^2 = c^2 - 2bc\cos\widehat{A} + b^2\cos^2\widehat{A} + b^2\sin^2\widehat{A} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, car $\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A} = 1$. Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus, H est sur la droite (AB), hors du segment, du côté de A : $AH = b\cos(\pi - \widehat{A}) = -b\cos\widehat{A}$, $CH = b\sin\widehat{A}$ et $BH = c + AH = c - b\cos\widehat{A}$. Le même calcul redonne la même formule.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 7$ et $\widehat{A} = 120°$. a) Calculer BC. b) Calculer l'aire de ce triangle.

Le théorème — On connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment : le théorème d'El-Kashi donne le carré du troisième côté.

$$BC^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos 120°$$

Le cosinus — Le cosinus de 120 degrés est l'opposé du cosinus de 60 degrés : il vaut moins un demi. Le double produit s'ajoute donc.

$$BC^2 = 64 + 49 + 56 = 169$$

Le côté — Une longueur est positive : on prend la racine carrée de 169.

$$BC = 13$$

L'aire — L'aire est le demi-produit des deux côtés par le sinus de l'angle qu'ils forment. Le sinus de 120 degrés vaut racine de trois sur deux.

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

$$BC = 13 \quad ; \quad S = 14\sqrt{3}$$

À ne pas faire : Avec $\widehat{A} = 120°$: $BC^2 = 64 + 49 - 56$ — $BC^2 = 64 + 49 + 56$. Le cosinus d'un angle obtus est négatif : moins par moins donne plus. Face à un angle obtus, le côté est plus long que ne le dirait Pythagore.

À ne pas faire : $a^2 = b^2 + c^2$ dans tout triangle — $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. L'égalité de Pythagore ne vaut que si l'angle A est droit. Dans les autres cas, il faut corriger avec le double produit par le cosinus.

---

22. APPLICATION

Exemple : l'aire d'un quadrilatère

CE QU'IL DIT

Ntabb9ou la formule mta3 l'aire 3la quadrilatère. 3andna quadrilatère ABCD, w les diagonales yet9at3ou fi I, w nsammiw alpha l'angle AID. Les diagonales ya9smou le quadrilatère l quatre triangles, el koll 3andhom sommet I. W les angles fi I, ya alpha ya pi moins alpha : ya3ni el koll 3andhom nafs le sinus. Njam3ou les quatre aires, w n5arrjou un demi de sinus de alpha en facteur. Nal9aw : l'aire égale un demi de AC fois BD, fois sinus de alpha. Ya3ni yekfi ta3ref ez-zouz diagonales w l'angle elli binethom.

نطبّقو la formule متاع l'aire على quadrilatère . عندنا quadrilatère A B C D ، w les diagonales يتقاطعو في I ، sommet عندهم الكل ، quatre triangles لـ le quadrilatère يقسمو alpha l'angle A I D . les diagonales نسمّيو w les angles I في I ، يا alpha يا pi moins alpha : يعني الكل عندهم نفس le sinus . نجمعو w les quatre aires ، l'aire égale un demi de A C fois B D ، fois sinus de : نلقاو . un demi de sinus de alpha en facteur نخرّجو . يعني يكفي تعرف الزوز alpha w l'angle diagonales اللي بيناتهم .

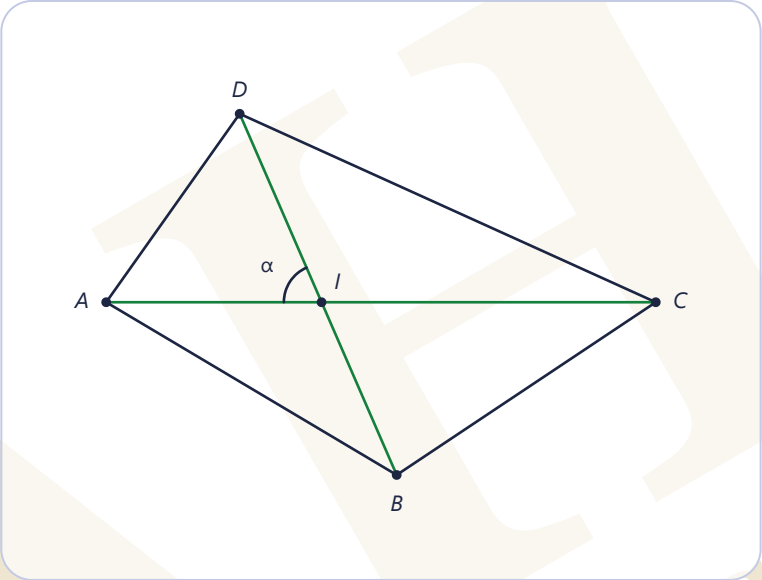
Appliquons la formule de l'aire à un quadrilatère. On a un quadrilatère A B C D dont les diagonales se coupent en I, et on appelle alpha l'angle A I D. Les diagonales découpent le quadrilatère en quatre triangles, tous de sommet I. Et les angles en I valent soit alpha, soit pi moins alpha : ils ont donc tous le même sinus. On additionne les quatre aires, et on met un demi de sinus de alpha en facteur. On trouve : l'aire égale un demi de A C fois B D, fois sinus de alpha. Il suffit donc de connaître les deux diagonales et l'angle qu'elles forment.

Dans la figure, $ABCD$ est un quadrilatère et I est le point d'intersection de ses diagonales. On pose $\alpha = \widehat{AID}$.

Les diagonales découpent le quadrilatère en quatre triangles de sommet I. Leurs angles en I mesurent α ou $\pi - \alpha$: ils ont tous le même sinus, $\sin\alpha$. La somme des quatre aires vaut donc

$$\frac{1}{2}\sin\alpha\,(IA\times ID + ID\times IC + IC\times IB + IB\times IA) = \frac{1}{2}\sin\alpha\,(IA+IC)(IB+ID).$$

L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à $\frac{1}{2}\,AC\times BD\times\sin\alpha$.



Les diagonales découpent quatre triangles de sommet I.

Un quadrilatère ABCD : A est à gauche, C à droite à la même hauteur, D en haut, B en bas. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent au point I. L'angle AID, entre les deux diagonales, est noté alpha.

A : ANGLE DES DIAGONALES

$$\text{aire}(ABCD) = \frac{1}{2}\,AC\times BD\times\sin\alpha$$

EXEMPLE TRAITÉ

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que $AC = 12$ et $\widehat{AOB} = 150°$. Calculer l'aire de ce rectangle, puis sa longueur et sa largeur.

L'aire — Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur, 12. Elles forment un angle de 150 degrés, dont le sinus vaut un demi.

$$S = \frac{1}{2}\times 12\times 12\times\sin 150° = 36$$

La longueur — Dans le triangle AOB, on a $OA = OB = 6$: le théorème d'El-Kashi donne AB. Le cosinus de 150 degrés vaut moins racine de trois sur deux.

$$AB^2 = 36 + 36 - 72\cos 150° = 72 + 36\sqrt{3}$$

La largeur — Dans le triangle BOC, l'angle en O est le supplémentaire de 150 degrés : il mesure 30 degrés.

$$BC^2 = 36 + 36 - 72\cos 30° = 72 - 36\sqrt{3}$$

Les valeurs approchées — On prend les racines carrées : la longueur vaut environ $11{,}59$ et la largeur environ $3{,}11$. Leur produit redonne bien l'aire, 36.

$$AB = 6\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 11{,}59 \quad ; \quad BC = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}11$$

23. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : carré et triangle équilatéral

CE QU'IL DIT

Hedha problème yjamma3 barcha 7ajet. 3andna carré ABCD, le côté mte3ou a, w fi wostou triangle équilatéral EBC. N7ebbou na3rfou l'angle BAE. L'angle ABC droit, w l'angle EBC fih soixante degrés : donc l'angle ABE fih trente degrés. W le triangle ABE isocèle en B, 5ater BA w BE ysewiw le côté a du carré : donc l'angle BAE fih soixante-quinze degrés. Tawa ntabb9ou le théorème d'El-Kashi fi le triangle ABE, w nal9aw AE. W men AE ntalla3ou les valeurs exactes mta3 cosinus w sinus de soixante-quinze degrés, elli mouch angle remarquable.

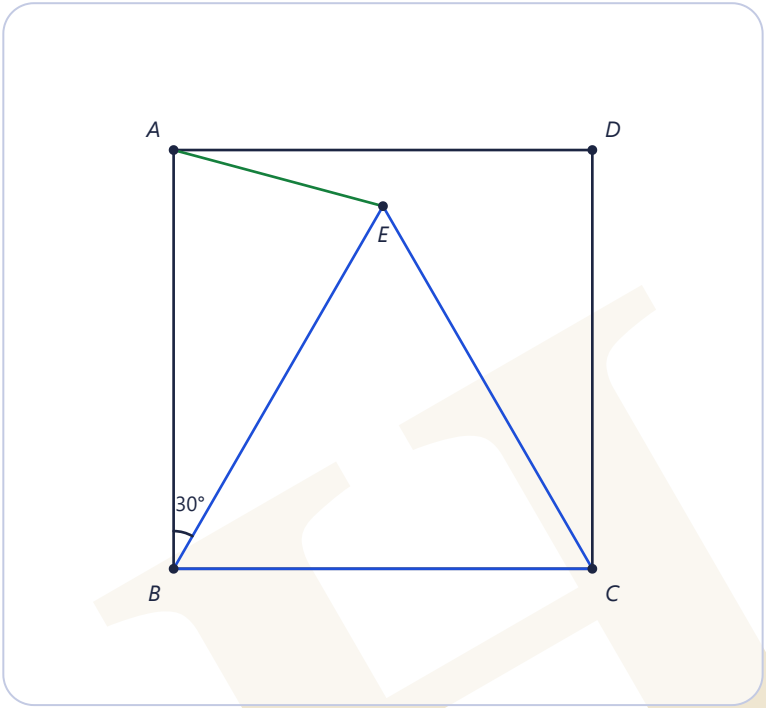
هذا problème يجمع برشة حاجات . عندنا le côté a ، w متاعو carré A B C D ، triangle équilatéral E B وسطو في a ، w l'angle E B C نحبّو نعرفو . C l'angle A B C droit ، w l'angle B A E . l'angle A B E فيه soixante degrés : donc l'angle A B E فيه le côté a du carré : donc l'angle يساويو B A w B E خاطر ، trente degrés . w le triangle A B E isocèle en B فيه B A E فيه soixante-quinze degrés . توّا نطبّقو le théorème d'El-Kashi في ، w le triangle A B E نلقاو A E . w من A E نطلّعو les valeurs exactes متاع cosinus w sinus de soixante-quinze degrés ، اللي موش angle remarquable .

Voici un problème qui rassemble beaucoup de choses. On a un carré A B C D de côté a, et à l'intérieur un triangle équilatéral E B C. On veut connaître l'angle B A E. L'angle A B C est droit, et l'angle E B C mesure soixante degrés : l'angle A B E mesure donc trente degrés. Et le triangle A B E est isocèle en B, car B A et B E sont égaux au côté a du carré : l'angle B A E mesure donc soixante-quinze degrés. On applique ensuite le théorème d'El-Kashi dans le triangle A B E, et on trouve A E. Et de A E, on tire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de soixante-quinze degrés, qui n'est pas un angle remarquable.

Dans la figure, $ABCD$ est un carré de côté a et EBC est un triangle équilatéral, construit à l'intérieur du carré. On cherche l'angle $\widehat{BAE}$, puis les valeurs exactes de son cosinus et de son sinus.

L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et l'angle $\widehat{EBC}$ mesure $60°$: donc $\widehat{ABE} = 30°$. Le triangle ABE est isocèle en B, car $BA = BE = a$: ses deux angles à la base sont égaux, et $\widehat{BAE} = 75°$.

Le théorème d'El-Kashi, appliqué dans le triangle ABE, donne ensuite AE. On en tire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de 75 degrés.



ABE est isocèle en B.

Un carré ABCD : A est en haut à gauche, D en haut à droite, C en bas à droite, B en bas à gauche. À l'intérieur du carré, le triangle EBC est équilatéral : le point E est au-dessus du milieu de [BC], près du côté [AD]. Le segment [AE] est tracé.

PAR EL-KASHI

$$AE^2 = a^2\,(2 - \sqrt{3})$$

LES VALEURS EXACTES

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad ; \quad \sin 75° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans la figure, $ABCD$ est un carré de côté a et EBC est un triangle équilatéral. a) Calculer l'angle $\widehat{ABE}$, puis l'angle $\widehat{BAE}$. b) Montrer que le carré de la longueur AE est égal au carré du côté a du carré, multiplié par $(2-\sqrt{3})$. c) En déduire le cosinus, puis le sinus, de l'angle $\widehat{BAE}$.

Les angles — On retire 60 degrés à l'angle droit du carré. Puis, dans le triangle ABE, isocèle en B, les deux angles à la base se partagent ce qui reste de 180 degrés.

$$\widehat{ABE} = 90° - 60° = 30° \quad ; \quad \widehat{BAE} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$

Le côté AE — Dans le triangle ABE, on connaît les côtés BA et BE, égaux au côté a du carré, et l'angle qu'ils forment : on applique le théorème d'El-Kashi.

$$AE^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 30° = a^2\,(2 - \sqrt{3})$$

Le cosinus — Le triangle ABE est isocèle en B : la hauteur issue de B passe par le milieu de $[AE]$. Le cosinus de l'angle $\widehat{BAE}$ est donc la moitié de AE, divisée par AB.

$$\cos\widehat{BAE} = \frac{AE}{2\,AB} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Le sinus — D'après la première relation fondamentale, le carré du sinus vaut un moins le carré du cosinus, et ce sinus est positif.

$$\sin^2 \widehat{BAE} = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad ; \quad \sin 75° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

24. DÉFINITION

Triangles isométriques

CE QU'IL DIT

Zouz triangles isométriques, ma3neha les côtés mte3hom kif kif, zouz zouz : ya3ni tnajjem t7ott we7ed fou9 le5er. Ama bech ta3rafhom, ma yelzmekch tthabbet fi les trois côtés. 3andna trois cas d'isométrie. Le premier cas : côté égal, bin deux angles égaux. Le deuxième cas : angle égal, bin deux côtés égaux. W le troisième cas : les trois côtés égaux. Le premier w le deuxième nbarhnouhom b la loi du sinus w le théorème d'El-Kashi. W rodd belek : trois angles égaux ma yekfiwch, ya3tiwek nafs ech-chakl bark, mouch nafs el 9yes.

زوز triangles isométriques ، معناها les côtés متاعهم كيف كيف ، زوز زوز : يعني تنجّم تحطّ واحد فوق الآخر . أما باش تعرفهم ، ما يلزمكش تثبّت في les trois côtés . عندنا trois cas d'isométrie . le premier cas : côté égal ، بين deux côtés égaux . w le troisième cas : les trois بين ، deux angles égaux . le deuxième cas : angle égal ردّ بالك : la loi du sinus w le théorème d'El-Kashi . w نبرهنوهم بـ côtés égaux . le premier w le deuxième trois angles égaux ما يكفيوش ، يعطيوك نفس الشكل برك ، موش نفس القياس .

Deux triangles isométriques ont leurs côtés deux à deux égaux : on peut les superposer. Mais pour les reconnaître, il n'est pas nécessaire de vérifier les trois côtés. Il y a trois cas d'isométrie. Le premier cas : un côté égal, entre deux angles égaux. Le deuxième cas : un angle égal, entre deux côtés égaux. Et le troisième cas : les trois côtés égaux. Le premier et le deuxième se démontrent avec la loi du sinus et le théorème d'El-Kashi. Et attention : trois angles égaux ne suffisent pas, ils donnent seulement la même forme, pas la même taille.

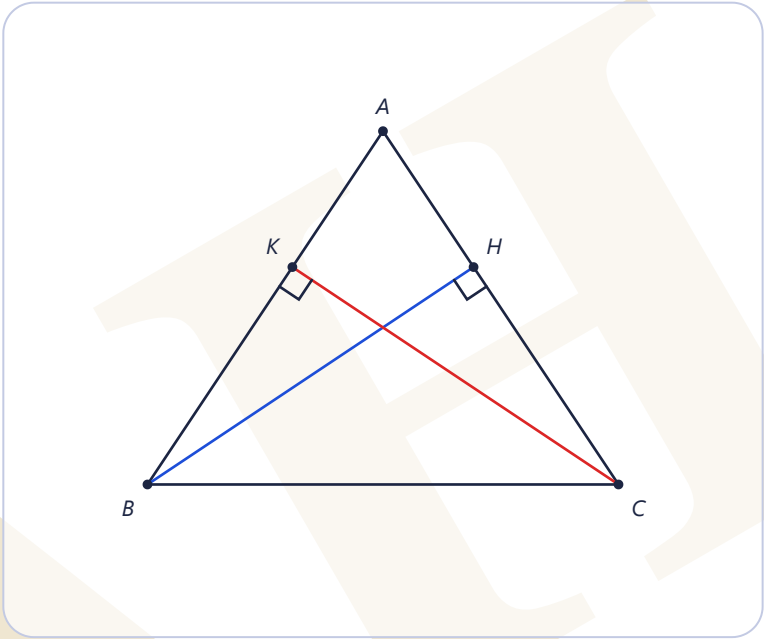
Définition. On dit que deux triangles sont **isométriques** si leurs côtés sont deux à deux égaux.

Pour reconnaître deux triangles isométriques, il n'est pas nécessaire de comparer les trois côtés : trois informations bien choisies suffisent.

1er cas d'isométrie. Si deux triangles ont un côté égal compris entre deux angles respectivement égaux, alors ils sont isométriques. **2e cas d'isométrie.** Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques. **3e cas d'isométrie.** Si deux triangles ont trois côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

Le troisième cas est la définition elle-même. Les deux premiers se démontrent avec la loi du sinus et le théorème d'El-Kashi. Dans le deuxième cas, El-Kashi donne le troisième côté à partir des deux côtés et de l'angle qu'ils forment. Dans le premier, les troisièmes angles sont égaux eux aussi, et la loi du sinus donne les deux autres côtés à partir du côté connu.

Deux triangles isométriques ont aussi leurs angles deux à deux égaux.



Les triangles BHC et CKB sont isométriques.

Un triangle ABC isocèle en A : A est en haut, B en bas à gauche, C en bas à droite. La hauteur issue de B tombe au point H du côté [AC]. La hauteur issue de C tombe au point K du côté [AB]. Des équerres marquent les angles droits en H et en K.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle isocèle en A. On désigne par $[BH]$ et $[CK]$ les hauteurs issues de B et de C. Montrer que $BH = CK$, puis que $CH = BK$.

Deux triangles — On compare les triangles BHC et CKB. Ils ont le côté $[BC]$ en commun.

Les angles — Le triangle ABC est isocèle en A : les angles à la base $\widehat{HCB}$ et $\widehat{KBC}$ sont égaux. Chacun des deux triangles a aussi un angle droit, en H et en K : leurs troisièmes angles sont donc égaux.

$$\widehat{HCB} = \widehat{KBC} \quad ; \quad \widehat{HBC} = \widehat{KCB}$$

Le premier cas — Le côté $[BC]$ est compris entre deux angles respectivement égaux : d'après le premier cas d'isométrie, les triangles BHC et CKB sont isométriques.

Les côtés égaux — Dans deux triangles isométriques, les côtés situés en face des angles égaux sont égaux.

$$BH = CK \quad ; \quad CH = BK$$

$$BH = CK \quad ; \quad CH = BK$$

À ne pas faire : Deux triangles qui ont leurs trois angles égaux sont isométriques — Ils sont seulement semblables. Trois angles égaux donnent la même forme, pas la même taille. Pour l'isométrie, il faut au moins un côté égal.

25. DÉFINITION

Triangles semblables

CE QU'IL DIT

Zouz triangles semblables, ma3neha les angles mte3hom kif kif : l'angle A égale l'angle A prime, l'angle B égale l'angle B prime, w l'angle C égale l'angle C prime. Ya3ni nafs ech-chakl, ama mouch bedh-dharoura nafs el 9yes. W en-natija el mohemma : les côtés proportionnels. a sur a prime, égale b sur b prime, égale c sur c prime. Le rapport hedha nsammiwh le rapport de similitude. W bel3aks : ken les côtés proportionnels, les triangles semblables. W zeda, ken 3andhom angle égal bin deux côtés proportionnels. Fel 5edma, yekfi tal9a deux angles égaux : le troisième yji wa7dou, 5ater la somme mta3 les angles hiya pi.

l'angle A égale l'angle A prime ، l'angle B : كيف كيف متاعهم les angles معناها ، triangles semblables زوز
أما موش بالضرورة نفس القياس ، يعني نفس الشكل . égale l'angle B prime ، w l'angle C égale l'angle C prime
les côtés proportionnels . a sur a prime ، égale b sur b prime ، égale c sur c prime . le : النتيجة المهمّة w .
les côtés proportionnels ، les triangles كان : بالعكس le rapport de similitude . w هذا نسمّيوه rapport
deux يكفي تلقى ، في الخدمة . deux côtés proportionnels بين angle égal كان عندهم ، زادة semblables . w
. pi هي les angles متاع la somme خاطر ، يجي وحدو angles égaux : le troisième

Deux triangles semblables ont les mêmes angles : l'angle A égale l'angle A prime, l'angle B égale l'angle B prime, et l'angle C égale l'angle C prime. Ils ont donc la même forme, mais pas forcément la même taille. Et voici le résultat important : leurs côtés sont proportionnels. a sur a prime, égale b sur b prime, égale c sur c prime. Ce rapport s'appelle le rapport de similitude. Et réciproquement : si les côtés sont proportionnels, les triangles sont semblables. De même s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. En pratique, il suffit de trouver deux angles égaux : le troisième suit, car la somme des angles vaut pi.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $B'C' = a'$, $A'C' = b'$ et $A'B' = c'$.

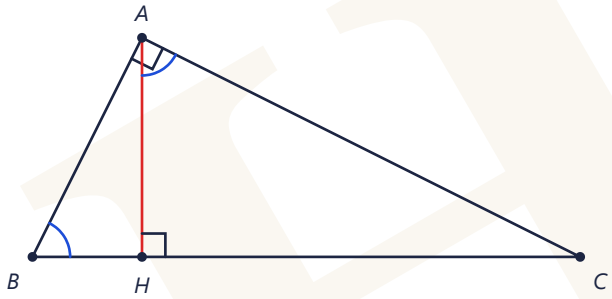
Définition. On dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont **semblables** si, et seulement si, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Si ABC et $A'B'C'$ sont semblables, alors $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. Ce rapport est appelé **rapport de similitude** des deux triangles.

Deux réciproques permettent de reconnaître des triangles semblables :

Si $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'}$, alors ABC et $A'B'C'$ sont semblables. Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$, alors ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

En pratique, comme la somme des angles d'un triangle vaut π, deux angles respectivement égaux suffisent : le troisième l'est alors aussi.



Les triangles ABH et CAH sont semblables.

Un triangle ABC rectangle en A, posé sur son hypoténuse [BC] : B est à gauche, C à droite, A au-dessus. Le point H est le pied de la hauteur issue de A : il est sur [BC], plus près de B. La hauteur [AH] partage le triangle en deux triangles rectangles, ABH à gauche et CAH à droite. L'angle en B et l'angle CAH portent la même marque.

TRIANGLES SEMBLABLES

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

LE RAPPORT DE SIMILITUDE

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

DÉMONSTRATION

D'après la loi du sinus, $a = 2R\sin\widehat{A}$ et $a' = 2R'\sin\widehat{A'}$, où R et R' sont les rayons des cercles circonscrits aux deux triangles. Si les angles sont respectivement égaux, alors $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{R}{R'}$, et de même $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{R}{R'}$ et $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{R}{R'}$: les trois rapports sont égaux. Les deux réciproques se démontrent avec le théorème d'El-Kashi.

EXEMPLE TRAITÉ

Soit ABC un triangle rectangle en A et $[AH]$ la hauteur issue de A. a) Montrer que les triangles ABH et CAH sont semblables. b) En déduire que $AH^2 = HB \times HC$.

Deux angles égaux — Les deux triangles sont rectangles en H. De plus, l'angle $\widehat{ABH}$ et l'angle $\widehat{CAH}$ sont tous les deux complémentaires de l'angle $\widehat{C}$: ils sont égaux.

$$\widehat{AHB} = \widehat{CHA} \quad ; \quad \widehat{ABH} = \widehat{CAH}$$

Triangles semblables — Deux angles sont respectivement égaux, donc le troisième aussi : les triangles ABH et CAH sont semblables.

Les côtés proportionnels — Les côtés situés en face des angles égaux sont proportionnels.

$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{CA}$$

Le produit en croix — On fait le produit en croix avec les deux premiers rapports.

$$AH^2 = HB \times HC$$

$$AH^2 = HB \times HC$$

À ne pas faire : Deux triangles semblables ont les mêmes longueurs — Ils ont les mêmes angles, et des côtés proportionnels. Semblable veut dire même forme. Les longueurs sont toutes multipliées par un même nombre, le rapport de similitude. Elles ne sont égales que si ce rapport vaut un.

---

26. THÉORÈME

Relations métriques dans un triangle rectangle

CE QU'IL DIT

Narj3ou l le triangle rectangle, w njam3ou les relations métriques. 3andna triangle ABC rectangle en A, w H le pied de la hauteur issue de A. 3andna Pythagore : BC au carré égale AB au carré plus AC au carré. Ba3d, l'aire na7sbouha b zouz tor9, w nal9aw : AH fois BC égale AB fois AC. W b les triangles semblables nal9aw trois relations o5rin. AH au carré égale HB fois HC. AB au carré égale BH fois BC. W AC au carré égale CH fois CB. Chedd fi belek : le carré de la hauteur houwa le produit mta3 ez-zouz segments, w le carré mta3 côté houwa le segment elli b7dheh fois l'hypoténuse el koll.

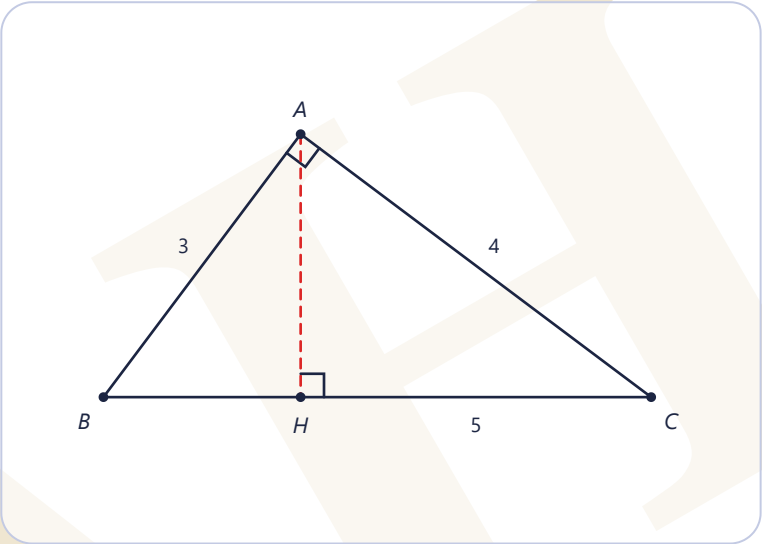
triangle A B C rectangle en A ، w H le عندنا . les relations métriques نجمعو le triangle rectangle ، w نرجعو لـ بعد ، . Pythagore : B C au carré égale A B au carré plus A C au carré عندنا . pied de la hauteur issue de A trois نلقاو les triangles semblables بـ A H fois B C égale A B fois A C . w : نلقاو w ، نحسبوها بزوز طرق l'aire A H au carré égale H B fois H C . A B au carré égale B H fois B C . w A C au carré égale C . أخرين relations هو côté متاع segments ، w le carré متاع الزوز le produit هو le carré de la hauteur : شدّ في بالك . H fois C B الكل fois l'hypoténuse بحذاه اللي le segment .

Revenons au triangle rectangle, pour rassembler les relations métriques. On a un triangle A B C rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A. Il y a Pythagore : B C au carré égale A B au carré plus A C au carré. Ensuite, on calcule l'aire de deux façons, et on trouve : A H fois B C égale A B fois A C. Et avec les triangles semblables, on en trouve trois autres. A H au carré égale H B fois H C. A B au carré égale B H fois B C. Et A C au carré égale C H fois C B. Retiens bien : le carré de la hauteur est le produit des deux segments, et le carré d'un côté est le segment voisin fois l'hypoténuse entière.

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A. On a : - $BC^2 = AB^2 + AC^2$; - $AH \times BC = AB \times AC$; - $AH^2 = HB \times HC$; - $AB^2 = BH \times BC$; - $AC^2 = CH \times CB$.

D'où viennent-elles ? La deuxième exprime de deux façons l'aire du triangle : $\frac{1}{2}\,AB \times AC$ et $\frac{1}{2}\,AH \times BC$. Les trois dernières viennent de triangles semblables : ABH et CAH pour la troisième, ABC et HBA pour la quatrième, ABC et HAC pour la cinquième.

En ajoutant les deux dernières, on retrouve le théorème de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC \times (BH + CH) = BC^2$.



Le triangle de côtés 3, 4 et 5 et sa hauteur.

Un triangle ABC rectangle en A, posé sur son hypoténuse [BC] : B est à gauche, C à droite, A au-dessus. Les côtés mesurent AB = 3, AC = 4 et BC = 5. Le point H est le pied de la hauteur issue de A, sur [BC], un peu plus près de B que de C.

AVEC L'AIRE

$$AH \times BC = AB \times AC$$

LA HAUTEUR

$$AH^2 = HB \times HC$$

LES CÔTÉS DE L'ANGLE DROIT

$$AB^2 = BH \times BC \quad ; \quad AC^2 = CH \times CB$$

EXEMPLE TRAITÉ

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a $AB = 3$ et $AC = 4$. Calculer BC, AH, BH et CH, où H est le pied de la hauteur issue de A.

L'hypoténuse — Le théorème de Pythagore donne l'hypoténuse.

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

La hauteur — Le produit de la hauteur par l'hypoténuse est égal au produit des deux côtés de l'angle droit.

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Le segment BH — Le carré de AB est le produit de BH par l'hypoténuse.

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

Le segment CH — De même, le carré de AC est le produit de CH par l'hypoténuse. On vérifie que la somme des deux segments redonne bien 5.

$$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

$$BC = 5 \quad ; \quad AH = 2{,}4 \quad ; \quad BH = 1{,}8 \quad ; \quad CH = 3{,}2$$

À ne pas faire : $AB^2 = BH \times HC$ — $AB^2 = BH \times BC$. Le produit des deux segments de l'hypoténuse donne le carré de la hauteur. Pour un côté de l'angle droit, on multiplie son segment par l'hypoténuse entière.

---

27. APPLICATION

Un problème pour aller plus loin : la formule de Héron

CE QU'IL DIT

Ki ta3ref les trois côtés mta3 triangle, w ma ta3ref 7atta angle, kifech te7seb l'aire ? B la formule de Héron. Nsammiw p le demi-périmètre, ya3ni noss la somme mta3 les trois côtés. W l'aire hiya : racine carrée du produit de p, par la parenthèse p moins a, par la parenthèse p moins b, et par la parenthèse p moins c. Mnin tji ? Nabdew men l'aire égale un demi de a b fois sinus de l'angle C, w n3awdhou le cosinus b le théorème d'El-Kashi, w les identités remarquables ykammlou el 5edma. Mathalan, triangle les côtés mte3ou cinq, sept w huit : p égale dix, w l'aire égale racine carrée de trois cents, ya3ni dix racine carrée de trois.

كي تعرف les trois côtés متاع ، w triangle ما تعرف حتّى angle ، كيفاش تحسب l'aire ؟ بـ la formule de Héron . نسمّيو le demi-périmètre p ، يعني نصّ la somme متاع l'aire . w les trois côtés هي : racine carrée du produit de p ، par la parenthèse p moins a ، par la parenthèse p moins b ، et par la parenthèse p moins c منين تجي ؟ نبداو من l'aire égale un demi de a b fois sinus de l'angle C ، w نعوّضو le cosinus بـ le théorème d'El-Kashi ، w les identités remarquables يكمّلو الخدمة . مثلاً ، triangle les côtés متاعو cinq ، sept w huit : p égale dix ، w l'aire égale racine carrée de trois cents . يعني dix racine carrée de trois

Quand tu connais les trois côtés d'un triangle, et aucun angle, comment calculer l'aire ? Avec la formule de Héron. On appelle p le demi-périmètre, c'est-à-dire la moitié de la somme des trois côtés. Et l'aire est : racine carrée du produit de p, par la parenthèse p moins a, par la parenthèse p moins b, et par la parenthèse p moins c. D'où vient-elle ? On part de l'aire égale un demi de a b fois sinus de l'angle C, on remplace le cosinus grâce au théorème d'El-Kashi, et les identités remarquables font le reste. Par exemple, pour un triangle de côtés cinq, sept et huit : p égale dix, et l'aire égale racine carrée de trois cents, c'est-à-dire dix racine carrée de trois.

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On désigne par p son **demi-périmètre**, c'est-à-dire $2p = a + b + c$, et par S son aire.

Formule de Héron d'Alexandrie. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Elle donne l'aire à partir des trois côtés seulement, sans aucun angle.

L'idée de la démonstration. On part de $S = \frac{1}{2}\,ab\sin\widehat{C}$, donc $4S^2 = a^2b^2\sin^2\widehat{C} = a^2b^2\,(1-\cos^2\widehat{C})$. Le théorème d'El-Kashi donne $2ab\cos\widehat{C} = a^2+b^2-c^2$, et les identités remarquables conduisent à

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 4a^2b^2\sin^2\widehat{C}.$$

Comme $a+b+c = 2p$, $a+b-c = 2(p-c)$, $b+c-a = 2(p-a)$ et $c+a-b = 2(p-b)$, le membre de gauche vaut $16\,p(p-a)(p-b)(p-c)$. Le membre de droite vaut $16S^2$: d'où $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

LE DEMI-PÉRIMÈTRE

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

LA FORMULE DE HÉRON

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

EXEMPLE TRAITÉ

Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 5, 7 et 8.

Le demi-périmètre — On ajoute les trois côtés, puis on divise par 2.

$$p = \frac{5+7+8}{2} = 10$$

Les trois écarts — On retire chaque côté au demi-périmètre.

$$p-a = 5 \quad ; \quad p-b = 3 \quad ; \quad p-c = 2$$

La formule — On multiplie les quatre nombres, puis on prend la racine carrée.

$$S = \sqrt{10\times 5\times 3\times 2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$$S = 10\sqrt{3}$$

À ne pas faire : Pour les côtés 5, 7 et 8 : $p = 20$ — $p = 10$. Dans la formule de Héron, p est le demi-périmètre : la moitié de la somme des trois côtés.

28. REMARQUE

Pour la culture : le nombre π

CE QU'IL DIT

Nkammlou b chwaya tari5. Men 9dim ez-zmen, el 3olama le7dhou elli les cercles el koll 3andhom 7aja kif kif : le rapport bin le périmètre w le diamètre dima houwa houwa. Le rapport hedha houwa le nombre pi. W pi mouch rationnel : les décimales mte3ou ma toufech w ma yet3awdouch. Archimède l9a trois décimales exactes. W Al-Kashi, 3alem kbir met 7awali 3am mille quatre cent trente fi Samarcande, l9a

seize décimales exactes. W houwa zeda moula le théorème elli chofneh lyoum. W tawa, b les ordinateurs, na3rfou des milliards de décimales.

نكمّلو بشويّة تاريخ . من قديم الزمان ، العلماء لاحظو اللي les cercles الكل عندهم حاجة كيف كيف : le rapport بين rationnel : les موش le nombre pi . w pi هذا هو le rapport . ديما هو هو le périmètre w le diamètre متاعو ما توفاش w ما يتعاودوش . Archimède لقى Al-Kashi . w trois décimales exactes ، عالم كبير هو زادة مولى le seize décimales exactes . w لقى ، Samarcande في mille quatre cent trente مات حوالي عام . des milliards de décimales نعرفو ، les ordinateurs بـ توّا w . اللي شفناه ليوم théorème

Terminons par un peu d'histoire. Depuis l'Antiquité, les savants ont remarqué que tous les cercles ont quelque chose en commun : le rapport entre le périmètre et le diamètre est toujours le même. Ce rapport est le nombre pi. Et pi n'est pas un rationnel : ses décimales ne s'arrêtent jamais et ne se répètent pas. Archimède en a trouvé trois décimales exactes. Et Al-Kashi, un grand savant mort vers mille quatre cent trente à Samarcande, en a trouvé seize décimales exactes. C'est aussi lui qui a donné son nom au théorème que nous avons vu aujourd'hui. Et de nos jours, avec les ordinateurs, on connaît des milliards de décimales.

Depuis l'Antiquité, les mathématiciens ont remarqué que tous les cercles ont quelque chose en commun : le rapport entre le périmètre et le diamètre est fixe. Ce rapport est donné par le réel π.

π n'est pas un rationnel. La recherche de ses décimales a toujours été un enjeu pour la science :

- une décimale exacte pour les Babyloniens et les Égyptiens, 2000 ans avant J.-C. ;
- 3 décimales exactes pour Archimède, 250 ans avant J.-C. ;
- 16 décimales exactes pour Al-Kashi, mort vers 1430 ;
- 100 décimales pour Machin en 1706 ;
- 1000 décimales en 1949 ;
- un million de décimales en 1973.

Aujourd'hui, à l'aide d'ordinateurs de plus en plus puissants, on peut déterminer des milliards de décimales de π.

Al-Kashi Jamsheddine, mort vers 1430 à Samarcande, est l'un des grands savants arabes, astronome et mathématicien. Il a dirigé pendant de longues années l'observatoire de Samarcande et il a établi des tables astronomiques d'une extraordinaire précision. Son ouvrage le plus célèbre est « Mifteh El Hissab », La clef de l'arithmétique.

À RETENIR

CE QU'IL DIT EN L'ÉCRIVANT

Hedha elli lezmek tetfakkrou :

هذا اللي لازمك تتفكّرو :

Voici ce qu'il faut retenir :

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI

1. Sur le demi-cercle trigonométrique, le point M tel que $\widehat{AOM} = \alpha$ a pour coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$; $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $0 \leq \sin\alpha \leq 1$.

   > 3la le demi-cercle trigonométrique, le point M 3andou l'abscisse cosinus de alpha, w l'ordonnée sinus de alpha. Le cosinus bin moins un w un, w le sinus bin zéro w un.
   > *Sur le demi-cercle trigonométrique, le point M a pour abscisse cosinus de alpha et pour ordonnée sinus de alpha. Le cosinus est entre moins un et un, et le sinus entre zéro et un.*

2. Angles supplémentaires : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$. Angles complémentaires : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

   > Les angles supplémentaires : nafs le sinus, w les cosinus opposés. Les angles complémentaires : le sinus w le cosinus yetbedlou.
   > *Les angles supplémentaires ont le même sinus et des cosinus opposés. Les angles complémentaires échangent leur sinus et leur cosinus.*

3. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ pour $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ pour $0 < \alpha < \pi$.

   > La tangente hiya le sinus sur le cosinus, w lezem alpha différent de pi sur deux. La cotangente hiya le cosinus sur le sinus, w lezem alpha bin zéro w pi, w ma ysewich la zéro la pi.
   > *La tangente est le sinus sur le cosinus, pour alpha différent de pi sur deux. La cotangente est le cosinus sur le sinus, pour alpha strictement entre zéro et pi.*

4. Relations fondamentales : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ et $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

   > Les relations fondamentales : le carré du cosinus plus le carré du sinus égale un. Un plus le carré de la tangente égale un sur le carré du cosinus. W un plus le carré de la cotangente égale un sur le carré du sinus.
   > *Les relations fondamentales : le carré du cosinus plus le carré du sinus égale un. Un plus le carré de la tangente égale un sur le carré du cosinus. Et un plus le carré de la cotangente égale un sur le carré du sinus.*

5. Loi du sinus : $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$.

   > La loi du sinus : a sur sinus de l'angle A, égale b sur sinus de l'angle B, égale c sur sinus de l'angle C, égale deux R. W R houwa le rayon mta3 le cercle circonscrit.
   > *La loi du sinus : a sur sinus de l'angle A, égale b sur sinus de l'angle B, égale c sur sinus de l'angle C, égale deux R, où R est le rayon du cercle circonscrit.*

6. Aire d'un triangle : $S = \dfrac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A} = \dfrac{abc}{4R}$.

   > L'aire mta3 triangle : S égale un demi de b c, fois sinus de l'angle A. W zeda S égale a b c sur quatre R.
   > *L'aire d'un triangle : S égale un demi de b c, fois sinus de l'angle A. Et aussi S égale a b c sur quatre R.*

7. Théorème d'El-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

   > Le théorème d'El-Kashi : a au carré égale b au carré plus c au carré, moins deux b c fois cosinus de l'angle A.

> *Le théorème d'El-Kashi : a au carré égale b au carré plus c au carré, moins deux b c fois cosinus de l'angle A.*

8. Triangles isométriques : côtés deux à deux égaux. Triangles semblables : angles deux à deux égaux, donc côtés proportionnels.
   > Les triangles isométriques 3andhom nafs les côtés. Les triangles semblables 3andhom nafs les angles, w les côtés mte3hom proportionnels.
   > *Les triangles isométriques ont les mêmes côtés. Les triangles semblables ont les mêmes angles, et leurs côtés sont proportionnels.*
9. Triangle rectangle en A, de hauteur $[AH]$: $AH^2 = HB \times HC$, $AB^2 = BH \times BC$, $AC^2 = CH \times CB$ et $AH \times BC = AB \times AC$.
   > Fi le triangle rectangle en A, w H le pied de la hauteur : AH au carré égale HB fois HC. AB au carré égale BH fois BC. AC au carré égale CH fois CB. W AH fois BC égale AB fois AC.
   > *Dans le triangle rectangle en A, avec H le pied de la hauteur : A H au carré égale H B fois H C. A B au carré égale B H fois B C. A C au carré égale C H fois C B. Et A H fois B C égale A B fois A C.*

CE QU'IL DIT EN REFERMANT

Hakka kammelna trigonométrie et mesure des grandeurs. Tfakker : le cosinus houwa l'abscisse w le sinus houwa l'ordonnée, 3la le demi-cercle trigonométrique. 9bal ma te5tar valeur, chouf le signe : l'angle aigu walla obtus. W fi triangle quelconque, koll côté yemchi m3a l'angle elli 9beltou : fi la loi du sinus, w fi le théorème d'El-Kashi. Yalla lel exercices.

هكّا كمّلنا trigonométrie et mesure des grandeurs . تفكّر : le cosinus هو l'abscisse w le sinus هو l'ordonnée ، على le demi-cercle trigonométrique . قُبَلْ ما تختار ، valeur شوف ، le signe : l'angle aigu وﻻّ w . obtus في ، كل triangle quelconque ، w في : قبالتو اللي l'angle مع يمشي côté في la loi du sinus ، في le théorème d'El-Kashi . يالله للـ exercices .

Voilà, nous avons terminé trigonométrie et mesure des grandeurs. Retiens : le cosinus est l'abscisse et le sinus est l'ordonnée, sur le demi-cercle trigonométrique. Avant de choisir une valeur, regarde le signe : l'angle est-il aigu ou obtus. Et dans un triangle quelconque, chaque côté va avec l'angle qui lui fait face : dans la loi du sinus, et dans le théorème d'El-Kashi. Allons aux exercices.

Questions fréquentes — ses réponses toutes prêtes

Quand un élève tape une de ces questions pendant le cours, cette réponse part aussitôt, avec sa voix, sans passer par le modèle. Les formulations sont celles qu'on reconnaît.

QUESTION 1 · POUR COMPRENDRE : LE DEMI-CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

c'est quoi le demi-cercle trigonométrique | chnowa le demi-cercle trigonométrique | demi-cercle trigonométrique ma3neha chnowa | définition du demi-cercle trigonométrique

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$A(1,0) \quad ; \quad B(0,1) \quad ; \quad A'(-1,0)$

CE QU'IL RÉPOND

Ne5dhou repère orthonormé : O, A w B, w A' houwa le symétrique mta3 A par rapport à O. Le demi-cercle trigonométrique houwa le demi-cercle elli le diamètre mte3ou $[AA']$, w elli yet3adda men B. Le rayon mte3ou 1, w koll point 3lih y9ablou réel we7ed bin 0 w π.

ناخذو repère orthonormé : O ، A w B ، w A prime هو le symétrique متاع le demi-cercle . A par rapport à O
trigonométrique هو le demi-cercle متاعو le diamètre ، w A A prime اللي يتعدّى من le rayon . B متاعو
point كل un ، w réel واحد بين pi w zéro . عليه يقابلو

On prend un repère orthonormé : O, A et B, et A prime est le symétrique de A par rapport à O. Le demi-cercle trigonométrique est le demi-cercle de diamètre A A prime qui passe par B. Son rayon vaut un, et à chacun de ses points correspond un seul réel entre zéro et pi.

QUESTION 2 · COSINUS ET SINUS D'UN RÉEL

c'est quoi le cosinus d'un réel | chnowa le cosinus mta3 réel alpha | définition du cosinus et du sinus | le cosinus c'est l'abscisse ou l'ordonnée

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$M(\cos\alpha\,,\ \sin\alpha)$$

CE QU'IL RÉPOND

Ne5dhou réel α bin 0 w π, w M houwa le point mta3 le demi-cercle trigonométrique elli ya3tina $\widehat{AOM} = \alpha$. Le cosinus mta3 α houwa l'abscisse mta3 M, w le sinus mta3 α houwa l'ordonnée mta3 M. Bech ma taghlatch : le cosinus na9rawh 3la l'axe horizontal, w le sinus 3la l'axe vertical.

ناخذو réel alpha بين M ، w pi zéro هو le point متاع le demi-cercle trigonométrique اللي يعطينا l'angle A
. le cosinus O M égale alpha متاع alpha هو l'abscisse متاع le sinus ، w M متاع alpha هو l'ordonnée متاع
باش ما تغلطش : le cosinus نقراوه على le sinus ، w l'axe horizontal على l'axe vertical .

On prend un réel alpha entre zéro et pi, et M est le point du demi-cercle trigonométrique tel que l'angle A O M égale alpha. Le cosinus de alpha est l'abscisse de M, et le sinus de alpha est l'ordonnée de M. Pour ne pas te tromper : le cosinus se lit sur l'axe horizontal, et le sinus sur l'axe vertical.

QUESTION 3 · COSINUS ET SINUS D'UN RÉEL

le sinus peut être négatif ? | sinus ynajjem ykoun négatif ? | 3lech le sinus dima positif | pourquoi le sinus est toujours positif entre 0 et pi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$0 \le \sin\alpha \le 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi el chapitre hedha, α dima bin 0 w π, donc le point M dima 3la le demi-cercle, fou9 le diamètre. L'ordonnée mte3ou ma tnajjemch tkoun négative : $0 \le \sin \alpha \le 1$. Elli ynajjem ykoun

négatif houwa le cosinus, ki l'angle obtus.

في الـ chapitre هذا ، alpha ديما بين zéro w pi ، donc le point M ديما على le demi-cercle ، فوق le diamètre .

l'ordonnée متاعو ما تنجّمش تكون négative : le sinus ديما بين zéro w un . اللي ينجّم يكون négatif هو le cosinus ، كي l'angle obtus .

Dans ce chapitre, alpha est toujours entre zéro et pi : le point M reste donc sur le demi-cercle, au-dessus du diamètre. Son ordonnée ne peut pas être négative : le sinus est toujours entre zéro et un. Celui qui peut être négatif, c'est le cosinus, quand l'angle est obtus.

QUESTION 4 · COSINUS ET SINUS D'UN RÉEL

pourquoi le cosinus d'un angle obtus est négatif | 3lech cosinus négatif ki l'angle obtus | cosinus d'un angle obtus kifech | le cosinus peut être négatif ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \Longrightarrow -1 \leq \cos\alpha < 0$$

CE QU'IL RÉPOND

Le cosinus houwa l'abscisse mta3 le point M. Ki l'angle aigu, M 3al ymin mta3 la droite (OB), w l'abscisse positive. Ki l'angle obtus, M yet3adda lel ysar, w l'abscisse twalli négative. Donc le cosinus mta3 angle obtus négatif, w houwa bin -1 w 0.

le cosinus هو l'abscisse متاع le point M . كي M ، l'angle aigu على اليمين متاع la droite O B ، w l'abscisse يتعدّى لليسار ، w l'abscisse تولّي le cosinus . donc l'angle obtus متاع négative . كي M ، l'angle obtus positive . w ، négatif هو بين zéro w moins un .

Le cosinus est l'abscisse du point M. Quand l'angle est aigu, M est à droite de la droite O B, et son abscisse est positive. Quand l'angle est obtus, M passe à gauche, et son abscisse devient négative. Le cosinus d'un angle obtus est donc négatif, entre moins un et zéro.

QUESTION 5 · ANGLES SUPPLÉMENTAIRES

c'est quoi deux angles supplémentaires | chnowa les angles supplémentaires | cosinus et sinus de deux angles supplémentaires | angles supplémentaires 3andhom nafs le sinus ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

CE QU'IL RÉPOND

Deux angles supplémentaires, ma3neha la somme mte3hom π, ya3ni 180 degrés. 3andhom nafs le sinus, w les cosinus opposés : $\sin(\pi - x) = \sin x$, w $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Mathalan $\cos \dfrac{2\pi}{3} = -\cos \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

deux angles supplémentaires ، معناها la somme متاعهم pi ، يعني cent quatre-vingts degrés . عندهم نفس le sinus ، w les cosinus opposés : sinus de pi moins x égale sinus de x ، w cosinus de pi moins x égale

moins un يعني ، cosinus de deux pi sur trois égale moins cosinus de pi sur trois مثلاً . moins cosinus de x . demi

Deux angles supplémentaires ont une somme égale à pi, c'est-à-dire cent quatre-vingts degrés. Ils ont le même sinus et des cosinus opposés : sinus de pi moins x égale sinus de x, et cosinus de pi moins x égale moins cosinus de x. Par exemple, cosinus de deux pi sur trois égale moins cosinus de pi sur trois, c'est-à-dire moins un demi.

QUESTION 6 · ANGLES COMPLÉMENTAIRES

c'est quoi deux angles complémentaires | chnowa les angles complémentaires | cosinus et sinus de deux angles complémentaires | angles complémentaires kifech na7seb le sinus

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

CE QU'IL RÉPOND

Deux angles complémentaires, ma3neha la somme mte3hom $\dfrac{\pi}{2}$, ya3ni 90 degrés. Le sinus w le cosinus yetbedlou : $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, w $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. Mathalan $\cos \dfrac{\pi}{3} = \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

quatre-vingt-dix degrés . le يعني ، pi sur deux متاعهم la somme معناها ، deux angles complémentaires cosinus de pi sur deux moins x égale sinus de x ، w sinus de pi sur deux moins : يتبادلو sinus w le cosinus . un demi الزوز ، cosinus de pi sur trois égale sinus de pi sur six مثلاً . x égale cosinus de x

Deux angles complémentaires ont une somme égale à pi sur deux, c'est-à-dire quatre-vingt-dix degrés. Leur sinus et leur cosinus s'échangent : cosinus de pi sur deux moins x égale sinus de x, et sinus de pi sur deux moins x égale cosinus de x. Par exemple, cosinus de pi sur trois égale sinus de pi sur six : les deux valent un demi.

QUESTION 7 · ANGLES COMPLÉMENTAIRES

chnowa el far9 bin supplémentaires w complémentaires | différence entre angles supplémentaires et complémentaires | supplémentaires w complémentaires kifech nfarra9 binethom | je confonds supplémentaires et complémentaires

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

CE QU'IL RÉPOND

Les supplémentaires, la somme mte3hom π : nafs le sinus, w le cosinus ybaddel le signe. Les complémentaires, la somme mte3hom $\dfrac{\pi}{2}$: le sinus w le cosinus yetbedlou, men ghir signe

moins. Bech tetfakker : le signe moins yji ken m3a π, w et-tabdil yji m3a $\dfrac{\pi}{2}$.

le signe . les complémentaires يبدّل le sinus ، w le cosinus نفس : pi متاعهم les supplémentaires ، la somme le signe : باش تتفكّر . signe moins غير من ، يتبادلو pi sur deux : le sinus w le cosinus متاعهم ، la somme . pi sur deux التبديل يجي مع pi ، w كان مع يجي moins

Pour les supplémentaires, la somme vaut pi : même sinus, et le cosinus change de signe. Pour les complémentaires, la somme vaut pi sur deux : le sinus et le cosinus s'échangent, sans signe moins. Pour t'en souvenir : le signe moins ne vient qu'avec pi, et l'échange vient avec pi sur deux.

QUESTION 8 · TANGENTE ET COTANGENTE

c'est quoi la tangente d'un réel | chnowa la tangente mta3 alpha | définition de la tangente | tangente ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

CE QU'IL RÉPOND

La tangente mta3 α hiya $\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Lezem α ykoun bin 0 w π, w différent de $\dfrac{\pi}{2}$. Fi le triangle rectangle, hiya le côté opposé sur le côté adjacent. W le signe mte3ha kif le signe mta3 le cosinus : positive ki l'angle aigu, w négative ki l'angle obtus.

zéro w pi ، w différent يكون بين alpha لازم . sinus de alpha sur cosinus de alpha هي alpha متاع la tangente متاعها كيف le côté opposé sur le côté adjacent . w le signe هي ، le triangle rectangle في . de pi sur deux . l'angle obtus كي l'angle aigu ، w négative كي le cosinus : positive متاع le signe

La tangente de alpha est sinus de alpha sur cosinus de alpha. Il faut que alpha soit entre zéro et pi, et différent de pi sur deux. Dans le triangle rectangle, c'est le côté opposé sur le côté adjacent. Et son signe est celui du cosinus : positive quand l'angle est aigu, négative quand il est obtus.

QUESTION 9 · TANGENTE ET COTANGENTE

c'est quoi la cotangente | chnowa la cotangente mta3 alpha | définition de la cotangente | cot alpha ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

CE QU'IL RÉPOND

La cotangente mta3 α hiya $\dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Lezem α ykoun bin 0 w π, w ma ysewich la 0 la π, 5ater le sinus ghadi 0. Nektbouha $\cot \alpha$. Fi le triangle rectangle, hiya le côté adjacent sur le côté opposé. Mathalan $\cot \dfrac{\pi}{2} = 0$.

ما zéro w pi ، w يكون بين alpha لازم . cosinus de alpha sur sinus de alpha هي alpha متاع la cotangente le côté هي ، le triangle rectangle في . cot alpha نكتبوها . zéro غادي le sinus خاطر ، pi لا zéro يساويش . adjacent sur le côté opposé . la cotangente de pi sur deux égale zéro مثلاً

La cotangente de alpha est cosinus de alpha sur sinus de alpha. Il faut que alpha soit strictement entre zéro et pi, car le sinus s'annule en zéro et en pi. On la note cot alpha. Dans le triangle rectangle, c'est le côté adjacent sur le côté opposé. Par exemple, la cotangente de pi sur deux égale zéro.

QUESTION 10 · TANGENTE ET COTANGENTE

pourquoi la tangente de pi sur 2 n'existe pas | 3lech tangente de pi sur 2 mouch mawjouda | tan de pi sur 2 existe ? | la tangente n'est pas définie en pi sur 2 pourquoi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

CE QU'IL RÉPOND

La tangente hiya le sinus sur le cosinus. W $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, w ma najjmouch na9smou 3la 0. Donc $\tan \dfrac{\pi}{2}$ ma hich mawjouda. 3la el figure, ki $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, la droite (OM) parallèle à la tangente fi A, w ma t9osshech. Ama fi 0 w fi π, la tangente mawjouda w tsewi 0.

ما نجّموش نقسمو على le sinus sur le cosinus . w cosinus de pi sur deux égale zéro ، w هي la tangente alpha égale pi sur deux ، la droite كي ، figure الـ على . ما هيش موجودة zéro . donc tangente de pi sur deux zéro تساوي w موجودة pi ، la tangente في zéro w في . أما ما تقصّهاش A ، w في O M parallèle à la tangente .

La tangente est le sinus sur le cosinus. Or cosinus de pi sur deux égale zéro, et on ne divise pas par zéro. La tangente de pi sur deux n'existe donc pas. Sur la figure, quand alpha égale pi sur deux, la droite O M est parallèle à la tangente en A : elle ne la coupe pas. En zéro et en pi, en revanche, elle existe et vaut zéro.

QUESTION 11 · TANGENTE ET COTANGENTE

chnowa el far9 bin tangente w cotangente | différence entre tangente et cotangente | la cotangente c'est l'inverse de la tangente ? | tangente w cotangente chnowa el 3ala9a binethom

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\tan \alpha \times \cot \alpha = 1$$

CE QU'IL RÉPOND

La tangente hiya le sinus sur le cosinus, w la cotangente hiya le cosinus sur le sinus : ya3ni ma9loubin. Ki ez-zouz mawjoudin, $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}$, w le produit mte3hom 1. Ama rodd belek : fi $\dfrac{\pi}{2}$, la cotangente 0 w la tangente ma hich mawjouda.

يعني مقلوبين . كي le cosinus sur le sinus هي le sinus sur le cosinus ، w la cotangente هي la tangente الزوز موجودين ، la cotangente هي l'inverse متاع le produit w la tangente ، la cotangente متاعهم un . أما ردّ بالك : في pi sur deux ، la cotangente zéro w la tangente ما هيش موجودة .

La tangente est le sinus sur le cosinus, et la cotangente est le cosinus sur le sinus : l'une est l'autre renversée. Quand les deux existent, la cotangente est l'inverse de la tangente, et leur produit vaut un. Mais attention : en pi sur deux, la cotangente vaut zéro et la tangente n'existe pas.

QUESTION 12 · LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES REMARQUABLES

comment retenir les valeurs des angles remarquables | kifech na7fedh le tableau des angles remarquables | angles remarquables chnowa homa | les valeurs remarquables de cosinus et sinus

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sin : \ 0, \ \frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2}, \ 1$$

CE QU'IL RÉPOND

Les angles remarquables houma 0, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ w $\dfrac{\pi}{2}$. Le sinus yotla3 : 0, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, w 1. W le cosinus nafs les valeurs ama bel ma9loub : men 1 l 0. W l $\dfrac{\pi}{4}$, ez-zouz kif kif.

يطلع : zéro ، pi sur six ، pi sur quatre ، pi sur trois w pi sur deux . le sinus هوما les angles remarquables نفس zéro ، un demi ، racine carrée de deux sur deux ، racine carrée de trois sur deux ، w un . w le cosinus أما بالمقلوب : من un لـ w . zéro لـ pi sur quatre ، الزوز كيف كيف . les valeurs

Les angles remarquables sont zéro, pi sur six, pi sur quatre, pi sur trois et pi sur deux. Le sinus monte : zéro, un demi, racine carrée de deux sur deux, racine carrée de trois sur deux, et un. Et le cosinus prend les mêmes valeurs dans l'ordre inverse : de un à zéro. Pour pi sur quatre, les deux sont égaux.

QUESTION 13 · LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES REMARQUABLES

pourquoi un sinus donne deux solutions | 3lech sinus ya3ti zouz solutions | sin x égale un demi combien de solutions | sinus w zouz valeurs kifech

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le sinus houwa l'ordonnée. W 3la le demi-cercle, thamma zouz points 3andhom nafs l'ordonnée : we7ed 3al ymin w we7ed 3al ysar. Donc ki na3rfou le sinus, nal9aw zouz réels : x w $\pi - x$. Mathalan $\sin x = \dfrac{1}{2}$ ya3ti $\dfrac{\pi}{6}$, walla $\dfrac{5\pi}{6}$. Ken ki le sinus ysewi 1, thamma point we7ed bark, w réel we7ed : $\dfrac{\pi}{2}$. W le cosinus bel3aks, ya3ti réel we7ed bark.

واحد على اليمين : l'ordonnée عندهم نفس points زوز ثمّة ، le demi-cercle على l'ordonnée . w هو le sinus sinus de x égale un demi مثلاً . réels : x w pi moins x نلقاو زوز ، le sinus كي نعرفو donc . واحد على اليسار pi sur : واحد w réel ، واحد برك point ثمّة ، un يساوي le sinus كان كي . cinq pi sur six ولّا ، pi sur six يعطي deux . w le cosinus بالعكس ، يعطي réel واحد برك .

Le sinus est l'ordonnée. Et sur le demi-cercle, deux points ont la même ordonnée : l'un à droite, l'autre à gauche. Quand on connaît le sinus, on trouve donc deux réels : x et pi moins x. Par exemple, sinus de x égale un demi donne pi sur six, ou bien cinq pi sur six. Seule exception : quand le sinus vaut un, il n'y a qu'un point, et un seul réel, pi sur deux. Le cosinus, au contraire, ne donne qu'un seul réel.

QUESTION 14 · RELATIONS FONDAMENTALES

c'est quoi la relation fondamentale | chnowa les relations fondamentales | pourquoi la relation fondamentale est vraie | relation fondamentale ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

CE QU'IL RÉPOND

La relation fondamentale hiya : $\cos^{2} x + \sin^{2} x = 1$. Tji men le demi-cercle : le point M 3andou l'abscisse $\cos x$ w l'ordonnée $\sin x$, w $OM = 1$. W menha ntalla3ou zouz o5rin : $1 + \tan^{2} x = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$, w $1 + \cot^{2} x = \dfrac{1}{\sin^{2} x}$.

le demi-cercle : تجي من . le carré du cosinus plus le carré du sinus égale un : هي la relation fondamentale l'abscisse cosinus de x w l'ordonnée sinus de x ، w O M égale un . w عندو le point M منها نطلّعو زوز أخرين : un plus le carré de la tangente égale un sur le carré du cosinus ، w un plus le carré de la cotangente égale un sur le carré du sinus .

La relation fondamentale est : le carré du cosinus plus le carré du sinus égale un. Elle vient du demi-cercle : le point M a pour abscisse cosinus de x et pour ordonnée sinus de x, et O M égale un. On en tire deux autres : un plus le carré de la tangente égale un sur le carré du cosinus, et un plus le carré de la cotangente égale un sur le carré du sinus.

QUESTION 15 · D'UN RAPPORT AUX TROIS AUTRES

comment choisir le signe du cosinus | kifech na3ref le signe mta3 cosinus | le signe du cosinus kifech nal9ah | signe du cosinus quand on connaît le sinus

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos x > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi \Longrightarrow \cos x < 0$$

CE QU'IL RÉPOND

La relation fondamentale ta3tik le carré du cosinus bark, w yo93edlek le signe. Chouf l'intervalle : ken x bin 0 w $\dfrac{\pi}{2}$, l'angle aigu w le cosinus positif. Ken x bin $\dfrac{\pi}{2}$ w π, l'angle obtus w le cosinus négatif. W ken ta3ref la tangente, le cosinus 3andou nafs le signe mte3ha.

بين x كان : l'intervalle شوف . le signe يقعدلك w ، برك le carré du cosinus تعطيك la relation fondamentale pi sur deux w pi ، l'angle obtus w le بين x كان . zéro w pi sur deux ، l'angle aigu w le cosinus positif متاعها . le signe نفس عندو la tangente ، le cosinus كان تعرف cosinus négatif . w

La relation fondamentale ne te donne que le carré du cosinus : il reste à choisir le signe. Regarde l'intervalle : si x est entre zéro et pi sur deux, l'angle est aigu et le cosinus est positif. Si x est entre pi sur deux et pi, l'angle est obtus et le cosinus est négatif. Et si tu connais la tangente, le cosinus a le même signe qu'elle.

QUESTION 16 · RELATIONS FONDAMENTALES

que veut dire cos² x | cos carré x ma3neha chnowa | cos² x c'est cos de x au carré ? | chnowa cos carré

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

CE QU'IL RÉPOND

$\cos^{2} x$ hiya ktiba mo5tasra : ma3neha $(\cos x)^{2}$. Ya3ni te7seb le cosinus 9bal, w ba3d tarf3ou au carré. Mouch $\cos(x^{2})$. W kif kif l $\sin^{2} x$, $\tan^{2} x$ w $\cot^{2} x$.

cosinus carré de x هي كتيبة مختصرة : معناها cosinus de x ، الكل au carré . يعني تحسب le cosinus قْبَلْ ، w sinus carré de x ، tangente carré de x w كيف كيف لـ le cosinus du carré de x . w موش . بعد ترفعو au carré cotangente carré de x .

Cosinus carré de x est une écriture abrégée : elle désigne cosinus de x, le tout au carré. Tu calculs donc d'abord le cosinus, puis tu l'élèves au carré. Ce n'est pas le cosinus du carré de x. Et de même pour sinus carré de x, tangente carré de x et cotangente carré de x.

QUESTION 17 · D'UN RAPPORT AUX TROIS AUTRES

comment trouver le cosinus à partir de la tangente | kifech nal9a cosinus ki na3ref la tangente | trouver cos et sin sachant tan | men la tangente kifech nal9a le sinus

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin x = \tan x \times \cos x$$

CE QU'IL RÉPOND

Tabda b la relation : $1 + \tan^{2} x = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$. Ta3tik le carré du cosinus. Ba3d te5tar le signe : le cosinus 3andou nafs le signe mta3 la tangente. W fel e5er, $\sin x = \tan x \times \cos x$. Mathalan $\tan x = 10$: $\cos^{2} x = \dfrac{1}{101}$.

تبدا بـ la relation : un plus le carré de la tangente égale un sur le carré du cosinus . تعطيك le carré du cosinus . بعد تختار le signe : le cosinus عندو نفس le signe متاع w la tangente . في الآخر ، le sinus égale la tangente fois le cosinus . مثلاً le carré du cosinus un sur cent un . tangente égale dix : .

Commence par la relation : un plus le carré de la tangente égale un sur le carré du cosinus. Elle te donne le carré du cosinus. Choisis ensuite le signe : le cosinus a le même signe que la tangente. Et pour finir, le sinus égale la tangente fois le cosinus. Par exemple, si la tangente vaut dix, le carré du cosinus vaut un sur cent un.

QUESTION 18 · LA LOI DU SINUS

c'est quoi la loi du sinus | chnowa la loi du sinus | loi du sinus ma3neha chnowa | à quoi sert la loi du sinus

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi triangle ABC, nsammiw a, b w c les côtés elli 9belet A, B w C. La loi du sinus t9oul : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$. Ya3ni koll côté m3a le sinus mta3 l'angle elli 9beltou. Nesta3mlouha ki na3rfou côté w zouz angles, bech nal9aw les côtés lo5rin.

في triangle A B C ، نسمّيو les côtés a ، b w c اللي قبالة a sur sinus de : تقول A ، B w C . la loi du sinus متاع le sinus مع côté كل يعني . l'angle A ، égale b sur sinus de l'angle B ، égale c sur sinus de l'angle C اللي قبالتو . نستعملوها كي نعرفو côté w زوز angles ، باش نلقاو les côtés الأخرين .

Dans un triangle A B C, on appelle a, b et c les côtés opposés à A, B et C. La loi du sinus dit : a sur sinus de l'angle A, égale b sur sinus de l'angle B, égale c sur sinus de l'angle C. Chaque côté va donc avec le sinus de l'angle qui lui fait face. On s'en sert quand on connaît un côté et deux angles, pour trouver les autres côtés.

QUESTION 19 · LOI DU SINUS ET CERCLE CIRCONSCRIT

comment calculer le rayon du cercle circonscrit | rayon du cercle circonscrit kifech na7sbou | c'est quoi le cercle circonscrit et son rayon | cercle circonscrit w la loi du sinus

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le cercle circonscrit houwa le cercle elli yet3adda men les trois sommets mta3 le triangle. W le rayon mte3ou R nal9awh b la loi du sinus : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$. Ya3ni te5ou côté, ta9smou 3la le sinus mta3 l'angle elli 9beltou, w ta9sem 3la 2. W 3andek zeda : $R = \dfrac{abc}{4S}$, w S hiya l'aire.

le cercle circonscrit هو le cercle اللي يتعدّى من les trois sommets متاع le rayon . w le triangle متاعو R نلقاوه بـ R sur sinus de l'angle A égale deux la loi du sinus : . يعني تاخو côté ، تقسمو على le sinus متاع l'angle اللي قبالتو ، w تقسم على deux . w عندك زادة : S ، w S هي l'aire . R égale a b c sur quatre

Le cercle circonscrit est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle. Son rayon R se trouve avec la loi du sinus : a sur sinus de l'angle A égale deux R. Tu prends donc un côté, tu le divises par le sinus de l'angle opposé, puis par deux. Tu as aussi : R égale a b c sur quatre S, où S est l'aire.

QUESTION 20 · THÉORÈME DES BISSECTRICES

c'est quoi le théorème des bissectrices | chnowa le théorème des bissectrices | la bissectrice coupe le côté opposé comment | bissectrice w le rapport mta3 les côtés

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi triangle ABC, la bissectrice intérieure mta3 l'angle A t9oss le côté [BC] fi point I. Le théorème y9oul : $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$. Ya3ni ken AB asghar men AC, I a9rab l B. Mathalan ken $AB = 6$ w $AC = 9$, $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{2}{3}$.

I : يقول point I . le théorème في le côté B C تقصّ l'angle A متاع triangle A B C ، la bissectrice intérieure في A B égale six w A C égale neuf كان مثلاً . B أقرب لـ A C ، I أصغر من A B كان يعني . B sur I C égale A B sur A C . ، I B sur I C égale deux sur trois

Dans un triangle A B C, la bissectrice intérieure de l'angle A coupe le côté B C en un point I. Le théorème dit : I B sur I C égale A B sur A C. Le point I est donc plus près de B quand A B est plus petit que A C. Par exemple, si A B égale six et A C égale neuf, I B sur I C égale deux sur trois.

QUESTION 21 · AIRE D'UN TRIANGLE

comment calculer l'aire d'un triangle avec le sinus | kifech na7seb l'aire mta3 triangle | formule de l'aire d'un triangle | l'aire avec deux côtés et un angle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$S = \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A}$$

CE QU'IL RÉPOND

Te5ou zouz côtés, w l'angle elli binethom. L'aire hiya un demi, fois le produit mta3 ez-zouz côtés, fois le sinus mta3 l'angle hedheka. Mathalan $S = \dfrac{1}{2}\,bc \sin \widehat{A}$. Rodd belek : l'angle lezem ykoun bin ez-zouz côtés elli 5dhithom, mouch angle e5er.

تاخو زوج l'angle ، w côtés اللي بيناتهم . l'aire هي fois le produit ، un demi متاع الزوج fois le sinus ، متاع côtés هذاكا l'angle . مثلاً A l'angle fois le sinus de b c fois un demi égale S . ردّ بالك : l'angle لازم يكون بين الزوج côtés اللي خذيتهم ، موش angle آخر .

Tu prends deux côtés et l'angle qu'ils forment. L'aire est un demi, fois le produit des deux côtés, fois le sinus de cet angle. Par exemple, S égale un demi de b c fois sinus de l'angle A. Attention : l'angle doit être celui que forment les deux côtés choisis, pas un autre.

QUESTION 22 · EXEMPLE : L'AIRE D'UN QUADRILATÈRE

comment calculer l'aire d'un quadrilatère | kifech na7seb l'aire mta3 quadrilatère | formule de l'aire d'un quadrilatère avec les diagonales | l'aire d'un quadrilatère avec le sinus

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\text{aire}(ABCD) = \frac{1}{2}\, AC \times BD \times \sin \alpha$$

CE QU'IL RÉPOND

Te5ou ez-zouz diagonales, w l'angle elli binethom. L'aire mta3 le quadrilatère hiya un demi, fois le produit mta3 ez-zouz diagonales, fois le sinus mta3 l'angle hedheka. Mathalan l quadrilatère $ABCD$: l'aire hiya $\dfrac{1}{2}\,AC \times BD \times \sin \alpha$, w α houwa l'angle mta3 les diagonales.

تاخو الزوز diagonales ، w l'angle اللي بيناتهم . l'aire متاع le quadrilatère هي le produit ، fois un demi متاع quadrilatère A B C D : l'aire égale un demi de A C لـ مثلاً . هذاكا l'angle متاع diagonales ، fois le sinus الزوز . les diagonales متاع l'angle هو fois B D ، fois sinus de alpha ، w alpha

Tu prends les deux diagonales et l'angle qu'elles forment. L'aire du quadrilatère est un demi, fois le produit des deux diagonales, fois le sinus de cet angle. Par exemple, pour un quadrilatère A B C D : l'aire égale un demi de A C fois B D, fois sinus de alpha, où alpha est l'angle des diagonales.

QUESTION 23 · THÉORÈME D'EL-KASHI

c'est quoi le théorème d'El-Kashi | chnowa théorème El Kashi | à quoi sert El-Kashi | formule d'El Kashi

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

CE QU'IL RÉPOND

Le théorème d'El-Kashi yorbot les trois côtés mta3 triangle m3a angle : $a^{2} = b^{2} + c^{2} - 2bc \cos \widehat{A}$. Le côté a w l'angle A 9belet b3adhhom. Nesta3mlouh bech na7sbou côté ki na3rfou zouz côtés w l'angle elli binethom, walla bech na7sbou angle ki na3rfou les trois côtés.

angle : a au carré égale b au carré plus c au مع triangle متاع les trois côtés يربط le théorème d'El-Kashi نستعملوه باش نحسبو . قبالة بعضهم carré ، moins deux b c fois cosinus de l'angle A . le côté a w l'angle A côté كي نعرفو زوز côtés w l'angle اللي بيناتهم ، ولّا باش نحسبو angle كي نعرفو les trois côtés .

Le théorème d'El-Kashi relie les trois côtés d'un triangle à un angle : a au carré égale b au carré plus c au carré, moins deux b c fois cosinus de l'angle A. Le côté a et l'angle A se font face. On s'en sert pour calculer un côté quand on connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment, ou pour calculer un angle quand on connaît les trois côtés.

QUESTION 24 · THÉORÈME D'EL-KASHI

différence entre El-Kashi et Pythagore | chnowa el far9 bin Kashi w Pythagore | El Kashi w Pythagore kif kif ? | Pythagore est un cas particulier d'El-Kashi ?

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\widehat{A} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

CE QU'IL RÉPOND

Pythagore ye5dem ken fi le triangle rectangle, w El-Kashi ye5dem fi koll triangle. W Pythagore houwa cas particulier mta3 El-Kashi : ki l'angle A droit, $\cos \widehat{A} = 0$, w le terme $-2bc \cos \widehat{A}$ yetna77a. Yo93ed $a^{2} = b^{2} + c^{2}$.

cas هو triangle . w Pythagore يخدم في كل le triangle rectangle ، w El-Kashi في يخدم كان Pythagore l'angle A droit ، cosinus de l'angle A égale zéro ، w le terme moins deux b c كي : El-Kashi متاع particulier

. a au carré égale b au carré plus c au carré يقعد . يتنحّى fois le cosinus

Pythagore ne fonctionne que dans le triangle rectangle, alors qu'El-Kashi fonctionne dans tout triangle. Et Pythagore est un cas particulier d'El-Kashi : quand l'angle A est droit, cosinus de l'angle A égale zéro, et le terme moins deux b c fois le cosinus disparaît. Il reste a au carré égale b au carré plus c au carré.

QUESTION 25 · THÉORÈME D'EL-KASHI

quand utiliser la loi du sinus et quand El-Kashi | wa9tech nesta3mel El Kashi w wa9tech la loi du sinus | loi du sinus ou El-Kashi lequel choisir | El Kashi walla la loi du sinus

CE QU'IL RÉPOND

Chouf chnowa ta3ref. Ken ta3ref zouz côtés w l'angle elli binethom, walla les trois côtés : esta3mel El-Kashi. Ken ta3ref côté w zouz angles, walla côté, l'angle elli 9beltou w côté e5er : esta3mel la loi du sinus. Ya3ni El-Kashi ki el 5edma m3a les côtés, w la loi du sinus ki 3andek couple : côté w l'angle opposé mte3ou.

شوف شنوّة تعرف . كان تعرف زوز les trois côtés w l'angle اللي بيناتهم ، ولّا El-Kashi استعمل . كان تعرف
كي الخدمة El-Kashi يعني . la loi du sinus استعمل : آخر w côté اللي قبالتو côté ، l'angle ، ولّا angles زوز côté w
مع la loi du sinus w ، les côtés كي عندك couple : côté w l'angle opposé متاعو .

Regarde ce que tu connais. Si tu connais deux côtés et l'angle qu'ils forment, ou bien les trois côtés : utilise El-Kashi. Si tu connais un côté et deux angles, ou bien un côté, l'angle qui lui fait face et un deuxième côté : utilise la loi du sinus. El-Kashi sert donc quand on travaille surtout avec des côtés, et la loi du sinus quand on a un couple : un côté et son angle opposé.

QUESTION 26 · TRIANGLES ISOMÉTRIQUES

c'est quoi deux triangles isométriques | chnowa triangles isométriques | comment montrer que deux triangles sont isométriques | les cas d'isométrie chnowa homa

CE QU'IL RÉPOND

Zouz triangles isométriques, ma3neha les côtés mte3hom kif kif, zouz zouz. Bech tbarhenha, 3andek trois cas d'isométrie. Le premier cas : côté égal, bin deux angles égaux. Le deuxième cas : angle égal, bin deux côtés égaux. Le troisième cas : les trois côtés égaux. W wa9tha les angles mte3hom zeda kif kif.

زوز triangles isométriques ، معناها les côtés متاعهم كيف كيف ، زوز زوز . باش تبرهنها ، عندك trois cas
deux بين ، deux angles égaux . le deuxième cas : angle égal بين ، d'isométrie . le premier cas : côté égal
متاعهم زادة كيف كيف . les angles وقتها côtés égaux . le troisième cas : les trois côtés égaux . w

Deux triangles isométriques ont leurs côtés deux à deux égaux. Pour le démontrer, tu as trois cas d'isométrie. Le premier cas : un côté égal, entre deux angles égaux. Le deuxième cas : un angle égal, entre deux côtés égaux. Le troisième cas : les trois côtés égaux. Et leurs angles sont alors égaux eux aussi.

QUESTION 27 · TRIANGLES SEMBLABLES

c'est quoi deux triangles semblables | chnowa triangles semblables | comment montrer que deux triangles sont semblables | triangles semblables ma3neha chnowa

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

CE QU'IL RÉPOND

Zouz triangles semblables, ma3neha les angles mte3hom kif kif, zouz zouz. W wa9tha les côtés proportionnels : $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. Le rapport hedha houwa le rapport de similitude. Bech tbarhenha, yekfi tal9a deux angles égaux, 5ater la somme mta3 les angles dima π.

les côtés proportionnels : a وقتها w . زوز زوز ، كيف كيف متاعهم les angles معناها ، triangles semblables زوز
باش . le rapport de similitude هذا هو sur a prime ، égale b sur b prime ، égale c sur c prime . le rapport
تبرهنها ، يكفي تلقى deux angles égaux ، خاطر la somme متاع les angles ديما pi .

Deux triangles semblables ont leurs angles deux à deux égaux. Leurs côtés sont alors proportionnels : a sur a prime, égale b sur b prime, égale c sur c prime. Ce rapport est le rapport de similitude. Pour le démontrer, il suffit de trouver deux angles égaux, car la somme des angles vaut toujours pi.

QUESTION 28 · TRIANGLES SEMBLABLES

chnowa el far9 bin isométriques w semblables | différence entre triangles isométriques et semblables | isométriques w semblables kif kif ? | deux triangles semblables sont-ils isométriques

CE QU'IL RÉPOND

Les triangles isométriques 3andhom nafs les côtés : nafs ech-chakl w nafs el 9yes. Les triangles semblables 3andhom nafs les angles bark : nafs ech-chakl, ama we7ed ynajjem ykoun akbar men le5er. Donc koll zouz isométriques houma semblables, w le rapport de similitude mte3hom 1. Ama el 3aks mouch dima s7i7.

les triangles semblables . نفس القياس w نفس الشكل : les côtés عندهم نفس les triangles isométriques
عندهم نفس les angles برك : نفس الشكل ، أما واحد ينجّم يكون أكبر من الآخر . donc كل زوز isométriques هوما
تبرهنها ، un متاعهم semblables ، w le rapport de similitude . أما العكس موش ديما صحيح .

Les triangles isométriques ont les mêmes côtés : même forme et même taille. Les triangles semblables ont seulement les mêmes angles : même forme, mais l'un peut être plus grand que l'autre. Deux triangles isométriques sont donc toujours semblables, avec un rapport de similitude égal à un. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

QUESTION 29 · RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

c'est quoi les relations métriques | chnowa les relations métriques fi triangle rectangle | relations métriques kifech na7fedhhom | formule de la hauteur dans un triangle rectangle

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$AH^2 = HB \times HC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$
$$AC^2 = CH \times CB$$

CE QU'IL RÉPOND

Fi triangle ABC rectangle en A, w H le pied de la hauteur issue de A, 3andna : $AH^{2} = HB \times HC$. $AB^{2} = BH \times BC$. $AC^{2} = CH \times CB$. W $AH \times BC = AB \times AC$. Bech tetfakkarhom : le carré de la hauteur houwa le produit mta3 ez-zouz segments, w le carré mta3 côté houwa le segment elli b7dheh fois l'hypoténuse.

في A عندنا ، triangle A B C rectangle en A ، w H le pied de la hauteur issue de A : A H au carré égale H B fois H C . A B au carré égale B H fois B C . A C au carré égale C H fois C B . w A H fois B C égale A B fois A C . باش تتفكّرهم : le carré de la hauteur هو le produit متاع الزوج le carré w ، segments متاع côté هو le fois l'hypoténuse اللي بحذاه segment .

Dans un triangle A B C rectangle en A, avec H le pied de la hauteur issue de A, on a : A H au carré égale H B fois H C. A B au carré égale B H fois B C. A C au carré égale C H fois C B. Et A H fois B C égale A B fois A C. Pour les retenir : le carré de la hauteur est le produit des deux segments, et le carré d'un côté est le segment voisin fois l'hypoténuse.

QUESTION 30 · UN PROBLÈME POUR ALLER PLUS LOIN : LA FORMULE DE HÉRON

c'est quoi la formule de Héron | chnowa formule Héron | à quoi sert la formule de Héron | Héron kifech nesta3melha

CE QU'IL ÉCRIT AU TABLEAU

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

CE QU'IL RÉPOND

La formule de Héron ta3tik l'aire mta3 triangle ki ta3ref les trois côtés bark. Te7seb p, le demi-périmètre : noss la somme mta3 les trois côtés. W l'aire hiya $\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$. Mathalan l les côtés 5, 7 w 8 : $p = 10$, w l'aire $10\sqrt{3}$.

تحسب . برك les trois côtés تعرف كي triangle متاع l'aire تعطيك la formule de Héron : p ، le demi-périmètre racine carrée du produit de p ، par la parenthèse p moins هي les trois côtés . w l'aire متاع la somme نصّ les côtés cinq ، sept w huit : p لـ مثلاً . a ، par la parenthèse p moins b ، et par la parenthèse p moins c . égale dix ، w l'aire dix racine carrée de trois.

La formule de Héron donne l'aire d'un triangle quand on ne connaît que ses trois côtés. Tu calcules p, le demi-périmètre : la moitié de la somme des trois côtés. Et l'aire est racine carrée du produit de p, par la parenthèse p moins a, par la parenthèse p moins b, et par la parenthèse p moins c. Par exemple, pour les côtés cinq, sept et huit : p égale dix, et l'aire vaut dix racine carrée de trois.

Les exercices — avec les corrigés

EXERCICE 1 · BASE

Un cosinus négatif

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{2}$. Déterminer x.

Écris la valeur de x en radians, et non en degrés, avec pi.

Réponse attendue : `2*pi/3` — aussi acceptées : 2pi/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cosinus est négatif : l'angle est-il aigu ou obtus ?
2. Quel angle remarquable a pour cosinus un demi ?
3. Deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés : prends le supplémentaire de $\frac{\pi}{3}$.

CORRECTION

L'angle remarquable — On sait que le cosinus de $\frac{\pi}{3}$ vaut un demi.

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Le supplémentaire — Deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés.

$$\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

La valeur de x — Dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$, un cosinus ne correspond qu'à un seul réel.

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

Un cosinus négatif signale un angle obtus : on passe par le supplémentaire de l'angle remarquable.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/3` → Le cosinus de $\frac{\pi}{3}$ vaut plus un demi. Ici le cosinus est négatif : il faut le supplémentaire.

`5*pi/6` → Le cosinus de $\frac{5\pi}{6}$ vaut moins racine de trois sur deux, pas moins un demi.

`120 / 120°` → C'est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians : remplace 180 par π.

EXERCICE 2 · BASE

Un sinus, deux angles

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donner toutes les valeurs possibles de x.

Écris les deux valeurs entre accolades, séparées par un point-virgule, avec pi.

Réponse attendue : `{pi/3;2pi/3}` — aussi acceptées : {π/3;2π/3} · {pi/3;2*pi/3} · {1/3 pi;2/3 pi} · {π/3;2*π/3}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le sinus est l'ordonnée du point du demi-cercle : combien de points ont cette ordonnée ?
2. Un premier angle est un angle remarquable aigu.

3. Deux angles supplémentaires ont le même sinus.

CORRECTION

L'angle aigu — Le sinus de $\frac{\pi}{3}$ vaut racine de trois sur deux.

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'angle obtus — Son supplémentaire a le même sinus.

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$, un sinus strictement compris entre zéro et un correspond toujours à deux réels supplémentaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{pi/3} / pi/3` → Il manque une valeur : le supplémentaire de $\frac{\pi}{3}$ a le même sinus.

EXERCICE 3 · BASE

Le sinus d'un angle obtus

Donner la valeur exacte de $\sin\frac{5\pi}{6}$.

Écris seulement la valeur exacte, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `1/2`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\frac{5\pi}{6}$ comme π moins un angle remarquable.
2. Deux angles supplémentaires ont le même sinus.

CORRECTION

Le supplémentaire — On reconnaît le supplémentaire de $\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

Le sinus — Deux angles supplémentaires ont le même sinus.

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Le sinus ne change pas quand on passe au supplémentaire. C'est le cosinus qui change de signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/2` → Sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$, un sinus n'est jamais négatif. C'est le cosinus qui change de signe.

`sqrt(3)/2` → Racine de trois sur deux est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$, pas son sinus.

`-sqrt(3)/2` → C'est le cosinus de $\frac{5\pi}{6}$. On demande son sinus.

EXERCICE 4 · PRATIQUE

Quatre cosinus

Calculer, sans utiliser la calculatrice, $\cos\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{5\pi}{12}+\cos\dfrac{7\pi}{12}+\cos\dfrac{11\pi}{12}$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche, parmi les quatre angles, ceux dont la somme vaut π.
2. On a $\dfrac{11\pi}{12}=\pi-\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12}=\pi-\dfrac{5\pi}{12}$.
3. Deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés.

CORRECTION

Les paires — On regroupe les angles supplémentaires.

$$\cos\frac{11\pi}{12}=-\cos\frac{\pi}{12}\quad;\quad\cos\frac{7\pi}{12}=-\cos\frac{5\pi}{12}$$

La somme — Les termes s'éliminent deux à deux.

$$\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}=0$$

On n'a besoin d'aucune valeur : il suffit de repérer les angles supplémentaires.

PIÈGES ANTICIPÉS

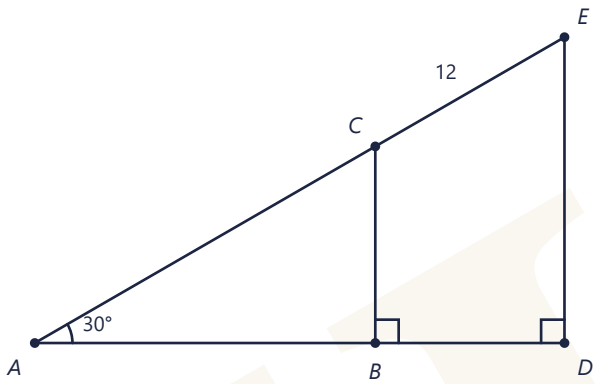
`2*cos(pi/12)+2*cos(5*pi/12)` → Deux angles supplémentaires n'ont pas le même cosinus : ils ont des cosinus opposés.

EXERCICE 5 · PRATIQUE

Projeter une longueur

Dans la figure, les points A, B et D sont alignés, les points A, C et E sont alignés, et les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (AD). On donne $CE=12$ et $\widehat{CAB}=30°$. Calculer BD.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI



CE = 12 et l'angle en A mesure 30°.

Une droite horizontale porte, de gauche à droite, les points A, B et D. Une demi-droite part de A en montant vers la droite, avec un angle de 30 degrés : elle porte les points C puis E. Le point C est à la verticale de B, le point E à la verticale de D. Des équerres marquent les angles droits en B et en D. Le segment [CE] mesure 12.

Donne la valeur exacte de BD.

Réponse attendue : `6*sqrt(3)` — aussi acceptées : 6√3 · sqrt(108)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime AB en fonction de AC, puis AD en fonction de AE, avec le cosinus de 30 degrés.
2. La distance BD est la différence entre AD et AB.
3. On obtient $BD = (AE - AC) \times \cos 30°$, et $AE - AC = CE$.

CORRECTION

Deux triangles rectangles — Dans les triangles ABC et ADE, rectangles en B et en D, le côté adjacent à l'angle de 30 degrés est l'hypoténuse fois le cosinus.

$$AB = AC \times \cos 30° \quad ; \quad AD = AE \times \cos 30°$$

La différence — On soustrait, et on met le cosinus en facteur.

$$BD = AD - AB = (AE - AC) \times \cos 30° = CE \times \cos 30°$$

Le calcul —

$$BD = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Projeter un segment sur une droite, c'est multiplier sa longueur par le cosinus de l'angle qu'il fait avec cette droite.

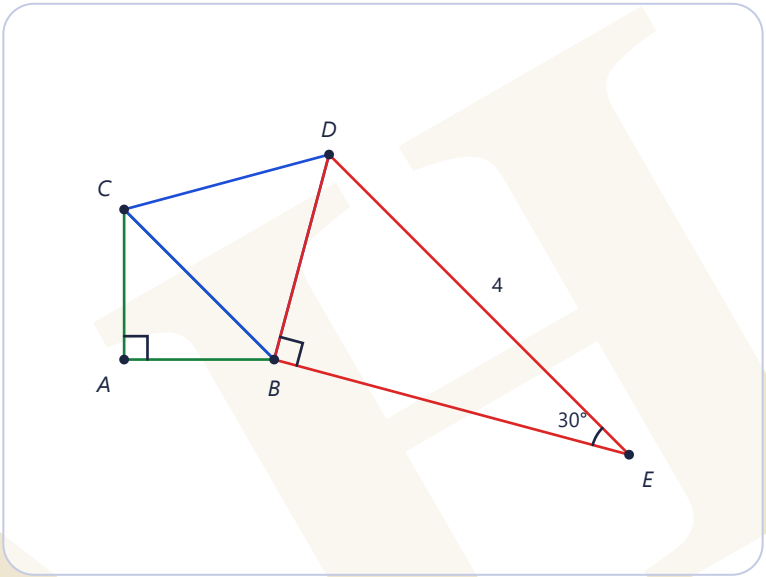
PIÈGES ANTICIPÉS

6 → Tu as multiplié par le sinus de 30 degrés. Le segment $[BD]$ est du côté adjacent à l'angle : il faut le cosinus.

EXERCICE 6 · RAISONNEMENT

Le périmètre du polygone

Dans la figure, ABC est un triangle isocèle rectangle en A, BCD est un triangle équilatéral, et BDE est un triangle rectangle en B. On donne $DE = 4$ et $\widehat{BED} = 30°$. Calculer le périmètre du polygone $ABEDC$.



DE = 4 et l'angle en E mesure 30°.

Trois triangles accolés. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A : A est en bas à gauche, B à sa droite, C au-dessus de A. Sur le côté [BC], vers l'extérieur, est construit le triangle équilatéral BCD : D est en haut à droite. Sur le côté [BD], vers l'extérieur, est construit le triangle BDE, rectangle en B : E est loin à droite, en bas. L'angle en E mesure 30 degrés et le côté [DE] mesure 4.

Donne la valeur exacte du périmètre.

Réponse attendue : `6+2*sqrt(2)+2*sqrt(3)` — aussi acceptées : 6+2√2+2√3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le triangle BDE : avec l'angle de 30 degrés et l'hypoténuse DE, calcule BD et BE.
2. Le triangle BCD est équilatéral : $BC = CD = BD$.
3. Dans le triangle ABC, isocèle rectangle, l'hypoténuse BC vaut $AB \times \sqrt{2}$.

CORRECTION

Le triangle BDE — Il est rectangle en B : BD est en face de l'angle de 30 degrés, BE lui est adjacent.

$$BD = 4 \times \sin 30° = 2 \quad ; \quad BE = 4 \times \cos 30° = 2\sqrt{3}$$

Le triangle BCD — Il est équilatéral.

$$BC = CD = BD = 2$$

Le triangle ABC — Il est isocèle rectangle en A : chaque côté de l'angle droit vaut l'hypoténuse fois le cosinus de 45 degrés.

$$AB = AC = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Le périmètre — On ajoute les cinq côtés du polygone.

$\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4+2+\sqrt{2}=6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

Les segments $[BC]$ et $[BD]$ sont à l'intérieur du polygone : ils ne comptent pas dans le périmètre.

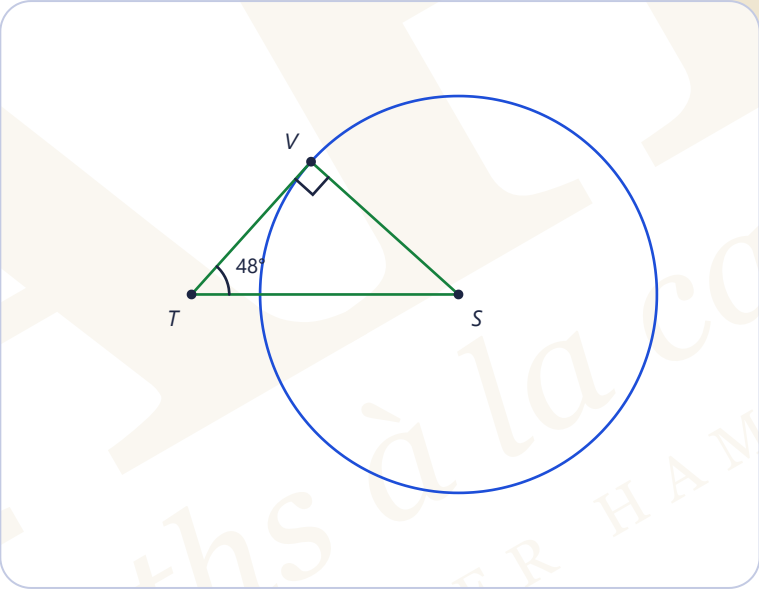
PIÈGES ANTICIPÉS

`8+2*sqrt(2)+2*sqrt(3)` → Tu as compté un segment intérieur. Le périmètre ne prend que AB, BE, ED, DC et CA.

EXERCICE 7 · PRATIQUE

La distance du Soleil à Vénus

Depuis la Terre T, on observe le Soleil S et Vénus V. On suppose que la trajectoire de Vénus est un cercle de centre S. Lorsque la droite (TV) est tangente à cette trajectoire, l'angle $\widehat{STV}$ mesure $48°$. La distance Terre-Soleil TS est estimée à 150 millions de kilomètres. Calculer la distance Soleil-Vénus SV, en millions de kilomètres, arrondie à l'unité. On prendra $0{,}743$ pour le sinus de 48 degrés.



La tangente (TV) est perpendiculaire au rayon [SV].

Un cercle de centre S représente la trajectoire de Vénus. Le point T, la Terre, est à gauche, à l'extérieur du cercle. La droite (TV) est tangente au cercle au point V, en haut à gauche du cercle. Le triangle TVS est tracé : une équerre marque l'angle droit en V, et l'angle en T mesure 48 degrés.

Écris seulement le nombre de millions de kilomètres.

Réponse attendue : 111

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon au point de contact : quelle est la nature du triangle TVS ?
2. Le triangle TVS est rectangle en V, et TS est son hypoténuse.
3. Le côté SV est en face de l'angle de 48 degrés : utilise le sinus.

CORRECTION

Un triangle rectangle — La tangente (TV) est perpendiculaire au rayon $[SV]$: le triangle TVS est rectangle en V, d'hypoténuse TS.

Le sinus — Le côté SV est opposé à l'angle de 48 degrés.

$$SV = TS \times \sin 48°$$

Le calcul — On compte en millions de kilomètres.

$$SV \approx 150 \times 0{,}743 \approx 111$$

Vénus est à environ 111 millions de kilomètres du Soleil. Le cosinus donnerait la distance Terre-Vénus, environ 100 millions de kilomètres.

PIÈGES ANTICIPÉS

`100` → C'est la distance TV, obtenue avec le cosinus. Le côté SV est en face de l'angle de 48 degrés : il faut le sinus.

`111.45` → Le calcul est bon : il reste à arrondir à l'unité.

EXERCICE 8 · BASE

Un sinus dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = 6$ et $BC = 9$. Calculer $\sin \widehat{B}$.

Écris seulement la valeur, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `2/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle est rectangle en A : quel côté est l'hypoténuse ?
2. Le sinus est le côté opposé sur l'hypoténuse. Quel côté est en face de l'angle $\widehat{B}$?

CORRECTION

Les côtés — L'hypoténuse est BC, et le côté opposé à l'angle $\widehat{B}$ est AC.

Le sinus — On simplifie la fraction par 3.

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Avec le théorème de Pythagore, on trouve aussi $AB = 3\sqrt{5}$, donc le cosinus de l'angle $\widehat{B}$ vaut $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(5)/3` → C'est le cosinus de l'angle $\widehat{B}$: le côté adjacent sur l'hypoténuse. Pour le sinus, on prend le côté opposé.

`3/2` → Un sinus ne dépasse jamais un : l'hypoténuse va au dénominateur.

EXERCICE 9 · PRATIQUE

Un produit de tangentes

Calculer, sans utiliser la calculatrice, $\tan \dfrac{\pi}{10} \times \tan \dfrac{2\pi}{5}$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Ajoute les deux angles : que vaut $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}$?
2. Les deux angles sont complémentaires : la tangente de l'un est la cotangente de l'autre.
3. La cotangente d'un angle est l'inverse de sa tangente.

CORRECTION

Deux angles complémentaires — La somme des deux angles vaut $\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

L'inverse — La tangente de $\frac{2\pi}{5}$ est donc la cotangente de $\frac{\pi}{10}$, c'est-à-dire l'inverse de sa tangente.

$$\tan\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{10}}$$

Le produit — Un nombre multiplié par son inverse donne un.

$$\tan\frac{\pi}{10} \times \tan\frac{2\pi}{5} = 1$$

Les tangentes de deux angles complémentaires sont inverses l'une de l'autre : leur produit vaut toujours un.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Ce sont les tangentes de deux angles supplémentaires qui s'annulent, dans une somme. Ici les angles sont complémentaires, et c'est un produit.

`-1` → Les deux angles sont aigus : leurs tangentes sont positives, le produit aussi.

EXERCICE 10 · PRATIQUE

Du sinus à la tangente

Soit x un réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin x = \frac{5}{13}$. Calculer $\tan x$.

Écris seulement la valeur exacte de la tangente, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `5/12`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le cosinus : la somme des carrés du cosinus et du sinus vaut un.
2. Le carré du cosinus vaut $1 - \frac{25}{169}$. L'angle est aigu : quel est le signe du cosinus ?
3. La tangente est le sinus divisé par le cosinus.

CORRECTION

Le carré du cosinus — On utilise la première relation fondamentale.

$$(\cos x)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

Le cosinus — Le réel x est entre zéro et $\frac{\pi}{2}$: son cosinus est positif.

$$\cos x = \frac{12}{13}$$

La tangente — On divise le sinus par le cosinus.

$$\tan x = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

La cotangente de x est l'inverse : douze cinquièmes.

PIÈGES ANTICIPÉS

12/5 → C'est la cotangente : le cosinus sur le sinus. La tangente met le sinus en haut.

12/13 → C'est le cosinus de x. Il reste à diviser le sinus par ce cosinus.

EXERCICE 11 · PRATIQUE

De la cotangente au sinus

Soit α un réel strictement compris entre 0 et π, dont la cotangente vaut $\frac{3}{4}$. Calculer $\sin \alpha$.

Écris seulement la valeur exacte du sinus, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : 4/5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle relation fondamentale relie la cotangente et le sinus ?
2. Un plus le carré de la cotangente est l'inverse du carré du sinus.
3. On trouve que le carré du sinus vaut $\frac{16}{25}$. Quel est le signe d'un sinus sur cet intervalle ?

CORRECTION

La relation — Un plus le carré de la cotangente est l'inverse du carré du sinus.

$$\frac{1}{(\sin \alpha)^2} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

Le carré du sinus — On prend l'inverse.

$$(\sin \alpha)^2 = \frac{16}{25}$$

Le sinus — Entre zéro et π, un sinus est positif.

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

Le cosinus est le produit de la cotangente par le sinus : il vaut trois cinquièmes.

PIÈGES ANTICIPÉS

3/5 → C'est le cosinus de α : la cotangente fois le sinus. On demande le sinus.

-4/5 → Entre zéro et π, un sinus n'est jamais négatif.

16/25 → C'est le carré du sinus : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 12 · RAISONNEMENT

Une tangente négative

Soit a un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ tel que $\tan a = -\sqrt{5}$. Calculer $\cos a$.

Écris seulement la valeur exacte du cosinus, sans rien devant.

Réponse attendue : `-sqrt(6)/6` — aussi acceptées : -1/sqrt(6) · -√6/6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un plus le carré de la tangente est l'inverse du carré du cosinus.
2. On trouve que le carré du cosinus vaut un sixième.
3. La tangente est négative et le sinus est positif : quel est le signe du cosinus ?

CORRECTION

La relation — Un plus le carré de la tangente est l'inverse du carré du cosinus.

$$\frac{1}{(\cos a)^2} = 1 + 5 = 6$$

Le signe — La tangente est négative, alors que le sinus est positif : le cosinus est négatif, l'angle est obtus.

Le cosinus — On prend la racine carrée, avec le signe moins.

$$\cos a = -\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$, le cosinus a toujours le signe de la tangente, puisque le sinus est positif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(6)/6` → Regarde le signe : la tangente est négative et le sinus positif, donc le cosinus est négatif.

`1/6` → C'est le carré du cosinus. Il reste à prendre la racine carrée, et à choisir le signe.

EXERCICE 13 · PRATIQUE

Une équation avec la tangente

Résoudre dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$ l'équation $\sqrt{3} \times \tan x + 1 = 0$: le produit de racine de trois par la tangente de x, augmenté de un, est nul.

Écris la solution en radians, et non en degrés, avec pi.

Réponse attendue : `5*pi/6` — aussi acceptées : 5pi/6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Isole la tangente : que vaut $\tan x$?
2. On trouve que la tangente vaut moins racine de trois sur trois. Quel angle remarquable a pour tangente racine de trois sur trois ?
3. Deux angles supplémentaires ont des tangentes opposées.

CORRECTION

Isoler la tangente — On retire un, puis on divise par racine de trois.

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'angle remarquable — La tangente de $\frac{\pi}{6}$ vaut racine de trois sur trois.

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Le supplémentaire — Le supplémentaire a la tangente opposée.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Une tangente négative correspond à un angle obtus : on passe par le supplémentaire de l'angle remarquable.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/6` → La tangente de $\frac{\pi}{6}$ est positive. Ici elle doit être négative : prends le supplémentaire.

`2*pi/3` → La tangente de $\frac{2\pi}{3}$ vaut moins racine de trois, pas moins racine de trois sur trois.

`150 / 150°` → C'est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians : remplace 180 par π.

EXERCICE 14 · PRATIQUE

De π/8 à 7π/8

On sait que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Donner la valeur exacte de la tangente de $\frac{7\pi}{8}$.

Écris seulement la valeur exacte, sans rien devant.

Réponse attendue : `1-sqrt(2)` — aussi acceptées : -sqrt(2)+1 · 1-√2 · -(sqrt(2)-1)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\frac{7\pi}{8}$ à l'aide de π et de $\frac{\pi}{8}$.
2. Ces deux angles sont supplémentaires : que deviennent leurs tangentes ?

CORRECTION

Le supplémentaire — On reconnaît le supplémentaire de $\frac{\pi}{8}$.

$$\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$$

La tangente — Deux angles supplémentaires ont des tangentes opposées.

$$\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$$

Le résultat est négatif, comme il se doit pour un angle obtus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(2)-1` → C'est la tangente de $\frac{\pi}{8}$. Celle de son supplémentaire est son opposé.

`sqrt(2)+1` → C'est la tangente de $\frac{3\pi}{8}$, le complémentaire de $\frac{\pi}{8}$. Ici, les angles sont supplémentaires.

EXERCICE 15 · BASE

Reconstituer l'hypoténuse

Dans un triangle ABC rectangle en A, on trace la hauteur $[AH]$. Sachant que $AH = 2$ et $BH = 2{,}5$, calculer BC.

Donne la longueur BC.

Réponse attendue : `4.1` — aussi acceptées : 41/10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle relation relie la hauteur AH aux deux segments HB et HC ?
2. Le carré de la hauteur est le produit des deux segments : on en tire HC.
3. L'hypoténuse est la somme des deux segments.

CORRECTION

La relation — Le carré de la hauteur est le produit des deux segments de l'hypoténuse.

$$AH^2 = HB \times HC$$

Le segment HC — On divise le carré de la hauteur par HB.

$$HC = \frac{4}{2{,}5} = 1{,}6$$

L'hypoténuse — On ajoute les deux segments.

$$BC = 2{,}5 + 1{,}6 = 4{,}1$$

On peut ensuite calculer les côtés de l'angle droit : le carré de AB vaut $BH \times BC$, et le carré de AC vaut $CH \times CB$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1.6` → C'est la longueur HC. Il reste à lui ajouter BH pour avoir l'hypoténuse.

`4.5` → On n'ajoute pas la hauteur : l'hypoténuse est la somme de BH et de HC.

EXERCICE 16 · PRATIQUE

L'altitude de l'avion

À partir de 1000 mètres d'altitude, un avion vole à 900 kilomètres par heure, en faisant un angle de $10°$ avec l'horizontale. À quelle altitude sera-t-il au bout de 5 minutes d'ascension ? Donner le résultat en kilomètres, arrondi au dixième. On prendra $0{,}1736$ pour le sinus de 10 degrés.

Écris seulement le nombre de kilomètres.

Réponse attendue : 14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle distance l'avion parcourt-il en 5 minutes, à 900 kilomètres par heure ?
2. Cette distance est l'hypoténuse d'un triangle rectangle : la hauteur gagnée est en face de l'angle de 10 degrés.
3. N'oublie pas l'altitude de départ : un kilomètre.

CORRECTION

La distance parcourue — Cinq minutes, c'est un douzième d'heure : l'avion parcourt 75 kilomètres.

$$900 \times \frac{5}{60} = 75$$

La hauteur gagnée — C'est le côté opposé à l'angle de 10 degrés, dans un triangle rectangle d'hypoténuse 75.

$$75 \times \sin 10° \approx 75 \times 0{,}1736 \approx 13{,}02$$

L'altitude — On ajoute le kilomètre de départ, puis on arrondit au dixième.

$1 + 13{,}02 = 14{,}02$

L'avion sera à environ 14 kilomètres d'altitude.

PIÈGES ANTICIPÉS

`13` → C'est la hauteur gagnée. Il faut lui ajouter l'altitude de départ, un kilomètre.

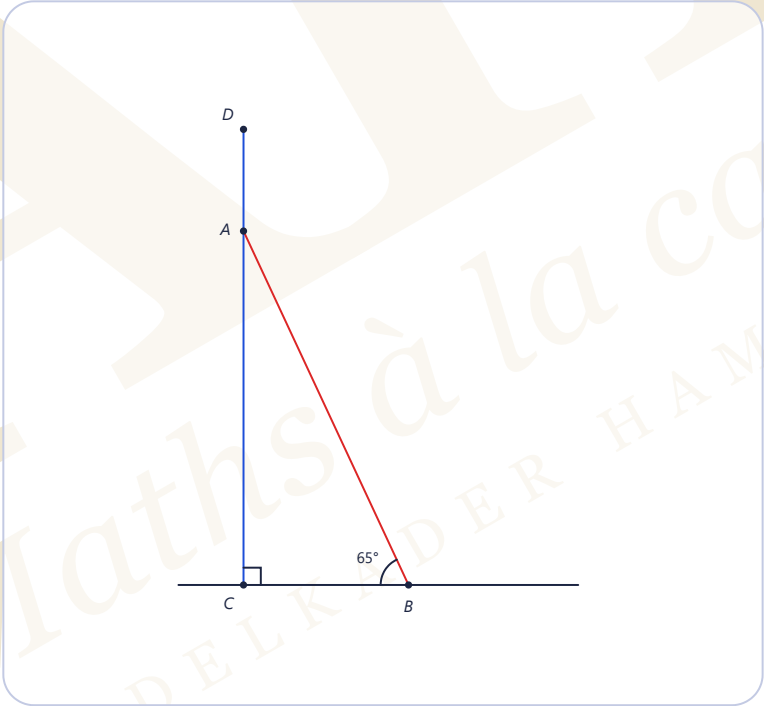
`75 / 76` → L'avion ne monte pas à la verticale : la hauteur gagnée est la distance parcourue fois le sinus de 10 degrés.

`14.02` → Le calcul est bon : il reste à arrondir au dixième.

EXERCICE 17 · PRATIQUE

L'échelle contre le mur

La figure modélise une échelle $[AB]$ de 6 mètres de long, appuyée contre un mur vertical $[CD]$: son pied B est sur le sol et son sommet A est sur le mur. L'angle que fait l'échelle avec le sol mesure $65°$. Calculer, au centimètre près, la distance BC entre le pied de l'échelle et le mur. On prendra $0{,}4226$ pour le cosinus de 65 degrés.



L'échelle mesure 6 m.

Un mur vertical [CD] : C est en bas, au niveau du sol, D en haut. Le sol est une droite horizontale passant par C. Une échelle [AB] est appuyée contre le mur : son pied B est sur le sol, à droite de C, et son sommet A est sur le mur, entre C et D. L'angle en B, entre le sol et l'échelle, mesure 65 degrés. Une équerre marque l'angle droit en C.

Écris le nombre de mètres, avec deux décimales.

Réponse attendue : `2.54`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le mur est vertical et le sol horizontal : le triangle ABC est rectangle en C.

2. L'échelle est l'hypoténuse. Le côté BC touche l'angle de 65 degrés : c'est le côté adjacent.

3. Multiplie la longueur de l'échelle par le cosinus de 65 degrés.

CORRECTION

Le triangle — Le triangle ABC est rectangle en C, d'hypoténuse AB. Le côté BC est adjacent à l'angle de 65 degrés.

Le cosinus —

$$BC = AB \times \cos 65° \approx 6 \times 0{,}4226 \approx 2{,}54$$

Le pied de l'échelle est à environ $2{,}54$ mètres du mur. Avec le sinus, on trouverait la hauteur atteinte : environ $5{,}44$ mètres.

PIÈGES ANTICIPÉS

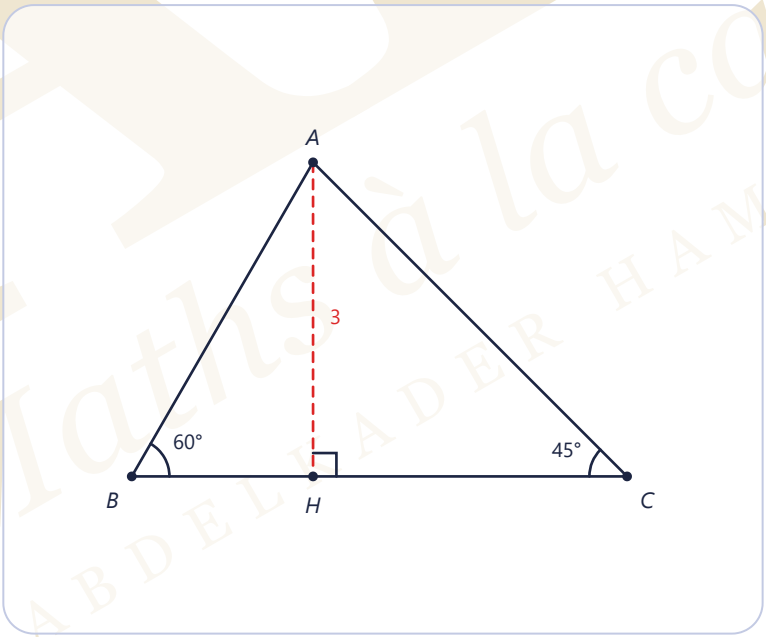
`5.44` → C'est la hauteur AC atteinte sur le mur, obtenue avec le sinus. La distance au mur est le côté adjacent : il faut le cosinus.

`2.5356` / `2.536` → Le calcul est bon : il reste à arrondir au centimètre, donc à deux décimales.

EXERCICE 18 · PRATIQUE

Un côté coupé par la hauteur

Dans la figure, ABC est un triangle tel que $\widehat{B} = 60°$ et $\widehat{C} = 45°$, et sa hauteur $[AH]$ mesure 3. Calculer BC.



AH = 3.

Un triangle ABC posé sur le côté [BC] : B est en bas à gauche, C en bas à droite, A en haut. La hauteur issue de A tombe au point H du côté [BC], plus près de B. L'angle en B mesure 60 degrés, l'angle en C mesure 45 degrés. La hauteur [AH] mesure 3.

Donne la valeur exacte de BC.

Réponse attendue : `3+sqrt(3)` — aussi acceptées : 3+√3 · sqrt(3)+3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La hauteur partage le triangle en deux triangles rectangles : calcule BH dans l'un, CH dans l'autre.
2. Dans le triangle AHB, la tangente de 60 degrés est AH sur BH.
3. Le triangle AHC a un angle de 45 degrés : il est rectangle et isocèle.

CORRECTION

Le segment BH — Dans le triangle AHB, rectangle en H, la tangente de 60 degrés est AH sur BH.

$$BH = \frac{AH}{\tan 60°} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Le segment CH — Le triangle AHC est rectangle en H avec un angle de 45 degrés : il est isocèle.

$$CH = AH = 3$$

Le côté BC — Le point H est entre B et C : on ajoute.

$$BC = BH + CH = 3 + \sqrt{3}$$

Une hauteur ramène un triangle quelconque à deux triangles rectangles.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3+3*sqrt(3)` → Tu as multiplié par la tangente de 60 degrés. Or AH est le côté opposé : BH s'obtient en divisant AH par cette tangente.

`sqrt(3)` → C'est seulement BH. Il reste à ajouter CH.

EXERCICE 19 · PRATIQUE

Appliquer la loi du sinus

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $\widehat{B} = 45°$ et $\widehat{A} = 105°$. Calculer AC.

Donne la valeur exacte de AC.

Réponse attendue : `6*sqrt(2)` — aussi acceptées : 6√2 · sqrt(72)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord le troisième angle : la somme des angles vaut 180 degrés.
2. Le côté AB est en face de l'angle $\widehat{C}$, et le côté AC est en face de l'angle $\widehat{B}$.
3. D'après la loi du sinus, AC sur le sinus de 45 degrés est égal à AB sur le sinus de 30 degrés.

CORRECTION

Le troisième angle —

$$\widehat{C} = 180° - 105° - 45° = 30°$$

La loi du sinus — Chaque côté va avec le sinus de l'angle opposé.

$$\frac{AC}{\sin 45°} = \frac{AB}{\sin 30°}$$

Le calcul — Diviser par un demi, c'est multiplier par deux.

$$AC = 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Quand on connaît un côté et deux angles, la loi du sinus donne les deux autres côtés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(2)` → Le rapport est à l'envers : on multiplie AB par le sinus de 45 degrés, et on divise par le sinus de 30 degrés.

`6*sqrt(3)-6` → Le côté AB est en face de l'angle $\widehat{C}$, qui mesure 30 degrés : c'est son sinus qu'il faut au dénominateur.

EXERCICE 20 · RAISONNEMENT

Un problème babylonien

Trouver le rayon R du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés mesurent 50, 50 et 60.

Donne le rayon R.

Réponse attendue : `125/4` — aussi acceptées : 31.25

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle est isocèle : trace la hauteur relative au côté de longueur 60. Elle passe par son milieu.
2. Cette hauteur mesure 40. Tu peux en tirer le sinus d'un angle à la base.
3. D'après la loi du sinus, un côté divisé par le sinus de l'angle opposé donne $2\,R$.

CORRECTION

La hauteur — La hauteur relative à la base coupe celle-ci en son milieu : on applique le théorème de Pythagore.

$$\sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{1600} = 40$$

Le sinus d'un angle à la base — Dans le triangle rectangle formé, c'est la hauteur sur le côté de longueur 50.

$$\frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

La loi du sinus — Le côté opposé à cet angle mesure 50.

$$2\,R = \frac{50}{\frac{4}{5}} = \frac{250}{4}$$

Le rayon —

$$R = \frac{125}{4} = 31{,}25$$

On peut vérifier avec l'aire, qui vaut 1200 : le produit des trois côtés, $150\,000$, divisé par quatre fois l'aire, 4800, redonne bien $31{,}25$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`125/2` → C'est $2\,R$, le diamètre du cercle. Il reste à diviser par deux.

`30 / 25` → Le centre du cercle circonscrit n'est pas le milieu d'un côté : ce triangle n'est pas rectangle.

EXERCICE 21 · BASE

L'aire avec un sinus

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 9$ et $\widehat{A} = 60°$. Calculer l'aire de ce triangle.

Donne la valeur exacte de l'aire.

Réponse attendue : `63*sqrt(3)/4` — aussi acceptées : 63√3/4 · (63/4)*sqrt(3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment : quelle formule donne l'aire ?
2. L'aire est le demi-produit des deux côtés par le sinus de l'angle.
3. Le sinus de 60 degrés vaut racine de trois sur deux.

CORRECTION

La formule — Les côtés AB et AC forment l'angle $\widehat{A}$.

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{A}$$

Le calcul —

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{63\sqrt{3}}{4}$$

L'aire vaut $\dfrac{63\sqrt{3}}{4}$, soit environ $27{,}28$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`63/4` → Tu as pris le cosinus de 60 degrés. La formule de l'aire utilise le sinus.

`63*sqrt(3)/2` → Il manque le un demi : l'aire d'un triangle est la moitié du produit.

EXERCICE 22 · PRATIQUE

L'aire d'un parallélogramme

Soit $IJKL$ un parallélogramme tel que $LK = 5$, $LI = 8$ et $\hat{J} = \dfrac{\pi}{8}$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire de $IJKL$. On prendra $0{,}3827$ pour le sinus de $\dfrac{\pi}{8}$.

Écris le nombre, avec deux décimales.

Réponse attendue : `15.31`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux : que vaut l'angle $\widehat{L}$?
2. La diagonale $[IK]$ partage le parallélogramme en deux triangles de même aire.
3. L'aire du triangle ILK est le demi-produit de LI et LK par le sinus de l'angle $\widehat{L}$.

CORRECTION

L'angle en L — Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux.

$$\widehat{L} = \hat{J} = \frac{\pi}{8}$$

Deux triangles — L'aire du parallélogramme est le double de celle du triangle ILK : le un demi disparaît.

$$\text{aire} = LI \times LK \times \sin \widehat{L} = 40 \sin \frac{\pi}{8}$$

La valeur approchée —

$$40 \times 0{,}3827 \approx 15{,}31$$

L'aire d'un parallélogramme est le produit de deux côtés consécutifs par le sinus de l'angle qu'ils forment.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7.65` → C'est l'aire d'un seul des deux triangles. Le parallélogramme en contient deux.

`40` → Le produit des deux côtés donne l'aire seulement pour un rectangle. Ici, il faut multiplier par le sinus de l'angle.

`15.308` → Le calcul est bon : il reste à arrondir à deux décimales.

EXERCICE 23 · PRATIQUE

Un angle par ses trois côtés

ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 9$. Calculer $\cos \widehat{A}$.

Écris seulement la valeur exacte du cosinus, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `-1/3`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On connaît les trois côtés : le théorème d'El-Kashi relie le côté BC à l'angle opposé $\widehat{A}$.
2. Écris $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{A}$, puis isole le cosinus.

CORRECTION

Le théorème — Le côté BC est en face de l'angle $\widehat{A}$.

$$81 = 25 + 36 - 60 \cos \widehat{A}$$

Isoler le cosinus — On retire 61 aux deux membres, puis on divise par -60.

$$\cos \widehat{A} = \frac{61 - 81}{60} = -\frac{1}{3}$$

Le cosinus est négatif : l'angle $\widehat{A}$ est obtus. La calculatrice donne environ 109 degrés.

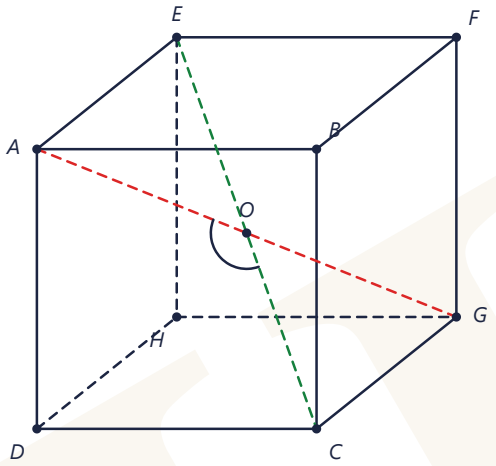
PIÈGES ANTICIPÉS

`1/3` → Attention au signe : 81 est plus grand que 61, donc le cosinus est négatif et l'angle est obtus.

EXERCICE 24 · RAISONNEMENT

L'angle des diagonales d'un cube

Dans la figure, $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a, et O est le point d'intersection des diagonales $[AG]$ et $[EC]$. Donner une valeur approchée à un degré près de l'angle $\widehat{AOC}$.



O est le centre du cube.

Un cube en perspective. La face avant est le carré ABCD : A en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite, D en bas à gauche. La face arrière est le carré EFGH, décalé vers le haut et la droite : E derrière A, F derrière B, G derrière C, H derrière D. Les diagonales [AG] et [EC] du cube sont tracées en pointillés : elles se coupent au point O, au centre du cube. L'angle AOC est marqué.

Écris seulement le nombre de degrés.

Réponse attendue : `109`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Travaille dans le triangle AOC : exprime ses trois côtés en fonction de l'arête a.
2. La diagonale d'un cube mesure l'arête a multipliée par $\sqrt{3}$, et O est son milieu. Le segment $[AC]$ est la diagonale d'une face : il mesure l'arête a multipliée par $\sqrt{2}$.
3. Applique le théorème d'El-Kashi dans le triangle AOC : l'arête a se simplifie.

CORRECTION

Les trois côtés — Le point O est le milieu de chaque diagonale du cube, et $[AC]$ est la diagonale d'une face. Donc OA et OC valent l'arête a fois $\sqrt{3}$, sur deux ; et AC vaut l'arête a fois $\sqrt{2}$.

El-Kashi — Dans le triangle AOC, le côté AC est en face de l'angle cherché. On remplace : le carré de AC vaut deux fois le carré de l'arête, et les carrés de OA et de OC valent chacun trois quarts du carré de l'arête.

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \times OA \times OC \times \cos \widehat{AOC}$$

Le cosinus — On divise par le carré de l'arête, puis on isole le cosinus : il ne dépend pas de l'arête.

$$\cos \widehat{AOC} = \frac{\frac{3}{2} - 2}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

L'angle — La calculatrice, réglée en degrés, donne l'angle dont le cosinus vaut moins un tiers.

$$\widehat{AOC} \approx 109^\circ$$

L'angle ne dépend pas de l'arête : il est le même dans tous les cubes, environ 109 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`71` → C'est l'angle dont le cosinus vaut plus un tiers. Ici le cosinus est négatif : l'angle est obtus.

`90` → Les diagonales d'un cube ne sont pas perpendiculaires : il faut calculer le cosinus avec le théorème d'El-Kashi.

`109.47 / 109.5` → Le calcul est bon : il reste à arrondir au degré.

EXERCICE 25 · BASE

Un segment sur l'hypoténuse

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a $AB = 6$ et $BC = 10$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Calculer BH.

Donne la longueur BH.

Réponse attendue : `3.6` — aussi acceptées : 18/5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle relation métrique relie AB, BH et BC ?
2. Le carré de AB est le produit de BH par BC.

CORRECTION

La relation — Le carré d'un côté de l'angle droit est le produit de son segment par l'hypoténuse.

$$AB^2 = BH \times BC$$

Le calcul —

$$BH = \frac{36}{10} = 3{,}6$$

On en déduit $CH = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$, puis la hauteur : son carré vaut $3{,}6 \times 6{,}4$, donc $AH = 4{,}8$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`6.4` → C'est CH, le segment du côté de C. On demande BH.

`4.8` → C'est la hauteur AH. On demande le segment BH de l'hypoténuse.

EXERCICE 26 · PRATIQUE

L'aire par la formule de Héron

Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 50, 50 et 60.

Donne l'aire, le nombre seul.

Réponse attendue : `1200`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On ne connaît aucun angle : pense à la formule de Héron.
2. Calcule d'abord le demi-périmètre p, puis les trois écarts entre p et chaque côté.
3. Le demi-périmètre vaut 80.

CORRECTION

Le demi-périmètre —

$$p = \frac{50 + 50 + 60}{2} = 80$$

Les trois écarts — On retire chaque côté au demi-périmètre.

$80 - 50 = 30 \quad ; \quad 80 - 50 = 30 \quad ; \quad 80 - 60 = 20$

La formule de Héron — Le produit sous la racine vaut 144 fois dix mille : sa racine carrée est 12 fois cent.

$$S = \sqrt{80 \times 30 \times 30 \times 20} = 1200$$

On retrouve la base fois la hauteur sur deux : la hauteur relative au côté de longueur 60 mesure 40.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1500` → Tu as pris un côté de longueur 50 comme hauteur. La hauteur relative à la base mesure 40.

`160` → C'est le périmètre. La formule de Héron utilise le demi-périmètre, puis une racine carrée.

EXERCICE 27 · PRATIQUE

Reconnaître le triangle

Soit MNP un triangle et H le projeté orthogonal de M sur le segment $[NP]$. On suppose que $MN = \sqrt{12}$, $MH = 3$ et $HP = \sqrt{3}$. Quelle est la nature du triangle MNP ?

Réponds par un mot : isocèle, rectangle, équilatéral…

Réponse attendue : `equilateral` — aussi acceptées : équilatéral · triangle equilateral · triangle équilatéral · un triangle équilatéral · il est équilatéral · c'est un triangle équilatéral · MNP est équilatéral · le triangle MNP est équilatéral · MNP est un triangle équilatéral · un equilateral · un équilatéral · equilateral et isocele · équilatéral et isocèle · isocele et equilateral · isocèle et équilatéral

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule NH dans le triangle MNH, rectangle en H.
2. Calcule ensuite MP dans le triangle MHP, puis NP, qui est la somme de NH et de HP.
3. Compare les trois côtés, en écrivant $\sqrt{12}$ sous la forme $2\sqrt{3}$.

CORRECTION

Le segment NH — On applique le théorème de Pythagore dans le triangle MNH.

$$NH = \sqrt{12 - 9} = \sqrt{3}$$

Le côté MP — De même dans le triangle MHP.

$$MP = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Le côté NP — Le point H est sur le segment $[NP]$.

$$NP = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Conclusion — Les trois côtés mesurent $2\sqrt{3}$: le triangle est équilatéral.

On le voit aussi avec les angles : le sinus de l'angle $\widehat{N}$ vaut $\frac{3}{\sqrt{12}}$, c'est-à-dire racine de trois sur deux, et cet angle est aigu : il mesure 60 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`isocele / triangle isocele` → Il est bien isocèle, mais on peut dire mieux : compare aussi le troisième côté, NP.

`rectangle / triangle rectangle` → Les triangles MNH et MHP sont rectangles, mais pas MNP : compare ses trois côtés.

EXERCICE 28 · PRATIQUE

Trois angles proportionnels

Les angles d'un triangle sont proportionnels aux nombres 2, 3 et 4. Calculer, en radians, le plus grand de ces angles.

Écris l'angle en radians, et non en degrés, avec pi.

Réponse attendue : `4*pi/9` — aussi acceptées : 4pi/9

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme des trois angles vaut π radians.
2. Partage π en $2 + 3 + 4$ parts égales.

CORRECTION

Le partage — Il y a neuf parts en tout, et leur somme vaut π : une part vaut $\dfrac{\pi}{9}$.

Les trois angles — On prend deux, trois et quatre parts.

$$\frac{2\pi}{9} \quad ; \quad \frac{3\pi}{9} = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{4\pi}{9}$$

En degrés, les trois angles mesurent 40, 60 et 80 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`80 / 80°` → C'est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians : remplace 180 par π.

`2*pi/9` → C'est le plus petit des trois angles. Le plus grand prend quatre parts.

`8*pi/9` → La somme des angles d'un triangle vaut π, et non 2π.

EXERCICE 29 · RAISONNEMENT

Trois côtés en progression

On considère un triangle IJK rectangle en I, tel que IJ, IK et JK sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, où r est un réel strictement positif. Calculer IK en fonction de r.

Écris IK en fonction de r.

Réponse attendue : `4*r` — aussi acceptées : 4r

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Exprime IJ et JK à l'aide de IK et de r.
2. On a $IJ = IK - r$ et $JK = IK + r$. L'hypoténuse est JK : écris le théorème de Pythagore.
3. En développant, les carrés de r s'éliminent : il reste une égalité entre IK^2 et un multiple de $r \times IK$.

CORRECTION

Les trois côtés — Dans une suite arithmétique, on passe d'un terme au suivant en ajoutant la raison.

$IJ = IK - r \quad ; \quad JK = IK + r$

Pythagore — Le triangle est rectangle en I : l'hypoténuse est JK.

$(IK - r)^2 + IK^2 = (IK + r)^2$

Développer — On développe les deux carrés et on simplifie.

$IK^2 = 4r \times IK$

Conclure — La longueur IK n'est pas nulle : on peut diviser par IK.

$IK = 4r$

Les côtés mesurent $3r$, $4r$ et $5r$. Le sinus de l'angle $\widehat{K}$ vaut alors trois cinquièmes, celui de l'angle $\hat{J}$ quatre cinquièmes, et celui de l'angle $\hat{I}$ vaut un : ils sont eux aussi en progression arithmétique, de raison un cinquième.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*r` → C'est IJ, le plus petit côté. On demande IK, le terme du milieu.

`5*r` → C'est l'hypoténuse JK. On demande IK, le terme du milieu.

EXERCICE 30 · RAISONNEMENT

Une équation produit

Résoudre dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$ l'équation $(1 + \cos x)\left(4(\sin x)^2 - 1\right) = 0$. Le second facteur est quatre fois le carré du sinus de x, moins un.

Écris les trois solutions entre accolades, séparées par des points-virgules, avec pi.

Réponse attendue : `{pi/6;5pi/6;pi}` — aussi acceptées : {π/6;5π/6;π} · {pi/6;5*pi/6;pi} · {π/6;5*π/6;π}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul : écris les deux équations.
2. Le premier facteur donne un cosinus égal à moins un. Le second donne le carré du sinus : un quart.
3. Sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$, un sinus n'est jamais négatif : il vaut donc un demi, et un sinus donne deux angles supplémentaires.

CORRECTION

Un produit nul — Un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nul.

$1 + \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad 4(\sin x)^2 = 1$

Le premier facteur — Le cosinus vaut moins un pour un seul réel de l'intervalle.

$x = \pi$

Le second facteur — Le carré du sinus vaut un quart, et sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$ un sinus n'est jamais négatif.

$\sin x = \dfrac{1}{2}$

Deux angles — Un sinus égal à un demi donne deux réels supplémentaires.

$x = \dfrac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{5\pi}{6}$

L'équation a trois solutions : $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et π.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{pi/6;5pi/6}` → Il manque une solution : le premier facteur, $1+\cos x$, s'annule lui aussi.

`{pi/6;pi}` → Il manque une solution : deux angles supplémentaires ont le même sinus.

EXERCICE 31 · DEFI

Une aire et une somme de sinus

Soit ABC un triangle rectangle en A, d'aire $15{,}36$, tel que $\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}=1{,}4$. Calculer BC.

Donne la longueur BC.

Réponse attendue : 8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris les deux sinus dans le triangle rectangle : chacun est un côté de l'angle droit divisé par BC.
2. On obtient $AB+AC=1{,}4\times BC$. L'aire donne aussi le produit $AB\times AC$.
3. Élève la somme $AB+AC$ au carré : le théorème de Pythagore fait apparaître BC^2.

CORRECTION

La somme des côtés — Chaque sinus est le côté opposé sur l'hypoténuse.

$$\frac{AC}{BC}+\frac{AB}{BC}=1{,}4 \quad \text{donc} \quad AB+AC=1{,}4\times BC$$

Le produit des côtés — L'aire d'un triangle rectangle est le demi-produit des côtés de l'angle droit.

$$AB\times AC=2\times 15{,}36=30{,}72$$

Le carré de la somme — On développe, et on reconnaît le théorème de Pythagore.

$$(AB+AC)^2=BC^2+2\times AB\times AC$$

L'équation — On remplace : le carré de $1{,}4$ vaut $1{,}96$.

$$1{,}96\times BC^2=BC^2+61{,}44$$

Le résultat — On isole le carré de BC, puis on prend la racine.

$$BC^2=\frac{61{,}44}{0{,}96}=64$$

L'hypoténuse mesure 8. Les deux autres côtés mesurent $4{,}8$ et $6{,}4$.

PIÈGES ANTICIPÉS

64 → C'est le carré de BC : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 32 · DEFI

Un angle caché

Soit a un réel tel que $a>1$, et ABC un triangle tel que le côté BC mesure a^2+a+1, le côté AC mesure $2a+1$ et le côté AB mesure a^2-1. Déterminer la mesure, en radians, de l'angle $\widehat{A}$.

Écris l'angle en radians, et non en degrés, avec pi.

Réponse attendue : `2*pi/3` — aussi acceptées : 2pi/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On connaît les trois côtés : le théorème d'El-Kashi donne le cosinus de l'angle $\widehat{A}$, opposé au côté BC.
2. Calcule $AC^2 + AB^2 - BC^2$, puis factorise le résultat.
3. On trouve, en fonction du réel a, $-(2a+1)(a^2-1)$: compare avec le double produit $2 \times AC \times AB$.

CORRECTION

El-Kashi — On isole le cosinus de l'angle $\widehat{A}$.

$$\cos \widehat{A} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \times AC \times AB}$$

Le numérateur — On remplace chaque côté par son expression en fonction du réel a, on développe les trois carrés et on réduit, puis on factorise.

$$(2a+1)^2 + (a^2-1)^2 - (a^2+a+1)^2 = -2a^3 - a^2 + 2a + 1 = -(2a+1)(a^2-1)$$

Le cosinus — Le dénominateur vaut deux fois le même produit : tout se simplifie.

$$\cos \widehat{A} = \frac{-(2a+1)(a^2-1)}{2\,(2a+1)(a^2-1)} = -\frac{1}{2}$$

L'angle — L'angle dont le cosinus vaut moins un demi est le supplémentaire de $\frac{\pi}{3}$.

$$\widehat{A} = \frac{2\pi}{3}$$

Le résultat ne dépend pas du réel a : cet angle mesure toujours $\frac{2\pi}{3}$, c'est-à-dire 120 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/3` → Le cosinus vaut moins un demi, et non plus un demi : l'angle est obtus.

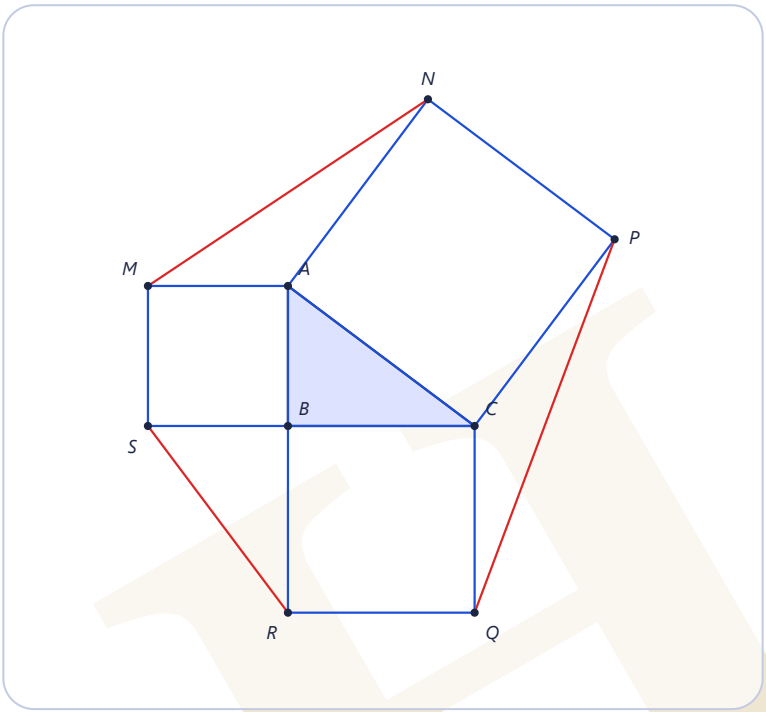
`120 / 120°` → C'est la mesure en degrés. On demande la mesure en radians.

EXERCICE 33 · DEFI

L'hexagone des trois carrés

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 5$. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ACPN$, $BCQR$ et $ABSM$. Calculer l'aire de l'hexagone $MNPQRS$.

Maths à la carte
ABDELKADER HAMMA



L'hexagone contient le triangle, trois carrés et trois triangles de coin.

Un triangle ABC rectangle en B : B est au centre, A au-dessus de B, C à droite de B. Sur chaque côté, un carré est construit vers l'extérieur : le carré ABSM à gauche de [AB], avec S à gauche de B et M à gauche de A ; le carré BCQR sous [BC], avec R sous B et Q sous C ; le carré ACPN sur l'hypoténuse [AC], en haut à droite, avec N près de A et P près de C. L'hexagone MNPQRS relie les six sommets extérieurs. Trois triangles de coin apparaissent : AMN, CPQ et BRS.

Donne l'aire, le nombre seul.

Réponse attendue : 74

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Compare $AB^2 + BC^2$ et AC^2.
2. L'hexagone se découpe en sept morceaux : le triangle ABC, les trois carrés, et trois triangles de coin, AMN, CPQ et BRS.
3. Dans le triangle AMN, les côtés AM et AN valent AB et AC, et l'angle $\widehat{MAN}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{A}$: ils ont le même sinus.

CORRECTION

Le triangle ABC — Il est rectangle en B, car $9 + 16 = 25$. Son aire est le demi-produit des côtés de l'angle droit.

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

Les trois carrés — Leurs côtés mesurent 3, 4 et 5.

$$9 + 16 + 25 = 50$$

Un triangle de coin — Autour du point A, il y a deux angles droits, l'angle $\widehat{A}$ du triangle et l'angle $\widehat{MAN}$: ce dernier est donc le supplémentaire de l'angle $\widehat{A}$, et il a le même sinus.

$$\text{aire}(AMN) = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{A} = \text{aire}(ABC) = 6$$

Les deux autres coins — Le même raisonnement vaut aux sommets B et C : chaque triangle de coin a la même aire que ABC.

La somme — On ajoute le triangle, les trois carrés et les trois coins.

$$6 + 50 + 3 \times 6 = 74$$

L'aire vaut 74. Pour le périmètre, le théorème d'El-Kashi donne $MN = 2\sqrt{13}$ et $PQ = \sqrt{73}$, et $RS = 5$.

PIÈGES ANTICIPÉS

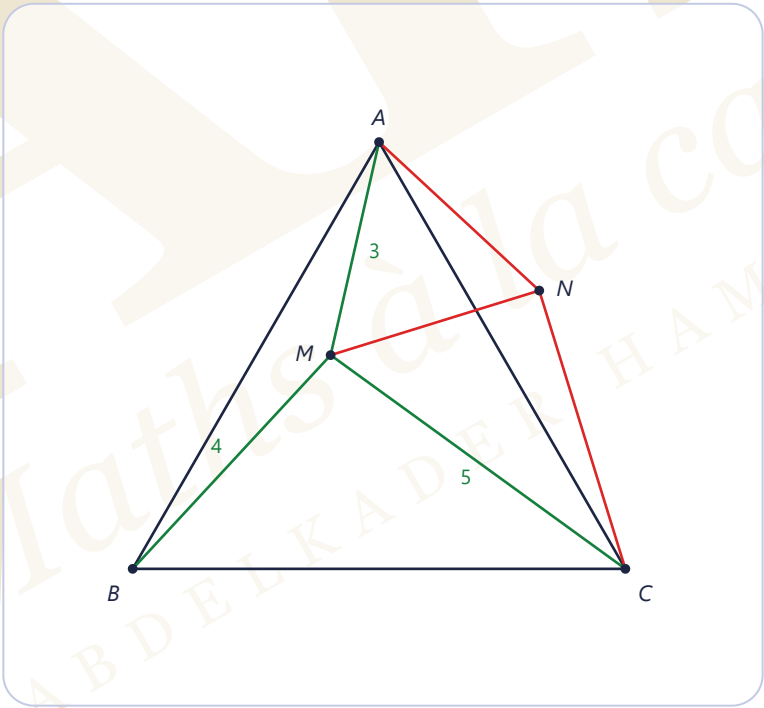
56 → Tu as compté le triangle et les trois carrés. Il manque les trois triangles de coin, AMN, CPQ et BRS.

68 → Il manque un morceau : le triangle ABC lui-même, ou l'un des triangles de coin. Il y a sept morceaux en tout.

EXERCICE 34 · DEFI

Le côté du triangle équilatéral

Dans la figure, ABC est un triangle équilatéral et M est un point intérieur à ce triangle tel que $MA = 3$, $MB = 4$ et $MC = 5$. Soit N l'image de M par la rotation directe r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$: cette rotation envoie B sur C. Calculer le côté du triangle ABC.



AMN est équilatéral, et NC = MB.

Un triangle équilatéral ABC : B en bas à gauche, C en bas à droite, A en haut. Un point M est à l'intérieur, relié aux trois sommets : MA = 3, MB = 4, MC = 5. Le point N est à droite de M, près du côté [AC], légèrement à l'extérieur : c'est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle pi sur 3. Les segments [AN], [MN] et [NC] sont tracés.

Donne la valeur exacte du côté.

Réponse attendue : `sqrt(25+12*sqrt(3))` — aussi acceptées : √(25+12√3) · sqrt(25+12sqrt(3))

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Quelle est la nature du triangle AMN ? Une rotation conserve les distances, et l'angle $\widehat{MAN}$ mesure $\frac{\pi}{3}$.
2. L'image du segment $[BM]$ par la rotation est le segment $[CN]$: donc $NC = MB = 4$. Quelle est alors la nature du triangle MNC ?
3. L'angle $\widehat{ANC}$ est la somme de l'angle $\widehat{ANM}$ et de l'angle $\widehat{MNC}$. Applique ensuite le théorème d'El-Kashi dans le triangle ANC.

CORRECTION

Le triangle AMN — La rotation conserve les distances : $AN = AM = 3$. Avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ en A, le triangle AMN est équilatéral.

$$AN = MN = 3$$

Le segment NC — La rotation envoie B sur C et M sur N : l'image du segment $[BM]$ est le segment $[CN]$.

$$NC = MB = 4$$

Le triangle MNC — Ses côtés mesurent 3, 4 et 5 : il est rectangle en N.

$$MN^2 + NC^2 = 9 + 16 = 25 = MC^2$$

L'angle ANC — On ajoute l'angle du triangle équilatéral et l'angle droit.

$$\widehat{ANC} = 60° + 90° = 150°$$

El-Kashi — Dans le triangle ANC, le cosinus de 150 degrés vaut moins racine de trois sur deux.

$$AC^2 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos 150° = 25 + 12\sqrt{3}$$

Le côté mesure $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$, soit environ $6{,}77$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(25-12*sqrt(3))` → Le cosinus de 150 degrés est négatif : le double produit s'ajoute, il ne se retranche pas.

`25+12*sqrt(3)` → C'est le carré du côté : il reste à prendre la racine carrée.

EXERCICE 35 · BASE

Le côté adjacent

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 14$ et $\widehat{C} = 60°$. Calculer AC.

Donne la longueur AC.

Réponse attendue : 7

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans ce triangle rectangle, le côté $[AC]$ est adjacent à l'angle $\widehat{C}$, et $[BC]$ est l'hypoténuse.
2. Le cosinus de l'angle $\widehat{C}$ est le côté adjacent divisé par l'hypoténuse ; le cosinus de 60 degrés vaut un demi.

CORRECTION

Le bon rapport — Le côté $[AC]$ est adjacent à l'angle $\widehat{C}$: on utilise le cosinus.

$$\cos \widehat{C} = \frac{AC}{BC}$$

Le calcul — On multiplie l'hypoténuse par le cosinus de 60 degrés.

$$AC = 14 \times \cos 60° = 14 \times \frac{1}{2} = 7$$

Côté adjacent égale hypoténuse fois cosinus : on choisit le rapport qui relie ce que l'on connaît à ce que l'on cherche.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7*sqrt(3)` → C'est AB, le côté opposé à l'angle $\widehat{C}$: pour le côté adjacent, c'est le cosinus.

`28` → Tu as divisé par le cosinus : le côté adjacent s'obtient en multipliant l'hypoténuse par le cosinus.

EXERCICE 36 · RAISONNEMENT

Une corde du demi-cercle

Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, on considère le point M du demi-cercle trigonométrique tel que $\widehat{AOM} = \dfrac{3\pi}{4}$. Calculer la distance AM.

Donne la valeur exacte de AM.

Réponse attendue : `sqrt(2+sqrt(2))` — aussi acceptées : √(2+√2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par les coordonnées de M : son abscisse est le cosinus de $\dfrac{3\pi}{4}$, son ordonnée en est le sinus.
2. L'angle $\dfrac{3\pi}{4}$ est le supplémentaire de $\dfrac{\pi}{4}$: même sinus, cosinus opposé.
3. Soit P le projeté orthogonal de M sur la droite (OA) : le triangle APM est rectangle en P.

CORRECTION

Le point M — Le cosinus de $\dfrac{3\pi}{4}$ est l'opposé de celui de $\dfrac{\pi}{4}$, le sinus est le même.

$$M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Le triangle APM — Le point P a pour abscisse celle de M : $AP = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $PM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On applique le théorème de Pythagore.

$$AM^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

La distance — Une longueur est positive : on prend la racine carrée.

$$AM = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Les coordonnées d'un point du demi-cercle sont le cosinus et le sinus de son angle : avec elles, une distance se calcule dans un triangle rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(2-sqrt(2))` → C'est la distance de A au point d'angle $\dfrac{\pi}{4}$: l'angle $\dfrac{3\pi}{4}$ est obtus, l'abscisse de M est négative.

`2+sqrt(2)` → C'est AM^2 : il reste à prendre la racine carrée.

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

`1.85` / `1.848` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 37 · RAISONNEMENT

Deux points de même ordonnée

Sur le demi-cercle trigonométrique, on désigne par M et N les deux points d'ordonnée $\frac{1}{2}$. Calculer la distance MN.

Donne la valeur exacte de MN.

Réponse attendue : `sqrt(3)` — aussi acceptées : √3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'ordonnée d'un point du demi-cercle est le sinus de son angle : quels réels de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ ont pour sinus un demi ?
2. Les deux points sont symétriques par rapport à la droite (OB) : ils ont des abscisses opposées.
3. Ils ont la même ordonnée : leur distance est l'écart entre leurs abscisses.

CORRECTION

Les deux angles — Un sinus égal à un demi donne deux réels de $[0, \pi]$, supplémentaires.

$$\widehat{AOM} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \widehat{AON} = \frac{5\pi}{6}$$

Les coordonnées — Même sinus, cosinus opposés.

$$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

La distance — Le segment $[MN]$ est parallèle à l'axe des abscisses.

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Un sinus strictement compris entre 0 et 1 donne deux points du demi-cercle, symétriques par rapport à la droite (OB).

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(3)/2` → C'est l'abscisse d'un seul des deux points : l'autre est de l'autre côté de l'axe (OB).

`1.73` / `1.732` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 38 · BASE

Quatre valeurs lues sur le demi-cercle

Calculer, sans calculatrice, $\cos 0 + \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi + 2 \sin \pi$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : `1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les points du demi-cercle associés à 0, à $\dfrac{\pi}{2}$ et à π sont A, B et A'.
2. Le cosinus est l'abscisse, le sinus l'ordonnée : $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $A'(-1,0)$.

CORRECTION

Les quatre valeurs — On lit les coordonnées de A, de B et de A'.

$$\cos 0 = 1 \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad ; \quad \cos\pi = -1 \quad ; \quad \sin\pi = 0$$

La somme —

$$1 + 1 - 1 + 2 \times 0 = 1$$

Pour 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π, on lit le cosinus et le sinus directement sur les coordonnées des points A, B et A'.

PIÈGES ANTICIPÉS

3 → Le cosinus de π est l'abscisse du point $A'(-1,0)$: il vaut -1, et non 1.

EXERCICE 39 · PRATIQUE

La plus grande valeur

Déterminer la plus grande valeur que prend le nombre $3 - 2\cos x$ lorsque x parcourt l'intervalle fermé $[0, \pi]$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : 5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour x dans $[0, \pi]$, le cosinus est compris entre -1 et 1.
2. Le nombre $3 - 2\cos x$ est d'autant plus grand que $\cos x$ est petit.

CORRECTION

L'encadrement — On part de l'encadrement du cosinus, puis on multiplie par -2, ce qui renverse l'ordre.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad ; \quad -2 \leq -2\cos x \leq 2$$

On ajoute trois —

$$1 \leq 3 - 2\cos x \leq 5$$

La valeur atteinte — Elle est atteinte pour $x = \pi$, dont le cosinus vaut -1.

$$3 - 2\cos\pi = 3 + 2 = 5$$

Le cosinus d'un réel de $[0, \pi]$ va de -1 à 1 : on encadre, sans oublier qu'un facteur négatif renverse l'ordre.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → C'est la plus petite valeur, atteinte pour $x = 0$: multiplier par -2 renverse l'ordre.

EXERCICE 40 · BASE

Les coordonnées du point N

Soit OPM un triangle rectangle en P tel que $OP = 5$ et $MP = 12$. On trace le demi-cercle trigonométrique de centre O, dans un repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ où A est sur le segment $[OP]$ et B

du même côté que M. La droite (OM) coupe le demi-cercle en N. Calculer l'ordonnée de N.

Écris seulement l'ordonnée, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `12/13`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord l'hypoténuse OM avec le théorème de Pythagore.
2. L'ordonnée de N est le sinus de l'angle $\widehat{POM}$: le côté opposé sur l'hypoténuse.

CORRECTION

L'hypoténuse — Le triangle OPM est rectangle en P.

$$OM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

L'ordonnée de N — C'est le sinus de l'angle en O.

$$y_N = \sin \widehat{POM} = \frac{MP}{OM} = \frac{12}{13}$$

Le point N a pour coordonnées $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$: pour un angle aigu, la définition sur le demi-cercle redonne celle du triangle rectangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5/13` → C'est l'abscisse de N, le cosinus de l'angle : l'ordonnée est le sinus.

`12/5` → C'est la tangente de l'angle : on divise par l'hypoténuse OM, pas par OP.

EXERCICE 41 · RAISONNEMENT

Retrouver l'angle

Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, on considère le point $M(2, 2\sqrt{3})$. Déterminer, en radians, la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.

Écris l'angle en radians, et non en degrés, avec pi.

Réponse attendue : `pi/3` — aussi acceptées : π/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Soit P le projeté orthogonal de M sur la droite (OA) : le triangle OPM est rectangle en P, avec $OP = 2$ et $PM = 2\sqrt{3}$.
2. Calcule OM, puis le cosinus de l'angle $\widehat{AOM}$.
3. Lis l'angle dans le tableau des valeurs remarquables.

CORRECTION

La distance OM — On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OPM.

$$OM = \sqrt{4 + 12} = 4$$

Le cosinus — Le côté adjacent sur l'hypoténuse.

$$\cos \widehat{AOM} = \frac{OP}{OM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

L'angle — Un seul réel de $[0, \pi]$ a pour cosinus un demi.

$\widehat{AOM} = \dfrac{\pi}{3}$

Le point où $[OM)$ coupe le demi-cercle a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$: un cosinus suffit pour retrouver l'angle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/6` → C'est l'angle dont le cosinus vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: ici le cosinus est $\dfrac{OP}{OM} = \dfrac{1}{2}$.

`60 / 60°` → C'est la bonne mesure, mais en degrés : la consigne la demande en radians.

`1.05 / 1.047` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 42 · BASE

Deux angles obtus

Calculer, sans calculatrice, $\cos\dfrac{2\pi}{3} + \sin\dfrac{5\pi}{6}$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris chaque angle comme π moins un angle remarquable.
2. Deux angles supplémentaires ont le même sinus et des cosinus opposés.

CORRECTION

Le cosinus — $\dfrac{2\pi}{3}$ est le supplémentaire de $\dfrac{\pi}{3}$: le cosinus change de signe.

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Le sinus — $\dfrac{5\pi}{6}$ est le supplémentaire de $\dfrac{\pi}{6}$: le sinus est le même.

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

La somme —

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Pour un angle obtus, on passe par son supplémentaire : même sinus, cosinus opposé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Le cosinus de $\dfrac{2\pi}{3}$ est négatif : l'angle est obtus, son point est à gauche de l'axe (OB).

`-1` → Le sinus d'un réel de $[0, \pi]$ n'est jamais négatif : le sinus de $\dfrac{5\pi}{6}$ est celui de $\dfrac{\pi}{6}$.

EXERCICE 43 · PRATIQUE

Un cosinus connu

Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ tel que $\cos x = 0{,}3$. Calculer $\cos(\pi - x) + \sin(\pi - x) - \sin x$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : `-3/10` — aussi acceptées : -0.3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Remplace $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi - x)$ à l'aide des formules des angles supplémentaires.
2. Le sinus de x n'a pas besoin d'être calculé : il disparaît.

CORRECTION

Les angles supplémentaires —

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad ; \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

La simplification — Les deux sinus s'annulent.

$$-\cos x + \sin x - \sin x = -\cos x = -0{,}3$$

Avant de calculer, on simplifie avec les formules des angles supplémentaires : ici, le sinus de x n'était pas utile.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3/10` → Le cosinus de $\pi - x$ est l'opposé de celui de x.

EXERCICE 44 · RAISONNEMENT

Le cosinus de la somme de deux angles

Soit ABC un triangle tel que $\cos \widehat{A} = \dfrac{2}{7}$. Calculer le cosinus de la somme $\widehat{B} + \widehat{C}$.

Écris seulement la valeur exacte, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `-2/7`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La somme des trois angles d'un triangle vaut π.
2. Exprime $\widehat{B} + \widehat{C}$ à l'aide de $\widehat{A}$: c'est son supplémentaire.

CORRECTION

La somme des angles —

$$\widehat{B} + \widehat{C} = \pi - \widehat{A}$$

Le cosinus — Deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés.

$$\cos\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = \cos\left(\pi - \widehat{A}\right) = -\cos \widehat{A} = -\frac{2}{7}$$

Dans un triangle, la somme de deux angles est le supplémentaire du troisième : même sinus, cosinus opposé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2/7` → Les angles $\widehat{B} + \widehat{C}$ et $\widehat{A}$ sont supplémentaires : leurs cosinus sont opposés, pas égaux.

`5/7` → On ne retranche pas les cosinus : on écrit $\widehat{B} + \widehat{C} = \pi - \widehat{A}$.

EXERCICE 45 · PRATIQUE

Cinq cosinus

Calculer, sans calculatrice, $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\pi$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : `-1`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Repère les angles qui vont par paires de somme π.
2. Deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés. Il reste un dernier terme, à lire sur le demi-cercle.

CORRECTION

Les paires — $\dfrac{4\pi}{5}$ est π moins $\dfrac{\pi}{5}$, et $\dfrac{3\pi}{5}$ est π moins $\dfrac{2\pi}{5}$.

$$\cos\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}\quad ;\quad \cos\frac{3\pi}{5}=-\cos\frac{2\pi}{5}$$

Le dernier terme — Chaque paire donne zéro ; le cosinus de π est l'abscisse de A'.

$$0+0+\cos\pi=-1$$

Des angles qui vont par paires de somme π : leurs cosinus s'annulent deux à deux.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0` → Les deux paires s'annulent, mais il reste $\cos\pi$, qui vaut -1.

`1` → Le cosinus de π est l'abscisse de $A'(-1,0)$: il vaut -1.

EXERCICE 46 · RAISONNEMENT

Sinus et cosinus mélangés

Calculer, sans calculatrice, $\sin\dfrac{\pi}{7}-\sin\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : `0`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche les angles supplémentaires : $\dfrac{6\pi}{7}$ va avec $\dfrac{\pi}{7}$, et $\dfrac{5\pi}{7}$ avec $\dfrac{2\pi}{7}$.
2. Pour deux angles supplémentaires, les sinus sont égaux et les cosinus opposés.

CORRECTION

Les angles supplémentaires —

$$\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}\quad ;\quad \cos\frac{5\pi}{7}=-\cos\frac{2\pi}{7}$$

La somme — Les termes s'annulent deux à deux.

$$\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}=0$$

Les sinus de deux angles supplémentaires sont égaux : c'est leur différence qui s'annule. Leurs cosinus sont opposés : c'est leur somme qui s'annule.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sin(pi/7)` → Le sinus de $\frac{6\pi}{7}$ n'est pas l'opposé de celui de $\frac{\pi}{7}$: deux angles supplémentaires ont le même sinus.

`2*cos(2*pi/7)` → Les cosinus de deux angles supplémentaires sont opposés : leur somme est nulle.

EXERCICE 47 · PRATIQUE

Sinus et cosinus échangés

Soit x un réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$ et $\cos x = \frac{4}{5}$. Calculer $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : `2/5` — aussi acceptées : 0.4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les réels x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont complémentaires.
2. Deux angles complémentaires échangent leur sinus et leur cosinus.

CORRECTION

L'échange —

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = \frac{3}{5} \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{4}{5}$$

Le calcul —

$$2 \times \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

Le cosinus de $\frac{\pi}{2} - x$ est le sinus de x, et son sinus est le cosinus de x.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Tu n'as pas échangé : le cosinus de $\frac{\pi}{2} - x$ est le sinus de x, pas son cosinus.

EXERCICE 48 · PRATIQUE

Deux carrés de sinus

Calculer, sans calculatrice, $\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\frac{3\pi}{10}\right)^2$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Additionne les deux angles : ils sont complémentaires.

2. Remplace le sinus de $\frac{3\pi}{10}$ par le cosinus de son complémentaire, puis pense à la première relation fondamentale.

CORRECTION

Deux angles complémentaires —

$$\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$$

L'échange — Le sinus de l'un est le cosinus de l'autre.

$$\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{5}$$

La relation fondamentale —

$$\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2=1$$

Deux angles complémentaires : le carré du sinus de l'un plus le carré du sinus de l'autre vaut un.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*(sin(pi/5))^2` → Le sinus de $\frac{3\pi}{10}$ n'est pas celui de $\frac{\pi}{5}$: les deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est le cosinus de l'autre.

EXERCICE 49 · DEFI

Quatre carrés de cosinus

Calculer, sans calculatrice, la somme $\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2+\left(\cos\frac{3\pi}{10}\right)^2+\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2$ des carrés de quatre cosinus.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Groupe les angles par paires de somme $\frac{\pi}{2}$.
2. Dans chaque paire, le cosinus de l'un est le sinus de l'autre.
3. Chaque paire devient la somme des carrés du cosinus et du sinus d'un même réel.

CORRECTION

Les paires —

$$\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{2}\quad;\quad\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$$

L'échange —

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}\quad;\quad\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{\pi}{5}$$

La somme — Chaque crochet vaut un, d'après la première relation fondamentale.

$$\left[\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{10}\right)^2\right]+\left[\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2\right]=1+1=2$$

Repérer les angles complémentaires, échanger sinus et cosinus, puis reconnaître la relation fondamentale.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1` → Il y a deux paires d'angles complémentaires : chacune vaut 1.

`0` → Ces angles sont complémentaires, pas supplémentaires : on échange sinus et cosinus, rien ne s'annule.

EXERCICE 50 · BASE

La cotangente dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 7$ et $BC = 24$. Calculer la cotangente de l'angle $\widehat{A}$.

Écris seulement la valeur exacte de la cotangente, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `7/24`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Pour l'angle $\widehat{A}$, le côté adjacent est $[AB]$ et le côté opposé est $[BC]$.
2. La cotangente d'un angle aigu est le côté adjacent sur le côté opposé : l'inverse de la tangente.

CORRECTION

La tangente — Le côté opposé sur le côté adjacent.

$$\tan \widehat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{24}{7}$$

La cotangente — C'est l'inverse.

$$\frac{1}{\tan \widehat{A}} = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{24}$$

Dans un triangle rectangle, la cotangente d'un angle aigu est le côté adjacent sur le côté opposé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`24/7` → C'est la tangente de $\widehat{A}$: la cotangente en est l'inverse.

`7/25` → C'est le cosinus de $\widehat{A}$: l'hypoténuse mesure 25, mais la cotangente ne l'utilise pas.

EXERCICE 51 · PRATIQUE

Tangente plus cotangente

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ tel que $\cos x = -\frac{8}{17}$ et $\sin x = \frac{15}{17}$. Calculer la somme de la tangente et de la cotangente de x.

Écris seulement la valeur exacte, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `-289/120`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La tangente est le sinus sur le cosinus, la cotangente le cosinus sur le sinus.
2. Réduis les deux fractions au même dénominateur, 120.

CORRECTION

La tangente —

$$\tan x = \frac{15}{17} \times \left(-\frac{17}{8}\right) = -\frac{15}{8}$$

La cotangente — C'est l'inverse de la tangente.

$$\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{8}{15}$$

La somme —

$$-\frac{15}{8} - \frac{8}{15} = -\frac{225+64}{120} = -\frac{289}{120}$$

La tangente et la cotangente d'un même réel sont inverses l'une de l'autre, et ont le même signe.

PIÈGES ANTICIPÉS

`289/120` → L'angle est obtus : la tangente et la cotangente sont toutes les deux négatives.

`-161/120` → La cotangente a le même signe que la tangente : elle est négative elle aussi.

EXERCICE 52 · PRATIQUE

Un sinus double du cosinus

Soit x un réel strictement compris entre 0 et π tel que $\sin x = 2\cos x$. Calculer la cotangente de x.

Écris seulement la valeur de la cotangente.

Réponse attendue : `1/2` — aussi acceptées : 0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cosinus de x ne peut pas être nul : sinon le sinus le serait aussi, et x vaudrait 0 ou π.
2. Divise les deux membres de l'égalité par le cosinus de x : tu obtiens la tangente.

CORRECTION

Pas de division par zéro — Si le cosinus était nul, le sinus le serait aussi : impossible pour x entre 0 et π.

$$\cos x \neq 0$$

La tangente —

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 2$$

La cotangente — C'est l'inverse de la tangente.

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2}$$

Une égalité entre le sinus et le cosinus donne directement la tangente, puis la cotangente, son inverse.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2` → C'est la tangente : la cotangente est le cosinus sur le sinus, son inverse.

EXERCICE 53 · PRATIQUE

Lire la tangente sur la droite D

Soit $\mathscr{C}$ le demi-cercle trigonométrique dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, et D sa tangente en A, munie du repère $(A, \overrightarrow{AI})$ où $I(1,1)$. Soit M le point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \dfrac{2\pi}{3}$; la droite (OM) coupe D en T. Déterminer la mesure algébrique $\overline{AT}$.

Donne la valeur exacte de la mesure algébrique.

Réponse attendue : `-sqrt(3)` — aussi acceptées : -√3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La mesure algébrique $\overline{AT}$ est la tangente de l'angle $\widehat{AOM}$.
2. Calcule le sinus et le cosinus de $\dfrac{2\pi}{3}$, puis leur quotient.

CORRECTION

Sinus et cosinus — L'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le supplémentaire de $\dfrac{\pi}{3}$.

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

La tangente —

$$\overline{AT} = \tan\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-2) = -\sqrt{3}$$

Une mesure algébrique négative : le point T est sous l'axe (OA), de l'autre côté de A par rapport à I. C'est le signe de la tangente d'un angle obtus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(3)` → La mesure algébrique tient compte du sens : l'angle est obtus, le point T est de l'autre côté de A par rapport à I.

`-1.73 / -1.732` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 54 · RAISONNEMENT

Retrouver l'angle à partir de T'

Soit $\mathscr{C}$ le demi-cercle trigonométrique dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, et D' sa tangente en B, munie du repère $(B, \overrightarrow{BI})$ où $I(1,1)$. Soit M un point de $\mathscr{C}$, distinct de A et de A' ; la droite (OM) coupe D' en T'. Déterminer, en radians, l'angle $\widehat{AOM}$ lorsque $\overline{BT'} = -1$.

Écris l'angle en radians, et non en degrés, avec pi.

Réponse attendue : `3*pi/4` — aussi acceptées : 3pi/4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La mesure algébrique $\overline{BT'}$ est la cotangente de l'angle $\widehat{AOM}$.
2. Une cotangente négative : l'angle est obtus. Quel angle aigu a une cotangente égale à 1 ?

CORRECTION

La cotangente — On note α l'angle $\widehat{AOM}$.

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \overline{BT'} = -1$$

L'angle aigu associé — La cotangente de $\frac{\pi}{4}$ vaut 1 ; celle de son supplémentaire vaut -1.

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

La cotangente se lit sur la tangente en B : son signe dit si l'angle est aigu ou obtus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/4` → La cotangente de $\frac{\pi}{4}$ vaut 1, pas -1 : une cotangente négative correspond à un angle obtus.

`135 / 135°` → C'est la bonne mesure, mais en degrés : la consigne la demande en radians.

`2.36 / 2.356` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 55 · BASE

Une tangente remarquable

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$, différent de $\frac{\pi}{2}$, tel que $\tan x = -\sqrt{3}$. Déterminer x.

Écris la valeur de x en radians, et non en degrés, avec pi.

Réponse attendue : `2*pi/3` — aussi acceptées : 2pi/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La tangente est négative : l'angle est obtus.
2. Quel angle aigu a pour tangente $\sqrt{3}$? Prends son supplémentaire.

CORRECTION

L'angle aigu — On lit le tableau des valeurs remarquables.

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Le supplémentaire — Deux angles supplémentaires ont des tangentes opposées.

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Une tangente négative sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$: l'angle est obtus, c'est le supplémentaire d'un angle remarquable.

PIÈGES ANTICIPÉS

`pi/3` → La tangente de $\frac{\pi}{3}$ vaut $\sqrt{3}$, pas $-\sqrt{3}$: l'angle cherché est obtus.

`5*pi/6` → C'est l'angle dont la tangente vaut $-\frac{\sqrt{3}}{3}$: ici la tangente vaut $-\sqrt{3}$.

`120 / 120°` → C'est la bonne mesure, mais en degrés : la consigne la demande en radians.

EXERCICE 56 · BASE

Même sinus que 2π/9

Déterminer tous les réels x de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ tels que $\sin x = \sin \frac{2\pi}{9}$.

Écris les deux valeurs entre accolades, séparées par un point-virgule, avec pi.

Réponse attendue : `{2pi/9;7pi/9}` — aussi acceptées : {2π/9;7π/9} · {2*pi/9;7*pi/9} · {2*π/9;7*π/9}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Sur le demi-cercle trigonométrique, combien de points ont pour ordonnée $\sin\dfrac{2\pi}{9}$?
2. Deux angles supplémentaires ont le même sinus.

CORRECTION

Une première solution — Le réel $\dfrac{2\pi}{9}$ lui-même convient.

$$x = \frac{2\pi}{9}$$

Son supplémentaire — Le supplémentaire a le même sinus.

$$\pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$$

Sur $[0, \pi]$, un sinus strictement compris entre 0 et 1 est atteint deux fois : en un angle aigu et en son supplémentaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{2pi/9} / 2pi/9` → Il manque une valeur : le supplémentaire de $\dfrac{2\pi}{9}$ a le même sinus.

`{2pi/9;5pi/18}` → $\dfrac{5\pi}{18}$ est le complémentaire de $\dfrac{2\pi}{9}$: il a pour sinus le cosinus de $\dfrac{2\pi}{9}$. C'est le supplémentaire qui garde le sinus.

EXERCICE 57 · PRATIQUE

Un calcul avec le tableau

Calculer, sans calculatrice, $4\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2 - \tan\dfrac{\pi}{4} + 2\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Lis dans le tableau le sinus de $\dfrac{\pi}{3}$ et la tangente de $\dfrac{\pi}{4}$.
2. Pour $\dfrac{2\pi}{3}$, passe par le supplémentaire : le cosinus change de signe.

CORRECTION

Les valeurs —

$$\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad ; \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad ; \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Le calcul —

$$4 \times \frac{3}{4} - 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 - 1 - 1 = 1$$

On lit les valeurs remarquables dans le tableau, et l'on passe par le supplémentaire pour un angle obtus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3` → Le cosinus de $\frac{2\pi}{3}$ est négatif : c'est moins un demi.

`2*sqrt(3)-2` → Le sinus de $\frac{\pi}{3}$ est au carré : son carré vaut trois quarts.

EXERCICE 58 · RAISONNEMENT

Un carré de cosinus

Résoudre dans l'intervalle fermé $[0, \pi]$ l'équation $4(\cos x)^2 = 1$: quatre fois le carré du cosinus de x est égal à un.

Écris les solutions entre accolades, séparées par un point-virgule, avec pi.

Réponse attendue : `{pi/3;2pi/3}` — aussi acceptées : {π/3;2π/3} · {pi/3;2*pi/3} · {π/3;2*π/3}

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le carré du cosinus vaut $\frac{1}{4}$: le cosinus vaut un demi ou moins un demi.
2. Sur $[0, \pi]$, chaque valeur du cosinus donne un seul réel : traite les deux.

CORRECTION

Le carré —

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{4}$$

Deux cosinus — Un nombre et son opposé ont le même carré.

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

Les solutions — Le cosinus négatif donne le supplémentaire.

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Un carré donne deux valeurs opposées du cosinus ; chacune donne un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{pi/3} / pi/3` → Le cosinus peut aussi valoir moins un demi : il correspond à un angle obtus.

`{pi/6;5pi/6}` → Ce sont les réels dont le sinus vaut un demi : ici, c'est le cosinus.

EXERCICE 59 · BASE

Le sinus d'un angle aigu

Soit x un réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\cos x = 0{,}28$. Calculer $\sin x$.

Écris seulement la valeur exacte du sinus.

Réponse attendue : `24/25` — aussi acceptées : 0.96

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Utilise la première relation fondamentale : la somme des carrés du cosinus et du sinus vaut un.
2. Le sinus d'un réel de $[0, \pi]$ est positif.

CORRECTION

Le carré du sinus —

$$(\sin x)^2 = 1 - 0{,}28^2 = 1 - 0{,}0784 = 0{,}9216$$

Le sinus — Il est positif.

$$\sin x = \sqrt{0{,}9216} = 0{,}96$$

Du cosinus au sinus : la relation fondamentale donne le carré, et sur $[0, \pi]$ le sinus est toujours positif.

PIÈGES ANTICIPÉS

`0.72` → Tu as retiré le cosinus à un, pas son carré : la relation porte sur les carrés.

`0.9216` → C'est le carré du sinus : il reste à prendre la racine carrée.

`-0.96` → Sur $[0, \pi]$, le sinus est toujours positif.

EXERCICE 60 · PRATIQUE

Le cosinus d'un angle obtus

Soit x un réel compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π tel que $\sin x = \frac{2}{3}$. Calculer $\cos x$.

Écris seulement la valeur exacte du cosinus, sans rien devant.

Réponse attendue : `-sqrt(5)/3` — aussi acceptées : -√5/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La première relation fondamentale donne le carré du cosinus.
2. L'angle est obtus : quel est le signe de son cosinus ?

CORRECTION

Le carré du cosinus —

$$(\cos x)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Le signe — L'angle est obtus : son cosinus est négatif.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Le carré ne donne pas le signe : c'est la position de l'angle, aigu ou obtus, qui le donne.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(5)/3` → L'angle est obtus : son cosinus est négatif.

`-5/9 / 5/9` → C'est le carré du cosinus, au signe près : il reste à prendre la racine carrée.

`-0.75 / -0.745` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 61 · DEFI

Une différence connue

Soit x un réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\cos x - \sin x = \frac{1}{5}$. Calculer $\tan x$.

Écris seulement la valeur exacte de la tangente.

Réponse attendue : `3/4` — aussi acceptées : 0.75

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Élève au carré les deux membres : la première relation fondamentale fait apparaître le produit $\sin x \times \cos x$.
2. Calcule ensuite le carré de $\cos x + \sin x$: cette somme est positive.
3. Avec la somme et la différence, tu trouves le cosinus et le sinus.

CORRECTION

Le carré de la différence —

$$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$$

Le produit —

$$2\sin x \cos x = \frac{24}{25}$$

La somme — Le cosinus et le sinus sont positifs : leur somme aussi.

$$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25} \quad ; \quad \cos x + \sin x = \frac{7}{5}$$

Cosinus et sinus — On ajoute, puis on retranche, la somme et la différence.

$$\cos x = \frac{4}{5} \quad ; \quad \sin x = \frac{3}{5}$$

La tangente —

$$\tan x = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Le carré d'une somme ou d'une différence du cosinus et du sinus se simplifie grâce à la relation fondamentale.

PIÈGES ANTICIPÉS

4/3 → C'est la cotangente : la tangente met le sinus en haut.

12/25 → C'est le produit $\sin x \times \cos x$: il reste à trouver le sinus et le cosinus.

EXERCICE 62 · RAISONNEMENT

Une expression qui ne dépend pas de x

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$. Simplifier l'expression $(\sin x)^4 - (\cos x)^4 + 2(\cos x)^2$: la puissance quatrième du sinus, moins la puissance quatrième du cosinus, plus deux fois le carré du cosinus.

Écris l'expression simplifiée.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La différence $(\sin x)^4 - (\cos x)^4$ est une différence de deux carrés : factorise-la.
2. L'un des deux facteurs vaut un, d'après la première relation fondamentale.

CORRECTION

La factorisation — On factorise la différence de deux carrés, puis on applique la relation fondamentale.

$$(\sin x)^4 - (\cos x)^4 = \left[(\sin x)^2 - (\cos x)^2\right]\left[(\sin x)^2 + (\cos x)^2\right] = (\sin x)^2 - (\cos x)^2$$

La simplification —

$(\sin x)^2 - (\cos x)^2 + 2(\cos x)^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

Devant des puissances du sinus et du cosinus, on cherche une identité remarquable qui fasse apparaître la somme de leurs carrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1+2*(cos(x))^2` → La relation fondamentale porte sur la somme des carrés : $(\sin x)^4 - (\cos x)^4$ ne vaut pas 1. Factorise cette différence de deux carrés.

EXERCICE 63 · PRATIQUE

De la tangente au sinus

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ tel que $\tan x = -\dfrac{7}{24}$. Calculer $\sin x$.

Écris seulement la valeur exacte du sinus, sous la forme d'une fraction irréductible, sans rien devant.

Réponse attendue : `7/25`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Avec la tangente, la relation à utiliser donne l'inverse du carré du cosinus.
2. La tangente est négative : l'angle est obtus, son cosinus est négatif. Le sinus, lui, est toujours positif sur $[0, \pi]$.
3. Termine avec $\sin x = \tan x \times \cos x$.

CORRECTION

Le carré du cosinus —

$$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + \frac{49}{576} = \frac{625}{576}$$

Le cosinus — L'angle est obtus : son cosinus est négatif.

$$\cos x = -\frac{24}{25}$$

Le sinus —

$$\sin x = -\frac{7}{24} \times \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{25}$$

On choisit la relation qui contient le rapport connu, on fixe le signe, puis on termine avec un quotient.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-7/25` → Sur $[0, \pi]$, le sinus est toujours positif : c'est le cosinus qui porte le signe.

`-24/25` → C'est le cosinus de x : il reste à le multiplier par la tangente.

EXERCICE 64 · RAISONNEMENT

De la cotangente au cosinus

Soit x un réel strictement compris entre 0 et π dont la cotangente vaut $\dfrac{1}{3}$. Calculer $\cos x$.

Écris seulement la valeur exacte du cosinus, sans rien devant.

Réponse attendue : `sqrt(10)/10` — aussi acceptées : 1/sqrt(10) · √10/10

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La relation avec la cotangente donne l'inverse du carré du sinus : un plus le carré de la cotangente.
2. Le sinus est positif. Termine avec : le cosinus est la cotangente multipliée par le sinus.

CORRECTION

Le carré du sinus —

$$\frac{1}{(\sin x)^2} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

Le sinus — Il est positif.

$$\sin x = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Le cosinus —

$$\cos x = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Avec la cotangente, on passe par le sinus : sa relation donne l'inverse du carré du sinus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`3*sqrt(10)/10` → C'est le sinus de x : multiplie-le par la cotangente pour avoir le cosinus.

`-sqrt(10)/10` → La cotangente est positive : l'angle est aigu, et son cosinus aussi est positif.

`0.32 / 0.316` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 65 · RAISONNEMENT

Du cosinus à la tangente

Soit x un réel de l'intervalle fermé $[0, \pi]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{4}$. Calculer $\tan x$.

Écris seulement la valeur exacte de la tangente, sans rien devant.

Réponse attendue : `-sqrt(15)` — aussi acceptées : -√15

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord le sinus avec la première relation fondamentale : il est positif.
2. La tangente est le sinus divisé par le cosinus.

CORRECTION

Le sinus —

$$(\sin x)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \quad ; \quad \sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

La tangente —

$$\tan x = \frac{\sqrt{15}}{4} \times (-4) = -\sqrt{15}$$

Le sinus est toujours positif sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$: la tangente a donc le signe du cosinus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(15)` → Le cosinus est négatif : la tangente aussi.

`-sqrt(15)/15` → C'est la cotangente, le cosinus divisé par le sinus : la tangente en est l'inverse.

`-3.87 / -3.873` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 66 · BASE

La tangente d'un angle obtus

Donner la valeur exacte de $\tan \frac{5\pi}{6}$.

Écris seulement la valeur exacte, sans rien devant.

Réponse attendue : `-sqrt(3)/3` — aussi acceptées : -1/sqrt(3) · -√3/3

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris $\frac{5\pi}{6}$ sous la forme $\pi - \frac{\pi}{6}$.
2. Deux angles supplémentaires ont des tangentes opposées.

CORRECTION

Le supplémentaire —

$$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

La tangente —

$$\tan \frac{5\pi}{6} = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pour un angle obtus, la tangente est l'opposée de celle du supplémentaire.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(3)/3` → L'angle est obtus : sa tangente est négative.

`-sqrt(3)` → C'est l'opposé de la tangente de $\frac{\pi}{3}$: ici l'angle est le supplémentaire de $\frac{\pi}{6}$.

`-0.58 / -0.577` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 67 · PRATIQUE

Quatre tangentes, deux négatives

Calculer, sans calculatrice, $\tan \frac{\pi}{12} \times \tan \frac{5\pi}{12} \times \tan \frac{7\pi}{12} \times \tan \frac{11\pi}{12}$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : 1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Cherche les angles complémentaires et les angles supplémentaires parmi $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.
2. Deux angles supplémentaires ont des tangentes opposées ; deux angles complémentaires ont des tangentes inverses.

CORRECTION

Les angles supplémentaires — $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$ sont les supplémentaires de $\frac{5\pi}{12}$ et de $\frac{\pi}{12}$.

$$\tan\frac{7\pi}{12} = -\tan\frac{5\pi}{12} \quad ; \quad \tan\frac{11\pi}{12} = -\tan\frac{\pi}{12}$$

Les angles complémentaires — $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$: leurs tangentes sont inverses.

$$\tan\frac{\pi}{12} \times \tan\frac{5\pi}{12} = 1$$

Le produit — On remplace les deux tangentes négatives : les deux signes moins se compensent.

$$\tan\frac{\pi}{12} \times \tan\frac{5\pi}{12} \times \left(-\tan\frac{5\pi}{12}\right) \times \left(-\tan\frac{\pi}{12}\right) = \left(\tan\frac{\pi}{12} \times \tan\frac{5\pi}{12}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Supplémentaires : tangentes opposées ; complémentaires : tangentes inverses. On regroupe les facteurs par paires.

PIÈGES ANTICIPÉS

-1 → Les deux tangentes des angles obtus sont négatives : deux signes moins, le produit est positif.

EXERCICE 68 · RAISONNEMENT

Trois rapports d'angles associés

Soit x un réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\tan x = 2$. Calculer la somme de $\tan(\pi - x)$, de la cotangente de $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et de la cotangente de $(\pi - x)$.

Écris seulement le nombre.

Réponse attendue : `-1/2` — aussi acceptées : -0.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Deux angles supplémentaires ont des tangentes opposées et des cotangentes opposées.
2. Deux angles complémentaires échangent tangente et cotangente.
3. La cotangente de x est l'inverse de sa tangente.

CORRECTION

Le supplémentaire —

$$\tan(\pi - x) = -\tan x = -2$$

Le complémentaire — La cotangente de $\frac{\pi}{2} - x$ est la tangente de x.

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = 2$$

La dernière — La cotangente de $\pi - x$ est l'opposée de celle de x, qui vaut un demi.

$$\frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{2}$$

La somme —

$$-2 + 2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Supplémentaires : tangentes et cotangentes opposées. Complémentaires : tangente et cotangente échangées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1/2` → La cotangente de $\pi - x$ est l'opposée de celle de x.

`-9/2` → Pour deux angles complémentaires, rien ne change de signe : la cotangente de l'un est la tangente de l'autre.

EXERCICE 69 · PRATIQUE

Le cosinus de 5π/8

On admet que le sinus de $\frac{\pi}{8}$ vaut $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Donner la valeur exacte du cosinus de $\frac{5\pi}{8}$.

Écris seulement la valeur exacte, sans rien devant.

Réponse attendue : `-sqrt(2-sqrt(2))/2` — aussi acceptées : -√(2-√2)/2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'angle $\frac{5\pi}{8}$ est le supplémentaire de $\frac{3\pi}{8}$.
2. L'angle $\frac{3\pi}{8}$ est le complémentaire de $\frac{\pi}{8}$.

CORRECTION

Le supplémentaire — Le cosinus change de signe.

$$\cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8}$$

Le complémentaire — Le cosinus de l'un est le sinus de l'autre.

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}$$

Le résultat —

$$\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Avec les angles supplémentaires et complémentaires, les valeurs de $\frac{\pi}{8}$ donnent celles de $\frac{3\pi}{8}$, de $\frac{5\pi}{8}$ et de $\frac{7\pi}{8}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(2-sqrt(2))/2` → C'est le cosinus de $\frac{3\pi}{8}$: l'angle $\frac{5\pi}{8}$ est obtus, son cosinus est négatif.

`-sqrt(2+sqrt(2))/2` → C'est l'opposé du cosinus de $\frac{\pi}{8}$: le cosinus de $\frac{3\pi}{8}$ est le sinus de $\frac{\pi}{8}$, son complémentaire.

`-0.38` / `-0.383` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 70 · RAISONNEMENT

La tangente de 3π/8

On sait que $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Donner la valeur exacte de la tangente de $\dfrac{3\pi}{8}$, sans racine au dénominateur.

Écris la valeur exacte, sans racine au dénominateur.

Réponse attendue : `sqrt(2)+1` — aussi acceptées : 1+sqrt(2) · √2+1 · 1+√2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les angles $\dfrac{\pi}{8}$ et $\dfrac{3\pi}{8}$ sont complémentaires : la tangente de l'un est la cotangente de l'autre.
2. La cotangente est l'inverse de la tangente. Pour ôter la racine du dénominateur, multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée du dénominateur.

CORRECTION

Le complémentaire —

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\tan\dfrac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

La quantité conjuguée —

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

Complémentaires : les tangentes sont inverses. Supplémentaires : elles sont opposées.

PIÈGES ANTICIPÉS

`1-sqrt(2)` → C'est la tangente de $\dfrac{7\pi}{8}$, le supplémentaire : ici, les angles sont complémentaires.

`sqrt(2)-1` → C'est la tangente de $\dfrac{\pi}{8}$: celle de son complémentaire en est l'inverse.

`2.41 / 2.414` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 71 · DEFI **L'aire d'un triangle d'angle π/8**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 10$ et $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{8}$. On note O le milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A. Calculer l'aire du triangle ABC, sans écrire l'unité.

Donne la valeur exacte de l'aire, le nombre seul.

Réponse attendue : `25*sqrt(2)/2` — aussi acceptées : 25√2/2 · 25/sqrt(2)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire est la moitié de $BC \times AH$: il faut la hauteur AH.
2. Le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets ; le triangle OAB est isocèle en O : calcule l'angle $\widehat{AOH}$.
3. Le triangle AOH est rectangle en H : $[AH]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{AOH}$.

CORRECTION

Le milieu de l'hypoténuse —

$OA = OB = OC = 5$

Les angles en O — Le triangle OAB est isocèle en O : ses angles à la base mesurent $\frac{\pi}{8}$.

$$\widehat{AOB} = \pi - 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad \widehat{AOH} = \frac{\pi}{4}$$

La hauteur — Dans le triangle AOH, rectangle en H.

$$AH = OA \times \sin\frac{\pi}{4} = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

L'aire — La moitié de la base par la hauteur.

$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

Le milieu de l'hypoténuse fait apparaître le double de l'angle $\frac{\pi}{8}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$, un angle remarquable.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5*sqrt(2)/2` → C'est la hauteur AH : il reste à calculer l'aire, la moitié de $BC \times AH$.

`25*sqrt(2)` → Tu as oublié la moitié : l'aire est $\frac{1}{2} \times BC \times AH$.

`17.68 / 17.678` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 72 · BASE

La hauteur par deux segments

Dans un triangle ABC rectangle en A, le pied H de la hauteur issue de A vérifie $HB = 2$ et $HC = 8$. Calculer AH.

Donne la longueur AH.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{CAH}$ sont égaux : écris leur tangente dans les triangles AHB et AHC.
2. Le carré de la hauteur est le produit des deux segments qu'elle découpe sur l'hypoténuse.

CORRECTION

Le carré de la hauteur —

$$AH^2 = HB \times HC = 2 \times 8 = 16$$

La hauteur — Une longueur est positive.

$$AH = 4$$

Dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur issue de l'angle droit est le produit des deux segments HB et HC.

PIÈGES ANTICIPÉS

`16` → C'est AH^2 : prends la racine carrée.

`5` → La hauteur n'est pas la moyenne des deux segments : son carré est leur produit.

EXERCICE 73 · PRATIQUE

Un côté de l'angle droit par la hauteur

Dans un triangle ABC rectangle en A, la hauteur $[AH]$ mesure 6 et $HB = 4$. Calculer AC.

Donne la valeur exacte de AC.

Réponse attendue : `3*sqrt(13)` — aussi acceptées : 3√13 · sqrt(117)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La relation $AH^2 = HB \times HC$ donne HC.
2. Le triangle AHC est rectangle en H : tu connais ses deux côtés de l'angle droit.

CORRECTION

Le segment HC — On utilise $AH^2 = HB \times HC$.

$$HC = \frac{AH^2}{HB} = \frac{36}{4} = 9$$

Le côté AC — Théorème de Pythagore dans le triangle AHC, rectangle en H.

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 36 + 81 = 117$$

La longueur —

$$AC = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

La hauteur relative à l'hypoténuse donne le segment manquant ; on vérifie avec $AC^2 = HC \times BC = 9 \times 13 = 117$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(13)` → C'est AB, du côté de B : pour AC, il faut d'abord le segment HC.

`117` → C'est AC^2 : il reste à prendre la racine carrée.

`10.82 / 10.817` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 74 · RAISONNEMENT

La hauteur et une tangente

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. On sait que $HB = 2$ et que la tangente de l'angle $\widehat{B}$ vaut 3. Calculer HC.

Donne la longueur HC.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le triangle AHB, rectangle en H, la tangente de $\widehat{B}$ donne AH.
2. Puis utilise $AH^2 = HB \times HC$, ou la tangente de l'angle $\widehat{CAH}$, égal à $\widehat{B}$.

CORRECTION

La hauteur — Dans le triangle AHB, le côté opposé à $\widehat{B}$ est $[AH]$.

$$AH = HB \times \tan \widehat{B} = 2 \times 3 = 6$$

Le segment HC —

$$HC = \frac{AH^2}{HB} = \frac{36}{2} = 18$$

L'angle $\widehat{CAH}$ est égal à l'angle $\widehat{B}$: on peut aussi écrire $HC = AH \times \tan \widehat{CAH} = 6 \times 3 = 18$.

PIÈGES ANTICIPÉS

6 → C'est AH : il reste à utiliser le carré de la hauteur.

2 → Pour l'angle $\widehat{CAH}$, le côté opposé est $[HC]$ et le côté adjacent $[AH]$: $HC = AH \times \tan \widehat{CAH}$.

EXERCICE 75 · BASE

Un angle de cosinus 5/13

Pour construire un angle aigu α dont le cosinus vaut $\frac{5}{13}$, on construit un triangle rectangle d'hypoténuse 13 dont un côté de l'angle droit mesure 5. Calculer la longueur du troisième côté.

Donne la longueur du troisième côté.

Réponse attendue : 12

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le cosinus est le côté adjacent sur l'hypoténuse : le côté de longueur 5 est adjacent à l'angle α.
2. Le théorème de Pythagore donne le troisième côté.

CORRECTION

Pythagore — Le troisième côté est un côté de l'angle droit.

$$\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

Le troisième côté est opposé à l'angle α : le sinus de α vaut donc $\frac{12}{13}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(194)` → Le côté cherché n'est pas l'hypoténuse : on retranche les carrés, on ne les ajoute pas.

`8` → On ne soustrait pas les longueurs : le théorème de Pythagore porte sur les carrés.

EXERCICE 76 · PRATIQUE

Un angle obtus de sinus 0,6

On construit sur le demi-cercle trigonométrique l'angle obtus α dont le sinus vaut $0{,}6$: on trace la parallèle à (OA) d'ordonnée $0{,}6$, et l'on garde le point d'abscisse négative. Calculer le cosinus de α.

Écris seulement la valeur exacte du cosinus.

Réponse attendue : `-4/5` — aussi acceptées : -0.8

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le point construit est sur le demi-cercle : la somme des carrés de ses coordonnées vaut 1.
2. L'angle est obtus : son cosinus est négatif.

CORRECTION

Le carré du cosinus —

$(\cos\alpha)^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

Le signe — On a gardé le point d'abscisse négative.

$\cos\alpha = -0{,}8$

Un sinus donne deux points du demi-cercle : il faut savoir si l'on veut l'angle aigu ou l'angle obtus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`4/5 / 0.8` → C'est le cosinus de l'angle aigu : le point choisi a une abscisse négative.

`-0.4` → Le cosinus n'est pas un moins le sinus : ce sont les carrés qui ont pour somme un.

EXERCICE 77 · BASE

Un côté par la loi du sinus

Soit ABC un triangle tel que $BC = 5$, $\widehat{A} = 30°$ et $\widehat{B} = 45°$. Calculer AC.

Donne la valeur exacte de AC.

Réponse attendue : `5*sqrt(2)` — aussi acceptées : 5√2 · sqrt(50)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le côté $[BC]$ est opposé à l'angle $\widehat{A}$, le côté $[AC]$ à l'angle $\widehat{B}$.
2. D'après la loi du sinus, chaque côté divisé par le sinus de l'angle opposé donne le même quotient.

CORRECTION

La loi du sinus —

$$\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}}$$

Le calcul —

$$AC = \frac{5 \times \sin 45°}{\sin 30°} = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 5\sqrt{2}$$

Dans un triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5*sqrt(2)/2` → Tu as inversé les sinus : le côté $[AC]$ est opposé à l'angle $\widehat{B}$, le côté $[BC]$ à l'angle $\widehat{A}$.

`7.07 / 7.071` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 78 · PRATIQUE

Un angle obtus par la loi du sinus

Soit ABC un triangle tel que $BC = 4$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $\widehat{A} = 30°$. On sait de plus que l'angle $\widehat{B}$ est obtus. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{B}$.

Écris seulement le nombre de degrés.

Réponse attendue : `135`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la loi du sinus avec les côtés $[BC]$ et $[AC]$: elle donne le sinus de $\widehat{B}$.

2. Deux angles ont ce sinus : l'énoncé te dit lequel garder.

CORRECTION

Le sinus de B —

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC \times \sin \widehat{A}}{BC} = \frac{4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle obtus — On prend le supplémentaire de 45 degrés.

$\widehat{B} = 180° - 45° = 135°$

Un sinus ne suffit pas à fixer un angle : il en donne deux, supplémentaires. Ici, $\widehat{C}$ mesure 15 degrés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`45 / 45°` → Un sinus égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ correspond à deux angles : l'énoncé dit que $\widehat{B}$ est obtus.

EXERCICE 79 · PRATIQUE

Deux sinus connus

Dans un triangle ABC, on a $BC = 9$, $\sin \widehat{A} = \frac{3}{5}$ et $\sin \widehat{B} = \frac{1}{2}$. Calculer AC.

Donne la longueur AC.

Réponse attendue : `15/2` — aussi acceptées : 7.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le côté $[BC]$ est opposé à l'angle $\widehat{A}$, le côté $[AC]$ à l'angle $\widehat{B}$.
2. Écris l'égalité de la loi du sinus avec ces deux côtés.

CORRECTION

La loi du sinus —

$$\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{BC}{\sin \widehat{A}}$$

Le calcul —

$$AC = \frac{9 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{9}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{2}$$

Chaque côté va avec le sinus de l'angle qui lui fait face.

PIÈGES ANTICIPÉS

`54/5 / 10.8` → Le côté $[AC]$ est opposé à l'angle $\widehat{B}$: c'est le sinus de $\widehat{B}$ qui va avec lui.

EXERCICE 80 · BASE

Le partage d'un côté

Dans un triangle ABC, on a $AB = 5$, $AC = 7$ et $BC = 6$. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe le côté $[BC]$ en I. Calculer IB.

Donne la longueur IB.

Réponse attendue : `5/2` — aussi acceptées : 2.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'après le théorème des bissectrices, le rapport de IB à IC est celui de AB à AC.
2. Le point I est sur le segment $[BC]$: $IB + IC = 6$. Partage 6 en parts proportionnelles à 5 et à 7.

CORRECTION

Le rapport —

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$$

Le partage — Sur 12 parts, IB en prend 5.

$$IB = \frac{5}{5+7} \times 6 = \frac{5}{2}$$

La bissectrice intérieure partage le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés voisins.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7/2 / 3.5` → C'est IC : le segment $[IB]$ est du côté de B, il est proportionnel à AB.

`3` → La bissectrice ne coupe pas $[BC]$ en son milieu : elle le partage dans le rapport des côtés voisins.

EXERCICE 81 · PRATIQUE

Retrouver un côté avec la bissectrice

Dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe le côté $[BC]$ en I, avec $IB = 3$ et $IC = 5$. On sait que $AB = 6$. Calculer AC.

Donne la longueur AC.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le théorème des bissectrices relie $\frac{IB}{IC}$ et $\frac{AB}{AC}$.
2. Le segment $[IB]$ va avec le côté $[AB]$, le segment $[IC]$ avec le côté $[AC]$.

CORRECTION

Le rapport —

$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC} = \frac{3}{5}$$

Le côté —

$$AC = \frac{5 \times AB}{3} = \frac{5 \times 6}{3} = 10$$

Le théorème des bissectrices se lit dans les deux sens : du partage du côté, on remonte aux côtés voisins.

PIÈGES ANTICIPÉS

`18/5 / 3.6` → Le rapport est dans l'autre sens : AC va avec IC, comme AB avec IB.

EXERCICE 82 · RAISONNEMENT

La bissectrice extérieure

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 5$. La bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe la droite (BC) en un point J. Calculer JB.

Donne la longueur JB.

Réponse attendue : `10`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. D'après le théorème des bissectrices, $\dfrac{JB}{JC} = \dfrac{AB}{AC}$.
2. Comme $AB < AC$, le point J est plus près de B que de C : il est sur la droite (BC), au-delà de B. Donc $JC = JB + BC$.

CORRECTION

Le rapport —

$$\frac{JB}{JC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

La position de J — Le point J est hors du segment $[BC]$, du côté de B.

$$3\,JB = 2\,(JB + 5)$$

La longueur —

$$JB = 10$$

La bissectrice extérieure partage elle aussi le côté opposé dans le rapport des côtés voisins, mais à l'extérieur du segment.

PIÈGES ANTICIPÉS

2 → C'est la distance de B au pied de la bissectrice intérieure : le point J est à l'extérieur du segment $[BC]$.

EXERCICE 83 · BASE

Le rayon du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle tel que $BC = 6$ et $\widehat{A} = 30°$. Calculer le rayon R de son cercle circonscrit.

Donne le rayon R.

Réponse attendue : `6`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le côté divisé par le sinus de l'angle opposé est égal à $2R$.
2. Le sinus de 30 degrés vaut un demi.

CORRECTION

La loi du sinus —

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R$$

Le rayon —

$$2R = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12 \quad ; \quad R = 6$$

Le quotient d'un côté par le sinus de l'angle opposé est le diamètre $2R$ du cercle circonscrit.

PIÈGES ANTICIPÉS

12 → Le quotient $\frac{BC}{\sin \widehat{A}}$ vaut $2R$, le diamètre : divise par deux.

3 → On divise par le sinus, on ne multiplie pas.

EXERCICE 84 · BASE

Un côté et le rayon

Un triangle ABC est inscrit dans un cercle de rayon 5, et $\widehat{A} = 60°$. Calculer BC.

Donne la valeur exacte de BC.

Réponse attendue : `5*sqrt(3)` — aussi acceptées : 5√3 · sqrt(75)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le côté opposé à un angle est égal à $2R$ multiplié par le sinus de cet angle.
2. Le côté opposé à $\widehat{A}$ est $[BC]$.

CORRECTION

La loi du sinus —

$$BC = 2R \sin \widehat{A}$$

Le calcul —

$$BC = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Côté égale diamètre du cercle circonscrit fois sinus de l'angle opposé.

PIÈGES ANTICIPÉS

`5*sqrt(3)/2` → On multiplie le sinus par le diamètre $2R = 10$, pas par le rayon.

`8.66` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 85 · RAISONNEMENT

Le cercle d'un triangle équilatéral

Calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté 9.

Donne la valeur exacte du rayon.

Réponse attendue : `3*sqrt(3)` — aussi acceptées : 3√3 · 9/sqrt(3) · sqrt(27)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les trois angles d'un triangle équilatéral mesurent 60 degrés.
2. Le côté divisé par le sinus de l'angle opposé donne $2R$.

CORRECTION

Le diamètre —

$$2R = \frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

Le rayon —

$R = 3\sqrt{3}$

Pour un triangle équilatéral de côté c, le rayon du cercle circonscrit vaut $\frac{c}{\sqrt{3}}$, soit les deux tiers de la hauteur.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(3)/2` → C'est la hauteur du triangle équilatéral, pas le rayon de son cercle circonscrit.

`6*sqrt(3)` → Le côté divisé par le sinus de 60 degrés donne $2R$: divise encore par deux.

`5.2 / 5.196` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 86 · DEFI

Le périmètre par le cercle circonscrit

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de rayon 2, tel que $\widehat{A} = 45^\circ$ et $\widehat{B} = 60^\circ$. On admet que le sinus de 75 degrés vaut $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Calculer le périmètre de ce triangle.

Donne la valeur exacte du périmètre.

Réponse attendue : `3*sqrt(2)+2*sqrt(3)+sqrt(6)` — aussi acceptées : 3√2+2√3+√6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le troisième angle se déduit des deux autres.
2. D'après la loi du sinus, chaque côté est égal à $2R$ multiplié par le sinus de l'angle opposé.
3. Additionne les trois côtés et regroupe les racines de deux.

CORRECTION

Le troisième angle —

$\widehat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$

Les trois côtés — Ici, $2R = 4$.

$BC = 4\sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$; $AC = 4\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$; $AB = 4\sin 75^\circ = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

Le périmètre —

$2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

Avec le rayon du cercle circonscrit et les trois angles, la loi du sinus donne les trois côtés.

PIÈGES ANTICIPÉS

`(3*sqrt(2)+2*sqrt(3)+sqrt(6))/2` → Chaque côté vaut $2R$ fois le sinus de l'angle opposé : le diamètre, pas le rayon.

`10.16 / 10.156` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 87 · BASE

Deux côtés et l'angle compris

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 10$ et $\widehat{A} = 150°$. Calculer l'aire de ce triangle, sans écrire l'unité.

Donne l'aire, le nombre seul.

Réponse attendue : `15`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. On connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment : l'aire est la moitié de leur produit par le sinus de cet angle.
2. Le sinus de 150 degrés est celui de son supplémentaire, 30 degrés.

CORRECTION

Le sinus —

$$\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

L'aire —

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{1}{2} = 15$$

L'aire d'un triangle est le demi-produit de deux côtés par le sinus de l'angle qu'ils forment, même obtus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`30` → Tu as oublié le un demi de la formule.

`15*sqrt(3)` → C'est avec le sinus de 60 degrés : le sinus de 150 degrés est celui de 30 degrés, un demi.

EXERCICE 88 · DEFI

Le troisième côté d'un triangle d'aire connue

Soit ABC un triangle d'aire 12, tel que $AB = 4$, $AC = 12$ et que l'angle $\widehat{A}$ soit obtus. Calculer BC.

Donne la valeur exacte de BC.

Réponse attendue : `sqrt(160+48*sqrt(3))` — aussi acceptées : 4*sqrt(10+3*sqrt(3)) · √(160+48√3) · 4√(10+3√3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule de l'aire donne le sinus de l'angle $\widehat{A}$.
2. L'angle est obtus : quel est-il, et quel est son cosinus ?
3. Le théorème d'El-Kashi donne alors BC^2.

CORRECTION

Le sinus —

$$12 = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times \sin \widehat{A} \quad ; \quad \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}$$

L'angle obtus —

$\widehat{A} = 150^\circ \quad ; \quad \cos\widehat{A} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

El-Kashi —

$$BC^2 = 16 + 144 - 2 \times 4 \times 12 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 160 + 48\sqrt{3}$$

Le côté —

$BC = \sqrt{160 + 48\sqrt{3}} = 4\sqrt{10 + 3\sqrt{3}}$

L'aire donne le sinus ; il faut encore savoir si l'angle est aigu ou obtus pour avoir le bon cosinus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(160-48*sqrt(3)) / 4*sqrt(10-3*sqrt(3))` → C'est le résultat pour l'angle aigu de 30 degrés : l'énoncé dit que l'angle $\widehat{A}$ est obtus.

`160+48*sqrt(3)` → C'est BC^2 : prends la racine carrée.

`15.59 / 15.593` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 89 · RAISONNEMENT

De l'aire à l'angle, puis au côté

Soit ABC un triangle d'aire $6\sqrt{3}$, tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et que l'angle $\widehat{A}$ soit aigu. Calculer BC.

Donne la valeur exacte de BC.

Réponse attendue : `2*sqrt(7)` — aussi acceptées : 2√7 · sqrt(28)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. La formule de l'aire donne le sinus de l'angle $\widehat{A}$.
2. L'angle est aigu : on en déduit sa mesure, puis le théorème d'El-Kashi donne BC.

CORRECTION

Le sinus —

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin\widehat{A} \quad ; \quad \sin\widehat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'angle — Il est aigu.

$\widehat{A} = 60^\circ$

El-Kashi —

$$BC^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 28 \quad ; \quad BC = 2\sqrt{7}$$

La formule de l'aire se lit à l'envers : elle donne le sinus de l'angle compris entre deux côtés connus.

PIÈGES ANTICIPÉS

`2*sqrt(19)` → C'est le résultat pour l'angle obtus de 120 degrés : ici, l'angle est aigu.

`28` → C'est BC^2 : prends la racine carrée.

`5.29 / 5.292` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 90 · DEFI

La grande diagonale d'un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $\widehat{DAB} = 60°$. Calculer la longueur de la diagonale $[AC]$.

Donne la longueur AC.

Réponse attendue : `7`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Dans le parallélogramme, $BC = AD = 3$, et l'angle $\widehat{ABC}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{DAB}$.
2. Applique le théorème d'El-Kashi dans le triangle ABC, avec l'angle en B.

CORRECTION

L'angle en B — Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.

$\widehat{ABC} = 180° - 60° = 120°$

El-Kashi — Le cosinus de 120 degrés vaut moins un demi.

$AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120° = 25 + 9 + 15 = 49$

La diagonale —

$AC = 7$

La diagonale $[AC]$ fait face à l'angle obtus du triangle ABC : c'est la grande diagonale.

PIÈGES ANTICIPÉS

`sqrt(19)` → C'est la petite diagonale $[BD]$, celle qui fait face à l'angle de 60 degrés.

`49` → C'est AC^2 : prends la racine carrée.

EXERCICE 91 · PRATIQUE

Le plus grand angle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 8$ et $BC = 13$. Calculer la mesure en degrés de son plus grand angle.

Écris seulement le nombre de degrés.

Réponse attendue : `120`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le plus grand angle est opposé au plus grand côté, $[BC]$: c'est l'angle $\widehat{A}$.
2. Le théorème d'El-Kashi donne le cosinus de $\widehat{A}$.

CORRECTION

Le cosinus —

$$\cos \widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC} = \frac{49 + 64 - 169}{112} = -\frac{1}{2}$$

L'angle — Le seul angle de cosinus moins un demi.

$\widehat{A} = 120°$

Quand on connaît les trois côtés, El-Kashi donne le cosinus de chaque angle ; le plus grand angle fait face au plus grand côté.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60` / `60°` → Le cosinus vaut moins un demi : l'angle est obtus, c'est le supplémentaire de 60 degrés.

EXERCICE 92 · RAISONNEMENT

Une aire par El-Kashi

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 7$. Calculer $\cos \widehat{A}$, puis l'aire de ce triangle. Donner l'aire, sans écrire l'unité.

Donne la valeur exacte de l'aire.

Réponse attendue : `4*sqrt(6)` — aussi acceptées : 4√6 · sqrt(96)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le théorème d'El-Kashi donne le cosinus de $\widehat{A}$, l'angle opposé à $[BC]$.
2. La relation fondamentale donne ensuite le sinus, positif.
3. L'aire est le demi-produit de AB et de AC par ce sinus.

CORRECTION

Le cosinus —

$$\cos \widehat{A} = \frac{16 + 25 - 49}{2 \times 4 \times 5} = -\frac{1}{5}$$

Le sinus —

$$(\sin \widehat{A})^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \quad ; \quad \sin \widehat{A} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

L'aire —

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

Des trois côtés à l'aire : El-Kashi donne le cosinus, la relation fondamentale le sinus, puis la formule de l'aire. La formule de Héron donne le même résultat.

PIÈGES ANTICIPÉS

`-1/5` → C'est le cosinus de $\widehat{A}$: la consigne demande l'aire.

`10` → L'aire n'est pas la moitié du produit de deux côtés : il faut multiplier par le sinus de l'angle qu'ils forment.

`9.8` / `9.798` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 93 · DEFI

Deux triangles possibles

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A} = 60°$, $AC = 5$ et $BC = \sqrt{21}$. Déterminer toutes les valeurs possibles de AB.

Écris les valeurs entre accolades, séparées par un point-virgule.

Réponse attendue : `{1;4}` — aussi acceptées : AB=1 ou AB=4 · AB=4 ou AB=1

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris le théorème d'El-Kashi avec l'angle $\widehat{A}$, opposé au côté $[BC]$; l'inconnue est AB.
2. Tu obtiens une équation du second degré : résous-la.

CORRECTION

El-Kashi — On note t la longueur AB.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos 60°$$

L'équation —

$$21 = t^2 + 25 - 5t \quad ; \quad t^2 - 5t + 4 = 0$$

Les solutions — Les deux racines sont positives : deux triangles conviennent.

$$(t-1)(t-4) = 0 \quad ; \quad AB = 1 \quad \text{ou} \quad AB = 4$$

Quand l'inconnue est un côté adjacent à l'angle connu, El-Kashi donne une équation du second degré, qui peut avoir deux solutions.

PIÈGES ANTICIPÉS

`{4}` / `4` / `{1}` / `1` → Les deux racines sont positives : il y a deux triangles possibles, avec $AB = 1$ et avec $AB = 4$.

EXERCICE 94 · DEFI

La longueur d'une médiane

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$, et M le milieu de $[BC]$. Calculer la longueur de la médiane $[AM]$.

Donne la valeur exacte de AM.

Réponse attendue : `sqrt(14)` — aussi acceptées : √14

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule d'abord $\cos \widehat{B}$ avec le théorème d'El-Kashi dans le triangle ABC.
2. Applique-le de nouveau dans le triangle ABM, où $BM = 6$.

CORRECTION

L'angle en B —

$$\cos \widehat{B} = \frac{36 + 144 - 64}{2 \times 6 \times 12} = \frac{116}{144} = \frac{29}{36}$$

Le triangle ABM —

$$AM^2 = 36 + 36 - 2 \times 6 \times 6 \times \frac{29}{36} = 72 - 58 = 14$$

La médiane —

$$AM = \sqrt{14}$$

Le même angle appartient à deux triangles : El-Kashi dans l'un donne son cosinus, El-Kashi dans l'autre donne la longueur cherchée.

PIÈGES ANTICIPÉS

`7` → Une médiane n'est pas la moyenne des deux côtés : il faut passer par un angle du triangle.

`14` → C'est AM^2 : prends la racine carrée.

`3.74 / 3.742` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 95 · PRATIQUE

L'aire d'un quadrilatère

Les diagonales d'un quadrilatère convexe $ABCD$ mesurent $AC = 10$ et $BD = 7$, et forment un angle de $30°$. Calculer l'aire de $ABCD$, sans écrire l'unité.

Donne l'aire, le nombre seul.

Réponse attendue : `35/2` — aussi acceptées : 17.5

INDICES, DANS L'ORDRE

1. L'aire d'un quadrilatère est la moitié du produit de ses diagonales par le sinus de l'angle qu'elles forment.
2. Le sinus de 30 degrés vaut un demi.

CORRECTION

La formule —

$$\text{aire}(ABCD) = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin 30°$$

Le calcul —

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 7 \times \frac{1}{2} = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

Les quatre triangles découpés par les diagonales ont tous le même sinus en leur sommet commun : d'où la formule.

PIÈGES ANTICIPÉS

`35` → On prend la moitié du produit des diagonales par le sinus : tu as oublié le un demi.

`35*sqrt(3)/2` → C'est avec le cosinus de 30 degrés : la formule utilise le sinus.

EXERCICE 96 · RAISONNEMENT

L'angle des diagonales

Un quadrilatère convexe a pour aire 24, et ses diagonales mesurent 8 et 12. Calculer, en degrés, l'angle aigu formé par ses diagonales.

Écris seulement le nombre de degrés.

Réponse attendue : `30`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Écris la formule de l'aire avec l'angle des diagonales comme inconnue.
2. Tu obtiens le sinus de cet angle : quel angle aigu a ce sinus ?

CORRECTION

La formule — On note α l'angle aigu des diagonales.

$$24 = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin\alpha = 48\sin\alpha$$

L'angle —

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \quad ; \quad \alpha = 30°$$

Les diagonales forment deux angles supplémentaires, de même sinus : la formule de l'aire ne les distingue pas.

PIÈGES ANTICIPÉS

`60 / 60°` → Le sinus de l'angle vaut un demi : c'est l'angle de 30 degrés, pas celui de 60.

`150 / 150°` → C'est l'angle obtus formé par les diagonales : on demande l'angle aigu.

EXERCICE 97 · RAISONNEMENT

L'angle au sommet E

Soit $ABCD$ un carré et EBC un triangle équilatéral construit à l'intérieur du carré. Calculer, en degrés, l'angle $\widehat{AED}$.

Écris seulement le nombre de degrés.

Réponse attendue : `150`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le triangle ABE est isocèle en B : calcule l'angle $\widehat{ABE}$, puis l'angle $\widehat{BAE}$.
2. Déduis-en l'angle $\widehat{DAE}$. Le point E est sur la médiatrice de $[AD]$: le triangle AED est isocèle en E.

CORRECTION

Le triangle ABE — $BA = BC = BE$: il est isocèle en B.

$$\widehat{ABE} = 90° - 60° = 30° \quad ; \quad \widehat{BAE} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$

L'angle en A —

$$\widehat{DAE} = 90° - 75° = 15°$$

Le triangle AED — Il est isocèle en E.

$$\widehat{AED} = 180° - 2 \times 15° = 150°$$

Dans une figure où se cachent des triangles isocèles, on avance angle par angle avec la somme des angles d'un triangle.

PIÈGES ANTICIPÉS

`75` → C'est l'angle $\widehat{BAE}$: poursuis dans le triangle AED.

`30` → C'est l'angle $\widehat{ABE}$: l'angle cherché est en E, dans le triangle AED.

EXERCICE 98 · DEFI

L'aire du triangle AED

Soit $ABCD$ un carré de côté 6 et EBC un triangle équilatéral construit à l'intérieur du carré. Calculer l'aire du triangle AED, sans écrire l'unité.

Donne la valeur exacte de l'aire, le nombre seul.

Réponse attendue : `18-9*sqrt(3)` — aussi acceptées : 9*(2-sqrt(3)) · 18-9√3 · 9(2-√3)

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Prends $[AD]$ pour base : il faut la distance de E à la droite (AD).
2. La hauteur du triangle équilatéral EBC donne la distance de E à la droite (BC).
3. La distance de E à (AD) est le côté du carré moins cette hauteur.

CORRECTION

La hauteur de EBC — La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 6 est $6\sin 60°$.

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

La distance de E à (AD) — Les droites (AD) et (BC) sont distantes de 6.

$$6 - 3\sqrt{3}$$

L'aire —

$$\text{aire}(AED) = \frac{1}{2} \times 6 \times \left(6 - 3\sqrt{3}\right) = 18 - 9\sqrt{3}$$

On vérifie avec la formule de l'aire : $\widehat{AED} = 150°$ et $AE^2 = 72 - 36\sqrt{3}$, donc $\frac{1}{2} \times AE^2 \times \sin 150° = 18 - 9\sqrt{3}$.

PIÈGES ANTICIPÉS

`9*sqrt(3)` → Tu as pris la hauteur de EBC comme hauteur de AED : la distance de E à (AD) est $6 - 3\sqrt{3}$.

`9` → C'est l'aire du triangle ABE, $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 30°$: la question porte sur AED.

`36-18*sqrt(3)` → Tu as oublié la moitié : l'aire d'un triangle est la moitié de la base par la hauteur.

`2.41` / `2.412` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

EXERCICE 99 · BASE

Quel cas d'isométrie ?

Deux triangles ABC et DEF vérifient $AB = DE$, $AC = DF$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$: ils sont isométriques. Préciser le numéro du cas d'isométrie du cours qui permet de l'affirmer.

Écris seulement le numéro du cas : 1, 2 ou 3.

Réponse attendue : 2

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Compte ce que l'on connaît : des côtés, des angles ?
2. L'angle égal est-il compris entre les deux côtés égaux ?

CORRECTION

Les données — Deux côtés égaux, $[AB]$ et $[DE]$, $[AC]$ et $[DF]$, et l'angle qu'ils forment, en A et en D.

Le cas — Un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux.

2^{e} cas d'isométrie

Avec El-Kashi, deux côtés et l'angle qu'ils forment donnent le troisième côté : $BC = EF$.

PIÈGES ANTICIPÉS

1 → Le premier cas porte sur un côté compris entre deux angles : ici, on connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment.

3 → Le troisième cas demande les trois côtés : ici, on ne connaît pas BC et EF.

EXERCICE 100 · RAISONNEMENT

Deux hauteurs égales

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 10$ et $BC = 12$. On désigne par $[BH]$ et $[CK]$ les hauteurs issues de B et de C. Calculer CK.

Donne la longueur CK.

Réponse attendue : 48/5 — aussi acceptées : 9.6

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Calcule l'aire du triangle avec la hauteur issue de A : elle tombe au milieu de $[BC]$.
2. La même aire s'écrit aussi avec la base $[AB]$ et la hauteur $[CK]$.
3. Les triangles BHC et CKB sont isométriques : $BH = CK$.

CORRECTION

La hauteur issue de A — Elle coupe $[BC]$ en son milieu.

$\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

L'aire —

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$$

La hauteur CK — Elle est relative au côté $[AB]$.

$$CK = \frac{2S}{AB} = \frac{96}{10} = 9{,}6$$

Les triangles BHC et CKB ont le côté $[BC]$ commun compris entre deux angles égaux : ils sont isométriques, et $BH = CK$.

PIÈGES ANTICIPÉS

8 → C'est la hauteur issue de A : $[CK]$ est la hauteur relative au côté $[AB]$.

24/5 / 4.8 → Une hauteur est le double de l'aire divisé par la base : n'oublie pas le facteur deux.

EXERCICE 101 · PRATIQUE

Un triangle agrandi

Les côtés d'un triangle mesurent 4, 5 et 6. Un triangle semblable à celui-ci a pour périmètre 45. Calculer la longueur de son plus grand côté.

Donne la longueur du plus grand côté.

Réponse attendue : 18

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les côtés de deux triangles semblables sont proportionnels : leurs périmètres aussi.
2. Le premier triangle a pour périmètre 15 : quel est le rapport de similitude ?

CORRECTION

Le rapport —

$$\frac{45}{4+5+6} = \frac{45}{15} = 3$$

Le plus grand côté — On multiplie le plus grand côté du premier triangle.

$$6 \times 3 = 18$$

Le rapport de similitude multiplie toutes les longueurs, donc aussi le périmètre.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → On ne partage pas le périmètre en trois parts égales : le rapport de similitude est $\frac{45}{15} = 3$, et l'on multiplie le plus grand côté, 6.

EXERCICE 102 · RAISONNEMENT

Deux triangles semblables dans un triangle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$ et $AC = 9$. Soit M le point du segment $[AB]$ tel que $AM = 3$, et N un point du segment $[AC]$ tel que $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$. Calculer AN.

Donne la longueur AN.

Réponse attendue : 4

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les triangles AMN et ACB ont l'angle en A en commun et un deuxième angle égal : ils sont semblables.
2. Fais correspondre les sommets : A avec A, N avec B, M avec C. Les côtés homologues sont proportionnels.

CORRECTION

Deux angles égaux —

$$\widehat{MAN} = \widehat{CAB} \quad ; \quad \widehat{ANM} = \widehat{ABC}$$

Les côtés homologues — Le côté $[AN]$ correspond à $[AB]$, et le côté $[AM]$ à $[AC]$.

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$$

Le calcul —

$$AN = \frac{AM \times AB}{AC} = \frac{3 \times 12}{9} = 4$$

Pour des triangles semblables, on associe d'abord les sommets d'angles égaux : les côtés homologues sont ceux qui leur font face.

PIÈGES ANTICIPÉS

9/4 / 2.25 → Tu as associé $[AN]$ à $[AC]$ comme si (MN) était parallèle à (BC) : ici, l'angle en N est égal à l'angle en B, donc N correspond à B.

EXERCICE 103 · DEFI

Les côtés d'après la hauteur et l'hypoténuse

Soit ABC un triangle rectangle en A, avec $AB > AC$, dont l'hypoténuse mesure $BC = 25$ et la hauteur $[AH]$ mesure 12. Calculer AB.

Donne la longueur AB.

Réponse attendue : `20`

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Les longueurs HB et HC ont pour somme 25, et pour produit $AH^2 = 144$.
2. Ce sont les racines d'une équation du second degré. Le plus grand côté de l'angle droit correspond au plus grand des deux segments.
3. Termine avec $AB^2 = BH \times BC$.

CORRECTION

Somme et produit —

$$HB + HC = 25 \quad ; \quad HB \times HC = 144$$

L'équation —

$$t^2 - 25t + 144 = 0 \quad ; \quad (t-9)(t-16) = 0$$

Le bon segment — Comme $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times CB$, le plus grand côté va avec le plus grand segment.

$$HB = 16 \quad ; \quad HC = 9$$

Le côté —

$$AB^2 = 16 \times 25 = 400 \quad ; \quad AB = 20$$

Les relations métriques se combinent : $AH^2 = HB \times HC$ donne les deux segments, $AB^2 = BH \times BC$ donne le côté.

PIÈGES ANTICIPÉS

15 → C'est AC, le plus petit côté de l'angle droit.

16 → C'est HB : il reste à utiliser $AB^2 = BH \times BC$.

EXERCICE 104 · BASE

Héron avec des entiers

Calculer, avec la formule de Héron, l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 9, 10 et 17, sans écrire l'unité.

Donne l'aire, le nombre seul.

AH Maths à la carte ABDELKADER HAMMAMI

Réponse attendue : 36

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Commence par le demi-périmètre.
2. Retire chaque côté au demi-périmètre, multiplie les quatre nombres, puis prends la racine carrée.

CORRECTION

Le demi-périmètre —

$$p = \frac{9 + 10 + 17}{2} = 18$$

Les écarts —

$$p - 9 = 9 \quad ; \quad p - 10 = 8 \quad ; \quad p - 17 = 1$$

La formule —

$$S = \sqrt{18 \times 9 \times 8 \times 1} = \sqrt{1296} = 36$$

La formule de Héron donne l'aire à partir des trois côtés seulement, sans aucun angle.

PIÈGES ANTICIPÉS

1296 → C'est le carré de l'aire : prends la racine carrée.

EXERCICE 105 · DEFI

Le rayon par Héron

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 25$ et $BC = 14$. Calculer son aire avec la formule de Héron, puis le rayon R de son cercle circonscrit. Donner R.

Donne la valeur exacte de R, sous la forme d'une fraction irréductible.

Réponse attendue : 625/48

INDICES, DANS L'ORDRE

1. Le demi-périmètre vaut 32 : applique la formule de Héron.
2. L'aire s'écrit aussi $S = \dfrac{abc}{4R}$, avec les trois côtés : déduis-en R.

CORRECTION

L'aire —

$$S = \sqrt{32 \times 7 \times 7 \times 18} = \sqrt{28224} = 168$$

Le rayon —

$$R = \frac{AB \times AC \times BC}{4S} = \frac{25 \times 25 \times 14}{4 \times 168} = \frac{8750}{672} = \frac{625}{48}$$

Héron donne l'aire à partir des côtés ; la formule $S = \dfrac{abc}{4R}$ relie ensuite l'aire au cercle circonscrit.

PIÈGES ANTICIPÉS

625/24 → La formule est $S = \dfrac{abc}{4R}$: on divise le produit des côtés par $4S$, pas par $2S$.

168 → C'est l'aire : il reste à calculer le rayon.

`13.02 / 13.021` → C'est une valeur approchée : la consigne demande la valeur exacte.

AH
Maths à la carte
ABDELKADER HAMMAMI